RECTAS Y PLANOS PROYECTIVOS SOBRE $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

JULIÁN FELIPE TORRES GUERRERO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2019

RECTAS Y PLANOS PROYECTIVOS SOBRE $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

JULIÁN FELIPE TORRES GUERRERO

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemático

Directora
Claudia Granados Pinzón
Doctora en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2019

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

TÍTULO: RECTAS Y PLANOS PROYECTIVOS SOBRE $\mathbb{R}$ Y $\mathbb{C}$ *

AUTOR: JULIÁN FELIPE TORRES GUERRERO **

PALABRAS CLAVE: ESPACIOS VECTORIALES, ESPACIOS PROYECTIVOS, APLICACIÓN CANÓNICA, REFERENCIAS PROYECTIVAS..

DESCRIPCIÓN:

En este trabajo se define la recta proyectiva sobre un cuerpo de la siguiente manera: en un espacio vectorial con base finita, se consideran las rectas que pasan por el origen, y excluyendo el origen de coordenadas, se define una relación de equivalencia de tal forma que una recta que pase por el origen se convierte en un punto el cual será el representante de la recta. De forma similar se definen los planos proyectivos sobre un cuerpo. Un problema abierto en geometría proyectiva es caracterizar la recta proyectiva sobre anillos. El capítulo tres contiene aspectos importantes de las rectas y planos proyectivos sobre los cuerpos R y C. En particular, mostramos que la recta proyectiva real es una curva diferenciable homeomorfa a la circunferencia unitaria. El plano proyectivo real es una superficie diferenciable no orientable homeomorfa a la esfera unitaria. La recta proyectiva compleja es homeomorfa a la esfera unitaria y se define el plano proyectivo complejo. Los planos proyectivos real y complejo se descomponen cada uno en un subespacio afín y un subespacio proyectivo de menor dimensión. Estos resultados no se encuentran en la bibliografía detalladamente como lo hacemos aquí. Para que este trabajo sea autocontenido agregamos en los capitulos 1 y 2 definiciones y resultados, algunos sin demostración, pero se pueden revisar en los libros fuente.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Directora :Claudia Granados Pinzón, Ph.D en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: : LINES AND PROYECTIVE PLANES ON R Y C [*]

AUTHOR: JULIÁN FELIPE TORRES GUERRERO [**]

KEYWORDS: VECTORIAL SPACE, PROJECTIVE SPACE, CANONIC APPLICATION, PROYECTIVE REFERENCES.

DESCRIPTION:

In this work the projective line on a body is defined as follows: in a vector space with finite base, the lines that pass through the origin are considered, and excluding the origin of coordinates, an equivalence relation is defined in such a way that a line that passes through the origin becomes a point which will be the representative of the line. Similarly, projective planes on a body are defined. An open problem in projective geometry is to characterize the projective line on rings. Chapter three contains important aspects of the lines and projective planes on the R and C bodies. In particular, we show that the real projective line is a homeomorphic differentiable curve to the unit circumference. The real projective plane is a differentiable non-orientable homeomorphic surface to the unit sphere. The complex projective line is homeomorphic to the unitary sphere and the complex projective plane is defined. The real and complex projective planes each decompose into a related subspace and a smaller projective subspace. These results are not found in the bibliography in detail as we do here. For this work to be self-contained we add in chapters 1 and 2 definitions and results, some without demonstration, but can be reviewed in the source books.

---

[*] Bachelor Thesis

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Directora :Claudia Granados Pinzón, Ph.D en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

La importancia de la geometría en la antigüedad se resume en los escritos de Euclides (325 a.C.- 265 a.C.) quien se esforzó en recopilar el trabajo de sus antecesores (Eudoxio, 408 a. C.-390 a. C. y Theteto 410 a.C.-369 a.C.) para así construir una de las más grandes obras del ámbito matemático, $Los\ Elementos$, la cual tiene $XIII$ tomos que son dedicados a Geometría, Álgebra y Teoría de Números [1]. La gran importancia de su publicación radica en que fue el primer tratado que buscaba axiomatizar una teoría matemática, refiriéndose a la Geometría.

Euclides al axiomatizar la geometría, con cinco postulados que cumplían las condiciones de consistencia e independencia [1], revolucionó las matemáticas pues esa construcción permite trabajar la geometría plana de una forma más precisa.
Sin embargo, aplicar dicha geometría no fue lo más significativo de su obra, la principal consecuencia fue el quinto postulado[1], y no sólo por su importancia en el libro, sino porque se puede evidenciar que Euclides no utiliza este axioma sino hasta la demostración de la Proposición 29 del libro I. Esto despertó grandes cuestionamientos en si éste se podría demostrar utilizando los anteriormente planteados.
No obstante, no fue sino hasta el siglo XIX, cuando el matemático alemán David Hilbert, en su obra más famosa $Grundlagen\ der\ Geometrie$, daría la geometría de una axiomática completa. El problema que más puso a trabajar a los matemáticos desde la antigüedad hasta mediados del siglo XIX, fue demostrar independencia de sus axiomas, puesto que a finales del siglo XVII, después de los trabajos de Sasheri (1667-1733), se intentaba demostrar la negación del quinto postulado. De esta for-

[1] El hecho de que por un punto exterior a una recta dada solo se puede trazar una paralela. Esta formulación es la más conocida y es debida al matemático griego Proclo.

ma se encontraron nuevas teorías que se conocen como $geometras\ no\ euclidianas$.

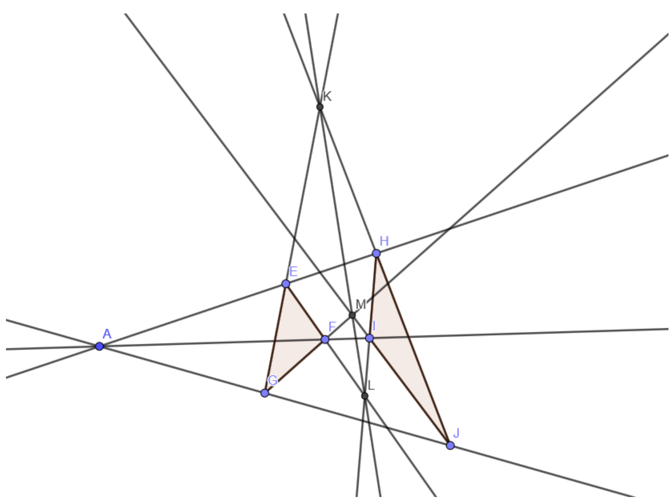
Se podría pensar que la geometría se divide en dos: La euclidiana y las no euclidianas. Sin embargo, existe una teoría más general que se denominó Geometría Proyectiva. Demoró aproximadamente dos siglos para que fueran tomados en cuenta los trabajos de Desargues (matemático francés, 1591-1661, llamado el padre de esta rama), que contenían uno de los teoremas más importantes de dicha geometría, el Teorema de Desargues.
Sin embargo, desde Da vinci (1452-1519), analizando sus pinturas se puede ver que ya utilizaba el concepto de perspectiva para plasmar figuras tridimensionales en el lienzo (plano).
Uno de los matemáticos más emblemáticos de la geometría proyectiva fue Pascal (1623-1662), compatriota de Desargues. Su gran aporte fue su famoso teorema, conocido con su nombre, y al igual con el Teorema de Desargues, son los resultados más representativos de la geometría proyectiva. En síntesis, no se retomó el estudio de esta rama sino hasta el siglo XIX, tiempo en que Gaspar Monge (1746-1818) crea una escuela de geómetras en la Escuela Politécnica de París.
Uno de sus estudiantes más sobresaliente fue Jean-Victor Poncelet (1788-1867), quien en la guerra de Francia contra Rusia, estando como prisionero, estudió cuidadosamente los trabajos de Monge sobre transformaciones geométricas, logró generalizarlas y así empezar a hablar de transformaciones proyectivas.
Como ya se ha mencionado el origen de la geometría proyectiva en el arte data desde las pinturas que se hicieron en el renacimiento, viendo que los pintores más influyentes de la época lograban, plasmar en el plano, figuras en tercera dimensión, en otras palabras, gracias a esta geometría, se empezó a manejar el concepto de persepectiva, como se puede ver en las pinturas de Salvador Dalí, en $La\ Madona\ de\ Port-Lligat$, y Leonardo Da vinci, en $La\ ltima\ cena$.

Algunos expertos sostienen que la geometría proyectiva comenzó con la geometría griega y culminó en la obra de geómetras franceses y alemanes de la segunda mitad del siglo XIX y el primer tercio del XX. Vamos a enunciar los axiomas de incidencia y los dos teoremas de Desargues y de Pappus.

La geometría proyectiva se rige sobre los siguientes axiomas de incidencia, un punto es incidente en una línea si el punto está sobre ella, además una línea es incidente sobre el punto si ésta pasa a través del punto. El cuarto axioma fue dado por Kepler (1571-1630), y el quinto sería la aceptación del Teorema de Desargues, es decir éste será trabajado como axioma;

1. Existe un punto y una línea que no son incidentes.
2. Cada línea es incidente con al menos tres puntos.
3. Dos puntos distintos son incidentes en solo una línea.
4. Dos líneas son incidentes en al menos un punto.
5. Teorema de Desargues: Si dos triángulos se unen por líneas concurrentes, entonces las intersecciones de los correspondientes lados son colineales.

Figura 1. Teorema de Desargues

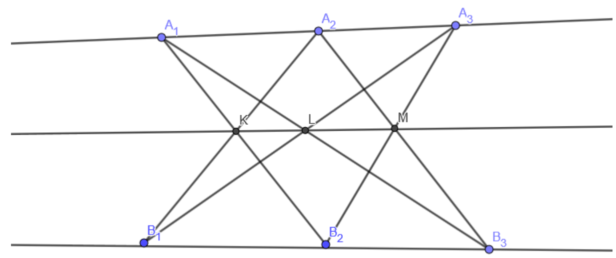


Estos cinco axiomas fueron enunciados en 1899 por Mario Pieri(1860-1913).

El Teorema de Pappus introducido como axioma, permite demostrar todos los teoremas de incidencia sin introducir axiomas métricos. El Teorema de Pappus indica lo siguiente:

Si en un par de rectas se escogen tres puntos al azar en cada una y se unen dos a dos, las intersecciones de las rectas que los unen estarán en una línea recta.

Figura 2. Teorema de Pappus



Un aspecto importante de la geometría proyectiva es que se empieza a introducir el concepto de infinito, de tal forma que el cuarto axioma, garantiza que dos rectas en el espacio proyectivo no serán paralelas, ya que habrá un punto que las interseca, por más que sean paralelas en el espacio afín.

En este trabajo se define la recta proyectiva sobre un cuerpo de la siguiente manera: en un espacio vectorial con base finita, se consideran las rectas que pasan por el origen, y excluyendo el origen de coordenadas, se define una relación de equivalencia de tal forma que una recta que pase por el origen se convierte en un $punto$ el cual será el representante de la recta. De forma similar se definen los planos proyectivos sobre un cuerpo. Un problema abierto en geometría proyectiva es caracterizar la recta proyectiva sobre anillos.

El capítulo tres contiene aspectos importantes de las rectas y planos proyectivos sobre los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. En particular, mostramos que la recta proyectiva real es una curva diferenciable homeomorfa a la circunferencia unitaria. El plano proyectivo real es una superficie diferenciable no orientable homeomorfa a la esfera unitaria. La recta proyectiva compleja es homeomorfa a la esfera unitaria y se define el plano proyectivo complejo. Los planos proyectivos real y complejo se descomponen cada uno en un subespacio afín y un subespacio proyectivo de menor dimensión. Estos resultados no se encuentran en la bibliografía detalladamente como lo hacemos aquí. Para que este trabajo sea autocontenido agregamos en los capítulos 1 y 2 definiciones y resultados, algunos sin demostración, pero se pueden revisar en los libros fuente.

1. Espacios proyectivos

La geometría euclidiana se puede ampliar a la geometría proyectiva con el objetivo de definir con precisión los elementos del infinito. Es decir, se trata de la ampliación de una geometría local a otra más elaborada.

Los elementos del espacio proyectivo y del espacio afín a estudiar, en particular, el espacio vectorial de dimensión n, se comportarán de la siguiente manera: cada recta del espacio afín será un punto en el proyectivo, es decir que un representante de la clase de equivalencia que caracteriza los espacios proyectivos será un punto de la recta proyectada, y equivalentemente, una recta en el espacio proyectivo será un plano en el espacio afín.

1.1. Espacio proyectivo asociado a E

Sean K un cuerpo y E un $K-espacio\ vectorial$ de dimensión n; un $espacio\ proyectivo$ asociado a E, es el conjunto

$$\mathbb{P}(E) = (E - 0)/\sim$$

donde $\sim$ es una relación de equivalencia definida de la siguiente manera:

Sean $v, w \in E$, para todo $v, w \in E$ $v \sim w \Leftrightarrow \exists \alpha \in K^*$ tal que $\alpha v = w$

donde K^* denota $K - \{0\}$. A los elementos de $\mathbb{P}(E)$ se denominarán puntos, y se representan así:

$$P = [v] = \{\alpha v \colon \alpha \in K^*\}.$$

v se llama un representante de P, es claro que éste no es único. En estos espacios se tendrá que una recta que pase por el origen del espacio afín o espacio vectorial de dimensión n, será un punto del espacio proyectivo, y un plano que pase por el origen del espacio afín será una recta en el espacio proyectivo. Además, dadas dos rectas en el espacio proyectivo, veremos que se van a intersecar sin importar como se comporten en el espacio afín.

Se llama aplicación canónica de $E - \{0\}$ sobre $\mathbb{P}(E)$, a la aplicación π,

$$\pi : E - \{0\} \to \mathbb{P}(E); x \mapsto [x].$$

Esta función π es sobreyectiva aunque no es inyectiva.
Si la dimensión del espacio vectorial E es finita $(dim_k E = n)$, se llama dimensión del espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ al entero $n - 1$, y se escribe $dim\mathbb{P}(E)$.

