

Estudio de la dinámica en rotores flexibles isotrópicos con soportes que presentan un comportamiento anisotrópico por medio de la modelación numérica

Darwin Beleño Guillen

Ricardo Antonio Ruíz Rodríguez

Trabajo de Grado para Optar al Título de Ingeniero Mecánico

Director

Héller Guillermo Sánchez Acevedo

Ingeniero Mecánico, Ph D.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas

Escuela de Ingeniería Mecánica

Bucaramanga

2023

Dedicatoria

A Dios, creador todo poderoso del universo, que me dio el regalo de la sabiduría, por el milagro de la vida, darnos las capacidades, el entendimiento, por poner en nuestro camino a las personas que brindaron su ayuda y permitir que pudiéramos afrontar y salir victoriosos en cada reto que se nos presentó en el desarrollo del proyecto de grado.

Darwin Beleño Guillen

Dedico este logro a mi madre querida Omayra Guillen Caballero, a mis hermanas y hermanos que han sido incondicional el proceso, también a mi abuela Olinda Caballero Zabaleta quien fue fundamental en mi crianza, pero hoy no se encuentra en este mundo terrenal. Gracias a ellos he podido afrontar todas las dificultades que se me han presentado además la darne la gran oportunidad de ingresar a la Universidad.

Ricardo Antonio Ruíz Rodríguez

Quiero dedicar este logro a mi padre Miguel Antonio Ruiz Prada y a mi madre Mónica Rodríguez González por su sacrificio, apoyo incondicional, sabiduría, consejos, amor y la paciencia que me han brindado durante toda mi carrera.

Agradecimientos

Los autores expresan sus agradecimientos a:

La Universidad Industrial de Santander por los recursos físicos y humanos aportados para el desarrollo de este proyecto.

Expresamos nuestra profunda gratitud a nuestro director Héller Guillermo Sánchez Acevedo Ingeniero Mecánico, Ph D, por su ayuda al orientarnos en nuestra carrera y apoyo en la tesis.

Expresamos nuestra gratitud a los docentes encargados de guiarnos, forjarnos, encaminarnos y formar nuestras bases para llegar al logro de ser excelentes Ingenieros mecánicos de la aclamada Universidad Industrial de Santander.

También Expresamos nuestra profunda gratitud a Brian Farid Morales Hernández, por su ayuda, por su paciente orientación, su entusiasta aliento y sus críticas constructivas, sus ideas, el tiempo dedicado a este trabajo de investigación, por sus consejos y ayuda para mantener el progreso de la tesis a pesar de todas las dificultades que se presentaron.

Nos gustaría resaltar a aquellas personas, amigos, familiares y compañeros que intervinieron en este proceso de cursar la carrera de Ingeniería Mecánica, extendiéndonos su apoyo cuando más lo necesitábamos.

Contenido

Introducción	15
1. Objetivos	19
1.1 Objetivo General.....	19
1.2 Objetivos Específicos.	19
2. Marco teórico	20
2.1 Dinámica de rotores.	20
2.2 Rotodinámica.	20
2.3 Rotores.....	20
2.4 Rotor Jeffcott	21
2.5 Cojinetes hidrodinámicos	22
2.6 Isotropía y Anisotropía	22
2.7 Velocidad critica	22
2.7.1 Inestabilidad rotodinámica.....	23
2.8 Vibraciones presentes en turbomáquinas.....	23
2.9 Análisis de vibraciones	25
2.10Turbomáquina.....	25
2.11Fallas en turbomáquina.....	26
2.12Método de elementos finitos.....	26
2.13Normativa	26
3. Diseño metodológico	28
3.1 Recopilación de bibliografía y establecimiento de requerimientos y restricciones.....	28
3.2 Desarrollo del modelo matemático	29

3.2.1 Planteamiento numérico del rotor flexible por medio del método Jeffcott	29
3.2.2 Planteamiento matricial del disco	29
3.2.3 Planteamiento matricial de los soportes.....	29
3.3 Ensamble matricial	30
3.4 Calibración del Modelo matemático por medio de pruebas experimentales en un banco de laboratorio.	30
3.5 Implementación del modelo numérico del rotor flexible tipo Jeffcott	30
4. Equipos y materiales	32
4.1 Banco de ensayos.....	32
5. Modelo teórico y experimental	35
5.1 Modelo teórico.....	35
5.1.1 Matrices del modelo numérico rotor flexible Jeffcott.....	35
5.1.1.1 Matrices de los elementos.....	37
5.1.1.2 Ensamble matricial.....	38
5.1.1.3 Matrices de los elementos adyacentes al motor.....	39
5.2 Modelo físico o experimental	40
5.2.1 Condiciones operativas del banco de ensayos	40
5.2.1.1 Proceso de datos.....	40
6. Cálculos y resultados.....	41
6.1 Diseño de cojinete hidrodinámico	41
6.1.1 Consideraciones de diseño.....	42
6.2 Condiciones de apoyo, eje y lubricante	44
6.2.1 Propiedades del aceite y geometría del apoyo	45

6.3 Características de los apoyos	46
6.3.1 Numero de Sommerfeld.....	46
6.3.2 Excentricidad del muñón respecto del apoyo	48
6.3.3 Espesor mínimo de película de lubricante.	50
6.3.4 Rigidez del sistema y apoyos.....	52
6.3.5 Amortiguamiento de los apoyos	58
6.3.6 Velocidades críticas.	61
6.4 Resultados del modelo experimental y teórico.....	63
6.4.1 obtención de datos modelo experimental.....	63
6.4.2 Obtención de datos modelo Teórico	66
6.4.2.1 Diagrama de Campbell	66
6.4.2.2 Diagrama de estabilidad.....	67
6.5 Comparación.....	69
6.5.1 Criterio de garantía modal (MAC).....	69
6.5.1.1 Casos de uso de garantía modal.....	70
6.5.1.1 Ecuación del criterio de garantía modal (MAC).....	71
6.5.2 Método de comparación.....	71
7. Conclusiones	73
8. Recomendaciones.....	74
Referencias Bibliográficas	75
Apéndices.....	79

Lista de Tablas

Tabla 1. <i>Normas empleadas en análisis de vibraciones.</i>	26
Tabla 2. <i>Normativa de Desbalanceo en máquina rotativa</i>	27
Tabla 3. <i>Equipos y materiales</i>	33
Tabla 4. <i>Geometría de los cojinetes hidrodinámicos</i>	45
Tabla 5. <i>Propiedades químicas del aceite de lubricación del cojinete TP ISO 68</i>	45
Tabla 6. <i>Carga soportada por los apoyos.</i>	46
Tabla 7. <i>Datos del eje.</i>	79
Tabla 8. <i>Datos del disco</i>	79
Tabla 9. <i>Datos del piñón de transmisión.</i>	79
Tabla 10. <i>Datos del acople.</i>	80
Tabla 11. <i>Datos del cojinete.</i>	80
Tabla 12. <i>Variación de las velocidades críticas según diámetro de eje.</i>	98
Tabla 13. <i>Comportamiento de las velocidades críticas variando el diámetro interno del eje.</i>	98
Tabla 14. <i>Comportamiento de las velocidades críticas variando la viscosidad del aceite.</i>	98
Tabla 15. <i>Comportamiento de las velocidades críticas variando el tipo de acero</i>	99

Lista de Figuras

Figura 1 <i>Ruedas Esquema rotor Jeffcott</i>	21
Figura 2 <i>Ruedas Esquema básico de un rotor Jeffcott</i>	22
Figura 3. <i>Modos de vibración del rotor</i>	24
Figura 4. <i>Turbomáquina</i>	25
Figura 5. <i>Banco de ensayos</i>	32
Figura 6. <i>Esquema de cada elemento involucrado en el modelo matemático</i>	36
Figura 7. <i>Esquema de cada elemento de estudio (MEF)</i>	37
Figura 8. <i>Esquema del ensamble global de las matrices de cada elemento finito del eje</i>	39
Figura 9. <i>Diagrama polar de la distribución de la presión de la película</i>	41
Figura 10. <i>Gráfica de la variable de relación mínimo de la película y excentricidad</i>	43
Figura 11. <i>Comportamiento del número de Sommerfeld en el apoyo 1, S1 y del apoyo 2, S2</i> ...	47
Figura 12. <i>Comportamiento del número de Sommerfeld variando viscosidad del aceite</i>	47
Figura 13. <i>Comportamiento del número de Sommerfeld variando la carga</i>	48
Figura 14. <i>Excentricidad del muñón respecto del cojinete en el apoyo 1, e1 y del apoyo 2, e2</i> ..	49
Figura 15. <i>Excentricidad variando la viscosidad del aceite</i>	49
Figura 16. <i>Excentricidad variando la viscosidad la carga</i>	50
Figura 17. <i>Espesor mínimo de película de aceite en el apoyo 1, h01 y del apoyo 2, h02</i>	51
Figura 18. <i>Espesor mínimo de película de aceite</i>	51
Figura 19. <i>Espesor mínimo de película de aceite</i>	52
Figura 20. <i>Modos del rotor</i>	53
Figura 21. <i>Rigidez en X en condiciones operativas de laboratorio</i>	54

Figura 22. Rigidez en X variando la viscosidad del aceite.	55
Figura 23. Rigidez en Y en condiciones operativas de laboratorio.	55
Figura 24. Rigidez en Y variando viscosidad del aceite apoyo 1.....	56
Figura 25. Rigidez en Y variando viscosidad del aceite apoyo 2.....	56
Figura 26. Rigidez en el plano XY.....	57
Figura 27. Rigidez en el plano YX.....	57
Figura 28. Amortiguamiento en X.....	58
Figura 29. Amortiguamiento en Y.....	59
Figura 30. Amortiguamiento en los planos XY y YX.....	59
Figura 31. Amortiguamiento en los planos XY y YX.....	60
Figura 32. Variación de las 2 primeras velocidades críticas BW y FW.....	61
Figura 33. Velocidades críticas BW y FW variando el diámetro interno del eje.....	62
Figura 34. Velocidades críticas BW y FW variando el material del eje.....	62
Figura 35. Velocidades críticas BW y FW variando el lubricante.....	63
Figura 36. Sensores de desplazamiento instalados en el banco de ensayos.....	64
Figura 37. Datos experimentales obtenidos del banco de ensayos.....	65
Figura 38. Datos experimentales obtenidos del banco de ensayos ajustados.....	65
Figura 39. Diagrama de Campbell.....	66
Figura 40. Diagrama de Estabilidad.....	68
Figura 41. Comportamiento de la rigidez del apoyo 1 en el plano XY variando el tipo de aceite.	88
Figura 42. Comportamiento de la rigidez del apoyo 2 en el plano XY variando el tipo de aceite.	89

Figura 43. <i>Comportamiento de la rigidez del apoyo 1 en el plano YX variando el tipo de aceite.</i>	90
Figura 44. <i>Comportamiento de la rigidez del apoyo 2 en el plano YX variando el tipo de aceite.</i>	91
Figura 45. <i>Comportamiento del amortiguamiento del apoyo 1 en dirección X variando el tipo de aceite.</i>	92
Figura 46. <i>Comportamiento del amortiguamiento del apoyo 2 en dirección X variando el tipo de aceite.</i>	93
Figura 47. <i>Comportamiento del amortiguamiento del apoyo 1 en dirección Y variando el tipo de aceite.</i>	94
Figura 48. <i>Comportamiento del amortiguamiento del apoyo 2 en dirección Y variando el tipo de aceite.</i>	95
Figura 49. <i>Comportamiento del amortiguamiento del apoyo 1 en dirección XY, YX variando el tipo de aceite.</i>	96
Figura 50. <i>Comportamiento del amortiguamiento del apoyo 2 en dirección XY, YX variando el tipo de aceite.</i>	97

Apéndices

Apéndice A. Geometría y datos de los elementos del sistema	79
Apéndice B. Matrices de los elementos finitos del eje y de los accesorios	81
Apéndice C. Definición inicial de las matrices globales.	87
Apéndice D. Grafica del comportamiento de la rigidez de los cojinetes hidrodinámicos.	88
Apéndice E. Factores que afectan las velocidades críticas del sistema en estudio	98
Apéndice F. Modelo matemático	100

Glosario

Amortiguación: Capacidad de los cuerpos en transformar o disipar la energía cinética.

Anisotropía: Característica relacionada con la dependencia de sus propiedades con respecto a sus ejes, es decir, en el plano X , Y y Z sus propiedades son diferentes respectivamente.

Efecto giroscópico: Relacionado con la estabilidad, tiende a mantener la orientación original del movimiento, dividiendo uniformemente las fuerzas externas.

Funciones de disipación de Rayleigh: Usadas comúnmente para describir los efectos disipativos debido a la fricción y viscosidad en sistemas no conservativos.

Inercia rotativa: Conocido como el momento de inercia, es una propiedad que representa la resistencia al cambio de velocidad

Isotropía: Característica relacionada con la independencia de sus propiedades con respecto a sus ejes, es decir, en el plano X , Y y Z sus propiedades son idénticas.

Mantenimiento predictivo: Mantenimiento capaz de detectar tendencias de operación con ayuda de herramientas y un correcto análisis de información.

Modelo matemático: Conjunto de operaciones matemáticas que simplifican un fenómeno real.

Modo de vibrar: Forma característica de vibrar de un sistema y dependiendo de su excitación pueden estar conformados por una combinación o una mezcla de los modos de vibrar.

Número de Sommerfeld: Coeficiente adimensional utilizado en el diseño de cojinetes.

Teoría de vigas Timoshenko: Modelo matemático basado en la vibración transversal de vigas añadiendo el efecto de la deformación de corte a la teoría clásica de vigas.

Viscosidad: Propiedad física de los fluidos relacionada con la resistencia a fluir.

Resumen

Título: Estudio de la dinámica en rotores flexibles isotrópicos con soportes que presentan un comportamiento anisotrópico por medio de la modelación numérica *

Autor: Ricardo Antonio Ruíz Rodríguez, Darwin Beleño Guillen **

Palabras Clave: Elementos finitos, rotor flexible, cojinete hidrodinámico, rotor Jeffcott, isotropía, anisotropía, número de Sommerfeld y excentricidad.

Resumen: En este trabajo de fin de carrera de ingeniería mecánica se propone modelar mediante elementos finitos (FEM) la dinámica de rotores flexibles soportados sobre cojinetes hidrodinámicos mediante el caso del rotor Jeffcott, comparándolo analíticamente con datos obtenidos en laboratorio. Un requisito para tener en cuenta en el sistema rotor flexible-cojinete hidrodinámico es el diseño del soporte donde se requiere hallar variables como el número de Sommerfeld, excentricidad y el espesor de película de aceite. Estas variables dependen de la carga como de la dimensión del apoyo y definen el comportamiento de las frecuencias y amortiguamiento del sistema. En el modelado numérico y análisis experimental se analiza la respuesta vibratoria y armónica del conjunto rotor-apoyos mediante un diagrama de Campbell para diferentes valores de velocidades de giro del rotor.

La modelación numérica de elementos finitos se desarrolló y ejecuto en el lenguaje de programación MATLAB, donde se ingresaron las ecuaciones, matrices y algoritmos para obtener la respuesta teórica de la dinámica del rotor. Por otra parte, en el análisis experimental se obtuvo un banco de pruebas donde inicialmente se realizaron modificaciones del sistema de lubricación, también se realizó alineación del rotor con el motor y por último se calibro y ajusto las respuestas vibratorias y armónicas mediante sensores y el programa OROS OR35.

El estudio de los rotores flexibles apoyados es cojinetes hidrodinámicos es importante ya que estos son utilizados en las turbomáquinas que las podemos encontrar en sistemas de producción de energía como hidroeléctricas. Al ser componentes que soportan grandes cargas a altas velocidades, estas máquinas se ven afectadas principalmente por vibraciones y las consecuencias van desde pérdidas de vidas, afectaciones al medio ambiente y pérdidas económicas.

Es por esto por lo que se hace necesario poder estimar o predecir el comportamiento del sistema rotor-apoyos y realizar mantenimiento antes de que ocurra o se presente la falla.

* Trabajo de grado.

** Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director: Héller Guillermo Sánchez Acevedo. Ingeniero Mecánico, Ph D.

Abstract

Title: Study of the dynamics in isotropic flexible rotors with supports that present an anisotropic behavior through numerical modeling *

Author(s): Ricardo Antonio Ruíz Rodríguez, Darwin Beleño Guillen **

Key Words: Finite elements, flexible rotor, hydrodynamic bearing, Jeffcott rotor, isotropy, anisotropy, Sommerfeld number and eccentricity.

Abstract: In this mechanical engineering thesis is proposed to model by finite elements (FEM) the dynamics of flexible rotors supported on hydrodynamic bearings through the case of the Jeffcott rotor, comparing it analytically with data obtained in the laboratory. A requirement to take into account in the flexible rotor-hydrodynamic bearing system is the design of the support where it is needed to find variables such as the Sommerfeld number, eccentricity, and the oil film thickness. These variables depend on the load as the dimension of the support and define the behavior of the frequencies and damping of the system. In numerical modeling and experimental analysis, the vibratory and harmonic response of the rotor-support assembly is analyzed using a Campbell diagram for different values of rotor rotation speeds.

The finite element numerical modeling was developed and executed in MATLAB programming language, where the equations, matrices, and algorithms were entered to obtain the theoretical answer of rotor dynamics. The experimental analysis was obtained from a test bench where initially modifications of the lubrication system were made, also the rotor was aligned with the motor, and finally the vibratory and harmonic responses were calibrated and adjusted by sensors and the OROS OR35 program.

The study of flexible rotors supported by hydrodynamic bearings is important since these are used in turbomachinery that can be found in energy production systems such as hydroelectric power plants. These components support large loads at high speeds, so they are mainly affected by vibrations that can lead to consequences such as loss of lives, effects on the environment and economic losses.

This is why it is necessary to be able to estimate or predict the behavior of the rotor-support system and perform maintenance before the failures occurs or occurs.

* Graduation thesis

** School of Physicomechanical Engineering, School of Mechanical Engineering. Director: Héller Guillermo Sánchez Acevedo. Mechanical Engineer, Ph D.

Introducción

En el surgimiento de las energías limpias, la industria energética ha comenzado a tener un crecimiento exponencial, convirtiéndose así en la clave para el desarrollo económico y ambiental en estos últimos años. Países como Colombia, con un gran potencial energético gracias a sus afluentes y a las empresas que explotan esta riqueza con equipos potentes y de gran tamaño llamadas comúnmente turbomáquinas, hace que sea de gran importancia el uso de herramientas computacionales que realicen modelos predictivos de mantenimiento con el fin de reducir las pérdidas económicas y evitar accidentes catastróficos donde la integridad de la maquina se ve comprometida o en el peor de los casos vidas humanas.

De acuerdo con CASTAÑEDA, C. L., las vibraciones son la mejor indicación de la condición mecánica de una maquinaria y pueden ser una herramienta de predicción muy sensible de la evolución de un defecto. El aumento en el nivel de vibraciones es una indicación de que la máquina se encamina hacia algún tipo de falla, ya que cerca del 90% de las fallas en maquinarias están precedidas por un cambio en las vibraciones de estas.

El desarrollo del modelo numérico del rotor teniendo en cuenta varios factores como las vibraciones mecánicas y la dinámica de sus componentes, en especial la rotodinámica, la cual determina las velocidades críticas de funcionamiento y los modos de vibrar, donde los soportes y el rotor son las principales piezas afectadas por las vibraciones, busca ampliar las investigaciones sobre los efectos vibratorios que se producen, enfocado en la isotropía del rotor y la anisotropía de los soportes realizando un modelo matemático por medio de la teoría de elementos finitos aplicando el modelo Jeffcott.

Las turbomáquinas son máquinas rotativas de gran tamaño y son muy usadas en la industria (turbinas, bombas, compresores, etc.), y dependiendo de la aplicación, someten al rotor a unas vibraciones que son ocasionadas por las altas velocidades o por potencias elevadas de trabajo. Existen vibraciones axiales, torsionales y laterales. Entre estas, las vibraciones laterales son altamente influenciadas por el desbalanceo del rotor.

Las vibraciones presentes por desbalanceo o vibraciones laterales presentes en el rotor caracterizado como flexible deben ser tenidas en cuenta ya que estas le reducen la vida útil de la máquina. LÉMOLI, M. & AHUMADA, D afirman:

“La presencia de un desbalance en el rotor provocará la aplicación de una fuerza centrífuga, la que es proporcional a la velocidad de giro. Si la fuerza es de magnitud considerable, se reduce la vida útil de los rodamientos y/o cojinetes hidrodinámicos, lo que a su vez incide en el aumento adicional de la vibración.”

Por otra parte, cuando se habla de los rotores y apoyos de turbomáquinas se debe tener en cuenta el fenómeno de la resonancia, condición donde la frecuencia vibrante es igual a la frecuencia natural de la maquinaria. Se debe tener en cuenta que, según VOGEL, E.:

“Un hecho menos conocido es que las estructuras de apoyo y los componentes de máquinas resonantes pueden amplificar incluso pequeños problemas de vibración lo suficiente como para dañar el equipo conectado o provocar un fallo catastrófico de la maquinaria. Para resolver un problema de vibraciones rápidamente y evitar estos efectos no deseados, un primer paso importante es determinar si la fuente del aumento de vibración es la resonancia en el equipo en giro o en una estructura de apoyo.”

En cuanto que RAMÍREZ, V. I., PALACIOS, P. L. & CORRO, H. H. afirman que:

“La mayoría de los estudios en la dinámica de rotores son realizados con soportes isotrópicos. Sin embargo, la mayoría de los rotores tienen soportes con cierto grado de anisotropía”

Por lo tanto, es necesario ampliar los estudios en rotores flexibles con enfoque a los soportes anisotrópicos como es el caso de los cojinetes hidrodinámicos.

Los grandes costos que ocurren por fallos o paradas de la turbomáquina generan la necesidad de crear investigaciones asociadas a la anisotropía de los apoyos que permitan prevenir y predecir estos problemas para evitar pérdidas.

Del mismo modo, en el estudio de la ingeniería ha cobrado mucha importancia la implementación de programas para el desarrollo de modelos y simulaciones como una herramienta indispensable para predecir el comportamiento de los componentes de las máquinas que permitan resolver problemas científicos y tecnológicos. El uso de estas herramientas computacionales tiene sus ventajas y desventajas. Unas de sus ventajas es la referente a la optimización, la implementación de simulaciones de bajo costo y la cuantificación de los resultados en sus ensayos simulados. Por otro lado, unas de sus desventajas es que la simulación o modelación del sistema requiere de una evaluación experimental para comparar los resultados y poder utilizar el programa a escala o en campo.

El presente proyecto de investigación pretende desarrollar una herramienta de uso didáctico, en el ámbito de vibraciones mecánicas tipo software, que permita construir las bases sobre la respuesta dinámica de los rotores, generalmente de turbomáquinas (turbinas, bombas, compresores, etc.), apoyados en soportes que no se comportan isotrópicamente, es decir, que

propiedades como la elasticidad, temperatura, etc. varían según la dirección en que son examinadas.

Uno de los principales propósitos del desarrollo de esta herramienta es que proporcione información sobre los rangos de operación de la maquina rotativa (turbomáquina) bajo condiciones específicas de diseño del rotor. Conociendo estos datos de operación y con ayuda del mantenimiento, que juega un gran papel sobre el desempeño de las máquinas, se puede aumentar la vida útil y prevenir fallas.

En la Universidad Industrial de Santander existen pocas investigaciones asociadas a las vibraciones mecánicas. Por ese motivo, en este proyecto se desea ampliar los estudios en el comportamiento dinámico del rotor flexible isotrópico con soportes anisotrópicos, específicamente en las turbomáquinas, y así poder analizar la viabilidad de la aplicación de este en la industria.

Este proyecto se realizará con la ayuda de softwares capaces de procesar modelos matemáticos y servirá como base para futuras investigaciones en el área de las vibraciones mecánicas, lo cual permitirá el avance de esta área de la ingeniería mecánica aprovechando herramientas tecnológicas de vanguardia.

1. Objetivos

1.1 Objetivo General.

Implementar un modelo numérico empleando el método de los elementos finitos para el estudio de la respuesta dinámica de un rotor flexible, fundamentado en el modelo de Jeffcott, soportado sobre apoyos anisótropos.

1.2 Objetivos Específicos.

- Modelar numéricamente a través del método de los elementos finitos la respuesta dinámica de un rotor flexible fundamentado en el modelo de Jeffcott, de dimensiones geométricas y condiciones de operación a nivel de laboratorio.
- Implementar y acoplar un modelo numérico a través del método de los elementos Finitos que permita estudiar el comportamiento de apoyos anisótropos y su influencia en la respuesta dinámica del rotor fundamentado en el modelo de Jeffcott, de dimensiones geométricas y condiciones de operación a nivel de laboratorio.
- Reportar los resultados de un estudio rotodinámico, de velocidades críticas e influencia de los apoyos anisótropos en la respuesta dinámica del rotor objeto de estudio, empleando el modelo desarrollado operando en condiciones de laboratorio y velocidad constante.

2. Marco teórico

A continuación, se presentará referencias teóricas para ayudar a comprender los conceptos esenciales necesarios del presente trabajo de grado.

2.1 Dinámica de rotores.

(Rodríguez, 2017) afirma: El comportamiento dinámico de este modelo simplificado de rotor es similar al de un sistema vibratorio de masas y resortes, pero existen algunas diferencias. Si el rotor está girando de forma estable a una velocidad Ω , y le aplicamos un impacto tangente en el sentido de giro, se deformará a flexión orbitando a una frecuencia ω en el mismo sentido (Forward Whirling FW), pero si el impacto se aplica en sentido opuesto al de rotación, seguirá una órbita en sentido opuesto al giro (Backward Whirling BW). (pág. 13).

2.2 Rotodinámica.

De acuerdo con ESTANHEIRO (Estanheiro, 2016), La rotodinámica determina los problemas que presentan los sistemas rotatorios debido a diversos factores internos y externos que afectan a su estabilidad. Esta rama de la mecánica pretende conocer el comportamiento y solucionar la inestabilidad del sistema. (pág.12).

2.3 Rotores

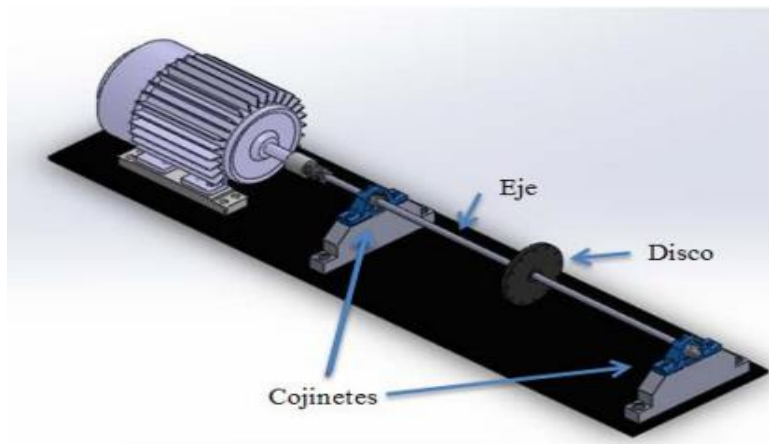
Según KRUGER (2010) y GARCÍA (2001), los rotores se dividen en rígidos y flexibles, los rígidos mantienen su desequilibrio constante hasta la velocidad no operacional, mientras que los flexibles se deforman al superar el 50% de la primera velocidad crítica. Por otra parte, el

comportamiento dinámico, según RODRÍGUEZ (2017), simula un sistema vibratorio, diferenciándose entre las velocidades de rotación Ω y ω , mientras que las órbitas Forward Whirling (FW) y Backward Whirling (BW) determinan las frecuencias naturales y la velocidad crítica, es de resaltar que la simetría axial excluye los modos BW, mientras que el desplazamiento no axial del disco, según RODRÍGUEZ (2017), afecta las frecuencias FW y BW debido a efectos giroscópicos.

