

**PENSAMIENTO ALGEBRAICO: UN ANÁLISIS DE LOS MIEMBROS DE UNA
COMUNIDAD MATEMÁTICA**

ÓSCAR MAURICIO SERRANO ARDILA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
BUCARAMANGA**

2018

**PENSAMIENTO ALGEBRAICO: UN ANÁLISIS DE LOS MIEMBROS DE UNA
COMUNIDAD MATEMÁTICA**

ÓSCAR MAURICIO SERRANO ARDILA

**Trabajo de Grado para Optar al Título de
Magíster en Pedagogía**

DIRECTORA

SOLANGE ROA FUENTES

Doctora en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS

ESCUELA DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

BUCARAMANGA

2018

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	16
1. ANTECEDENTES	19
1.1 LINEAMIENTOS GENERALES QUE GUÍA EL TRABAJO EN EL AULA	19
1.1.1 Estándares.....	19
1.1.2 Pruebas y resultados.	24
1.2 RELACIÓN ENTRE EL PENSAMIENTO NUMÉRICO Y EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO.....	28
2. PROBLEMÁTICA.....	38
2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	38
2.2 OBJETIVO	39
2.2.1 Objetivo general.....	39
2.2.2 Objetivos específicos	39
3. MARCO CONCEPTUAL	40
3.1 RAZONAMIENTO INFERENCIAL	41
3.1.1 Abducción.....	41
3.1.2 Inducción.....	42
3.1.3 Deducción.....	43
3.2 DIMENSIONES DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE PATRONES	44
4. METODOLOGÍA	46
4.1 ASPECTOS GENERALES.....	46
4.2 DISEÑO METODOLÓGICO.....	46
4.3 DISEÑO Y ANÁLISIS DE TAREAS	48

4.4 IMPLEMENTACIÓN DE TAREAS Y DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD	49
4.5 RECOLECCIÓN Y SELECCIÓN DE DATOS	52
4.6 INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS TEÓRICO.....	52
5. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN	53
5.1 PRUEBA DIAGNÓSTICA.....	54
5.2 SESIONES DE INTERVENCIÓN.....	69
5.2.1 Intervención uno.	70
5.2.1.1 Análisis a priori.....	71
5.2.2 Intervención dos.....	74
5.2.2.1 Análisis a priori.....	76
5.2.3 Intervención tres	80
5.2.3.1 Análisis a priori.....	82
5.2.4 Intervención cuatro	85
5.3 ANÁLISIS DE LAS TAREAS.....	90
5.3.1 Evidencias de razonamiento abductivo.....	91
5.3.1.1 Evidencias del razonamiento inductivo.	95
5.3.1.2 Evidencias del razonamiento deductivo.....	100
5.4 COMUNIDAD MATEMÁTICA	104
5.4.1 Primer momento. Trabajo individual.	107
5.4.2 Segundo momento. Trabajo en equipo.....	108
5.4.3 Tercer momento.....	110
5.5 ENTREVISTAS	114
5.5.1 Análisis a priori tareas de la entrevista	114
5.5.1.1 Tarea 1.....	114
5.5.1.2 Tarea 2.....	116
5.5.2 Análisis de las entrevista.....	118
6. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN	126
6.1 RESPUESTA A LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN.....	126

7. CONCLUSIONES	129
8. RECOMENDACIONES.....	133
9. CONTRIBUCIÓN ACADÉMICA, INVESTIGATIVA	134
BIBLIOGRAFIA.....	135
ANEXOS.....	140

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Resultados históricos Colombia pruebas PISA.....	25
Figura 2. Niveles de desempeño en matemáticas grado noveno.	26
Figura 3. ISCE, I.E. Rural Vijagual Año 2016 básica secundaria.....	27
Figura 4. Actividad Reporte de Investigación, Pensamiento numérico y algebraico Nivel Básico	30
Figura 5. Parte del análisis realizado por los estudiantes. Actividad I.3.....	31
Figura 6. Una respuesta de un estudiante al inciso c.	32
Figura 7. Respuesta a la Actividad	32
Figura 8. Respuesta a la Actividad	33
Figura 9. Problema para alumnos de 3 ^o a 6 ^o curso.....	34
Figura 10. Ejemplos de resoluciones gráficas que no respetaban la estructura espacial y/o Numérica.....	35
Figura 11. Estrategia recursiva utilizada por un estudiante de sexto curso.	36
Figura 12. Actividad aplicada a estudiantes de grado segundo.....	41
Figura 13. Patrón Triangular, aplicado a estudiantes de grado segundo.....	42
Figura 14. Solución a la etapa 10.	43
Figura 15. Solución al problema planteado por Rivera	44
Figura 16. Caracterización de la generalización de patrones	45
Figura 17. Estructura Metodológica de la Investigación.....	47
Figura 18. Implementación de Tareas y desarrollo de la Actividad: Construcción de una Comunidad Matemática	51
Figura 19. Secuencia figural prueba diagnóstica tarea	55
Figura 20. Secuencia figural Tarea 1 (6 y 7).....	56
Figura 21. Regla inductiva secuencia figural Tarea 1	56
Figura 22. Secuencia figural prueba diagnóstica Tarea 2.....	61
Figura 23. Cuarto término secuencia figural prueba diagnóstica Tarea 2.....	62

Figura 24. Etapa deductiva secuencia figural prueba diagnóstica Tarea 2.....	63
Figura 25. Conjetura abductiva Secuencia numérica prueba diagnóstica Tarea 4	67
Figura 26. Secuencia figural intervención 1 Tarea 1.....	70
Figura 27. Secuencia figural Intervención 1 Tarea 3.....	71
Figura 28. Regla abductiva Intervención 1 Tarea 1	72
Figura 29. Regla inductiva Intervención 1 Tarea 1.....	73
Figura 30. Secuencia figural Intervención 2 Tarea 1.....	75
Figura 31. Secuencia figural Intervención 2 Tarea 3.....	76
Figura 32. Regla inductiva intervención 2 Tarea 1	77
Figura 33. Secuencia figural Intervención 3 Tarea 1.....	80
Figura 34. Secuencia figural Intervención 3 Tarea 3.....	81
Figura 35. Regla abductiva Intervención 3 Tarea 1.....	82
Figura 36. Regla deductiva Intervención 3 Tarea 1	83
Figura 37. Secuencia figural intervención 4 Tarea 1.....	85
Figura 38. Secuencia figural intervención 4 Tarea3.....	86
Figura 39. Regla inductiva intervención 4 tarea 3.....	90
Figura 40. Organización del aula de clase antes de las intervenciones.....	106
Figura 41. Trabajo individual intervención uno	107
Figura 42. Trabajo individual intervención dos.....	107
Figura 43. Trabajo individual intervención tres	108
Figura 44. Trabajo individual intervención cuatro.....	108
Figura 45. Trabajo en pequeños grupos intervención uno.....	109
Figura 46. Trabajo en pequeños grupos intervención dos.....	109
Figura 47. Trabajo en pequeños grupos intervención tres.....	110
Figura 48. Trabajo en pequeños grupos intervención cuatro	110
Figura 49. Estudiante pidiendo la aceptación de la comunidad matemática.....	111
Figura 50. Estudiante argumentando intervención dos.....	112
Figura 51. Estudiante argumentando intervención tres.....	112
Figura 52. Estudiante argumentando intervención cuatro.....	113
Figura 53. Estudiante comprobando su hipótesis intervención cuatro.....	113

Figura 54. Secuencia figural entrevista Tarea1	115
Figura 55. Producción estudiantes entrevista 1	118
Figura 56. Producción razonamiento inductivo estudiante ENT_1 entrevista 1 Tarea 1	119
Figura 57. Producción razonamiento inductivo estudiante ENT_26 entrevista 1 Tarea 1	119
Figura 58. Producción razonamiento deductivo estudiante ENT_26 entrevista 1 Tarea 1	120
Figura 59. Producción razonamiento inductivo estudiante ENT_1 entrevista 1 Tarea 2	121
Figura 60. Razonamiento inductivo estudiante ENT_26 entrevista 1 Tarea 2	121
Figura 61. Producción estudiantes entrevista 2	122
Figura 62. Razonamiento abductivo estudiante ENT_24 entrevista 2 Tarea 1	123
Figura 63. Razonamiento inductivo estudiante ENT_21 entrevista 2 Tarea 1	123
Figura 64. Razonamiento inductivo estudiante ENT_21 entrevista 2 Tarea 1	124

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Comportamiento tabular prueba diagnóstica Tarea 1	57
Tabla 2. Análisis a posteriori secuencia figural prueba diagnóstica Tarea 1	58
Tabla 3. Análisis a posteriori secuencia figural prueba diagnóstica Tarea 2	63
Tabla 4. Etapa deductiva prueba diagnóstica Tarea 3	66
Tabla 5. Etapa deductiva prueba diagnóstica Tarea 4	68
Tabla 6. Regla deductiva Intervención 1 Tarea 2	73
Tabla 7. Regla deductiva Intervención 1 Tarea 3	74
Tabla 8. Regla deductiva intervención 2 Tarea 1	78
Tabla 9. Regla deductiva Intervención 2 Tarea 2	79
Tabla 10. Regla inductiva Intervención 2 Tarea 3	79
Tabla 21. Regla deductiva Intervención 3 Tarea 2	84
Tabla 32. Regla deductiva Intervención 3 Tarea 3	84
Tabla 43. Regla deductiva Intervención 4 Tarea 1	88
Tabla 14. Regla deductiva Intervención 4 Tarea 2	89
Tabla 15. Análisis a posteriori razonamiento abductivo intervención 1 Tarea 1	91
Tabla 16. Análisis a posteriori razonamiento abductivo intervención 2 Tarea 1	92
Tabla 17. Análisis a posteriori razonamiento abductivo intervención 2 Tarea 3	93
Tabla 18. Análisis a posteriori razonamiento abductivo intervención 3 Tarea 3	94
Tabla 19. Análisis a posteriori razonamiento abductivo intervención 4 Tarea 3	95
Tabla 20. Análisis a posteriori razonamiento inductivo intervención 1 Tarea 1	96
Tabla 21. Análisis a posteriori razonamiento inductivo intervención 1 Tarea 2	97
Tabla 22. Análisis a posteriori razonamiento inductivo intervención 3 Tarea 1	98
Tabla 23. Análisis a posteriori razonamiento inductivo intervención 3 Tarea 3	98
Tabla 24. Análisis a posteriori razonamiento inductivo intervención 4 Tarea 1	99
Tabla 25. Análisis a posteriori razonamiento deductivo intervención 1 Tarea 1 ..	100
Tabla 26. Análisis a posteriori razonamiento deductivo intervención 1 Tarea 2 ..	101

Tabla 27. Análisis a posteriori razonamiento deductivo intervención 2 Tarea 2 ..	101
Tabla 28. Análisis a posteriori razonamiento deductivo intervención 3 Tarea 1 ..	102
Tabla 29. Análisis a posteriori razonamiento deductivo intervención 4 Tarea 3 ..	103
Tabla 30. Regla deductiva entrevista Tarea 1.....	116
Tabla 31. Regla deductiva Intervención 1 Tarea 3.....	117

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
Anexo A. Análisis de la prueba diagnóstica	140
Anexo B. Prueba diagnóstica.....	141
Anexo C. Intervención uno.....	142
Anexo D. Intervención dos.....	143
Anexo E. Intervención tres.....	144
Anexo F. Intervención cuatro	145
Anexo G. Asentimiento Informado a estudiantes	146
Anexo H. Consentimiento informado a padres de familia	147
Anexo I. Consentimiento informado a padres de familia	148
Anexo J. Protecting Human Research Participants.	149

RESUMEN

TÍTULO: PENSAMIENTO ALGEBRAICO: UN ANÁLISIS DE LOS MIEMBROS DE UNA COMUNIDAD MATEMÁTICA*

AUTOR: Oscar Mauricio Serrano Ardila**

PALABRAS CLAVE: Pensamiento Algebraico Temprano, Generalización de patrones.

DESCRIPCIÓN:

Esta investigación se propuso desde el enfoque cualitativo, se orientó en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, tomando como fundamento los procesos de razonamiento inferencial (abducción, inducción y deducción). Estaba dirigida a estudiantes con edades comprendidas entre 12 y 14 años de un sector deprimido de la ciudad de Bucaramanga. Se implementó una serie de Tareas con el propósito de potenciar el pensamiento algebraico; teniendo en cuenta que si bien en la escuela el pensamiento aritmético ha sido asumido como prerrequisito para la emergencia y desarrollo del pensamiento algebraico, es posible en el grado anterior promover en los estudiantes formas elementales de pensamiento que los ayuden a abordar con más confianza el reto del álgebra. Para esto se aprovechó la generalización de patrones, abordando situaciones relacionadas con patrones en secuencias numéricas y figúrales en el marco de una Comunidad Matemática, apropiándose de su nuevo rol el aula de clase y trabajando proactivamente para construir su conocimiento. Lograron de manea literal expresar sus conjeturas acerca de la generalización de algún patrón y argumentaron frente al grupo su posición que fue validada o rebatida siempre bajo la premisa del respeto y la tolerancia. Es en este compartir que el grupo logró jalonar los procesos de los estudiantes que por alguna razón mostraban aversión o pereza por las actividades diarias de clase encontrando en este trabajo la oportunidad de aprender y poner en práctica sus habilidades. Se planteó transformar la manera de trabajar en el salón de clase de tal manera que se fomentó una forma diferente de pensar sobre las matemáticas y su importancia. En la que el rol del profesor, el estudiante y el conocimiento se transformó positivamente.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación. Directora: Ph.D. Solange Roa Fuentes.

ABSTRACT

TITLE: ALGEBRAIC THINKING: AN ANALYSIS OF THE MEMBERS OF A MATHEMATICAL COMMUNITY*

AUTHOR: OSCAR MAURICIO SERRANO ARDILA**

KEY WORDS: Early Algebraic Thinking, Generalization of Patterns.

DESCRIPTION

This research was proposed from the qualitative approach, was oriented in the development of early algebraic thinking, based on the processes of inferential reasoning (abduction, induction and deduction). It was aimed at students between the ages of 12 and 14 from a depressed sector of the city of Bucaramanga. A series of tasks was implemented with the purpose of enhancing algebraic thinking; taking into account that although in school arithmetic thinking has been assumed as a prerequisite for the emergence and development of algebraic thinking, it is possible in the previous degree to promote in students basic forms of thinking that help them to more confidently approach the challenge of algebra. For this, the generalization of patterns was taken advantage of, dealing with situations related to patterns in numerical and figurative sequences within the framework of a Mathematical Community, appropriating their new role in the classroom and working proactively to build their knowledge. They managed literally to express their conjectures about the generalization of some pattern and argued against the group their position that was validated or refuted always under the premise of respect and tolerance. It is in this sharing that the group managed to mark the processes of the students who for some reason showed aversion or laziness for the daily activities of class, finding in this work the opportunity to learn and put their skills into practice. It was proposed to transform the way of working in the classroom in such a way that a different way of thinking about mathematics and its importance was fostered. In which the role of the teacher, the student and the knowledge was transformed positively.

* Graduation paper

** Faculty of Human Sciences. School of Education. Director: Ph. D. Solange Roa Fuentes

INTRODUCCIÓN

Actualmente, las matemáticas son una parte esencial de la formación básica que han de compartir todos los miembros de la sociedad contemporánea¹, esto hace que su competencia y dominio sea imprescindible para los sujetos en la medida en que aportan aprendizajes útiles para afrontar problemas cotidianos y para atender las necesidades que la compleja sociedad exige. Sin embargo, muchos alumnos generan en el transcurso de su vida académica actitudes negativas hacia las matemáticas, manifestando, en ocasiones, una auténtica aversión y/o rechazo hacia esta disciplina (Nieto, Barona & Ignacio)².

Gran parte de los estudiantes, traen inclusive desde su casa la creencia de que las matemáticas son un conocimiento complejo que genera sentimientos de intranquilidad, miedo, ansiedad, inseguridad, desconcierto e incertidumbre. Los estudiantes manifiestan con frecuencia sus sentimientos sobre las matemáticas, a través de expresiones como “odio las clases de matemáticas”, en otras ocasiones, las expresiones van dirigidas al profesor que las imparte: “el profesor de matemáticas explica fatal” o “el profesor me tiene entre ojos”. Al respecto Schoenfeld³ expone que las creencias de los estudiantes están asociadas con el tipo de instrucción que reciben en el aula: los problemas, la forma de evaluación y las dinámicas de grupo.

Con respecto a lo anterior, la familia incluso los profesores de matemática nos hemos encargado de hacer ciertas todas estas creencias, los estudiantes persisten en trabajar de forma mecánica sobre las matemáticas. La manera tradicional como

¹ RICO, Luis; SIERRA, Modesto. Didáctica de la matemática e investigación. 2000. en YÁÑEZ, José; GONZÁLEZ, Luis Carlos. *Matemática española en los albores del siglo XXI*. Hergué, pp. 77-131.

² IGNACIO, Nuria; NIETO, Lorenzo; BARONA, Eloísa Guerrero. El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de educación*, 2006, vol. 340, p. 551-569

³ SCHOENFELD, Alan. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *Colección Digital Eudoxus*. En GROUWS, Douglas A. *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Macmillan Publishing Co, Inc, 1992.

se ha implementado en el aula la resolución de problemas, en donde es vista como una temática aislada del desarrollo de importantes ideas matemáticas, genera que estas se asocien con la mecanización de procedimientos o algoritmos desprovistos de significado, English y Sriraman⁴ comentan al respecto que:

Para que los estudiantes vean a las matemáticas como una disciplina con sentido, es necesario que interactúen e internalicen los principios asociados a esta disciplina. Los estudiantes necesitan aprender matemáticas en un salón de clases que presente un microcosmos de la cultura matemática, esto es, clases donde los valores de las matemáticas como una disciplina con sentido sean reflejados en la práctica cotidiana.⁵

Luego es urgente generar un cambio, por parte de todos los actores de la comunidad educativa: padres de familia, estudiantes, docentes y directivas docentes, que promueva el acercamiento natural al conocimiento. En este sentido Santos⁶ propone la necesidad de establecer una Comunidad Matemática en el salón de clase, una comunidad caracterizada por el trabajo en equipo. De este modo se pretende dar un vuelco a la manera de trabajar en el salón de clase que permita potenciar una forma diferente de pensar sobre las matemáticas y su importancia. En la que el rol del profesor, el estudiante y el conocimiento se transforme positivamente.

Esta investigación se propone desde el enfoque cualitativo, estará dirigida a un grupo de estudiantes de grado séptimo, seleccionado de una Institución Educativa de la ciudad de Bucaramanga. Se diseñan e implementan una serie de actividades en el marco de una Comunidad Matemática, teniendo en cuenta que si bien en la

⁴ ENGLISH, Lyn; SRIRAMAN, Bharath. Problem solving for the 21st century. En *Theories of mathematics education*. Springer Berlin Heidelberg, 2010. p. 263-290..

⁵ SANTOS TRIGO, Luz Manuel. *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. Trillas, 2007. P. 87

⁶ Ibid. P. 89

escuela “el pensamiento aritmético ha sido asumido como prerrequisito para la emergencia y desarrollo del pensamiento algebraico” Radford⁷, es posible en el grado anterior promover en los estudiantes formas elementales de pensamiento algebraico, aprovechando la generalización de patrones (Vergel)⁸.

Este documento está organizado en seis capítulos: En el primero los Antecedentes vistos desde dos grandes tópicos, Lineamientos generales que guían el trabajo en el aula; que hacen referencia a lo dispuesto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), las pruebas saber y propuestos en los Principios y Estándares para la Educación Matemática, Thales⁹, acerca de la emergencia del álgebra. Por otra parte, la relación entre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico visto desde las investigaciones de varios autores que hacen referencia a la emergencia del álgebra y la generalización de patrones. En el segundo capítulo se trata la problemática. En el tercer capítulo los objetivos de la investigación. En el cuarto capítulo el Marco Conceptual, se mencionan algunas características generales de la transición entre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico, además se presentan estudios recientes que documentan el proceso de generalización de patrones. En el quinto capítulo el Diseño Metodológico; se define el método de investigación, el diseño metodológico, técnicas e instrumentos que se utilizarán, así como el proceso de análisis a priori y a posteriori de las actividades que se implementarán; finalmente en el sexto capítulo, se evidencian los alcances y/o limitaciones de la investigación. Además, se presentan las referencias bibliográficas en que se basa este estudio.

⁷ RADFORD, Luis. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 2010, vol. 4, no 2, p. 37-62. Citado por: VERGEL, Rodolfo. Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. 2015. p. 258

⁸ VERGEL, Rodolfo. Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. 2015. *PNA*, 9(3). p. 193-215.

⁹ THALES, S. A. E. M. Principios y Estándares para la Educación Matemáticas. *Sevilla, SAEM Thales*, 2003. p. 39

1. ANTECEDENTES

Esta investigación busca construir un escenario a partir del diseño de tareas que potencie el desarrollo de pensamiento algebraico, a través de la constitución de una Comunidad Matemática. Las definiciones asociadas al desarrollo del pensamiento algebraico serán expuestas desde el punto de vista de varios investigadores, enfocándose en aquellas que guardan similitud con la propuesta que se presenta, o que de algún modo pueden apoyar el desarrollo de la investigación.

1.1 LINEAMIENTOS GENERALES QUE GUÍA EL TRABAJO EN EL AULA

El pensamiento algebraico permite al estudiante expresar, de manera compacta y eficiente, una gran variedad de ideas matemáticas inmersas tanto en la misma disciplina como en otros contextos. Para dimensionar su alcance se contemplan en esta investigación los Estándares Básicos de Competencias para matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y la propuesta del *National Council of Teachers of Mathematics*, (NCTM, por sus siglas en inglés) traducido por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática (Thales, 2003)). A continuación se presentan aspectos que son de interés para esta investigación.

1.1.1 Estándares. En el documento *Principios y Estándares para la Educación Matemática*, se ha determinado que el aprendizaje de las matemáticas incluye el desarrollo de cinco aspectos interrelacionados, que en conjunto conforman la destreza matemática.

1. Comprensión de conceptos es decir, el entendimiento y la vinculación de conceptos, operaciones y relaciones.
2. Destreza en los procedimientos a saber, la utilización significativa y flexible de procedimientos para resolver problemas.

3. Capacidad estratégica es decir la habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos.
4. Razonamiento adaptativo, capacidad para pensar lógicamente y para justificar el propio razonamiento.
5. Disposición productiva es la tendencia a encontrar sentido en las matemáticas, a percibir las como útiles y valiosas, a creer que el esfuerzo de aprenderlas es redituable y a concebirse uno mismo como aprendiz y productor de matemáticas.¹⁰

En este sentido según Ball,¹¹ los estudiantes necesitan reconocer la importancia de estudiar matemáticas y estar convencidos de que son capaces de aprender con determinación y esfuerzo. El aprendizaje depende exclusivamente de lo que ocurre en el salón de clase en función de cómo interactúan los docentes y estudiantes bajo un currículo establecido.

Por otra parte el desarrollo de tareas debe servir para motivar el aprendizaje y ayudar a los estudiantes a construir nuevo conocimiento a través de la resolución de problemas. En cuanto a su utilización hay tres importantes hallazgos dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:

1. No todas las tareas ofrecen las mismas oportunidades para el razonamiento y el aprendizaje de los alumnos.¹²
2. El aprendizaje del estudiante es mayor en las clases donde las tareas fomentan de manera consistente su pensamiento y razonamiento de alto nivel; pero es

¹⁰ THALES, Op. Cit., p. 131

¹¹ BALL, Deborah L.; BASS, Hyman. Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. *Yearbook-National Society for the Study of Education*, Citado por: THALES, S. A. E. M. Principios y Estándares para la Educación Matemáticas. Sevilla, SAEM Thales, 2003

¹² HIEBERT, James. A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational studies in mathematics*, 1988, vol. 19, no 3, p. 333-355

menor en aquéllas en las que la naturaleza de las tareas es rutinariamente procedimental.¹³

3. Las tareas que implican grandes exigencias cognitivas resultan las más complicadas de implementar en forma correcta y a menudo se convierten en tareas menos exigentes durante la enseñanza.¹⁴

Lo anterior da las luces suficientes para explorar y proponer actividades que potencien el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes, el ideal es que éstos contemplen las matemáticas como un campo de estudio excitante, útil y creativo.

Al comenzar la adolescencia tienen lugar cambios físicos, emocionales e intelectuales que hacen que dichos niveles constituyan un significativo punto de transición en sus vidas. Durante estos años, muchos estudiantes solidifican sus concepciones, como aprendices de matemáticas, en cuanto a su competencia, actitud, interés y motivación. Estas concepciones influirán, más tarde, en como enfoquen el estudio de las matemáticas, lo que a su vez repercutirá en las oportunidades que la vida les ofrezca. Los alumnos de los niveles medios se sentirán atraídos por las matemáticas si encuentran retos y apoyo en las clases. Si se enfrentan frecuentemente con problemas interesantes y retadores, llegan a apreciar las ideas matemáticas y a desarrollar su comprensión deberían participar regularmente en actividades ligadas a sus capacidades¹⁵

Esto nos permite ubicarnos en el desarrollo físico y psicológico de nuestros estudiantes y nos da la base, para utilizar la creación de una comunidad matemática

¹³ BOALER, Jo, et al. Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: The case of Railside School. *Teachers College Record*, 2008, vol. 110, no 3, p. 608-645.

¹⁴ HIEBERT, Op. Cit. p. 333-355

¹⁵ THALES, Op. Cit., p. 215

alrededor del análisis de patrones que potencie la actividad matemática en los estudiantes. Cabe notar que no solo se tendrá en cuenta este desarrollo mental, sino además la sensibilidad y la influencia de los compañeros, lo que facilita un ambiente de clase agradable que posibilite el aprendizaje de cada uno.

Según el documento Principios y Estándares de Estados Unidos traducido por la Sociedad Andaluza los estudiantes en este nivel deberían aprender el álgebra como:

Un conjunto de conceptos y habilidades referentes a la representación de relaciones cuantitativas, y como una forma de pensamiento matemático para formalizar patrones, funciones y generalizaciones. Deberían trabajar más frecuentemente con símbolos algebraicos que en los niveles más bajos. Es fundamental que lleguen a sentirse cómodos relacionando expresiones simbólicas formuladas con variables mediante representaciones verbales, tabulares y gráficas de relaciones numéricas y cuantitativas. Deberían iniciar la comprensión de los diferentes significados y usos de las variables, mediante la representación de cantidades en problemas diversos. Deberían conectar sus experiencias con las funciones lineales a sus conocimientos en desarrollo sobre la proporcionalidad, y distinguir las funciones lineales de las no lineales. Y también, aprender a reconocer y generar expresiones equivalentes, a resolver ecuaciones lineales y a utilizar fórmulas sencillas. Siempre que sea posible, la enseñanza y el aprendizaje del álgebra debe integrarse con otros tópicos del currículo¹⁶.

En cuanto a los patrones relaciones y funciones los estudiantes en este nivel específico deberían:

¹⁶ THALES, Op. Cit., p. 227

Centrarse en patrones asociados a funciones lineales, que se originan cuando hay una tasa de cambio constante. Los estudiantes deberían resolver problemas en los que se usen tablas, gráficas, expresiones verbales y expresiones simbólicas para representar y examinar funciones y patrones de cambio¹⁷.

Con estas directrices todos los programas de enseñanza según la Sociedad Andaluza de Educación Matemática, en esta etapa deberían garantizar que los estudiantes:

- Comprender patrones, relaciones y funciones
- Representar y analizar situaciones estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos
- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas
- Analizar el cambio en contextos diversos¹⁸

Por otra parte el Ministerio de Educación en su documento Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas, propone organizaciones curriculares en la dirección de lograr que las matemáticas sean vistas y experimentadas como una herramienta útil, accesible, necesaria e interesante para todos los estudiantes. Para ello, define tres prioridades:

- La necesidad de una educación matemática básica de calidad para todos
- La importancia de considerar la formación matemática como un valor social
- El papel de la formación matemática en la consolidación de los valores democráticos¹⁹.

¹⁷ THALES, Op. Cit., p. 227

¹⁸ THALES, Op. Cit., p. 226

¹⁹ MEN, COLOMBIA. Lineamientos Curriculares Matemáticas. *Magisterio, Bogotá*, 1998. p. 50.

Los estándares básicos de competencias, resumen estas tres prioridades en el objetivo de formar ciudadanos matemáticamente competentes. Para ser matemáticamente competente un estudiante debe poder:

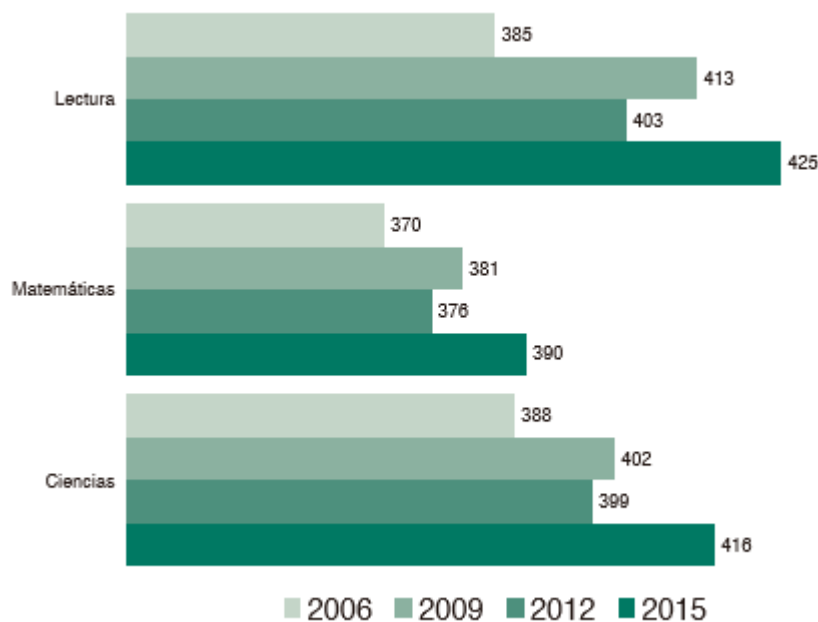
- Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, del mundo de las ciencias y del mundo de las matemáticas mismas.
- Dominar el lenguaje matemático y su relación con el lenguaje cotidiano; así como usar diferentes representaciones
- Razonar y usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración.
- Dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz²⁰.