1. Si E es el espacio vectorial nulo $E = \{0\}$ entonces $n = 0$, y por tanto, $\mathbb{P}(E) = \emptyset$ y $dim\mathbb{P}(E) = -1$.

2. Si el espacio vectorial E es una recta, entonces $n = 1$, se tiene que el espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ es un solo punto y $dim\mathbb{P}(E) = 0$.

3. Si el espacio vectorial E es un plano entones $n = 2$, se tiene que la dimensión es $dim\mathbb{P}(E) = 1$ y el espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ se llama recta proyectiva.

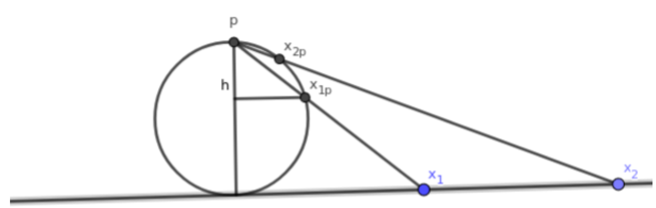
4. Si la dimensión de E es $dimE = 3$, se tiene que $dim\mathbb{P}(E) = 2$ y $\mathbb{P}(E)$ denota el plano proyectivo.

1.1.1. Coordenadas homogéneas Las coordenadas homogéneas fueros definidas por Moëbius hace más de 200 años. Estas coordenadas sirvieron para mostrar que:

1. Un punto tiene infinitas representaciones.
2. Los puntos en el infinito se pueden escribir.
3. Dadas dos rectas, éstas siempre se cortan en un punto.

Se considera el punto $P = (1, 0)$ en el plano $\mathbb{R}^2$, la recta real $y = 0$, y la circunferencia S^1 que pasa por P y el origen, es decir, $S^1 = \{(x, y) : x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}\}$.
Dado un punto x_1 en la recta real, se construye la recta que pasa por x_1 y P, esta intersecará a la circunferencia S^1 en x_{1p}.

Figura 3. Proyección estereográfica de S^1 en $\mathbb{R}$



Por construcción encuentro que

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_{1p}}{h}$$

para todo $x_{1p} \in S^1$. Si $h = 0$, tenemos el punto del infinito. Se llamará (h, x_{1p}) las coordenadas homogéneas del punto $x_1 \in \mathbb{R}$, y $(0, 1)$ son las coordenadas homogéneas del punto del infinito.
Sea $dim_k E = n + 1$ y por lo tanto $dim \mathbb{P}(E) = n$, considere $B = \{e_1, e_2, ..., e_{n+1}\}$ una base de E y π la aplicación canónica de $E - \{0\}$ sobre $\mathbb{P}(E)$

$$\pi : E - \{0\} \to \mathbb{P}(E).$$

Para todo $x \in E^*$ se designa el sistema de coordenadas de x en la base B con $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}) \in K^{n+1}$, se denota como $[\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}]$, tal que

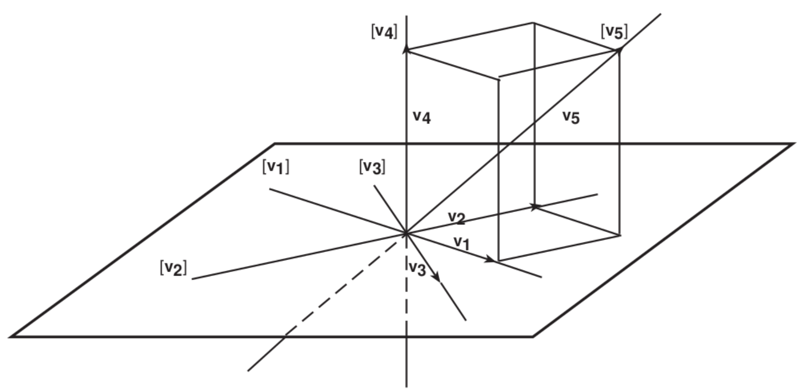
$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_{n+1} e_{n+1}.$$

Entonces $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1})$ recibe el nombre de coordenadas homogéneas del punto $\pi(x)$ con relación a la base B de E. Note que $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}) \neq (0, 0, ..., 0)$.

Veamos las nociones de dependencia e independencia lineal a continuación. Aunque su definición formal se dará en la definición 1.3.4.

Sea $\{P_1, .., P_r\}$ un conjunto que contiene r puntos proyectivos diferentes, se dice que son linealmente dependientes (o ligados) si $P_i = [v_i]$, con $1 \leq i \leq r$ y el conjunto $\{v_1, .., v_r\}$ es linealmente dependiente. $\{P_1, .., P_r\}$ es linealmente independiente (o libre) si $\{v_1, .., v_r\}$ no es dependiente.

Figura 4. Los puntos $\{[v_1][v_2][v_3]\}$ son linealmente independientes, y los $\{[v_1][v_2][v_4]\}$ son independientes, el punto $[v_5]$ depende linealmente de $\{[v_1][v_2][v_4]\}$,



Sea v un reprensentante de P, diremos que v depende linealmente del subconjunto $Q = \{P_i\}_{i \in I} = \{[v_i]\}_{i \in I}$, si y sólo si, el vector v se puede expresar como una combinación lineal de los representantes de los elementos de Q, lo que implicaría que, existen $P_1, ..., P_r$ puntos proyectivos tales que estos dependen linealmente de $\{v_1, .., v_r\}$.

Dados $[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}]$ y $[\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, ..., \bar{\alpha}_{n+1}]$, para que estos se puedan llamar las coordenadeas homogéneas de un mismo punto con relación a la misma base es necesario y suficiente que sean equivalentes, es decir, existe $\lambda \in K^*$ tal que, para todo

$i \in \{1, ..., n+1\}$ se verifica que $\bar{\alpha}_i = \lambda\alpha_i$.

Para dos $x, \overline{x}$ cualesquiera elementos de $E-\{0\}$ se cumple la siguiente equivalencia:

$$\pi(x) = \pi(\bar{x}) \Leftrightarrow (\exists\lambda \in K^*, \bar{x} = \lambda x)$$

1.2. Variedades lineales proyectivas

Sean E un espacio vectorial sobre un cuerpo K y F un subespacio de E; por la aplicación canónica π, la imagen canónica de $F - \{0\}$ recibe el nombre de variedad lineal proyectiva en $\mathbb{P}(E)$. Consideremos el espacio vectorial E, el subespacio vectorial F de E y la relación de equivalencia $\sim$ definida en E, la proposición siguiente muestra que $F - \{0\}/\sim$ es una variedad lineal proyectiva y coincide con el espacio proyectivo $\mathbb{P}(F)$ deducido de F. Toda variedad lineal proyectiva, imagen canónica de un subespacio vectorial $F - \{0\}$, coincide con el espacio proyectivo $\mathbb{P}(F)$ deducido de F.

Si E tiene dimensión finita y $dim_k E = n+1$, se puede ver que cualquier subespacio F es de dimensión finita y $dim_k F = p+1 \leq n+1$. En tal caso, se habla de una variedad lineal proyectiva. Note que si $dim_k F = p+1$, entonces $dim_k \mathbb{P}(F) = p.$

En un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$, recibe el nombre de hiperplano proyectivo toda variedad lineal proyectiva imagen canónica de un hiperplano vectorial.

Si $dim\mathbb{P}(E) = n$, todo hiperplano proyectivo es una variedad lineal de dimensión $n-1$.

El siguiente cuadro resume los ejemplos de variedades lineales proyectivas:

ESPACIO VECTORIAL E	$\rightarrow$	**ESPACIO PROYECTIVO P(E)**
recta vectorial		punto
plano vectorial		recta proyectiva
espacio vectorial de dimensión 3		plano proyectivo
subespacio vectorial de dimensión p		variedad lineal proyectiva de dimensión p-1
hiperplano vectorial		hiperplano proyectivo

La intersección de dos variedades lineales proyectivas es otra variedad lineal proyectiva y además

$$\mathbb{P}(F \cap G) = \mathbb{P}(F) \cap \mathbb{P}(G)$$

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y sean F y G dos subespacios de E.

Note que $\pi(x) \in \mathbb{P}(F)$ es equivalente a que la recta vectorial D_x que pasa por $x \in E$ está contenida en F, luego

$$\pi(x) \in \mathbb{P}(F) \Leftrightarrow D_x \subset F,$$
$$\pi(x) \in \mathbb{P}(G) \Leftrightarrow D_x \subset G.$$

Por lo tanto,

$$\pi(x) \in \mathbb{P}(F) \cap \mathbb{P}(G) \Leftrightarrow D_x \subset F \cap G \Leftrightarrow \pi(x) \in \mathbb{P}(F \cap G).$$

Así

$$\mathbb{P}(F \cap G) = \mathbb{P}(F) \cap \mathbb{P}(G).$$

Note que si A es un subconjunto diferente de vacío de $\mathbb{P}(E)$, entonces como π es sobre, la imagen inversa

$$\pi^{-1}(A) = \{x \in E - \{0\} : \pi(x) \in A\}$$

es diferente de vacío en E.

Para todo $y \in A$, existe $x \in \pi^{-1}(A)$ tal que $y = \pi(x)$ y $D_x \subset \pi^{-1}(A)$.

Por ejemplo, si A es sólo un punto, $A = \{y\}$, entonces $\pi^{-1}(y)$ es una recta en E, $\pi^{-1}(y) = D_x$.

A continuación, la proposición siguiente caracteriza las variedades lineales proyectivas L de $\mathbb{P}(E)$ que contienen a un subconjunto.

Para todo subconjunto A de $\mathbb{P}(E)$, existe una menor variedad lineal L que la contiene. Si F es el subespacio de E generado por $\pi^{-1}(A)$ se verifica $L = \mathbb{P}(F)$. Consideremos las variedades lineales proyectivas L de $\mathbb{P}(E)$ que contienen a A. Entonces

$$A \subset L \Leftrightarrow \pi^{-1}(A) \subset \pi^{-1}(L).$$

El menor subespacio de F tal que $\pi^{-1}(A) \subset F - \{0\}$ es la intersección de todos los subespacios vectoriales de E que contienen a $\pi^{-1}(A)$.

La menor variedad lineal proyectiva que contiene a A es la variedad proyectiva $\mathbb{P}(F)$ que es la imagen de $F - \{0\}$ por π. Cualquier otra variedad lineal proyectiva que contenga a A contiene también a $\mathbb{P}(F)$.

L recibe el nombre de variedad lineal proyectiva generada por A. Se dice también que A es un sistema de generadores de L. Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Suponga que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ son escalares distintos de cero, entonces las familias $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y $\{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n\}$ son linealmente independientes o linealmente dependientes a la vez.

Considere la familia finita $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de vectores de $E - \{0\}$, y un conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K^*$. Sea $B = \{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n\}$, si A es linealmente independiente, entonces cualquiera que sea el conjunto de escalares $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ tales que

$$\rho_1(\alpha_1 x_1) + \rho_2(\alpha_2 x_2) + ... + \rho_n(\alpha_n x_n) = 0 \text{ implica que } \rho_1\alpha_1 = \rho_2\alpha_2 = ... = \rho_n\alpha_n = 0$$

pero como ningún α_i es nulo, se tiene

$$\rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_n = 0.$$

En conclusión, la familia B es linealmente independiente. El recíproco es inmediato; si B es linealmente independiente, entonces también lo es A.

Una familia $\{\pi(x_1), \pi(x_2), ..., \pi(x_n)\}$ de puntos del espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ es libre si la familia $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ es linealmente independiente en E. En caso contrario se llama ligada.

Esta definición no depende de los representantes elegidos para cada clase $\pi(x_i)$ ya que, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, si elegimos $y_i \in \pi(x_i)$, existe $\alpha_i \in K^*$ tal que $y_i = \alpha_i x_i$, y se aplica la proposición 1.3.4.

Se sabe que para una familia $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ sea linealmente dependiente en E, es necesario y suficiente que exista un $i \in \{1, ..., n\}$ tal que x_i pertenece al subespacio generado por los x_j de subindice $j \neq i$. En términos del espacio proyectivo se tiene la siguiente propiedad:

En $\mathbb{P}(E)$, una familia $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ es ligada si y sólo si existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que y_i pertenezca a la variedad lineal proyectiva generada por los y_j tales que $j \neq i$.

El rango de una familia $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de un espacio vectorial $E,$ es la dimensión del subespacio F que es generado por A. En geometría proyectiva: Se llama rango de una familia $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ de $\mathbb{P}(E)$, la dimensión de la variedad lineal proyectiva generada por ella. Si r es el rango de la familia $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de vectores no nulos del espacio vectorial E, entonces $r - 1$ es el rango de

$$\{\pi(x_1), \pi(x_2), ..., \pi(x_n)\},$$

la familia de los correspondientes puntos del espacio proyectivo deducido $\mathbb{P}(E)$.

1.3. Recta proyectiva

Si $dim_k E \geq 2$, dos puntos $a, b \in \mathbb{P}(E)$ son distintos si y sólo si a y b son proyectivamente libres. La variedad generada por ellos es la menor variedad lineal proyectiva que los contiene.