2.4 Rotor Jeffcott

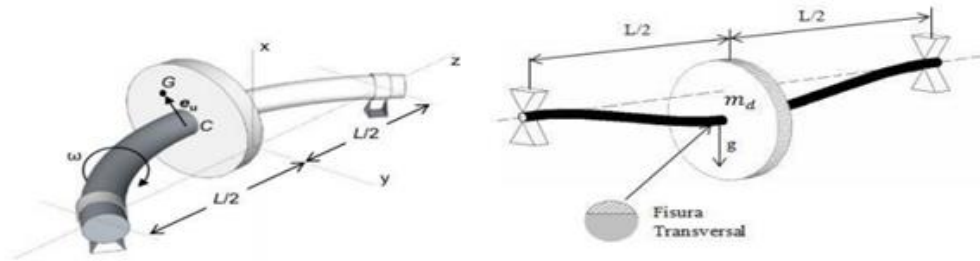
(García, 2001) afirma: El modelo más simple que se puede utilizar para estudiar el comportamiento de flexión de los rotores consiste en una masa puntual unida a un eje sin masa, en las figuras 1 y 2 se puede apreciar cómo está conformado un rotor tipo Jeffcott. Aunque el modelo de rotor Jeffcott es una simplificación excesiva del mundo real rotores, conserva algunas características. (pág. 35).

Figura 1 Ruedas Esquema rotor Jeffcott



Nota. En el gráfico se observa los elementos que integran el montaje de un rotor tipo Jeffcott.

Fuente: (Estanheiro, 2016).

Figura 2 Ruedas Esquema básico de un rotor Jeffcott.

Nota. En el gráfico se identifican el esquema básico y componentes de un rotor Jeffcott. (Estanheiro, 2016, pág. 16).

2.5 Cojinetes hidrodinámicos

Son elementos de máquina que permiten a un eje girar libremente y soportar carga simultáneamente, interponiendo una capa de fluido entre las superficies de contacto.

2.6 Isotropía y Anisotropía

La isotropía y anisotropía se refieren a las propiedades físicas de un material. Un rotor isotrópico exhibe propiedades uniformes en todas direcciones, como el acero. En cambio, un rotor anisotrópico muestra variaciones en las propiedades al examinarlo en direcciones distintas.

2.7 Velocidad crítica

La resonancia en sistemas rotatorios se conoce como velocidad crítica (ω_c) y se define como la condición en que la velocidad de giro se iguala a la frecuencia natural (F_n) del mismo. La resonancia es un estado de operación en el que una frecuencia de excitación se encuentra cerca de una frecuencia natural de la estructura de la máquina. Una frecuencia natural es una frecuencia a

la que una estructura vibrará. Cuando ocurre la resonancia, los niveles de vibración que resultan pueden ser muy altos y pueden causar daños muy rápidamente. (Estanheiro, 2016, pág. 16).

2.7.1 Inestabilidad rotodinámica

Matemáticamente la inestabilidad esta caracteriza por un valor propio complejo con parte real positiva, tal como se evidencia en la ecuación 1.

Ecuación 1.

$$S = \xi\omega_n + j\omega_d \quad (1)$$

Donde:

ω_n =Frecuencia natural no amortiguada.

ω_d =Frecuencia natural amortiguada.

ξ =Coeficiente de amortiguamiento.

En la anterior ecuación, la parte real ($\xi\omega_n$), esta dada por el factor de crecimiento o decaimiento del sistema, mientras que la parte imaginaria ($j\omega_d$) define la frecuencia natural amortiguada del sistema rotodinámico.

Si $\xi\omega_n > 0$, el movimiento de la perturbación crece exponencialmente con el tiempo y se dice que el sistema o la zona de operación, es inestable. Si embargo, si $\xi\omega_n < 0$, se dice que el sistema es estable. De esta manera, se interpreta que el umbral de estabilidad del sistema vendrá dado en la zona donde $\xi\omega_n = 0$ (Agnieszka, 2005).

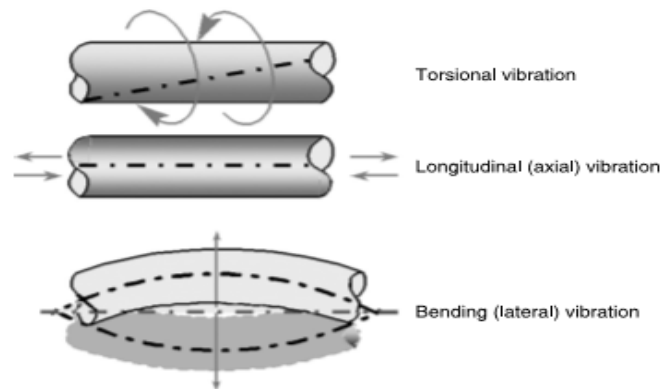
2.8 Vibraciones presentes en turbomáquinas.

(Fernández, y otros, 2016) La vibración en una turbomáquina no es una avería en sí misma, sino un síntoma de un problema que existe en la máquina y que puede derivar en graves consecuencias.

La vibración se hace especialmente evidente durante el proceso de arranque, ya que durante este periodo se atraviesan una o varias velocidades críticas de las turbomáquinas, velocidades en las que la vibración, por resonancia molecular, se ve notablemente amplificada. (pág. 6).

Según VANCE, ZEIDAN Y MURPHY (2010), existen tres tipos de vibraciones: torsionales, axiales y laterales, las cuales, son desencadenadas por desequilibrios, inestabilidades y fuerzas a causa de deflexiones del rotor y frecuencias naturales. En la figura 3 podemos evidenciar los tres tipos de vibraciones. GENTA, 2004 destaca que las torsionales no deben ocurrir cerca de resonancias torsionales para evitar altos niveles de vibración; BETAMACHINERY, 2018 dice que las vibraciones axiales se estudian por separado, siendo su modelo similar al de las torsionales; y Finalmente, MUSZYNSKA, 2005, asegura que la vibración lateral es la más preocupante, transmitiéndose por toda la turbomáquina.

Figura 3. *Modos de vibración del rotor*



Nota. En el gráfico se identifican los diferentes modos de vibración de un rotor. Fuente: (Agnieszka, 2005, pág. 2)

Las vibraciones laterales se transmiten por toda la turbo máquina, incluso por partes no rotativas hasta llegar al aire por medio de ondas acústicas. (Muszynska, 2005, pág. 2).

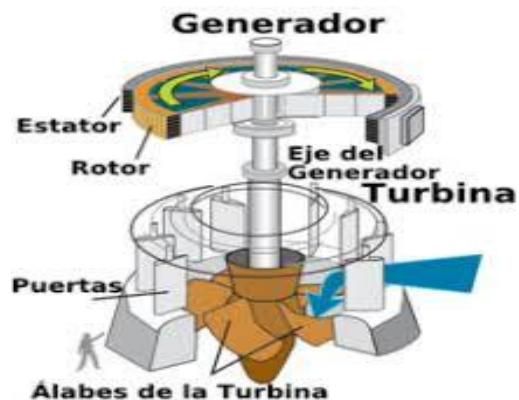
2.9 Análisis de vibraciones

DOMÍNGUEZ, 2017 afirma que el análisis de vibraciones se basa en interpretar señales vibratorias según los niveles de tolerancia establecidos, este análisis permite diagnosticar el estado de las máquinas mientras operan normalmente. Las alteraciones en las vibraciones indican fallos, posibilitando la identificación y corrección temprana mediante la identificación de frecuencias asociadas a componentes específicos (pág. 21).

2.10 Turbomáquina

Las turbomáquinas, como turbinas y bombas son máquinas de corriente o dinámicas que intercambian energía con fluidos mediante rotores giratorios. El fluido de trabajo puede ser un líquido o un gas y el órgano(rotor), intercambiador de energía mecánica y de fluido, está dotado de movimiento rotativo. En la figura 4 podemos observar los componentes de una turbomáquina (turbina).

Figura 4. Turbomáquina



Nota. El gráfico representa los componentes de una turbomáquina (turbina), para transformar la energía cinética del agua en energía eléctrica. Fuente: (Blogs, 2015) .

2.11 Fallas en turbomáquina.

Teniendo en cuenta lo anterior, FERNÁNDEZ, Y OTROS, 2016 consideran que la vibración, los problemas en sensores, la lubricación y el desequilibrio del rotor deben abordarse para evitar daños graves, y que fallas comunes incluyen altas vibraciones, desplazamiento del rotor, fallos en instrumentación, vibración en reductor o alternador, fugas, dificultad de sincronización y bloqueo del rotor.

2.12 Método de elementos finitos

El método de elementos finitos implica dividir una estructura en elementos, cada uno con su ecuación de movimiento, acoplados para formar el sistema global. Es un método numérico eficaz, empleado para modelar diversos sistemas al proporcionar soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales complejas de manera eficiente y rentable.

2.13 Normativa

Existen diversas normas para evaluar la severidad de vibraciones de máquinas. En la tabla 1 se indican algunas de las más empleadas, Para el desbalanceo de rotores en máquinas rotativas existe unas normativas que se indicaran en la tabla 2.

Tabla 1. Normas empleadas en análisis de vibraciones.

Organismo.	Código.	Año.	Descripción.
ISO	ISO 2372/2373	1974	Vibración mecánica de máquinas con velocidades de operación entre 10 y 200 rev/s. La ISO 2373 constituye una adaptación especial de la ISO 2372 para motores eléctricos, y se aplica a motores de corriente alterna trifásica y a motores de corriente continua con alturas de eje entre 80 y 400 mm.
ISO	ISO 3945	1985	Medida y evaluación de la severidad de vibración en grandes máquinas rotativas, con velocidades de operación entre 10 y 200 rev/s.
ISO	ISO 2954	2012	Vibración mecánica en maquinaria rotativa y alternativa – Requerimientos para los instrumentos de medida de la severidad de vibración

Organismo.	Código.	Año.	Descripción.
ISO	ISO 10816	1995	Vibración mecánica. - Evaluación de la vibración en una máquina mediante medidas en partes no rotativas. Reemplaza la ISO 2373 e ISO 3945.
ISO	ISO 7919	1996	Vibración mecánica de máquinas no alternativas - Medidas en ejes rotativos y evaluación.
VDI	VDI 2059	1981	Evaluación de vibraciones mecánicas de maquinaria rotativa. Basada en la ISO 2372. Reemplazada por la ISO 10816.
ANSI	AS 2526	2003	Vibración mecánica. - Evaluación de la vibración en una máquina mediante medidas en partes no rotativas. Este estándar es idéntico y ha sido reproducido a partir de la ISO 10816-1:1995.
IEC	IEC3414:1996	1996	Mechanical vibration of certain machines with shaft heights 56 mm and higher - Measurement, evaluation and limits of vibration severity.
AENOR	UNEEN 6003414:1997	1997	Vibraciones mecánicas de determinadas máquinas con altura de eje igual o superior a 56 mm. Medición, evaluación y límites de la intensidad de vibración. Basada en la IEC 34-14, acaba de salir la revisión del 2004, denominada por AENOR UNE EN 60034-14:2004 y correspondiente a la norma IEC 60034-14:2003
BSI	BS 7853	1996	Vibración mecánica. - Evaluación de la vibración en una máquina mediante medidas en partes no rotativas. Basada en la ISO 10816-1:1995.
API	API 670	1993	Monitorización en tiempo real y la protección de maquinaria crítica.

Nota. Esta tabla muestra algunas de las normas utilizadas en el análisis de vibraciones.

Tabla 2. Normativa de Desbalanceo en máquina rotativa

Organismo.	Código.	Año.	Descripción.
ISO	1925	1990	clasifica el desbalanceo según la distribución de masas desbalanceadas en: – Desbalanceo estático, cuando el eje principal de inercia es paralelo al eje de rotación. – Desbalanceo de cupla, cuando el eje principal de inercia intercepta al eje de rotación en el centro de gravedad del rotor. – Desbalanceo cuasi-estático, cuando el eje principal de inercia intercepta al eje de rotación en un punto distinto al centro de gravedad del rotor. – Desbalanceo dinámico, cuando el eje principal de inercia no intercepta al eje de rotación.
ISO	5406	1980	Este estándar internacional clasifica los rotores en grupos de acuerdo con sus requerimientos de desbalanceo, especifica métodos para evaluar el desajuste final, y de guías iniciales sobre el criterio de calidad del desajuste final.
ISO	1940	2003	En la norma se define el desbalanceo como la condición, en la cual el eje de inercia del rotor no coincide con su eje de rotación, de esta forma el giro no es concéntrico y se produce, fuerzas y/o momentos dinámicos que dan origen a las vibraciones.

Nota. Esta tabla muestra algunas normas para identificar el desbalanceo en máquinas rotativas.

3. Diseño metodológico

3.1 Recopilación de bibliografía y establecimiento de requerimientos y restricciones

Se realiza una recopilación bibliográfica, obteniendo los conocimientos base para poder abordar el proyecto de investigación con una justificación clara. Una vez se obtienen los conocimientos necesarios para abordar el proyecto, se debe especificar los requerimientos y restricciones, convirtiéndose en los pilares de la investigación que reducirán el grado de complejidad al ajustarlo a un nivel académico de acuerdo con nuestras capacidades.

Requerimientos y restricciones del proyecto de investigación:

- La sección transversal del rotor de estudio se limitará a una sección transversal uniforme, ya que con la complejidad de la investigación al estudiar rotores flexibles es suficiente.
- El sistema de coordenadas definidas para la implementación del modelo numérico corresponde a la dirección y orientación de los ejes cartesianos x , y y z . de acuerdo con las propiedades del cálculo vectorial, ver figura 6.
- Los soportes en los que se apoyará el rotor flexible serán cojinetes hidrodinámicos, donde la capa de lubricante nunca permitirá contacto de metal-metal entre el rotor y el cojinete.
- No existirán pérdidas de lubricante del cojinete debido a factores como altas cargas, choques térmicos y fugas debida a los sellos.
- El estado del lubricante no cambiará durante el tiempo, es decir, no se contaminará por funcionamiento.
- Se asumirá un flujo constante de corriente que permitirá al motor transmitir una rotación constante al rotor.
- Se excluirá el efecto de cavitación en el fluido.

3.2 Desarrollo del modelo matemático

El modelo matemático se realiza utilizando el método de elementos finitos para el estudio dinámico de un rotor flexible apoyado en cojinetes hidrodinámicos, por medio de la herramienta computacional MATLAB. A su vez la fase B se divide en 3 sub-fases.

3.2.1 Planteamiento numérico del rotor flexible por medio del método Jeffcott

El planteamiento numérico está basado en el planteamiento matemático para el análisis dinámico de rotores flexibles realizado por HELLER G (Sánchez A, 2010). Este parte de las expresiones de la energía cinética, potencial y función de disipación de Rayleigh generadas para un disco mediante el Método de los Elementos Finitos. Luego, integrando a lo largo de la longitud del elemento, se obtienen las expresiones para un elemento de rotor. Aplicando las ecuaciones de Lagrange se deducen las ecuaciones de movimiento del sistema.

Se pretende de manera ordenada discretizar el sistema en elementos de los cuales este se compone. Al discretizar el sistema, este es representado por la suma de sus elementos, cada elemento contiene las características físicas del sistema, con el fin de lograr una representación aproximada de los fenómenos que se presentan.

3.2.2 Planteamiento matricial del disco

Se plantea la posición óptima del disco con sus propiedades, separado del planteamiento numérico del rotor flexible, para luego ser ensamblado en una fase posterior.

3.2.3 Planteamiento matricial de los soportes

De la misma manera que la anterior sub-fase, se procede a desarrollar mediante matrices las propiedades del soporte que, para este caso, serían las propiedades del cojinete hidrodinámico, para luego ser ensamblada al modelo numérico del rotor flexible en una fase posterior.

3.3 Ensamble matricial

Se procede a realizar el ensamble de las matrices del disco y del soporte en el modelo numérico del rotor flexible, completando el modelo matemático del rotor flexible soportado por cojinetes hidrodinámicos mediante el método Jeffcott.

3.4 Calibración del Modelo matemático por medio de pruebas experimentales en un banco de laboratorio.

Una vez ya realizado el modelo matemático, se debe realizar la confiabilidad de este modelo con pruebas experimentales en un banco del laboratorio de Vibraciones Mecánicas, así calibrándolo para que el modelo se ajuste a la realidad y pueda realizar estudios aproximados de velocidades críticas y poder realizar un análisis de la influencia de los cojinetes hidrodinámicos en el rotor flexible.

3.5 Implementación del modelo numérico del rotor flexible tipo Jeffcott

Dentro del planteamiento matemático, se consideró:

- El rotor trabaja como un cuerpo elástico.
- El rotor se aproximó a una viga simplemente apoyada, donde se involucran factores como:
 - Efectos giroscópicos.
 - Anisotropía (otorgada por los apoyos).
 - Inercia rotativa.
 - Amortiguamiento interno.

Dicho planteamiento se fundamenta en la teoría de vigas de Timoshenko (Rouch & Kao, 1979) y en el modelo desarrollado por HELLER G. (Sánchez A, 2010) (Rouch & Kao, 1979). Donde a partir de las funciones de energías y funciones de disipación de Rayleigh generadas para un disco, se obtiene la ecuación 2 de movimiento del sistema mediante el Método de Elementos Finitos (MEF). (Agudelo, 2022).

Ecuación 2.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (2)$$

Donde:

$[M]$ =Matriz de masa.

$[C]$ =Matriz de amortiguamiento.

$[G]$ =Matriz de efecto giroscópico.

$[K]$ =Matriz de rigidez.

$\{\ddot{q}\}, \{\dot{q}\}, \{q\}$ =Vector de coordenadas generalizadas de los elementos.

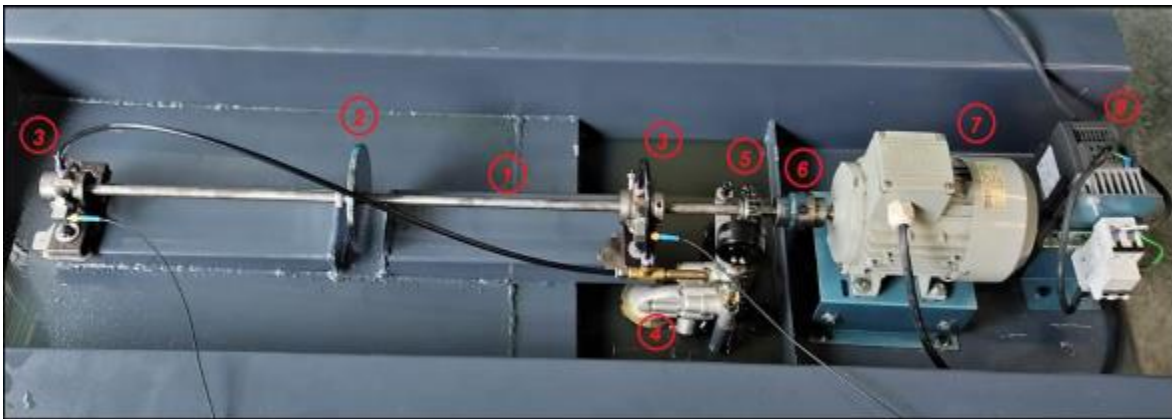
$\{F\}$ =Fuerza de entrada en el sistema.

4. Equipos y materiales

4.1 Banco de ensayos

El banco de ensayos que se muestra en la figura 5 es el modelo experimental que cumple con dimensiones a nivel de laboratorios de la escuela de ingeniería mecánica de la universidad industrial de Santander, cumple con condiciones de rotor flexible tipo Jeffcott para el estudio que compete a los objetivos planteados en esta tesis de grado.

Figura 5. Banco de ensayos



Nota. En la imagen se observa el banco de ensayos tipo rotor flexible Jeffcott con cada uno de los componentes utilizados. Tomado de (Nova, 2022, pág. 22).


- 1-Eje.
- 2-Disco.
- 3-Cojinetes hidrodinámicos.
- 4-Bomba de lubricación.
- 5-Sistema de transmisión de potencia de la bomba.
- 6-Acople del motor al eje.
- 7-Motor.

- 8-Variador de frecuencia.

En la tabla 3 se listan los equipos y materiales utilizados en el desarrollo de los experimentos realizados:

Tabla 3. *Equipos y materiales*

Nombre	Descripción	Imagen
Atenuador	Dispositivo electrónico que se utiliza en circuitos para reducir la amplitud de una señal.	
Base del fototacómetro	Soporta y mantiene el sensor en su sitio.	
Disco de desbalanceo	Se utilizó como una fuerza (peso W) para estudiar el comportamiento del eje y apoyos.	
Fototacómetro	Instrumento de alta calidad para medir la velocidad de rotación.	
Fuente	Utilizada para generar el voltaje y la corriente eléctrica necesaria para alimentar los circuitos.	
Motor eléctrico	Convierte la energía eléctrica en energía mecánica de rotación.	

Nombre	Descripción	Imagen
Oros Or 35	Analizador de ruido y vibraciones.	
Sensor de desplazamiento	Permiten controlar la posición de un elemento a lo largo de un eje móvil.	
Sensor triaxial	Proporcionan mediciones simultáneas en tres direcciones ortogonales.	
Cojinete de película fluida	Evitan el contacto entre las piezas principales que conectan.	
Transductor	Se empleó para convertir las señales obtenidas de los sensores	
Variador de frecuencia	Controla la velocidad rotacional de un motor de corriente alterna	
Sistema de lubricación	Se encarga de distribuir el aceite a todas las partes móviles.	

5. Modelo teórico y experimental

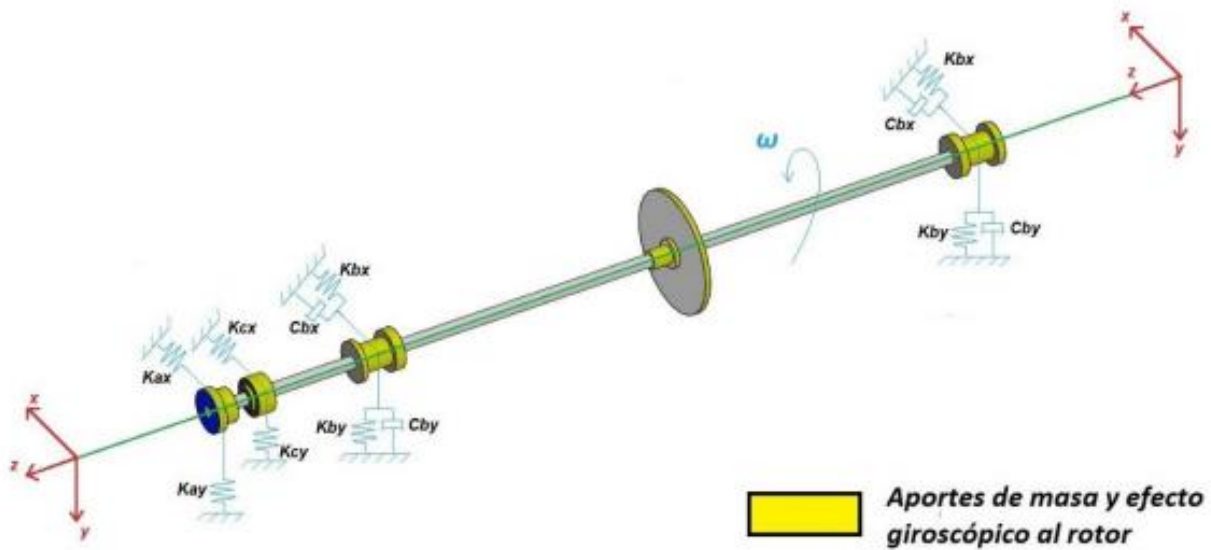
5.1 Modelo teórico

El modelo teórico se desarrolla en base a un algoritmo de programación en el software matemático Matlab que permite determinar frecuencias naturales y coeficientes de amortiguación del sistema, así como graficar diagramas de estabilidad y de Campbell. También permite modificar parámetros físicos y mecánicas, tales como diámetro, longitudes, densidad y módulos de elasticidad del eje, apoyos, disco desbalanceador, acoples y las propiedades del lubricante.

Con lo mencionado anteriormente se espera que al momento de hacer modificaciones en las propiedades se pueda estudiar el comportamiento o como es afectado el sistema es sus parámetros de frecuencias naturales, coeficientes de amortiguación, excentricidad del eje con respecto al apoyo, entre otros parámetros.

5.1.1 Matrices del modelo numérico rotor flexible Jeffcott

El modelo matemático del rotor Jeffcott consiste en un eje simplemente apoyado con un disco de masa (m) ubicado en el centro del eje entre los dos apoyos, también se incluyen dentro del modelo piñón de transmisión y acople de motor como se evidencia en la figura 6, cada uno de los elementos anteriormente mencionado aportan valores de rigidez, amortiguamiento, inercias, masas que son consideradas en el modelo matemático.

Figura 6. Esquema de cada elemento involucrado en el modelo matemático

Nota. En la figura se observa el sistema a estudiar. Tomado de (Acevedo A & Pinto , 2018, pág. 78).

En la simulación se tendrán en cuenta factores como:

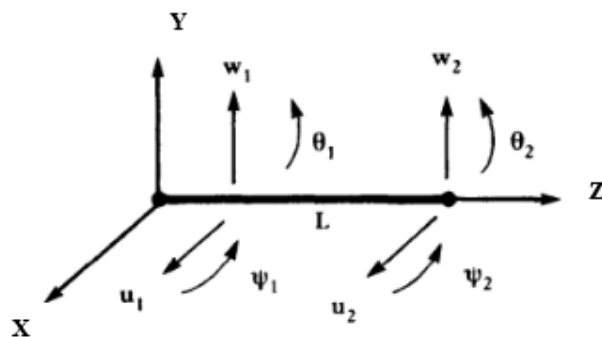
- Anisotropía de los cojinetes.
- Isotropía del eje.
- Efectos giroscópicos.
- Inercia rotativa.

Dicho planteamiento se fundamenta en la teoría de vigas de Timoshenko, donde a partir de las funciones de energías y funciones de disipación de Rayleigh generadas para un disco, se obtiene la ecuación de movimiento del sistema mediante el Método de Elementos Finitos (MEF), (ver Ecuación 2). (Agudelo, 2022, pág. 71).

5.1.1.1 Matrices de los elementos. Las matrices de los elementos se crean mediante el método de elementos finos (MEF), en el cual se divide un elemento en subelementos, en cada división se definen ciertas ecuaciones integrales, que representan el comportamiento teórico del sistema; esto quiere decir, cada elemento discretizado son de fácil estudio, una vez solucionados se ensamblan en una ecuación global (matriz global de los elementos) para representar la totalidad del elemento inicial (eje). (Agudelo, 2022).

Según ACEVEDO A, L. F. & PINTO, J. S. el número finito de elementos a utilizar depende de la complejidad del sistema a solucionar y dicho número debe estar supeditado a la convergencia de los valores de las frecuencias naturales en estudio. Para el estudio del modelo se decidió dividir el eje en 17 elementos. LALANNE, M. & FERRARIS, G. afirman que cada elemento está compuesto por 8 grados de libertad y 2 nodos; es decir, que por cada nodo tenemos 4 grados de libertad dos laterales $[W, U]$ y 4 angulares $[\theta, \psi]$ como se especifica en la figura 7. (pág. 92).

Figura 7. Esquema de cada elemento de estudio (MEF)



Nota. En la imagen se observa un elemento finito del eje. Tomado de (Lalanne & Ferraris, 1998, pág. 90).

Para las condiciones de estudio del eje flexible tipo Jeffcott los desplazamientos axiales y torsionales se despreciarán ya que el caso de estudio son las vibraciones laterales. Para lo

anteriormente mencionada el sistema debe encontrarse balanceado, sin desalineamiento y sin fallas mecánicas.