1.1.2 Pruebas y resultados. En el año 2015, en Colombia se expidió la Ley 1753, denominada Ley del Plan Nacional de Desarrollo 2014-2018 "Todos por un nuevo país". En esta se contempla el proyecto "Colombia la más educada" que señala, expresamente, que la "educación es el más poderoso instrumento de igualdad social y crecimiento económico en el largo plazo, con una visión orientada a cerrar brechas en acceso y calidad al sistema educativo, entre individuos, grupos poblacionales y entre regiones, acercando al país a altos estándares internacionales y logrando la igualdad de oportunidades para todos los ciudadanos". Es evidente la necesidad de replantear las prácticas pedagógicas y mejorar los resultados que evidencian las pruebas; un ejemplo claro de este panorama lo refleja el bajo rendimiento que se ha obtenido en la aplicación de las pruebas internacionales PISA (Programme for International Student Assessment). PISA ha sido creada para evaluar los sistemas escolares

²⁰ Ibid., p. 51

de los países miembros de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE). Colombia desde que inició su participación en el año 2006 ha ocupado los últimos lugares, esta prueba se ha enfocado en las áreas de ciencias, lenguaje y matemáticas. En la siguiente gráfica se evidencian los resultados de nuestro país en los últimos años.

Figura 1. Resultados históricos Colombia pruebas PISA

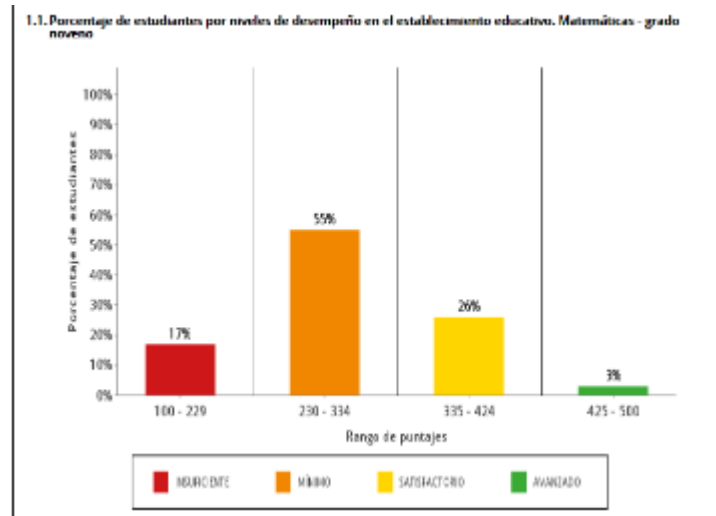


Fuente: Resultados Análisis ICFES Pruebas PISA COLOMBIA

Se evidencia que el área de matemáticas en el último año alcanzó una pequeña mejoría, sin embargo en comparación con las otras áreas es la que presenta más bajos resultados.

Las pruebas de Estado aplicadas por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior. ICFES dan un claro panorama del estado en que se encuentran estos propósitos en la institución educativa donde se hará la intervención.

Figura 2. Niveles de desempeño en matemáticas grado noveno.



Como se observa en la figura 1, el porcentaje de estudiantes del establecimiento educativo, en cada uno de los niveles de desempeño definidos para el área y grado evaluado. El 17% es insuficiente, el 55% es mínimo, el 26% es satisfactorio y solo el 3% es avanzado.

El puntaje promedio en la Institución Educativa a intervenir es:

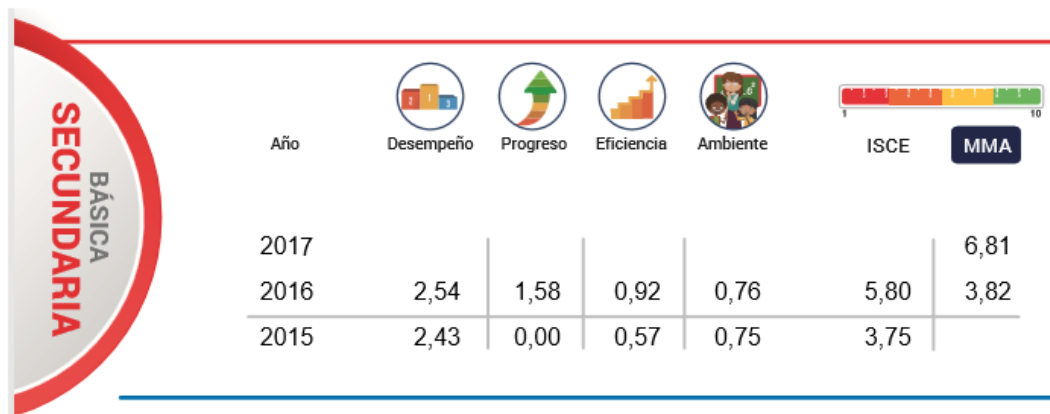
- Inferior al puntaje promedio de los establecimientos educativos de la entidad territorial certificada (Bucaramanga).
- Similar al puntaje promedio de los establecimientos educativos de Colombia.
- Inferior al puntaje promedio de los establecimientos educativos oficiales urbanos de la entidad territorial certificada (Bucaramanga).
- Similar al puntaje promedio de los establecimientos educativos oficiales rurales de la entidad territorial certificada (Bucaramanga).
- Inferior al puntaje promedio de los establecimientos educativos privados de la entidad territorial certificada (Bucaramanga).

Según estas pruebas y en comparación con los establecimientos que presentan un puntaje promedio similar en el área y grado evaluado, la institución a intervenir es:

- Débil en Razonamiento y argumentación.
- Similar en Comunicación, representación y modelación.
- Fuerte en Planteamiento y resolución de problemas.
- Fuerte en el componente Numérico-variacional.
- Similar en el componente Geométrico-métrico, representación y modelación.
- Similar en el componente Aleatorio.

Es importante mencionar que en los resultados obtenidos en las pruebas de Estado presentadas por los estudiantes de undécimo grado, la Institución educativa en 2013, 2014 y 2015 alcanzaron el nivel alto y en 2016 alcanzó el equivalente a nivel superior, lo que la posesiona como una de las mejores del sector norte de la ciudad, resultados que se ven reflejados en el índice sintético de la calidad presentado por el ministerio de educación nacional, donde en el 2016 presentamos un aumento considerable con respecto al 2015.

Figura 3. ISCE, I.E. Rural Vijagual Año 2016 básica secundaria



Sin embargo, lo que falta por hacer es bastante, por eso la necesidad de buscar estrategias que permitan mejorar los procesos y fortalecer las debilidades de los estudiantes. En las siguientes líneas exploramos desde la visión de algunos autores los aciertos o desaciertos del desarrollo del pensamiento algebraico, especialmente relacionados con la generalización de patrones.

1.2 RELACIÓN ENTRE EL PENSAMIENTO NUMÉRICO Y EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

“En los últimos quince años se han realizado varias investigaciones sobre la didáctica del álgebra, en algunas de ellas se habla acerca de las dificultades y obstáculos que encuentran los estudiantes en el paso entre lo aritmético y lo algebraico²¹”

El estudio de la ecuación como igualdad con incógnita, es crucial ya que de ella depende que tenga significado el manejo de las variables, el trabajo alrededor de las ecuaciones ha sido analizado por diferentes autores Cid y Bolea²², Panizza y Sadovsky²³; Bosch y Gascón²⁴, quienes han determinado condiciones didácticas que permiten introducir a los alumnos al estudio de los objetos del álgebra en la Escuela Secundaria.

En España por ejemplo Martín Socas²⁵ desarrolla un material llamado “Iniciación al álgebra”; el objetivo es diseñar material con actividades estructuradas encaminadas a introducir de manera pertinente el álgebra. De otra parte Molina²⁶ describe una propuesta curricular basada en la integración de modos de pensamiento algebraicos en el currículo de la educación primaria.

En cuanto a la generalización de patrones aparece en escena las actividades concretas que son las que median el saber y el conocimiento. El saber es una síntesis de las labores que realizamos a diario, en términos de Radford, el saber “es

²¹ RADFORD, Luis. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 2010, vol. 4, no 2, p. 37-62. Citado por: VERGEL, Rodolfo. Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. 2015.p. 258

²² CID, Eva; BOLEA, Pilar. Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. *Recuperado de http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/11*, 2007.

²³ PANIZZA, Mabel; SADOVSKY, Patricia; SESSA, Carmen. La ecuación lineal con dos variables. *Enseñanza de las Ciencias*, 1999, vol. 17, no 3, p. 453-461.

²⁴ BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En *Investigación en educación matemática XIII*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM, 2009. p. 89-114.

²⁵ SOCAS, Martín. Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. 2007.

²⁶ MOLINA, Marta. Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. 2009.

una forma ideal de acción, opuesto a las acciones en sí mismas”²⁷. Estos planteamientos tienen conexión con la idea expuesta por Vergel, según la cual “el pensamiento de un hombre es el movimiento de formas de actividad de la sociedad históricamente constituidas y apropiadas por aquél”²⁸. Luego el conocimiento es la actualización del saber. De tal forma que solucionar un problema en lo general y lo particular son las acciones o actividades que requieran el docente y los estudiantes para lograr solucionarlo.

La actividad es movimiento concreto actualizado, que lleva a una instanciación singular del general Vergel plantea que:

La actualización del general es articulada como un proceso emergente de instanciación [del general]. El adjetivo “emergente” significa que el salón de clase es visto como un sistema que evoluciona a través de “estados” y que esta evolución no puede ser determinada de antemano. Profesores e investigadores pueden tener una idea, pero el proceso no es mecánico. Dependerá de cómo los estudiantes y los profesores se involucran en la actividad, de cómo ellos respondan uno al otro, etc.²⁹

La generalización de patrones es considerada por Vergel, una de las formas más importantes para introducir el álgebra, entre otros aspectos, posibilita a los estudiantes acercarse a situaciones de variación que se erigen como importantes para el desarrollo del pensamiento algebraico.

Para que la generalización sea algebraica se requiere [...] que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera analítica. Esto quiere decir que la abducción será utilizada ya no

²⁷ RADFORD, Luis. Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. 2013. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44. doi: <http://doi.dx.org/10.4471/redimat.2013.19>. Citado por: VERGEL, Rodolfo. Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. 2015. p. 12

²⁸ VERGEL, Rodolfo. Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. 2015. p. 279

²⁹ VERGEL, Op. Cit., p. 32

como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodóticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término.³⁰.

En cuanto a la generalización de patrones se pueden presentar algunas dificultades como lo muestran CAN y SOTO: “Los estudiantes en el proceso de detección del patrón si no son experimentados se desconectan entre lo que se ve y lo que se está generalizando, esto se debe a que durante el abordaje de este tipo de tareas, no se interpreta de manera organizada los elementos gráficos que se presentan”³¹. En su investigación plantearon a 36 estudiantes del nivel medio superior, una serie de tareas donde se les pedía analizar los crecimientos de las secuencias algebraicas, que pusieran por escrito el patrón de la misma y la expresión en símbolos algebraicos de tal patrón. En el tipo de tarea que presentaron, lo visual jugaba un rol central y cada vez más importante conforme se avanzaba en la solución de las actividades propuestas, la actividad se muestra en la figura 2.

Figura 4. Actividad Reporte de Investigación, Pensamiento numérico y algebraico Nivel Básico

3. En la **Figura** se tienen unos papalotes formados por cuadrados, su cola igual es formada por cuadrados.

a. Continúa la sucesión de papalotes dibujando el cuarto papalote. ¿Cuántos cuadrados tendrá en el amazón (la cabeza)? Y ¿en la cola?

b. ¿Cuántos cuadrados tendrá el papalote número 13 de la sucesión? ¿Cuántos cuadrados habrá en el amazón (la cabeza) del papalote? Y ¿en la cola?

c. Escribe un mensaje para otro chico, explicando claramente qué debe hacer para encontrar cuántos cuadrados habrá en cualquier papalote de la secuencia.

d. Escribe una fórmula para encontrar la cantidad de cuadrados en cualquier papalote de la Figura 3.

Tomado de, Cinvestav ponencia Pensamiento numérico y algebraico.

³⁰ VERGEL, Op. Cit., p. 198

³¹ CAN CHALÉ, Sergio Damián; SOTO ACUÑA, Claudia Margarita. algunas dificultades que enfrentan los estudiantes al resolver tareas de secuencias algebraicas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav, Ponencia, Reporte de Investigación, Pensamiento numérico y algebraico Nivel Básico

En el primer momento, figura 3, los estudiantes no tuvieron dificultad para resolver los incisos a. y b, “estas primeras acciones quedan enmarcadas dentro del primer nivel de generalización algebraico, el factual, debido a que en este momento son capaces de dar ejemplos particulares de elementos que siguen en la secuencia presentada y continuar con el desarrollo de la secuencia”.³²

Figura 5. Parte del análisis realizado por los estudiantes. Actividad I.3.



Tomado de: Cinvestav ponencia Pensamiento numérico y algebraico

En un segundo momento, en el nivel de generalización factual, se les pidió a los estudiantes expresar en palabras la regla que sigue el crecimiento del patrón.

Se evidencia la dificultad de algunos alumnos para expresar sus ideas por medio de palabras, se muestra un ejemplo en la Figura 4. Se considera que esto es debido a una desconexión entre lo que se mira en la figura y lo que se está generalizando, y por otro lado las relaciones que ocurren dentro del patrón no pueden ser expresadas, por parte de los estudiantes, por medio del discurso y la escritura³³.

³² Ibid.

³³ Ibid.

Figura 6. Una respuesta de un estudiante al inciso c.

c. Escribe un mensaje para otro chico, explicando claramente qué debe hacer para encontrar cuántos cuadrados habrán en cualquier papalote de la secuencia.

Una fórmula o una regla

Tomado de: Cinvestav ponencia Pensamiento numérico y algebraico.

Posteriormente, en un tercer momento, se pide a los estudiantes escribir la expresión algebraica que modela el patrón de crecimiento de la secuencia. En este momento, los estudiantes están en el tercer nivel de generalización algebraica, la simbólica, que es la más profunda y avanzada de las propuestas por Radford. En las cuales la parte analítica y la indeterminación se hacen presentes.

“Los estudiantes enfrentaron ciertas dificultades, puesto que expresar la variación entre los elementos de la sucesión no fue asunto sencillo. Un estudiante relacionó adecuadamente la variable con la posición del elemento dentro de la secuencia Figura 5 y Figura 6 otro estudiante construyó una fórmula recursiva”³⁴.

Figura 7. Respuesta a la Actividad

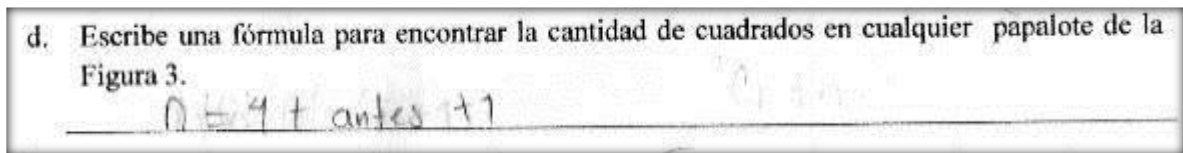
d. Escribe una fórmula para encontrar la cantidad de cuadrados en cualquier papalote de la Figura 3.

$4 + \text{Núm. figura}$

Tomado de: Cinvestav ponencia Pensamiento numérico y algebraico

³⁴ Ibid.

Figura 8. Respuesta a la Actividad



Tomado de: Cinvestav ponencia Pensamiento numérico y algebraico

Efectivamente, los estudiantes transitan por los niveles de generalización que Radford identifica, y es en este proceso que se identifica ciertas dificultades que los estudiantes enfrentan.

En el nivel de generalización factual, los estudiantes no tiene problemas al trabajar con los números que pueden obtener del análisis de la secuencia, incluso pueden encontrar elementos lejanos al conjunto que se les dio. En el nivel de generalización contextual, los estudiantes: enfrentan dificultades para hacer explícitos sus análisis a través del lenguaje escrito, tienen dificultades para relacionar lo que ven en la figura y lo que se está generalizando, además de enfrentar dificultades para conectar la numerabilidad de los elementos de la secuencia con su posición. En el tercer nivel, los estudiantes, enfrentan dificultades para expresar por medio de símbolos algebraicos la variación entre los elementos de la secuencia. Cometan errores de sintaxis y no utilizan adecuadamente el sistema alfanumérico del álgebra³⁵.

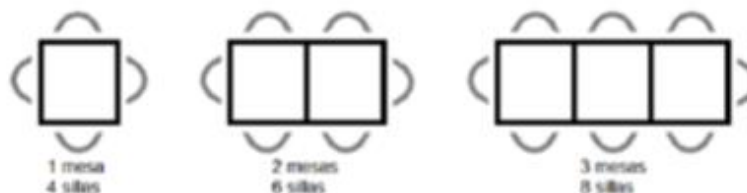
Por otra parte en España CALLEJO aborda el problema del pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) aplicando la generalización de patrones lineales en diferentes grados. Para esto toma en cuenta el desarrollo cognitivo y la madures mental para hacer los diferentes cuestionarios,

³⁵ Ibid.

la tarea propuesta es una sucesión de figuras con mesas en fila y con sillas alrededor de las mesas, figura 7.

Figura 9. Problema para alumnos de 3º a 6º curso.

En un restaurante solo podemos colocar las mesas en una fila alargada. Averigua el número máximo de personas que se pueden sentar en relación al número de mesas que pongamos.



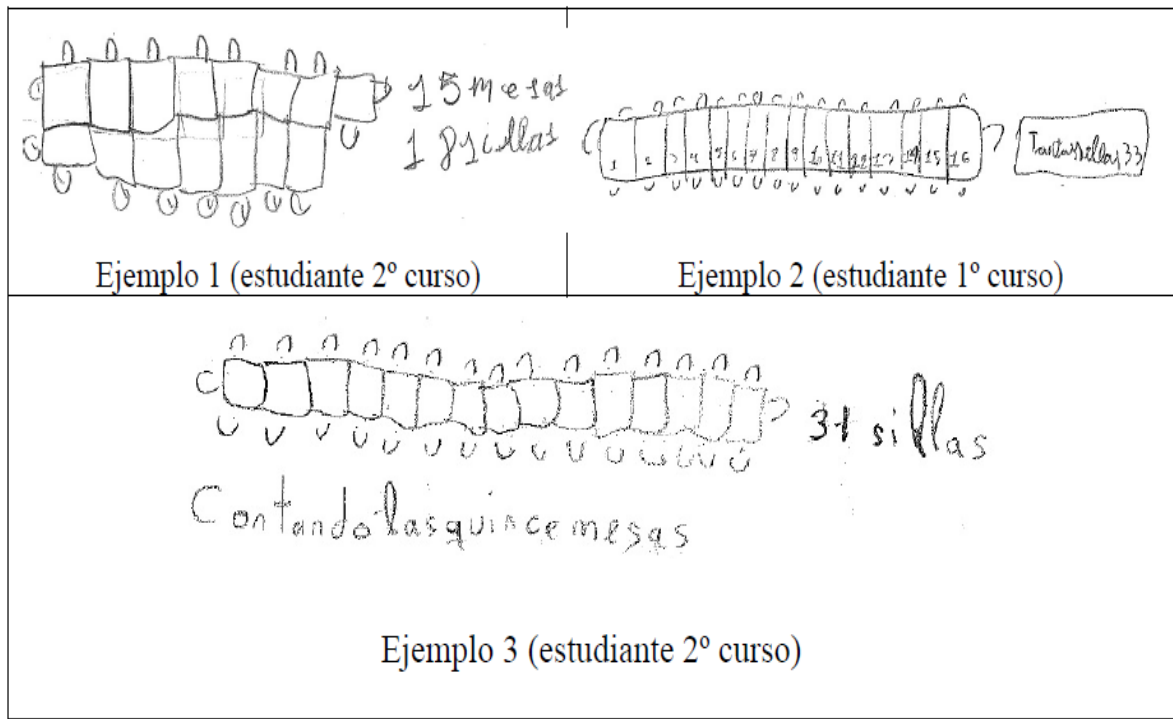
- 1. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?*
- 2. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?*

Tomado de: AIEM, número 10, Noviembre de 2016 pag. 11

Una vez presentada la prueba, de los 189 estudiantes, 102 respondieron correctamente (53.9%), los demás cometieron varios tipos de errores. El más frecuente fue no respetar la estructura espacial ni la estructura numérica (Ejemplo 1, Figura 8). Otros errores fueron respetar la estructura espacial pero no la numérica, pues no representaron el número de mesas pedido (Ejemplo 2, Figura 8 donde el estudiante dibuja 16 mesas en lugar de 15), o respetar la estructura espacial y la numérica, pero equivocarse en el conteo (Ejemplo 3, Figura 8)³⁶.

³⁶ CALLEJO, María Luz, et al. Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. 2016. *AIEM, número 10, Noviembre de 2016*

Figura 10. Ejemplos de resoluciones gráficas que no respetaban la estructura espacial y/o Numérica

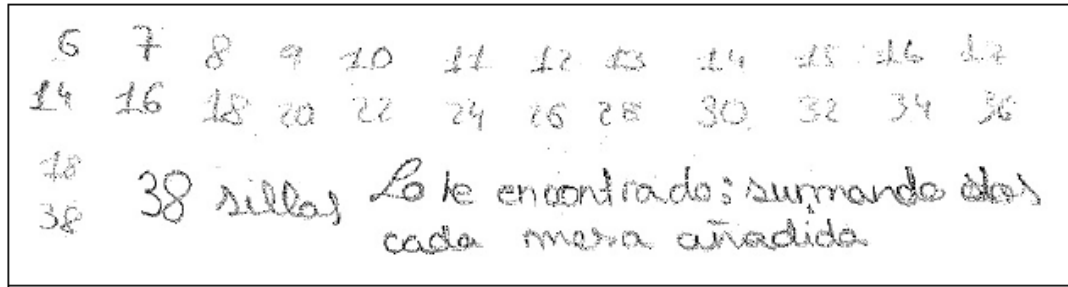


Tomado de: AIEM, número 10, Noviembre de 2016. p. 13

En cuanto a la recursividad, sólo 3 estudiantes (1.1%) hallaron el número de sillas haciendo uso del carácter recursivo de la pauta lineal, es decir, sumando 2 sillas por cada mesa añadida. Esta estrategia pone de manifiesto la *analiticidad*, identificando la diferencia constante de la sucesión y el uso de procedimientos de contar que lo evidencian. La Figura 9 muestra un ejemplo de resolución correcta donde el estudiante construye una tabla³⁷.

³⁷ Ibid. p. 14

Figura 11. Estrategia recursiva utilizada por un estudiante de sexto curso.



Tomado de: AIEM, número 10, Noviembre de 2016. Pag. 14

Las cuestiones relativas a la inversión y a la regla general sólo se propusieron a los alumnos de 3º a 6º (8 a 12 años). Se observa que los estudiantes que usaron una representación gráfica resolvieron con más éxito la cuestión donde se pedía la inversión (32.6%) que la cuestión donde se pedía la regla general (16.3%). Esto se explica por el hecho de que el 76.7% utilizó con éxito la representación gráfica, lo que indica que coordinaban la estructura espacial y la numérica, y esto pudo ayudar a relacionar el número de sillas con el de mesas apoyándose en el esquema espacial. Sin embargo, la coordinación de estas estructuras no fue suficiente para identificar la regla general ya que para ello hay que identificar una función que relaciona dos cantidades, lo que supone un salto cualitativo importante³⁸.

En el ámbito colombiano encontramos a CUEVAS y GUARÍN, quienes desarrollan un proyecto de investigación con estudiantes de escuela primaria; por medio de la asignación de tareas puntuales logran la generalización de patrones y por ende el desarrollo de álgebra temprana en estudiantes de segundo grado algunas de sus conclusiones son:

³⁸ Ibid

- Una de las mayores dificultades de los estudiantes fue la transición del proceso de inducción al proceso de deducción. El paso de corroborar y evaluar la regla inductiva a partir de casos particulares y posteriormente comunicar (de forma verbal o escrita) una conclusión deductiva que le describiera la secuencia fue uno de los aspectos más complejos para los estudiantes
- Gran parte de los estudiantes logaron reconocer con destreza los tipos de patrones compuestos por operaciones aritméticas (suma y producto), estructuras que generan un desarrollo en el proceso inductivo y fortalecen los contenidos aritméticos. Esto les permite consolidar el desarrollo del pensamiento algebraico a través del estudio de la generalización de patrones³⁹

Resulta interesante pensar, que con un poco de capacitación y orientación en los primeros grados de escolaridad todos los maestros podamos generar en los estudiantes una serie de competencias y potenciar en ellos una gran cantidad de operaciones mentales que les facilitaran el proceso algebraico en los años neurálgicos quitándole el mito de abstracta y difícil.

³⁹ CUEVAS, Gustavo y GUARÍN, Sergio. Un análisis del razonamiento inferencial en el proceso de generalización: una mirada de la escuela primaria. Bucaramanga, 2016. Proyecto de Investigación. Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas

2. PROBLEMÁTICA

2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La revisión de los antecedentes permitió considerar la necesidad de trabajar en el tránsito del pensamiento numérico, al pensamiento algebraico con ánimo de mejorar los procesos de pensamiento en estudiantes con edades comprendidas entre 12 y 14 años de la institución Educativa Rural Vijagual de Bucaramanga. Para esto se implementa una serie de Tareas con el propósito de potenciar el pensamiento algebraico en la medida que los estudiantes abordan situaciones relacionadas con patrones en secuencias numéricas y secuencias figúrales, de la mano con lo planteado por el MEN⁴⁰ y los Principios y Estándares para la Educación Matemática⁴¹, todo esto atendiendo a las necesidades evidenciadas en las pruebas ICFES para este nivel de enseñanza.

Los estudiantes que transitan entre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico conciben las matemáticas como un conocimiento complejo que genera sentimientos de intranquilidad, miedo, ansiedad, inseguridad, desconcierto e incertidumbre⁴². Shoenfeld expone que las creencias de los estudiantes están asociadas con el tipo de instrucción que reciben en el aula de clase: los problemas, la forma de evaluación y las dinámicas de grupo, lo que da lugar a nuestra pregunta de investigación. ¿Qué caracteriza el razonamiento inferencial (abductivo, inductivo, deductivo) que desarrollan estudiantes con edades comprendidas entre los 12 y 14 años cuando participan como miembros activos de una Comunidad Matemática?

⁴⁰MEN, COLOMBIA. Lineamientos Curriculares Matemáticas. *Magisterio, Bogotá*, 1998.

⁴¹ THALES, S. A. E. M. Principios y Estándares para la Educación Matemáticas. *Sevilla, SAEM Thales*, 2003.

⁴² SCHOENFELD, Alan. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *Colección Digital Eudoxus*. En GROUWS, Douglas A. *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Macmillan Publishing Co, Inc, 1992.

2.2 OBJETIVO

2.2.1 Objetivo general. Construir una Comunidad Matemática como método para desarrollar una dinámica de resolución y planteamiento de problemas en el aula, que potencie el desarrollo del pensamiento algebraico.

2.2.2 Objetivos específicos

- Diagnosticar las debilidades y fortalezas en los procesos que experimentan estudiantes de 12 a 14 años, al transitar del pensamiento numérico al pensamiento algebraico.
- Conformar la Comunidad Matemática que fortalezca el desarrollo del pensamiento algebraico a partir del estudio de patrones numéricos, figurales y figurales con ayuda tabular.
- Promover la construcción y consolidación del pensamiento algebraico, de tal manera que los estudiantes puedan acceder a la construcción de conocimientos más complejos.
- Evaluar el impacto de la estrategia aplicada en el contexto de la Comunidad Matemática.

3. MARCO CONCEPTUAL

Tradicionalmente el álgebra se sitúa en el currículo escolar después de la aritmética. Entre los argumentos que justifican esta organización se encuentra que la aritmética es considerada concreta, y por tanto, más fácil que el álgebra, que es más abstracta.

Tradicionalmente la enseñanza y el aprendizaje del álgebra han sido pospuestos hasta que los estudiantes han adquirido los conocimientos adecuados de aritmética, tal y como destaca Vergel⁴³. Sin embargo, en la actualidad, se considera la idea de que el aprendizaje de la aritmética no tiene que ser un requisito previo para el aprendizaje del álgebra. Se determina que el pensamiento algebraico no aparece por casualidad ni como consecuencia de la maduración cognitiva, sino que es necesario que se den una serie de condiciones pedagógicas; asegurando también que hay ciertos límites en lo que puede lograrse⁴⁴.

La propuesta de introducir el álgebra desde los primeros cursos de escolaridad, va acompañada de una amplia concepción del álgebra que engloba aspectos como el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas (incluyendo la aritmética generalizada), el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, desarrollo y la manipulación del simbolismo y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones⁴⁵.

⁴³ VERGEL, Rodolfo. Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. 2015. PNA, 9(3), pp. 193-215.

⁴⁴ DOMINGO, Susana Rodríguez. *Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria*. 2015. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. p. 27

⁴⁵ KAPUT, James. Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. En *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium*. National Research Council, National Academy Press Washington, DC, 1998. p. 25-26.

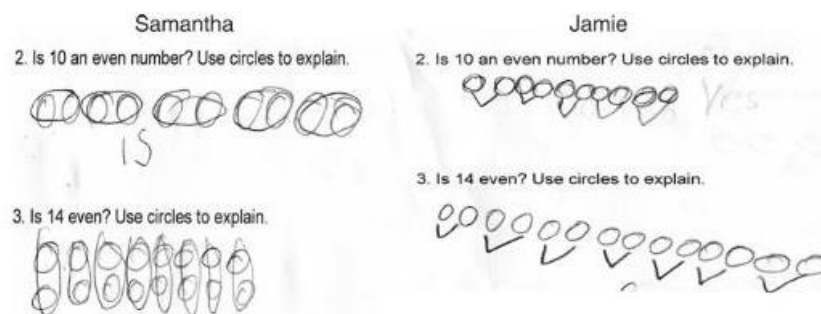
El marco de referencia, que fundamenta esta investigación se basa en el estudio de la generalización de patrones propuesto por Rivera quien define las dimensiones sobre la generalización de patrones tomando tres tipos de razonamiento inferencial: (abducción, inducción y deducción); así mismo se tendrá en cuenta los estudios realizados al respecto por Vergel⁴⁶

3.1 RAZONAMIENTO INFERENCIAL

Procesos de razonamiento inferencial: la abducción, la inducción y la deducción, utilizados para expresar la generalización de patrones.⁴⁷

3.1.1 Abducción. “La abducción no tiene carácter necesario, sino probable, es un tipo de razonamiento sintético, que genera hipótesis al tratar de explicar un fenómeno”⁴⁸ Así cuando los estudiantes investigan las etapas específicas en un patrón de figuras, simplemente conocen y producen interpretaciones admisibles que representan los juicios de percepción en relación con las etapas en el patrón⁴⁹. Se muestran dos ejemplos, figura 10, en los que se evidencia un tipo de razonamiento abductivo representado de manera icónica.

Figura 12. Actividad aplicada a estudiantes de grado segundo



Tomado de: Rivera, p.31

⁴⁶ Vergel. Op. Cit., p. 74

⁴⁷ RIVERA, Ferdinand. *Teaching and learning patterns in school mathematics*. Springer, 2015.