Por dos puntos distintos de $\mathbb{P}(E)$ pasa una y solo una recta proyectiva. Si $\pi^{-1}(a)$ y $\pi^{-1}(b)$ son dos rectas vectoriales $D_{\mathbf{a}}$ y $D_{\mathbf{b}}$ linealmente independientes, y si en E consideramos

$$F = D_{\mathbf{a}} \oplus D_{\mathbf{b}}$$

entonces F es un plano vectorial, y en efecto, $\mathbb{P}(F)$ es una recta proyectiva la cual es la menor variedad lineal proyectiva que contiene a a y b. Dados tres puntos a, b, c de $\mathbb{P}(E)$, para que estos sean una familia proyectivamente libre es necesario y suficiente que los vectores **a,b,c** de $E - \{0\}$ tales que $\mathbf{a} = \pi(a)$, $\mathbf{b} = \pi(b)$, $\mathbf{c} = \pi(c)$, formen una familia linealmente independiente en E. En adelante se denotará en negrilla los elementos de $E - \{0\}$

1.4. Plano proyectivo

Sea $dim_K E \geq 3$, por tres puntos no alineados pasa un único plano proyectivo. Sean a, b, c tres puntos no alineados de $\mathbb{P}(E)$, entonces que $\pi^{-1}(a), \pi^{-1}(b)$ y $\pi^{-1}(c)$ son tres rectas vectoriales $D_{\mathbf{a}}, D_{\mathbf{b}}, D_{\mathbf{c}}$ linealmente independientes; si F es el subespacio de E, generado por $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ se verifica

$$F = D_{\mathbf{a}} \oplus D_{\mathbf{b}} \oplus D_{\mathbf{c}}.$$

F es la suma directa de tres rectas vectoriales que corresponden a los tres puntos dados y $dimF = 3$. Entonces, $\mathbb{P}(E)$ es un plano proyectivo y es la menor variedad lineal que contiene a los tres puntos a, b, c.

Note que, por la Proposición 1.4.1, $\{a, b, c\}$ es proyectivamente libre si y sólo si, cualquiera de los puntos no pertenecen a la variedad lineal generada por los otros dos, es decir, si y sólo si los tres puntos no pertenecen a la misma recta proyectiva.

Sean a y b distintos en un plano proyectivo. Como la recta proyectiva que los contiene es la menor variedad lineal que pasa por los puntos, dicho plano proyectivo contiene a esta recta.
Si dos puntos distintos pertenencen a un plano proyectivo, la recta proyectiva que contiene a estos dos puntos está contenida en el plano proyectivo.

1.5. Hiperplano proyectivo

Consideremos un espacio vectorial E sobre un cuerpo K y su respectivo espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$.
Todo hiperplano proyectivo H es una variedad lineal proyectiva maximal, es decir, no existe variedad lineal proyectiva, distinta de $\mathbb{P}(E)$ y de H, que contenga a H.
Por definición, $\pi^{-1}(H)$ es un hiperplano vectorial en E, así $\pi^{-1}(H)$ es maximal en E.
Por tanto, para cualquier subespacio vectorial F de E,

$$[\pi^{-1}(H) \subset F \text{ y } F \neq \pi^{-1}(H)] \Rightarrow F = E.$$

Por tanto, para toda variedad proyectiva $\mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(E)$;

$$[H \subset \mathbb{P}(F) \text{ y } \mathbb{P}(F) \neq H] \Rightarrow \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E).$$

En consecuencia, no existe variedad proyectiva diferente de $\mathbb{P}(E)$ y de H, que contenga a H. El subconjunto $\{a, H\}$ de $\mathbb{P}(E)$, formada por un hiperplano H y un punto $a \notin H$, genera todo el espacio $\mathbb{P}(E)$. Consecuencia de la Proposición 1.6.1.

1. Si $dim_k E = 2$, se tiene que $\mathbb{P}(E)$ es una recta proyectiva. Luego los hiperplanos y los puntos de $\mathbb{P}(E)$ coinciden.

2. Si $dim_k E = 3$, se tiene que $\mathbb{P}(E)$ es un plano proyectivo. Por lo tanto, los hiperplanos y las rectas proyectivas son los mismos.

3. Si $dim_k E = 4$, entonces $dim\mathbb{P}(E) = 3$. Además los hiperplanos y los planos proyectivos coinciden.

1.5.1. Ecuación de un hiperplano proyectivo Sean E un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y $\mathbb{P}(E)$ el espacio proyectivo deducido de E. Recuerde que una forma lineal sobre un k-espacio vectorial E es una aplicación de E en k.
Sea f una forma lineal sobre E, distinta de la forma nula. El conjunto de los x de $\mathbb{P}(E)$ tales que $f(\mathbf{x}) = 0$ es un hiperplano proyectivo.
Para cualquier hiperplano proyectivo H en $\mathbb{P}(E)$, existe una forma lineal $f \in E^*$ tal que H es el conjunto de los x de $\mathbb{P}(E)$ que verifican $f(\mathbf{x}) = 0.$
La relación $f(\mathbf{x}) = 0$ se dice que es una $ecuacin\ del\ hiperplano\ proyectivo\ H.$ Cualquier otra ecuación de H es de la forma $\alpha f(\mathbf{x}) = 0$ con $\alpha \neq 0$. En un espacio proyectivo, toda recta no contenida en un hiperplano lo corta en un único punto.

1. En consecuencia del Teorema 1.6.3: si $dim\mathbb{P}(E) = 2$, se obtiene el siguiente enunciado:
   dos rectas distintas de un espacio proyectivo de dimensión dos tienen siempre un único punto común.

2. Si $dim\mathbb{P}(E) = 3$, entonces:
   Toda recta no contenida en un plano, en un espacio proyectivo de dimensión tres, corta a dicho plano en un único punto.

En un espacio proyectivo, todo plano no contenido en un hiperplano lo corta en una recta.
En consecuencia, si $dim\mathbb{P}(E) = 3,$ se obtiene el siguiente enunciado:
La intersección de dos planos proyectivos es una recta proyectiva.

1.6. Aplicaciones lineales proyectivas

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Para cualquier aplicación lineal $f \in L_k(E, F)$ se denota N_f el kernel de f. Una recta vectorial $D_{\mathbf{x}}$ que pasa por **x** $\neq 0$, para que no está incluida en N_f, es necesario y suficiente que **x** $\notin N_f$; entonces, **f(x)** $\neq 0$, ya que N_f es un subespacio de E. Ahora se prueba que $f(D_{\mathbf{x}})$ es también una recta vectorial. En efecto, si $f(\mathbf{x}) \neq 0$, entonces

$$y \in D_x \Rightarrow (\exists \lambda \in K; y = \lambda x) \Rightarrow f(y) = \lambda f(x) \in D_{f(x)}.$$

En consecuencia

$$f(D_x) \subset D_{f(x)}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} z \in D_{f(x)} &\Rightarrow [\exists \lambda \in K; z = \lambda f(x) = f(\lambda x)] \\ &\Rightarrow [\exists \lambda \in D_x; z = f(y)] \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$D_{f(x)} \subset f(D_x)$$

En conclusión,

$$f(D_x) = D_{f(x)}.$$

A toda $f \in L_k(E, F)$ queda asociada, por paso a los cocientes, una aplicación g de $\mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(N_f)$ en $\mathbb{P}(F)$, que recibe el nombre de aplicación lineal proyectiva.

$$E - N_f[r]^f[d]^\pi F - \{0\}[d]^{\pi'} \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(N_f)[r]^g \mathbb{P}(F)[]$$

Si f es biyectiva, entonces su asociada g por paso a los cocientes también es biyectiva, y está definida para todo $\mathbb{P}(E)$.

Sean E y F dos k-espacios vectoriales y $f \in L_k(E, F)$. Toda recta vectorial sin el origen, contenida en $E - N_f$, tiene por imagen una recta vectorial sin el origen, contenida en F.

1.7. Referencias Proyectivas

Una base de un espacio vectorial E de dimensión $n+1$ sobre un cuerpo K, define una biyección entre E y K^{n+1}, donde dicha aplicación asigna a cada vector sus coordenadas en la base elegida.

Si consideramos el espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ y $B = \{v_0, ..., v_n\}$ es una base de E, entonces cada elemento de E se puede ver como $x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i$ y a cada punto $[x]$ de $\mathbb{P}(E)$ tiene coordenadas $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{P}(K^{n+1})$. En estas coordenadas, no son únicos los representantes del punto, pero están determinados salvo un factor de proporcionalidad. De esta forma el concepto de base de un espacio proyectivo no es análogo al de espacio vectorial, ya que en $\mathbb{P}(E)$ se trabaja con puntos, conjunto de puntos (rectas, planos) y no hay manera de elegir vectores que los representen.

Para ver esto, si se tiene que $\{P_0, ..., P_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, este conjunto será un conjunto generador de $\mathbb{P}(E)$ ya que cada punto de $\mathbb{P}(v)$ va a depender de este conjunto.

Como definimos antes un sistema de coordenadas homogéneas para todo punto $[x] \in \mathbb{P}(E)$, con relación a una base $B = \{e_1, e_2, ..., e_{n+1}\}$ de E, es un sistema de coordenadas $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1})$ tal que $\pi(x) = [x]$; esto es

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_{n+1} e_{n+1}.$$

Si consideramos otro sistema de coordenadas homogéneas $(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, ..., \overline{\alpha_{n+1}})$ de $[x] \in \mathbb{P}(E)$, existe un escalar $\lambda \in K^*$ tal que, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, se cumple $\overline{\alpha_i} = \lambda \alpha_i$.

La aplicación canónica de E en $\mathbb{P}(E)$ definido por $\pi(x) = [x]$ no es inyectiva, al fijar $n+1$ puntos proyectivamente independientes $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ en $\mathbb{P}(E)$ no determina una base $\{e_1, e_2, ..., e_{n+1}\}$ de E, tal que para todo $i \in \{1, ..., n+1\}$ se verifica que $a_i = \pi(e_i)$. En efecto, si B es una solución, entonces:

$$\lambda B = \{\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, ..., \lambda_{n+1} e_{n+1}\}$$

donde cada $\lambda_i \in K^*$, es otra solución.

Un conjunto de $n+1$ vectores proyectivamente libres de $\mathbb{P}(E)$ no determina una referencia precisa de $\mathbb{P}(E)$, cuando $dim\mathbb{P}(E) = n$. El siguiente teorema garantiza que tomando $n+2$ puntos en $\mathbb{P}(E)$ de manera que cualquier familia de $n+1$ elementos que sean proyectivamente libres es necesario para obtener una referencia proyectiva en $\mathbb{P}(E)$.

En un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$, con $dim\mathbb{P}(E) = n$, para toda familia $\{a_0, a_1, ..., a_{n+1}\}$ de n+2 puntos tal que toda subfamilia de cardinal $n+1$ sea proyectivamente libre, existe siempre una base $B = \{e_1, e_2, ..., e_{n+1}\}$ de E, única salvo una homotecia, tal que:

1. $\pi(e_1) = a_1$, $\pi(e_2) = a_2$,...,$\pi(e_{n+1}) = a_{n+1}$;
2. $\pi(e_1 + e_2 + ... + e_{n+1}) = a_0$

Una referencia proyectiva R de un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ de dimensión n es un conjunto ordenado de $n+2$ puntos,

$$R = \{P_0, ..., P_n; P_{n+1}\}$$

en donde cualesquiera $n+1$ de ellos serán proyectivamente libres.

por el teorema anterior, existe una base $B = \{e_1, e_2, ..., e_{n+1}\}$ de E tal que

$$\pi(e_1) = a_1, \pi(e_2) = a_2, ..., \pi(e_{n+1}) = a_{n+1},$$
$$\pi(e_1 + e_2 + ... + e_{n+1}) = a_0$$

a_0 se llama centro u origen de la referencia proyectiva.

La base B queda definida salvo una homotecia; ya que el sistema de coordenadas homogéneas de cualquier punto de $\mathbb{P}(E)$ con relación a dicha base B está definida salvo un escalar no nulo. Se llama sistema de coordenadas de cualquier punto de $\mathbb{P}(E)$ en la referencia proyectiva $\{a_0, a_1, ..., a_{n+1}\}$ a todo sistema de coordenadas homogéneas $(\alpha_1, \alpha_2, , ..., \alpha_{n+1})$ de dicho punto con la relación a la base $B = \{e_1, e_2, ..., e_{n+1}\}$

1. En la recta proyectiva $(n = 1)$, de tres puntos cualesquiera, distintos dos a dos, conforman una referencia proyectiva

2. En un plano proyectivo (n=2), dada cualquier familia de cuatro puntos, tales que tomando cualesquiera tres de ellos que no estén alineados, estos generan una referencia proyectiva. Se logra una referencia proyectiva considerando un "triángulo"a_1, a_2, a_3, eligiendo el origen a_0 diferente de los lados del triángulo.

3. Si $dim\mathbb{P}(E) = 3$, cualquier conjunto de cinco puntos tales que, tomando cuatro de estos que no sean coplanares, forma una referencia proyectiva. Para que se forme bien se toma un "tetraedro"a_1, a_2, a_3, a_4 y se elige el origen a_0 fuera de sus caras.