El elemento de eje finito expuesto en la figura 7 se puede representan en forma vectorial como lo describe la ecuación 3 a continuación.

Ecuación 3

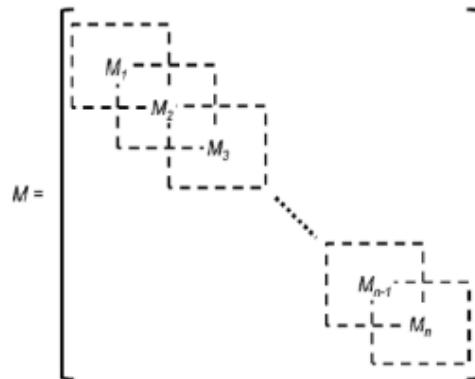
$$\delta = [U_1, W_1, \theta_1, \psi_1, U_2, W_2, \theta_2, \psi_2] \quad (3)$$

Las matrices de masa [M], rigidez [K] y amortiguamiento [C] de la ecuación 2 son presentadas en el apéndice B.

El planteamiento de matrices locales a globales esta dado por FRISWELL, M. L., T. PENNY, J. E., GARVEY, S. D. & LEES, A. W., la definición inicial de las matrices globales se puede apreciar en el apéndice C.

5.1.1.2 Ensamble matricial. De acuerdo con ACEVEDO A, L. F. & PINTO, J. S., puesto que el modelo numérico desarrollado está compuesto por 17 elementos, cada sistema de ecuaciones (las matrices) de cada elemento, deben ser ensambladas en una ecuación general del sistema (matrices globales). En otras palabras, cada elemento en particular está unido con los demás elementos por medio de nodos, conformando un elemento de viga global. (pág. 76).

En la figura 8 tenemos la representación de las matrices globales y como se acoplan para cada elemento finito del eje.

Figura 8. Esquema del ensamble global de las matrices de cada elemento finito del eje

Nota. El gráfico representa el proceso de ensamble para la matriz de masa global. Tomado de (Yoon, Lin, & Allaire, 2013, pág. 55).

Se debe tener en cuenta que al sistema se deben agregar el conjunto de elementos que constituyen el sistema además del eje como apoyos, piñón, disco y acople, por ende, afectan el comportamiento y resultados del modelo matemático.

5.1.1.3 Matrices de los elementos adyacentes al motor. AGUDELO, F. R., afirma que el aporte de los componentes (soportes, piñón, acople y disco) a la rigidez, masa y estabilidad del conjunto de estudio está determinado por cada una de las características fisicomecánicas del sistema, en la figura 6 se evidencia el aporte de cada componente, dichos aportes se representan al igual que cada elemento finito del eje por medio de matrices que se agregan a cada nodo correspondiente de la matriz global de estudio según sea la ubicación de cada componente.

Al igual que las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del eje, la de los componentes adyacentes son presentadas en el apéndice B.

5.2 Modelo físico o experimental

El modelo experimental es el objeto de estudio del banco de ensayos rotor flexible tipo Jeffcott (ver figura 5). EL modelo teórico se ajustará a los resultados obtenidos del modelo físico ya que uno de los objetivos de estudio es entregar un software para estudiar comportamiento dinámico de este tipo de rotores.

5.2.1 Condiciones operativas del banco de ensayos

El banco se le realizaron modificaciones, como agregar un depósito para el lubricante; además de realizar alineamiento del eje, motor como el ajuste del torque necesario de los tornillos de sujeción de los apoyos, también se tuvo en cuenta la altura de cada uno de los apoyos lo cual se realizó al momento de alinear el eje con el motor para evitar posibles fallas.

Se le realizo al banco análisis de vibraciones mecánicas para validar desbalanceo, pandeo y desalineamiento.

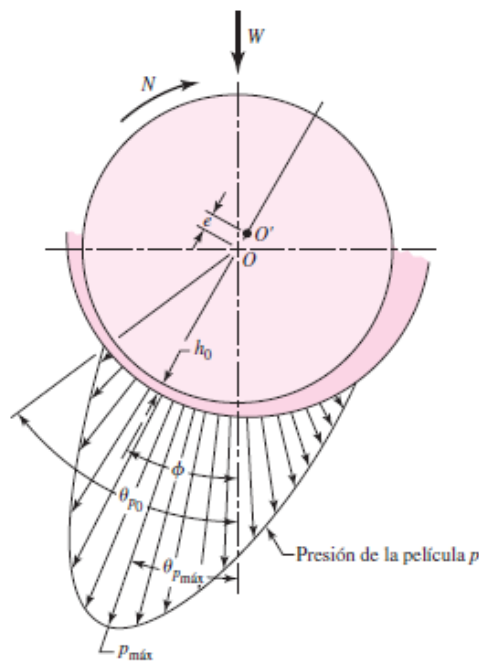
5.2.1.1 Proceso de datos. El proceso de datos del banco de ensayos es un poco compleja ya que es necesario contar con equipos especiales y costosos para la adquisición de datos como atenuadores, fototacómetro sensores de desplazamientos, acelerómetros y transductores, entre otros, cada una de las señales captadas por los sensores anteriormente mencionados se transmiten como información a la OROS OR 35 que es el analizador de los datos en forma de sonidos y vibraciones que luego se transmiten a un computador conectado a la OROS OR 35 y donde las señales captadas son presentadas en forma de gráficas para comprender mejor el comportamiento o lo que está sucediendo en el banco de ensayos.

6. Cálculos y resultados

6.1 Diseño de cojinete hidrodinámico

El diseño de los apoyos se llevó a cabo bajo los parámetros mencionados en Elementos de máquinas de Bernard J. Hamrock, Bo O. Jacobson & Steven R. Schmin primera edición y Diseño en ingeniería mecánica de Shigley octava edición. En la figura 9 podemos apreciar ciertas variables dependientes e independientes que se van a tener en cuenta a la hora del diseño.

Figura 9. Diagrama polar de la distribución de la presión de la película; se muestra la notación usada. (Raimondi y Bopyd).



Nota. En el gráfico se identifica la distribución de la presión de película, espesor mínimo de película, excentricidad dirección de giro y la carga aplicada. Fuente: (Budynas & Keith, 2008, pág. 616)

Donde:

$W =$ carga que soporta el cojinete

$N =$ Velocidad de giro del muñon

$O' =$ centro geométrico del apoyo

$O =$ centro geométrico del muñon

$e =$ excentricidad del eje respecto al apoyo

$h_0 =$ altura de película de aceite minima

$P_{max} =$ presión máxima de la película de lubricante

$\phi =$ posición del espesor mínimo de película de lubricante

$\theta_{Pmax} =$ posición de la presión máxima de la película de lubricante

$\theta_{P0} =$ posición terminal de la película

6.1.1 Consideraciones de diseño

Para el diseño de los cojinetes deslizantes se tendrán en cuenta variables cuyos valores se dan o están bajo parámetros de diseño como:

- La viscosidad μ .
- La carga por unidad de área proyectada de cojinete P .
- La velocidad N .
- Las dimensiones del cojinete r , c , β y l .

Para el diseño de los apoyos se debe tener en cuenta el número característico del cojinete o número de Sommerfeld que se define como:

Ecuación 4

Número de Sommerfeld

$$S = \left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{\mu N}{P}$$

Donde:

S = Número de Sommerfeld.

r = radio interno del cojinete.

c = Holgura entre el muñon y el cojinete.

μ = viscosidad dinamica del lubricante [$Pa \cdot s$].

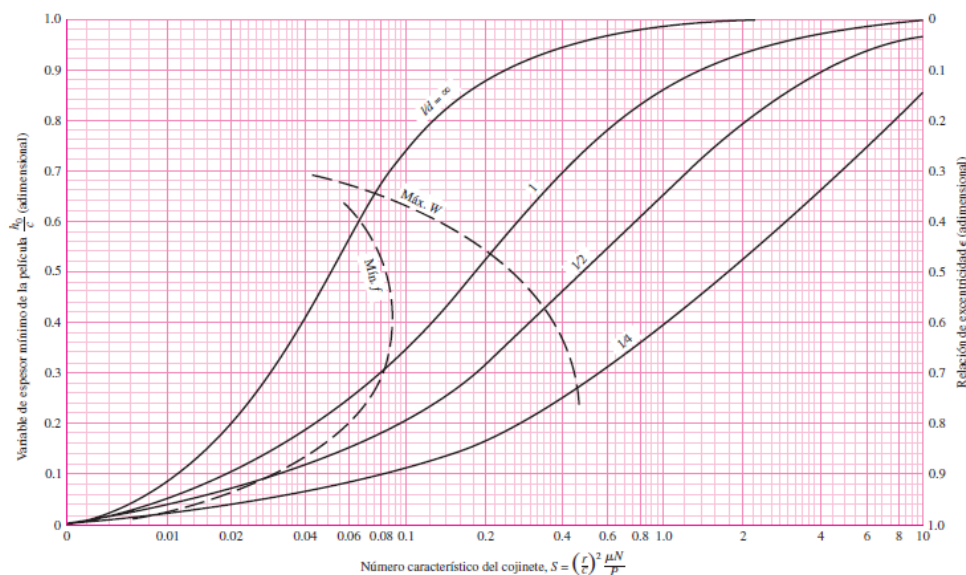
N = Velocidad de rotacion del eje [rps].

P = Presión ejercida por la carga sobre el cojinete.

El número de Sommerfeld es muy importante en el análisis de la lubricación, porque contiene muchos parámetros especificados por el diseñador. Además, es adimensional. La cantidad r/c se conoce como relación de holgura radial. (Budynas & Keith, 2008, pág. 602).

Para cálculos futuros y diseño del cojinete se requiere determinar el espesor mínimo de película de lubricante como la excentricidad entre el eje y el apoyo, estos valores los podemos determinar hallando el número de Sommerfeld y la siguiente figura.

Figura 10. Gráfica de la variable de relación mínimo de la película y excentricidad (Raimondi y Boyd.).



Nota. En el gráfico se identifica en el límite izquierdo el Y el valor h_0 ; el límite derecho representa el valor e óptimo para carga máxima. Fuente: (Budynas & Keith, 2008, pág. 616).

Debido a la ejecución del programa de modelación de métodos numérico para estudiar el comportamiento dinámico del rotor sobre apoyos hidrodinámicos se requiere graficar los resultados y para cada incremento de velocidad de giro se hallan diversos puntos en el diagrama de Campbell, lo cual resultaba complejo tener un valor de velocidad de giro, hallar el número de Sommerfeld y mediante la figura 13 hallar la variable de espesor mínimo de película y la relación de excentricidad.

Entonces si se quería estudiar la rotación del eje en un rango de 0 a 20000 RPM a aumentando la velocidad de 1000 en 1000 RPM tendríamos que hacer el valor manual de hallar la variable de espesor mínimo de película y la relación de excentricidad y repetir el proceso muchas veces.

De lo anterior mediante el software TABLECURVE 2D, se ingresaron los datos manuales de la figura 10, tanto para el espesor mínimo de película como para la relación de excentricidad y se obtuvieron las ecuaciones de las gráficas, las cuales se presentan en el apéndice F.

El desarrollo del modelo teórico se llevó a cabo en software matemático Matlab donde se realiza la programación y cálculos para llegar a los resultados obtenidos.

6.2 Condiciones de apoyo, eje y lubricante

Se define las condiciones en las que se encuentra el apoyo, el eje y el aceite así definiendo propiedades físicas, mecánicas como condiciones de operación.

6.2.1 Propiedades del aceite y geometría del apoyo

Los apoyos son los encargados de soportar las cargas del eje, disco, acople, piñón y motor, estos son cojinetes bipartidos con dos lóbulos, para calcular el número de Sommerfeld es necesario obtener la relación longitud/diámetro de los apoyos, la cual es de aproximadamente 1 para los cojinetes de estudio, en la tabla 4 se expresan las geometrías de los apoyos.

Tabla 4. Geometría de los cojinetes hidrodinámicos.

característica	Cojinete #1 [m]	Cojinete #2 [m]
Diámetro cojinete	0,02865	0,02868
Longitud cojinete	0,03	0,03
Diámetro muñón	0,0284	0,0284

El aceite de lubricación de los cojinetes hidrodinámicos es un aceite TP ISO 68 con características anti-desgaste. Las propiedades químicas requeridas en el modelo numérico se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5. Propiedades químicas del aceite de lubricación del cojinete TP ISO 68

Propiedad	Valor
Gravedad API	29,9
Gravedad específica GE	0,8767
Densidad del aceite a 15°C (60°F)	875,9171 [kg · m ⁻³]
Viscosidad cinemática nominal a 40°C	68 [cSt]
Viscosidad dinámica del aceite	0,0596 [Pa · s]

Fuente: Modificado por el autor con base en FT-L-04 Ficha Técnica Aceite Hidráulico TP ISO 68.

Disponible en: (Lubrigras, 2021)

Mediante cálculo estático de fuerzas se determinó el valor que soporta cada apoyo (ver tabla 6) mediante las ecuaciones presentadas en el apéndice F, en la nomenclatura se utiliza el “1” para referirse al apoyo ubicado al extremo contrario del motor y 2 para describir al apoyo más cercano al motor.

Tabla 6. *Carga soportada por los apoyos.*

Fuerza/presión	Valor
Fuerza 1	6,8907 N
Fuerza 2	14,2958 N
Presión 1	808,798 Pa
Presión 2	1677,911 Pa

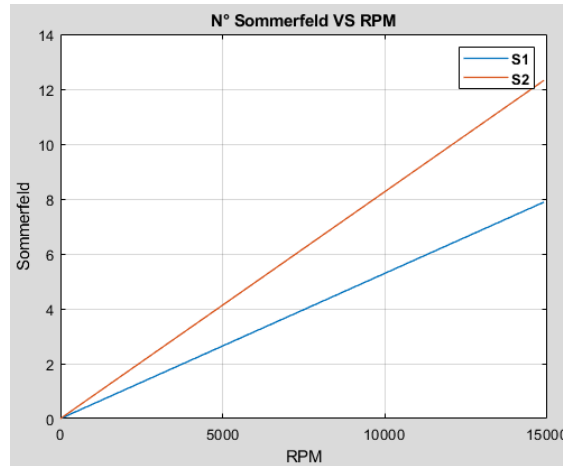
6.3 Características de los apoyos

El comportamiento del apoyo, muñón, cojinete hidrodinámico se ve reflejado en el número de Sommerfeld. Excentricidad y espesor de película estas se pueden ver afectadas por cambios en el lubricante, masa del disco, material del eje o del disco entre otras propiedades. En las gráficas que se presentan a continuación.

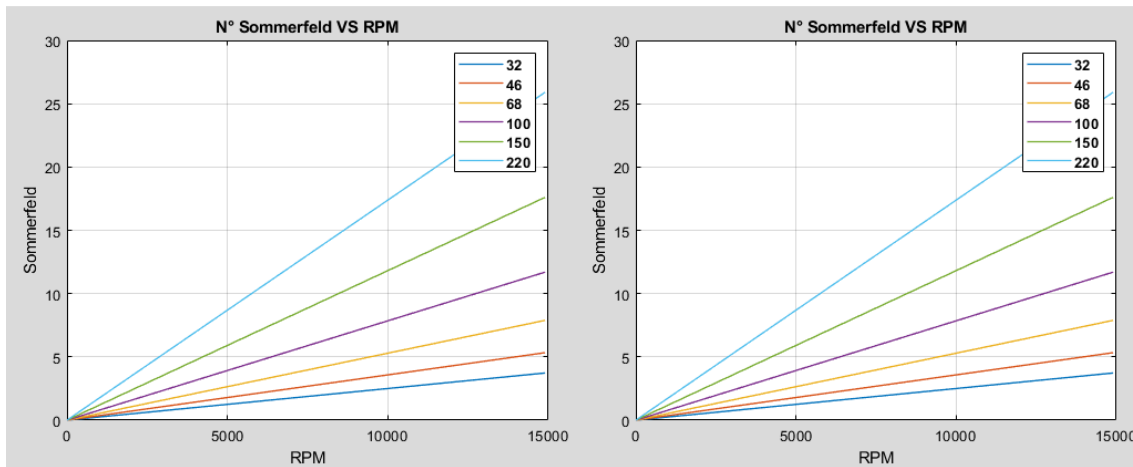
6.3.1 Numero de Sommerfeld

El numero de Sommerfeld es de gran importancia en el diseño de cojinetes hidrodinámicos ya que de este valor podemos conocer el valor de excentricidad del muñón de eje soportado en los apoyos como el espesor de película de lubricante y cómo se comportan estos valores a medida que variamos la velocidad de trabajo.

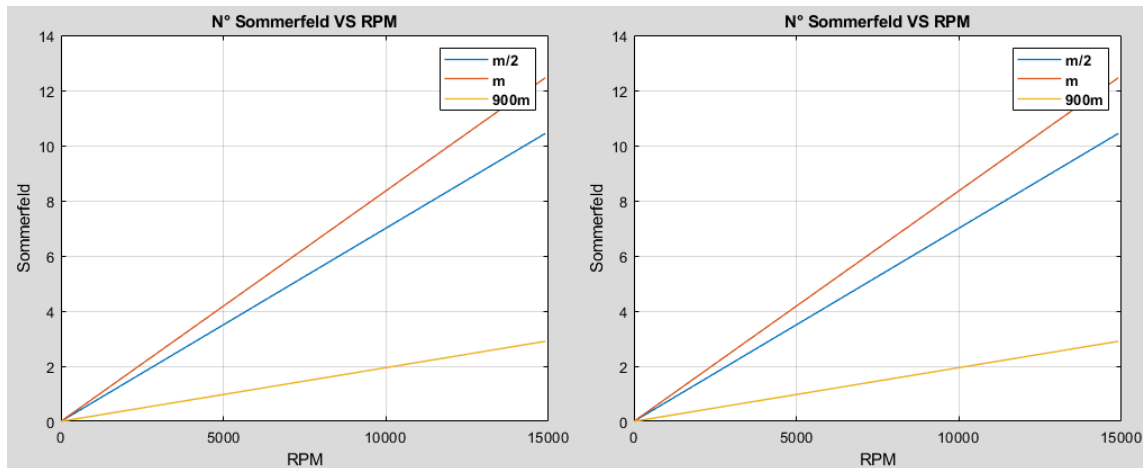
En las figuras a continuación (Fig. 11, Fig. 12 y Fig. 13) se evidencia el comportamiento del numero de Sommerfeld bajo condiciones de laboratorio, variado el tipo de lubricante y al modificar la masa del disco.

Figura 11. Comportamiento del número de Sommerfeld en el apoyo 1, S_1 y del apoyo 2, S_2 .

Nota. En la imagen se identifican la variación del número de Sommerfeld bajo condiciones normales de trabajo en laboratorio de vibraciones de la escuela de ingeniería mecánica de acuerdo con la velocidad de giro.

Figura 12. Comportamiento del número de Sommerfeld variando viscosidad del aceite.

Nota. En la imagen se identifican los números de Sommerfeld variando la viscosidad del aceite según especificaciones ISO, a la derecha apoyo 2 y a la izquierda apoyo 1.

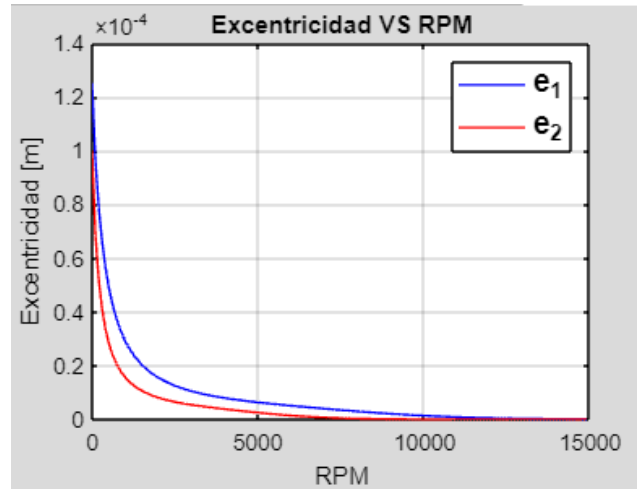
Figura 13. Comportamiento del número de Sommerfeld variando la carga

Nota. En la imagen se identifican la variación del número de Sommerfeld debido a la carga, a la derecha apoyo 2 y a la izquierda apoyo 1.

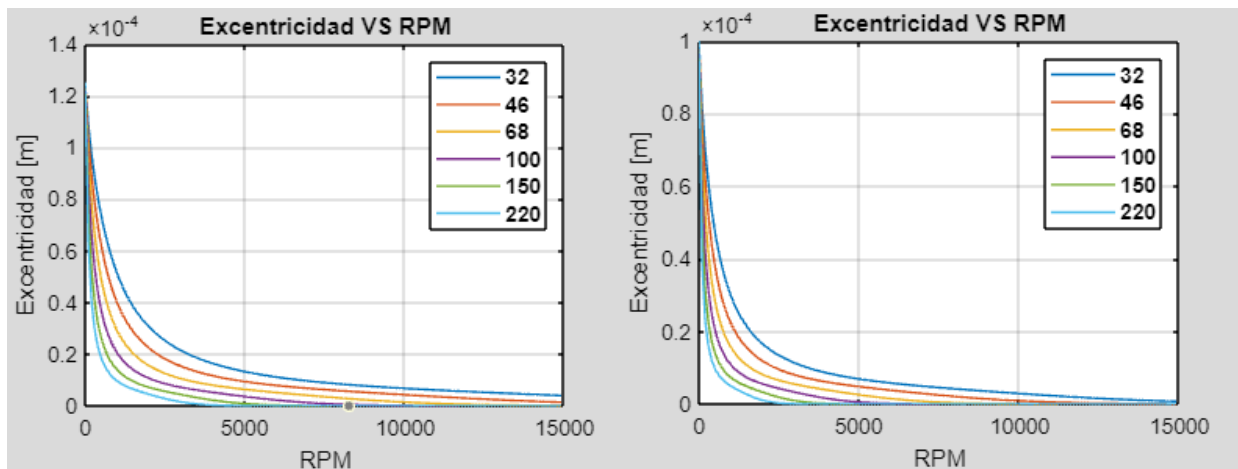
6.3.2 Excentricidad del muñón respecto del apoyo

Según BUDYNAS, R. & KEITH, N. J., como se denota la figura 29, el centro del muñón está en O y el del cojinete en O'. La distancia entre estos centros representa la excentricidad, que se denota por e . El espesor mínimo de la película se designa por h_0 y se encuentra en la línea de los centros. El espesor de la película en cualquier otro punto se designa por h . (pág. 605)

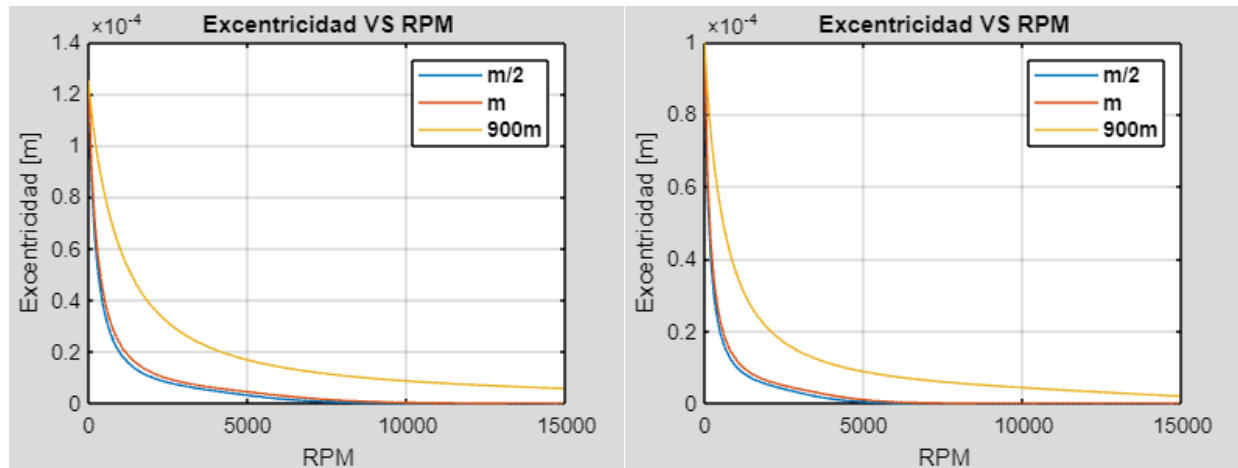
En las figuras a continuación (Fig. 14, Fig. 15 y Fig. 16) se evidencia el comportamiento de la excentricidad bajo condiciones de laboratorio, variado el tipo de lubricante y al modificar la masa del disco.

Figura 14. Excentricidad del muñón respecto del cojinete en el apoyo 1, e_1 y del apoyo 2, e_2 .

Nota. En la imagen se evidencia el comportamiento de la excentricidad en los apoyos.

Figura 15. Excentricidad variando la viscosidad del aceite.

Nota. En la figura se identifican la variación de la excentricidad cambiando el tipo de aceite según ISO, a la derecha apoyo 2 y a la izquierda apoyo 1.

Figura 16. *Excentricidad variando la viscosidad la carga.*

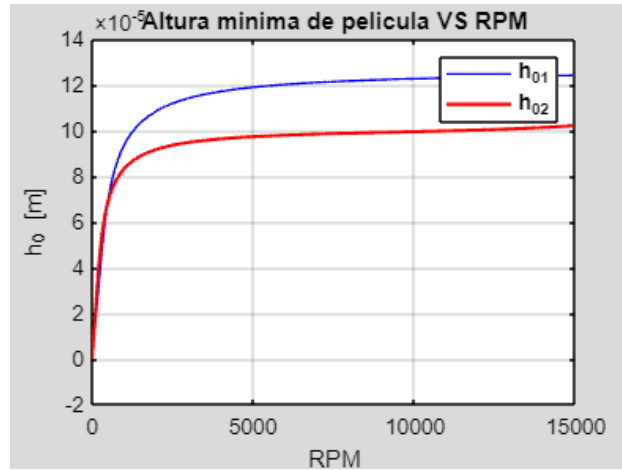
Nota. En la gráfica se identifican la variación de la excentricidad cambiando la carga a la mitad de la carga orinal ($\frac{1}{2} * m$), m , y $900 * m$, a la derecha apoyo 2 y a la izquierda apoyo 1.

6.3.3 Espesor mínimo de película de lubricante.

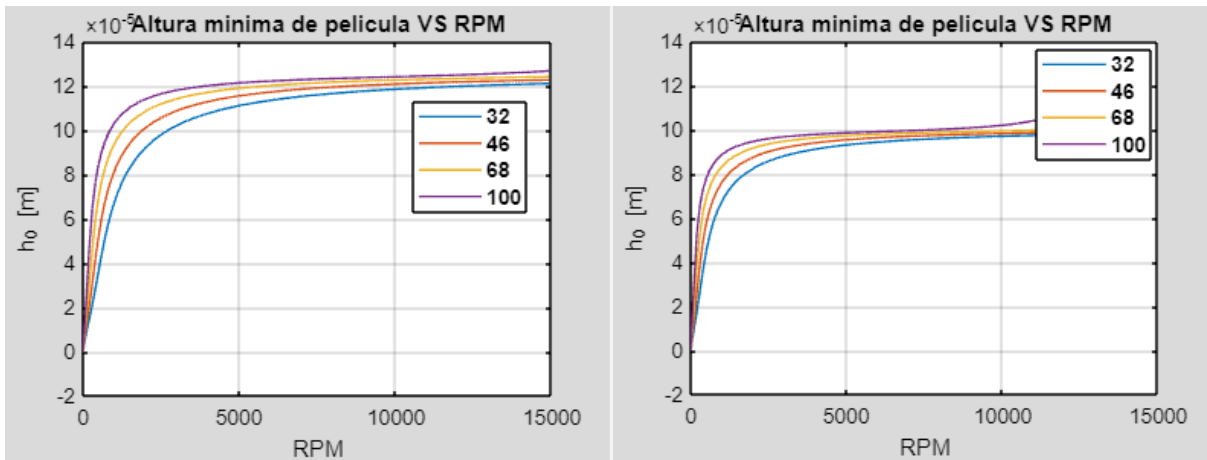
BUDYNAS, R. & KEITH, N. J. afirman lo siguiente:

La lubricación hidrodinámica significa que las superficies de soporte de carga del cojinete se encuentran separadas por una película de lubricante relativamente gruesa, para prevenir el contacto de metal con metal y que la estabilidad que se obtiene de esta manera pueda explicarse mediante las leyes de la mecánica de fluidos, a fin de separar las superficies contra la carga en el cojinete (pág. 598).