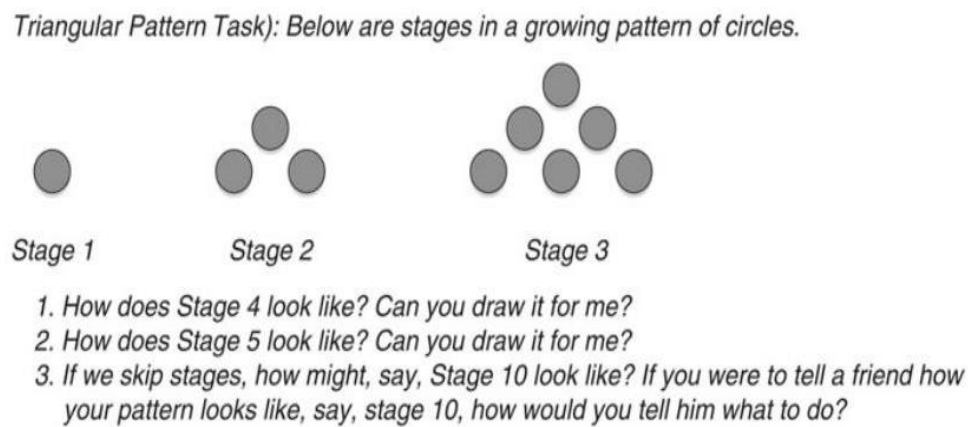
⁴⁸ CRESPO, Cecilia. Los diálogos de estudiantes: su riqueza para el análisis del discurso matemático escolar. 2010.

⁴⁹ RIVERA. Op. Cit., p. 31

3.1.2 Inducción. “El razonamiento inductivo parte de fenómenos particulares y busca una explicación de los mismos”⁵⁰ De acuerdo a esto, “el objetivo es de apoyar una regla que vincula los casos conocidos y permite hacer una proyección de otros”⁵¹ Esto muestra que los estudiantes empiezan a notar variaciones en el estudio patrones, a tal fin de pensar en cómo escribir una regla que le permita predecir cualquier término de la secuencia estableciendo el patrón que los genera y así realizar la generalización del mismo.

Rivera durante su investigación propone la siguiente actividad (figura 11), para explicar el razonamiento inductivo.

Figura 13. Patrón Triangular, aplicado a estudiantes de grado segundo.



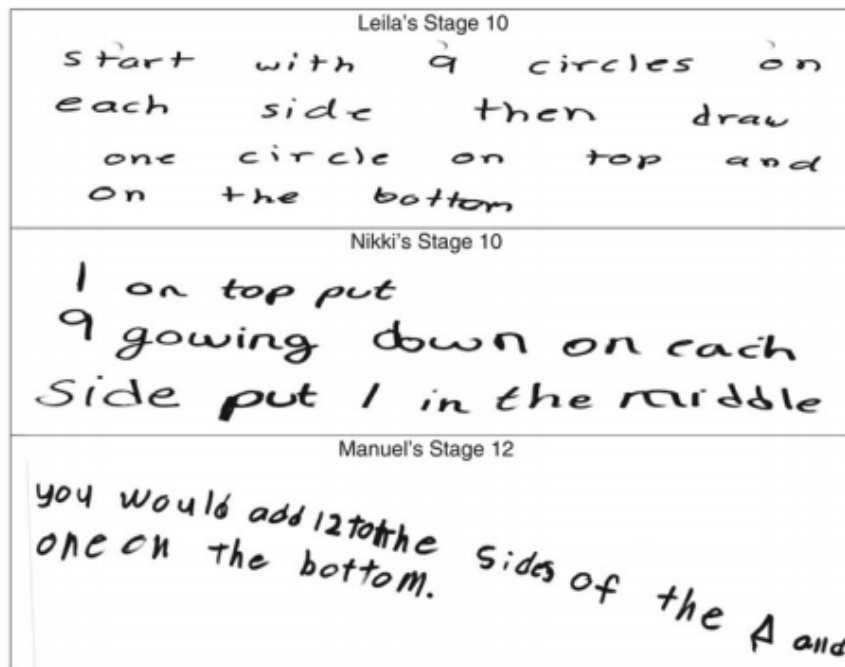
Tomado de: Rivera, p.33

Los estudiantes comprenden y empiezan a particularizar los términos 4 y 5, construyéndolas de manera correcta de acuerdo al comportamiento de las anteriores, pero revisando el término 10, una de las estudiantes propone (ver figura 12).

⁵⁰ SOLER María & AVILA Juan. Actividades para el desarrollo del razonamiento matemático en estudiantes para profesor. Asociación Colombiana de Matemática Pasto, 2008

⁵¹ RIVERA. Op. Cit., p. 33

Figura 14. Solución a la etapa 10.



Tomado de: Rivera, p.34

Estos tres estudiantes se centran en particularizar el término indicado generalizando a partir de sus pruebas en busca de una conclusión.

3.1.3 Deducción. “La deducción va de lo particular a lo general y es aplicada para validar resultados”⁵² De este modo Rivera plantea, que se puede hacer un cierre deductivo, de acuerdo al nivel en el cual se está trabajando la generalización de patrones. Y así la abducción y la inducción son de apoyo para la construcción de una generalización, de este modo la deducción válida el fenómeno que se estudia⁵³.

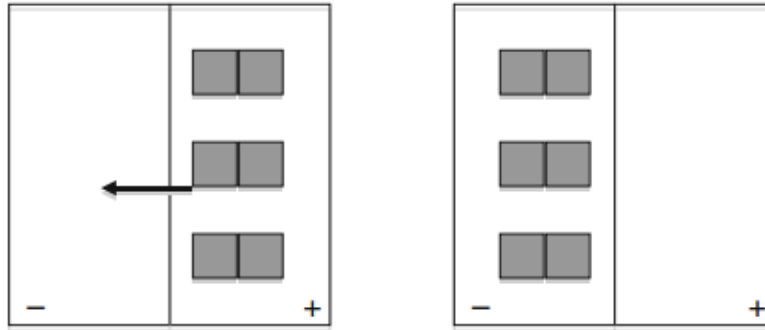
En la investigación realizada por Rivera se propone la siguiente actividad a estudiantes de grado octavo (ver Figura 15).

⁵² CRESPO. Op. cit.,p.45

⁵³ RIVERA. Op. cit,p. 36

Figura 15. Solución al problema planteado por Rivera

Based on the figure below, Let us illustrate why $-3 \times 2 = -(3 \times 2)$ using properties of integers. $-3 \times 2 = -(3 \times 2)$ means pull 3 groups of 2 cubes on the positive region to the negative region.



$$\begin{aligned}
 -3 \times 2 &= (-3 \times 2) + 0 && \text{Additive Identity Property} \\
 &= (-3 \times 2) + [(3 \times 2) + -(3 \times 2)] && \text{Additive Inverse Property} \\
 &= [(-3 \times 2) + (3 \times 2)] + -(3 \times 2) && \text{Associative Property} \\
 &= [(-3 + 3) \times 2] + -(3 \times 2) && \text{Distributive Property} \\
 &= 0 + -(3 \times 2) && \text{Additive Inverse Property} \\
 &= -(3 \times 2) && \text{Additive Identity Property}
 \end{aligned}$$

Tomado de: Rivera p. 36

Uno de ellos realiza la anterior justificación de una forma empírica, podemos observar como aplicando las propiedades logra validar el fenómeno estudiado.

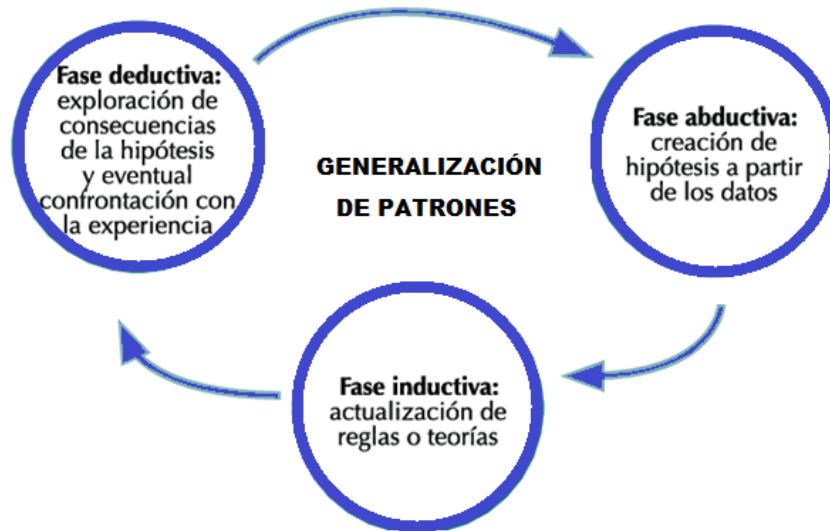
De tal manera que el proceso de generalización de patrones puede ser estudiado a partir de las formas de razonamiento inferencial; esto permite analizar desde el proceso de generalización el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes desde una perspectiva particular.

3.2 DIMENSIONES DEL PROCESO DE GENERALIZACIÓN DE PATRONES

La generalización además de ser un proceso, puede ser caracterizada por los medios que los estudiantes utilizan para “reconocer” una generalidad. En su

actividad los estudiantes no sólo requieren reconocer la generalidad sino también contar con formas de expresarla, como posibilidad de “actuar” u operar con ella.

Figura 16. Caracterización de la generalización de patrones



En ese orden de ideas se caracterizan los medios que los estudiantes utilizan para reconocer una generalidad, lo que nos da luces sobre cómo poner en juego este esquema en la investigación.

4. METODOLOGÍA

4.1 ASPECTOS GENERALES

Esta investigación se desarrolló en la Institución Educativa Rural Vijagual, un colegio de carácter público de la ciudad de Bucaramanga (Colombia), que presta servicios educativos a estudiantes de niveles socioeconómicos bajos. Ubicada en el kilómetro diez vía al mar, vereda Vijagual, frente al frigorífico (matadero); el vecindario son casas de invasión estrato cero, no se cuenta con servicio de agua potable, los adultos trabajan en el campo, construcción, mecánica, o ventas ambulantes.

La población objeto de estudio de esta investigación es un grupo de 30 estudiantes de la jornada de la tarde del grado séptimo de básica secundaria, con edades comprendidas entre los 12 y los 14 años.

Las sesiones de intervención fueron dirigidas por el autor del presente trabajo quien al mismo tiempo fue el profesor titular de la asignatura de matemáticas. Como profesor investigador tuve la responsabilidad de diseñar e implementar las Tareas, así como recolectar la información relacionada con las producciones matemáticas de los estudiantes para su posterior análisis.

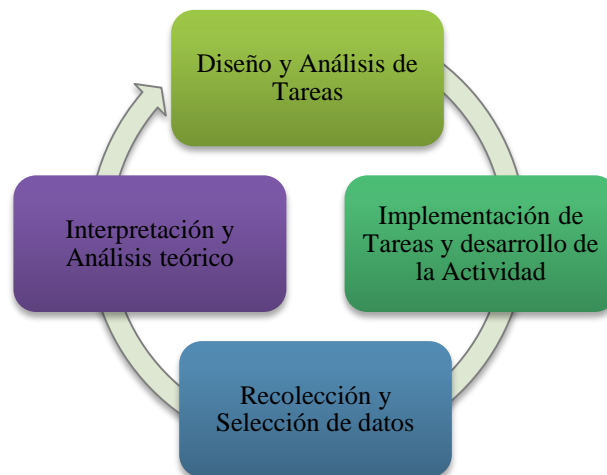
4.2 DISEÑO METODOLÓGICO

En el presente trabajo se desarrolla una investigación de tipo cualitativo, descriptivo e interpretativo, pues interesa analizar la participación, estrategias y procedimientos matemáticos de los estudiantes del grado séptimo, cuando se enfrentan a Tareas para fortalecer el desarrollo del pensamiento algebraico.

Es por esto que el proceso metodológico adoptado para esta investigación se basa principalmente en la construcción de una Comunidad Matemática en el aula; propuesta por Santos⁵⁴. Esta metodología permite realizar un seguimiento a los procesos que se generan en los estudiantes y profesores en la resolución de tareas como miembros activos de una comunidad cuando resuelven tareas que motivan el desarrollo de pensamiento algebraico.

Por tanto es de interés en esta investigación entender al sujeto en el aula, estudiar el rol de los estudiantes y del profesor frente a una Tarea matemática, analizar los procesos de formular, emplear e interpretar las matemáticas como forma de modelar un problema en contexto. Por tanto la metodología está compuesta por cuatro etapas: diseño y análisis de Tareas; Implementación de las Tareas y desarrollo de la Actividad; Recolección y Selección de datos, e Interpretación y análisis teórico de los datos.

Figura 17. Estructura Metodológica de la Investigación



Como se muestra en la figura 15 la primera etapa se centra en el diseño y análisis de Tareas que es retroalimentada por la aplicación completa de las etapas del ciclo. La aplicación de este ciclo de investigación le permite al investigador presentar un

⁵⁴ SANTOS TRIGO, Luz Manuel. *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. Trillas, 2007.

conjunto de Tareas matemáticas validadas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano y que puede convertirse en un sustento fundamental que aporte al mejoramiento de los estudiantes en las pruebas saber y por ende contribuya al mejoramiento de la calidad educativa de la institución.

A continuación se presenta una descripción de las principales características de cada una de las etapas del Ciclo; particularmente cómo se constituye la Etapa 2 a través de los elementos característicos de una Comunidad Matemática.

4.3 DISEÑO Y ANÁLISIS DE TAREAS

Esta etapa tiene en cuenta los objetivos del currículo, los resultados de las Pruebas Saber Pro 2016, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas respecto al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Además de los resultados obtenidos de la aplicación de una prueba Diagnóstica que se analizó con detalle en el desarrollo de esta Etapa.

Desde la perspectiva teórica descrita en la Sección anterior se analizó la generalización de patrones presentes en el desarrollo del pensamiento algebraico a través de la estructura planteada por Rivera sobre las formas de razonamiento abductivo, inductivo y deductivo.

Es importante aclarar que en esta investigación se hace una distinción entre la Tarea y la Actividad en términos de Radford⁵⁵ El diseño de las Tareas es potestad del profesor-investigador quien planifica y tiene una idea de lo que puede llegar a suceder en el aula. Pero es a través de la Actividad que dicha tarea promueve que los estudiantes pueden progresivamente tomar conciencia de los significados culturales que han sido históricamente constituidos.

⁵⁵ RADFORD. Op. cit., p 66

4.4 IMPLEMENTACIÓN DE TAREAS Y DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

Con base en el diseño y el análisis a priori sustentado en la etapa anterior se da paso a la implementación de las Tareas en el aula. Dicha implementación así como el desarrollo de la Actividad están guiados en esta investigación por la construcción de una Comunidad matemática en el aula. Santos-Trigo propone:

Entre las premisas fundamentales de la propuesta de aprender matemáticos dando énfasis en la resolución de problemas, está que el salón de clases ofrezca oportunidades a los estudiantes para reconstruir o desarrollar ideas matemáticas. En este contexto el papel de los problemas y las ideas que se discuten durante el proceso de resolución parte sustancial que ayuda a crear una comunidad matemática entre los estudiantes⁵⁶.

Bajo esta mirada, cada estudiante se concibe como un sujeto activo que necesita de una comunidad para discutir y comunicar de manera eficaz sus ideas matemáticas. Esto propicia el desarrollo de los procesos matemáticos fundamentales, que en esta investigación se sustentan en las directrices dadas por la OCDE

1. Formulación matemática de situaciones.
2. Empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos.
3. Interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos⁵⁷.

⁵⁶ SANTOS TRIGO. Op. cit., p. 94

⁵⁷ MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE, marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012 Matemáticas, Lectura y Ciencias, Instituto Nacional de evaluación Educativa, Madrid 2013. p. 30

El desarrollo de la Actividad dentro de la Comunidad Matemática transforma el rol del profesor y del estudiante frente a la construcción de conocimiento matemático. Cada estudiante encuentra en el salón de clase un ambiente que le permite pensar y razonar sobre las matemáticas involucradas en la solución de una tarea, razonar sobre ellas y comunicar sus ideas. Esta interacción permite la formulación de ideas, el desarrollo de argumentos, la validez, verificación y en su medida la demostración que aquello que se propone como verdadero⁵⁸

El desarrollo histórico y epistemológico de las matemáticas muestra que la comunicación y la interacción social son fundamentales para la construcción y consolidación de conocimiento matemático. Por tanto en esta Etapa de la investigación cada estudiante, así como el profesor, como miembros de su Comunidad deben desarrollar una ética comunitaria donde muestren que:

- a. Participan activamente en el espacio público de la Comunidad.
- b. Muestran un espíritu abierto a las discusiones y debates.
- c. Son solidarios con los otros miembros (compañeros y profesores).
- d. Trabajan por la construcción de una conciencia crítica generada a través del trabajo colectivo que genera la solución de una Tarea.

Estas características propuestas por Radford transforman la manera de concebir las matemáticas y las formas de conocer en el aula. Este ambiente establecido por la comunidad potencia el desarrollo de una forma independiente de pensar sobre las ideas y/o nociones matemáticas, generando procesos creativos y por tanto formas significativas para los sujetos de construir conocimiento matemático.

La figura 16 muestra los principales constructos que guían el diseño y desarrollo de esta Etapa de la investigación. Allí aparecen los elementos iniciales que son el

⁵⁸ SANTOS TRIGO. Op. cit., p. 96

insumo para a partir de las interacciones entre los miembros de la comunidad, generan un ambiente de aula que se caracteriza por los procesos que guían la construcción, desarrollo y consolidación de una Comunidad Matemática en el aula.

Figura 18. Implementación de Tareas y desarrollo de la Actividad: Construcción de una Comunidad Matemática



La Comunidad Matemática propicia el trabajo cooperativo que puede iniciar en parejas y motivar la conformación de equipos alrededor de los intereses comunes y las necesidades individuales. Claramente esta manera de concebir el aula y la interacción entre el profesor, el estudiante y el saber dinamiza el rol de los estudiantes y profesores.

Al finalizar el Ciclo de investigación propuesto, se podrá dar cuenta de la viabilidad de la conformación de la comunidad, además se podrán plantear características específicas de sus miembros, así como los intereses que deben priorizarse en su conformación, consolidación y permanencia.

4.5 RECOLECCIÓN Y SELECCIÓN DE DATOS

Esta investigación es de tipo cualitativo por tanto busca dar cuenta del desarrollo de un escenario de tareas que potencie el desarrollo de pensamiento algebraico a través de la conformación de una comunidad matemática. Para una recolección amplia de la información que permita una selección de datos exitosa se toma como fuente:

- Análisis de la prueba diagnóstica.
- Videos y Audios de las sesiones de clase: con base en las transcripciones de los videos y de las observaciones del profesor-investigador, se construye el diario de campo que permite un análisis más profundo de la Actividad Matemática generada en el aula.
- Análisis de la prueba final. Una vez finalizada la tercera etapa de la investigación se diseña y aplica una prueba final. Esta busca evidenciar que aspectos
- Entrevista didáctica.

4.6 INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS TEÓRICO

En esta Etapa con base en los elementos teóricos que sustentan la investigación se sistematizan los principales resultados de la aplicación. Se realiza una triangulación de la información y se llega a un consenso entre los miembros del Colectivo de Investigación sobre el trabajo realizado por los estudiantes para a la luz de los elementos del marco conceptual determinar si se presentan cambios progresivos en la transición del pensamiento numérico al algebraico y por ende la consecución de los objetivos planteados en esta investigación.

5. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

El propósito de esta investigación se centra en construir una Comunidad Matemática que permita en el aula de clase desarrollar una dinámica de resolución y planteamiento de problemas que potencien el pensamiento algebraico en estudiantes de séptimo grado. Como bien lo dice la Sociedad Andaluza de Educación Matemática “una enseñanza eficaz requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender, y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien”⁵⁹.

Es así que el desarrollo de esta investigación contempla tres fases que permiten cumplir con nuestros intereses: la primera consiste en la aplicación y análisis de una prueba diagnóstica; la segunda plantea un conjunto de tareas contextualizadas desde situaciones que promueven los procesos de generalización, para que los estudiantes reconozcan el patrón que se presenta por medio de los diferentes tipos de razonamiento inferencial, estas se organizaron en cuatro intervenciones; finalmente para la última fase se empleó el diseño de una entrevista a un grupo de estudiantes con el fin de evidenciar el cambio progresivo de las situaciones anteriores.

Para entender el análisis de las Tareas utilizadas en la prueba diagnóstica y las intervenciones es importante puntualizar el tipo de codificación de registro usada en la documentación de la actividad. Una vez identificado los aportes más destacados de los estudiantes se organizaron en una tabla con tres columnas. La primera columna indica el código asignado al estudiante, la segunda contiene el cuerpo de la transcripción, incluyendo imágenes, y la tercera columna comprende comentarios interpretativos o notas de campo.

⁵⁹NCTM, Principios. Estándares para la educación matemática, op. Cit.,p.17

Para identificar cada estudiante se asigna el código para la prueba diagnóstica “PD” acompañado del número que el estudiante ocupa en la lista de asistencia al curso, si se trata de las intervenciones el código es “INT” seguido del número de la intervención y el código del estudiante en la lista de asistencia; esto para proteger su verdadera identidad. En el cuerpo de la transcripción los aportes de los participantes están escritos en cursiva.

Las transcripciones están acompañadas por imágenes de las producciones de los estudiantes en sus hojas de trabajo.

5.1 PRUEBA DIAGNÓSTICA

El propósito en esta primera fase, denominada Prueba Diagnóstica es empezar a reconocer cómo los estudiantes del grado séptimo desarrollan y aplican los procesos de generalización a partir del estudio de patrones figúrales, numéricos y figúrales con apoyo tabular.

La prueba diagnóstica está compuesta por cuatro Tareas, cada una con preguntas que le conceden al estudiante la posibilidad de entrar en un proceso sistemático de identificación y análisis de patrones. Las Tareas fueron presentadas de forma escrita a los 30 estudiantes, 16 mujeres y 14 hombres, que tienen las siguientes características: El total de estudiantes son de estrato socioeconómico 1, están en edad promedio entre 12 y 14 años.

La actividad de la prueba diagnóstica consiste en trabajar de forma individual la solución de las Tareas, acompañados por la asesoría y orientación del profesor.

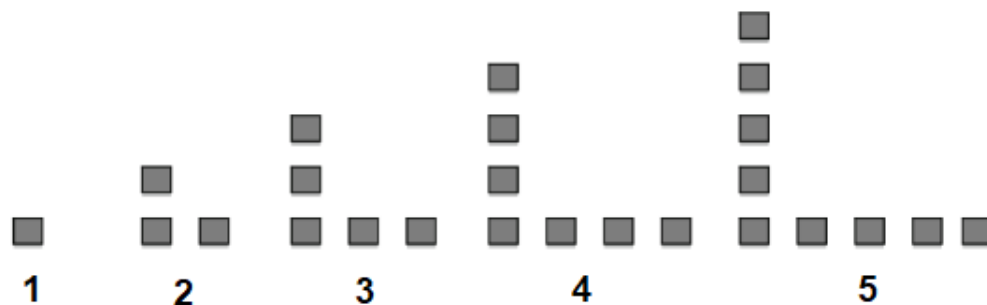
Tarea 1

La primera Tarea presenta una secuencia geométrica, en ella los estudiantes pueden observar la relación entre los números impares y características icónicas de

la organización de los cuadrados. A continuación se muestra una posible camino de solución, para cada ítem de la Tarea se realiza un análisis en términos de los elementos del Marco Conceptual.

1. Dada la siguiente secuencia de figuras contesta las preguntas que aparecen a continuación:

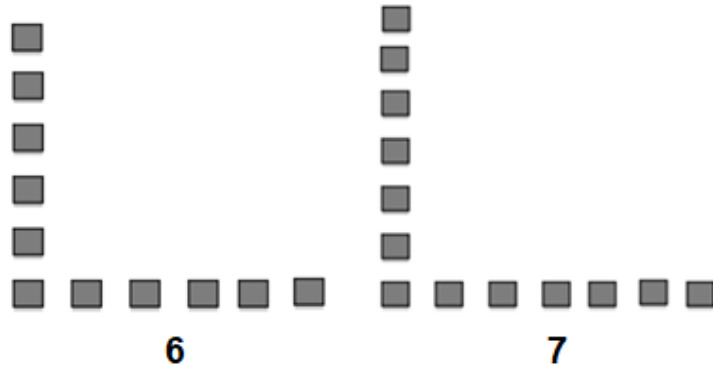
Figura 19. Secuencia figural prueba diagnóstica tarea



Inicialmente se espera que los estudiantes analicen que el primer elemento de la secuencia es un cuadrado, el segundo elemento está conformado por tres cuadrados y el tercer elemento contiene cinco cuadrados; de manera que en cada posición nueva el aumento es de dos cuadrados. Luego de comprender el patrón e identificar el número de cuadrados en cada posición el estudiante podría generar una conjetura que lo conduzca a la construcción de una regla abductiva que puede estar en términos espaciales. Esto puede permitirle dibujar los términos seis y siete de la secuencia y dar respuesta a los incisos a. y b. dando las explicaciones correspondientes.

- a. Continuando con el patrón de construcción dibuja la figura 20 y la figura 21.

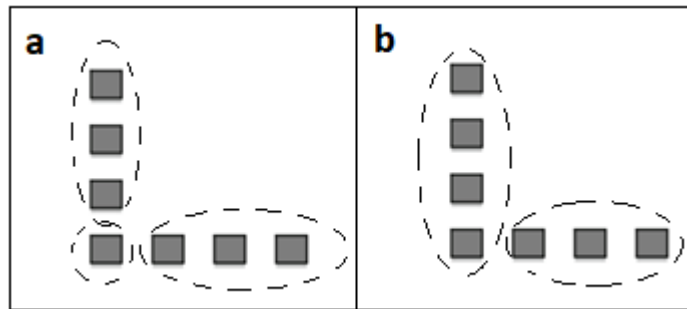
Figura 20. Secuencia figural Tarea 1 (6 y 7)



- b. ¿Cuánto cuadrados tiene la figura 6? ¿Cuántos cuadrados la figura 7? Explica tu respuesta.

Para responder la siguiente pregunta, se espera que el estudiante con base en el análisis anterior organice su hipótesis e inicie la construcción de su regla inductiva que puede generarse en términos de la relación entre la posición de la figura dentro de la secuencia y la relación creciente de aumento de dos cuadros.

Figura 21. Regla inductiva secuencia figural Tarea 1



- (a) “Un cuadro fijo, en la vertical y horizontal la misma cantidad de cuadros” ($n + n + 1$)
- (b) “En la horizontal hay n cuadros y en la vertical $n + 1$ ”. ($n + n + 1$)
- c. ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura 10? Explica tu respuesta.

Este es un tipo de inducción en doble sentido que puede promover que el estudiante establezca su regla inductiva, tomando como referencia a la posición de la figura dentro de la secuencia. Dejando de lado las características espaciales respecto al patrón que da paso a la construcción de cada término de la secuencia.

- d. ¿Una figura de la secuencia puede estar formada por 25 cuadrados? Si tu respuesta es afirmativa indica qué figura es. Explica tu respuesta.
- e. ¿Una figura de la secuencia puede estar formada por 80 cuadrados? Si tu respuesta es afirmativa indica qué figura es. Explica tu respuesta.

Para las preguntas f. y g. se espera que el estudiante al completar la tabla escriba la regla y la verifique calculando los el número de cuadrados de la figura 100

- f. ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura 100? Explica tu respuesta.
- g. Completa la siguiente tabla:

Tabla 1. Comportamiento tabular prueba diagnóstica Tarea 1

Término de la secuencia	1		3	4			7		9	
Número de cuadrados que conforman cada figura	1	3	5	7	9					

- h. Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo o amiga cuántos cuadrados tiene cualquier figura de la secuencia. Explica ampliamente cada idea que se te ocurra.

Finalmente, se espera que con el análisis realizado hasta el momento y verificado, el estudiante logre comunicar las variaciones y las implicaciones que utilizó. Esto podría permitir que los estudiantes evidenciaran un razonamiento deductivo, por ejemplo al plantear expresiones como: “Siempre se tiene un cuadrado, y le suma la posición de la figura más 1 dos veces” o “para encontrar el número de cuadrados que conforma cada figura, se suma la posición de la figura más el anterior”. Estas expresiones verbales pueden surgir de las características que de manera perceptual

los estudiantes identifican en el patrón que da paso a la construcción de la secuencia.

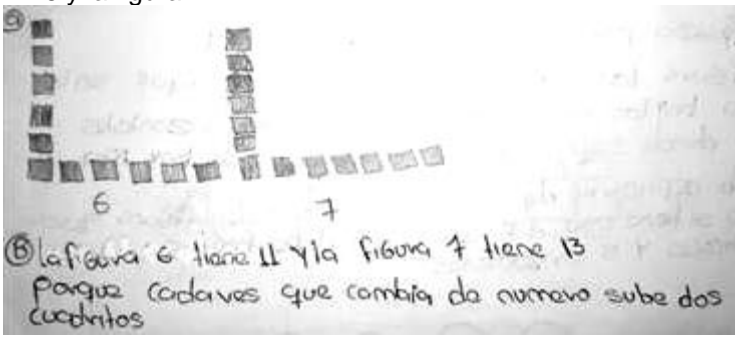
Análisis a posteriori

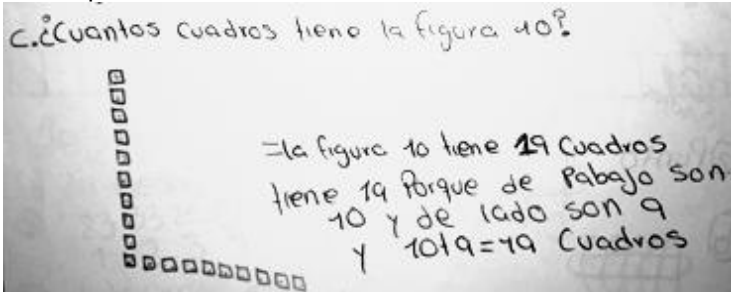
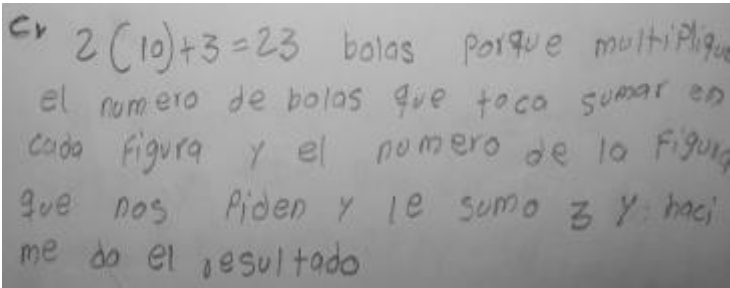
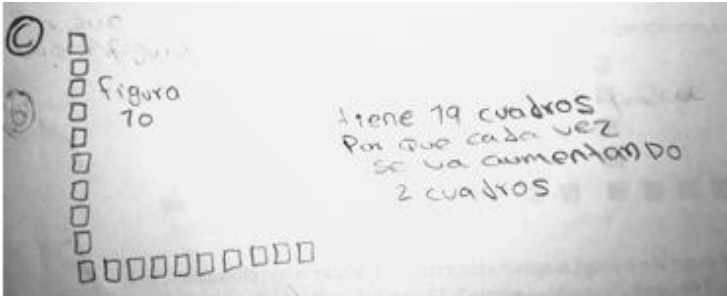
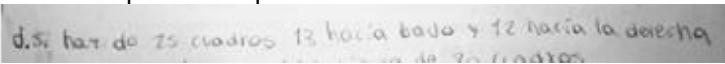
Para analizar la TAREA 1 se han tomado los datos de algunos estudiantes, teniendo en cuenta que sus evidencias reflejan un importante razonamiento inferencial y análisis de las fases en el proceso de generalización.