1.8. Recta proyectiva. Razón doble

Consideremos el K-espacio vectorial E de dimensión 2, la recta proyectiva $\mathbb{P}(E)$ deducida de E y la aplicación canónica π de $E - \{0\}$ en $\mathbb{P}(E)$.
Sea **a** un vector de E representante de $a \in \mathbb{P}(E)$, es decir, $\pi(\mathbf{a}) = a$.
Cualquier terna $\{a, b, c\}$ de puntos distintos constituye una referencia proyectiva. Así existen dos vectores **a** y **b** que forman una base en E, salvo una homotecia, tales que:

$$\pi(\mathbf{a}) = a; \pi(\mathbf{b}) = b; \pi(\mathbf{a+b}) = c.$$

Así para todo par de referencias proyectivas $\{a, b, c\}$,$\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ existe una única transformación proyectiva $g \in \mathbf{PGL}(E)$, tal que:

$$g(a) = \overline{a}; g(b) = \overline{b}; g(c) = \overline{c}.$$

Si g es deducido de $f \in$ **GL**(E), se tiene en E que:

$$f(\mathbf{a}) = \overline{\mathbf{a}}; f(\mathbf{b}) = \overline{\mathbf{b}}; f(\mathbf{a+b}) = \overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}$$

Dadas dos cuaternas de puntos (a,b,c,d) y (a',b'c',d') de una recta proyectiva $\mathbb{P}(E)$, tales que (a,b,c) y (a',b',c') sean referencias proyectivas de $\mathbb{P}(E)$ y que $d \neq a$ y $d' \neq a'$, para que exista una $g \in$ **PGL**(E) que aplique la primera sobre la segunda, es necesario y basta que exista un escalar $\rho \in K$ tal que $(\rho, 1)$ sea un sistema de coordenadas homogéneas de d en la referencia proyectiva $\{a, b, c\}$ de centro c, y de d' en la referencia proyectiva $\{a', b', c'\}$ de centro c'. El escalar ρ es único.
Dada una cuaterna (a, b, c, d) de puntos de una recta proyectiva $\mathbb{P}(E)$, tales que (a, b, c) sea una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(E)$, con $d \neq a$, recibe el nombre de Razón doble de la cuaterna el escalar $\rho \in K$, dado por

$$\rho = [a, b, c, d],$$

y tal que $(\rho, 1)$ sea un sistema de coordenadas homogéneas de d en la referencia proyectiva $\{a, b, c, d\}$ de centro c. Otra forma de ver la Definición 1.8.1 es que existe una base $\{$**a,b**$\}$ de E tal que

$$\pi(\mathbf{a}) = a; \pi(\mathbf{b}) = b; \pi(\mathbf{a+b}) = c; \pi(\rho\mathbf{a+b}) = d.$$

$[a, b, c, c] = 1$ y $[a, b, c, b] = 0$, si a, b, c, d son distintos, entonces $\rho \neq 0$ y $\rho \neq 1$. Dadas dos referencias proyectivas $\{a, b, c\}$ y $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ en $\mathbb{P}(E)$, la transformación $g \in$ **PGL**(E) que aplica la primera sobre la segunda coincide con la aplicación $m \to \overline{m}$, de $\mathbb{P}(E)$ en sí mismo, que aplica a sobre $\overline{a}$, b sobre $\overline{b}$, c sobre $\overline{c}$ y que satisface la igualdad

$$[a, b, c, m] = [\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{m}].$$

1.8.1. Coordenadas de la razón doble Sea $\{A, B, C\}$ una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(E)$, con centro en γ, y consideremos cuatro puntos a, b, c, d distintos de $\mathbb{P}(E)$, cuyas respectivas coordenadas homogéneas, con relación a la referencia, sean:

$$(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2), (\lambda_3, \mu_3), (\lambda_4, \mu_4).$$

Vamos a calcular en función de las coordenadas, la razón doble $\rho = [a, b, c, d]$.
Sea $\{\mathbf{A,B}\}$ la base de E, única salvo una homotecia, que corresponde a la referencia proyectiva dada:

$$A = \pi(\mathbf{A}), B = \pi(\mathbf{B}), \gamma = \pi(A + B)$$

Si tengo que **a,b,c,d** son representantes en E de los puntos a, b, c, d de $\mathbb{P}(E)$ así existen cuatro escalares k_1, k_2, k_3 y k_4 no nulos tales que

$$\mathbf{a} = k_1(\lambda_1 A + \mu_1 B)$$
$$\mathbf{b} = k_2(\lambda_2 A + \mu_2 B)$$
$$\mathbf{c} = k_3(\lambda_3 A + \mu_3 B)$$
$$\mathbf{d} = k_4(\lambda_4 A + \mu_4 B)$$
$$\mathbf{d} = \rho\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

Se deduce de las tres primeras relaciones, **a+b=c**, que

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = k_3\lambda_3 \quad (1)$$
$$k_1\mu_1 + k_2\mu_2 = k_3\mu_3 \quad (2)$$

y de las ecuaciones (1.1) y (1.2) tenemos que

$$k_4\lambda_4 = \rho k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2,$$
$$k_4\mu_4 = \rho k_1\mu_1 + k_2\mu_2,$$

Ahora se hallará la relación que determina ρ en función de $\lambda_i, \mu_i (i \in \{1, ..., 4\})$ y para hacer esto debemos eliminar los k_i.
Observe que de la relación $\mu_2(1.1) + \lambda_2(1.2)$ tenemos que

$$k_1(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2) = k_3(\lambda_3\mu_2 - \mu_3\lambda_2) \quad (3)$$
$$k_2(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2) = k_3(\lambda_1\mu_3 - \mu_1\lambda_3) \quad (4)$$

De (1.3) y (1.4) obtenemos que

$$k_4(\lambda_1\mu_4 - \mu_1\lambda_4) = k_2(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)$$
$$k_4(\lambda_2\mu_4 - \mu_2\lambda_4) = \rho k_1(\lambda_2\mu_1 - \mu_2\lambda_1)$$

Así escribimos para todo par de subíndices i, j :

$$w_{ij} = det \begin{pmatrix} \lambda_i & \lambda_j \\ \mu_i & \mu_j \end{pmatrix} = \lambda_i\mu_j - \mu_i\lambda_j \quad (5)$$

Como a, b, c, d son distintos: $i \neq j$, entonces $w_{ij} \neq 0$. Se obtiene

$\frac{k_1}{k_2} = -\frac{w_{23}}{w_{31}}$ y $\frac{\rho k_1}{k_2} = -\frac{w_{42}}{w_{41}}$

Por último

$$\rho = \frac{w_{31}}{w_{32}} * \frac{w_{42}}{w_{41}} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_2 \\ \mu_4 & \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_2 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_4 & \lambda_1 \\ \mu_4 & \mu_1 \end{vmatrix}} \quad (6)$$

Consideremos cuatro puntos distintos a, b, c, d distintos dos a dos, de una recta proyectiva $\mathbb{P}(E)$ y sea $\rho = [a, b, c, d]$. Entonces

1. $[b, a, d, c] = [c, d, a, b] = [d, c, b, a] = \rho$

2. $[a,b,c,c] = [a,a,c,d] = 1$, $[a,b,a,d] = [a,b,c,d] = 0$= $[a,b,c,a] = [a,b,b,d] = \infty$

3.

$$[a,b,d,c] = [c,d,b,a] = [d,c,a,b] = [b,a,c,d] = \frac{1}{\rho}$$

$$[a,c,b,d] = [d,b,c,a] = [b,d,a,c] = [c,a,b,d] = 1-\rho$$

$$[a,c,d,b] = [b,d,c,a] = [d,b,a,c] = [c,a,b,d] = \frac{1}{1-\rho}$$

$$[a,d,b,c] = [c,b,d,a] = [b,c,a,d] = [d,a,c,b] = \frac{\rho-1}{\rho}$$

$$[a,d,c,b] = [b,c,d,a] = [c,b,a,d] = [d,a,b,c] = \frac{\rho}{\rho-1}$$

1. $[b,a,d,c] = \dfrac{\begin{vmatrix}\lambda_4 & \lambda_2\\ \mu_4 & \mu_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_1\\ \mu_3 & \mu_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_4 & \lambda_1\\ \mu_4 & \mu_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_2\\ \mu_3 & \mu_2\end{vmatrix}} = [c,d,a,b] = \dfrac{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_4\\ \mu_2 & \mu_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_4\\ \mu_1 & \mu_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_2 & \mu_3\end{vmatrix}} = \rho;$

   $[d,c,b,a] = \dfrac{\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_4\\ \mu_2 & \mu_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_3\\ \mu_1 & \mu_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_2 & \lambda_3\\ \mu_2 & \mu_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_4\\ \mu_1 & \mu_4\end{vmatrix}} = \rho;$

   Por tanto $[a,b,c,d] = [b,a,d,c] = [c,d,a,b] = [d,c,b,a] = \rho.$

2. $[a,b,c,c] = \dfrac{\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_1\\ \mu_3 & \mu_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_4 & \lambda_1\\ \mu_4 & \mu_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_1\\ \mu_3 & \mu_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_4 & \lambda_1\\ \mu_4 & \mu_1\end{vmatrix}} = [a,a,c,d] = \dfrac{\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_1\\ \mu_3 & \mu_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_2\\ \mu_3 & \mu_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_2\\ \mu_3 & \mu_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_3 & \lambda_1\\ \mu_3 & \mu_1\end{vmatrix}} = 1;$

$$[a,b,a,d]=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_3&\lambda_3\\\mu_3&\mu_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_4&\lambda_2\\\mu_4&\mu_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_3&\lambda_2\\\mu_3&\mu_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_4&\lambda_3\\\mu_4&\mu_3\end{vmatrix}}\ [a,b,c,b]=\frac{\begin{vmatrix}\lambda_3&\lambda_1\\\mu_3&\mu_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_4&\lambda_4\\\mu_4&\mu_4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda_3&\lambda_4\\\mu_3&\mu_4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_4&\lambda_1\\\mu_4&\mu_1\end{vmatrix}}=0;$$

$[a,b,c,a]=[a,b,b,d]=\infty=$, por la primera propiedad (1) tenemos ocho igualdades para $1,0$ e ∞.

(2) por la observación 1.8.1

3. Como la razón doble no depende de la referencia si $[a,b,c,d]=\rho$ y elegimos $\{A,B,C\}$ como referencia, D tiene coordenadas $[\rho,1]$ $A=[1,0],B=[0,1]$ y $C=[1,1]$. Así

$$[a,b,d,c]=[c,d,b,a]=[d,c,a,b]=[b,a,c,d]=\frac{\begin{vmatrix}1&\rho\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&\rho\\1&1\end{vmatrix}}=\tfrac{1}{\rho}.$$

$$[a,c,b,d]=[d,b,c,a]=[b,d,a,c]=[c,a,b,d]=\frac{\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&\rho\\1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&\rho\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}}=1-\rho.$$

$$[a,c,d,b]=[b,d,c,a]=[d,b,a,c]=[c,a,b,d]=\frac{\begin{vmatrix}1&\rho\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&\rho\\1&1\end{vmatrix}}=\tfrac{1}{1-\rho}.$$

$$[a,d,b,c]=[c,b,d,a]=[b,c,a,d]=[d,a,c,b]=\frac{\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\rho&1\\1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\rho&0\\1&1\end{vmatrix}}=\tfrac{\rho-1}{\rho}.$$

$$[a,d,c,b]=[b,c,d,a]=[c,b,a,d]=[d,a,b,c]=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\rho&0\\1&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\rho&1\\1&1\end{vmatrix}}=\frac{\rho}{\rho-1}.$$

1.9. Ejemplos de espacios proyectivos

Se presentan a continuación algunos ejemplos de espacios proyectivos:
El conjunto de rectas afines que pasan por el origen de coordenadas $\mathbb{R}^2-\{O\}$ tal que O representa el origen de $\mathbb{R}^2$, se dotará de estructura de espacio proyectivo así:

$$\phi:\mathbb{R}^2-\{O\}\to\mathbb{P}^1(\mathbb{R}),\ \phi(s)=[v]\Leftrightarrow v \text{ tiene la dirección de s}$$

donde ϕ es la aplicación canónica.
Una forma de visualizar este espacio sería analizando que cuando se corta $\mathbb{R}^2-\{0\}$ con una recta r que no pasa el origen O, así se obtiene la siguiente aplicación:

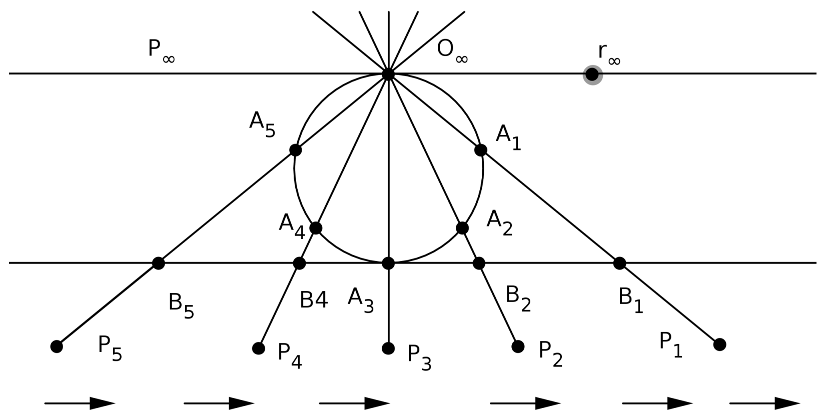
$$r\to\mathbb{R}^2-\{O\}.$$

en donde cada elemento B le corresponde la recta $\overrightarrow{OB}$, que va desde el origen hasta B. Al componer esta aplicación con ϕ, genera de nuevo otra aplicación de la forma

$$r\to\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

que asigna a cada $B\in r$, el punto $[\vec{OB}]\in\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Figura 5. Proyección estereográfica



Esta función se caracteriza porque es inyectiva pero no sobre, esto se puede observar analizando que el punto del infinito P_∞ correspondiente a la recta paralela de $\overrightarrow{rO}$ no pertenece a la imagen de la aplicación y se tendría que:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \quad = \quad r \cup P_\infty \tag{7}$$

Así se concluye que:

- Si $P_1 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, y fijando un sentido de recorrido, al iniciar el camino a lo largo de este espacio, observando la trayectoria del punto r, se tiene que éste se va hacia el infinito, y apenas lo alcance, sin que el hecho se aprecie en $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ volverá al sitio de partida.

- Si k es un cuerpo finito cualquiera, (1.7) se transforma

$$\#(\mathbb{P}^1(K)) = 1 + \#(K)$$

Es decir, $\mathbb{P}^1(K)$ añade un $punto\ del\ infinito$ a la recta afín. .

- Sea S una circunferencia que pasa por el origen y además es tangente a una recta r, se define la siguiente aplicación:

$$\psi : S \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \psi(A) = [\overrightarrow{OA}], \forall A \neq 0, \psi(0) = r_\infty \text{ (paralela a } r)$$

  la cual dota a S de estructura de espacio proyectivo.