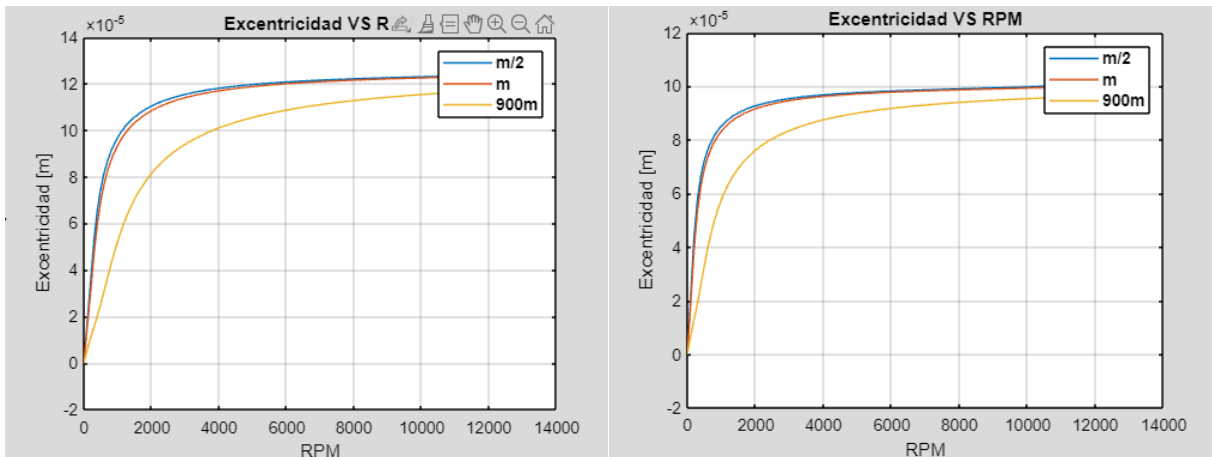
En las gráficas (Fig. 17, Fig. 18 y Fig. 19) se evidencia el comportamiento del espesor mínimo de película con respecto a la velocidad de giro del eje bajo condiciones de laboratorio, variado el tipo de lubricante y al modificar la masa del disco.

Figura 17. *Espesor mínimo de película de aceite en el apoyo 1, h_{01} y del apoyo 2, h_{02} .*

Nota. En la figura se evidencia el comportamiento del espesor de película de lubricante en los apoyos.

Figura 18. *Espesor mínimo de película de aceite.*

Nota. En la figura se evidencia el comportamiento del espesor de película de lubricante en el apoyo 1 a la izquierda, como en el apoyo 2 a la derecha cuando se modifica el aceite.

Figura 19. *Espesor mínimo de película de aceite.*

Nota. En la figura se evidencia el comportamiento del espesor de película de lubricante en el apoyo 1 a la izquierda, como en el apoyo 2 a la derecha cuando se modifica la carga.

6.3.4 Rigidez del sistema y apoyos

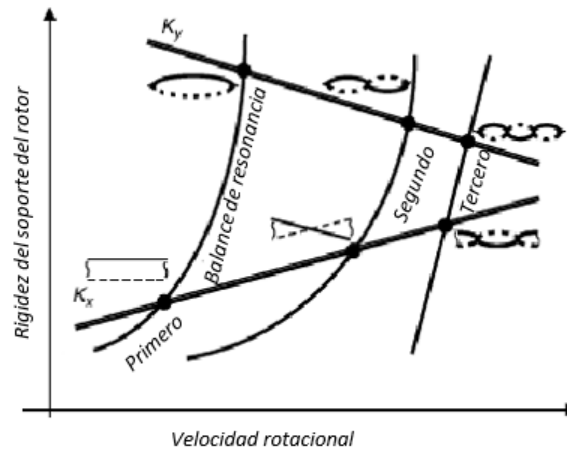
La rigidez de los cojinetes hidrodinámicos afecta las velocidades críticas y la estabilidad del rotor, lo que resulta de gran importancia sobre todo en aplicaciones en las que su uso pretende amortiguar impactos y disipar efectos desestabilizadores. En este sentido, es importante contar con métodos eficientes para calcular las características dinámicas de un cojinete (Merelli, et al., 2016, pág. 2).

La Figura 20 presenta una imagen cualitativa de los posibles modos del rotor como funciones de la velocidad de rotación y la rigidez del soporte.

AGNIESZKA, M. afirma: “Si la rigidez del rotor es mucho más alta que la rigidez del soporte, el primer modo es el modo “cilíndrico” del cuerpo rígido. El segundo modo también es un modo de cuerpo rígido, “cónico”, con el punto nodal entre los soportes del rotor. El tercer modo incluye deflexiones tanto de los soportes como del rotor. El tercer modo tiene dos

puntos nodales entre los soportes del rotor. Si la rigidez del soporte es alta, entonces el primer modo es la flexión del rotor, como la mitad de una senoide.” (pág. 88).

Figura 20. *Modos del rotor.*



Nota. En la figura se observa el modo de rotor se configura como funciones de velocidad de rotación y rigidez de soporte. Fuente: (Agnieszka, 2005, pág. 88).

Según GENTA, G., la rigidez del sistema tanto en X como en Y está dada por la ecuación 5 y 6.

Ecuación 4

Rigidez en X

$$K_X = \frac{1}{\left(\frac{1}{K_s}\right) + \left(\frac{1}{K_x}\right)} \quad (5)$$

Ecuación 5

Rigidez en Y:

$$K_Y = \frac{1}{\left(\frac{1}{K_s}\right) + \left(\frac{1}{K_y}\right)} \quad (6)$$

Donde:

K_s = Rigidez del elemento finito del eje.

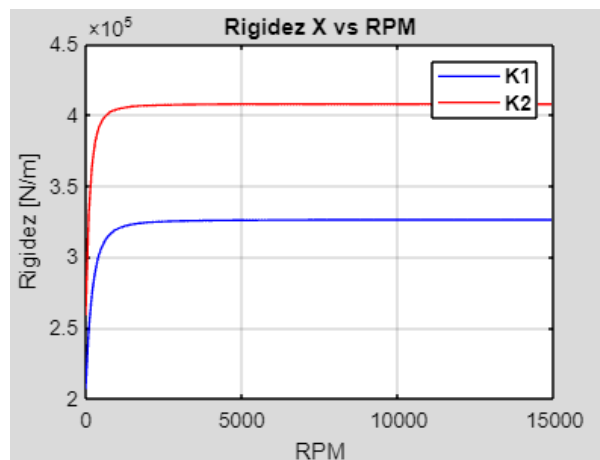
K_x = Rigidez del apoyo en dirección x .

K_y = Rigidez del apoyo en dirección y .

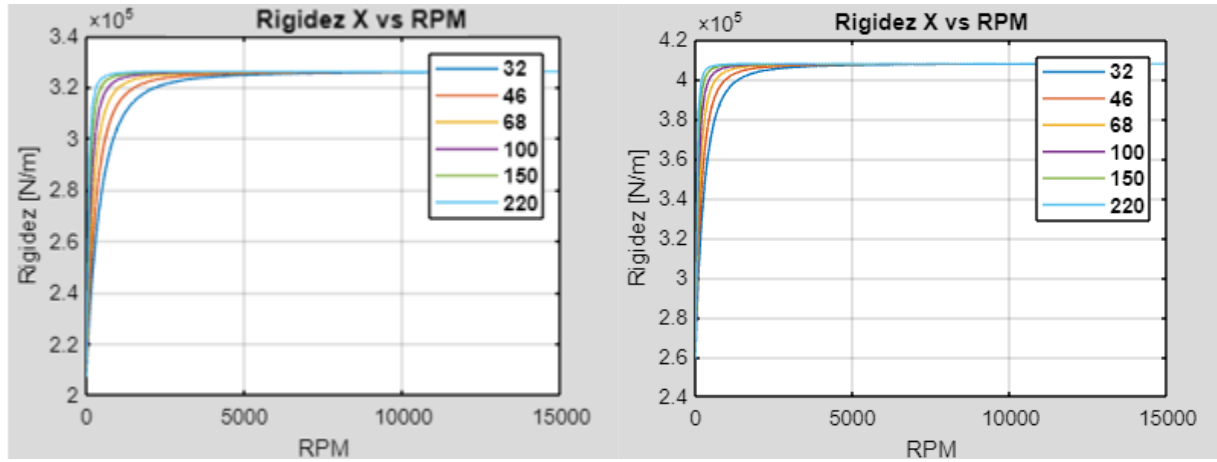
A continuación, se muestran los resultados de la rigidez, en las figuras 21, 23, 26 y 27 tendremos el comportamiento bajo condiciones de laboratorio y en las figuras 22, 24 y 25 se evidencia el proceder de la rigidez al cambiar el tipo de aceite.

En las figuras 23, 24 y 25 se puede observar que durante el arranque el valor de la rigidez es muy elevado debido a las condiciones del arranque, su pudo observar mejor el resultado corriendo el código con una velocidad inicial de 200 RPM.

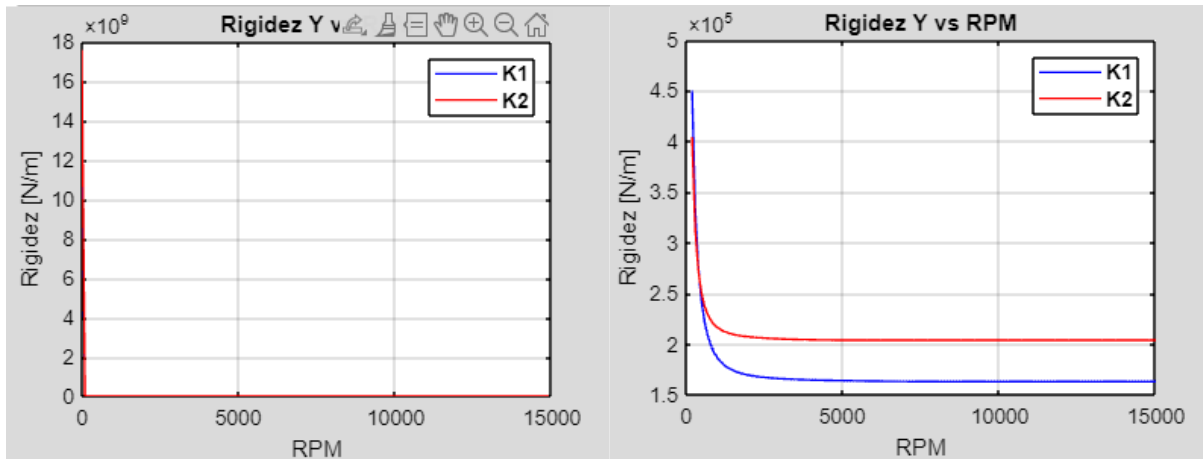
Figura 21. Rigidez en X en condiciones operativas de laboratorio.



Nota. En la Figura 21 se observa la rigidez del elemento finito del eje en X tanto para el apoyo 1 (K_1), como en el apoyo 2 (K_2).

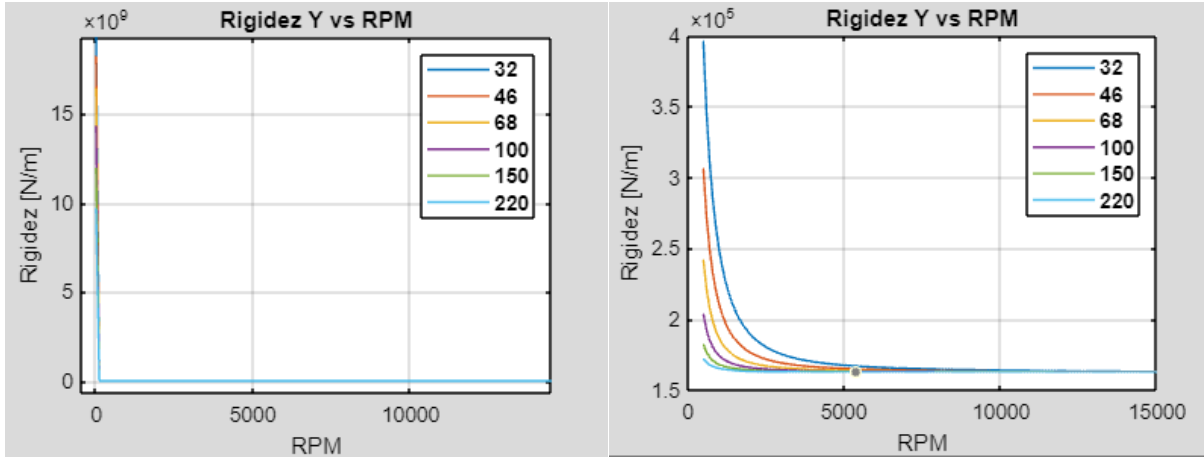
Figura 22. Rigidez en X variando la viscosidad del aceite.

Nota. En la figura 22 se observa lo rigidez del elemento finito del eje en X tanto para el apoyo 1 izquierda, como en el apoyo 2 derecha. Variando la viscosidad del aceite según ISO.

Figura 23. Rigidez en Y en condiciones operativas de laboratorio.

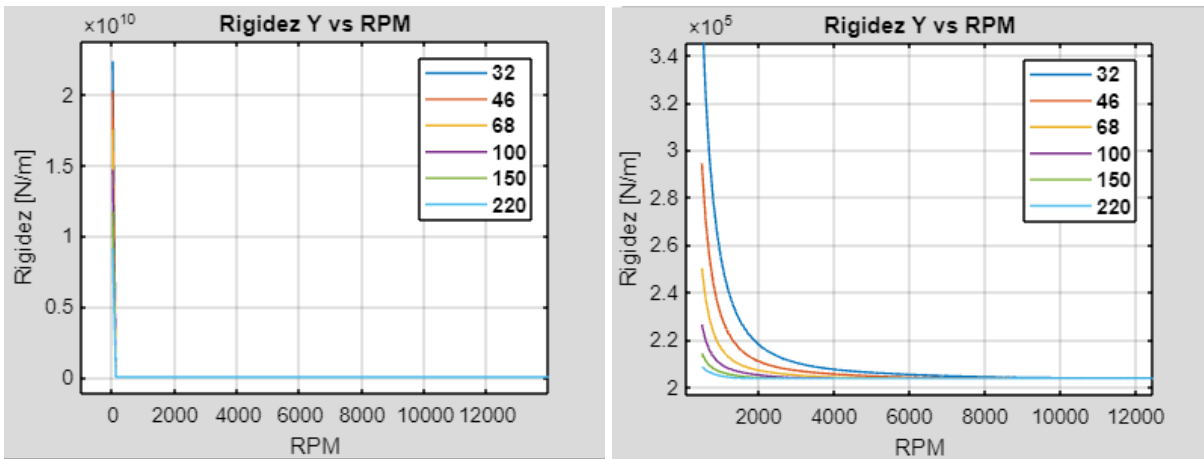
Nota. En la figura 33 se observa lo rigidez del elemento finito del eje en Y tanto para el apoyo 1 (K_1), como en el apoyo 2 (K_2).

Figura 24. Rigidez en Y variando viscosidad del aceite apoyo 1.

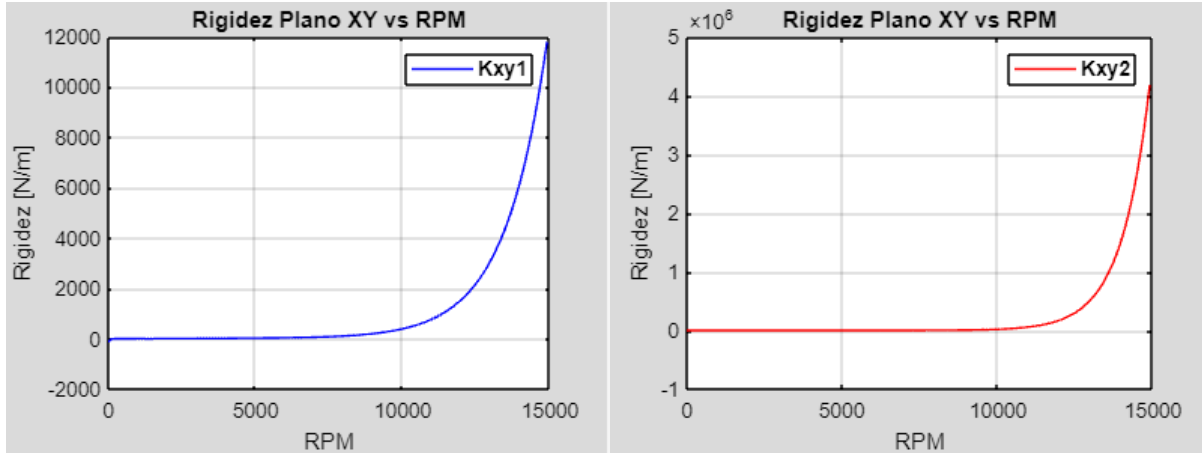


Nota. En la figura 44 se observa lo rigidez del elemento finito del eje en Y para el apoyo 1.

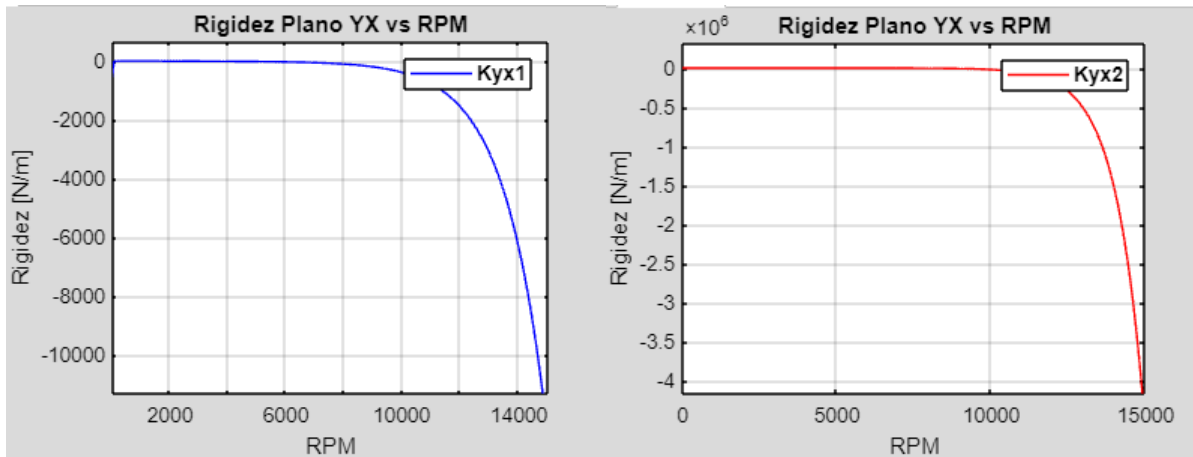
Figura 25. Rigidez en Y variando viscosidad del aceite apoyo 2.



Nota. En la Figura 45 se observa lo rigidez del elemento finito del eje en Y para el apoyo 2.

Figura 26. Rigidez en el plano XY.

Nota. En la gráfica anterior se observa lo rigidez del cojinete en el plano XY en el cojinete 1 imagen de la izquierda y cojinete 2 imagen de la derecha.

Figura 27. Rigidez en el plano YX.

Nota. En la gráfica anterior se observa lo rigidez del cojinete en el plano YX en el cojinete 1 imagen de la izquierda y cojinete 2 imagen de la derecha.

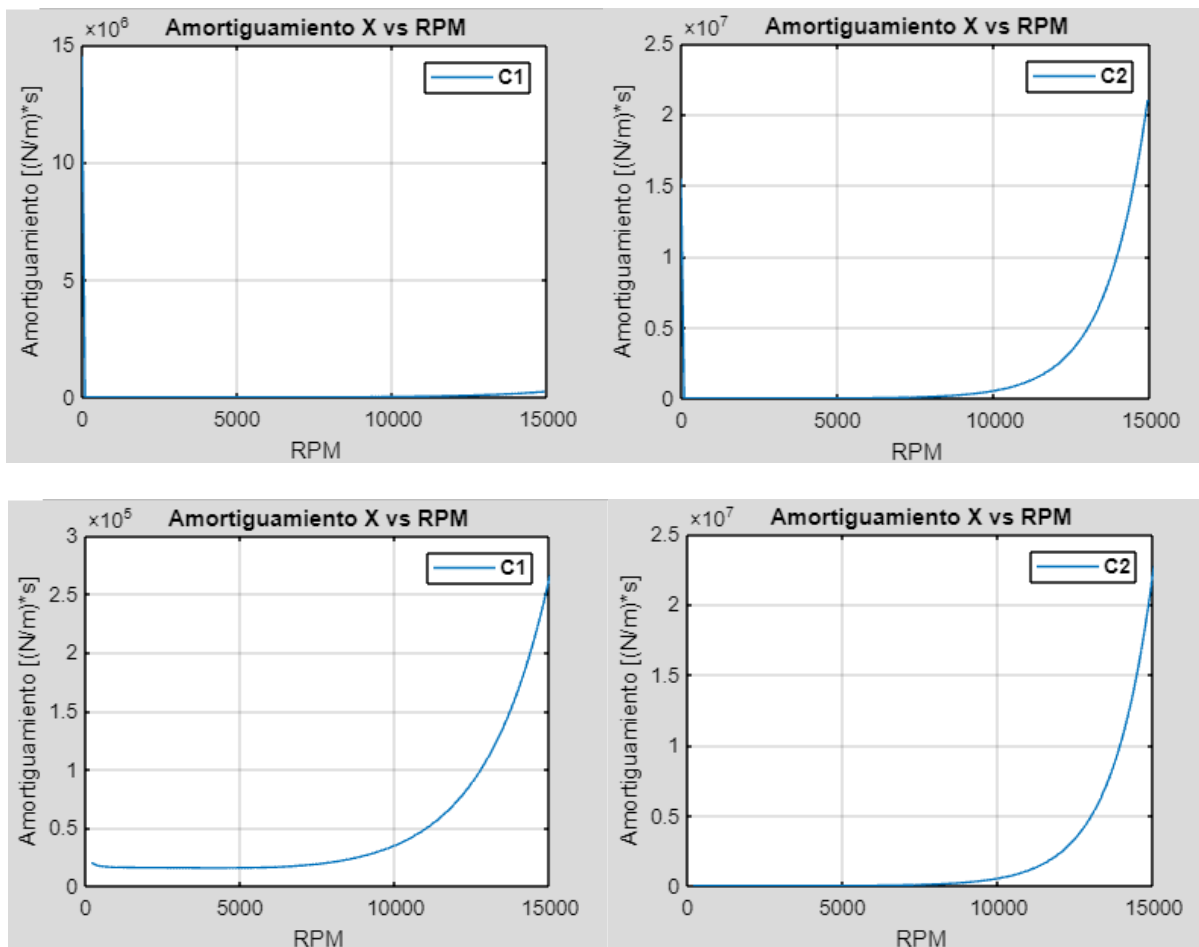
En el apéndice D se encuentran las gráficas del comportamiento de la rigidez de los cojinetes hidrodinámicos en los planos XY y YX variando la viscosidad del aceite.

6.3.5 Amortiguamiento de los apoyos

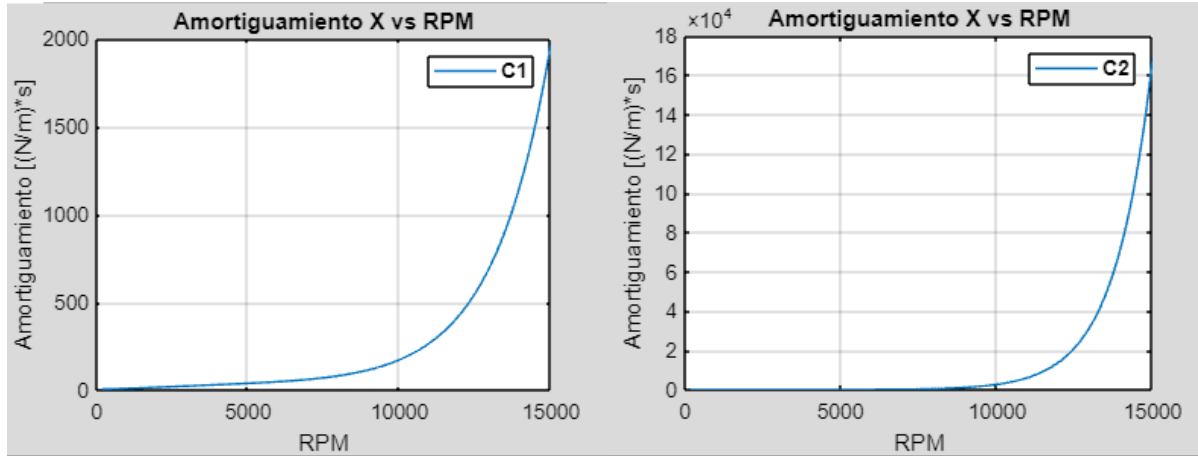
HIPÓLITO NÚÑEZ, A. afirma lo siguiente: “El amortiguamiento se define como la capacidad de un sistema, en este caso el cojinete, de atenuar y disipar energía cinética. Se pueden dar casos en los que el amortiguamiento del sistema puede incluso eliminar los efectos de la velocidad crítica para ciertos modos de vibración”. (pág. 30).

A continuación, se muestran los resultados del amortiguamiento, en las figuras 28, 29, 30 y 31 tendremos el comportamiento bajo condiciones de laboratorio.

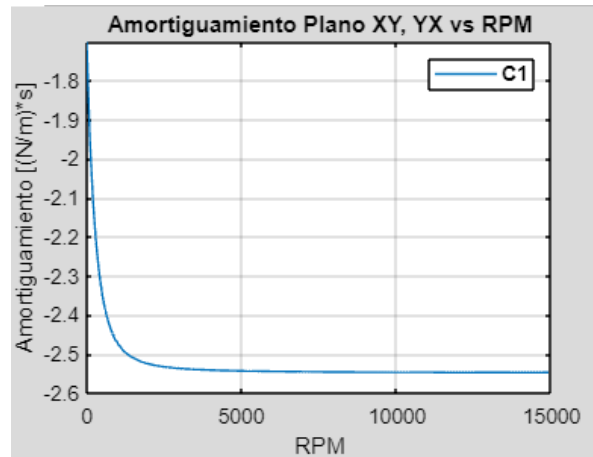
Figura 28. Amortiguamiento en X.



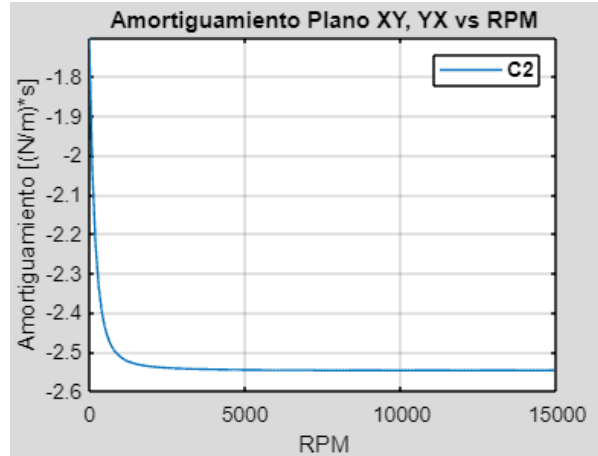
Nota. En la gráfica anterior se observa que al lado derecho tenemos el comportamiento para el amortiguamiento del apoyo 2 y del lado izquierdo del apoyo 1.