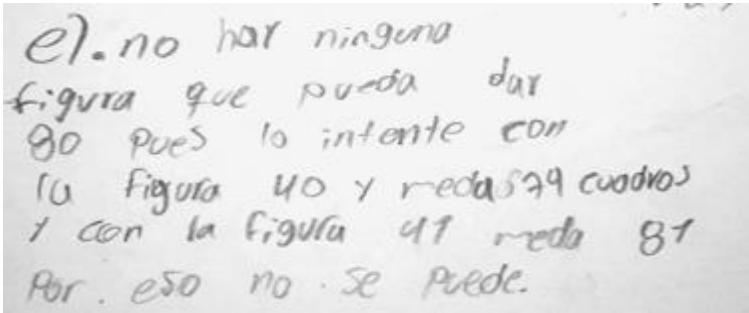
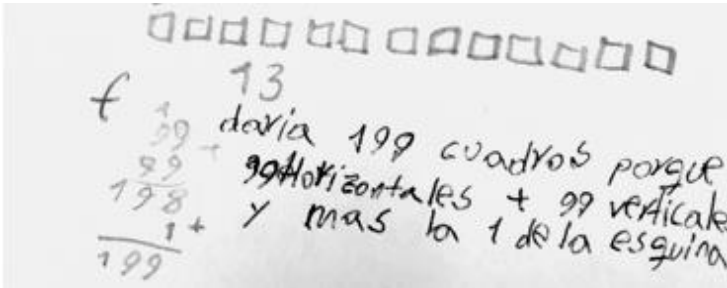
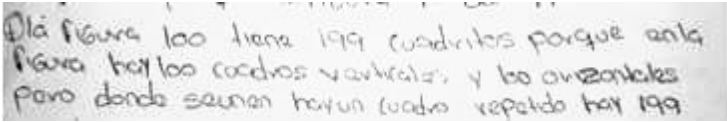
La solución de esta primera Tarea permitió evidenciar la forma como los estudiantes observan e infieren hipótesis a través de ideas abductivas que les permiten predecir las figuras siguientes y reconocer la formación del tipo de estructura de la secuencia. En los ítems a, b, c y g, se observa que los estudiantes dibujan los términos siguientes de la secuencia y realizan procesamientos de conversión numérica dependiente de objeto para encontrar la respuesta; esto construyen razonamiento abductivos donde fueron paso por paso hasta llegar al resultado.

En los ítems d, e, f y h, se esperaba que los estudiantes pudieran avanzar en sus procesos de inducción e incluso llegaran a la deducción. Pero se evidencia que solo algunos hicieron las conjeturas necesarias para establecer el patrón y llegar a una fórmula.

Tabla 2. Análisis a posteriori secuencia figural prueba diagnóstica Tarea 1

Est.	Evidencia	Razonamiento
PD 1	<p>a. Continuando con el patrón de construcción dibuja la figura 6 y la figura 7.</p> 	<p>El estudiante PD 1 construye los términos 6° y 7°, identificando los rasgos comunes de la secuencia, establece también una posible regla para generalizar el patrón; evidencia un razonamiento abductivo.</p>

<p>PD 16</p>	<p>c. ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura 10? Explica tu respuesta.</p> 	<p>El estudiante PD16 evidencia una forma de Razonamiento abductivo; con base en su representación hace los primeros intentos para comunicar sus resultados de una manera muy coloquial: “=la figura 10 tiene 19 cuadrados tiene 19 porque de pabajo son 10 y de lado son 9 y $10 + 9 = 19$ cuadrados”.</p>
<p>PD 6</p>		<p>En este caso el estudiante PD6 evidencia un razonamiento abductivo, intenta establecer una regla para empezar a conjeturar una posible generalización del patrón: “tiene 19 cuadrados Porque cada vez va aumnetando en 2 cuadrados”.</p>
<p>PD 20</p>	 <p>d. ¿Una figura de la secuencia puede estar formada por 25 cuadrados? Si tu respuesta es afirmativa indica qué figura es. Explica tu respuesta</p>  <p>e. ¿Una figura de la secuencia puede estar formada por 80 cuadrados? Si tu respuesta es afirmativa indica qué figura es. Explica tu respuesta.</p>	<p>El tipo de razonamiento inferencial de este estudiante es inductivo, llega a su conjetura basado en la observación de lo que ocurrió en los numerales anteriores; no hace el dibujo pero tiene una regla establecida para encontrar el número de cuadros. “si hay 25 cuadros 13 hacia abajo y 12 hacia la derecha”</p>

<p>PD 2</p>		<p>El estudiante PD2 hace conjeturas sin hacer la figura, se evidencia que empieza a establecer una regla evidenciando un pensamiento inductivo: “No hay ninguna figura que pueda dar 80 pues lo intenté con la figura 40 y me da 79 cuadrados y con la figura 91 me da 81. Por eso no se puede”</p>
	<p>f. ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura 100? Explica tu respuesta.</p> 	<p>El estudiante PD18 evidencia un razonamiento deductivo; en este ítem ha generado una regla, ya no dibuja la figura 100 y es capaz de saber cuántos cuadros tiene la figura aplicando su regla: “Daría 199 cuadrados porque 99 horizontales + 99 verticales y más la 1 de la esquina”.</p>
<p>PD 18</p>		<p>El estudiante establece una regla deductiva diferente a la del estudiante PD18 así mismo explica con sus palabras dicha regla: “La figura 100 tiene 199 cuadritos porque en la figura hay 100 cuadros verticales y 100 horizontales pero donde se unen hay un cuadro repetido. Hay 199”.</p>
<p>PD 20</p>		

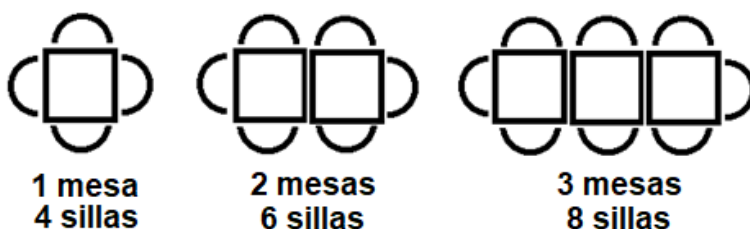
TAREA 2

La segunda Tarea propuesta en el diagnóstico presenta una secuencia de figuras formadas por mesas cuadradas y sillas utilizada por Carraher, Martínez y

Schliemann⁶⁰, en ella los estudiantes pueden observar el patrón de crecimiento cuantitativo (por cada mesa que se añade el número de sillas aumenta en 2). A continuación se muestra un posible camino de solución.

2. En un restaurante solo podemos colocar las mesas en una fila alargada. Averigua el número máximo de personas que se pueden sentar en relación al número de mesas que pongamos.

Figura 22. Secuencia figural prueba diagnóstica Tarea 2

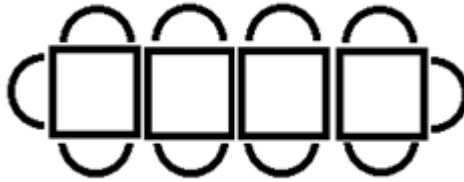


Inicialmente se espera que los estudiantes analicen que en el primer elemento de la secuencia hay una mesa y cuatro sillas; el segundo elemento está conformado por dos mesas y seis sillas; y el tercer elemento tres mesas y ocho sillas. De esta manera por cada mesa que se adiciona el aumento es de dos sillas. Luego de observar cuidadosamente los términos de la secuencia, los estudiantes pueden determinar un patrón de construcción e identificar el aumento de sillas por cada nueva mesa. Esto puede llevarlos a plantear una conjetura que lleve a cada estudiante a construir una regla abductiva. Esta conjetura o hipótesis le permite a los estudiantes construir términos cercanos de la secuencia.

- a. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas

⁶⁰ CARRAHER, David, MARTINEZ, Mara y SCHLIEMANN, Analúcia. Early algebra and mathematical generalization. 2008 .ZDM, 40(1), 3-22.

Figura 23. Cuarto término secuencia figural prueba diagnóstica Tarea 2



Para las siguientes preguntas se espera que el estudiante genere una hipótesis a medida que va completando la secuencia para comprobar que en 5 mesas hay 12 sillas y alrededor de 6 mesas hay 14 sillas.

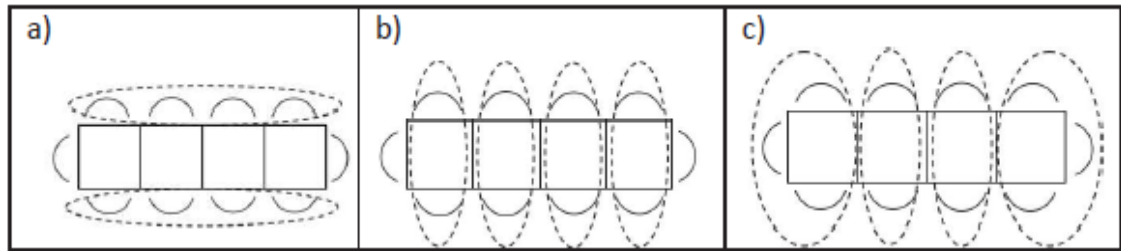
- b. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?

Una vez evaluada su hipótesis el estudiante compruebe su verificación inductiva y logre deducir que: si tiene 18 mesas puede sentar 38 personas. Esto como resultado de las características de su habilidad de percibir el comportamiento del patrón. Por ejemplo un estudiante podría mencionar que para saber cuántas sillas tienen la mesa 18 solo tenemos que multiplicar el 18 por 2 y sumarle 2.

- c. En una fiesta se han colocado 18 mesas y sus correspondientes sillas ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado
- d. Si en un cumpleaños se han invitado 42 niños ¿Cuántas mesas necesitaremos colocar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado
- e. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.

Basándose en el número de mesa y sillas y haciendo diferentes asociaciones con afirmaciones matemáticas, los estudiantes pueden estructurar un razonamiento deductivo para proponer una generalización de la secuencia:

Figura 24. Etapa deductiva secuencia figural prueba diagnóstica Tarea 2



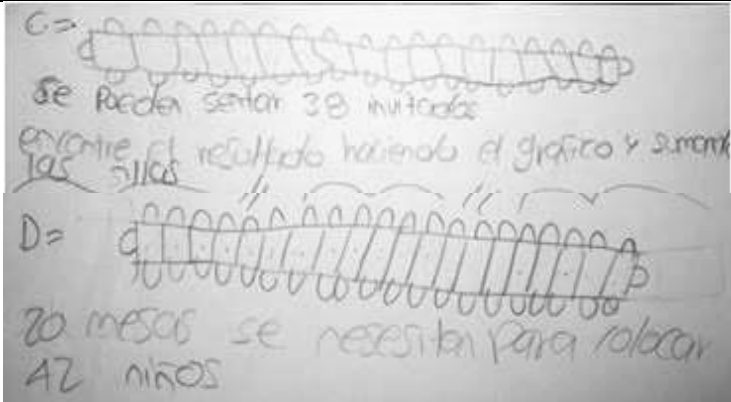
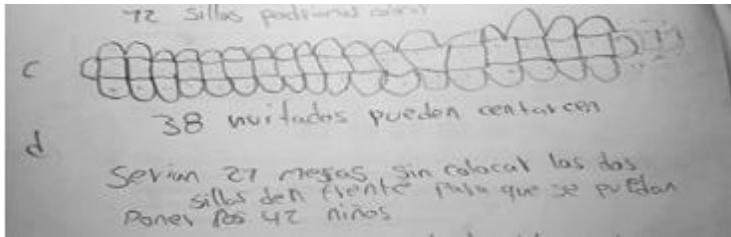
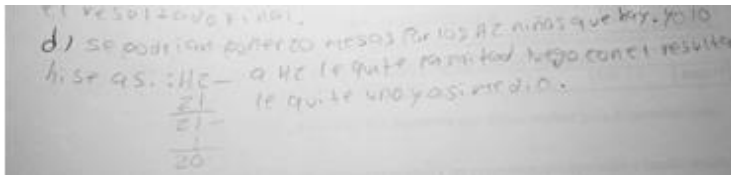
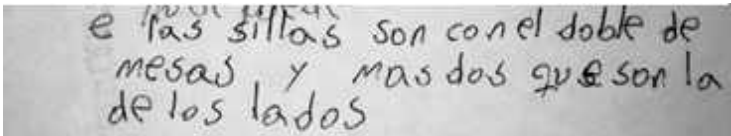
- (a) “en la fila de arriba hay tantas sillas como mesas, en la fila de abajo hay tantas sillas como mesas y hay 2 sillas en los extremos” $(n + n + 2)$
- (b) “cada mesa tiene una silla arriba y abajo y hay 2 en los extremos.” $(2n + 2)$
- (c) “cada mesa tiene 2 sillas, menos las dos de los extremos que tienen 3 sillas” $(2(n - 2) + 2 \times 3)$

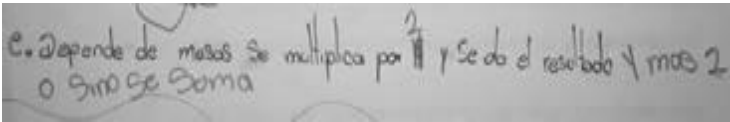
Análisis a posteriori

Para la segunda tarea se observó que un ochenta y cinco por ciento de los estudiantes logran encontrar las soluciones a los ítems a y b utilizando la abducción, un 56 por ciento logran resolver el ítem c que se consideraba inductivo y solo un veintiocho por ciento encuentra una regla deductiva para los ítems d y e

Tabla 3. Análisis a posteriori secuencia figural prueba diagnóstica Tarea 2

Est.	Evidencia	Razonamiento
PD 2	<p>a. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas</p> <p>b. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?</p> <p>c. En una fiesta se han colocado 18 mesas y sus correspondientes sillas ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado</p>	<p>El estudiante PD 2 dibuja la figura 4, 5 y 6 identificando la mecánica de la secuencia. Evidencia un razonamiento abductivo.</p> <p>El estudiante PD5 muestra un razonamiento abductivo. Expresando de manera escrita como puede verse en la segunda columna que: “Se pueden sentar 38 invitados. Encontré el resultado haciendo el</p>

<p>PD 5</p>		<p>gráfico y sumando la sillas".</p>
<p>PD 7</p>		<p>El estudiante PD7 transita de una forma de razonamiento abductivo en ítem c. a una inductiva el ítem d,. Esto puede verse dado que empieza a plantear una regla para establecer el número de sillas. "Serian 21 mesas sin colocar las dos sillas den frente para que se puedan poner los 42 niños"</p>
<p>PD 11</p>	<p>d. Si en un cumpleaños se han invitado 42 niños ¿Cuántas mesas</p> 	<p>El estudiante PD11 propone una regla haciendo restas es claro que desarrolla un razonamiento inductivo; sin embargo debe refinar un poco más su propuesta. " Se podrían poner 20 mesas por los 42 niños que hay. Yo lo hice así $42 - 21 = 21 - 1 = 20$ a 42 le quite la mitad luego con el resultado le quite uno y así me dio",</p>
<p>PD 8</p>	<p>e. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas</p> 	<p>El estudiante PD8 intenta proponer una regla general, sin embargo no logra comunicar de forma precisa su hipótesis: "Las sillas son el doble de mesas y más dos que son las de los lados".</p>

PD 27		El estudiante PD27 evidencia una regla de generalización más cercana; sin embargo falta precisión al comunicar su regla, por tanto se considera que evidencia un razonamiento deductivo: "Depende de las mesas. Se multiplica por 2 y se da el resultados y más 2 o sino se suma".
----------	--	--

Tarea 3

En esta tercera tarea se presenta una secuencia numérica, se busca que el estudiante complete los números e identifique el patrón por lo cual se va generando el cambio en cada uno de los términos.

Inicialmente se espera que el estudiante logre generar una regla abductiva que le permita identificar el cambio y la correspondencia de un número a otro; además de analizar las distintas relaciones invariantes que presenta la secuencia numérica. Con este análisis se podrá establecer que:

La suma de los dígitos del primer número suma cinco, la suma del segundo número suma seis, la suma de los dígitos del tercer número suma siete y así sucesivamente.

Logrando mostrar la veracidad de la regla inductiva que forma la secuencia numérica y además permite predecir todo número de la secuencia faltante.

3. Dada la siguiente secuencia de números contesta las preguntas que aparecen a continuación:

23 33 25 80 36...

1 2 3 4 5

- a. Continuando con la secuencia, cual podría ser el sexto número y el séptimo número. Explica tu respuesta

b. ¿Cuál sería el décimo número? Explica tu respuesta.

Posteriormente para la solución de los siguientes ítems se espera que los estudiantes expresen y describan la regla de formación del patrón que utilizaron anteriormente. Entrando en la etapa deductiva.

Tabla 4. Etapa deductiva prueba diagnóstica Tarea 3

Términos	Regla	Suma de los dígitos
1	1 +4	5
2	2+4	6
3	3 + 4	7
4	4 + 4	8
5	4 + 4	9
6	6 + 4	10
7	7 + 4	11
⋮	⋮	⋮
n	n + 4	n + 4

De esta manera podrá afirmar acerca del 87 que la suma de los dígitos de sus cifras es 15 menos 4 sería igual a once, luego corresponde al termino once de la sucesión. Y que para el numero treinta de la secuencia la suma de los dígitos seria 34 así que el número tendría que ser de cuatro cifras por ejemplo 9997 ya que $9+9+9+7 = 34$

c. ¿Un número de la secuencia puede ser el 87? Explica tu respuesta.

d. ¿Cuál podría ser el número 30 de la secuencia? Explica tu respuesta.

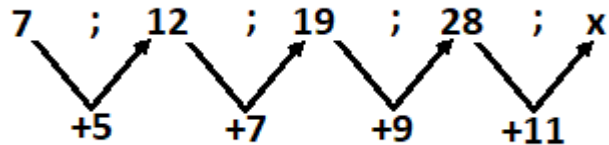
Tarea 4

Para la cuarta tarea propuesta se presenta una secuencia numérica, se busca que el estudiante complete los términos e identifique el patrón, que caracteriza la formación de los términos dentro de la secuencia.

Inicialmente se espera que el estudiante logre generar una regla abductiva que le permita identificar el cambio y la correspondencia de un número a otro. Además de analizar las diferentes relaciones invariantes que presenta la secuencia numérica.

Con este análisis se podrá establecer que: el siguiente número de la secuencia es el resultado del término anterior más el siguiente impar, esto es: $T_n = (T_{n-1} + (2n + 1))$.

Figura 25. Conjetura abductiva Secuencia numérica prueba diagnóstica Tarea 4



Esto puede permitirle al estudiante verificar su regla inductiva, que da paso a la formación de la secuencia numérica y además permite predecir todo número de la secuencia faltante.

4. Dada la siguiente secuencia de números contesta las preguntas que aparecen a continuación:

7	12	19	28	...
1	2	3	4	

- a. Continuando con la secuencia, cual podría ser el quinto número y el sexto número. Explica tu respuesta
- b. ¿Cuál sería el décimo número? Explica tu respuesta.

Posteriormente para la solución de los siguientes ítems se espera que los estudiantes expresen y describan su regla de formación del patrón que utilizaron anteriormente. Entrando en la etapa deductiva.

Tabla 5. Etapa deductiva prueba diagnóstica Tarea 4

Términos	Regla	Resultado
1		7
2	$7 + 5$	12
3	$12 + 7$	19
4	$19 + 9$	28
5	$28 + 11$	39
6	$39 + 13$	52
7	$52 + 15$	67
⋮	⋮	⋮
n	$(n-1) + (2n + 1)$	n
n + 1	$n + (2n+1)$	n + 1

- c. ¿Un número de la secuencia puede ser el 169? Explica tu respuesta.
 d. ¿Cuál podría ser el número 40 de la secuencia? Explica tu respuesta.

Análisis a posteriori Tareas 3 y 4

En estas tareas se presenta una secuencia numérica, se busca que el estudiante complete los números e identifique el patrón por el cual se van generando los términos de la secuencia.

Es interesante para el diagnóstico ver que en general estas dos tareas no fueron abordadas por los estudiantes. Cuando se indagó sobre qué había pasado, los estudiantes expresaron que nunca habían enfrentado este tipo de tarea y que a diferencia de las dos primeras tareas del diagnóstico aquí no encontraban un patrón. Esto nos da luces sobre el diseño de las intervenciones debe estar este tipo de tareas con secuencias numéricas apoyadas por un representación tabular.

El análisis de la prueba diagnóstica permitió evidenciar que algunos estudiantes tienen ideas intuitivas sobre cómo abordar las tareas propuestas, la mayoría de ellos llegan a la solución por medio de razonamientos abductivos (ver anexo 1). Los estudiantes desconocen la simbología algebraica que les permite expresar sus generalizaciones, reconocen patrones en secuencias figurales, pero las numéricas no las identifican; es la primera vez que tienen contacto con este tipo situaciones.

En este orden de ideas la prueba refleja que es necesario trabajar en situaciones que ayuden a potencializar todos los tipos de razonamiento.

5.2 SESIONES DE INTERVENCIÓN

Las intervenciones están programadas con una duración de dos horas de clase, distribuidas en tres partes: la primera consiste en un trabajo individual que da la posibilidad para que cada estudiante pueda conjeturar y proponer sus posibles razonamientos en torno a la solución; la segunda es un trabajo colectivo por equipos donde los estudiantes interactúan y socializan sus respuestas para llegar a consensos grupales; la parte final está destinada para la que los participantes argumenten, propongan las posibles soluciones y lleguen a la convalidación de las propuestas de solución.

Cada intervención está formada por Tareas propuestas que se aglomeran en un análisis cualitativo enfocado en la manera cómo y por qué los estudiantes desarrollan el proceso de generalización con base al razonamiento inferencial a partir de secuencias figurales, numéricas, y secuencias figurales con ayuda tabular. La intención es poder reconocer los avances que tienen los estudiantes acerca de los procesos de generalización, que construyan pensamiento algebraico y lo integren en la resolución y planteamiento de problemas de las diferentes áreas de conocimiento y de la vida real.

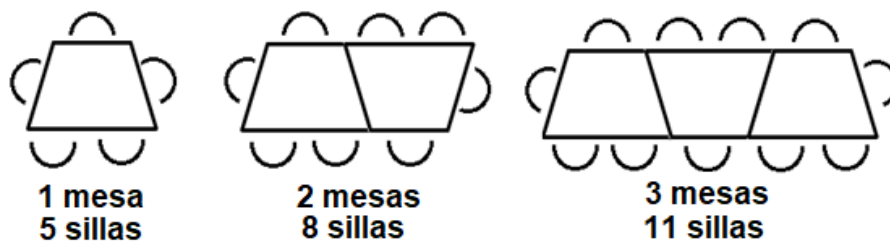
Se espera que los estudiantes generen diversas estrategias de solución a las tareas planteadas, y puedan discutir sus planteamientos y conclusiones. Y de esta forma construyan una visión más amplia sobre la actividad matemática.

A continuación mostramos las cuatro intervenciones compuestas por tres tareas, cuyo propósito es potenciar los tipos de razonamiento inferencial que los estudiantes pueden desarrollar en el proceso de generalización.

5.2.1 Intervención uno. Lee atentamente cada pregunta y escribe todo el proceso que debes realizar para desarrollarla.

1. Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas. Como puedes ver, alrededor de una mesa se han colocado 5 sillas, alrededor de 2 mesas se ha colocado 8 sillas y alrededor de 3 mesas se han colocado 11 sillas

Figura 26. Secuencia figural intervención 1 Tarea 1

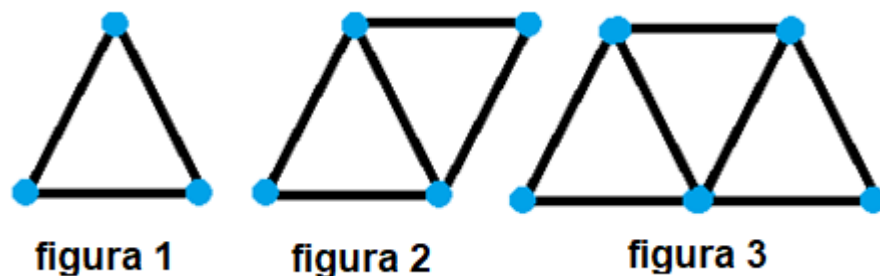


- a. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?
 - b. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?
 - c. En una fiesta se han colocado 22 mesas y sus correspondientes sillas ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado
 - d. Si en un cumpleaños se han invitado 56 niños ¿Cuántas mesas necesitaremos colocar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado
 - e. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas
2. Dada la siguiente secuencia de números contesta las preguntas que aparecen a continuación:

			2, 5, 8, 11, 14, ...		
1	2	3	4	5	

- a. Continuando con la secuencia, ¿cuáles son los dos términos 6 y 7? Explica tu respuesta.
 - b. ¿Cuál podría ser el décimo número? Explica tu respuesta.
 - c. ¿Un número de la secuencia puede ser el 87? Explica tu respuesta.
 - d. ¿Cuál es el número 30 de la secuencia? Explica tu respuesta.
 - e. ¿Puedes saber cuál es el término 100 de la secuencia?
3. Dada la siguiente secuencia de figuras contesta las preguntas que aparecen a continuación:

Figura 17. Secuencia figural Intervención 1 Tarea 3



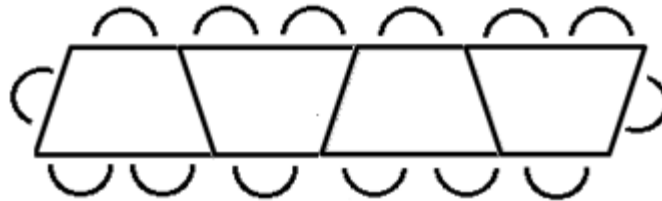
- a. ¿Podrías dibujar la figura 5?
- b. ¿Cuántos palillos hay en la figura 9? .
- c. ¿Una figura podría tener 54 palillos?.
- d. ¿Cuántos palillos tendría la figura 30 de la secuencia? Explica tu respuesta.
- e. Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo cómo encontrar término 100 de la secuencia.

5.2.1.1 Análisis a priori. Inicialmente se espera que los estudiantes analicen que: alrededor de una mesa se han colocado 5 sillas, alrededor de 2 mesas se ha colocado 8 sillas y alrededor de 3 mesas se han colocado 11 sillas. Luego de observar cuidadosamente los términos de la secuencia, los estudiantes pueden determinar un patrón de construcción e identificar el aumento de sillas por cada nueva mesa. Esto puede llevarlos a plantear una conjetura que le permita a cada

estudiante a construir una regla abductiva. Esta conjetura o hipótesis le permite a los estudiantes construir términos cercanos de la secuencia.

- a. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas

Figura 28. Regla abductiva Intervención 1 Tarea 1



Para las siguientes preguntas se espera que el estudiante genere una hipótesis a medida que va completando la secuencia para comprobar que en 5 mesas hay 17 sillas y alrededor de 6 mesas hay 20 sillas.

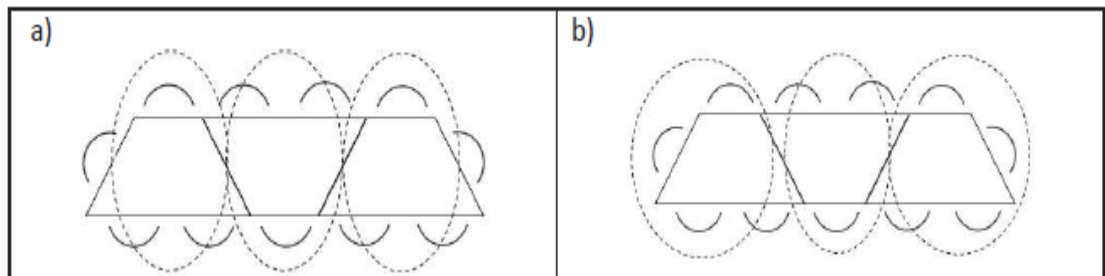
- b. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?

Se espera que una vez evaluada su hipótesis el estudiante compruebe su regla de manera inductiva y logre deducir que: si tiene 22 mesas puede sentar 68 personas. Esto como resultado de las características de su habilidad perceptual.

- c. En una fiesta se han colocado 22 mesas y sus correspondientes sillas
¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado
- d. Si en un cumpleaños se han invitado 56 niños ¿Cuántas mesas necesitaremos colocar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado

Basándose en el número de mesa y sillas y haciendo diferentes asociaciones con afirmaciones matemáticas entra en la etapa deductiva para hacer la generalización de la situación así:

Figura 29. Regla inductiva Intervención 1 Tarea 1



En el primer caso (a) cada mesa tiene 3 sillas arriba o abajo y hay 2 en los extremos, entonces tenemos: $(3n + 2)$; en el segundo (b) cada mesa tiene 3 sillas, menos las de los extremos que tienen 4 sillas, entonces: $(3(n - 2) + 2 \times 4)$

En la segunda tarea se presenta una secuencia numérica, se busca que el estudiante complete los números e identifique el patrón por lo cual se va generando el cambio en cada uno de los términos.

Inicialmente se espera que el estudiante logre generar una regla abductiva que le permita identificar el cambio y la correspondencia de un número a otro, además de analizar las distintas relaciones invariantes que presenta la secuencia numérica. Con este análisis se podrá establecer que:

Tabla 6. Regla deductiva Intervención 1 Tarea 2

Términos	Regla	Suma de los dígitos
1	$2+(1-1)$	2
2	$2+(2 -1)3$	5
3	$2+(3 -1)3$	8
4	$2+(4 -1)3$	11
5	$2+(5 -1)3$	14
6	$2+(6 -1)3$	17

7	$2+(7-1)3$	20
⋮	⋮	⋮
n	$2+(n-1)3$	3n-1

Logrando mostrar la veracidad de la regla inductiva que forma la secuencia numérica y además permite predecir todo número de la secuencia faltante.

Para la tercera tarea aparece una secuencia lineal utilizada por Godino y Font⁶¹ usando el lenguaje aritmético para encontrar regularidades en secuencias figurales. Donde cada elemento está expresado mediante una representación gráfica realizada con palillos y cada una está asociada a su propio ordinal. En este caso se puede esperar que el estudiante observe que la figura uno está conformada por 3 palillos, la figura dos por 5 palillos, la figura tres por 7 palillos; esto puede llevarlos a plantear una conjetura que lleve a cada estudiante a construir una regla abductiva. Esta conjetura o hipótesis le permite a los estudiantes construir términos cercanos de la secuencia.