Consideremos el conjunto de anillos de polinomios entre variables $K[x_0, x_1, x_2]$ homogéneos de grado d:

$$P(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i_0+i_1+i_2=d}(P_{i_0,i_1,i_2} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2})$$

$K[x_0, x_1, x_2]$ forman un K-espacio vectorial de dimensión $\binom{2+d}{d}$, denotado por $\mathbb{S}_{2,d}$ y su espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{S}_{2,d})$ se denomina espacio de $d-formas$ en 3 variables. Por ejemplo, si $d = 1$ las $1 - formas$:

$$[a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2] = \{aa_0x_0 + aa_1x_1 + aa_2x_2 = 0 : a \in K^* \text{ y } (a_0, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)\}$$

se pueden identificar con los hiperplanos de K^3, ya que cada hiperplano vectorial de K^3 tiene una ecuación en la referencia canónica

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$$

y dos hiperplanos coinciden si y sólo si sus ecuaciones son proporcionales, es decir, representan la misma $1 - forma$. Entonces $\mathbb{P}(S_{2,1})$ es el espacio de hiperplanos de K^3.

Para más detalles de este ejemplo se puede leer en $[2]$.

Fijando una referencia cartesiana en $\mathbb{R}^2$, se representarán las circunferencias, en esta referencia la ecuación de una circunferencia es

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,\ a^2 + b^2 - 4c > 0$$

y la familia de ecuaciones $\gamma(a_0x^2 + a_0y^2 + a_1x + a_2y + a_3) = 0, \gamma \neq 0$, también las llamaremos circunferencias ya que podemos multiplicar la primera ecuación con un número real no nulo. El conjunto Γ de circunferencias es un conjunto de clases de ecuaciones.

Además, se puede identificar cada clase de ecuaciones con el conjunto de sus soluciones. Γ contiene a todas las circunferencias usuales pero también va a contener circunferencias imaginarias $x^2 + y^2 + 1 = 0$; las rectas $ax + by + \alpha = 0$, y $\emptyset$ cuando 1=0.

Ahora, para poder tratar Γ como espacio proyectivo, se define la terna (Γ, ψ, V) con

$$\psi(\gamma(a_0x^2 + a_0y^2 + a_1x + a_2y + a_3)) = [a_0, a_1, a_2, a_3]$$

donde $V = \mathbb{R}^4$.

2. Variedades diferenciales

En esta sección se definen homeomorfismos entre espacios topológicos, con el objetivo de mostrar equivalencias entre esferas y espacios proyectivos, hacemos uso especialmente de la proyección estereográfica. Además vamos a mostrar la no orientabilidad del plano proyectivo real encontrando un subconjunto homeomorfo a la banda de Moëbius.

2.1. Espacios topológicos

Sea X un conjunto. Una colección τ de subconjuntos de X tales que

1. el conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto X pertenecen a τ,
2. si $A, B \in \tau$, entonces $A \cap B \in \tau$,
3. la unión de cualquier familia de elementos de τ pertenecen a τ

es una topología sobre X. Los elementos de la colección τ se llaman conjuntos abiertos y la pareja (X, τ), o simplemente X si no cabe duda sobre cuál es la colección τ, se llama espacio topológico.

1. Si X es un espacio métrico, la topología generada por la colección de todas las bolas es una topología sobre X que se llama la topología métrica o la topología generada por la métrica. Los espacios métricos son una importante clase de espacios topológicos. La topología usual sobre $\mathbb{R}$, y en general sobre $\mathbb{R}^n$, es la topología generada por la métrica usual.
   Si la topología sobre un espacio X está generada por una métrica decimos que X es un espacio metrizable.

2. Sea X un conjunto cualquiera. La colección $P(X)$ de todos los subconjuntos de X es una topología sobre X que recibe el nombre topología discreta. El espacio $(X, P(X))$ se llama espacio discreto. Nótese que esta topología está generada por la métrica discreta sobre X.

3. Sea X un conjunto cualquiera. La colección $\{\emptyset, X\}$ es una topología sobre X que se llama topología trivial o topología grosera. El espacio X con esta topología es un espacio trivial o espacio grosero.

La colección $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ es la topología de Sierpinski sobre el conjunto $X = \{0,1\}$. El espacio (X, τ) se llama el espacio de Sierpinski.
Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es continua si $f^{-1}(O)$ es un conjunto abierto en X para cada conjunto abierto O de Y.

1. Si $f : X \to Y$ es una constante de valor k, entonces f continua. En efecto, si O es un subconjunto abierto de Y entonces $f^{-1}(O)$ es X o $\emptyset$, dependiendo si k es o no un elemento de O. En cualquier caso $f^{-1}(O)$ es abierto en X.

2. Si X es un espacio discreto, cualquier función con dominio X es continua.

3. Si Y es un espacio grosero, es decir si los únicos subconjuntos abiertos de Y son $\emptyset$ y el mismo Y, entonces toda función con codominio Y es continua.

Si (X, τ) y (Y, μ) son espacios topológicos, si $f : X \to Y$ y si B es una base para una topología de Y podemos hacer las siguientes observaciones:

1. Si f es continua, entonces $f^{-1}(B)$ es abierto en X para cada $B \in B$.

2. De manera recíproca, si $f^{-1}(B)$ es abierto en X para cada $B \in Y$ y O es un subconjunto abierto de Y, entonces $O = \bigcup_{i \in I} B_i$ para alguna familia $\{B_i\}_{i \in I}$ de elementos de Y, luego

$$f^{-1}(O) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(f^{-1}B_i)$$

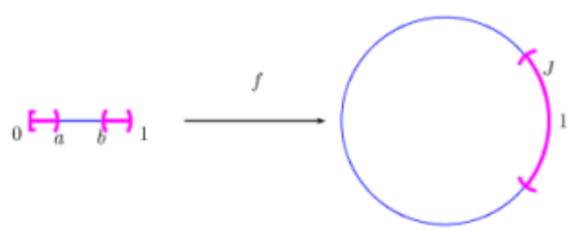
es abierto en X.

Las observaciones anteriores nos permiten concluir que una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si la aplicación imagen inversa de f aplica elementos básicos de la topología de Y en subconjuntos abiertos de X.

Se considera el intervalo $[0, 1)$ con la topología inducida de la topología usual de $\mathbb{R}$ y se denota con $C = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = 1\}$ a la circunferencia compleja, con centro en el origen y radio 1. Se define la función $f : [0, 1) \to C$ por $f(x) = e^{2\pi ix}$

Veamos que f que es una función continua.

Figura 6. $f\ es\ continua$



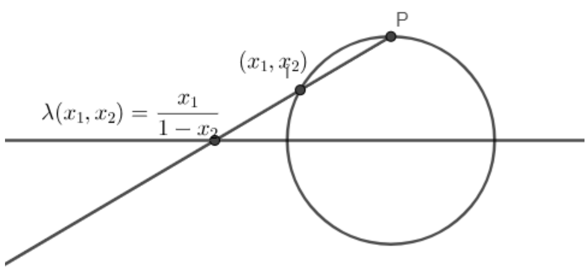
El conjunto formado por todos los segmentos abiertos de la circunferencia es una base para la topología de C. Sea J un segmento y además no contiene al número complejo 1, se tiene que $f^{-1}(J)$ es un intervalo abierto (a, b) tal que $0 < a < b < 1$, así $f^{-1}(J)$ es abierto en $[0, 1)$. Por otro lado, si $1 \in J$, entonces $f^{-1}(J)$ es de la forma $[0, a) \cup (b.1)$ con $0 < a < b < 1$ y este también es un abierto en $[0, 1)$. Así, f es continua. S^1 con la topología heredada de $\mathbb{R}^2$ es un espacio topológico.

S^2 con la topología heredada de la topología usual de $\mathbb{R}^3$ es un espacio topológico.

2.2. Homeomorfismos

Sean $P = (0.1) \in \mathbb{R}^2$ $S^1 = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ y consideremos la siguiente proyección estereográfica $\lambda : S^1 - \{P\} \to \mathbb{R}$, ; $\lambda(x_1, x_2) = \frac{x_1}{1-x_2}$. Esta función es continua, uno a uno, sobreyectiva, y además su inversa $\lambda^{-1} : \mathbb{R} \to S^1 - \{P\}$, definida por $\lambda^{-1}(x) = (\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1})$ también es una función continua. Además permite pasar de $S^1 - \{P\}$ a $\mathbb{R}$, por la función f, es decir, si conocemos la topología de un espacio, conocemos la topología del otro espacio.

Figura 7. Proyección estereográfica de S^1 en $\mathbb{R}$



Un homeomorfismo es una función $F : A \to B$ entre dos espacios topológicos A, B tal que F es continua y la inversa $F^{-1} : F(A) \subset B \to A$ también es continua. Si existe $F : A \to B$ decimos que los espacios A y B son homeomorfos. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función sobreyectiva y estrictamente creciente (esto significa que si $x < y$ entonces $f(x) < f(y)$), se tiene entonces que f es un homeomorfismo. En efecto, como f es estrictamente creciente, f es uno a uno. Además, si $w < z$ se tiene $f^{-1}(w) < f^{-1}(z)$. Ahora sean $a < b$, se encuentra que:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(a, b) &\Leftrightarrow f(x) \in (a, b) \\ &\Leftrightarrow a < f(x) < b \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(a) < x < f^{-1}(b) \\ &\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(a), f^{-1}(b)) \end{aligned}$$

Así $f^{-1}(a,b) = (f^{-1}(a), f^{-1}(b))$. Esto muestra que f es continua. Con un procedimiento similar se muestra que f^{-1} es una función continua.
Es claro que una función continua $f : X \to Y$ es un homeomorfismo si y sólo si existe una función continua $g : Y \to X$ tal que g es la inversa de f. Es decir, $g \circ f = I_x$ y $f \circ g = I_y$ donde I_x e I_y son las funciones identidad de X y Y respectivamente.
Cabe notar que si una función f^{-1} es continua es equivalente a decir que f envía conjuntos abiertos en conjuntos abiertos, o que f envía conjuntos cerrados en conjuntos cerrados.

Si X y Y son espacios topológicos y $f : X \to Y$ es una función uno a uno y sobreyectiva, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es un homeomorfismo.
2. Si $A \subset X$, entonces $f(A)$ es abierto en Y si y sólo si A es abierto en X.
3. Si $K \subset X$, entonces $f(K)$ es cerrado en Y si y sólo si K es cerrado en X.
4. Si $M \subset X$, entonces $f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$.

La relación ser homeomorfos es una relación de equivalencia. Esto significa que se puede ver a los dos espacios topológicos como el mismo espacio. La relación ser homeomorfos permite conocer un espacio topológico por sus características más especiales y no sólo por los nombres de sus elementos. Estas características especiales, hacen referencia a las propiedades topológicas del espacio.

Una propiedad topológica es aquella que si la posee un espacio X, la posee también cualquier espacio homeomorfo a X.
Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x,y,z) = (xa, yb, zc), \text{ con } a,b,c \in \mathbb{R}^*.$$

Note que F es continua ya que cada función componente es continua, y además la restricción de $F|_S 2$ es continua, $\widetilde{F}: S^2 \to \mathbb{R}^3$ y se tiene $\widetilde{F}(S^2) = E$, donde

$$E = \{(x, y, z) \in R^3 : \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} + \tfrac{z^2}{c^2} = 1\}.$$

Se puede ver que F es inyectiva y

$$F^{-1}(x, y, z) = (\tfrac{x}{a}, \tfrac{y}{b}, \tfrac{z}{c}).$$

por tanto, $\widetilde{F}^{-1} = F^{-1}|_E$ es continua. Así $\widetilde{F}$ es un homeomorfismo de S^2 sobre E.

Sean $F : A \to B$, $G : B \to C$ dos homeomorfismos, entonces $G \circ F$ es un homeomorfismo. Como F, G son biyectivas, es claro que $G \circ F$ lo es también, ya que si $x \in A$, $f(x) \in B$, y aplicando G, obtengo $G(F(x)) \in C$, y como G es biyectiva, $G^{-1}(G(F(x))) = F(x)$, y aplicando F^{-1}, encuentro que $F^{-1}(G^{-1}(G(F(x)))) = F^{-1}(F(x)) = x$, ahora sea $y \in C$, aplicando G^{-1} y F^{-1}, obtengo, $F^{-1}(G^{-1}(y))$, aplicando F y G respectivamente, $G(F(F^{-1}(G^{-1}(y)))) = G(G^{-1}(y)) = y$, y así se tiene que $G \circ F$ es biyectiva.

Sea $U \subset C$ abierto, como G es homeomorfismo, $G^{-1}(U)$ es abierto, igual con F que es homeomorfismo, $F^{-1}(G^{-1}(U))$ es abierto. Ahora usando las funciones inversas de F, G denotadas por $\overline{F}$ y $\overline{G}$, respectivamente. Sea $V \subset A$ abierto, por hipótesis, $\hat{F}^{-1}(V)$ es abierto, y al igual con $\overline{G}$, se deduce que $\hat{G}^{-1}(\overline{F}^{-1}(V))$ es abierto así $G \circ F$ es un homeomorfismo.

2.3. Topología Cociente

Sean Y un conjunto, $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in \Delta}\}$ una familia de espacios topológicos y para cada $\alpha \in \Delta$ sea

$$f_\alpha : X_\alpha \to Y$$

una función. El conjunto siguiente τ es una topología sobre Y tal que f_α es continua para cada $\alpha \in \Delta$

$$\tau = \{A \subset Y : f_\alpha^{-1}(A) \in \tau_\alpha, \forall \alpha \in \Delta\}.$$

El conjunto τ es llamado topología final sobre Y inducida por $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$. Sean X un espacio topológico, $\sim$ una relación de equivalencia definida sobre X y denotamos al conjunto de todas las clases de equivalencia por

$$X/\sim = \{\overline{x} : x \in X\}$$

donde $[x]$ denota la clase de equivalencia de un elemento $x \in X$. Ahora, sea q la función canónica

$$q : X \to X/\sim,\ q(x) = \bar{.}$$

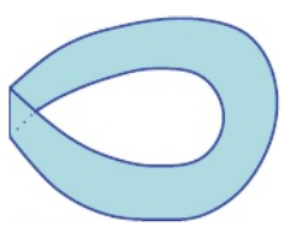
Esta función induce la topología final sobre el cociente $X/\sim$, y es llamada topología cociente. El espacio así definido se llama espacio cociente. A continuación se presentarán algunos ejemplos de espacios cocientes que son de nuestro interés. Considere $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ y defina la relación de equivalencia $\sim$ de la siguiente manera

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \text{ si y sólo si}$$

1. $x_0 = x_1$ y $y_0 = y_1$, o
2. $x_0 = \pm 1$, $x_1 = -x_0$ y $y_1 = 1 - y_0$.