Figura 29. Amortiguamiento en Y.

Nota. En la gráfica 49 se observa que al lado derecho tenemos el comportamiento para el amortiguamiento del apoyo 2 y del lado izquierdo del apoyo 1.

Figura 30. Amortiguamiento en los planos XY y YX.

Nota. En la gráfica 50 se evidencia el amortiguamiento del cojinete 1 en los planos XY y YX.

Figura 31. Amortiguamiento en los planos XY y YX.

Nota. En la gráfica 51 se evidencia el amortiguamiento del cojinete 1 en los planos XY y YX.

En el apéndice D se encuentran las gráficas donde podemos deducir tendencia del amortiguamiento tanto del cojinete 1 como del 2, en dirección X, Y, XY y YX variando la viscosidad del aceite según el tipo de aceite ISO.

En las secciones anteriores se evidencio que, al cambiar el aceite de lubricación, la carga, afectaba la rigidez, el amortiguamiento, numero de Sommerfeld, excentricidad y espesor de película de lubricación, en la sección que sigue se evalúa como se ven afectadas las velocidades críticas o frecuencias naturales del sistema al variar el material, geometría o viscosidad del aceite.

Se sabe que la rigidez del sistema, masa del sistema y amortiguamiento del sistema dependen del módulo de elasticidad de los materiales, de la geometría de los materiales, de la longitud del eje y de los apoyos, ¿Qué pasaría si modificamos el módulo de elasticidad, diámetro o cambiamos el tipo de lubricación?, en el apéndice B encontramos las matrices del sistema de elementos finitos y cada una de los factores o variables que afectan el comportamiento de dicho sistema.

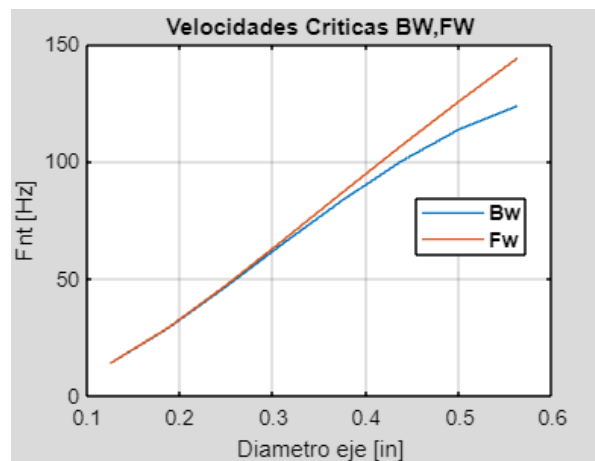
6.3.6 Velocidades críticas.

AGNIESZKA, M., afirma:

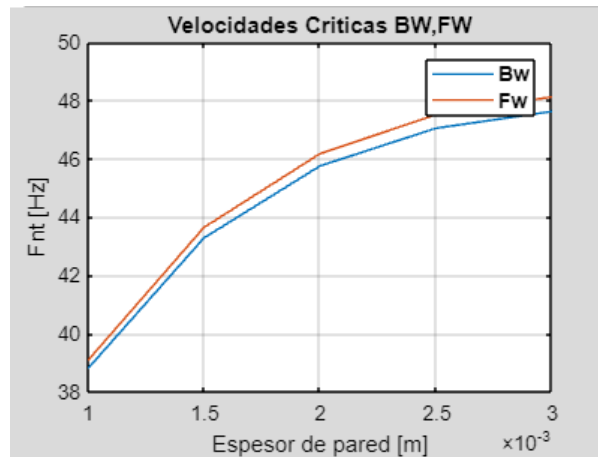
“Por lo general, las frecuencias de resonancia, a menudo llamadas "frecuencias críticas", que están estrechamente relacionadas con modos específicos, se entienden intuitivamente cuando el sistema mecánico se excita con una fuerza periódica de frecuencia de barrido; existen “frecuencias críticas” en las cuales el sistema vibra violentamente. Estas "frecuencias críticas" corresponden a las frecuencias naturales del sistema. El "modo", que está asociado con cada frecuencia "natural" o "crítica".” (pág. 80).

En las figuras 32 y 33 se modificó el área de sección transversal del eje para estudiar y obtener una respuesta a las variaciones de las velocidades críticas al incrementar o disminuir el área de sección transversal.

Figura 32. Variación de las 2 primeras velocidades críticas BW y FW.

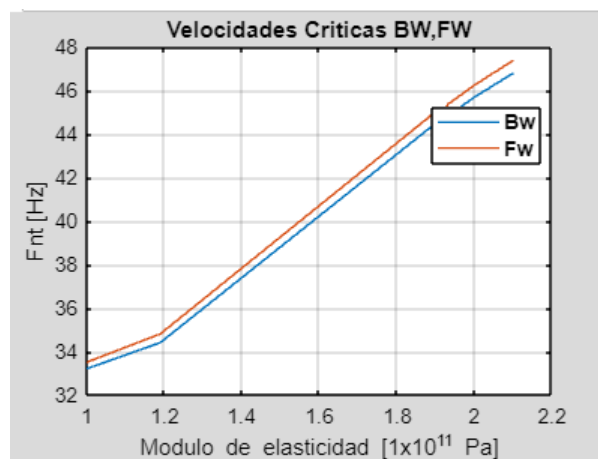


Nota. En el gráfico anterior tenemos el comportamiento de las dos primeras velocidades críticas Backward (BW) y Forward (FW) al variar el diámetro del eje desde 1/8" hasta un 9/16".

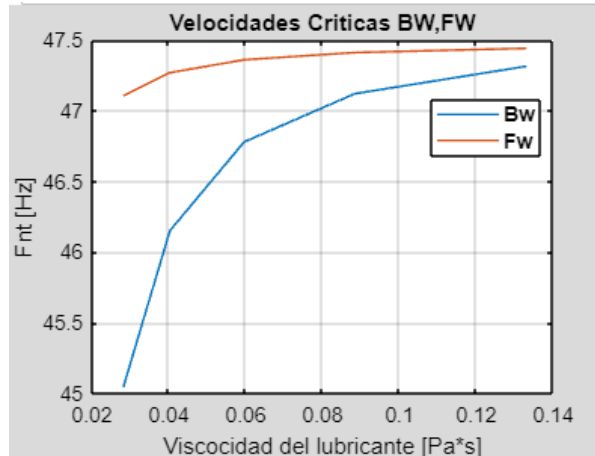
Figura 33. Velocidades críticas BW y FW variando el diámetro interno del eje.

Nota. En el gráfico anterior tenemos el comportamiento de las velocidades críticas BW y FW al variar el diámetro interno del eje iniciando con un espesor de pared de 1 mm hasta 3 mm.

En las figuras a continuación (34 y 35) podemos ver como varían las dos primeras velocidades críticas al cambiar el tipo de material del eje y el tipo de aceite

Figura 34. Velocidades críticas BW y FW variando el material del eje.

Nota. En el gráfico anterior tenemos el comportamiento de las velocidades críticas Backward (BW) y Forward (FW) al variar el material del eje.

Figura 35. Velocidades críticas BW y FW variando el lubricante.

Nota. En el gráfico anterior tenemos el comportamiento de las velocidades críticas BW y FW al variar el lubricante según ISO.

Las figuras 32, 33, 34 y 35 representan los valores de las velocidades críticas que varían según el material utilizado, diámetro del eje modificados, tipos de lubricantes utilizados y toda esta información será presentada en el apéndice E, para tener una mayor comprensión de las gráficas anteriores.

6.4 Resultados del modelo experimental y teórico

6.4.1 obtención de datos modelo experimental

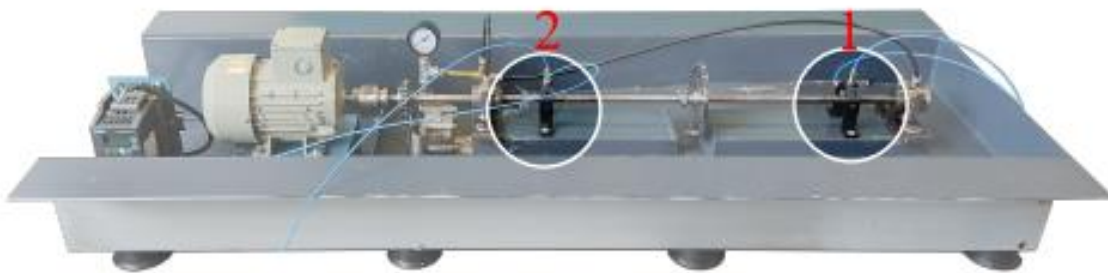
Inicialmente se le realiza una prueba de arranque del motor para calibrar la velocidad del motor con el variador y luego poder ajustar esta prueba se llevó a cabo durante un tiempo determinado, este tiempo fue el necesario para realizar las pruebas de calibración y ajuste del motor y variador.

6.4.1.1 Equipos de medición utilizados. Los equipos utilizados son los mencionados en el capítulo 4, son estos en conjunto en hacer funcionar el banco de pruebas y encargados de la

adquisición, transformación de la información de señales de sonidos y vibraciones a datos o muestreos que se pueden apreciar en el ordenador.

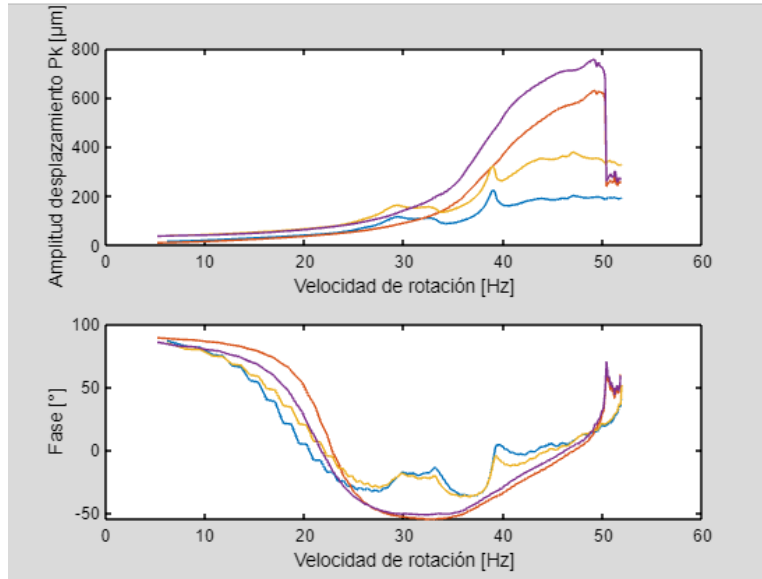
Los equipos están ubicados según la imagen 36, tenemos los sensores de desplazamiento en tres dimensiones están montados a cierta distancia de cada apoyo, ya que el eje fue discretizado en 17 elementos de 5 cm cada uno nuestro primer sensor está ubicado entre el tercer y segundo nodo, los cuales corresponden al apoyo número 1, el segundo sensor de desplazamiento está ubicado en el nodo número 13 muy cercano al apoyo número 2, este último es el apoyo próximo al piño, acople del motor y motor.

Figura 36. *Sensores de desplazamiento instalados en el banco de ensayos.*

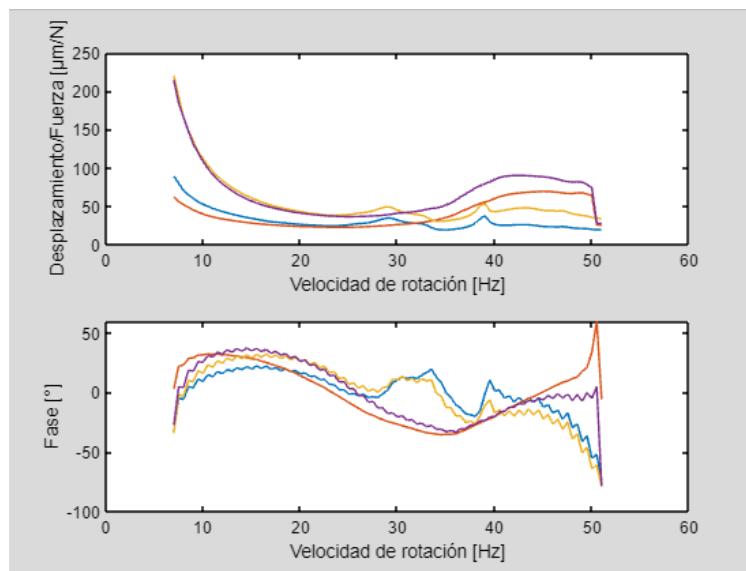


Nota. En la figura se observa el banco de ensayos con los sensores de adquisición de datos. Fuente: (MORALES HERNÁNDEZ, 2022, pág. 69).

En las imágenes 37 y 38 se presentan los datos de desplazamiento adquiridos por los sensores de desplazamientos e interpretados por la OROS 35OR, la primera presenta unos datos rústicos influenciada por ruidos y vibraciones del ambiente y la segunda una gráfica ajustada y filtrada, tenemos dos desplazamientos en Y graficas morada (sensor 1) y naranjada (sensor 2) como los desplazamientos en X grafica amarilla (sensor 1) y grafica azul (sensor 2).

Figura 37. Datos experimentales obtenidos del banco de ensayos.

Nota. En la imagen se aprecia los datos obtenidos del banco de ensayos sin ajustar, sin eliminar ruidos o vibraciones parasitas.

Figura 38. Datos experimentales obtenidos del banco de ensayos ajustados.

Nota. En la imagen se aprecia los datos obtenidos del banco de ensayos limpios.

6.4.2 Obtención de datos modelo Teórico

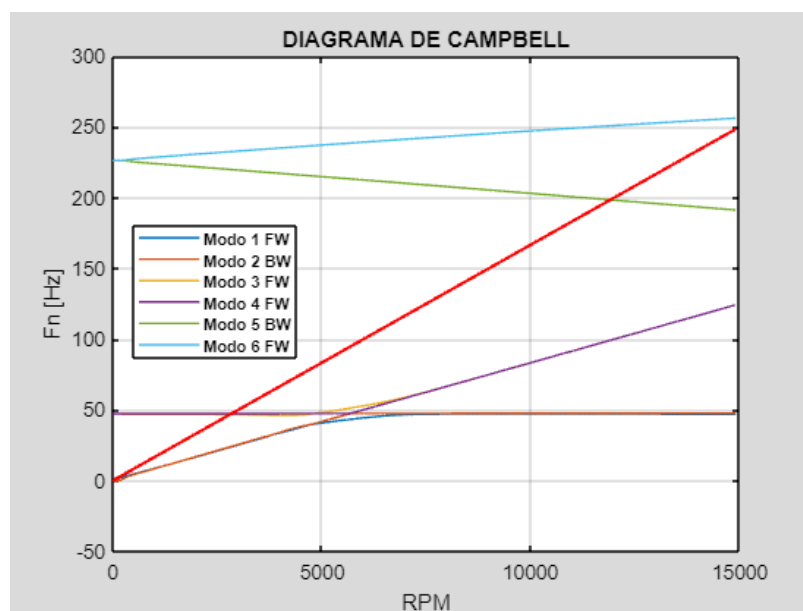
6.4.2.1 Diagrama de Campbell

MORALES HERNÁNDEZ, B. F., afirma: “El diagrama de Campbell es una herramienta gráfica que permite visualizar las frecuencias naturales de los modos de vibración del rotor en función de la velocidad de rotación. Este diagrama permite identificar las velocidades críticas del rotor, es decir, las frecuencias naturales que son excitadas por la coincidencia con la velocidad de rotación del sistema.”

A partir de la parte imaginaria de los valores propios λ , es decir, de la frecuencia natural amortiguada ω_d , se grafican los primeros 6 modos de vibración en función de la velocidad de rotación del rotor ω . Cada uno de los modos graficados se etiquetan con el sentido del cabeceo del rotor, backward (BW) o forward (FW). El diagrama de Campbell del modelo numérico del rotor se muestra en la Figura 39.

Para graficar el diagrama de Campbell debemos tener en cuenta la parte imaginaria de la ecuación 1 que corresponde ω_d , que es la frecuencia natural amortiguada del sistema.

Figura 39. Diagrama de Campbell.



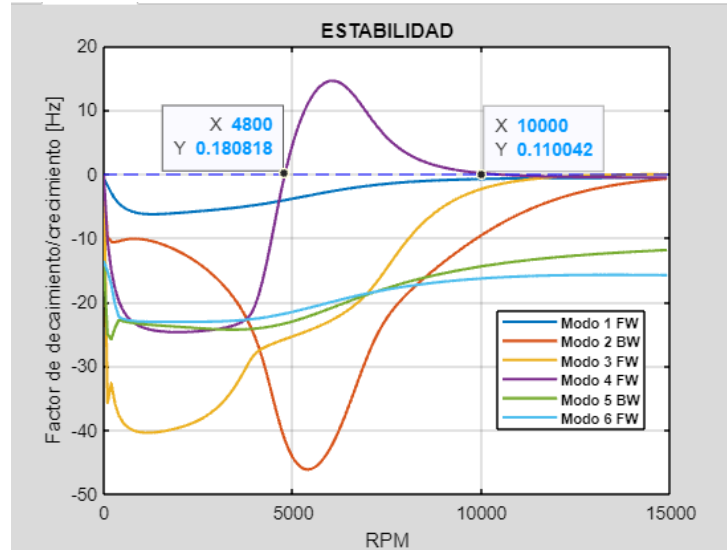
Nota. En la imagen se aprecia las velocidades críticas del banco de ensayos rotor flexible tipo Jeffcott.

En la Figura 39, la línea 1x (línea roja) corresponde a las vibraciones síncronas del rotor, que se refiere a la relación entre la frecuencia de vibración y rotación y como se puede observar, los valores de cruce donde la curva 1x se corta con las curvas de modo son los valores de las velocidades críticas del roto, son estas frecuencias a las que se debe evitar girar el rotor para que no ocurra una falla grave, ya que podría entrar en resonancia el rotor al girar en estas velocidades de sincronización.

Las velocidades críticas que se deben tener en cuenta son 44,78 Hz BW, 45,32445 Hz FW y 189,63 Hz BW, estas velocidades corresponden a los modos 3,4 y 5 respectivamente.

6.4.2.2 Diagrama de estabilidad. MORALES HERNÁNDEZ, B. F., afirma lo siguiente:

El diagrama de estabilidad muestra la variación de la tasa de crecimiento o decaimiento, también conocida como tasa de atenuación, de las frecuencias naturales del sistema en función de la velocidad de rotación. Este diagrama permite determinar los intervalos de frecuencia donde el sistema es inestable, es decir, donde la parte real de los valores propios de los modos subamortiguados es positiva. Los valores positivos indican que el coeficiente de amortiguamiento es menor que 0 ($\zeta < 0$). Este fenómeno implica una falta de amortiguamiento y provoca un aumento en la amplitud de las vibraciones del sistema con el tiempo (págs. 59, 60).

Figura 40. Diagrama de Estabilidad.

Nota. En la imagen se aprecia en que velocidades el sistema es inestable.

Si el diagrama de Campbell corresponde a la parte imaginaria, pues el diagrama de estabilidad corresponde a la parte real de la ecuación 1; es decir, $\xi\omega n$.

En la Figura 40, la curva horizontal punteada ($y = 0$) corresponde al valor de 0 Hz y corresponde al umbral de estabilidad del sistema. Los valores que se encuentran por encima de esta línea se encuentran en una zona de inestabilidad al contrario de los que se encuentran por debajo de esta línea están en la zona de estabilidad; es decir, los valores situados en la zona estable ($\zeta > 0$) corresponden a aquellos modos y velocidades críticas que conforman un sistema estable, mientras que los valores situados por encima ($\zeta < 0$), corresponden a la zona de inestabilidad dinámica del sistema y es la zona para la cual el sistema de estudio no debe ser operado, puesto que allí produce un incremento repentino en la amplitud de vibración del sistema, que puede ocasionar niveles destructivos.

Cada uno de los modos graficados se etiquetan con el sentido del cabeceo del rotor, backward BW o forward FW. Los 6 modos analizados muestran un comportamiento entre un rango que no debe ser operado el sistema en estudio de 4800 a 10000 [RPM].

Si bien, en el diagrama de Campbell las velocidades críticas del sistema no se presentan en un rango aproximado de 2800 a 12000 el diagrama de estabilidad evidencia una zona inestable para velocidades por encima de 4800 rpm, producto del modo 4 de vibración.

6.5 Comparación

La comparación del modelo teórico y experimental se llevó a cabo con el criterio de garantía nodal o *Modal Assurance Criterion (MAC)*

6.5.1 Criterio de garantía modal (MAC)

MAC es utilizado para el análisis modal para indicar la similitud entre dos formas modales, PASTOR, M., BINDA, M. & HARPARIK, T. afirman lo siguiente

El desarrollo del MAC se modeló a partir del desarrollo del cálculo de coherencia ordinario asociado con cálculo de la función de respuesta de frecuencia. El MAC es un indicador estadístico, al igual que la coherencia ordinaria. Esto menos la forma de análisis de regresión lineal basada en cuadrados produce un indicador que es más sensible a la mayor diferencia entre valores comparativos y da como resultado un criterio de aseguramiento modal que es insensible a pequeños cambios o pequeñas magnitudes. El MAC se introdujo originalmente en las pruebas modales en relación con el factor de escala modal, como un parámetro adicional. Factor de confianza en la evaluación del vector modal desde diferentes ubicaciones de excitación. Cuando una matriz FRF (función de respuesta de frecuencia) se

expresa en la forma de expansión de fracción parcial, el numerador de cada término representa la matriz de residuos o constantes modales (pág. 2).

Como se mencionó anteriormente el MAC se utiliza para determinar la similitud de dos formas modal, si las dos formas modales estudiadas son idénticas el MAC tendrá un valor de uno o 100%, pero en cambio si las formas modales estudiadas soy cercanas a cero; es decir, diferentes de 1 los modos son diferentes.

6.5.1.1 Casos de uso de garantía modal. Según SIEMENS.: Un análisis de criterio de garantía modal (MAC) se puede utilizar de varias maneras diferentes:

- Comparación de prueba FEA: se puede utilizar un MAC para comparar modos de una prueba de análisis modal experimental con un análisis de elementos finitos (FEA).
- Comparación FEA-FEA: se pueden hacer varias suposiciones en la creación de un análisis FEA: módulo de Young, condiciones de contorno y valores de densidad de masa, por nombrar algunos. Un análisis MAC puede determinar el grado en que estos supuestos afectan las formas modales resultantes.
- Comparación prueba-prueba: un análisis MAC puede señalar posibles problemas con los resultados del análisis modal. Por lo general, MAC identificará modos y áreas que podrían beneficiarse de la adquisición de más puntos de datos en la estructura.

6.5.1.1 Ecuación del criterio de garantía modal (MAC). SIEMENS., también afirma que el valor MAC entre dos modos es esencialmente el producto escalar normalizado del vector modal complejo en cada nodo, como se muestra en la Ecuación 6. También puede considerarse como el cuadrado de correlación entre dos vectores modales.

Ecuación 6

$$MAC(r, q) = \frac{|\{\varphi_A\}_r^T \{\varphi_X\}_q|^2}{(\{\varphi_A\}_r^T \{\varphi_A\}_r)(\{\varphi_X\}_q^T \{\varphi_X\}_q)} \quad (6)$$

Donde:

$\{\varphi_X\}_q =$ vector modal de prueba modo q .

$\{\varphi_A\}_r =$ vector modal analítico compatible, modo r .

$\{\varphi_X\}_q^T =$ transpuesta de $\{\varphi_X\}_q$

$\{\varphi_A\}_r^T =$ transpuesta de $\{\varphi_A\}_r$

6.5.2 Método de comparación

Inicialmente se obtuvieron las frecuencias naturales del diagrama de Campbell de la figura 39, las cuales son:

- 44,78 Hz BW
- 45,32445 Hz FW
- 189,63 Hz BW

Luego estas frecuencias se compararon con los desplazamientos de la figura 38, y de esta última se hallaron los desplazamientos en estas frecuencias y se armó la matriz, llamada $m_{s_x} = \{\varphi_A\}_r$, descrita en la ecuación 7.

Ecuación 7

$$ms_x = \begin{bmatrix} 0.00044 & 0.00042 & 0.00042 & 0.00038 \\ 0.00035 & 0.00034 & 0.00035 & 0.00033 \\ 0.00022 & 0.00021 & 0.00020 & 0.00018 \\ 0.00012 & 0.00011 & 0.00011 & 0.00010 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Luego de obtener el vector nodal analítico ms_x se busca en los modos y nodos de la matriz encargada de los datos para graficar el diagrama de Campbell, se encuentran los desplazamientos se arma la matriz $ms_A = \{\varphi_x\}_q$ ecuación 8, se corre el MAC y los valores iniciales son valores entre 0,5 y 0,6, lo cual dice que los modos comparados son ligeramente similares.

Ecuación 8

$$ms_A = \begin{bmatrix} 0.00022 & 0.00050 & 0.00060 & 0.000360 \\ 0.00023 & 0.00030 & 0.00040 & 0.000330 \\ 0.00026 & 0.00025 & 0.00024 & 0.000220 \\ 0.00050 & 0.00012 & 0.00013 & 0.000095 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Por último, se realizan ajustes en la simulación; es decir, en el modelo matemático y se obtiene una nueva matriz ms_A , con un resultado de 0,97.

La nueva matriz ms_A es:

$$ms_A = \begin{bmatrix} 0.00044 & 0.00043 & 0.00042 & 0.00038 \\ 0.00025 & 0.00024 & 0.00034 & 0.00033 \\ 0.00022 & 0.00022 & 0.00020 & 0.00018 \\ 0.00014 & 0.00011 & 0.00011 & 0.00010 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

7. Conclusiones

1. Se implementó con éxito un modelo numérico acoplado mediante el método de elementos finitos, logrando estudiar la influencia de apoyos anisótropos en la respuesta dinámica del rotor, considerando dimensiones geométricas y condiciones de operación a nivel de laboratorio.

Además de las condiciones de operación de laboratorio el modelo matemático nos permitió estudiar la respuesta dinámica al variar la geometría y propiedades físicas del sistema.

2. La solución del modelo numérico arrojó como resultado tres velocidades críticas expuestas en el diagrama de Campbell figura 39, también arrojó un rango de velocidades para la cual el sistema es inestable ver la figura 40, en conclusión, el rotor deberá ser operado a velocidades por debajo de la primera velocidad crítica de 2686 rpm para evitar vibraciones considerables y por consiguientes daños en el banco de ensayos, según los resultados el rotor podría ser trabajado a velocidades entre 12000 y 1500 RPM.

3. El estudio dinámico de los apoyos permite establecer que, para velocidades mayores a 10000 RPM, la excentricidad del eje respecto a los apoyos disminuye considerablemente al contrario de la película de lubricante que es máxima.

La modelación numérica del rotor flexible, basada en el modelo de Jeffcott, fue exitosa, para lo cual se utilizó el método de los elementos finitos, lográndose una representación precisa de las dimensiones geométricas y condiciones de operación a nivel de laboratorio.