Tabla 7. Regla deductiva Intervención 1 Tarea 3

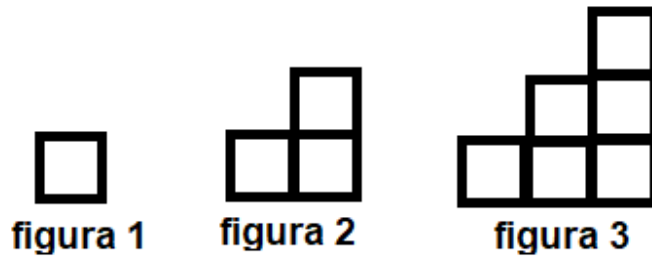
Figura	Numero de fósforos
1	3
2	$5= 3 +2$
3	$7=3+2+2$
4	$9=3+2+2+2$
5	$11= 3+2+2+2+2$
6	$13=3+2+2+2+2+2$
⋮	⋮
n	$3+(n-1)2$

5.2.2 Intervención dos

1. Dada la siguiente secuencia de figuras contesta las preguntas que aparecen a continuación:

⁶¹ GODINO, Juan y FONT, Vicenç. *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. 2003.

Figura 30. Secuencia figural Intervención 2 Tarea 1



- Continuando con el patrón de construcción dibuja la figura 4 y la figura 5.
- ¿Cuánto cuadrados tiene la figura 9? Explica tu respuesta.
- ¿Una figura de la secuencia puede estar formada por 25 cuadrados? Si tu respuesta es afirmativa indica qué figura es. Explica tu respuesta.
- ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura 100? Explica tu respuesta.
- Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo o amiga cuántos cuadrados tiene cualquier figura de la secuencia. Explica ampliamente cada idea que se te ocurra.

2. Dada la siguiente secuencia de números contesta las preguntas que aparecen a continuación:

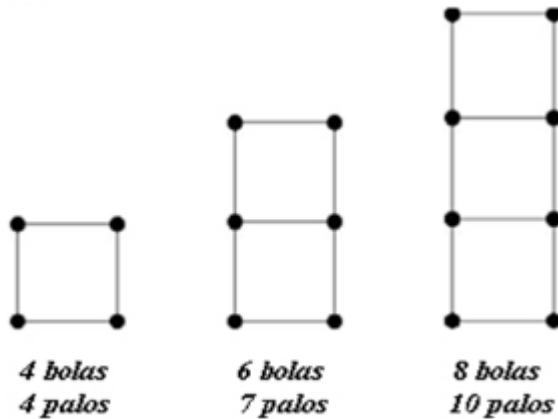
2, 6, 10, 14, 18, 22,

1 2 3 4 5 6

- Continuando con la secuencia, ¿cuáles son los dos términos 7 y 8? Explica tu respuesta.
- ¿Cuál sería el décimo número? Explica tu respuesta.
- ¿Un número de la secuencia puede ser el 87? Explica tu respuesta.
- ¿Cuál es el número 30 de la secuencia? Explica tu respuesta.
- ¿Puedes saber cuál es el término 100 de la secuencia?

3. Dada la siguiente secuencia contesta las preguntas que aparecen a continuación:

Figura 31. Secuencia figural Intervención 2 Tarea 3



Como puedes ver en la imagen, la figura de un cuadro necesita 4 bolas y 4 palos, la figura de dos cuadros necesita 6 bolas y 7 palos y la figura de tres cuadros necesita 8 bolas y 10 palos

- ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 4 cuadros?
Explica tu respuesta
- ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 6 cuadros?
Explica tu respuesta
- ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 20 cuadros?
Explica tu respuesta
- ¿Podrías contarle a tus compañeros como relacionar el número de cuadros y bolas? Explica tu respuesta
- Podrías contarle a tus compañeros como relacionar el número de cuadros y palos ? explica tu respuesta

5.2.2.1 Análisis a priori. La primera tarea es tomada de Rojas y Vergel⁶²; usando el lenguaje aritmético para encontrar regularidades en secuencias figurales. Se espera que los estudiantes analicen que el primer elemento de la secuencia es un cuadrado, el segundo elemento está conformado por tres cuadrados y el tercer

⁶² GÓMEZ, Diana y VERGEL, Rodolfo. Generalización de patrones: una reflexión didáctica sobre medios semióticos de objetivación en grado octavo. 2012. p. 240

elemento contiene seis cuadrados; de manera que en cada posición nueva el aumento en cuadros es igual a la posición de la figura, si es la figura cinco aumenta cinco cuadros, la figura seis aumenta seis cuadros. Luego de comprender el patrón e identificar el número de cuadrados en cada posición el estudiante podría generar una conjetura que lo conduzca a la construcción de una regla abductiva que puede estar en términos espaciales. Esto puede permitirle dibujar los términos cuarto y quinto de la secuencia y dar respuesta a los incisos a. y b. dando las explicaciones correspondientes.

Para responder la siguiente pregunta, se espera que el estudiante con base en el análisis anterior organice su hipótesis e inicie la construcción de su regla inductiva que puede generarse en términos de la relación entre la posición de la figura dentro de la secuencia y la relación creciente de aumento de cuadros.

Figura 32. Regla inductiva intervención 2 Tarea 1

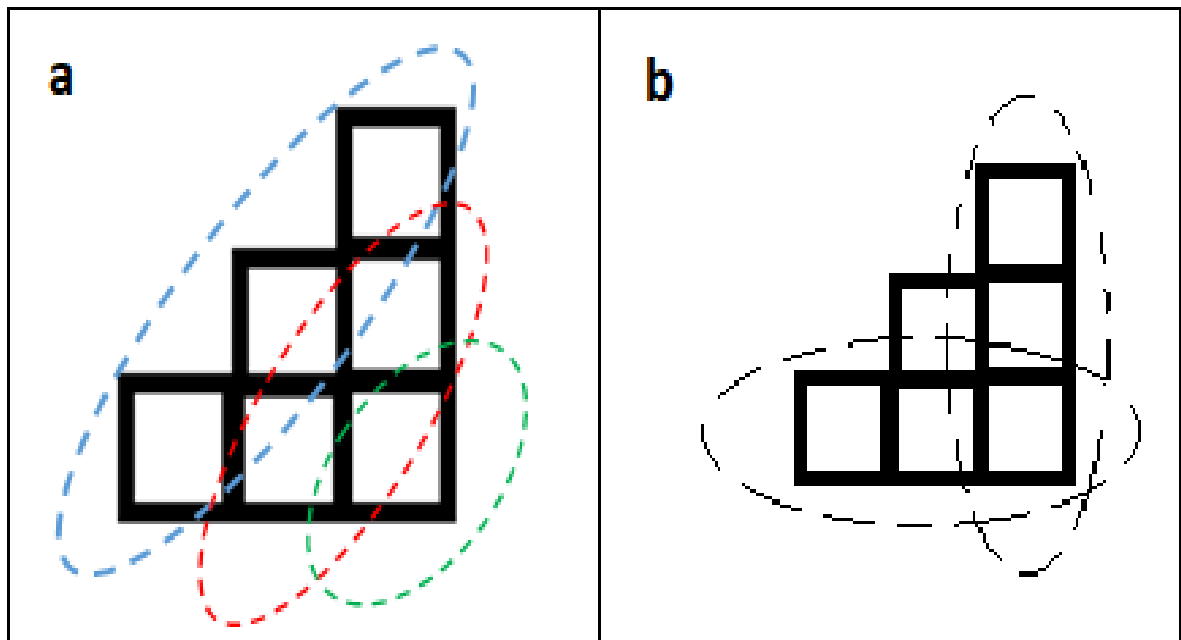


Tabla 8. Regla deductiva intervención 2 Tarea 1

Figura	Regla	Total de cuadros
1	$\frac{1 \times 2}{2}$	1
2	$\frac{2 \times 3}{2}$	3
3	$\frac{3 \times 4}{2}$	6
4	$\frac{4 \times 5}{2}$	10
5	$\frac{5 \times 6}{2}$	15
⋮	⋮	⋮
n	$\frac{n \times (n + 1)}{2}$	$\frac{n^2 + n}{2}$

Finalmente, se espera que con el análisis realizado hasta el momento y verificado, el estudiante logre comunicar las variaciones y las implicaciones que utilizó. Esto podría permitir que los estudiantes evidenciaran un razonamiento deductivo, por ejemplo al plantear expresiones como: “para encontrar el número de cuadrados que conforma cada figura, se suma la posición de la figura más el anterior y se divide en 2”. Estas expresiones verbales pueden surgir de las características que de manera perceptual los estudiantes identifican en el patrón que da paso a la construcción de la secuencia.

En la segunda tarea tomada de Socas⁶³ con el propósito de buscar regularidades en secuencias numéricas y expresarlas algebraicamente; se presenta una secuencia numérica, se busca que el estudiante complete los números e identifique el patrón mediante el cual se va generando el cambio en cada uno de los términos.

Inicialmente se espera que el estudiante logre generar una conjetura abductiva que le permita identificar el cambio y la correspondencia de un número a otro, además de analizar las distintas relaciones invariantes que presenta la secuencia numérica. Con este análisis se podrá establecer que:

⁶³ SOCAS, Martín. La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NUMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 2011. p.77, 5-34.

Tabla 9. Regla deductiva Intervención 2 Tarea 2

Términos	Regla	Resultado
1		2
2	$2 + 4$	6
3	$4 + 6$	10
4	$10 + 4$	14
5	$14 + 4$	18
6	$18 + 4$	22
7	$22 + 4$	26
⋮	⋮	⋮
$n + 1$	$2(2n-1)$	$4n - 2$

Logrando mostrar la veracidad de la regla inductiva que forma la secuencia numérica y además permite predecir todo número de la secuencia faltante.

Para la tercera tarea se presenta un problema de generalización lineal con fósforos, similar a uno propuesto en otra investigación por García.⁶⁴

Para responder las preguntas a. y b. el estudiante debe analizar el enunciado del problema y asumir que la figura de un cuadro necesita 4 bolas y 4 palos, la figura de dos cuadros necesita 6 bolas y 7 palos y la figura de tres cuadros necesita 8 bolas y 10 palos lo que le permitirá genera una regla abductiva.

La pregunta c. requiere que el estudiante genere un razonamiento inductivo que puede generar a partir del análisis de la siguiente tabla:

Tabla 10. Regla inductiva Intervención 2 Tarea 3

Posición	Nº de bolas
1	4
2	6
3	8
4	10
5	12
⋮	⋮
n	$2n + 2$

⁶⁴ GRACIA, Juan. El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal. Doctoral dissertation, Universidad de La Laguna, Departamento de Análisis Matemático. 1998.

Las preguntas d. y e. piden expresar la regla general, ya sea en forma verbal o algebraica, y permiten conocer si los estudiantes son capaces coordinar el esquema numérico de la información procedente de la sucesión numérica con el esquema de la posición que ocupa el número en la secuencia numérica.

A partir de la observación el estudiante debe ser capaz de identificar la relación entre la cantidad de bolas (y la cantidad de palos) cuando se pasa de una posición a otra. Por ejemplo, identificar que la sucesión 4, 7, 10, 13,... obtenida sumando 3 cada vez, está formada por números que son múltiplos de 3 más 1, y así poder llegar a escribir $3n+1$. Pero establecer directamente la relación entre n (posición) y el n° de bolas (n° de palos) implica genera el proceso deductivo

5.2.3 Intervención tres

1. Dada la siguiente secuencia de figuras contesta las preguntas que aparecen a continuación:

Figura 33. Secuencia figural Intervención 3 Tarea 1



- a. Continuando con el patrón de construcción dibuja la figura 4 y la figura 5.
- b. ¿Cuántas bolas tiene la figura 4? ¿Cuántas bolas la figura 5? Explica tu respuesta.
- c. ¿Cuántas bolas tendrá la figura 10? Explica tu respuesta.
- d. ¿Una figura de la secuencia puede estar formada por 25 bolas? Si tu respuesta es afirmativa indica qué figura es. Explica tu respuesta.

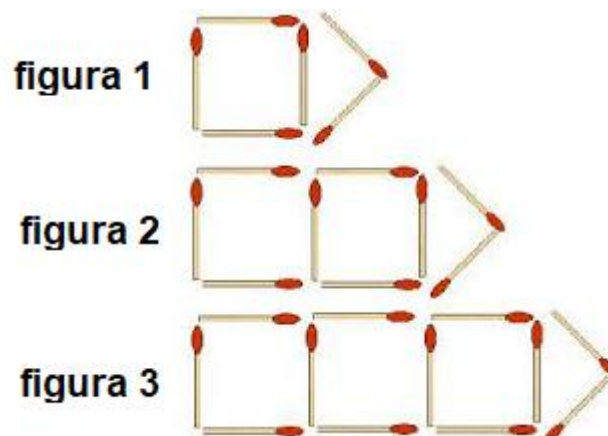
- e. ¿Una figura de la secuencia puede estar formada por 80 bolas? Si tu respuesta es afirmativa indica qué figura es. Explica tu respuesta.
 - f. ¿Cuántas bolas tendrá la figura 100? Explica tu respuesta.
 - g. Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo o amiga cuántas bolas tiene cualquier figura de la secuencia. Explica ampliamente cada idea que se te ocurra.
2. Dada la siguiente secuencia de números contesta las preguntas que aparecen a continuación:

23 33 25 80 36

1 2 3 4 5

- a. Continuando con la secuencia, ¿cuáles son los dos términos 6 y 7? Explica tu respuesta.
 - b. ¿Cuál sería el décimo número? Explica tu respuesta.
 - c. ¿Un número de la secuencia puede ser el 87? Explica tu respuesta.
 - d. ¿Cuál es el número 30 de la secuencia? Explica tu respuesta.
 - e. ¿Puedes saber cuál es el término 100 de la secuencia?
3. Dada la siguiente secuencia de fósforos contesta las preguntas que aparecen a continuación:

Figura 34. Secuencia figural Intervención 3 Tarea 3



- a. ¿Cuántas cabezas y palos se necesitarán para construir la figura de 4? Explica tu respuesta
- b. ¿Cuántas cabezas y palos se necesitarán para construir una figura de 6 cuadros? Explica tu respuesta
- c. ¿Cuántas cabezas y palos se necesitarán para construir una figura de 20 cuadros? Explica tu respuesta
- d. ¿Podrías contarle a tus compañeros como relacionar el número de cuadros y cabezas? Explica tu respuesta
- e. Podrías contarle a tus compañeros como relacionar el número de cuadros y palos ? explica tu respuesta

5.2.3.1 Análisis a priori. En esta primera tarea propuesta por Vergel⁶⁵, se espera que los estudiantes analicen que en el primer término de la secuencia hay cinco bolas; en el segundo término siete bolas, el aumento es de dos bolas; y en el tercer término hay nueve bolas. De esta manera por cada nuevo elemento el aumento es de dos bolas. Esto puede llevarlos a plantear una conjetura que le permita a cada estudiante construir una regla abductiva. Esta conjetura o hipótesis les permitirá a los estudiantes construir términos cercanos de la secuencia.

Figura 35. Regla abductiva Intervención 3 Tarea 1

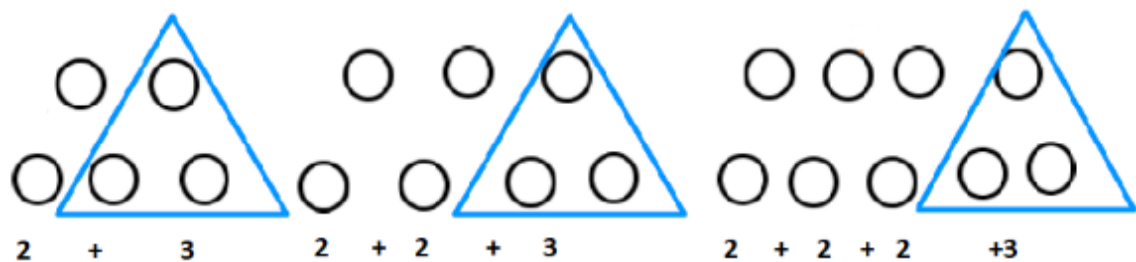


Se espera que una vez evaluada su hipótesis el estudiante compruebe su verificación inductiva y logre deducir que: “si tiene 25 bolas estas pertenecen al término 11”. Esto como resultado de las características de su habilidad para percibir el comportamiento del patrón

⁶⁵ VERGEL, Op. Cit., p. 45.

Finalmente haciendo asociaciones, es posible que el estudiante desarrolle una forma de razonamiento deductivo para proponer el patrón que permite construir los términos de la secuencia.

Figura 36. Regla deductiva Intervención 3 Tarea 1



En la primera figura tenemos 2 bolas más tres, en la segunda figura 4 bolas más tres, en la tercera figura seis bolas más tres, en la figura n tendría $2n + 3$ completando así su razonamiento deductivo.

La segunda tarea se retoma del diagnóstico inicial, presentando la secuencia

$$\begin{array}{cccccc}
 \mathbf{23} & \mathbf{33} & \mathbf{25} & \mathbf{80} & \mathbf{36} & \dots \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 &
 \end{array}$$

Inicialmente se espera que el estudiante logre generar una regla abductiva que le permita identificar el cambio y la correspondencia de un número a otro, además de analizar las distintas relaciones invariantes que presenta la secuencia numérica. Con este análisis se podrá establecer que:

La suma de los dígitos del primer número suman cinco, la suma del segundo número suman seis, la suma de los dígitos del tercer número suman siete y así sucesivamente.

Logrando mostrar la veracidad de la regla inductiva que forma la secuencia numérica y además permite predecir todo número de la secuencia faltante.

Tabla 21. Regla deductiva Intervención 3 Tarea 2

Términos	Regla	Suma de los dígitos
1	1 +4	5
2	2+4	6
3	3 + 4	7
4	4 + 4	8
5	4 + 4	9
6	6 + 4	10
7	7 + 4	11
⋮	⋮	⋮
n	n + 4	n + 4

De esta manera podrá afirmar acerca del 87 que: “la suma de los dígitos de sus cifras es 15 menos 4 sería igual a once, luego corresponde al termino once de la sucesión”. Y que para el número treinta de la secuencia la suma de los dígitos sería 34 así que el número tendría que ser de cuatro cifras por ejemplo 9997 ya que $9+9+9+7 = 34$.

Para la tercera tarea se presenta un problema de generalización lineal con fósforos, similar a uno propuesto en otras investigaciones; por ejemplo en García.⁶⁶

Para responder las preguntas a. y b. el estudiante debe analizar el enunciado del problema y asumir que la figura uno, necesita seis bolas y seis palos; la figura dos necesita 9 bolas y 9 palos y la figura tres necesita 12 bolas y 12 palos lo que le permitirá genera una regla abductiva.

La pregunta c. requiere que el estudiante genere un razonamiento inductivo del patrón que permite determinar los términos de la secuencia tal vez generando la siguiente tabla:

Tabla 32. Regla deductiva Intervención 3 Tarea 3

Posición	N° de bolas	N° de palos
1	6	6
2	9	9

⁶⁶ GARCÍA, Op. Cit., p.46.

3	12	12
4	15	15
5	18	18
⋮	⋮	⋮
n	$3(n + 1)$	$3(n + 1)$

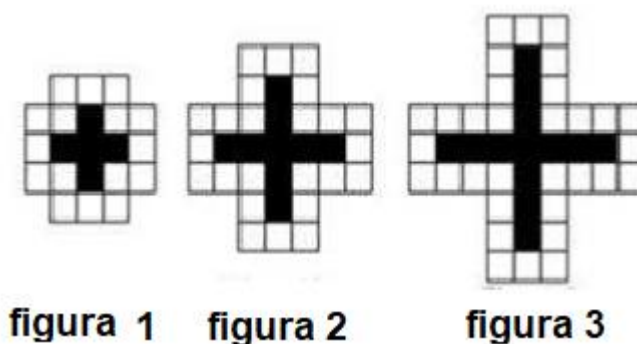
En las preguntas d. y e. se pide expresar la regla general, ya sea en forma verbal o algebraica; esto permite conocer si los estudiantes son capaces coordinar el esquema numérico de la información procedente de la sucesión numérica, con el esquema de la posición que ocupa el número en la secuencia numérica.

A partir de la observación el estudiante debe identificar la relación entre la cantidad de bolas (y la cantidad de palos) cuando se pasa de una posición a otra. Por ejemplo, identificar que la sucesión 6, 9, 12, 15,... obtenida multiplicando por 3 el número de posición adicionado con uno. Establecer directamente la relación entre n (posición) y el n° de bolas (n° de palos) implica genera el proceso deductivo

5.2.4 Intervención cuatro

1. Las tres figuras son los primeros términos de una secuencia.

Figura 37. Secuencia figural intervención 4 Tarea 1



- a. ¿Cuántos cuadros blancos y negros se necesitan para construir la figura 4?
- b. ¿Cuánto cuadrados blancos y negros tiene la figura 6? ¿Cuántos cuadrados la figura 7? Explica tu respuesta.

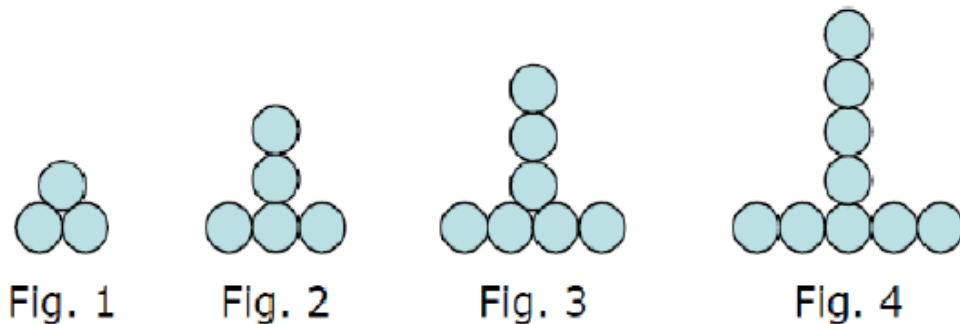
- c. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros tendrá la figura 20? Explica tu respuesta.
- d. ¿Puedes escribir explicarle a un compañero una regla que relacione los cuadrados blancos con el número de la figura? Explica tu respuesta
- e. ¿Puedes explicarle a un compañero una regla que relacione los cuadrados negros con el número de la figura? Explica tu respuesta.

2. Dada la siguiente secuencia de números contesta las preguntas que aparecen a continuación:

	7	12	19	28	
	1	2	3	4	

- a. Continuando con la secuencia, cuáles son los dos números siguientes. Explica tu respuesta
- b. ¿Cuál sería el décimo número? Explica tu respuesta.
- c. ¿Un número de la secuencia puede ser el 169? Explica tu respuesta.
- d. ¿Cuál podría ser el número 40 de la secuencia? Explica tu respuesta.
- e. Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo cómo encontrar término 200 de la secuencia.

3. Dada la siguiente secuencia de figuras contesta las preguntas que aparecen a continuación



- a. Continuando con el patrón de construcción dibuja la figura 5 y la figura 6.
- b. ¿Cuántas bolas tiene la figura 9? Explica tu respuesta.
- c. ¿Cuántas bolas tiene la figura 25? Explica tu respuesta.
- d. ¿Una figura de la secuencia puede estar formada por 25 bolas? Si tu respuesta es afirmativa indica qué figura es. Explica tu respuesta.
- e. ¿Cuántas bolas tendrá la figura 100? Explica tu respuesta.
- f. Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo o amiga cuántas bolas tiene cualquier figura de la secuencia. Explica ampliamente cada idea que se te ocurra.

5.2.4.1 Análisis a priori. En la primera Tarea se espera que los estudiantes analicen que el primer elemento de la secuencia contiene 5 cuadrados negros y 16 cuadrados blancos; el segundo elemento está conformado por 9 cuadrados negros y 24 cuadrados blancos; el tercer elemento contiene 13 cuadrados negros y 32 cuadrados blancos; de manera que en cada posición nueva el aumento en cuadros es: 4 cuadros negros y 8 cuadros blancos. Es posible que se establezca una regla a partir de los cuadros que se aumentan arriba o al lado y su regla abductiva surja de dicha característica.

Luego de comprender el patrón e identificar el número de cuadrados en cada posición el estudiante podría generar una conjetura que lo conduzca a la construcción de una regla abductiva que puede estar en términos espaciales. Esto puede permitirle dibujar los términos cuarto y quinto de la secuencia y dar respuesta a los incisos a. y b. dando las explicaciones correspondientes.

Para responder la siguiente pregunta, se espera que el estudiante con base en el análisis anterior organice su hipótesis e inicie la construcción de su regla inductiva, que puede generarse en términos de la relación entre la posición de la figura dentro de la secuencia y la relación creciente de aumento de cuadros.

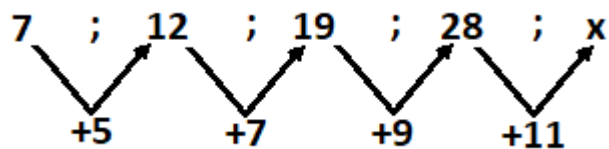
Tabla 43. Regla deductiva Intervención 4 Tarea 1

Posición	Cuadros negros	Cuadros blancos
1	5	16
2	5+4=9	16+8=24
3	9+4=13	24+8=32
4	13+4=17	32+8=40
⋮	⋮	⋮
	5+(n-1)4	16+(n-1)8
n	4n+1	8n+8

Finalmente, se espera que con el análisis realizado hasta el momento y verificado, el estudiante logre comunicar las variaciones y las implicaciones que utilizó. Esto podría permitir que los estudiantes evidenciaran un razonamiento deductivo, por ejemplo al plantear expresiones como: “para encontrar el número de cuadrados blancos al anterior le sumo cuatro, y el de cuadrados negros al anterior le sumo ocho”. Estas expresiones verbales pueden surgir de las características que de manera perceptual los estudiantes identifican en el patrón que da paso a la construcción de la secuencia.

La segunda Tarea, se retoma de la prueba diagnóstica, se presenta una secuencia numérica, se busca que el estudiante complete los términos e identifique el patrón, que caracteriza la formación de los términos dentro de la secuencia.

Inicialmente se espera que el estudiante logre generar una regla abductiva que le permita identificar el cambio y la correspondencia de un número a otro de la secuencia. Además de analizar las diferentes relaciones invariantes que presenta la secuencia numérica. Con este análisis se podrá establecer que: el siguiente número de la secuencia es el resultado del término anterior más el siguiente impar $T_n = (T_{n-1} + (2n + 1))$



Esto puede permitirle al estudiante verificar su regla inductiva, que da paso a la formación de la secuencia numérica y además permite predecir todo número de la secuencia faltante; respondiendo las preguntas a. y b.

Posteriormente para la solución de los siguientes ítems se espera que los estudiantes expresen y describan la regla de formación del patrón que utilizaron anteriormente. Entrando en la etapa deductiva.

Tabla 14. Regla deductiva Intervención 4 Tarea 2

Términos	Regla	Resultado
1		7
2	$7 + 5$	12
3	$12 + 7$	19
4	$19 + 9$	28
5	$28 + 11$	39
6	$39 + 13$	52
⋮	⋮	⋮
7	$52 + 15$	67
n	$(n-1) + (2n + 1)$	n
n + 1	$n + (2n+1)$	n + 1

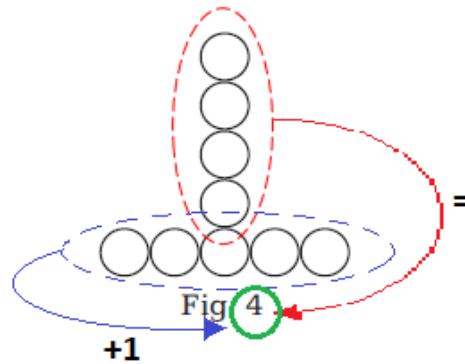
Esto les permitirá dar respuesta a las preguntas d. y e.

La tercera tarea se utiliza una secuencia figural presentada por Vergel⁶⁷. Para responder las preguntas a. y b. el estudiante debe analizar el enunciado del problema y asumir que la figura tiene 1 bola vertical y 2 horizontales; la segunda figura tiene 2 bolas verticales y 3 horizontales, la figura tres tiene 3 verticales y 4 horizontales y la figura cuadro 4 bolas verticales y 5 horizontales lo que le permitirá genera una forma de razonamiento abductivo y le permitirá responder a las preguntas a. y b.

La pregunta c. requiere que el estudiante genere una forma de razonamiento inductivo de generalización tal vez generando la siguiente hipótesis:

⁶⁷ VERGEL, Op. Cit., p. 53.

Figura 39. Regla inductiva intervención 4 tarea 3



Las preguntas d. y e. piden expresar la regla general, ya sea en forma verbal o algebraica, y permiten conocer si los estudiantes son capaces coordinar el esquema numérico de la información procedente de la sucesión numérica con el esquema de la posición que ocupa el número en la secuencia numérica. Se evidencia con expresiones como *abajo va una bola más y arriba el número de bolas corresponde al número de la figura*, esto genera el proceso deductivo

5.3 ANÁLISIS DE LAS TAREAS

Para el análisis de las Tareas se realizó una observación cuidadosa de todos los videos de cada una de las intervenciones, para seleccionar los episodios más importantes donde se evidencian los tipos de razonamientos que utilizan los estudiantes en el desarrollo de Tareas que involucran procesos de generalización. Los eventos seleccionados van acompañados de representaciones escaneadas de las Tareas desarrolladas por los estudiantes y de capturas en imágenes (fotos) de los instantes en que ellos están realizando sus diferentes análisis y procedimientos. Para el análisis de datos, una vez identificados los episodios más destacados se organizaron teniendo en cuenta el tipo de razonamiento inferencial: abducción, inducción o deducción; evidenciado por los estudiantes para solucionar la Tarea propuesta.