El espacio cociente que se genera al dotar a $X/\sim$ con la topología cociente se denomina cinta de $Moebius$.

Figura 8. $Cinta\ de\ Moebius$



Recta proyectiva real $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Sea $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, se define la relación de equivalencia $\sim$ sobre X así:

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : (x_1, y_1) = \lambda(x_0, y_0).$$

El espacio cociente $X/\sim$ con la topología cociente se llama recta proyectiva real $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Sea $X = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, se define $\sim$ sobre X así:

$$(x_0, y_0, z_0) \sim (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : (x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_0, y_0, z_0).$$

El espacio cociente $X/\sim$ con la topología cociente se llama plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Recta proyectiva compleja $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Sea $X = \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ definimos $\sim$ sobre X como:

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : (x_1, y_1) = \lambda(x_0, y_0).$$

El espacio cociente $X/\sim$ con la topología cociente se llama recta proyectiva compleja $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Sea $X = \mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}$ definimos $\sim$ sobre X de la siguiente forma:

$$(x_0, y_0, z_0) \sim (z_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \exists \lambda \in C^* : (x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_0, y_0, z_0).$$

El espacio cociente $X/\sim$ con la topología cociente se llama plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Consideremos una función $f : X \to Y$. La relación $\sim_f$ definida sobre X por $X \sim_f Y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$ es una relación de equivalencia.

$\sim_f$ es reflexiva ya que dado $x \in X$, $f(x) = f(x)$, así $X \sim_f X$.

$\sim_f$ es simétrica ya que si tengo $x, y \in X$ tal que $f(x) = f(y)$, se tiene que $f(y) = f(x)$

y $\sim_f$ transitiva, tomando $x, y, z \in$,f(x)=f(y)yf(y)=f(z)$, porlaigualdad$f(x)=f(z)$, asestaestransitiva.$

Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función sobreyectiva. Si Y tiene la topología final inducida por f, entonces f se llama una aplicación cociente. Si $f : X \to Y$ es una aplicación cociente, entonces $Y \simeq X/\sim$ con el homeomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \varphi : X/\sim & \to & Y \\ \overline{x} & \mapsto & \varphi(x) = f(x) \end{array}$$

Consideremos la función $\varphi : X/\sim \to Y$ definida por $\varphi(|x|) = f(x)$.

1. Si $\overline{x} = \overline{y}$ entonces $f(x) = f(y)$, luego φ es una función bien definida.

2. Si $\varphi(\overline{x}) = \varphi(\overline{y})$, entonces $f(x) = f(y)$, de donde $\overline{x} = \overline{y}$, por lo tanto φ es uno a uno.

3. Puesto que f es sobreyectiva, dado $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Entonces $\varphi(\overline{x}) = y$ y φ es sobreyectiva.

4. Si q es la aplicación canónica definida de X en $X/\sim$ entonces $\varphi \circ q = f$ y como f es continua y $X/\sim$ tiene la topología final inducida por q, se concluye que φ es una función continua.

5. Nótese que $A = \varphi^{-1}(\varphi(A))$ para cada $A \subset X/\sim$. Así, si A es abierto en $X/\sim$, entonces $\varphi(A)$ es abierto en Y. Se concluye que φ es una función abierta.

Se ha demostrado que φ es un homeomorfismo.

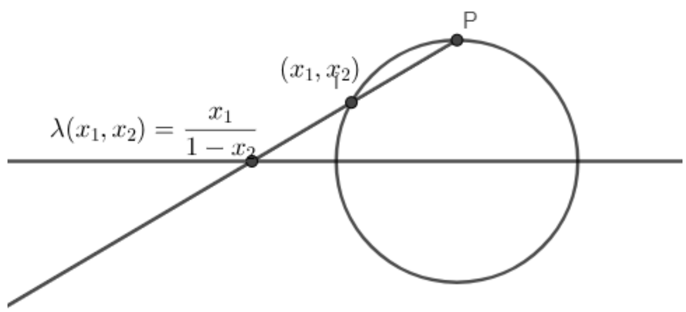
2.4. Proyección estereográfica

En esta sección se define la proyección estereográfica para mostrar los homeomorfismos entre las n-esferas y los espacios proyectivos de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Sean $S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ y $p = (0, 1) \in S^1$. Se define la aplicación

$$\lambda : S^1 - \{P\} \to \mathbb{R}$$
$$\lambda(x_1, x_2) = (\tfrac{x_1}{1-x_2}).$$

Figura 9. $Proyeccin\ estereogrfica, n = 1$



$$\lambda^{-1} : \mathbb{R} \to S^1 - \{P\}$$
$$\lambda^{-1}(x) = (\tfrac{2x}{x^2+1}, \tfrac{x^2-1}{x^2+1})$$

Esta función es continua, uno a uno, sobreyectiva y su inversa λ^{-1} también es continua. λ es llamado proyección esteoreográfica de $S^1 - \{P\}$ en $\mathbb{R}$. Veamos que λ^{-1} es inversa de λ. En efecto, sea

$$\lambda \circ \lambda^{-1}(x) = \lambda(\tfrac{2x}{x^2+1}, \tfrac{x^2-1}{x^2+1}) = \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1-\frac{x^2-1}{x^2+1}} = \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{x^2+1-x^2+1}{x^2+1}} = \frac{2x}{2} = x$$

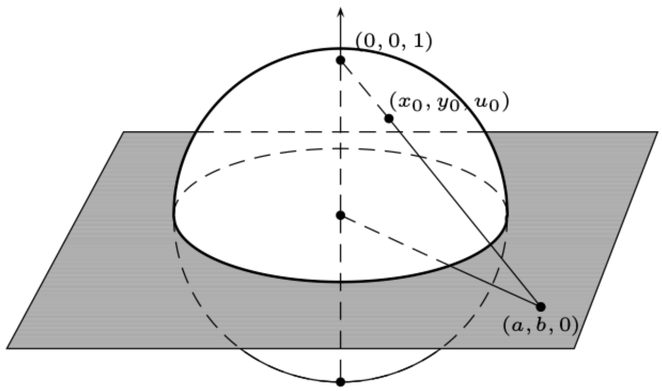
$$\lambda^{-1} \circ \lambda(x_1, x_2) = \lambda^{-1}(\tfrac{x_1}{1-x_2}) = (\frac{2\frac{x_1}{1-x_2}}{1+(\frac{x_1}{1-x_2})^2}, \frac{(\frac{x_1}{1-x_2})^2-1}{(\frac{x_1}{1-x_2})^2+1}) = (\frac{\frac{2x_1}{1-x_2}}{\frac{x_1^2+(1-x_2)^2}{(1-x_2)^2}}, \frac{\frac{x_1^2}{1-2x_2+x_2^2}-1}{\frac{x_1^2}{1-2x_2+x_2^2}+1}) =$$
$$(\frac{2x_1(1-x_2)}{x_1^2+1-2x_2+x_2^2}, \frac{\frac{x_1^2-1+2x_2-x_2^2}{1-2x_2+x_2^2}}{\frac{x_1^2+1-2x_2+x_2^2}{1-2x_2+x_2^2}}) = (\frac{2x_1(1-x_2)}{2-2x_2}, \frac{2x_2-2x_2^2}{2-2x_2}) = (x_1, x_2).$$

En la última igualdad usamos que $x_1^2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow x_1^2 = 1 - x_2^2$.

Sea $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ $P = (0, 0, 1) \in S^2$ la aplicación proyección estereográfica queda definida de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \lambda : S^2 - \{P\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \lambda(x_1, x_2, x_3) &\rightarrow (\tfrac{x_1}{1-x_3}, \tfrac{x_2}{1-x_3}). \end{aligned}$$

Figura 10. $Proyeccin\ estereogrfica\ n = 2$



La inversa de la proyección estereográfica está dado por $\lambda^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 - \{P\}; \lambda^{-1}(x_1, x_2) = (\frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2+1}, \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2+1}, \frac{x_1^2+x_2^2-1}{x_1^2+x_2^2+1})$. La noción de proyección esteoregráfica se extiende a dimensión arbitraria. Sea $S^n = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$ la esfera $n - dimensional$ y $P = (0, ..., 0, 1) \in S^n$. Se define la siguiente aplicación

$$\lambda : S^n - \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) = (\tfrac{x_1}{1-x_{n+1}}, \tfrac{x_2}{1-x_{n+1}}, ..., \tfrac{x_n}{1-x_{n+1}}).$$

Note que λ es un homeomorfismo y entre $S^n - \{P\}$ y $\mathbb{R}^n$.

La inversa de la $proyeccin\ estereogrfica$ está definida por

$$\lambda^{-1}(y_1, ..., y_n) = (\tfrac{2y_1}{y_1^2+...+y_n^2+1}, \tfrac{2y_2}{y_1^2+...+y_n^2+1}, ..., \tfrac{y_1^2+...+y_n^2-1}{y_1^2+...+y_n^2+1}).$$

Consideremos también la inversa de la proyección estereográfica compleja definida como

$$\lambda : \mathbb{C} \rightarrow S^2 - \{(0, 0, 1)\}$$
$$z \mapsto \lambda(z) = (\tfrac{z+\bar{z}}{z\bar{z}+1}, \tfrac{z-\bar{z}}{(z\bar{z}+1)i}, \tfrac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1})$$

si identificamos a $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2, z = x + yi = (x, y)$, y consideramos la inversa de la proyección estereográfica $\lambda^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{0, 0, 1\}$. La compactificación por un punto $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ es un espacio métrico compacto, donde ∞ denota un punto abstracto que no está en $\mathbb{R}^n$ con la métrica que se considera

$$d(x,y) = \frac{2\|x-y\|}{\sqrt{(1+\|x\|^2)(1+\|y\|^2)}},$$
$$d(x,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+\|x\|^2}}.$$

2.5. Variedades diferenciables de dimensión 1 y 2

En geometría diferencial una variedad diferencial de dimensión 1 corresponde a una curva diferenciable regular y una variedad diferencial de dimensión 2 se refiere a una superficie regular.

Una curva diferenciable regular es una aplicación diferenciable $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que I es un intervalo, y para cada $x \in I$, $\varphi'(x) \neq 0$.

Si α está definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces vemos la diferenciabilidad de α redefiniendo la función y suponiendo que para algún $c > 0$ se puede extender a la curva $\overline{\alpha} : (a - c, b + c) \to \mathbb{R}^3$, tal que $\overline{\alpha}(x) = \alpha(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

$S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ es una curva diferenciable.

Considere $I = (0, 2\pi)$ y

$$\begin{array}{rcl} \varphi : I & \to & S^1 \subset \mathbb{R}^2 \\ t & \to & (cost, sent). \end{array}$$

Note que φ parametriza todos los puntos de S^1 excepto a $(1, 0) \in S^1$ pero usando la observación anterior se concluye que S^1 es una curva diferenciable Una aplicación $f : X \to Y$ se llama difeomorfismo si es biyectiva y tanto ella como su inversa son diferenciables. Se dice que f es un difeomorfismo local en un punto $a \in X$ si f es un difeomorfismo de un entorno de a en X sobre otro de $f(a)$ en Y.

$f(t) = t^3$ no es un difeomorfismo, ya que la raíz cúbica no es diferenciable en $t = 0$.

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto.

1. Una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi : U & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \to & \varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array}$$

   se llama diferenciable si $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes.

2. La derivada en un punto $p \in U$ de la aplicación φ es la aplicación $d\varphi_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en el punto p está dado por

$$d\varphi_p((a,b)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}_p \binom{a}{b}$$

1. La aplicación $d\varphi_p$ es lineal, diferenciable y su derivada en cualquier punto es ella misma.

2. $d\varphi_p$ es inyectiva si y solo si la matriz asociada tiene rango 2.

Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si, para cada $p \in S$, existe un abierto $V \in \mathbb{R}^3$ y una aplicación $\varphi : U \to V \cap S$ de un subconjunto abierto de U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \subset \mathbb{R}^3$ tal que:

1. φ es diferenciable, esto significa, si, $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in U$, entonces las funciones $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en U.

2. φ es un homeomorfismo. Como φ es continua por la condición 1, esto significa que φ admite una inversa $\varphi^{-1} : V \cap S \to U$ que es continua; es decir, φ^{-1} es la restricción de una función continua $F : W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida sobre un conjunto abierto W que contiene a $V \cap S$.

3. Para cada $q \in U$, la diferencial $d\varphi_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

La definición anterior no depende de la parametrización escogida como lo veremos en el ejemplo siguiente
La esfera de radio 1 $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una superficie regular. Presentaremos dos pruebas de este resultado.
Veamos primero que la aplicación $z_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$z_1(x, y) = (x, y, +\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}), (x, y) \in U.$$

con $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ es una parametrización de S^2. Se puede ver que $z_1(U)$ es la parte abierta de la esfera por encima del plano xy.
Como $x^2 + y^2 < 1$, la función $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Así z_1 cumple la condición 1.