8. Recomendaciones

1. Se recomienda aislar el sistema de lubricación del sistema, sacarlo del sistema y que funcione de forma independiente con su propio motor ya que así eliminamos las vibraciones causadas por el sistema de transmisión de la bomba y el motor.
2. Mejorar el almacenamiento del lubricante ya que en las condiciones en las que se encuentra es fácil que este se contamine o se llene de impurezas afectando el sistema de lubricación.
3. Se recomienda fijar el banco de ensayos en una superficie libre de ruido y vibraciones del contorno que puedan afectar la obtención de datos del eje, eliminar ruido vibratorio y mejorar el comportamiento hidrodinámico de los cojinetes a altas velocidades.
4. Tener en cuenta que cosas mínimas como cambiar el tipo de aceite implica que se afectan las velocidades críticas del sistema lo cual podría causar inconvenientes, se recomienda trabajar con las mismas condiciones de operaciones iniciales y si se va a efectuar algún cambio avisar de dicho cambio.

9. Referencias Bibliográficas

- Acevedo A, L. F., & Pinto, J. S. (2018). *Modelamiento, diseño y construcción de un banco de pruebas para el estudio de la fuerza de desbalance en rotores flexibles teniendo en cuenta el efecto giroscópico*. Bucaramanga.
- Agnieszka, M. (2005). *Tomado de Rotodynamics*. Taylor & Francis Group, LLC.
- Agudelo, F. R. (2022). *Desarrollo de una metodología de Análisis Modal Operacional (OMA), para determinar los rangos de estabilidad dinámica de un rotor flexible tipo Jeffcott con velocidad variable, basada en las técnicas en el dominio del tiempo NExT y ERA*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.
- APA. (2010). *American Psychological Association. Manual de publicaciones. 3ª. Edición [traducida de la sexta en inglés]*. Bogotá: Manual Moderno.
- Betamachinery. (5 de Agosto de 2018). *Análisis de vibración lateral Dinámica de la rotación, velocidad crítica y análisis de estabilidad*. Obtenido de <https://es.betamachinery.com/services/lateral-vibration-analysis>.
- Blogs, A. (2015). *Componentes de un turbomaquina (turbina), para transformar energia cinetica*. Bogotá: planeta. Obtenido de <http://marialejbg.blogspot.com/2015/03/>.
- Budynas, R., & Keith, N. J. (2008). *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley*. Monterrey: McGraw Hill.
- Castañeda, C. L. (2014). *Diagnostico de fallas en maquinaria rotativa por analisis de vibraciones basado en maquinas de soporte vectorial*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.
- Domínguez, G. V. (2017). *Diagnóstico de daño en turbinas de vapor*. Sevilla: Escuela Técnica Superior de Ingeniería.

- Doney, e. a. (2021). *Diagrama de un motor de turbina de gas*. Obtenido de https://energyeducation.ca/Enciclopedia_de_Energia/index.php/Turbina .
- Ercoli, L; Salvador La malfa. (2010). *Teoria y practica del balanceo de rotores industriales*. Universidad Nacional de La Plata.
- Estanheiro, M. E. (2016). *Análisis experimental de la evolución de las órbitas y el frente de fisura de un eje giratorio*. Leganés: Universidad Carlos III de Madrid.
- Fernández, H. D., Fuentes, A. A., Martínez, A. A., Pérez, M. C., Rodríguez, M. A., & Sagastume, Q. A. (2016). *Fallas en una turbina de vapor*. Veracruz: Tecnológico nacional de México.
- Friswell, M. L., T. Penny, J. E., Garvey, S. D., & Lees, A. W. (2010). *Dynamics of Rotating Machines*. Cambridge: Cambridge University Press.
- García, C. A. (2001). *Vibraciones Mecánicas*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.
- Genta, G. (2004). *Dynamics of Rotating Systems*. Torino: Springer.
- Hipólito Núñez, A. (2021). *Fundamentos de la seleccion de cojinetes para turbinas de gas y vapor en plantas de potencia*.
- ISO 1940-1. (2003). Mechanical vibration Balance quality requirements for rotors in a constant (rigid) state Part 1: Specification and verification of balancetolerances. *ISO*, 36.
- Kruger, H. (2010). *Guia de Balanceo*. *Schenck*, 9.
- Lalanne, M., & Ferraris, G. (1998). *Rotordynamics prediction in engineering*. Colorado: Wiley.
- Lémoli, M., & Ahumada, D. (Mayo de 2017). *La importancia del balanceo dinámico en máquinas rotativas*. Obtenido de Electro Industria soluciones tecnologicas para mineria, energia e industria: <http://www.emb.cl/electroindustria/articulo.mvc?xid=3006>
- Lémoli, M., & Ahumada, D. (2017). *La importancia del balanceo dinámico en máquinas rotativas*. Obtenido de *Electro Industria soluciones tecnologicas para mineria, energia e industria*. Obtenido de <http://www.emb.cl/electroindustria/articulo.mvc?xid=3006>.

- López, R. R. (2006). *Experimentación y análisis de estabilidad dinámica en sistemas rotor-chumacera con y sin desalineamiento*. México DF: Instituto politécnico nacional.
- Lubrigras. (2021). *Lubry hidráulico TP*. Obtenido de <https://www..net/producto/lubry-hidraulico-tp-iso-68/>.
- Madrigal, M. J. (2018). *Metodología para el balanceo dinámico de rotores empleando el analizador de vibraciones oros 35*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.
- Mataix, C. (2014). *Mecanica de fluidos y maquinas hidraulicas*. Madrid: Ediciones del castillo.
- Merelli, C. E., Barilá, D. O., Vignolo, G. G., & Quinzani, L. M. (2016). *Calculo de coeficientes dinamicos para cojinetes hidrodinamicos de longitud finita*. La plata: Universidad Nacional del Sur.
- Meza, R. (2009). *Figura Canaletas, Agua, Energía y Deresu-111*. Obtenido de <https://deresu.blogg.se/2009/august/canaletas-agua-energia-y-deresu-111.html>.
- Monge, R. M. (2015). *Qué es y cómo se calcula el NPSHdisp de una bomba centrífuga España: iagua*. Obtenido de <https://www.iagua.es/blogs/miguel-angel-monge-redondo/que-es-y-como-se-calcula-npshdisp-bomba-centrifuga> .
- Morales Hernández, B. F. (2022). *Metodología para el ajuste y validación del modelo numérico de un rotor de jeffcott, mediante el uso de funciones de respuesta en frecuencia (frf)*. Bucaramanga: universidad industrial de santander.
- Muszynska, A. A. (2005). *Rotordynamics*. Minden, Nevada: Taylor & Francis Group, LLC.
- Nova, A. F. (2022). *Desarrollo de una metodología de Análisis Modal Operacional (OMA), para determinar los rangos de estabilidad dinámica de un rotor flexible tipo Jeffcott con velocidad variable, basada en las técnicas en el dominio del tiempo NExT y ERA*. Bucaramanga: Universidad industrial de santander.

- Pastor, M., Binda, M., & Harparik, T. (2012). *Modal Assurance Criterion*. MAMs: sciverse scienceDiret.
- Pérez, J. (2019). *Nepta bombas hidráulicas*. Bogotá: portal electromecánico. Obtenido de <http://www.portalelectromecanico.org/CURSOS/BombasHidraulicas/index.html> .
- Ramírez, V. I., Palacios, P. L., & Corro, H. H. (2013). Respuesta vibratoria de un rotor apoyado en chumaceras hidrodinámicas cortas. *XIX Congreso internacional anual de la SOMIM. México* (pág. 10). Pachuca, Hidalgo: SOMIM.
- Rodríguez, P. (2017). *Cálculo de la respuesta al desequilibrio de un rotor flexible*. Valencia: Universitat Politècnica de València.
- Serrano, H. Y. (2015). *Historia de las turbomáquinas hidráulicas*. Durango: Universidad Autónoma España de Durango.
- Siegel, J. J. (2014). *Stocks for the Long Run* . McGrawHillEducation.
- Siemens. (29 de 08 de 2019). *SIEMENS*. Obtenido de SIEMENS: <https://community.sw.siemens.com/s/article/modal-assurance-criterion-mac>
- Vance, J., Zeidan, F., & Murphy, B. (2010). *Machinery vibration and rotordynamics*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
- Vogel, E. (17 de Septiembre de 2013). *Understanding of resonance essential for solving vibration problems*. Obtenido de <https://www.plantengineering.com/articles/understanding-of-resonance-essential-for-solving-vibration-problems/>.
- Yoon, S. Y., Lin, Z., & Allaire, P. E. (2013). *Control of Surge in Centrifugal Compressors by Active Magnetic Bearings*. Springer.

Apéndices

Apéndice A. Geometría y datos de los elementos del sistema

Tabla 7. Datos del eje.

Característica	Dimensión
Longitud del eje [m]	0,85
Diámetro del eje [m]	0,0127
Densidad del eje [Kg/m ³]	7850
Módulo de elasticidad [1x10 ¹¹ Pa]	2,1
área de sección transversal [m ²]	0,00013
Momento de inercia de sección transversal [m ⁴]	0,0000000013
Masa deleje [Kg]	0,8453
Peso del eje [N]	8,2919

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8. Datos del disco.

Característica	Dimensión
Espesor [m]	0,00555
Diámetro externo [m]	0,1245
Densidad [Kg/m ³]	7850
área de sección transversal [m ²]	0,0120
Momento de inercia respecto del eje axial [m ⁴]	0,0010
Momento de inercia de sección transversal [m ⁴]	0,000515
Masa deleje [Kg]	0,5249
Peso del eje [N]	5,1489

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 9. Datos del piñón de transmisión.

Característica	Dimensión
Longitud de un eslabón [m]	0,0127
área transversal de un eslabón [m ²]	0,000005
Módulo de Young de la cadena [1x10 ¹¹ Pa]	2
Rigidez equivalente de un eslabón [N/m]	8x10 ⁷
Espesor del piñón [m]	0,019
Diámetro del piñón [m]	0,0388
área sección transversal del piñón [m ²]	0,0011
Masa del piñón [Kg]	8,291
Momento de inercia respecto al eje axial [m ²]	0,000033
Momento de inercia respecto a los ejes transversales [m ²]	0,0010
Peso del piñón [N]	1,5446

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 10. *Datos del acople.*

Característica	Dimensiones
Longitud del empotramiento del eje del motor [m]	0,0425
Rigidez equivalente del empotramiento del acople al motor [N/m]	$1,048 \times 10^7$
Espesor [m]	0,0237
Diámetro [m]	0,044
área de sección transversal [m ²]	0,0014
Masa del acople [Kg]	0,2593
Momento de inercia respecto al eje axial [m ²]	0,00007
Momento de inercia respecto a los ejes transversales [m ²]	0,00005
Peso [N]	2,5439

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 11. *Datos del cojinete.*

Característica	Dimensiones
Diámetro interno [m]	0,02845
Diámetro externo [m]	0,02895
Longitud [m]	0,03
Espesor del muñón [m]	0,04675
Radio [m]	0,0143
Holgura [m]	0,000125
área de sección transversal del muñón [m ²]	0,000506
Masa del muñón [Kg]	0,1860
Momento de inercia respecto al eje axial [m ²]	0,0000211
Momento de inercia respecto a los ejes transversales [m ²]	0,0000451
Peso del cojinete en [N]	1,8245

Fuente: Elaboración propia.

Apéndice B. Matrices de los elementos finitos del eje y de los accesorios

Matriz de masa traslacional M1

Ecuación 9

$$M1 = \left[\frac{\rho * A * l}{420} \right] \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22l & 54 & 0 & 0 & 13l \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 0 & 54 & -13l & 0 \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 0 & 13l & -3l^2 & 0 \\ -22l & 0 & 0 & 4l^2 & -13l^2 & 0 & 0 & -3l \\ 54 & 0 & 0 & -13l & 156 & 0 & 0 & 22l \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 0 & 156 & -22l & 0 \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 0 & -22l & 4l^2 & 0 \\ 13l & 0 & 0 & -3l^2 & 22l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Matriz de masa rotacional.

Ecuación 10

$$M2 = \left[\frac{\rho * I}{30l} \right] \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & 4l^2 & 3l & 0 & 0 & -l^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & -l^2 & 3l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Matriz de masa elemental

Ecuación 11

$$M = M1 + M2 \quad (11)$$

Matriz de amortiguamiento (efecto giroscópico)

Ecuación 12

$$G1 = \left[\frac{\rho * I}{15l} \right] \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 3l & 0 & 0 & -4l^2 & -3l & 0 & 0 & l^2 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 3l & 0 & 0 & l^2 & -3l & 0 & 0 & -4l^2 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Matriz de rigidez de Timoshenko

Ecuación 13

$$K1 = \left[\frac{E * I}{l^3} \right] \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6l & -12 & 0 & 0 & -6l \\ 0 & 12 & 6l & 0 & 0 & -12 & 6l & 0 \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & 0 & -6l & 2l^2 & 0 \\ -6l & 0 & 0 & 4l^2 & 6l & 0 & 0 & 2l^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6l & 12 & 0 & 0 & 6l \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 0 & 12 & -6l & 0 \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 0 & -6l & 4l^2 & 0 \\ -6l & 0 & 0 & 2l^2 & 6l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Matriz de rigidez de amortiguamiento interno

Ecuación 14

$$K2 = \left[\frac{E * I}{l^3} \right] \begin{bmatrix} 0 & 12 & -6l & 0 & 0 & -12 & -6l & 0 \\ -12 & 0 & 0 & -6l & 12 & 0 & 0 & -6l \\ 6l & 0 & 0 & 4l^2 & -6l & 0 & 0 & 2l^2 \\ 0 & 6l & -4l^2 & 0 & 0 & -6l & -2l^2 & 0 \\ 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 12 & 6l & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 6l & -12 & 0 & 0 & 6l \\ 6l & 0 & 0 & 2l^2 & -6l & 0 & 0 & 4l^2 \\ 0 & 6l & -2l^2 & 0 & 0 & -6l & -4l^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Matrices del disco

- Matriz de masa

Ecuación 15

$$Md = \begin{bmatrix} md & 0 & 0 & 0 \\ 0 & md & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Idd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Idd \end{bmatrix} \quad (15)$$

- Matriz del efecto giroscópico

Ecuación 16

$$Gd = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ipd \\ 0 & 0 & -Ipd & 0 \end{bmatrix} * \omega \quad (16)$$

Matrices del piñón

- Matriz de masa

Ecuación 17

$$Mp = \begin{bmatrix} mp & 0 & 0 & 0 \\ 0 & mp & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Idp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Idp \end{bmatrix} \quad (17)$$

- Matriz del efecto giroscópico

Ecuación 18

$$Gp = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ipp \\ 0 & 0 & -Ipp & 0 \end{bmatrix} * \omega \quad (18)$$

Matrices del acople

- Matriz de masa

Ecuación 19

$$Ma = \begin{bmatrix} ma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Ida & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ida \end{bmatrix} \quad (19)$$

- Matriz del efecto giroscópico

Ecuación 20

$$Ga = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ipa \\ 0 & 0 & -Ipa & 0 \end{bmatrix} * \omega \quad (20)$$

Matrices de los cojinetes

- Matriz de masa

Ecuación 21

$$Mc1 = \begin{bmatrix} mc1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & mc1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Idc1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Idc1 \end{bmatrix}, Mc2 = \begin{bmatrix} mc2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & mc2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Idc2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Idc2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

- Matriz del efecto giroscópico

Ecuación 22

$$Gc1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ipc1 \\ 0 & 0 & -Ipc1 & 0 \end{bmatrix} * \omega, Gc2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Ipc2 \\ 0 & 0 & -Ipc2 & 0 \end{bmatrix} * \omega \quad (22)$$

Matrices y coeficientes de los cojinetes hidrodinámicos.

Ecuación 23

$$f_e = (\pi^2 + (16 - pi^2) * e^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (23)$$

Ecuación 24

$$cte_{Kcoj} = \frac{F}{C} \quad (24)$$

Ecuación 25

$$cte_{ccoj} = \frac{F}{C * \omega} \quad (25)$$

- Coeficientes de rigidez

Ecuación 26

$$k_{xx} = 4 * (2 * \pi^2 + (16 - \pi^2) * e^2) * f_e \quad (26)$$

Ecuación 27

$$k_{yy} = \left(\frac{4 * (\pi^2 + (32 + \pi^2) * e^2 + 2 * (16 - \pi^2) * e^4)}{1 - \pi^2} \right) * f_e \quad (27)$$

Ecuación 28

$$k_{xy} = \left(\frac{\pi * (\pi^2 - (2 * \pi^2 * e^2)) - (16 - \pi^2) * e^4}{e * (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \right) f_e \quad (28)$$

Ecuación 29

$$k_{yx} = \left(\frac{-(\pi * (\pi^2 + (32 + \pi^2) * e^2) + 2 * (16 - e^2) * e^4)}{e * (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \right) * f_e \quad (29)$$

- Coeficientes de amortiguamiento

Ecuación 30

$$c_{xx} = \left(\frac{2 * \pi * (\pi^2 * (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} + 2 * (\pi^2 - 8) * e^2)}{e} \right) * f_e \quad (30)$$

Ecuación 31

$$c_{yy} = \left(\frac{2 * \pi * (\pi^2 + 2 * (24 - \pi^2) * e^2 + \pi^2 * e^4)}{e * (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \right) * f_e \quad (31)$$

Ecuación 32

$$c_{xy} = -8 * (\pi^2 + 2 * (\pi^2 - 8) * e^2) * f_e \quad (32)$$

Ecuación 33

$$c_{yx} = c_{xy} \quad (33)$$

- Matrices de los cojinetes

Ecuación 34

$$K_{cojinete} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & 0 & 0 \\ k_{yx} & k_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * cte_{Kcoj} \quad (34)$$

Ecuación 35

$$K_{soportes} = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * cte_{Kcoj} \quad (35)$$

Ecuación 36

$$C_{cojinete} = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & 0 & 0 \\ c_{yx} & c_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * cte_{Ccoj} \quad (36)$$

Apéndice C. Definición inicial de las matrices globales.

La programación en Matlab es la siguiente:

$$Mg_M = \text{zeros}(\text{gradosdl})$$

$$Mg_K = \text{zeros}(\text{gradosdl})$$

$$Mg_G = \text{zeros}(\text{gradosdl})$$

$$Mg_{Kam} = \text{zeros}(\text{gradosdl})$$

```

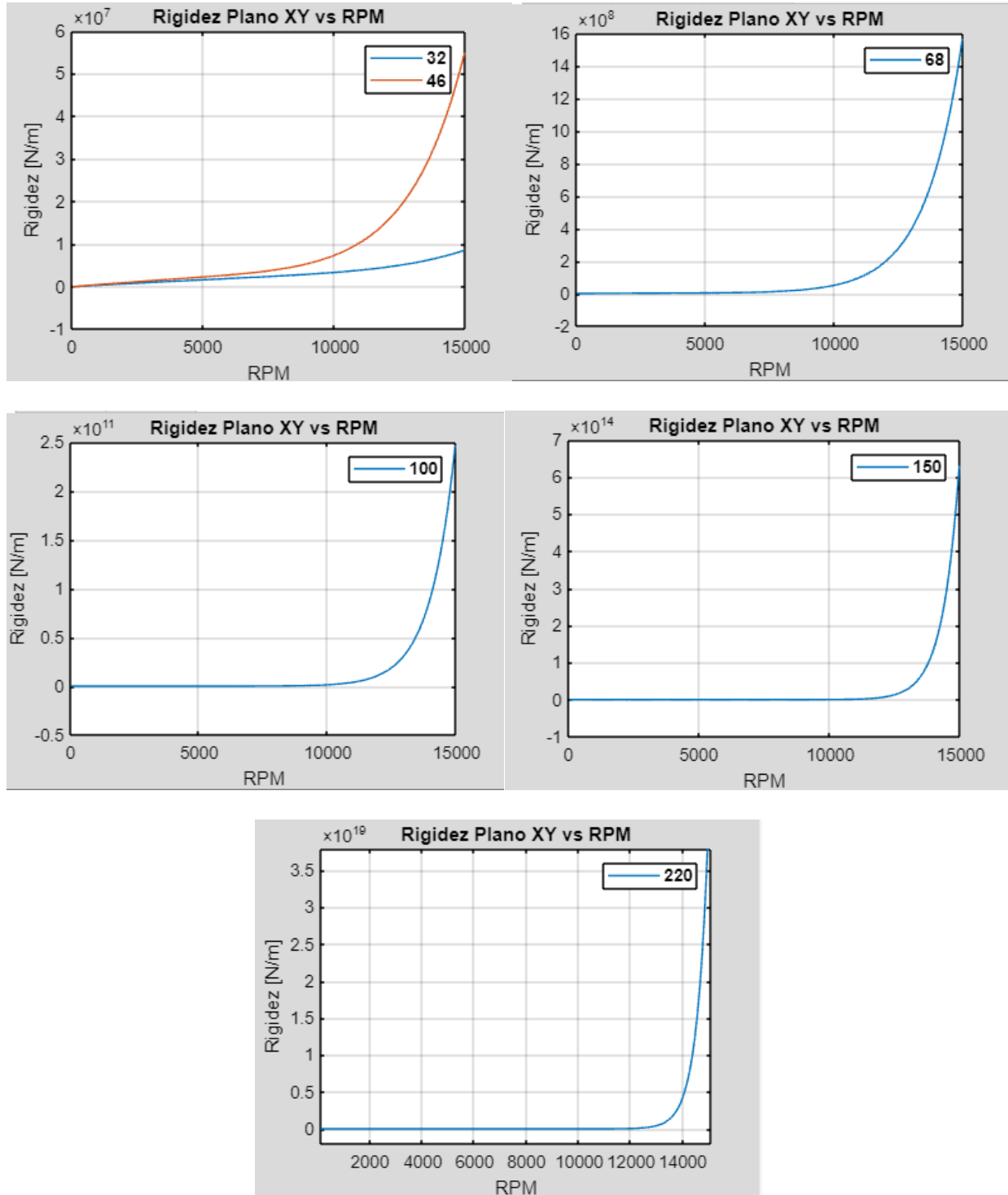
for i=1:elem
    Mg_M((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) = Mg_M((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) + M;
    Mg_K((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) = Mg_K((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) + K;
    Mg_G((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) = Mg_G((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) + G;
    Mg_Kam((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) = Mg_Kam((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) + K_am;
end

```

La anterior matriz garantiza que para elemento de eje se cumpla la programación del modelo matemático propuesto.

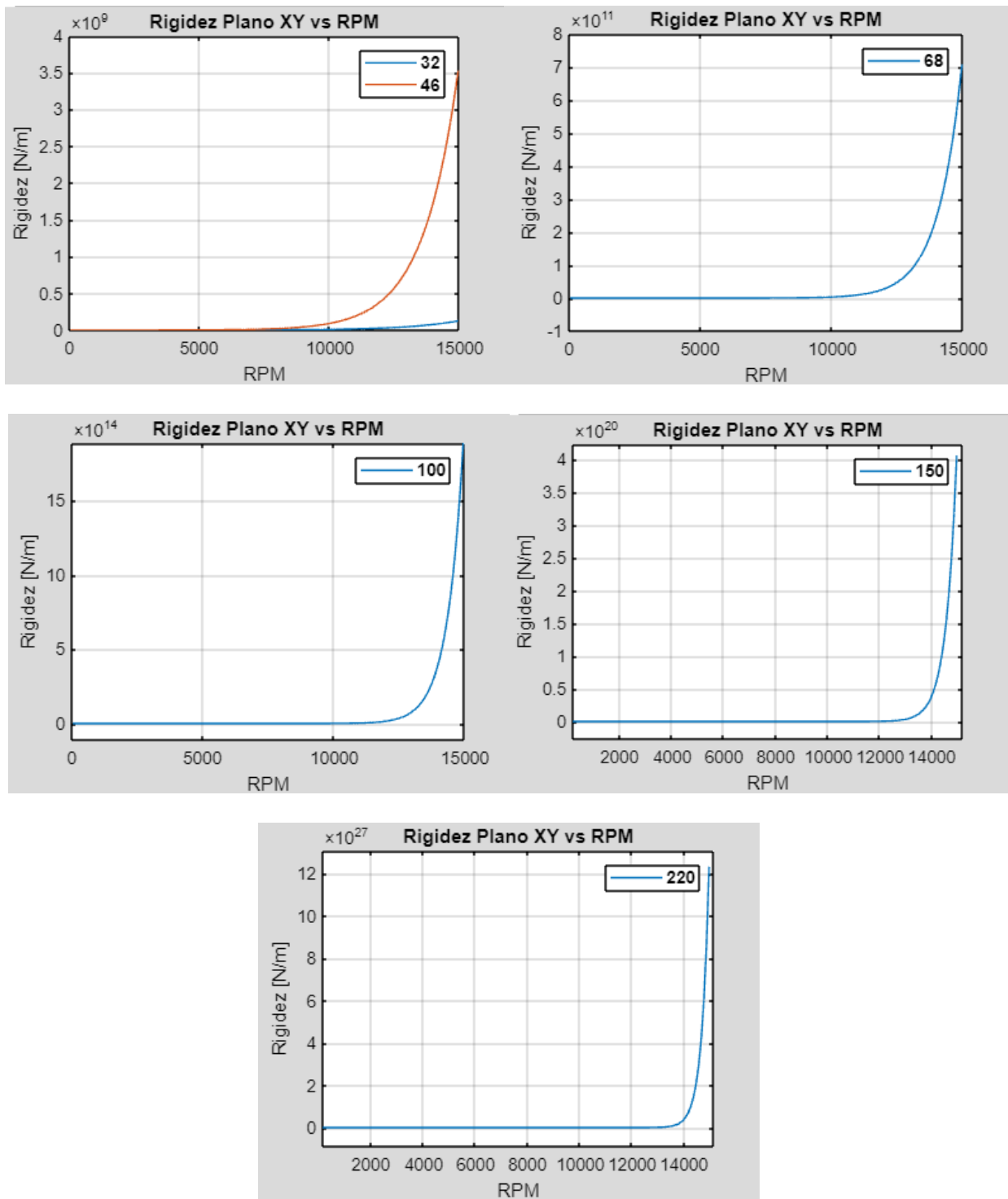
Apéndice D. Grafica del comportamiento de la rigidez de los cojinetes hidrodinámicos.

Figura 41. Comportamiento de la rigidez del apoyo 1 en el plano XY variando el tipo de aceite.