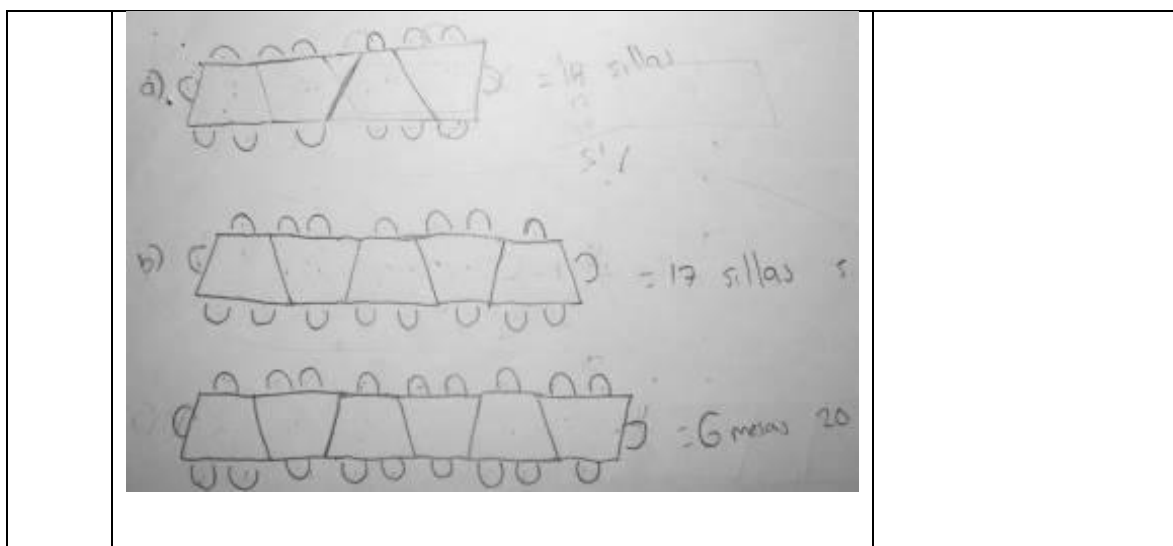
5.3.1 Evidencias de razonamiento abductivo. Se evidencia en la recolección de datos que el razonamiento abductivo está generalizado en todas las intervenciones, lo que nos lleva a pensar que este razonamiento aflora naturalmente en los estudiantes, en este nivel de pensamiento el estudiante centra su análisis en los ejemplos gráficos, por comparación y repetición del modelo logra dar solución a la situación planteada. Es importante anotar que el setenta por ciento llegar al segundo nivel de pensamiento el inductivo, y un treinta por ciento se queda resolviendo la situación abductivamente. El grafico contiene valiosa información y se les facilita la comprensión.

Analizaremos algunas Tareas de las intervenciones que resultan interesantes para esta investigación

Intervención uno Tarea uno: Se tenían previstas dos sesiones de clase, pero como los estudiantes no estaban familiarizados con la generalización de patrones fueron necesarios 5 periodos de clase para el desarrollo de la intervención.

Tabla 15. Análisis a posteriori razonamiento abductivo intervención 1 Tarea 1

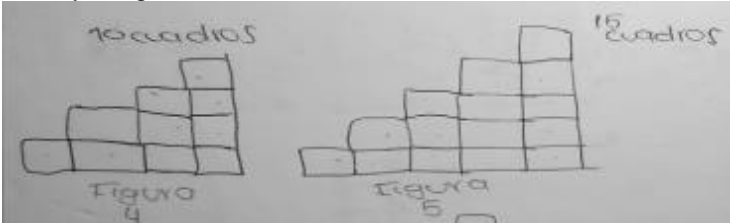
Est.	Evidencia	Razonamiento
IN1_4	a. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas? b. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?	El estudiante dibuja 4 mesas y estima el total de sillas 14, 5 mesas 17 sillas y 6 mesas 20 sillas, identificando la mecánica de la secuencia. Evidencia un razonamiento abductivo.

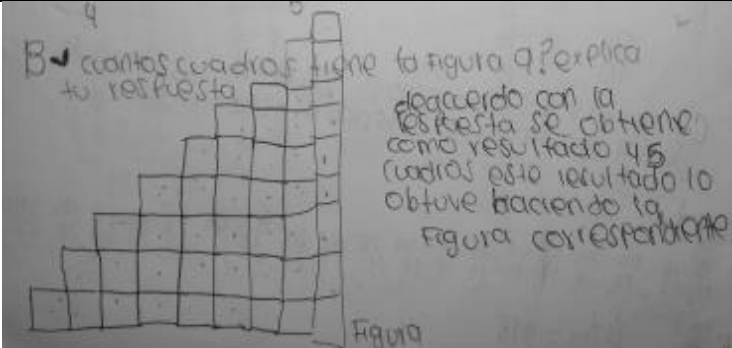
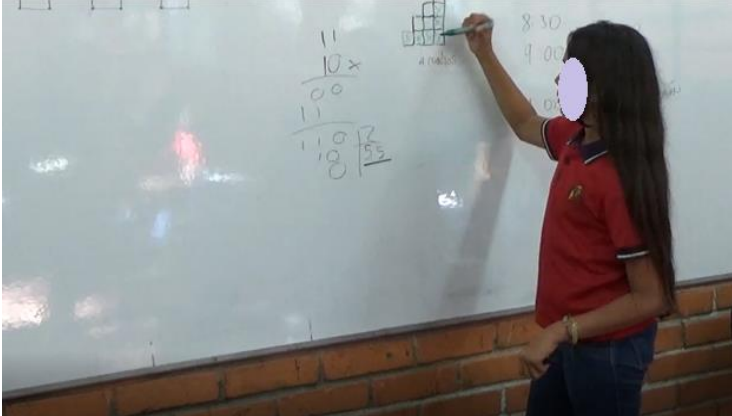


El estudiante IN1_4, determina la cantidad de sillas para el ítem a. y b. la justificación de su razonamiento es el grafico abductivo, lo que le permite llegar a la respuesta correcta. En este caso utiliza una secuencia paso a paso hasta determinar el término que le fue solicitado.

Intervención dos Tarea uno

Tabla 16. Análisis a posteriori razonamiento abductivo intervención 2 Tarea 1

Est.	Evidencia	Razonamiento
IN2_8	<p>a. Continuando con el patrón de construcción dibuja la figura 4 y la figura 5.</p> 	<p>El estudiante IN2_8 dibuja las figuras 4 y 5 y totaliza los cuadros 10 y 15 respectivamente evidencian un razonamiento abductivo.</p>
	<p>b. ¿Cuánto cuadrados tiene la figura 9? Explica tu respuesta.</p>	<p>En este ítem se esperaba que el estudiante IN2_8 después de haber construido las figuras 4 y 5 lograra establecer por inducción el total de cuadros de la figura 9,</p>


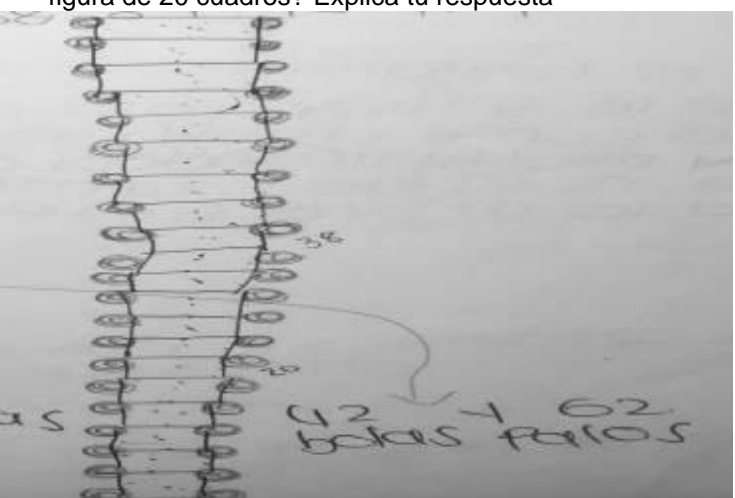
IN2_8		<p>sin embargo el estudiante continua con el razonamiento abductivo “de acuerdo con la respuesta se obtiene como resultado 45 cuadros este resultado lo obtuve haciendo la figura correspondiente”.</p>
IN2_6		<p>En este caso la estudiante IN2_6 no logra establecer una regla deductiva y continúa encontrando la solución abductivamente.</p>

Los estudiantes IN2_6 y IN2_8, determinan la cantidad de cuadros para el ítem a. y b. por conteo a partir de su grafico abductivo; esto les permite llegar a la respuesta correcta, se esperaba que en el caso de la figura nueve los estudiantes evidenciaran una forma de razonamiento inductivo.

Intervención dos Tarea tres

Tabla 17. Análisis a posteriori razonamiento abductivo intervención 2 Tarea 3

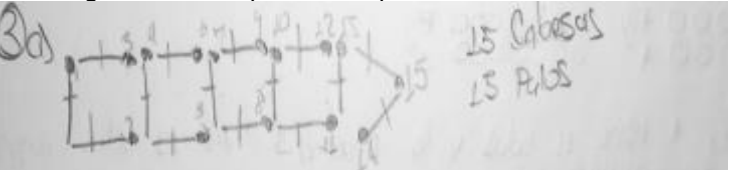
Est.	Evidencia	Razonamiento
	<p>a. ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 4 cuadros? Explica tu respuesta</p> <p>b. ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 6 cuadros? Explica tu respuesta</p>	

IN2_10		El estudiante IN2_10 en la tercera tarea aplica el razonamiento abductivo como se esperaba, y su explicación es clara "se hace la gráfica y se suma".
IN2_10	<p>c. ¿Cuántas bolas y palos se necesitarán para construir una figura de 20 cuadros? Explica tu respuesta</p> 	

Se esperaba que el estudiante IN2_10 en este ítem estableciera sus primeras hipótesis y resolviera la situación aplicando un razonamiento inductivo, sin embargo su razonamiento sigue siendo solo abductivo de la misma manera continua dando solución al resto de la tarea.

Intervención tres Tarea tres

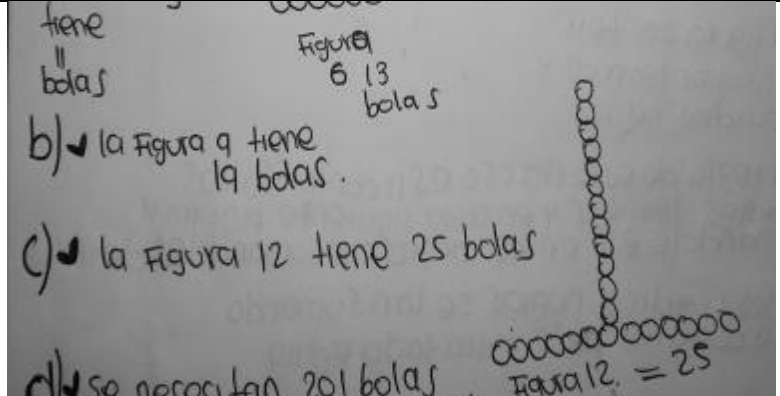
Tabla 18. Análisis a posteriori razonamiento abductivo intervención 3 Tarea 3

Est.	Evidencia	Razonamiento
IN3_4	<p>a. ¿Cuántas cabezas y palos se necesitarán para construir la figura de 4? Explica tu respuesta</p> 	El estudiante IN3_4 aplica evidencia un razonamiento abductivo y totaliza el número de cabezas y el número de palos.

Esta tarea es similar a la tarea tres de la intervención dos, el estudiante IN3_4 logra reproducir el grafico del patrón y esta vez encuentra el número de palos y el número de cabezas, se nota que entiende el comportamiento del patrón. Esta es la primera evidencia de un tipo de razonamiento abductivo que le permite caracterizar los elementos que componen el término de la secuencia.

Intervención cuatro Tarea tres

Tabla 19. Análisis a posteriori razonamiento abductivo intervención 4 Tarea 3

Est.	Evidencia	Razonamiento
IN4_20		<p>IN4_20 interiorizo el pensamiento abductivo y logra validar sus afirmaciones generando el grafico</p>

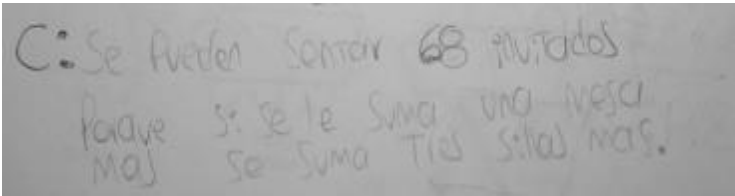
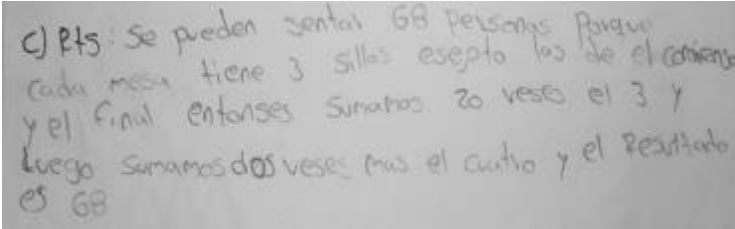
Podemos ver en todas las intervenciones el razonamiento abductivo, los estudiantes con facilidad entienden la construcción de los términos próximos a los planteados. Esto les permite contestar con facilidad las preguntas iniciales. Además, los estudiantes muestran claridad en la estrategia para calcular apropiadamente el número de cuadrados, mesas, bolas y palos y de figuras particulares de las secuencias. Cuando se trata de figuras lejanas a las iniciales se nota la dificultad, y es ahí donde se espera que el razonamiento inductivo se haga presente; sin embargo, más del treinta por ciento no logra establecer hipótesis y continúan haciendo gráficos que en ocasiones se salen del área normal de trabajo de la hoja.

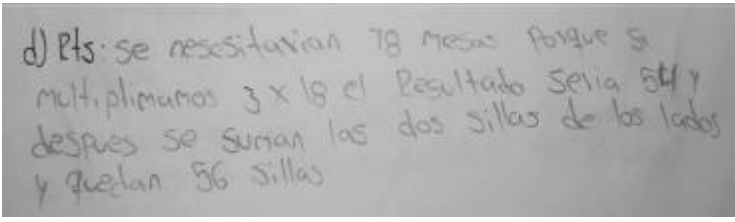
5.3.1.1 Evidencias del razonamiento inductivo. En las intervenciones por medio de la repetición y la observación en las tareas se esperaba que el estudiante

descubriera comportamientos particulares y buscara dar explicación a los mismos. Empezando a establecer posibles reglas que dieran razón de los casos conocidos y que posiblemente sirvieran para dar solución a otros próximos sin tener que construir secuencias extensas este proceso se conoce como el inductivo. Si bien es cierto el razonamiento abductivo de da fácilmente, el razonamiento inductivo es más complejo de generar, lo logran en menos medida a continuación mostramos algunos ejemplos donde consideramos que se logró llegar a este nivel.

Intervención uno Tarea uno

Tabla 20. Análisis a posteriori razonamiento inductivo intervención 1 Tarea 1

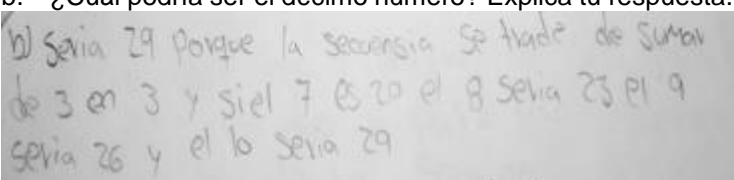
Est.	Evidencia	Razonamiento
IN1_5	<p>c. En una fiesta se han colocado 22 mesas y sus correspondientes sillas ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado</p> <p>d.</p> 	<p>El estudiante IN1_5 empieza a establecer una regla sin realizar el grafico afirma “se pueden sentar 68 invitados porque si se le suma una mesa más se suma tres sillas más” lo que lo ubica en un razonamiento inductivo</p>
IN1_9		<p>El estudiante IN1_9 logra un razonamiento inductivo y argumenta una regla más elaborada “se pueden sentar 68 personas porque cada mesa tiene 3 sillas e septo las del el comienzo y el final entonces sumamos 20 veces el 3 y luego sumamos dos veces mas el cuatro y el resultado es 68”</p>
IN1_9		<p>El estudiante IN1_9 en este ítem depura su hipótesis inductiva “se</p>

	<p>d. Si en un cumpleaños se han invitado 56 niños ¿Cuántas mesas necesitaremos colocar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado</p> 	<p>necesitarían 18 mesas porque si multiplicamos 3×18 el resultado sería 54 y después se suman las dos sillas de los lados y quedan 56 silla”</p>
--	--	---

Los estudiantes IN1_5 y IN1_9 logran llegar evidenciar un tipo de razonamiento inductivo: cada uno de ellos construye una idea para encontrar el número de sillas de un término lejano sin necesidad de realizar todos los dibujos, su dificultad radica aún en la manera de expresar esta idea en términos algebraicos. En sus producciones se evidencia el uso del lenguaje común para transmitir sus razonamientos.

Intervención uno Tarea dos

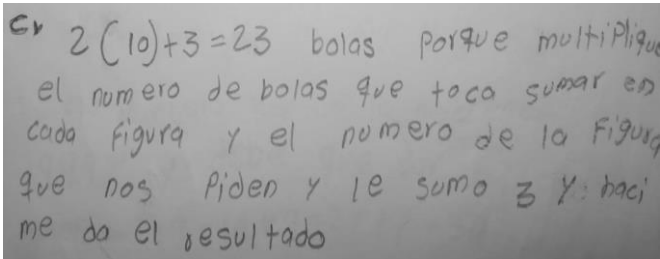
Tabla 21. Análisis a posteriori razonamiento inductivo intervención 1 Tarea 2

Est.	Evidencia	Razonamiento
IN2_9	<p>b. ¿Cuál podría ser el décimo número? Explica tu respuesta.</p> 	<p>El estudiante IN2_9 en esta Tarea da los primeros pasos en el razonamiento inductivo, gracias a su observación establece “sería 29 porque la secuencia se trata de sumar de 3 en 3 y si el 7 es 20 el 8 sería 23 y el 9 sería 26 y el 10 sería 29”.</p>

El estudiante IN2_9 nuevamente empieza a establecer una hipótesis y logra encontrar una regla que le permite calcular términos lejanos de la secuencia sin necesidad de construirlos abductivamente, su progreso con respecto al resto del grupo es notable.

Intervención tres Tarea uno

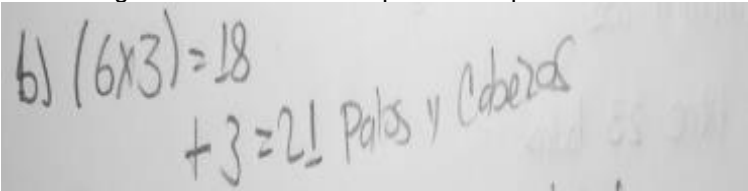
Tabla 22. Análisis a posteriori razonamiento inductivo intervención 3 Tarea 1

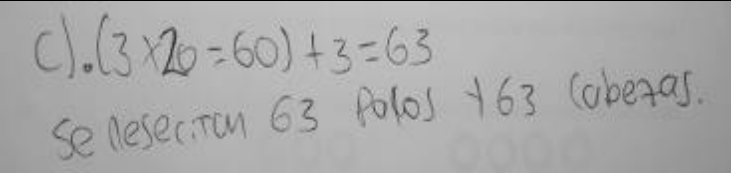
Est.	Evidencia	Razonamiento
IN3_17	<p>d. ¿Cuántas bolas tendrá la figura 10? Explica tu respuesta.</p> 	<p>El estudiante IN3_17 presenta una regla inductiva muy elaborada “ $2(10) + 3 = 23$ bolas porque multiplico el número de bolas que toco sumar en cada figura y el número de la figura que nos piden y le sumo 3 y haci me da el resultado”</p>

El estudiante IN3_17 logra establecer una regla inductiva que le permite calcular términos lejanos de la secuencia sin dibujarlos, se nota ya una forma elaborada de presentar la hipótesis. Como puede verse en la figura final de la Tabla 26 el paréntesis representa la variable en la ecuación, aún no prueba su hipótesis para términos lejanos.

Intervención tres Tarea tres

Tabla 23. Análisis a posteriori razonamiento inductivo intervención 3 Tarea 3

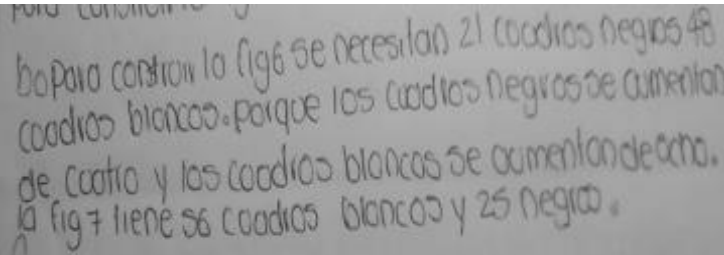
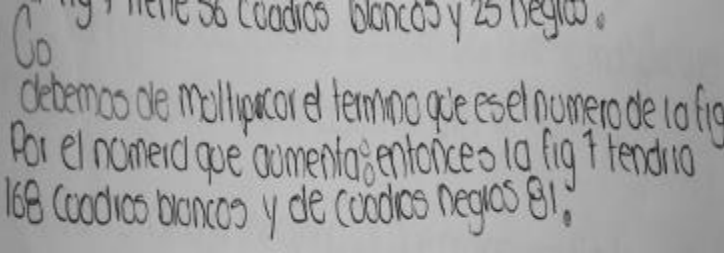
Est.	Evidencia	Razonamiento
IN3_5	<p>b. ¿Cuántas cabezas y palos se necesitarán para construir una figura de 6 cuadros? Explica tu respuesta</p> 	<p>El estudiante IN3_5 escribe una regla inductiva pero no la explica</p>
IN3_5	<p>c. ¿Cuántas cabezas y palos se necesitarán para construir una figura de 20 cuadros? Explica tu respuesta</p>	<p>El estudiante IN3_5 mejora su manera de escribir la regla inductiva pero sigue sin comunicar o dar una explicación de lo que está haciendo</p>

		
--	--	--

El razonamiento evidenciado por el estudiante IN3_5 resulta interesante, ya que no construye los términos cercanos a partir de un razonamiento abductivo, sino que desde el inicio por medio de la observación genera una hipótesis inductiva que le permite calcular términos lejanos de la secuencia sin dibujarlos. Al igual que el compañero anterior genera una expresión más elaborada, en términos matemáticos.

Intervención cuatro Tarea uno

Tabla 24. Análisis a posteriori razonamiento inductivo intervención 4 Tarea 1

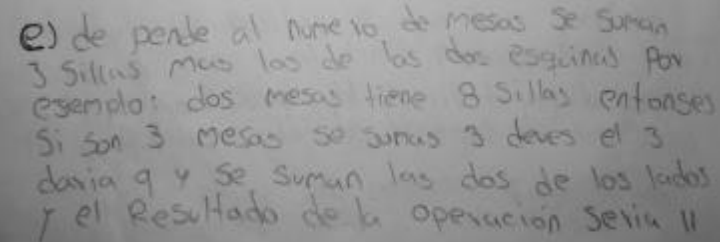
Est.	Evidencia	Razonamiento
IN4_18		<p>El estudiante IN4_18 empieza a establecer una regla inductiva "para construir la fig 6 se necesitan 21 cuadros negros 48 cuadros blancos porque los cuadros negros se aumentan de cuatro y los cuadros blancos se aumentan de ocho. La figura 7 tiene 56 cuadros blancos y 25 negros"</p>
IN4_18		<p>El estudiante IN4_18 continúa depurando su hipótesis inductiva, aunque las cuentas no corresponden "debemos de multiplicar el término que es el número de la figura por el número que aumenta"</p>

Este tipo de razonamiento inductivo se alcanza en menor porcentaje, si bien lo abductivo es general, lo inductivo lo logran solo un cuarenta por ciento de los estudiantes. Generar hipótesis requiere entender el patrón construcción de las secuencias numerales y figúrales y con base en ellas y sin realizar el gráfico lograr contestar las diferentes preguntas. Vemos algunos ejemplos donde se evidenciaron hipótesis elaboradas y efectivas para dar solución a las diferentes Tareas propuestas.

5.3.1.2 Evidencias del razonamiento deductivo. Se espera en esta etapa del proceso que el estudiante logre ir de lo particular a lo general, que logre comprobar su regla emergida de lo abductivo y lo inductivo; no se espera que genere una ecuación, pero sí, que lo exprese con sus propias palabras y logre comprobar que realmente funciona para cualquier término que este hallando.

Intervención uno Tarea uno

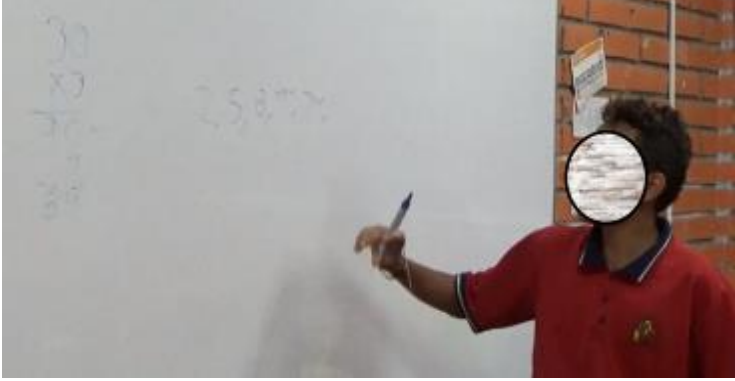
Tabla 25. Análisis a posteriori razonamiento deductivo intervención 1 Tarea 1

Est.	Evidencia	Razonamiento
IN1_9		<p>“De pende al número de mesas. Se suman tres sillas más las de las dos esquinas” y da el ejemplo.</p>

El estudiante IN1_9 evidencia la construcción de una regla de generalización; sin embargo falta precisión al comunicar su regla, le cuesta expresarla en palabras y en símbolos matemáticos, aun utiliza la suma para hacer el conteo.

Intervención uno Tarea dos

Tabla 26. Análisis a posteriori razonamiento deductivo intervención 1 Tarea 2


Est.	Evidencia	Razonamiento
IN1_11	 <p data-bbox="430 808 1161 1050"> <i>IN1_11: Para encontrar la figura treinta, a ese treinta usted lo va a multiplicar por tres que es el número de la secuencia que aumenta entonces el resultado es 90 pero al 90 usted le resta uno y quedaría en 89</i> <i>Profesor: ¿por qué le resto uno? cuénteme</i> <i>IN1_11: porque la secuencia es 2, 5, 8, 11... la secuencia empezó en dos pero aumenta de tres en tres para que cuadre debo restarle 1.</i> </p>	<p data-bbox="1185 430 1463 661">El estudiante IN1_11 evidencia una regla de generalización, la comparte y argumenta frente al grupo “en la secuencia numérica multiplicar por 3 y restar uno”</p>

En la producción matemática de IN1_11 se puede identificar un razonamiento deductivo al utilizar el producto y sin tener claro el concepto de variable logra establecer la regla que refleja la comprensión de las características del patrón; sus procesos de solución evidencian un manejo acertado de la regla.

Intervención dos Tarea dos

Tabla 27. Análisis a posteriori razonamiento deductivo intervención 2 Tarea 2

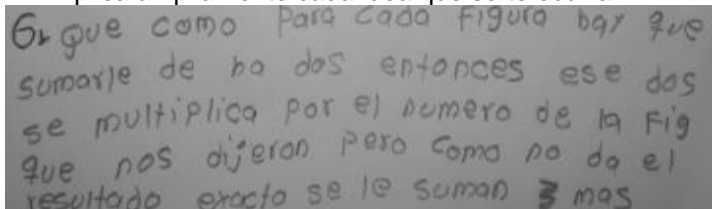
Est.	Evidencia	Razonamiento
	<p data-bbox="422 1579 1169 1606">e. ¿Puedes saber cuál es el término 100 de la secuencia?</p>	<p data-bbox="1185 1606 1463 1848">El estudiante IN2_1 evidencia una regla de generalización, de la secuencia numérica la presenta y argumenta su razonamiento frente al grupo, que está de acuerdo y convencido</p>

IN2_1	 <p>IN2_1: para encontrar el termino 20m de la secuencia multiplicamos por 4 nos da 80 como no nos da entonces tendríamos que restarle 2 y eso nos daría 78</p>	con su argumento "Multiplicamos por 4 y resto dos"
-------	---	--

La estudiante IN1_1 a pesar de haberse ausentado de la intervención en su primera jornada y sin haber solucionado del todo esta intervención, pasa al tablero en la puesta en común y establece la regla que generaliza el patrón.

Intervención tres Tarea uno

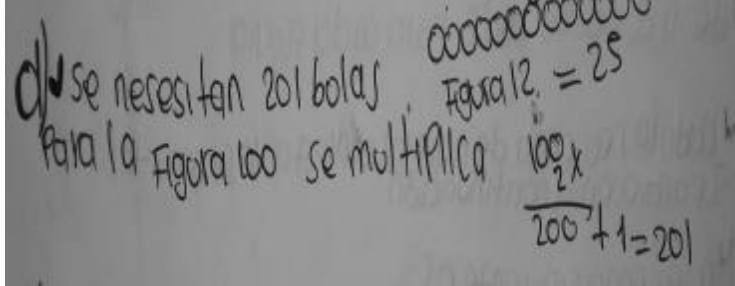

Tabla 28. Análisis a posteriori razonamiento deductivo intervención 3 Tarea 1

Est.	Evidencia	Razonamiento
IN3_10	<p>g. Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo o amiga cuántas bolas tiene cualquier figura de la secuencia. Explica ampliamente cada idea que se te ocurra.</p> 	"Que como para cada figura hay que sumarle de ha dos entonces ese dos se multiplica por el número de la figura que nos dijeron pero como no da el resultado exacto se le suman tres más"

El estudiante IN3_10 muestra una regla de generalización, evidencia un razonamiento deductivo, es de los pocos estudiantes que abordan el ítem g. e intenta producir un texto que explique el procedimiento que generaliza la regla, se ve la dificultad para comunicar por escrito su hallazgo.

Intervención cuatro Tarea tres

Tabla 29. Análisis a posteriori razonamiento deductivo intervención 4 Tarea 3

Est.	Evidencia	Razonamiento
IN4_18	  <p data-bbox="430 1150 1193 1268">IN4_1: Para encontrar el termino 20 las blancas multiplicamos por 8 y sumarle 8 y para el resultado de los cuadros negros multiplicamos por 4 y sumamos 1 entonces tendríamos 168 blancas y 81 negras</p>	<p data-bbox="1222 426 1466 793">El estudiante IN4_18 evidencia una regla de generalización, no la explica pero es fácil de entender su procedimiento “se necesitan 201 bolas para la figura 100 se multiplica $100 \times 2 = 200 + 1 = 201$”</p> <p data-bbox="1222 825 1466 1150">El estudiante IN4_1 evidencia una regla de generalización, de la secuencia geométrica, presenta y argumenta su razonamiento frente al grupo, “blancas x 8 negras x4”</p>

Este pensamiento es aún más escaso, se da un quince por ciento, como se evidencia en el análisis los estudiantes que lo consiguen son los mismos, ellos logran generalizar y en la puesta en común son quienes se atreven a contar que hicieron y como lo hicieron, tienen la aprobación y el reconocimiento del colectivo, cabe anotar que en general se encontró la generalización para todas las secuencias figúrales, y que las secuencias numéricas que no habían trabajado en el diagnóstico, solo la de la última intervención no pudieron encontrar el patrón las demás lo consiguieron.

5.4 COMUNIDAD MATEMÁTICA

Para nadie es un secreto que a los niños la matemática les resulta aburrida y difícil de aprender. Y luego de varios años de estudios, en donde los niños y jóvenes memorizan los casos de factorización, resuelven ecuaciones y las grafican, siempre queda la pregunta: ¿sirve ese conocimiento para la vida cotidiana?