La condición 3 se tiene de inmediato ya que la matriz asociada a $(dz_1)_p$ es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{bmatrix}$
y tiene rango 2, es decir, $(dz_1)_p$ es inyectiva.
Para la condición 2, se puede observar que z_1 es inyectiva y que z_1^{-1} es la restricción de la proyección continua $\pi(x, y, z) = (x, y)$ sobre el conjunto $z_1(U)$. Así, z_1^{-1} es continua en $z_1(U)$. De esta forma $z_1(x, y), (x, y) \in U$ es una parametrización de S^2. Después se recubre la esfera con parametrizaciones parecidas, así se define $z_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ haciendo

$$z_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}),$$

y se tiene que z_2 es una parametrización. Note que $z_1(U) \cup z_2(U)$ recubre a S^2 excepto el ecuador

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; z = 0\}.$$

En los planos xz y zy, se definen las parametrizaciones

$$\begin{aligned} z_3(x, y) &= (x, +\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z) \\ z_4(x, y) &= (x, -\sqrt{1 - (x^2 + z^2)}, z) \\ z_5(x, y) &= (+\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z) \\ z_6(x, y) &= (-\sqrt{1 - (y^2 + z^2)}, y, z) \end{aligned}$$

éstas parametrizaciones junto con z_1, z_2 recubren a S^2 completamente, y se puede concluir que S^2 es una superficie regular.

Ahora vamos a mostrar otra prueba pero con otra parametrización. Considere la inversa de la proyección estereográfica $\lambda^{-1} : \mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2z\} - \{P\}$

$$\lambda^{-1}(u, v) = (\tfrac{4u}{u^2+v^2+4}, \tfrac{4v}{u^2+v^2+4}, \tfrac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4})$$

Con $P = (0, 0, 1)$. Es claro que todas sus funciones componentes tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes, así λ^{-1} cumple la condición 1.

La condición 3 se cumple ya que la matriz asociada a $(d\lambda^{-1})_p$ es $\begin{pmatrix} \frac{-4u^2+4v^2+16}{(u^2+v^2+4)^2} & \frac{-8uv}{(u^2+v^2+4)^2} \\ \frac{-8uv}{(u^2+v^2+4)^2} & \frac{4u^2-4v^2+16}{(u^2+v^2+4)^2} \\ \frac{16u}{(u^2+v^2+4)^2} & \frac{16v}{(u^2+v^2+4)^2} \end{pmatrix}_p$

y ésta tiene rango 2, es decir, $(d\lambda^{-1})_p$ inyectiva.

Con otra proyección estereográfica desde un punto distinto al tomado anteriormente como polo, se parametrizan todos los puntos de S^2.

3. Rectas y planos proyectivos sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

La noción de espacios proyectivos surge del estudio de la perspectiva. Al estudiar la perspectiva, se introduce la noción de recta del infinito, el lugar en donde se encuentran las rectas paralelas. En el renacimiento, no sólo los matemáticos se interesaron este tema de estudio, los pintores también, es por eso que Leonardo da Vinci escribió en uno de sus cuadernos “Que nadie que no haya estudiado matemáticas lea estos libros".

3.1. Recta proyectiva real

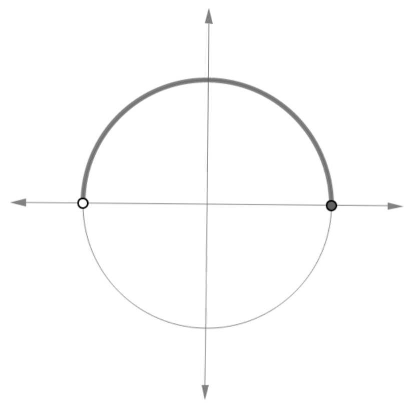
La recta proyectiva real es homeomorfa a la mitad de una circunferencia de radio r, de tal forma que esta tendrá un solo punto al infinito (polo), ya que la relación de equivalencia hace que el punto final no se observe, puesto que lo está representando en el punto inicial.

Sea $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, se define la relación de equivalencia $\sim$ sobre X así:

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : (x_1, y_1) = \lambda(x_0, y_0).$$

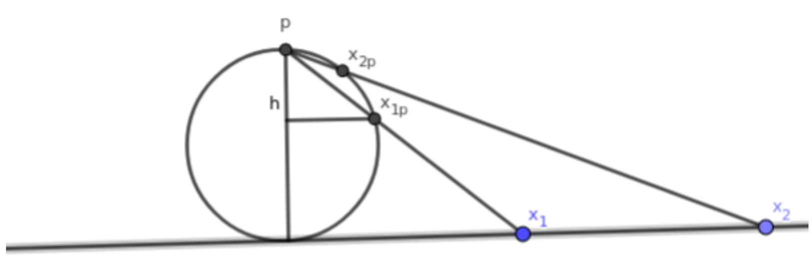
El espacio cociente $X/\sim$ se llama recta proyectiva real $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Los puntos de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ se denotan por $[x, y] = \{(x_1, y_1) : (x_1, y_1) = \lambda(x, y)$.

Figura 11. $Recta\ proyectiva\ real$ $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$



Otra forma de definir la recta proyectiva real $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ es considerando el punto $P = (0,1)$ en el plano $\mathbb{R}^2$, la recta $y = 0$, y la circunferencia S^1 que pasa por P y el origen, es decir, $S^1 = \{(x,y) : x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}\}$.
Dado un punto x_1 en la recta $y = 0$, se construye la recta que pasa por x_1 y P, esta intersecará a la circunferencia S^1 en x_{1p}.

Figura 12. Proyección estereográfica de S^1 en $\mathbb{R}$



Por construcción encuentro que

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_{1p}}{h}$$

para todo $x_{1p} \in S^1$. Si $h = 0$, tenemos el punto del infinito. Denotamos $Q = [h, x_{1p}]$ a las coordenadas homogéneas del punto $x_1 \in \mathbb{R}$ y $[0,1]$ son las coordenadas homogéneas del punto del infinito.

Así la recta real $\mathbb{R}$ unido con el punto al infinito ∞ es una circunferencia completa. A este conjunto se llama Recta proyectiva real $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Los puntos en el infinito se toman como el mismo punto ya que la dimensión de los puntos del infinito es cero mientras que la dimensión de la recta es uno.

El Lema 1.2 muestra que las dos definiciones anteriores son equivalentes. Veamos primero una propiedad de la recta proyectiva real $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. La recta proyectiva real $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ es una curva regular. Por definición, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}/\sim$ donde $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $(x_0, y_0) = \lambda(x_1, y_1)$. Si $x \neq 0$ entonces consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rcc} \varphi_1 : I = \mathbb{R} & \to & \{[x,y] : x \neq 0\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ y & \mapsto & [1, y] \end{array}$$

Observe que φ_1 es diferenciable ya que cada una de sus componentes tiene derivadas parciales de todos los órdenes. Note que $\varphi_1'(y) = (0,1)$ luego $\varphi_1'(y) \neq (0,0)$ para todo $y \in \mathbb{R}$ y en consecuencia φ_1 es una curva regular .Además como $[x,y] = [1, \frac{y}{x}]$ con $x \neq 0$ entonces φ_1 tiene inversa dada por

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1^{-1} : \{[x,y] : x \neq 0\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & & \mathrm{y}_{\overline{x \mapsto \frac{y}{x}.}} \end{array}$$

Note que la parametrización $(\varphi_1, \mathbb{R})$ parametriza a todo punto de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ excepto a $[0,1]$. Vamos a considerar otra aplicación para ver que en todo punto $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ es una curva regular. Sea

$$\begin{array}{rcc} \varphi_2 : I = \mathbb{R} & \to & \{[x,y] : y \neq 0\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ \mathrm{x} & \mapsto & [x, 1] \end{array}$$

Observe que φ_2 es diferenciable pues sus componentes tienen derivadas parciales de todos los órdenes y además $\varphi_2'(x) = (1,0)$ luego $\varphi_2'(x) = (0,0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto φ_2 es una curva regular. Note que

$$\varphi_2^{-1} : \{[x,y] : y \neq 0\} \to \mathbb{R}$$
$$[\tfrac{x}{y}, 1] \mapsto \tfrac{x}{y}$$

ya que $[x,y] = [\frac{x}{y}, 1]$, con $y \neq 0$. En consecuencia, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ es una curva regular
La recta proyectiva real $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ es homeomorfa a la circunferencia unitaria S^1. Consideremos

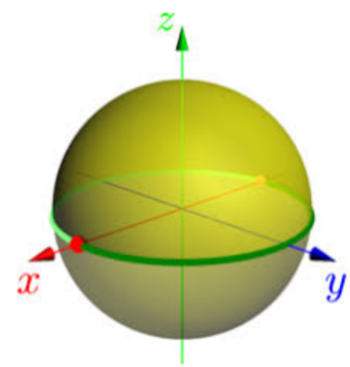
$$\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to S^1$$

x$_0, x_1$
$\mapsto (\frac{2x_0x_1}{x_0^2+x_1^2}, \frac{x_1^2-x_0^2}{x_0^2+x_1^2})$
Note que $\varphi[0,1] = (0,1)$ y $\varphi[1,x] = (\frac{2x}{x^2+1}, \frac{x^2-1}{x^2+1})$ corresponde a la inversa de la proyección estereográfica de $\mathbb{R}$ en S^1. Luego φ es biyectiva con inversa la proyección estereográfica. $\lambda : S^1 - \{(0,1)\} \to R$, es decir, $\varphi^{-1}(x,y) = \lambda(x,y) = [\frac{x}{1-y}, 0]$, si $[x,y] \neq [0,1]$ y $\varphi^{-1}[0,1] = (0,1)$.
En consecuencia, φ es un homeomorfimo ya que φ y φ^{-1} son continuas.

3.2. Plano proyectivo real

El plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ se construye considerando una esfera, esta se corta mediante un plano diametral que contiene el ecuador de la esfera. Los puntos que quedan en el plano serán los de una recta proyectiva. Como el plano divide a las esfera en dos semiesferas, se toma una y los puntos del borde serán los de la recta proyectiva o recta del infinito. Es decir, el plano proyectivo real es homeomorfo al cociente de la esfera S^2 por la relación que identifica puntos diametralmente opuestos.

Figura 13. $Plano\ proyectivo\ real\ \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

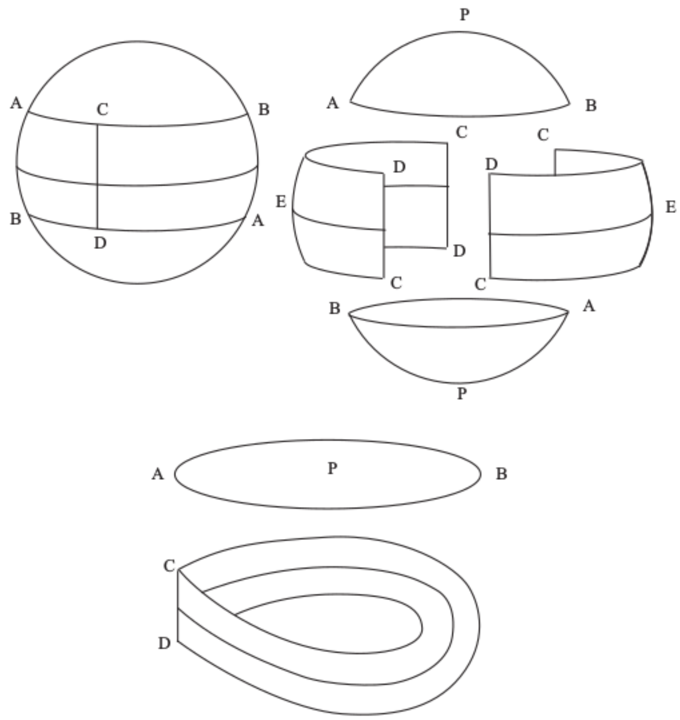


La topología del plano proyectivo real es más abstracta que la de la recta proyectiva real.

Hay varias formas de construir el espacio resultante de esta identificación. Nosotros seguimos la que describe Aroca,[2]. Un modelo topológico del plano proyectivo real se obtiene identificando en la esfera de $\mathbb{R}^3$ puntos diametralmente opuestos. Cortando la esfera en dos planos tales que éstos son paralelos a un plano diametral, que contiene al ecuador de la esfera.

Después de haber hecho el corte, quedará dividida en tres partes, un anillo esférico y dos casquetes simétricos. Al cocientar se identifican los casquetes, mientras que al anillo se corta por un meridiano y se generan dos mitades que se identifican y solo hay una que pegar el borde de un lado de una de las mitades con el otro lado, pero hay que hacerlo identificando puntos diametralmente opuestos. Así resulta una banda de Moëbius y un círculo y solo hay que tapar la banda con el círculo ajustándolos borde con borde, naturalmente es imposible hacerlo dentro de $\mathbb{R}^3$ sin producir autointersecciones.