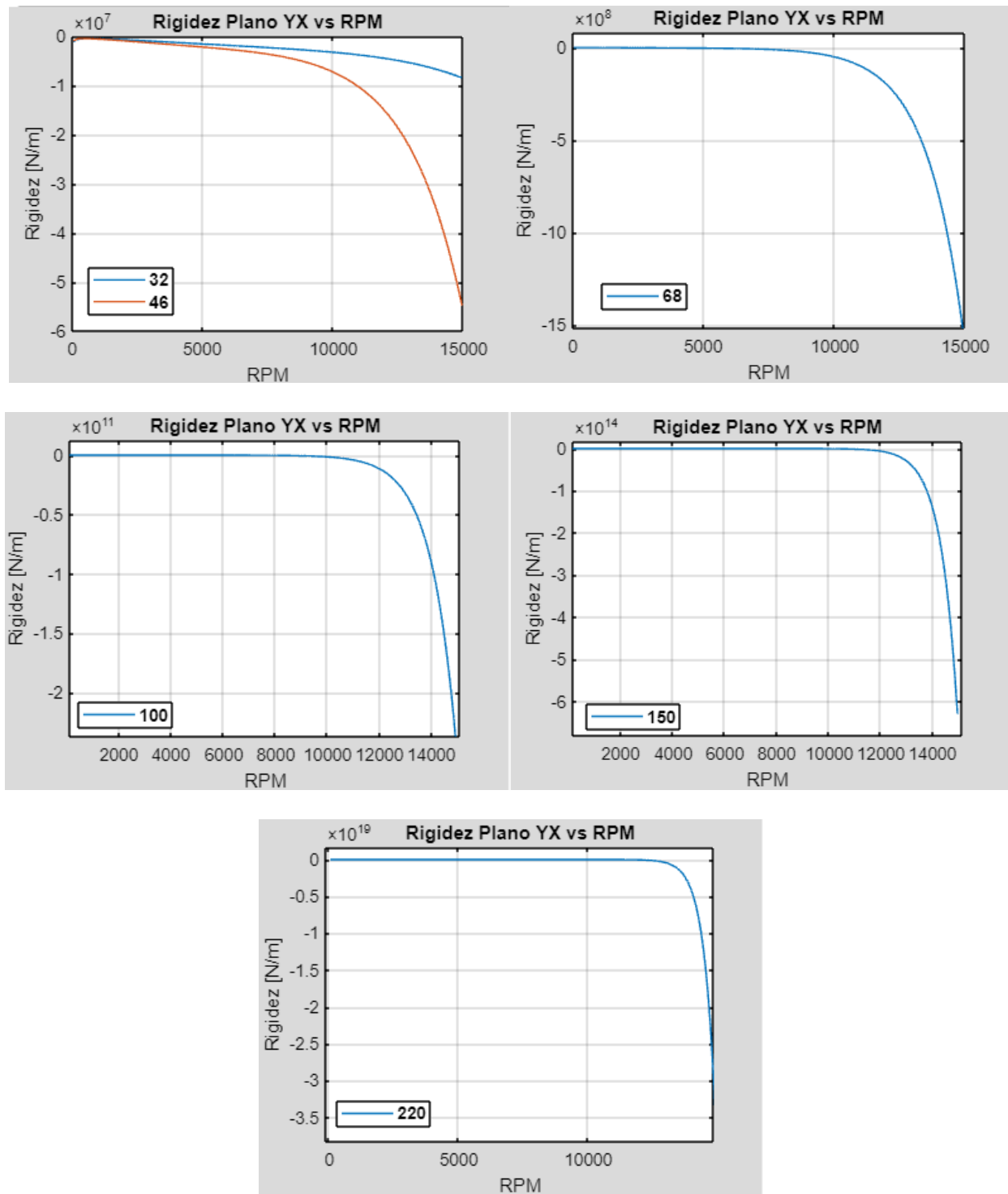
Nota. En la imagen se aprecia como se ve afectada la rigidez de los cojinetes.

Figura 42. Comportamiento de la rigidez del apoyo 2 en el plano XY variando el tipo de aceite.



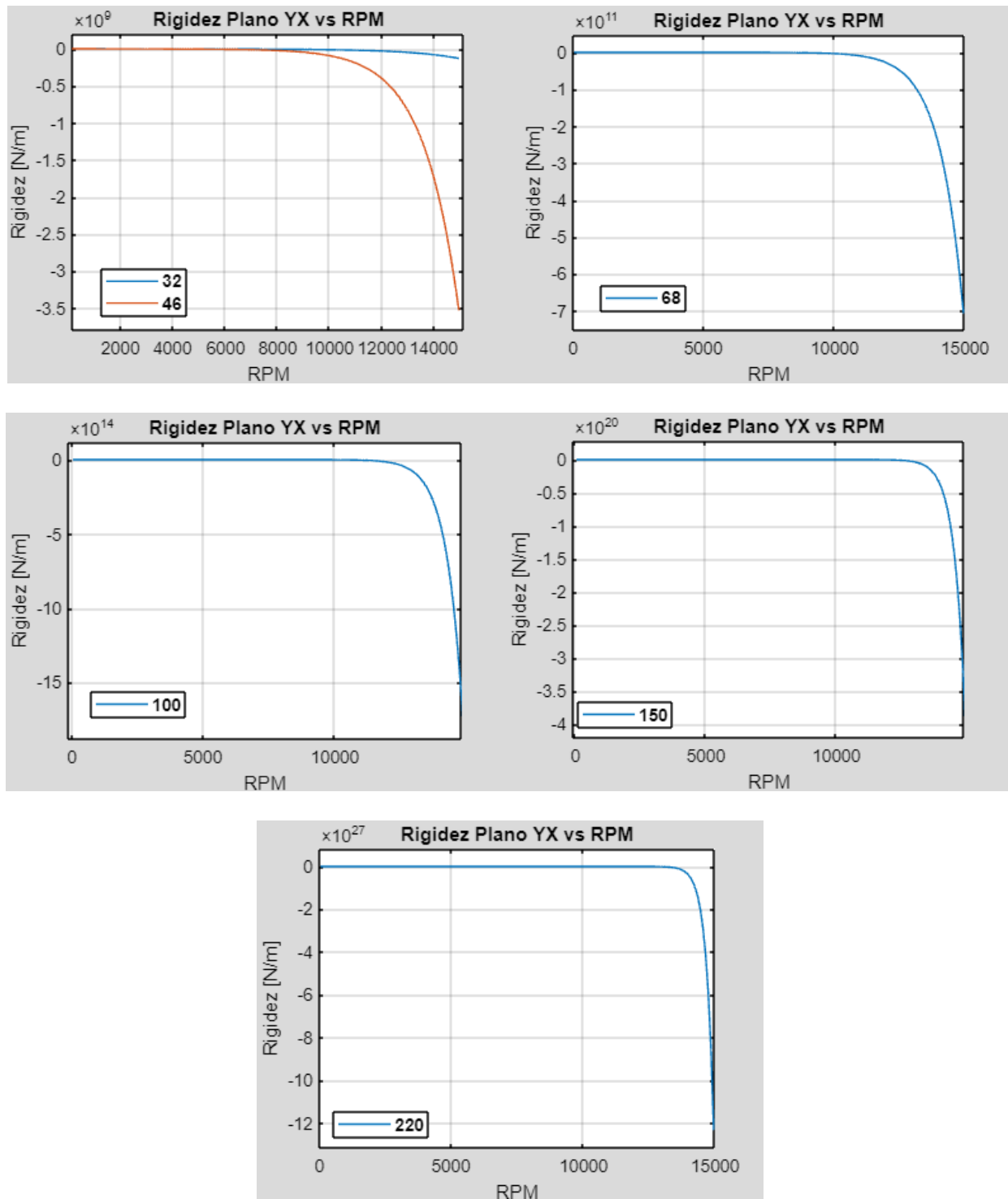
Nota. En la imagen se aprecia como se ve afectada la rigidez de los cojinetes.

Figura 43. Comportamiento de la rigidez del apoyo 1 en el plano YX variando el tipo de aceite.



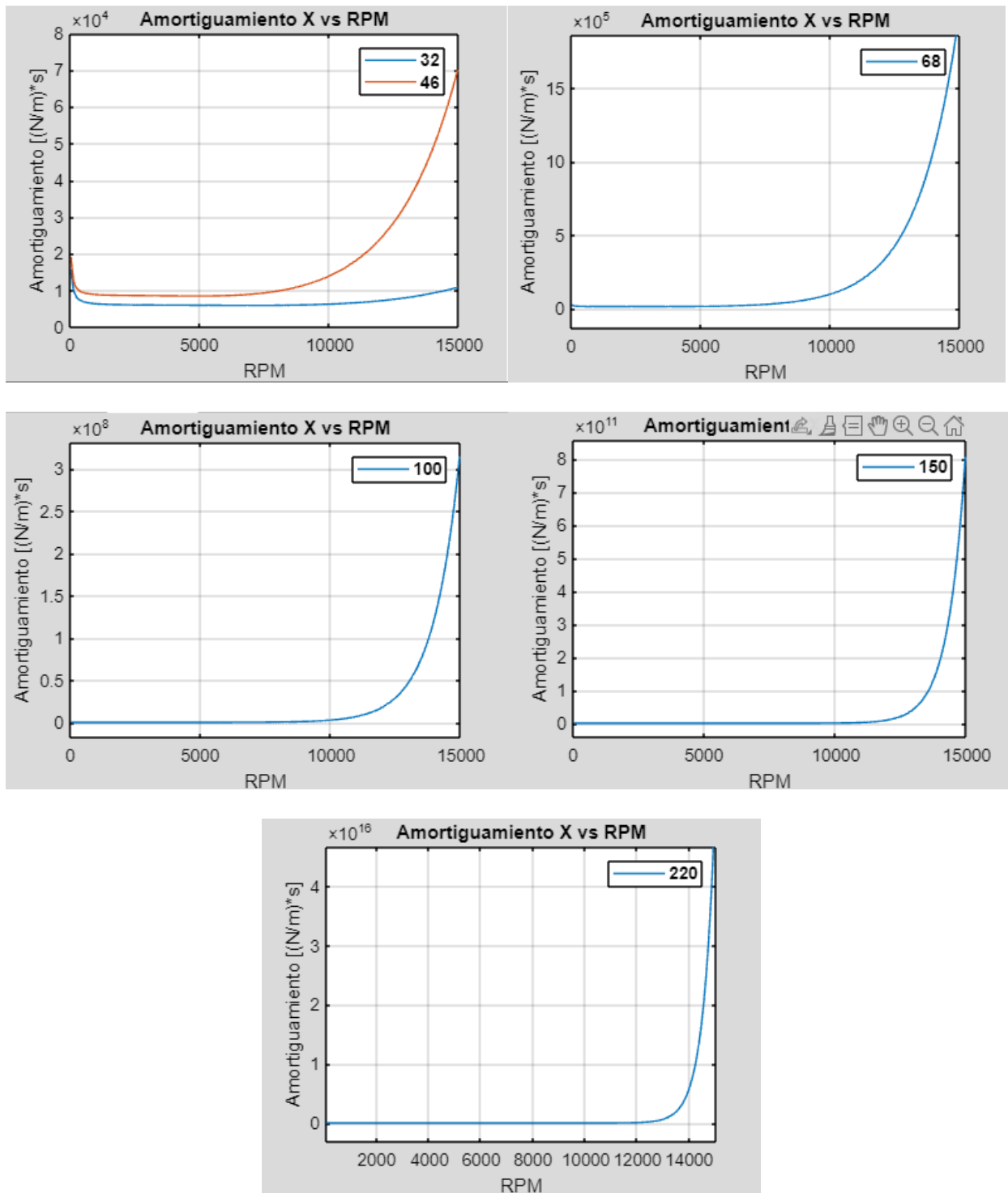
Nota. En la imagen se aprecia como se ve afectada la rigidez de los cojinetes.

Figura 44. Comportamiento de la rigidez del apoyo 2 en el plano YX variando el tipo de aceite.



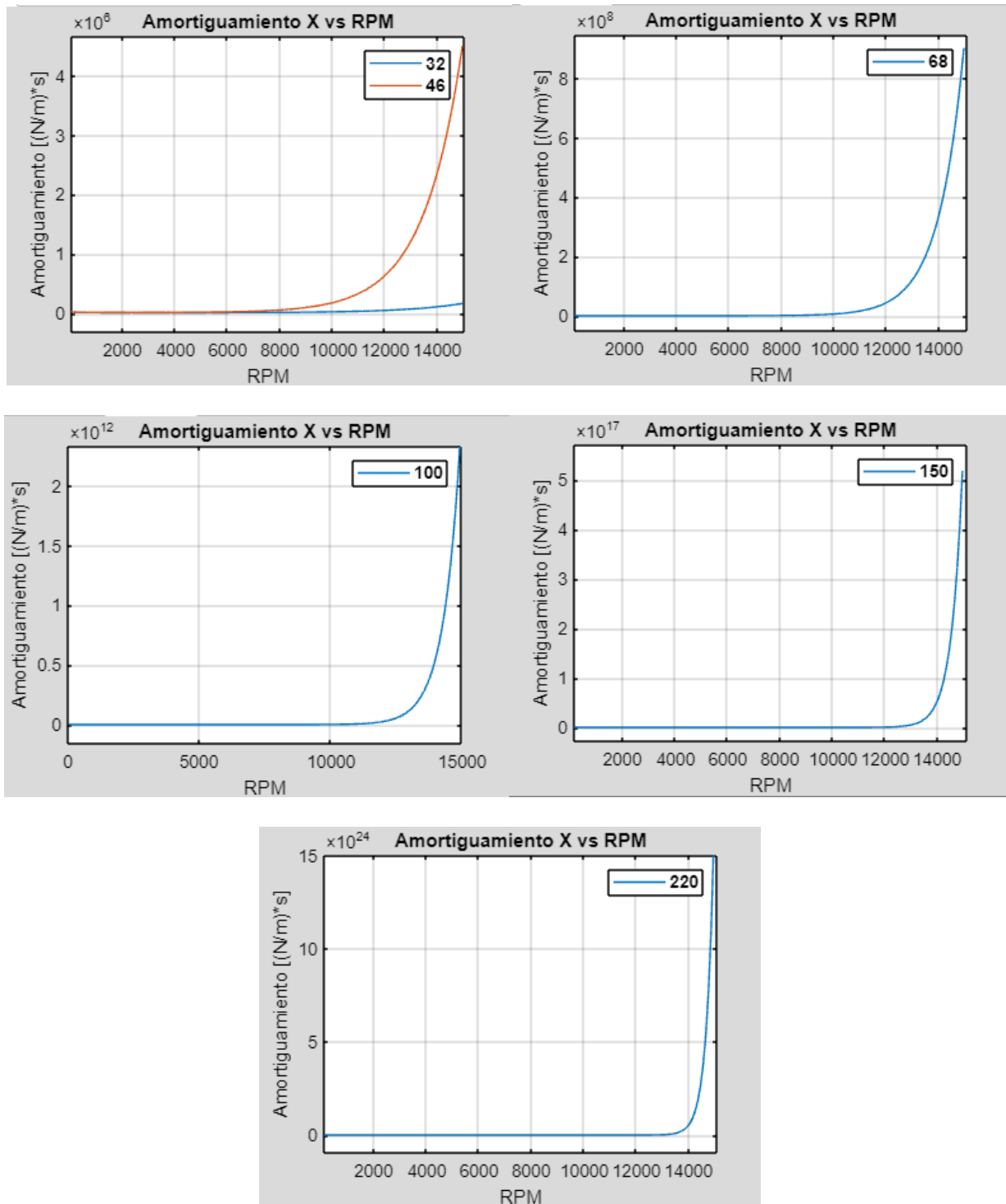
Nota. En la imagen se aprecia como se ve afectada la rigidez de los cojinetes.

Figura 45. Comportamiento del amortiguamiento del apoyo 1 en dirección X variando el tipo de aceite.



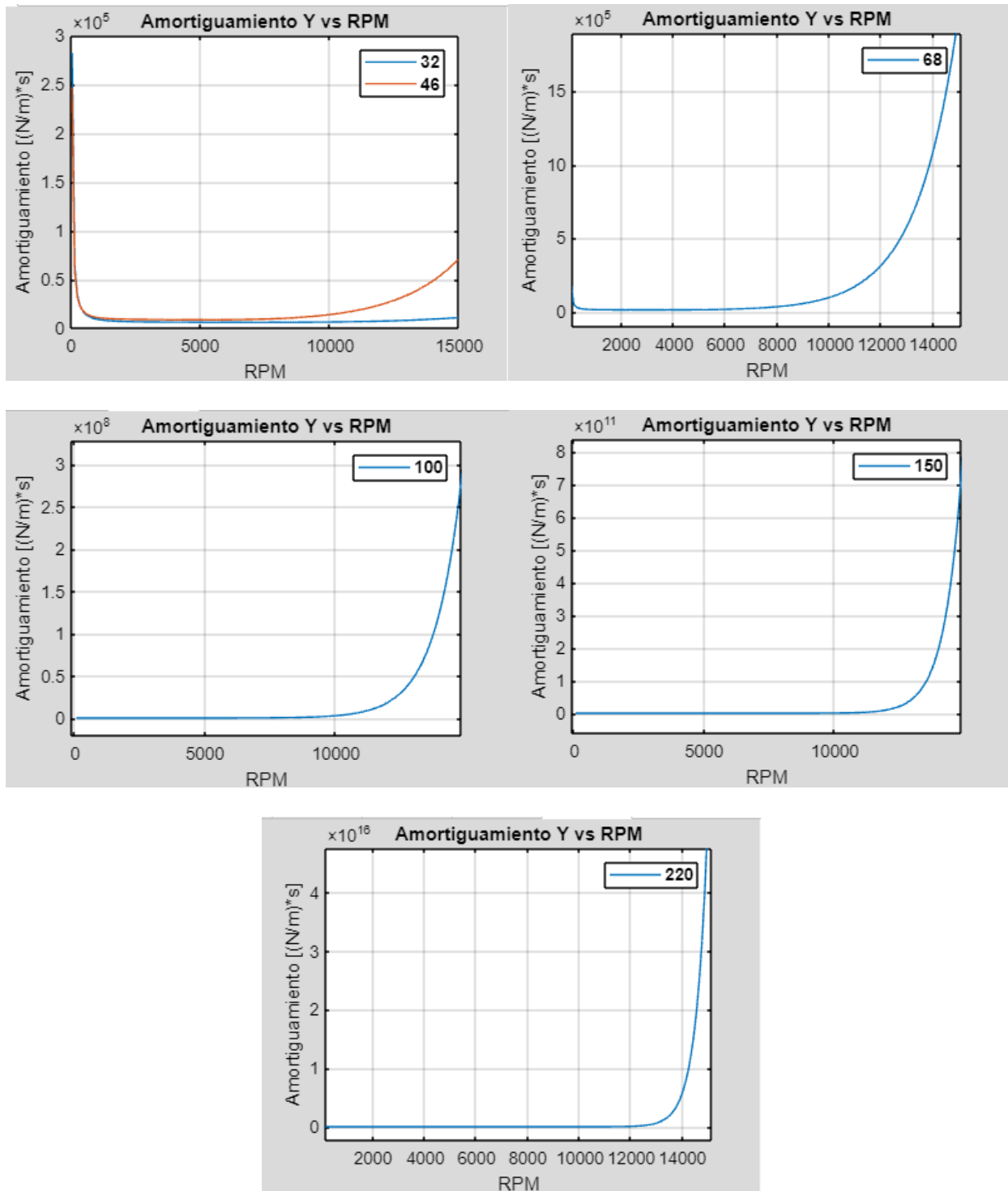
Nota. En la imagen se aprecia como se ve afectada el amortiguamiento de los cojinetes.

Figura 46. Comportamiento del amortiguamiento del apoyo 2 en dirección X variando el tipo de aceite.



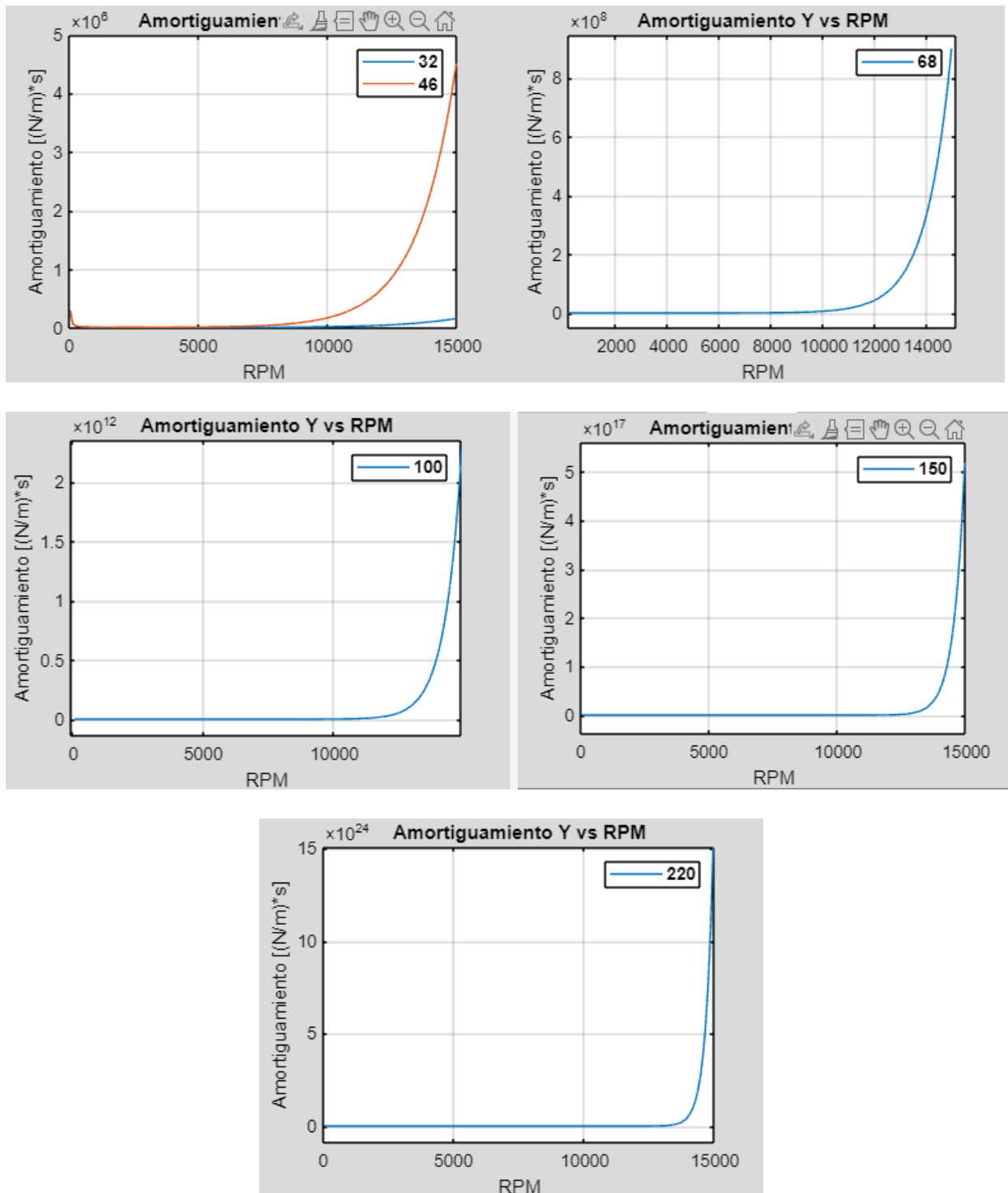
Nota. En la imagen se aprecia como se ve afectada el amortiguamiento de los cojinetes.

Figura 47. Comportamiento del amortiguamiento del apoyo 1 en dirección Y variando el tipo de aceite.



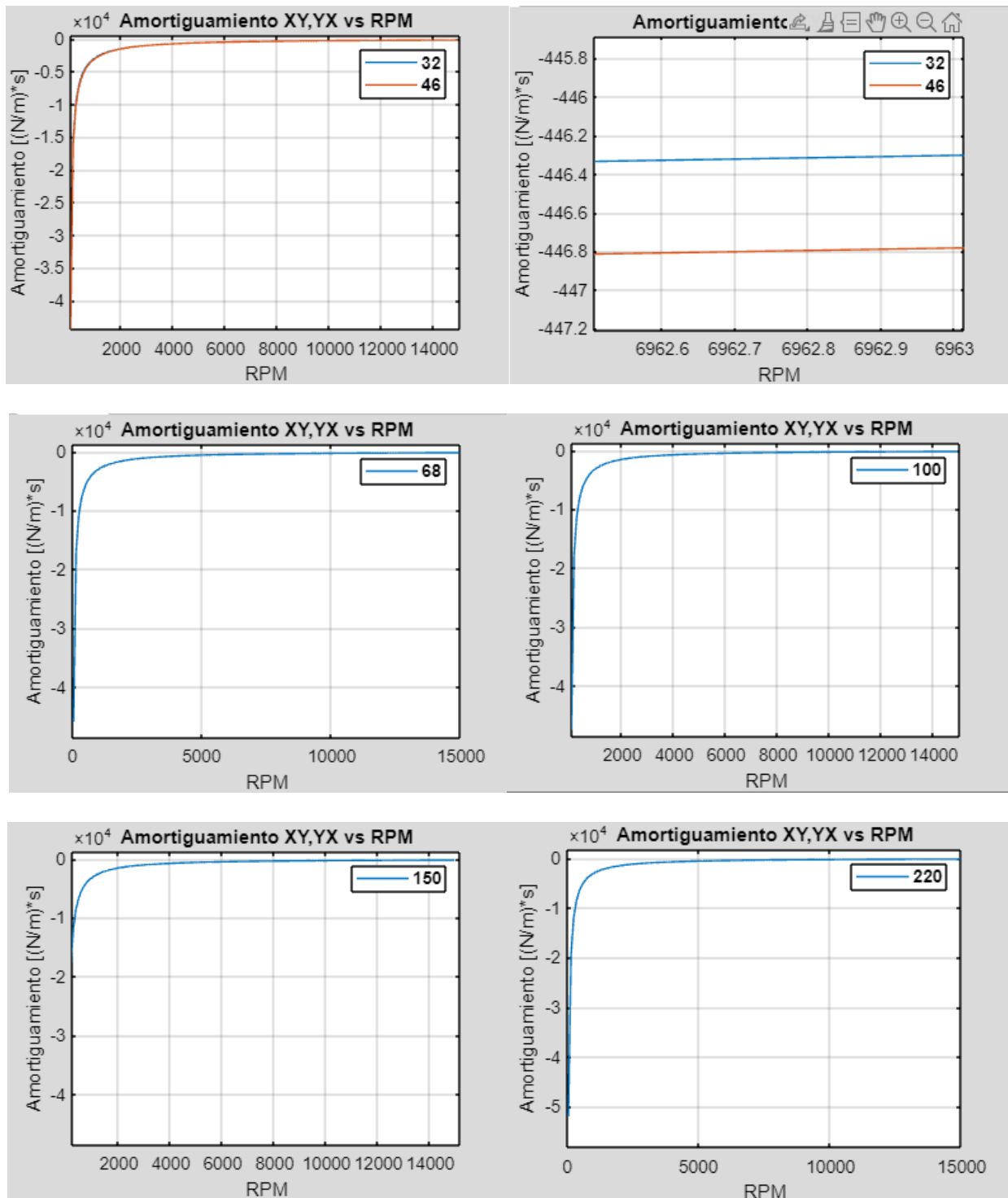
Nota. En la imagen se aprecia como se ve afectada el amortiguamiento de los cojinetes.

Figura 48. Comportamiento del amortiguamiento del apoyo 2 en dirección Y variando el tipo de aceite.