Más que dar una respuesta sobre la utilidad de determinado conocimiento matemático, los profesores deben preocuparse porque los estudiantes realmente entiendan lo que ellos explican y apoyarse en otros campos del conocimiento para llegar a ese fin. Por eso, es importante ayudar a todos los estudiantes a cultivar y desarrollar la lógica, el pensamiento coherente, el orden estético, y la capacidad de abstracción.

El éxito de la enseñanza de las matemáticas radica entonces en innovar en las metodologías más que en el cambio currículos. Ya que los planes curriculares son cosas netamente ministeriales, legislativas y burocráticas que poco ayudan. En otras palabras debemos preocuparnos por innovar, probar nuevos métodos y formular nuevos proyectos.

En este orden de ideas el pensamiento algebraico y los procesos de generalización ofrecen a todos los estudiantes la oportunidad de desarrollar una comprensión de modelos, estructuras y simulaciones, que los lleven a construir conocimiento matemático y las herramientas intelectuales necesarias que propicien procesos de reflexión y análisis crítico.

Por tanto a esta investigación de carácter cualitativo le interesa entender el sujeto en el aula, analizar el rol de los estudiantes y del profesor frente a una Tarea matemática, analizar los procesos de formular, emplear e interpretar las matemáticas como forma de modelar un problema en contexto.

Este proyecto busca dar cuenta del desarrollo temprano del pensamiento algebraico de los estudiantes de séptimo grado a través de la solución de problemas y la conformación de una Comunidad Matemática propuesta por Santos (2007); por ello se centra en generar espacios para que el estudiante pueda desarrollar sus ideas, comunicarlas y exponerlas para ser convalidadas.

En esta metodología se sensibiliza a los estudiantes para respetar la palabra de los compañeros, pero también para sentirse en libertad de expresar sus opiniones sin temor a ser evaluado o reprimido por su maestro o por sus pares, todos los participantes crean conocimiento y en una actitud de respeto, tolerancia y aceptación. Se propicia el trabajo cooperativo donde todos aportan en la construcción del saber y el estudiante es concebido como un sujeto activo que necesita de una comunidad para discutir y comunicar de manera eficaz sus ideas.

Por tanto para el desarrollo de esta investigación se destruye la organización del salón de clases tradicional de formación en hileras, para establecer una nueva organización. De ahora en adelante se sentarán en una doble u, ya no hay primeros ni últimos, teniendo la posibilidad de girar y establecer grupos más pequeños, para intercambiar opiniones, explicar una posición, pedir orientación a un compañero y así establecer y crear su propio conocimiento

Figura 40. Organización del aula de clase antes de las intervenciones



El desarrollo de las intervenciones en esta investigación contemplan tres momentos: el primero consistió en un trabajo individual donde cada estudiante pudo explorar y desarrollar sus hipótesis de solución; como segundo momento se planteó un espacio de trabajo en equipo donde en grupos de cuatro, los estudiantes expusieron sus hipótesis y explicaron a sus compañeros sus razonamientos; este espacio fue ideal para jalonar e igualar la construcción de conocimiento al interactuar con sus pares y esgrimir argumentos buscando convencer o defender su postura, todo esto enmarcado en la ética comunal del respeto por la diferencia. Finalmente para el último momento se empleó la plenaria para socializar los procesos de solución y buscar la convalidación de la comunidad.

Para el análisis de la conformación de la Comunidad Matemática se realizó una selección de los episodios importantes durante todas las intervenciones donde se evidencian los tres momentos trabajados. Los eventos seleccionados van acompañados de capturas en imágenes (fotos) de los instantes en que los estudiantes están trabajando como miembros activos de una comunidad en consolidación.

5.4.1 Primer momento. Trabajo individual. La primera parte de las intervenciones consiste en un trabajo individual, a cada estudiante se le entrega una hoja con las tareas, se les da hojas amarillas para que escriban sus procesos de solución; todos los estudiantes focalizaron su atención en resolver las Tareas propuestas. Como era de esperarse el trabajo inicial generó una serie de dudas, aún se notaba el temor a preguntar; sin embargo pasados unos minutos y luego de aclarar sus inquietudes los estudiantes se familiarizaron con la metodología y asumieron de forma natural esta primera fase.

Figura 421. Trabajo individual intervención uno



Figura 42. Trabajo individual intervención dos



Figura 43. Trabajo individual intervención tres



Figura 44. Trabajo individual intervención cuatro



5.4.2 Segundo momento. Trabajo en equipo. Finalizada la primera fase de trabajo individual y siguiendo las pautas de la comunidad matemática propuesta por Santos Trigo, es de vital importancia la socialización de ideas y el compartir de saberes. Previo a esto se estableció en el aula de clase una ética comunal basada en el respeto. Los estudiantes del grupo como miembros de una comunidad matemática en formación, comprendieron bien el trabajo en comunidad, se escucharon, discutieron, aclararon y consolidaron ideas, principios fundamentales de Santos Trigo para la conformación y consolidación de una Comunidad Matemática en el aula.

Figura 45. Trabajo en pequeños grupos intervención uno



Durante la segunda fase se observó un buen trabajo, los estudiantes discutieron de forma constructiva entre ellos sus procesos de solución; buscaron convencer y convalidar sus hipótesis. Dentro de los grupos cada estudiante explicó y justificó sus argumentos; y a su vez el resto de compañeros escucharon, cuestionaron y refutaron sus hipótesis; de esta forma consolidaron una teoría a nivel grupal para ser expuesta en la siguiente fase; cabe resaltar que la mayoría de grupos lograron unificar sus procesos de solución de las Tareas propuestas.

Figura 46. Trabajo en pequeños grupos intervención dos.



También se resalta que durante este momento se evidenciaron espacios donde los estudiantes explicaron a sus compañeros y a su profesor cómo solucionar la tarea, y los orientaron hacia la solución de las mismas como se pueden observar en las imágenes.

Figura 47. Trabajo en pequeños grupos intervención tres



Figura 48. Trabajo en pequeños grupos intervención cuatro



5.4.3 Tercer momento. Socialización grupal. Con este espacio se busca la consolidación de la comunidad, los estudiantes exponen y sustentan sus teorías para ser convalidadas y de esta forma ir construyendo conocimiento.

En este tercer momento de socialización se evidenció el temor que tiene los estudiantes a enfrentarse al grupo, y este miedo se genera de la concepción que se pasa al tablero para ser evaluado y ajusticiado por las preguntas del docente. Así las cosas, inicia la socialización tímidamente y son escasos los estudiantes que quieren argumentar frente al grupo mientras se toman confianza se inicia la socialización desde la seguridad de su puesto.

Figura 49. Estudiante pidiendo la aceptación de la comunidad matemática



Es indiscutible que en este momento el rol del maestro cambia radicalmente, ya no está en la parte del frente del tablero orientando el trabajo, ahora es un facilitador que propicia la interacción entre los compañeros, maneja los tiempos para abordar la puesta en común; ahora la palabra del profesor es constructiva no la última, porque es el grupo quien aprueba o debate lo propuesto en la plenaria, todo esto sin la presión de la nota.

Figura 50. Estudiante argumentando intervención dos



Se presentaron situaciones donde los estudiantes expusieron argumentos que no fueron validados por la comunidad, en general los estudiantes reconocían que estaba equivocados y aceptaban que la comunidad tenía la razón. Es muy importante socializar los razonamientos para aclarar dudas y reafirmar hipótesis; cabe resaltar que todo este proceso se realizó con la premisa de un ambiente de tolerancia. La comunidad de forma respetuosa explica al estudiante el error que está cometiendo y le pide que compruebe su hipótesis con un ejemplo real; él por su parte acepta y comprende con mucha receptividad el error. Al final todos llegan a un acuerdo en la tarea y pueden construir un conocimiento correcto.

Figura 51. Estudiante argumentando intervención tres

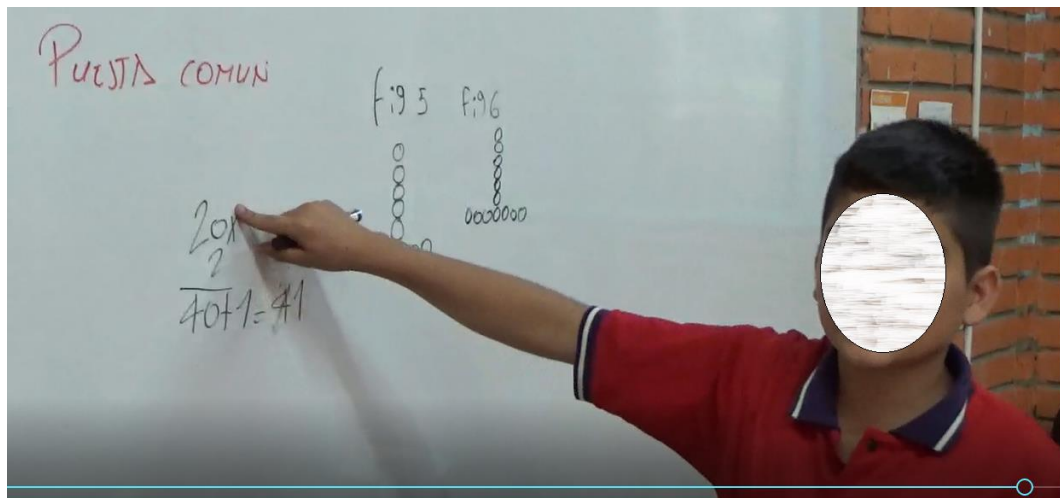


Es claro que la consolidación de la Comunidad Matemática es un trabajo constante que se logra; fue una estrategia motivadora que contribuyó a fortificar muchas de las potencialidades de los estudiantes, así como brindo espacios para explorar la capacidad de análisis de los mismos. Con esta estrategia se desarrollaron importantes procesos cognitivos, así como se estimaron los valores humanos en pro de la tolerancia el respecto y la aceptación por la diferencia.

Figura 52. Estudiante argumentando intervención cuatro



Figura 53. Estudiante comprobando su hipótesis intervención cuatro



5.5 ENTREVISTAS

Para la fase final de la metodología, se realizó una entrevista con los estudiantes que presentaron un notable progreso durante las fase de diagnóstico y la fase de desarrollo de las intervenciones; con la aplicación de la entrevista se busca explorar en detalle la evolución del razonamiento inferencial (abducción, inducción y deducción), así como la forma en que los estudiantes abordan las Tareas.

La entrevista está compuesta por dos Tareas, que permiten que la actividad de los estudiantes pueda dar evidencia de la evolución de sus procesos de razonamiento inferencial. Se busca reportar el significativo avance que los estudiantes alcanzaron, para el desarrollo de la entrevista los estudiantes se organizaron en parejas. El docente, el cual intervenía con preguntas que les permitieron a los estudiantes analizar sus procesos de razonamiento inferencial.

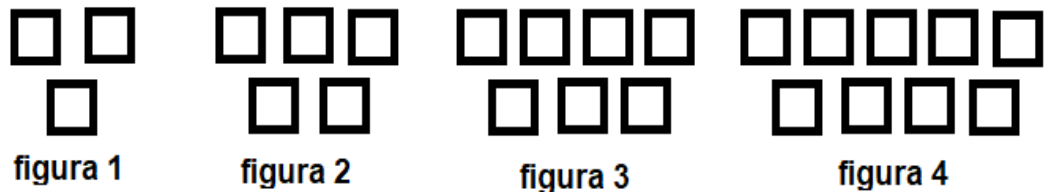
La entrevista fue registrada a través de una video grabación, lo que permitió tener una mejor información y analizar las diferentes expresiones, procedimientos, análisis, conjeturas y estrategias que registraron los estudiantes; el tiempo destinado para cada entrevista fue de 40 minutos; pero algunas parejas terminaron antes. Las entrevistas se realizaron en la sala de profesores para tenerla tranquilidad y privacidad necesaria y evitar interrupciones. Para cada tarea de la entrevista se realizó un análisis a priori.

5.5.1 Análisis a priori tareas de la entrevista

5.5.1.1 Tarea 1

1. Dada la siguiente secuencia de contesta las preguntas que aparecen a continuación:

Figura 54. Secuencia figural entrevista Tarea1



- ¿Cuántos rectángulos tendrá la figura 5 y la figura 6?
- Calcula el número de rectángulos que tiene la Figura 8. Explica la manera como procediste para encontrar la respuesta.
- El profesor Oscar quiere construir la Figura 12. Explícale a él qué debe hacer para construirla.
- Ahora el profesor Oscar quiere construir una Figura grande (figura 100). Explícale al profe qué debe hacer para construirla.

Análisis a priori

Las Tareas de la entrevista fueron propuestas por Vergel⁶⁸. En la primera tarea se espera que los estudiantes analicen que el primer elemento de la secuencia contiene 3 cuadrados, el segundo elemento está conformado por 5, el tercer elemento contiene 7, el cuarto elemento contiene 9 cuadrados; de manera que en cada posición nueva el aumento en cuadros es de 2 cuadros. Luego de comprender el patrón e identificar el número de cuadrados en cada posición el estudiante podría generar una conjetura que lo conduzca a la construcción de una abducción que puede estar en términos espaciales. Esto puede permitirle dibujar los términos quinto y sexto de la secuencia y dar respuesta al inciso a. Dando las explicaciones correspondientes.

Para responder la siguiente pregunta, se espera que el estudiante con base en el análisis anterior organice su hipótesis e inicie la construcción de su regla inductiva

⁶⁸ VERGEL, Op Cit., p. 97

que puede generarse en términos de la relación entre la posición de la figura dentro de la secuencia y la relación creciente de aumento de cuadros.

Tabla 30. Regla deductiva entrevista Tarea 1

Posición	Cuadros
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
⋮	⋮
n	2n+1

Finalmente, se espera que con el análisis realizado hasta el momento y verificado, el estudiante logre comunicar las variaciones y las implicaciones que utilizó. Esto podría permitir que los estudiantes evidenciaran un razonamiento deductivo, por ejemplo al plantear expresiones como: “para encontrar el número de cuadrados multiplico por dos el número de la figura y a ese resultado le sumo dos”, Estas expresiones verbales pueden surgir de las características que de manera perceptual los estudiantes identifican en el patrón que da paso a la construcción de la secuencia.

5.5.1.2 Tarea 2

2 Dada la siguiente secuencia de números contesta las preguntas que aparecen a continuación:

3	5	7	9
Termino 1	Termino 2	Termino 3	Termino 4

- a. Continuando con la secuencia, ¿cuáles son los dos términos 5 y 6? Explica tu respuesta.
- b. ¿Cuál sería el décimo número? Explica tu respuesta.
- c. ¿Un número de la secuencia puede ser el 287? Explica tu respuesta.
- d. ¿Cuál es el número 30 de la secuencia? Explica tu respuesta.

e. ¿Puedes saber cuál es el término 100 de la secuencia?

Análisis a priori

La segunda tarea, presenta una secuencia numérica, se busca que el estudiante identifique el patrón, que caracteriza la formación de los términos dentro de la secuencia.

Inicialmente se espera que el estudiante logre generar una conjetura abductiva que le permita identificar el cambio y la correspondencia de un número a otro. Además de analizar las diferentes relaciones invariantes que presenta la secuencia numérica. Con este análisis se podrá establecer que: “el siguiente número de la secuencia es el resultado del termino anterior más dos”.

Esto puede permitirle al estudiante verificar su regla inductiva, que da paso a la formación de la secuencia numérica y además permite predecir todo número de la secuencia faltante; respondiendo las preguntas a. y b.

Posteriormente para la solución de los siguientes ítems se espera que los estudiantes expresen y describan su regla de formación del patrón que utilizaron anteriormente. Evidenciando una forma de razonamiento deductivo.

Tabla 31. Regla deductiva Intervención 1 Tarea 3

Términos	Regla
1	3
2	5
3	7
4	9
⋮	⋮
n	$2n+1$

Esto les permitirá dar respuesta a las preguntas d. y e.

5.5.2 Análisis de las entrevista. Las entrevistas se realizan en un espacio más tranquilo con solo dos estudiantes, escogidos porque durante las intervenciones se vio un cambio significativo en su actuar y en su manera de razonar frente a la comunidad. Las dos Tareas que enfrentaron en la entrevista una es figural y la otra es numérica, es importante recordar que en el diagnostico la secuencia numeral no la abordaron. Registramos, documentamos con imágenes y transcribimos los aspectos más relevantes para esta investigación.

Entrevista uno:

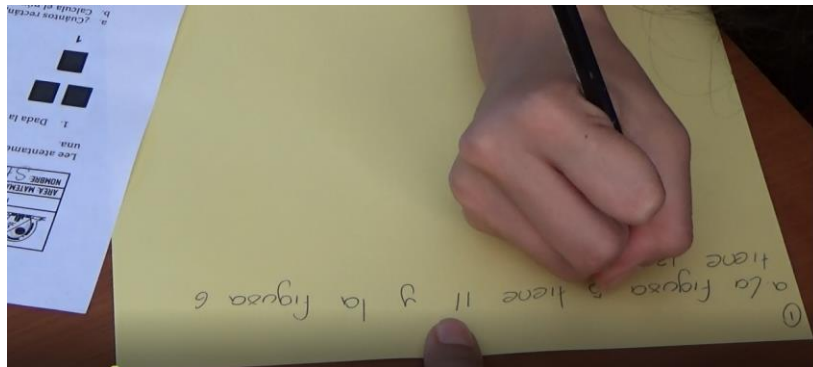
Figura 55. Producción estudiantes entrevista 1



La estudiante ENT_1 y el estudiante ENT_26 se presentan puntualmente a la entrevista, se nota cierto nerviosismo pues no saben aún de que se trata, una vez reciben las instrucciones empiezan a trabajar

La estudiante ENT_1 en la secuencia figural empieza a escribir y se indaga como lo hizo

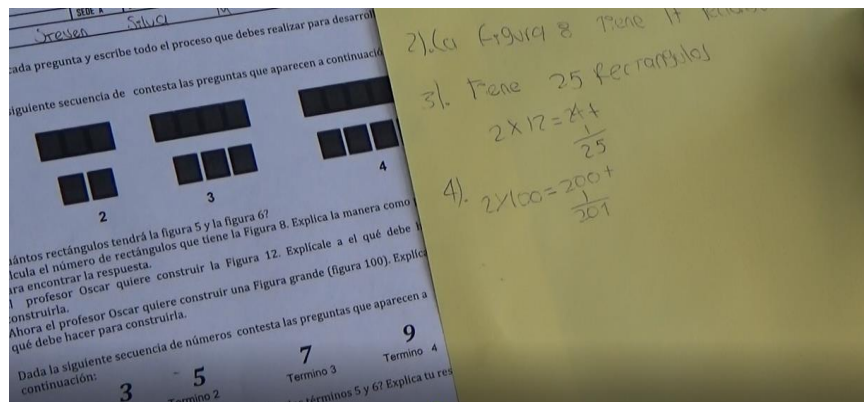
Figura 56. Producción razonamiento inductivo estudiante ENT_1 entrevista 1 Tarea 1



Estudiante ENT_1 “pues porque acá el uno tiene tres el dos tiene 5 el 3 tiene 7 y el 4 tiene 9 entonces va sumando de dos en dos entonces, si quiero la secuencia 5 la multiplico por dos y le sumo uno para que de el resultado” podemos observar que la estudiante ENT_1 está en el nivel de pensamiento inductivo ya no tiene necesidad de realizar las figuras para encontrar los términos próximos de las secuencias, de una vez construye una hipótesis inductiva.

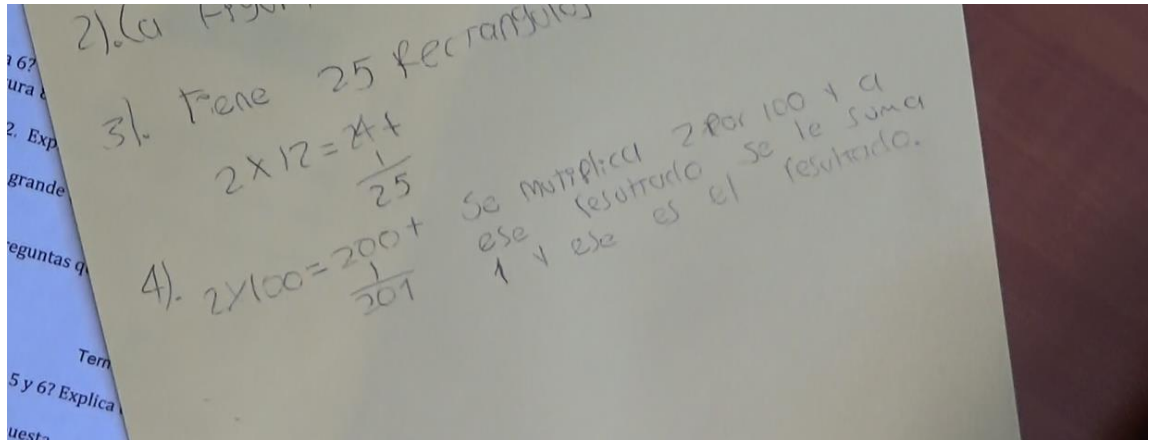
Por otra parte, el estudiante ENT_26 se ha limitado a contestar las preguntas aplicando también una regla inductiva

Figura 57. Producción razonamiento inductivo estudiante ENT_26 entrevista 1 Tarea 1



Se le pide que escriba la regla que está utilizando

Figura 58. Producción razonamiento deductivo estudiante ENT_26 entrevista 1
Tarea 1



Podemos ver que en este momento la regla inductiva se generaliza se ha probado para términos lejanos y ya podemos encontrar cuantos cuadros tiene cualquier figura.

Empiezan el segundo punto y se hace la pregunta ¿qué les parece más fácil la secuencia figural o la numérica?

ENT_1 “Son más fáciles las secuencias numéricas porque ahí uno no tiene que contar todos los cuadritos, sino que ya tiene el número escrito”

ENT_26 “como dijo la compañera que no hay que contarla sino que ya trae el número”

Se pregunta ¿Cómo les pareció que cambio la clase de matemáticas con esto que hicimos?

ENT_1 “pues la verdad mejoro porque pues es ejercicios de tener lógica”

Profesor: ¿y la convivencia?

ENT_26 “pues la convivencia también cambio se vio que los muchachos del salón trabajaban en grupo, se comunicaban bien, ya se entendían y se hablaban bien”

Al dar solución a la entrevista la pareja formada por los estudiantes ENT_1 y ENT_26 logran la generalización de los dos patrones que determinan la secuencia; es interesante ver que con solo analizar la entrevista lanzan una hipótesis inductiva y finalmente mediante la comprobación de las hipótesis generalizan ambos patrones.

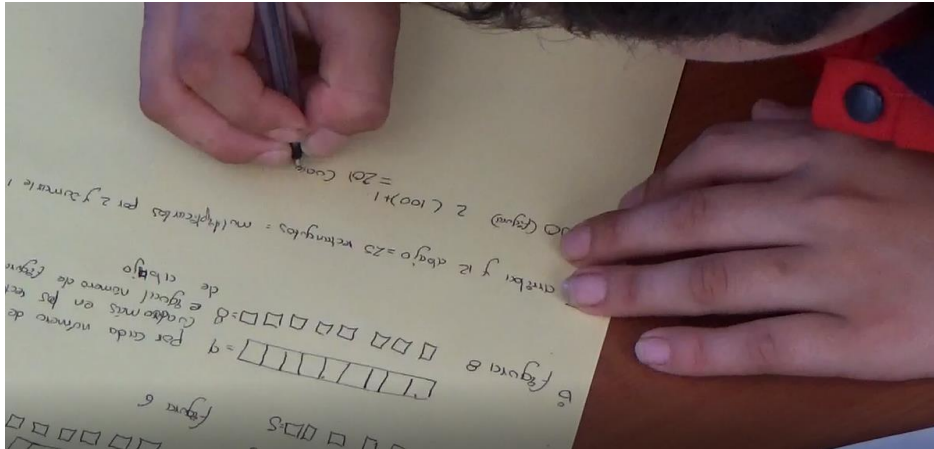
Entrevista dos

Figura 61. Producción estudiantes entrevista 2



Podemos observar que efectivamente el estudiante ha establecido una hipótesis que le permitirá encontrar términos más lejanos de la secuencia.

Figura 64. Razonamiento inductivo estudiante ENT_21 entrevista 2 Tarea 1



El estudiante ENT_24 logra también establecer una regla inductiva “multiplico por 2 el número de la figura y le sumo 1” esto le permitirá encontrar los cuadros de figuras más lejanas.

A la pregunta ¿qué tipo de secuencia le parece más fácil, la figural o la numérica? . El estudiante ENT_24 afirma que la numérica “porque no hay que contar es solo mirar el número”

Se pregunta ¿Cómo les pareció que cambio la clase de matemáticas con esto que hicimos?

Estudiante ENT_24 “me pareció más agradable porque uno podía compartir lo que uno sabia con sus compañeros, si alguna persona no entendía uno pasaba al tablero y contaba y si uno no sabía los que estaban sentados le ayudaban”

La pareja formada por los estudiantes ENT_21 y ENT_24 logran la generalización de los dos patrones, evidencian cada tipo de razonamiento inferencial, aunque no tienen la misma habilidad que los estudiantes anteriores logran generar una hipótesis inductiva y finalmente mediante la comprobación de las hipótesis generalizan ambos patrones.

6. RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación nos planteó retos importantes no sólo en la dimensión teórica, sino también en sus aspectos metodológicos, la articulación de estas dos dimensiones es una fortaleza de este trabajo. Los procesos de razonamiento inferencial y establecer una comunidad matemática en el aula de clase posibilitaron una mirada muy cercana de la actividad matemática de nuestros estudiantes cuando enfrentaron las Tareas sobre secuencias de generalización de patrones.

Estructuramos este capítulo abordando, en primer lugar, la respuesta a nuestra pregunta de investigación. Seguidamente exponemos algunos elementos que nos parecen importantes subrayar en tanto generan reflexiones didácticas en torno a la enseñanza y emergencia de del pensamiento algebraico temprano.

6.1 RESPUESTA A LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La pregunta de investigación que nos planteamos fue: ¿Cómo se caracterizan el razonamiento inferencial (abductivo, inductivo, deductivo) que desarrollan estudiantes con edades comprendidas entre los 12 y 14 años cuando participan como miembros activos de una Comunidad Matemática?

Se encontró que los estudiantes de séptimo grado recurren en su gran mayoría a razonamientos abductivos para determinar y calcular los términos de cada secuencia, muchos de ellos necesitan construir todos los pasos de la secuencia para llegar términos lejanos.

Es necesario trabajar más a fondo en la interpretación de los enunciados de las diferentes preguntas de las tareas, ya que al no comprender es muy difícil plantear

posibles soluciones, en estas condiciones está un cuarenta por ciento de los estudiantes intervenidos.

En la implementación de las intervenciones se encontró que los estudiantes tienen muchas dudas sobre sus razonamientos; están acostumbrados a tener siempre la aprobación o desaprobación por parte del maestro; es por esto que el trabajo en equipo fue el espacio ideal para que al interior del aula se generara una verdadera dinámica de intercambio y construcción de conocimiento entre pares.

Este proyecto permitió evaluar el proceso matemático de los estudiantes mediante el desarrollo de las Tareas y su participación directa en la conformación de la comunidad matemática durante la implementación de las intervenciones. El análisis de las producciones de los estudiantes, así como la observación de los momentos de trabajo grupal y socialización grupal, y el análisis de las entrevistas en la fase final, evidencia que los estudiantes mejoraron sus habilidades en los procesos de solución. De igual forma mejoraron sus razonamientos inductivos para establecer la expresión que generaliza la secuencia; se destaca también que muchos estudiantes aumentaron su nivel de participación y el nivel de propiedad del lenguaje matemático, en las etapas finales ya hablaban en términos de patrones, procesos, relaciones y generalización.

Durante la actividad evidenciamos que algunos de los estudiantes lograron comunicar verbalmente la regla para hallar términos particulares. Sin embargo, en las producciones de los estudiantes se pudo ver que para ellos la comunicación escrita tiene un alto nivel de dificultad, ya que una vez encontrada una regla, se limitaban a hacer las cuentas, por otro lado en el ítem que se le pedía comunicar a un compañero su estrategia generalmente lo dejaban en blanco y cuando lograban escribir, el texto carecía de objetividad y precisión.

Los estudiantes se apropian de su nuevo rol en el aula de clase y trabajan proactivamente para construir su conocimiento. Aunque la simbología algebraica es aun ajena para ellos, logran de maneja literal expresar sus conjeturas acerca de la generalización de algún patrón y argumentar frente al grupo su posición que es validada o rebatida siempre bajo la premisa del respeto y la tolerancia. Es en este compartir que el grupo logra jalonar los procesos de los estudiantes que por alguna razón mostraban aversión o pereza por las actividades diarias de clase y que ahora ven ese trabajo como la oportunidad de aprender y poner en práctica sus habilidades.

El rol del maestro también cambia radicalmente, ya no está frente del tablero siendo el único que posee el conocimiento, ahora: orienta el trabajo, es un facilitador que propicia la interacción entre los compañeros, maneja los tiempos para abordar cada intervención dando la posibilidad del trabajo individual, luego el trabajo en grupos pequeños de discusión y finalmente la puesta en común; la palabra del profesor no es la última porque es el grupo quien aprueba o rebate lo propuesto en la plenaria, todo esto sin la presión de la nota.

Finalmente la evaluación aquí adquiere otro valor, en la medida que desarrollan tareas se logra ver los avances progresivos de los participantes, pierde sentido la nota que aprueba o descalifica. De lo que se trata es determinar cómo se aborda cada Tarea, el tipo de pensamiento que el estudiante logra evidenciar. Además se pone en práctica las competencias básicas ya que al abordar las Tareas el estudiante explora, abstrae, clasifica, mide y estima llegando a resultados que le permiten comunicarse.

7. CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones evidenciadas en los resultados encontrados durante las intervenciones de esta investigación relacionadas con el desarrollo del pensamiento algebraico temprano mediante los procesos de generalización y la implementación de una Comunidad Matemática. La organización de estas conclusiones se hará en dos partes. En la primera parte, se hace referencia al cumplimiento de los objetivos formulados en la investigación; para posteriormente plantear algunas conclusiones generales.