Figura 14. Topología del plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$



El plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es una superficie regular. Como $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}/\sim$ donde $\sim$ está definido así:
$(x_0, y_0, z_0) \sim (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $(x_0, y_0, z_0) = \lambda(x_1, y_1, z_1)$, los puntos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ se denotan por $[x, y, z] = \{(x_1, y_1, z_1) : (x_1, y_1, z_1) = \lambda(x, y, z)$. Veamos que $(\varphi_1, \mathbb{R}^2)$ es una aplicación que parametriza los puntos $[x, y, z]$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ excepto a los puntos donde $x = 0$. Considere

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \{[x,y,z] : x \neq 0\} \\ (u,v) &\mapsto [1,u,v] \end{aligned}$$

Note que si $x \neq 0$, $[x,y,z] = [1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}]$ y entonces

$$\varphi_1^{-1} : \{[x,y,z] : x \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$[x,y,z] \mapsto (\tfrac{y}{x}, \tfrac{z}{x})$$

Observe que φ_1 es una biyección y es diferenciable. Además sin dificultad se prueba que φ_1 es bicontinua y por tanto φ_1 es un homemorfismo, la matriz asociada a la aplicación lineal $(d\varphi_1)_p$ es $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la cual tiene rango 2, es decir $(d\varphi_1)_p$ es inyectiva.
En conclusión, φ_1 es una parametrización. Considere ahora

$$\begin{array}{rcl} \varphi_2 : \mathbb{R}^2 & \to & \{[x,y,z] : y \neq 0\} \\ (u,v) & \mapsto & [u,1,v] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_3 : \mathbb{R}^2 & \to & \{[x,y,z] : z \neq 0\} \\ (u,v) & \mapsto & [u,v,1] \end{array}$$

Observe también que si $y \neq 0$, $[x,y,z] = [\frac{x}{y}, 1, \frac{z}{y}]$ y si $z \neq 0$, $[x,y,z] = [\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1]$

$$\varphi_2^{-1} : \{[x,y,z] : y \neq 0\} \to \mathbb{R}^2$$
$$[\tfrac{x}{y}, 1, \tfrac{z}{y}] \mapsto (\tfrac{x}{y}, \tfrac{z}{y})$$

$$\varphi_3^{-1} : \{[x,y,z] : z \neq 0\} \to \mathbb{R}^2$$
$$[\tfrac{x}{z}, \tfrac{y}{z}, 1] \mapsto (\tfrac{x}{z}, \tfrac{y}{z})$$

De igual forma se prueba que φ_2 y φ_3 son parametrizaciones del plano proyectivo real, en consecuencia, el plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ es una superficie regular.

A continuación se define la aplicación diferenciable entre superficies regulares para mostrar una aplicación diferenciable entre el plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ y la esfera S^2.
Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares, una aplicación continua $f : V_1 \subset S_1 \to S_2$ de un conjunto abierto V_1 de S_1 en S_2 se dice diferenciable en $p \in V_1$, si dadas las parametrizaciones

$$\varphi_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \to S_1 \text{ y } \varphi_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \to S_2$$

con $p \in \varphi_1(U_1)$ y $f(\varphi_1(U_1)) \subset \varphi_2(U_2)$, la aplicación

$$\varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1 : U_1 \to U_2$$

es diferenciable en $q = \varphi_1^{-1}(p)$. Consideremos la esfera S^2, el plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ y

$$\begin{gathered} h : S^2 \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \\ (x_0, x_1, x_2) \mapsto [x_0, x_1, x_2] \end{gathered}$$

Veamos que h es diferenciable en $(0, 0, 1)$.
Considere la parametrización de S^2 del punto $(0, 0, 1)$, definida por

$$\begin{array}{rcl} \psi : U = \{(u, v) : \sqrt{1 - v^2 - u^2} > 0\} & \to & S^2 \\ (u, v) & \mapsto & (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) \end{array}$$

y sea φ la parametrización de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ del punto $[0, 0, 1]$ dada por

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \\ (x, y) & \mapsto & [x, y, 1]. \end{array}$$

Note que $h(\psi(U)) \subset \varphi(\mathbb{R}^2)$. Sea $\varphi^{-1} \circ h \circ \psi(u, v) = \varphi^{-1} \circ h(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) = \varphi^{-1}[u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}] = \varphi^{-1}[\frac{u}{1 - u^2 - v^2}, \frac{v}{1 - u^2 - v^2}, 1] = [\frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1 - v^2 - u^2}}]$. Así h es diferenciable, ya que $u^2 + v^2 < 1$. Luego h es diferenciable en $(0, 0, 1)$, y en general se puede probar que h es diferenciable en U. Una superficie regular es orientable si no contiene ningún subespacio homeomorfo a la banda de Möebius. En caso contrario se dice no orientable. El plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ no es orientable.
Sea $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y defina la relación de equivalencia $\sim$ así

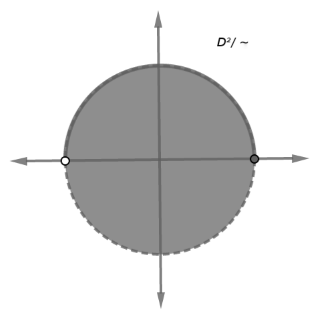
$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_0, y_0) \text{ o } (x_0, y_0), (x_1, y_1) \in S^1 \text{ y } (x_1, y_1) = -(x_0, y_0)$$

Note que D^2 es una superficie diferenciable.

Veamos que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \simeq D^2/\sim$. En efecto, como $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \simeq S^2/\mathbb{Z}_2$ y $S^2/\mathbb{Z}_2 \simeq D^2/\sim$, entonces se tiene el homeomorfismo deseado.

Note que $D^2/\sim$ contiene un abierto homeomorfo a la banda de Moëbius. Además $D^2/\sim \simeq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ entonces $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ contiene un abierto homemorfo a la banda de Moëbius. Luego $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ no es orientable.

Figura 15. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ *no es orientable*



El plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ se descompone en un subespacio afín y un espacio proyectivo de menor dimensión, es decir, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Consideremos

$$U_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}); x_0 \neq 0\}$$
$$\mathsf{U}_1 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}); x_1 \neq 0\}$$
$$\mathsf{U}_2 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}); x_2 \neq 0\}$$
$$\mathsf{H}_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}); x_0 = 0\}$$
$$\mathsf{H}_1 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}); x_1 = 0\}$$
$$\mathsf{H}_2 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}); x_2 = 0\}$$

Note que la unión de los conjuntos $U_0, U_1, U_2, H_0, H_1, H_2$ es igual a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ además cada U_i, $i \in \{0,1,2\}$, está identificado con $\mathbb{R}^2$, esto es, $U_0 \simeq U_1 \simeq U_2 \simeq \mathbb{R}^2$, y cada $H_i, i \in \{0,1,2\}$, está identificado con la recta proyectiva real, es decir $H_0 \simeq H_1 \simeq H_2 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. En conclusión, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

3.3. Recta proyectiva compleja

Sea $X = \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ se define $\sim$ sobre X como:

$$(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : (x_1, y_1) = \lambda(x_0, y_0).$$

El espacio cociente $X/\sim$ se llama recta proyectiva compleja $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Los puntos de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ se denotan por $[x, y] = \{(x_1, y_1) : (x_1, y_1) = \lambda(x_1, y_1)\}$. Veamos que la recta proyectiva compleja es una superficie regular. En las demostraciones de las siguientes proposiciones usaremos la inmersión

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ z & \mapsto & [1, z] \end{array}$$

La recta proyectiva compleja $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ es una superficie regular. Como $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ con $z = u + vi \equiv (u, v)$. Note que

$$\{[1, u, v] : u, v \in \mathbb{R}\} \simeq \{[1, z] : z = u + vi \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$$\{[u, v, 1] : u, v \in \mathbb{R}\} \simeq \{[z, 1] : z = u + vi \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

entonces, consideremos la aplicación siguiente que parametriza los puntos $[1, u, v] \simeq [1, z]$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : U = \mathbb{R}^2 & \to & \{[1, u, v] : u, v \in \mathbb{R}\} \\ (u, v) & \mapsto & [1, u, v] \end{array}$$

Note que $\varphi_1^{-1} : \{[u, v, w] : u \neq 0 \ v, w \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^2$ está definida por $[u, v, w] = [1, \frac{v}{u}, \frac{w}{u}] \mapsto (\frac{v}{u}, \frac{w}{u})$. Así $\varphi :_1$ es una biyección y es diferenciable, Además sin dificultad se prueba que φ_1 es bicontinua, la matriz asociada a la aplicación lineal $(d\varphi_1)_p$ es

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la cual tiene rango 2. En conclusión φ_1 es una parametrización.

Considere ahora

$$\begin{aligned} \varphi_2 : U = \mathbb{R}^2 &\rightarrow \{[u, v, 1] : u, v \in \mathbb{R}\} \\ (u, v) &\mapsto [u, v, 1] \end{aligned}$$

φ_2 es también una parametrización de los puntos de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ donde $[u, v, 1] \simeq [z, 1]$.
Así $\{\{\varphi_1, U\}, \{\varphi_2, U\}\}$ parametrizan todos los puntos de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
La recta proyectiva compleja $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ es homeomorfa a S^2. Como $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, con $z \equiv x + yi = (x, y)$, entonces

$$\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow S^2$$

con $\varphi[0, 1] = (0, 0, 1)$ y

$$\varphi[1, z] = \lambda^{-1}(x, y) = (\tfrac{2x}{x^2+y^2+1}, \tfrac{2y}{x^2+y^2+1}, \tfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1})$$

donde λ^{-1} es la inversa de la proyección estereográfica de $\mathbb{R}^2$ a S^2. Este homeomorfismo nos da el ejemplo más claro de la estructura llamada superficie de Riemann.
Una superficie de Riemann es una variedad compleja de dimensión compleja uno.
Otra demostración de la proposición 3.3.2 (ver [11])
Podemos extender la proyección estereográfica, P=(0,0,1)

$$\lambda : S^2 - \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

a una aplicación

$$\overline{\lambda}: S^2 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$\overline{\lambda}(a,b,c) = [1, \frac{a}{1-c} + i\frac{b}{1-c}] = [1-c, a+ib]$, si $(a,b,c) \neq (0,0,1)$,

$$\overline{\lambda}(0,0,1) = [0,1].$$

$\overline{\lambda}$ es una biyección por serlo λ y su inversa $\overline{\lambda}^{-1}$ viene dada por

$$\begin{cases} \overline{\lambda}^{-1}[z_0, z_1] = \overline{\lambda}^{-1}[1, \frac{z_1}{z_0}] = \lambda^{-1}(\frac{z_1}{z_0}) \\ \overline{\lambda}^{-1}[0,1] = (0,0,1) \end{cases}$$

Ahora bien, si $z = a+bi$, $\frac{2a}{a^2+b^2+1} + i\frac{2b}{a^2+b^2+1} = \frac{2z}{2z\overline{z}+1}$ y $1 - \frac{2}{a^2+b^2+1} = \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1} = \frac{z\overline{z}-1}{z\overline{z}+1}$.Luego si consideramos $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ entonces $\lambda^{-1}(z) = (\frac{2z}{z\overline{z}+1}, \frac{z\overline{z}-1}{z\overline{z}+1})$ y por tanto

$$\overline{\lambda}^{-1}[z_0, z_1] = (\frac{2\frac{z_1}{z_0}}{\frac{z_1}{z_0}\frac{\overline{z_1}}{z_0} + 1}, \frac{\frac{z_1}{z_0}\frac{\overline{z_1}}{z_0} - 1}{\frac{z_1}{z_0}\frac{\overline{z_1}}{z_0} + 1}) = (\frac{2z_1 z_0}{z_1\overline{z_1} + z_0\overline{z_0}}, \frac{z_1\overline{z_1} - z_0\overline{z_0}}{z_1\overline{z_1} + z_0\overline{z_0}}).$$

Note que $\overline{\lambda}^{-1}[0,1] = (0,0,1)$ por tanto $\overline{\lambda}$ es continua y como es biyectiva y ambos espacios son compactos entonces $\overline{\lambda}$ es un homeomorfismo.

3.4. Plano proyectivo complejo

Sea $X = \mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}$, la relación $\sim$ está definida sobre X de la siguiente forma:

$$(x_0, y_0, z_0) \sim (x_1, y_1, z_1) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : (x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_0, y_0, z_0).$$

El espacio cociente $X/\sim$ se llama plano proyectivo complejo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Los puntos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ se denotan por $[x,y,z] = \{(x_1,y_1,z_1) : (x_1,y_1,z_1) = \lambda(x,y,z)\}$ El plano proyectivo complejo se puede descomponer en un subespacio afín y un espacio proyectivo de menor dimensión, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Se define

$$U_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}); x_0 \neq 0\}$$
$$\mathsf{U}_1 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}); x_1 \neq 0\}$$
$$\mathsf{U}_2 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}); x_2 \neq 0\}$$
$$\mathsf{H}_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}); x_0 = 0\}$$
$$\mathsf{H}_1 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}); x_1 = 0\}$$
$$\mathsf{H}_2 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}); x_2 = 0\}$$

La unión de los conjuntos $U_0, U_1, U_2, H_0, H_1, H_2$ es $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, además cada $U_i, i \in \{0,1,2\}$ está identificado con $\mathbb{C}^2$, es decir, $U_0 \simeq U_1 \simeq U_2 \simeq \mathbb{C}^2$, y cada H_i, $i \in \{0,1,2\}$ está identificado con la recta proyectiva compleja, en efecto, $H_0 \simeq H_1 \simeq H_2 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. En conclusión $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Bibliografía

[1] AABOE, A., *Matemáticas episodios históricos*, Yale University, Connecticut, Estados Unidos, 1964.

[2] AROCA, J.M. y FERNÁNDEZ, M.J., *Geometría proyectiva*, Universidad de Valladolid, España, 2009.

[3] DO CARMO, M. *Geometría diferencial de curvas y superficies,* Instituto de matemática pura y aplicada IMPA, 1976.

[4] COXETER, H.S.M., *The real proyective plane*, University of Cambrigde, Canadá, 1960.

[5] DONEDDU, A., *Complementos de geometría algebraica*, (Traducido del francés), Aguilar S.A. de ediciones, 1980.

[6] GEMINGNANI, M., *Axiomatic geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, Canadá, 1971.

[7] GÓMEZ, M., *Tesis doctoral: Métricas, compactificaciones y extensiones del cuerpo real,* Universidad de Valladolid, 1996.

[8] GRANADOS, C., *Notas de clase de geometría diferencial en curvas y superficies*, Universidad Industrial de Santander, Colombia, 2019.

[9] MACHO, M., *Topología general*, Universidad del País Vasco, España, 2002.

[10] NEIRA, C.M., *Topología general*, Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

[11] PLAZA, S., *Variedades diferenciables*, Universidad de Sevilla, España, 2008.

[12] VILLAMIZAR, E.J. y CAMARGO, J., *Topología general*, Universidad Industrial de Santander, Colombia, 2018.