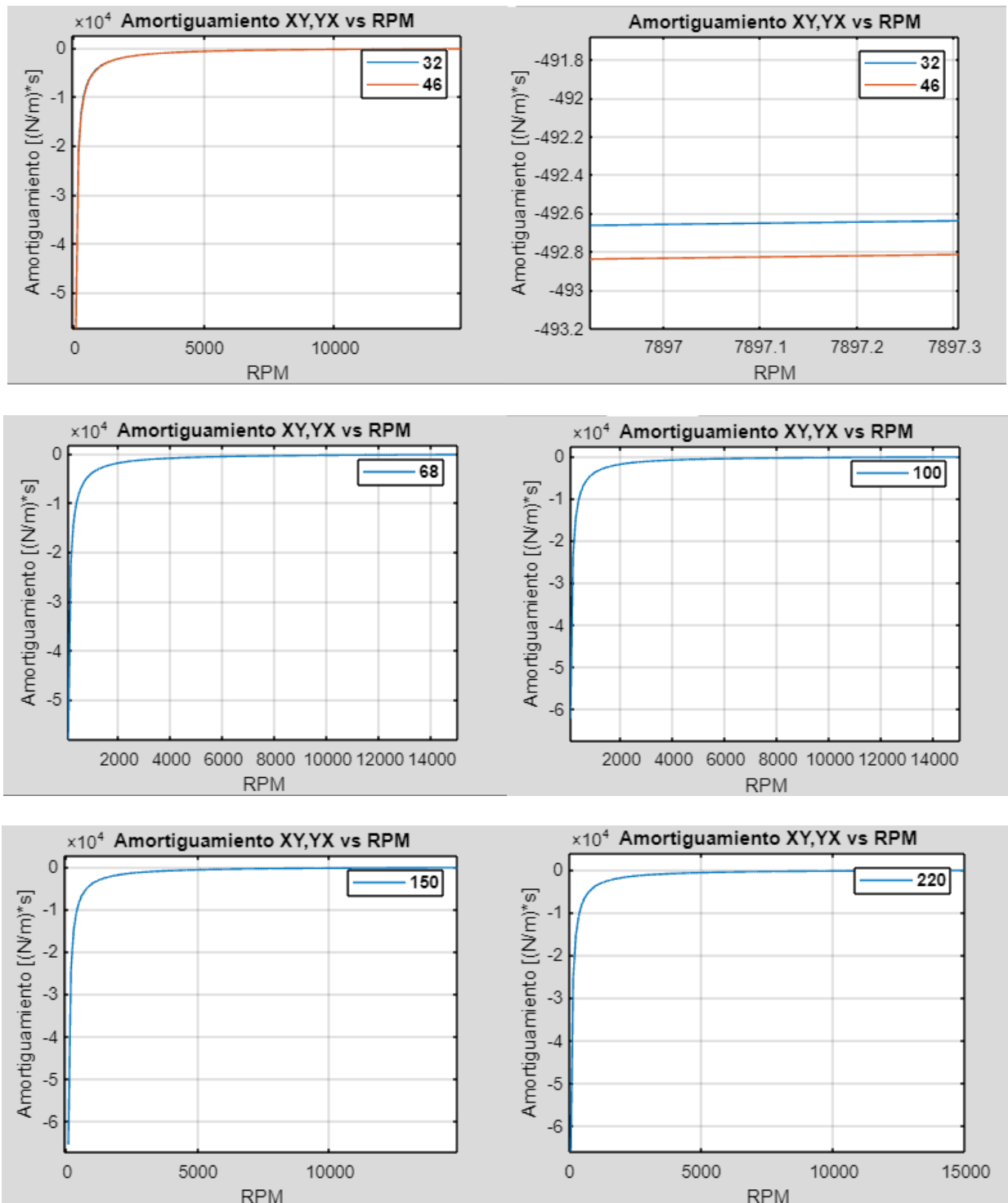
Nota. En la imagen se aprecia como se ve afectada el amortiguamiento de los cojinetes.

Figura 49. Comportamiento del amortiguamiento del apoyo 1 en dirección XY, YX variando el tipo de aceite.



Nota. En la imagen se aprecia como se ve afectada el amortiguamiento de los cojinetes.

Figura 50. Comportamiento del amortiguamiento del apoyo 2 en dirección XY, YX variando el tipo de aceite.



Nota. En la imagen se aprecia como se ve afectada el amortiguamiento de los cojinetes.

Apéndice E. Factores que afectan las velocidades críticas del sistema en estudio**Tabla 12.** Variación de las velocidades críticas según diámetro de eje.

Diámetro de eje [pulg]	Diámetro de eje [m]	Velocidad crítica BW modo 3 [Hz]	Velocidad crítica FW modo 4 [Hz]
1/8	0,003178	13,91	13,975
3/16	0,0047625	28,97	29,19
¼	0,00635	49,778	47,3587
5/16	0,0079375	65,5	66,95
3/8	0,009525	83056	86,875
7/16	0,0111125	100	106,55
½	0,0127	113,65	125,62
9/16	0,0142875	123,585	143,95

Fuente: Elaboración propia.**Tabla 13.** Comportamiento de las velocidades críticas variando el diámetro interno del eje.

Diámetro interno del eje [mm]	Velocidad crítica BW modo 3 [Hz]	Velocidad crítica FW modo 4 [Hz]
6,7	47,62	48,12
7,7	47,045	47,5084
8,7	45,75	46,17
9,7	43,28	43,64
10,7	38,8	39,078

Fuente: Elaboración propia.**Tabla 14.** Comportamiento de las velocidades críticas variando la viscosidad del aceite.

Aceite hidráulico	Viscosidad dinámica [Pa*s]	Velocidad crítica BW modo 3 [Hz]	Velocidad crítica FW modo 4 [Hz]
ISO 32	0,028166	45,0443	47,1051
ISO 46	0,040296	46,151	47,26758
ISO 68	0,0596	46,778	47,3587
ISO 100	0,0884	47,119	47,40973
ISO 150	0,13305	47,313	47,4396

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 15. *Comportamiento de las velocidades críticas variando el tipo de acero.*

Material	Densidad [Kg/m ³]	Módulo de elasticidad	Velocidad critica BW modo 3 [Hz]	Velocidad critica FW modo 4 [Hz]
fundición de acero gris	6920	1	33,2	33,5
cobre	8960	1,19	34,4	34,8
SAE 1020	7900	1,9	44,475	45,0055
SAE 8620	7800	1,9	44,58	45,115
AI 304	7930	1,93	44,783	45,3245
AI 316	8030	1,93	44,67	45,215
SAE 1045	7850	2	45,675	46,225
Acero al cromo	7850	2,05	46,2251	46,7948
Acero al níquel	8908	2,07	45,25	45,8533
Acero al carbono	7850	2,07	46,45	47,0250
AI	7850	2,1	46,778	47,3587
SAE 4340	7840	2,1	46,79	47,37

Apéndice F. Modelo matemático

%% DATOS PARA SIMULACION

% Datos del eje

```

L_Tot = 0.85;           %Longitud del eje en m
D_eje = 0.0127;        %Diámetro del eje en m
rho = 7850;            %Densidad del eje
E = 2.1E11;           %Modulo de elasticidad
A = (pi*D_eje^2)/4;    %Área sección transversal
I = (pi*D_eje^4)/64;  %Momento de inercia de la sección transversal
me = rho*A*L_Tot;     %Masa del eje
We = me*9.81;         %Peso del eje en [N]

```

%Datos del disco

```

esp_d = 0.00555;      %Espesor disco en m
D_d = 0.1245;         %Diámetro externo disco en m
rho_disco = 7850;    %Densidad disco [kg/m^3]
A_d = pi*(D_d^2-D_eje^2)/4; %Área sección transversal del disco
md = rho_disco*A_d*esp_d; %Masa del disco
Ipd = (md/2)*((D_d^2+D_eje^2)/4); %Momento de inercia respecto al eje axial
Idd = (Ipd/2)+(md*(esp_d^2)/12); %Momento de inercia respecto a los ejes
transversales
Wd = md*9.81;        %Peso del disco en N

```

% Datos del piñón de la transmisión de cadenas

```

L_esl = 0.0127;      %Longitud de un eslabón de cadena en m
A_esl = 5E-6;        %Área transversal de un eslabón en m2
E_esl = 2E11;       %Modulo de Young de la cadena en Pa

```

```

k_esl = E_esl*A_esl/L_esl;           %Rigidez equivalente de un eslabón
esp_p = 0.019;                       %Espesor del piñón en m
D_d = 0.0388;                         %Diámetro del piñón en m
A_p = pi*(D_p^2-D_eje^2)/4;           %Área sección transversal del piñón
mp = rho*A_p*esp_p;                  %Masa del piñón
Ipp = (mp/2)*((D_p^2+D_eje^2)/4);    %Momento de inercia respecto al eje axial
Idp = (Ipp/2)+(mp*(esp_p^2)/12);    %Momento de inercia respecto a los ejes
transversales
Wp = mp*9.81;                         %Peso del piñón en N

% Datos del acople con motor
L_mot = 0.0425;                       %Longitud del empotramiento del eje del motor en m
k_mot = (3*E*I)/(L_mot^3);            %Rigidez equivalente del empotramiento del acople
al motor
esp_a = 0.0237;                       %Espesor del acople en m
D_a = 0.044;                           %Diámetro del acople en m
A_a = pi*(D_a^2-D_eje^2)/4;           %Área sección transversal del acople
ma = rho*A_a*esp_a;                  %Masa del acople
Ipa = (ma/2)*((D_a^2+D_eje^2)/4);    %Momento de inercia respecto al eje axial
Ida = (Ipa/2)+(ma*(esp_a^2)/12);    %Momento de inercia respecto a los ejes
transversales
Wa = ma*9.81;                         %Peso del acople en N

% Datos del cojinete
D_c = [0.0284 0.02845];               %Diámetro interno de los cojinetes en m
D_apoyo = [0.02865 0.02865];         %Diámetro externo de los cojinetes en m
L_c = [0.03 0.03];                    %Longitud de los cojinetes en m
esp_c = [0.04675 0.04675];           %Espesor total del muñón del cojinete en m

```

```
r_apoyo = D_apoyo/2;           %Radio del cojinete en m
C = (D_apoyo-D_c)/2;          %Holgura de los cojinetes en m
A_c = pi*(D_c.^2-D_eje^2)/4;   %Área sección transversal del muñón del cojinete
mc = rho*A_c.*esp_c;          %Masa del muñón del cojinete
Ipc = (mc/8).*((D_c.^2)+D_eje^2); %Momento de inercia respecto al eje axial
Idc = (Ipc/2)+(mc.*(esp_c.^2)/12); %Momento de inercia respecto a los ejes
transversales
Wc = mc*9.81;                 %Peso del cojinete en N

% Propiedades del aceite
rho_ac = 860.845036;         %Densidad aceite [kg/m^3]
mu_ac = 0.0596;              %Viscosidad dinámica [Pa*s]

% Constantes
elem = 17;                    %Número de elementos
l = L_Tot/elem;               %Longitud de cada elemento en m
nodos = elem+1;               %Número de nodos
NGDL_nd = 4;                  %4 grados de libertad por nodo
gradosdl = nodos*NGDL_nd;     %Grados de libertad para dimensión de las globales
W = We+Wd+sum(Wc)+Wp+Wa;     %Peso total en [N]

%Ubicación del disco y los cojinetes
D_coj1 = 0/100;
D_disco = 35/100;
D_coj2 = 70/100;
D_cad = 80/100;
D_aco = 85/100;
```

%Constantes para las matrices

```
cte_mt = rho*A*1/420;           %Constante masa total
cte_mr = rho*I/(30*1);         %Constante masa rotacional
cte_k = E*I/(1^3);             %Constante rigidez
cte_c = ((rho*I)/(15*1));      %Constante de amortiguación
```

%% MATRICES ELEMENTALES PARA FEM (VIGAS TIMOSHENKO)

% Matriz de masa traslacional

```
M1 =[156    0    0   -22*1   54    0    0    13*1
      0    156   22*1    0    0    54   -13*1    0
      0    22*1   4*1^2    0    0    13*1   -3*1^2    0
     -22*1    0    0    4*1^2  -13*1    0    0   -3*1^2
      54    0    0   -13*1   156    0    0    22*1
      0    54   13*1    0    0    156   -22*1    0
      0   -13*1  -3*1^2    0    0   -22*1   4*1^2    0
     13*1    0    0   -3*1^2  22*1    0    0    4*1^2];
```

```
MT = cte_mt*M1;
```

% Matriz de masa rotacional

```
M2 =[36    0    0   -3*1   -36    0    0   -3*1
      0    36   3*1    0    0   -36   3*1    0
      0    3*1   4*1^2    0    0   -3*1   -1^2    0
     -3*1    0    0    4*1^2   3*1    0    0   -1^2
     -36    0    0    3*1   36    0    0    3*1
      0   -36   -3*1    0    0    36   -3*1    0
      0    3*1   -1^2    0    0   -3*1   4*1^2    0
     -3*1    0    0   -1^2   3*1    0    0    4*1^2];
```

```
MR = cte_mr*M2;
```

```
% Matriz de masa elemental
```

```
M = MT+MR;
```

```
% Matriz de amortiguamiento (Efecto giroscópico)
```

```
G1 = [0      -36     -3*1    0      0      36     -3*1    0
      36      0      0      -3*1   -36     0      0      -3*1
      3*1     0      0      -4*1^2 -3*1    0      0      1^2
      0      3*1    4*1^2   0      0     -3*1   -1^2    0
      0      36     3*1     0      0     -36    3*1     0
     -36     0      0      3*1    36     0      0      3*1
      3*1     0      0      1^2   -3*1    0      0     -4*1^2
      0      3*1   -1^2     0      0     -3*1   4*1^2   0];
```

```
G = cte_c*G1;
```

```
% Matriz de rigidez (Timoshenko)
```

```
K1 = [12     0      0     -6*1   -12     0      0     -6*1
      0     12     6*1     0      0     -12    6*1     0
      0     6*1    4*1^2   0      0     -6*1    2*1^2   0
     -6*1    0      0     4*1^2   6*1     0      0     2*1^2
     -12    0      0     6*1    12     0      0     6*1
      0    -12    -6*1     0      0     12    -6*1     0
      0     6*1    2*1^2   0      0     -6*1    4*1^2   0
     -6*1    0      0     2*1^2   6*1     0      0     4*1^2];
```

```
K = cte_k*K1;
```

```
% Matriz de rigidez de amortiguamiento interno
```

```

K2 = [0      12      -6*1      0      0      -12      -6*1      0
      -12      0      0      -6*1      12      0      0      -6*1
       6*1      0      0      4*1^2     -6*1      0      0      2*1^2
       0      6*1     -4*1^2      0      0      -6*1     -2*1^2      0
       0     -12      6*1      0      0      12      6*1      0
      12      0      0      6*1     -12      0      0      6*1
       6*1      0      0      2*1^2     -6*1      0      0      4*1^2
       0      6*1     -2*1^2      0      0      -6*1     -4*1^2      0];

```

```
K_am = cte_k*K2;
```

```
%Definición inicial de las matrices globales
```

```
Mg_M = zeros(gradosd1);
```

```
Mg_K = zeros(gradosd1);
```

```
Mg_G = zeros(gradosd1);
```

```
Mg_Kam = zeros(gradosd1);
```

```
for i=1:elem
```

```
    Mg_M((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) = Mg_M((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) + M;
```

```
    Mg_K((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) = Mg_K((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) + K;
```

```
    Mg_G((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) = Mg_G((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) + G;
```

```
    Mg_Kam((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) = Mg_Kam((4*(i-1))+1:(4*(i+1)),(4*(i-1))+1:(4*(i+1))) + K_am;
```

```
end
```

```
Mg_C = (1.35E-5)*Mg_K;
```

```
%% CALCULO DE LOS PARAMETROS DE LOS COJINETES
```

```
%Cálculo de las fuerzas de los cojinetes
```

```
F1 = ((We*(D_coj2-(L_Tot/2)))+(Wd*(D_coj2-D_disco))+(Wc(1)*(D_coj2-
D_coj1)))+(Wp*(D_coj2-D_cad))+(Wa*(D_coj2-D_aco)))/(D_coj2-D_coj1);
F2 = ((We*((L_Tot/2)-D_coj1)))+(Wd*(D_disco-D_coj1))+(Wc(2)*(D_coj2-
D_coj1)))+(Wp*(D_cad-D_coj1))+(Wa*(D_aco-D_coj1)))/(D_coj2-D_coj1);
F = [W,W];
```

```
%Definición de velocidades de prueba
```

```
RPM_1 = 0.001;
RPM_2 = 15000;
RPMi = RPM_1:100:RPM_2;
wi = (pi/30)*RPMi;
Ni = RPMi/60;
numDat = length(RPMi);
```

```
%Cálculo del número de Sommerfeld para todas las velocidades
```

```
P = F./(D_apoyo.*L_c); %Presión percibida por los cojinetes en Pa
```

```
S1 = (((r_apoyo(1)/C(1))^2)*(mu_ac/P(1)))*Ni; %Número de Sommerfeld
S2 = (((r_apoyo(2)/C(2))^2)*(mu_ac/P(2)))*Ni; %Número de Sommerfeld
S1_mod = exp(-0.2*S1);
S2_mod = exp(-0.2*S2);
```

```
%Determinación del valor de épsilon para L/D=1
```

```
MatSomm1_1 = [S1_mod.^5; S1_mod.^10; S1_mod.^15; S1_mod.^20; S1_mod.^25];
MatSomm2_1 = [S2_mod.^5; S2_mod.^10; S2_mod.^15; S2_mod.^20; S2_mod.^25];
```

```
coef1_num = [2.901089262 -1.17819325 -11.2808794 16.99016036 -7.38339149];  
Num1_1 = coef1_num*MatSomm1_1;  
Num1_2 = coef1_num*MatSomm2_1;  
coef1_den = [52.60218957 -196.610563 279.2000547 -181.14898 45.00608474];  
Den1_1 = ones(1,numDat)+(coef1_den*MatSomm1_1);  
Den1_2 = ones(1,numDat)+(coef1_den*MatSomm2_1);  
eps1_1 = Num1_1./Den1_1;  
eps1_2 = Num1_2./Den1_2;
```

```
%Determinación del valor de épsilon para el L/D de los cojinetes
```

```
rel = L_c./D_apoyo;
```

```
epsi_1 = eps1_1;
```

```
ei_1 = epsi_1*C(1);
```

```
epsi_2 = eps1_2;
```

```
ei_2 = epsi_2*C(2);
```

```
%Matrices de rigidez y amortiguamiento de los cojinetes
```

```
Ki_coj1 = zeros(4,4,numDat);
```

```
Ki_coj2 = zeros(4,4,numDat);
```

```
Ci_coj1 = zeros(4,4,numDat);
```

```
Ci_coj2 = zeros(4,4,numDat);
```

```
for i=1:numDat
```

```
    eps1 = epsi_1(i);
```

```
    feps1 = ((pi^2)+((16-pi^2)*(eps1^2)))^(-3/2);
```

```
    eps2 = epsi_2(i);
```

```
    feps2 = ((pi^2)+((16-pi^2)*(eps2^2)))^(-3/2);
```

```

cte_Kcoj1 = F(1)/C(1);
cte_Ccoj1 = F(1)/(C(1)*wi(i));
cte_Kcoj2 = F(2)/C(2);
cte_Ccoj2 = F(2)/(C(2)*wi(i));

kxx1 = 4*((2*(pi^2))+((16-(pi^2))*(eps1^2)))*feps1;
kxy1 = ((pi*((pi^2)-(2*(pi^2)*(eps1^2))-((16-(pi^2))*(eps1^4))))/(eps1*((1-
(eps1^2))^(1/2))))*feps1;
kyx1 = -(pi*((pi^2)+((32+(pi^2))*(eps1^2))+2*(16-(eps1^2))*(eps1^4)))/(eps1*((1-
(eps1^2))^(1/2))))*feps1;
kyy1 = (4*((pi^2)+((32+(pi^2))*(eps1^2))+2*(16-(pi^2))*(eps1^4)))/(1-
(eps1^2))*feps1;
cxx1 = (2*pi*((1-(eps1^2))^(1/2))*((pi^2)+2*((pi^2)-8)*(eps1^2)))/eps1*feps1;
cxy1 = -8*((pi^2)+2*((pi^2)-8)*(eps1^2))*feps1;
cyx1 = cxy1;
cyy1 = (2*pi*((pi^2)+2*(24-(pi^2))*(eps1^2))+((pi^2)*(eps1^4)))/(eps1*((1-
(eps1^2))^(1/2))))*feps1;

kxx2 = 4*((2*(pi^2))+((16-(pi^2))*(eps2^2)))*feps2;
kxy2 = ((pi*((pi^2)-(2*(pi^2)*(eps2^2))-((16-(pi^2))*(eps2^4))))/(eps2*((1-
(eps2^2))^(1/2))))*feps2;
kyx2 = -(pi*((pi^2)+((32+(pi^2))*(eps2^2))+2*(16-(eps2^2))*(eps2^4)))/(eps2*((1-
(eps2^2))^(1/2))))*feps2;
kyy2 = (4*((pi^2)+((32+(pi^2))*(eps2^2))+2*(16-(pi^2))*(eps2^4)))/(1-
(eps2^2))*feps2;
cxx2 = (2*pi*((1-(eps2^2))^(1/2))*((pi^2)+2*((pi^2)-8)*(eps2^2)))/eps2*feps2;
cxy2 = -8*((pi^2)+2*((pi^2)-8)*(eps2^2))*feps2;

```

```

    cyx2 = cxy2;

    cyy2 = (2*pi*((pi^2)+(2*(24-(pi^2))*(eps2^2))+((pi^2)*(eps2^4)))/(eps2*((1-
(eps2^2))^(1/2))))*feps2;

    Ki_coj1(:, :, i) = cte_Kcoj1*[[kxx1 kxy1; kyx1 kyy1] zeros(2); zeros(2,4)];
    Ki_coj2(:, :, i) = cte_Kcoj2*[[kxx2 kxy2; kyx2 kyy2] zeros(2); zeros(2,4)];
    Ci_coj1(:, :, i) = cte_Ccoj1*[[cxx1 cxy1; cyx1 cyy1] zeros(2); zeros(2,4)];
    Ci_coj2(:, :, i) = cte_Ccoj2*[[cxx2 cxy2; cyx2 cyy2] zeros(2); zeros(2,4)];
end

%%DETERMINACION DE LAS MATRICES GLOBALES DEL SISTEMA
%Matrices generadas por la presencia del disco, piñón y acople
Md = diag([md md Idd Idd]);
Gd = [zeros(2,4); zeros(2,2) [0 -Ipd; Ipd 0]];

Mp = diag([mp mp Idp Idp]);
Gp = [zeros(2,4); zeros(2,2) [0 -Ipp; Ipp 0]];
%Kp = (k_esl/2)*[ones(2,2) zeros(2,2); zeros(2,4)];
Kp = diag([k_esl k_esl 0 0]);

Ma = diag([ma ma Ida Ida]);
Ga = [zeros(2,4); zeros(2,2) [0 -Ipa; Ipa 0]];
Ka = diag([k_mot k_mot 0 0]);

Mc1 = diag([mc(1) mc(1) Idc(1) Idc(1)]);
Gc1 = [zeros(2,4); zeros(2,2) [0 -Ipc(1); Ipc(1) 0]];
Mc2 = diag([mc(2) mc(2) Idc(2) Idc(2)]);
Gc2 = [zeros(2,4); zeros(2,2) [0 -Ipc(2); Ipc(2) 0]];

```

```
%Ubicación de los componentes en la discretización del eje
```

```
nodo_dis = round(D_disco/l)+1;
```

```
nodo_cad = round(D_cad/l)+1;
```

```
nodo_aco = round(D_aco/l)+1;
```

```
nodo_coj1 = round(D_coj1/l)+1;
```

```
nodo_coj2 = round(D_coj2/l)+1;
```

```
%Inclusión de las matrices del disco en la matriz global
```

```
coord_disco = (4*(nodo_dis-1))+1:4*(nodo_dis);
```

```
Mg_M(coord_disco,coord_disco) = Mg_M(coord_disco,coord_disco) + Md;
```

```
Mg_G(coord_disco,coord_disco) = Mg_G(coord_disco,coord_disco) + Gd;
```

```
%Inclusión de las matrices del piñón en la matriz global
```

```
coord_cad = (4*(nodo_cad-1))+1:4*(nodo_cad);
```

```
Mg_M(coord_cad,coord_cad) = Mg_M(coord_cad,coord_cad) + Mp;
```

```
Mg_G(coord_cad,coord_cad) = Mg_G(coord_cad,coord_cad) + Gp;
```

```
Mg_K(coord_cad,coord_cad) = Mg_K(coord_cad,coord_cad) + Kp;
```

```
%Inclusión de las matrices del acople en la matriz global
```

```
coord_aco = (4*(nodo_aco-1))+1:4*(nodo_aco);
```

```
Mg_M(coord_aco,coord_aco) = Mg_M(coord_aco,coord_aco) + Ma;
```

```
Mg_G(coord_aco,coord_aco) = Mg_G(coord_aco,coord_aco) + Ga;
```

```
Mg_K(coord_aco,coord_aco) = Mg_K(coord_aco,coord_aco) + Ka;
```

```
%Inclusión de las matrices de los muñones en la matriz global
```

```
coord_coj1 = (4*(nodo_coj1-1))+1:4*(nodo_coj1);
```

```
Mg_M(coord_coj1,coord_coj1) = Mg_M(coord_coj1,coord_coj1) + Mc1;
```

```
Mg_G(coord_coj1,coord_coj1) = Mg_G(coord_coj1,coord_coj1) + Gc1;
```

```
coord_coj2 = (4*(nodo_coj2-1))+1:4*(nodo_coj2);
```

```
Mg_M(coord_coj2,coord_coj2) = Mg_M(coord_coj2,coord_coj2) + Mc2;
```

```
Mg_G(coord_coj2,coord_coj2) = Mg_G(coord_coj2,coord_coj2) + Gc2;
```

```
%%ITERACIÓN EN TODAS LAS VELOCIDADES
```

```
G_F = zeros((2*gradosd1),numDat);
```

```
G_C = zeros((2*gradosd1),numDat);
```

```
MODi = zeros((2*gradosd1),(2*gradosd1),numDat);
```

```
EigVi = zeros((2*gradosd1),numDat);
```

```
omega_i = zeros((2*gradosd1),numDat);
```

```
Vi_org = zeros((2*gradosd1),numDat);
```

```
%Definición de las matrices de rigidez y amortiguamiento para todas las iteraciones
```

```
Mg_Ki = zeros(gradosd1,gradosd1,numDat);
```

```
Mg_Ci = zeros(gradosd1,gradosd1,numDat);
```

```
for i=1:numDat
```

```
    Mg_Ki(:, :, i) = Mg_K;
```

```
    Mg_Ci(:, :, i) = Mg_C;
```

```
    Mg_Ki(coord_coj1,coord_coj1,i) = Mg_Ki(coord_coj1,coord_coj1,i) + Ki_coj1(:, :, i);
```

```
    Mg_Ci(coord_coj1,coord_coj1,i) = Mg_Ci(coord_coj1,coord_coj1,i) + Ci_coj1(:, :, i);
```

```
    Mg_Ki(coord_coj2,coord_coj2,i) = Mg_Ki(coord_coj2,coord_coj2,i) + Ki_coj2(:, :, i);
```

```
    Mg_Ci(coord_coj2,coord_coj2,i) = Mg_Ci(coord_coj2,coord_coj2,i) + Ci_coj2(:, :, i);
```

```

Mat_SS= [zeros(gradosdl)          eye(gradosdl);
         -inv(Mg_M)*Mg_Ki(:, :, i)  -inv(Mg_M)*(Mg_Ci(:, :, i)+(wi(i)*Mg_G))];

[MODi(:, :, i), EigM] = eig(Mat_SS);

EigV = diag(EigM);

EigVi(:, i) = EigV;

omega_i(:, i) = abs(EigV);

V_org = sort(EigV);

Vi_org(:, i) = V_org;

E_amt0 = (real(V_org)); %exponente de amortiguamiento
F_nt0 = ((imag(V_org)));

%E_amt = unique(E_amt0, 'stable');
%F_nt = unique(F_nt0, 'stable');

G_C(:, i) = E_amt0;
G_F(:, i) = F_nt0;

end

G_F1 = G_F1/(2*pi);

pru = 2:2:12;
pru2 = 2:2:12;

%PASOS PARA LA GRAFICADA DE VELOCIDADES CRITICAS

figure
whitebg('w')
plot(RPMi, G_F1(:, pru), 'LineWidth', 1)
hold on
plot(RPMi, Ni, 'r', 'LineWidth', 1.5);

```

```
legend('Modo 1 FW', 'Modo 2 BW', 'Modo 3 FW', 'Modo 4 FW', 'Modo 5 BW', 'Modo 6  
FW', 'fontsize', 8, 'fontweight', 'bold');  
title('DIAGRAMA DE CAMPBELL')  
xlabel('RPM')  
ylabel('Fn [Hz]')  
grid on  
  
%-----  
  
figure  
whitebg('w')  
plot(RPMi, G_C1(:, pru2), 'LineWidth', 1.5)  
yline(0, '--b');  
legend('Modo 1 FW', 'Modo 2 BW', 'Modo 3 FW', 'Modo 4 FW', 'Modo 5 BW', 'Modo 6  
FW', 'fontsize', 8, 'fontweight', 'bold');  
title('ESTABILIDAD')  
xlabel('RPM')  
ylabel('Factor de decaimiento/crecimiento [Hz]')  
grid on  
  
%-----
```