Sobre los objetivos de investigación

El desarrollo del presente trabajo fue orientado por la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo se caracterizan el razonamiento inferencial (abductivo, inductivo, deductivo) que desarrollan estudiantes con edades comprendidas entre los 12 y 14 años cuando participan como miembros activos de una Comunidad Matemática?* Con el fin de dar respuesta a esta pregunta se planteó un objetivo general y cuatro objetivos específicos enfocados al cumplimiento del objetivo general: *Construir una Comunidad Matemática como método para desarrollar una dinámica de resolución y planteamiento de problemas en el aula, que potencie el desarrollo del pensamiento algebraico.*

A continuación se exponen las acciones realizadas durante la investigación que permitieron cumplir con los dos objetivos específicos:

Objetivo específico N° 1: *Diagnosticar las debilidades y fortalezas en los procesos que experimentan estudiantes de 12 a 14 años, al transitar del pensamiento numérico al pensamiento algebraico.* Para el cumplimiento de este objetivo se realizó una prueba diagnóstica compuesta por cuatro Tareas seleccionadas para evaluar el desempeño de los estudiantes de séptimo grado en la solución de

problemas que requieren procesos de generalización. Las Tareas propuesta fueron ejercicios tomados de investigaciones de autores como Vergel, Rivera y Godino, además, del documento Principios y Estándares para la educación matemática; por tanto el desarrollo de los mismos permitió evidenciar el nivel del grupo. En el análisis de esta actividad se pudo concluir que gran parte de los estudiantes en esta etapa escolar utilizan el razonamiento abductivo y dibujan paso a paso cada uno de los términos de la secuencia hasta llegar al término solicitado. Se evidencian dificultades en conceptos básicos matemáticos como suma, y multiplicación que deben ser reforzados. Esta prueba diagnóstica nos deja ver que los estudiantes no reconocen patrones en secuencias numéricas lo que muestra en principio, la importancia de trabajar estos conceptos en los grados anteriores.

Objetivo específico N° 2: *Conformar la Comunidad Matemática que fortalezca el desarrollo del pensamiento algebraico a partir del estudio de patrones numéricos, figurales y figurales con ayuda tabular.* Para el cumplimiento de este objetivo se utilizaron charlas previas de sensibilización orientadas a establecer una ética comunal basada en el respeto y la tolerancia; donde el docente explicó la finalidad de la comunidad, cómo se trabaja en ella y qué beneficios proporciona al proceso de aprendizaje. De igual forma durante el desarrollo de las intervenciones el docente investigador orientó y motivó los estudiantes, como miembros de una Comunidad Matemática, en cada momento de la intervención para que los se animaran a participar mediante el trabajo individual, la construcción de argumentos y la formulación de hipótesis asociadas a su trabajo y el de sus compañeros.

Objetivo específico N° 3: *Promover la construcción y consolidación del pensamiento algebraico, de tal manera que los estudiantes puedan acceder a la construcción de conocimientos más complejos.* Para el cumplimiento de este objetivo se realizó un estudio de algunos trabajos de investigación desarrollados por Ferdinand Rivera en su libro: Teaching and learning patterns in school mathematics (2015); los Principios y Estándares para la educación matemática THALES. S.A.E.M; Rodolfo VERGEL

en su libro *Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano* (2015). Los trabajos de algunos autores que han contribuido a la construcción de la propuesta teórica elaborada por Rivera. Dicho estudio estuvo encaminado a la comprensión de los procesos de generalización, lo cual brindó las herramientas para seleccionar las Tareas propuestas en las sesiones de intervención. Adicional a las Tareas ya mencionadas, se diseñó una entrevista. De esta manera se plantearon e implementaron varias tareas sobre secuencias de generalización de patrones en contextos figurales y numéricos.

Objetivo específico N° 4: *Evaluar el impacto de la estrategia aplicada en el contexto de la Comunidad Matemática*. El cumplimiento de este objetivo se dio a través de una revisión de la fundamentación teórica de la propuesta de Santos Trigo para la conformación de una Comunidad Matemática como estrategia en el aula para desarrollar pensamiento matemático a través de la resolución y el planteamiento de problemas. El desarrollo de las intervenciones se dio en tres momentos los cuales propiciaron el desarrollo individual, el trabajo en equipo y la socialización grupal. Todos estos espacios fundamentaron la construcción de la comunidad en cuanto dieron la oportunidad para revisar, analizar, cuestionar y convalidar hipótesis, bajo un ambiente de respeto y tolerancia.

Para concluir, potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico a partir de procesos de generalización ayudó a destruir el mito que en estudiantes de séptimo grado es común encontrar “si no puedo con la aritmética, mucho menos con el álgebra, que es terrible”. Por esta razón, se diseñó esta propuesta de investigación y estos son los resultados:

La conformación de la comunidad matemática incentivo en los estudiantes el reto por comprender y analizar los procesos de generalización, ella brindó el espacio para que se expusieran las hipótesis y se comprobaran. A partir de esta estrategia se pudieron generar espacios de discusión donde predominó la participación, el

cuestionamiento, la tolerancia y el respeto; la validación de las hipótesis dio una visión más amplia sobre lo interesante, útil y fácil que resulta ser el pensamiento algebraico.

Al abordar los resultados obtenidos en la investigación se resalta la gran variedad de estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver las Tareas propuestas, se evidenció la variedad de actividad matemática que puede generar una tarea.

Al observar la categorización referente a las formas de razonamiento inferencial se observó que un buen número de estudiantes estructuran razonamientos abductivos, para ellos el grafico es esencial para determinar sus procesos de análisis así como la construcción de todos los pasos de la secuencia para determinar términos lejanos.

Durante la entrevista algunas parejas de estudiantes llegaron a realizar altos niveles de comprensión en la solución de las tareas, lo cual evidenció una evolución en el proceso pero durante las intervenciones se pudo observar que este nivel es de gran dificultad para varios estudiantes.

8. RECOMENDACIONES

En términos generales, consideramos que la investigación aporta elementos didácticos y metodológicos que nos permiten repensar los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar y cambiar concepciones erradas de los maestros en cuanto a que el pensamiento algebraico, asociado comúnmente con el trabajo sobre las letras. Se trata entonces de proponer formas alternativas de intervención en el aula de matemáticas que favorezcan la comunicación y la interacción entre pares y el maestro con ánimo de cambiar el paradigma de que los aprendizajes de nuestros estudiantes son memorísticos, mecánicos y descontextualizados específicamente cuando del álgebra se trata.

Es pertinente que el profesor investigador centre la mirada en analizar el desarrollo del pensamiento algebraico asociado a las diferentes representaciones que admiten los objetos matemáticos: gráfica, tabular, numérica, analítica, entre otras. Esto sumado a los resultados evidenciados en esta investigación puede propiciar la evolución continua referente al pensamiento algebraico, relacional y variacional.

9. CONTRIBUCIÓN ACADÉMICA, INVESTIGATIVA

El desarrollo de la propuesta de investigación me permitió hacer un alto en el camino de veinte años de experiencia y evaluar mis saberes, métodos y formas de enseñar. Pude reevaluar la forma y el fondo del acto de enseñar matemáticas, así mismo cambie la mirada que sesga estudiantes a la hora de evaluar, abandonando la subjetividad de la respuesta que quiero escuchar de mis estudiantes y que en muchas ocasiones impide la creatividad de los mismos.

Así mismo, esta experiencia me trajo grandes satisfacciones; con este trabajo fui seleccionado para participar como ponente en Relme 32; el Comité Científico de dicho evento acepto mi trabajo para ser presentado en la modalidad Reporte de Investigación. Cabe resaltar que RELME es un evento internacional que reúne un gran número de investigadores en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, se realiza de manera anual y este año la sede se asignó a la Universidad de Medellín para realizarse en el mes Julio. Por medio de esta participación sé que mi trabajo trascenderá y contribuirá para que se mejore el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Esta investigación en mi institución contribuirá a la mejora de las prácticas por parte de los maestros del área quienes han seguido de cerca el proceso y se han interesado por la metodología empleada implementándola en la cotidianidad de las labores con los estudiantes; al mejorar estas prácticas son los estudiantes quienes más han recibido, no todos los días el maestro cambia su metodología en beneficio del ambiente escolar enmarcado en una ética comunal que propende por el respeto y la tolerancia.

BIBLIOGRAFIA

BALL, Deborah L.; BASS, Hyman. Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. *Yearbook-National Society for the Study of Education*, 1999, vol. 1, p. 193-224.

BOALER, Jo, et al. Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: The case of Railside School. *Teachers College Record*, 2008, vol. 110, no 3, p. 608-645.

BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josip. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En *Investigación en educación matemática XIII*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM, 2009. p. 89-114.

CALLEJO, María Luz, et al. Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. 2016.

CAN, Sergio Damián Chalé; SOTO, Claudia Margarita Acuña. Algunas dificultades que enfrentan los estudiantes al resolver tareas de secuencias algebraicas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav. En https://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:RDFu5VAfSQcJ:https://www.researchgate.net/profile/Sergio_Chale/publication/267336892_algunas_dificultades_que_enfrentan_los_estudiantes_al_resolver_tareas_de_secuencias_algebraicas/links/544d34e10cf2bcc9b1d8e889/algunas-dificultades-que-enfrentan-los-estudiantes-al-resolver-tareas-de-secuenciasalgebraicas+&cd=1&hl=en&ct=clnk&gl=co

CARRAHER, David, MARTINEZ, Mara y SCHLIEMANN, Analúcia. Early algebra and mathematical generalization. 2008 .ZDM, 40(1), 3-22.

CID, Eva; BOLEA, Pilar. Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. *Recuperado de http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/11*, 2007.

CRESPO, Cecilia. Los diálogos de estudiantes: su riqueza para el análisis del discurso matemático escolar. 2010.

CUEVAS, Gustavo y GUARÍN, Sergio. Un análisis del razonamiento inferencial en el proceso de generalización: una mirada de la escuela primaria. Bucaramanga, 2016. Proyecto de Investigación. Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas

DOMINGO, Susana Rodríguez. *Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria*. 2015. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

ENGLISH, Lyn; SRIRAMAN, Bharath. Problem solving for the 21st century. En *Theories of mathematics education*. Springer Berlin Heidelberg, 2010. p. 263-290.

GRACIA, Juan. El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal. Doctoral dissertation, Universidad de La Laguna, Departamento de Análisis Matemático. 1998.

GODINO, Juan y FONT, Vicenç. *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, 2003.

GÓMEZ, Diana y VERGEL, Rodolfo. Generalización de patrones: una reflexión didáctica sobre medios semióticos de objetivación en grado octavo. 2012. p. 240

HIEBERT, James. A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational studies in mathematics*, 1988, vol. 19, no 3, p. 333-355.

IGNACIO, Nuria; NIETO, Lorenzo; BARONA, Eloísa Guerrero. El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de educación*, 2006, vol. 340, p. 551-569

KAPUT, James. Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum. En *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium*. National Research Council, National Academy Press Washington, DC, 1998. p. 25-26.

MEN, COLOMBIA. Lineamientos Curriculares Matemáticas. *Magisterio, Bogotá*, 1998.

MINISTERIO DE EDUCACION, CULTURA Y DEPORTE, marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012 Matemáticas, Lectura y Ciencias, Instituto Nacional de evaluación Educativa, Madrid 2013.

MOLINA, Marta. Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. 2009.

MUNDIAL, Banco. OCDE (2012). *La Educación Superior en Colombia*.

PANIZZA, Mabel; SADOVSKY, Patricia; SESSA, Carmen. La ecuación lineal con dos variables. *Enseñanza de las Ciencias*, 1999, vol. 17, no 3, p. 453-461.

RADFORD, Luis. Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. 2013. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44. doi: <http://doi.dx.org/10.4471/redimat.2013.19>. Citado por: VERGEL, Rodolfo. Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. 2015

RADFORD, Luis. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 2010, vol. 4, no 2, p. 37-62. Citado por: VERGEL, Rodolfo. Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. 2015.

RICO, Luis; SIERRA, Modesto. Didáctica de la matemática e investigación. 2000. en YÁÑEZ, José; GONZÁLEZ, Luis Carlos. *Matemática española en los albores del siglo XXI*. Hergué, pp. 77-131.

RIVERA, Ferdinand. *Teaching and learning patterns in school mathematics*. Springer, 2015.

SOCAS, Martín. Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. 2007.

SOCAS, Martín. La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NUMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 2011. p.77, 5-34.

SCHOENFELD, Alan. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *Colección Digital Eudoxus*. En GROUWS, Douglas A. *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Macmillan Publishing Co, Inc, 1992.

SANTOS TRIGO, Luz Manuel. *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. Trillas, 2007.

SOLER María & AVILA Juan . *Actividades para el desarrollo del razonamiento matemático en estudiantes para profesor*. Asociación Colombiana de Matemática Pasto, 2008

THALES, S. A. E. M. *Principios y Estándares para la Educación Matemáticas*. Sevilla, SAEM Thales, 2003.


VERGEL, Rodolfo. Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. 2015. PNA, 9(3), pp. 193-215.

ANEXOS

Anexo A. Análisis de la prueba diagnóstica


NOMBRE	SETE DGS										1					2					Total %	A%	I%	D%
	A	A	A	I	I	I	A	D	a	A	I	D	D	a	A	I	D	D						
	a	b	c	d	e	f	g	h	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e						
1 AGUILAR CARRILLO STEFANY JULIETH	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	25,22	60,00	30	33,33		
2 ALDANA CHAPETA HANLEMBERG A.	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	54,78	100,00	90	100,00		
3 ARENIZ CAMARON DAMIYA VALENTINA	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	40,87	86,67	80	33,33		
4 AYALA MONTAÑES JHOAN ALEXIS	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	33,91	86,67	50	20,00		
5 BARRIOS DURAN JENNIFER JULIETH	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	28,70	73,33	40	20,00		
6 BARRIOS DURAN JENNIFER JULIETH	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	0,00	0,00	0	0,00		
7 CALDERON SIERRA JUAN DAVID	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	42,61	100,00	80	20,00		
8 CAMPOS MOSQUERA KATIA YRILEY	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	30,43	73,33	40	33,33		
9 CARDENAS VARGAS LUIS MARIO	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	21,74	46,67	40	20,00		
10 CONDE GOMEZ SNEYDER FERNEY	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	44,35	100,00	90	20,00		
11 DIAZ SANCHEZ HAYDER STEVEN	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	33,91	80,00	60	20,00		
12 ESPARZA BASTO BARBARA LUCIA	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	30,43	80,00	30	33,33		
13 HERRERA QUIÑONES BRAYAN	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	39,13	86,67	60	46,67		
14 JIMENEZ ROZO KAREN LORENA	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	30,43	93,33	20	20,00		
15 LOPEZ PIZARRO AMIGIE DANIELA	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	35,65	73,33	80	20,00		
16 MARTINEZ BARRON CARLOS MANUEL	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	47,83	100,00	80	60,00		
17 MONTAÑEZ VILLAMIZAR YURI GABRIELA	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	53,04	100,00	80	100,00		
18 MONTAÑEZ VILLAMIZAR YURI GABRIELA	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	21,74	46,67	30	33,33		
19 PADILLA BUENO JUAN CAMILO	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	44,35	100,00	70	46,67		
20 PARRA OVALLE WILMEN YESID	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	11,30	20,00	20	20,00		
21 PRADA DUARTE ANDRES FELIPE	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	44,35	100,00	80	33,33		
22 RAMUS HEINRICH NANLEY YOHULEY	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	44,35	86,67	90	46,67		
23 RAMUS HEINRICH NANLEY YOHULEY	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	0,00	0,00	0	0,00		
24 RODRIGUEZ ROA RODRIGO JOSE	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	25,22	73,33	20	20,00		
25 SILVA DIAZ WIMAN YULETH	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	40,87	93,33	70	33,33		
26 SILVA MUÑOZ BRAYAN STEVEN	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	0,00	0,00	0	0,00		
27 SOLANO RODRIGUEZ FABER STEVEN	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	46,09	100,00	80	46,67		
28 TRUJILLO PABON NICOL VANESA	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	0,00	0,00	0	0,00		

Anexo B. Prueba diagnóstica



INSTITUCIÓN EDUCATIVA SIBIRAL VIALMADAL

PRUEBA DIAGNOSTICA



Universidad
Nariño de
Santander

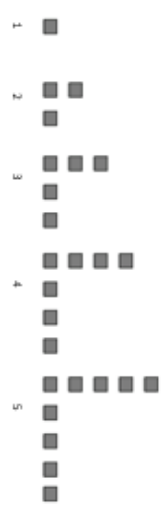
Troncoso del pensamiento numérico al pensamiento algebraico: un análisis de los recursos de una comunidad matemática

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS | **SEDE:** A | **DI:** 37 | **ME:** DA | **ANO:** 2017 | **DESDE:** ESCOLA N° 300000001 A | **HASTA:** ESCOLA N° 300000001 A

NOMBRE: _____ | **ESOD:** _____ | **GRUPO:** 7

Lee atentamente cada pregunta y escribe todo el proceso que debes realizar para desarrollar cada una.

1. Dada la siguiente secuencia de figuras contesta las preguntas que aparecen a continuación:




1 2 3 4 5

- Continuando con el patrón de construcción dibuja la figura 6 y la figura 7.
- ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 6? ¿Cuántos cuadrados la figura 7? Explica tu respuesta.
- ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura 10? Explica tu respuesta.
- ¿Una figura de la secuencia puede estar formada por 25 cuadrados? Si tu respuesta es afirmativa indica qué figura es. Explica tu respuesta.
- ¿Una figura de la secuencia puede estar formada por 80 cuadrados? Si tu respuesta es afirmativa indica qué figura es. Explica tu respuesta.
- ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura 100? Explica tu respuesta.
- Completa la siguiente tabla:

Número de la secuencia	1	3	4	7	9		
Número de cuadrados que conforman la figura	1		7	9			

- h. Escribe cómo se explicaría a tu mejor amigo o amiga cuántos cuadrados tiene cualquier figura de la secuencia. Explica ampliamente cada idea que se te ocurra.
2. En un restaurante solo podemos colocar las mesas en una fila alargada. Averigua el número máximo de personas que se pueden sentar en relación al número de mesas que pongamos



1 mesa
4 sillas

2 mesas
6 sillas

3 mesas
8 sillas

 - ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?
 - ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?
 - En una fiesta se han colocado 18 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado.
 - Si en un cumpleaños se han invitado 42 niños. ¿Cuántas mesas necesitamos colocar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.
 - Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.
3. Dada la siguiente secuencia de números contesta las preguntas que aparecen a continuación:

1 2 3 4 5

23 33 25 80 36

 - Continuando con la secuencia, ¿cuáles son los dos términos 6 y 7? Explica tu respuesta.
 - ¿Cuál sería el décimo número? Explica tu respuesta.
 - ¿Un número de la secuencia puede ser el 87? Explica tu respuesta.
 - ¿Cuál es el número 30 de la secuencia? Explica tu respuesta.
 - ¿Puedes saber cuál es el término 100 de la secuencia?
4. Dada la siguiente secuencia de números contesta las preguntas que aparecen a continuación:

1 2 3 4

7 12 19 28

 - Continuando con la secuencia, ¿cuáles son los dos **quéque** siguientes? Explica tu respuesta.
 - ¿Cuál sería el décimo número? Explica tu respuesta.
 - ¿Un número de la secuencia puede ser el 169? Explica tu respuesta.

Anexo C. Intervención uno



	INSTITUCIÓN EDUCATIVA RURAL VIJAGUAL			Universidad Industrial de Santander
	INTERVENCIÓN UNO			
PENSAMIENTO ALGEBRAICO: UN ANÁLISIS DE LOS MIEMBROS DE UNA COMUNIDAD MATEMÁTICA				
ÁREA: MATEMÁTICAS	SEDE: A	DIA: 02 - MES: 03 - AÑO: 2017	DOCENTE: OSCAR M. SERRANO	
NOMBRE:			EDAD:	GRADO: 7-2

Lee atentamente cada pregunta y escribe todo el proceso que debes realizar para desarrollar cada una.

1. → Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas. Como puedes ver, alrededor de una mesa se han colocado 5 sillas, alrededor de 2 mesas se ha colocado 8 sillas y alrededor de 3 mesas se han colocado 11 sillas.



→ 1 mesa → 5 sillas → 2 mesas → 8 sillas → 3 mesas → 11 sillas



- a. → ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?
 b. → ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?
 c. → En una fiesta se han colocado 22 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado.
 d. → Si en un cumpleaños se han invitado 56 niños. ¿Cuántas mesas necesitaremos colocar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.
 e. → Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.

2. → Dada la siguiente secuencia de números contesta las preguntas que aparecen a continuación:

2, 5, 8, 11, 14, ...

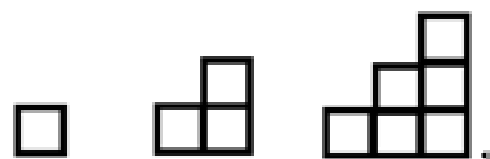
- a. → Continuando con la secuencia, ¿cuáles son los dos términos 6 y 7? Explica tu respuesta.
 b. → ¿Cuál podría ser el décimo número? Explica tu respuesta.
 c. → ¿Un número de la secuencia puede ser el 87? Explica tu respuesta.
 d. → ¿Cuál es el número 30 de la secuencia? Explica tu respuesta.
 e. → ¿Puedes saber cuál es el término 100 de la secuencia?

Anexo D. Intervención dos

		INSTITUCION EDUCATIVA RURAL VIJAGUAL				Universidad Industrial de Santander	
INTERVENCION DOS							
PENSAMIENTO ALGEBRAICO: UN ANALISIS DE LOS MIEMBROS DE UNA COMUNIDAD MATEMATICA							
AREA-MATEMATICAS=		SEDE=A=	DIA= MES= AÑO=	DOCENTE= OSCAR M SERRANO A=			
NOMBRE=				EDAD=		GRADO= 2=	

Lee atentamente cada pregunta y escribe todo el proceso que debes realizar para desarrollar cada una.

1. → Dada la siguiente secuencia de figuras contesta las preguntas que aparecen a continuación:



-----Figura-1-----Figura-2-----Figura-3-----

a. → Continuando con el patrón de construcción dibuja la figura 4 y la figura 5.

b. → ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 9? Explica tu respuesta.

c. → Una figura de la secuencia puede estar formada por 25 cuadrados? Si tu respuesta es afirmativa indica qué figura es. Explica tu respuesta.

d. → ¿Cuántos cuadrados tendrá la figura 100? Explica tu respuesta.

e. → Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo o amiga cuántos cuadrados tiene cualquier figura de la secuencia. Explica ampliamente cada idea que se te ocurra.

2. → Dada la siguiente secuencia de números contesta las preguntas que aparecen a continuación:

2, 6, 10, 14, 18, 22, //

.....1.....2.....3.....4.....5.....6 //

a. → Continuando con la secuencia, ¿cuáles son los dos términos 7 y 8? Explica tu respuesta.

b. → ¿Cuál sería el décimo número? Explica tu respuesta.

c. → Un número de la secuencia puede ser el 87? Explica tu respuesta.

d. → ¿Cuál es el número 30 de la secuencia? Explica tu respuesta.

e. → ¿Puedes saber cuál es el término 100 de la secuencia?

3. → Dada la siguiente secuencia contesta las preguntas que aparecen a continuación:

Anexo E. Intervención tres

		INSTITUCION EDUCATIVA RURAL VIJAGUAL			Universidad Industrial de Santander
		INTERVENCIÓN TRES			
PENSAMIENTO ALGEBRAICO: UN ANÁLISIS DE LOS MIEMBROS DE UNA COMUNIDAD MATEMÁTICA					
AREA-MATEMÁTICAS=	SEDE-A=	DI-24-MES-10-AÑO-2017=	DOCENTE- OSCAR N SERRANO-A=		
NOMBRE=				EDAD=	GRADO-7-2=

Lee atentamente cada pregunta y escribe todo el proceso que debes realizar para desarrollar cada una.

1. → Dada la siguiente secuencia de figuras contesta las preguntas que aparecen a continuación:

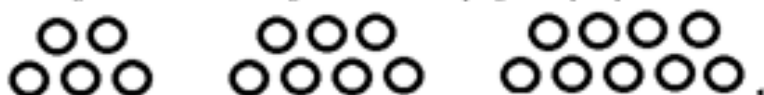


Figura-1 Figura-2 Figura-3

- Continuando con el patrón de construcción dibuja la figura 4 y la figura 5.
- ¿Cuántas bolas tiene la figura 4? ¿Cuántas bolas la figura 5? Explica tu respuesta.
- ¿Cuántas bolas tendrá la figura 10? Explica tu respuesta.
- ¿Una figura de la secuencia puede estar formada por 25 bolas? Si tu respuesta es afirmativa indica qué figura es. Explica tu respuesta.
- ¿Una figura de la secuencia puede estar formada por 80 bolas? Si tu respuesta es afirmativa indica qué figura es. Explica tu respuesta.
- ¿Cuántas bolas tendrá la figura 100? Explica tu respuesta.
- Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo o amiga cuántas bolas tiene cualquier figura de la secuencia. Explica ampliamente cada idea que se te ocurra.



2. → Dada la siguiente secuencia de números contesta las preguntas que aparecen a continuación:

23 • 33 • 25 • 80 • 36

- 1 2 3 4 5
- Continuando con la secuencia, ¿cuáles son los dos términos 6 y 7? Explica tu respuesta.
 - ¿Cuál sería el décimo número? Explica tu respuesta.
 - ¿Un número de la secuencia puede ser el 87? Explica tu respuesta.
 - ¿Cuál es el número 30 de la secuencia? Explica tu respuesta.
 - ¿Puedes saber cuál es el término 100 de la secuencia?

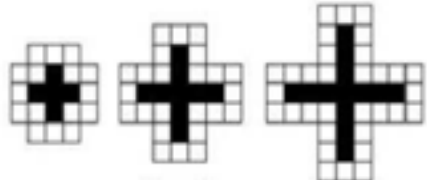
3. → Dada la siguiente secuencia de fósforos contesta las preguntas que aparecen a continuación:

Anexo F. Intervención cuatro

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA - RURAL - VIJAGUAL =				Universidad Industrial de Santander
INTERVENCIÓN CUATRO =					
PENSAMIENTO ALGEBRAICO: UN ANÁLISIS DE LOS MIEMBROS DE UNA COMUNIDAD MATEMÁTICA =					
AREA-MATENÁTICAS =	SEDE-A =	DIA--MES-ID--AÑO--2017 =	DOCENTE--OSCAR-M-SERRANO-A =		
NOMBRE =				EDAD =	GRADO-7-2 =

Lee atentamente cada pregunta y escribe todo el proceso que debes realizar para desarrollar cada una.

1. → Las tres figuras son los primeros términos de una secuencia.



-----Figura-1-----Figura-2-----Figura-3

a. → ¿Cuántos cuadros blancos y negros se necesitan para construir la figura 42?

b. → ¿Cuánto cuadrados blancos y negros tiene la figura 6? ¿Cuántos cuadrados la figura 7? Explica tu respuesta.

c. → ¿Cuántos cuadrados blancos y negros tendrá la figura 20? Explica tu respuesta.

d. → ¿Puedes escribir/explicarle a un compañero una regla que relacione los cuadrados blancos con el número de la figura? Explica tu respuesta.

e. → ¿Puedes explicarle a un compañero una regla que relacione los cuadrados negros con el número de la figura? Explica tu respuesta.

2. → Dada la siguiente secuencia de números contesta las preguntas que aparecen a continuación:

7...12...19...28

→ → → → → 1 → 2 → 3 → 4

a. → Continúa con la secuencia, cuáles son los dos números siguientes. Explica tu respuesta.

b. → ¿Cuál sería el décimo número? Explica tu respuesta.

c. → ¿Un número de la secuencia puede ser el 169? Explica tu respuesta.

d. → ¿Cuál podría ser el número 40 de la secuencia? Explica tu respuesta.

e. → Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo cómo encontrar término 200 de la secuencia.

Anexo G. Asentimiento Informado a estudiantes

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA



ASENTIMIENTO INFORMADO A ESTUDIANTES

Yo, Faber Stiven Solano R. estudiante del grado séptimo dos de la Institución Educativa Rural Vijagual de Bucaramanga, acepto participar voluntariamente en la investigación dirigida por el docente **Oscar Mauricio Serrano Ardila**. He sido informado(a) que el objetivo principal de este estudio es: **Construir una Comunidad Matemática como método para desarrollar una dinámica de resolución y planteamiento de problemas en el aula, que potencie el desarrollo del pensamiento algebraico.**

Me han indicado también que tendré que responder una prueba diagnóstica, participar en las sesiones del proyecto y finalmente contestar una entrevista semiestructurada.

Reconozco que la información que yo provea en el curso de esta investigación es estrictamente confidencial y no será usada para ningún otro propósito fuera de los de este estudio sin mi consentimiento. He sido informado de que puedo hacer preguntas sobre el proyecto en cualquier momento, sin que esto acarree perjuicio alguno para mi persona. De tener preguntas sobre mi participación en este estudio, puedo realizar contacto con quien lo dirige al correo **oscarmeserrano@gmail.com**

Faber Stiven Solano R.

octubre - 09 - 2017

Firma del Participante

Fecha

Anexo H. Consentimiento informado a padres de familia

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA



CONSENTIMIENTO INFORMADO A PADRES DE FAMILIA

Yo Freddy Alberto Aldana Ariza, identificado(a) con cédula de ciudadanía No. 13 723 133 de B/manga, representante legal de Hanembert Alberto Aldana CH, estudiante del grado séptimo dos; he sido informado(a) sobre la participación de mi hijo(a) y/o acudido(a), en la investigación del docente **Oscar Mauricio Serrano Ardila**, de la Maestría en Pedagogía de la Universidad Industrial de Santander, bajo la dirección de la PhD. **SOLANGE ROA FUENTES**. El objetivo de este estudio es: **Construir una Comunidad Matemática como método para desarrollar una dinámica de resolución y planteamiento de problemas en el aula, que potencie el desarrollo del pensamiento algebraico.**

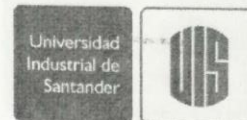
Si usted autoriza la participación del estudiante, a éste se le pedirá responder una prueba diagnóstica, participar en las sesiones del proyecto y responder a una encuesta semiestructurada; todo esto con el fin de transformar el proceso de aprendizaje del estudiante. Tenga en cuenta que las sesiones del proyecto serán grabadas para realizar un análisis del proceso; sin embargo, la información recolectada es confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. Las respuestas serán codificadas usando un número de identificación y, por lo tanto, serán anónimas.

Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento.

Luego de haber sido informado(a) sobre las condiciones de participación del estudiante, entiendo que:

Anexo I. Consentimiento informado a padres de familia

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA



- Los resultados del proyecto de investigación no tendrán repercusiones en las calificaciones o actividades escolares.
- La participación del estudiante no generará ningún gasto, ni recibiré remuneración alguna por su participación.
- No habrá ninguna sanción en caso que no se autorice la participación del estudiante.
- Los videos o grabaciones de las sesiones de clase, serán utilizados únicamente con fines pedagógicos y como evidencia de la práctica educativa del docente.

Atendiendo a la normatividad vigente sobre consentimientos informados (Ley 1581 de 2012 y Decreto 1377 de 2012) y de forma consciente y voluntaria:

DOY EL CONSENTIMIENTO NO DOY EL CONSENTIMIENTO

Desde ya le agradezco su valiosa participación.

Nombre del padre de familia

Freddy Alberto Aldana

Firma del padre de familia

Freddy Aldana

Nombre de mi hijo(a) participante

Hanjembert Alberto Aldana

Fecha:

10 - octubre - 2017

Anexo J. Protecting Human Research Participants.

