# FRACTALES EN SECUNDARIA: EXPLORANDO UNA NUEVA GEOMETRÍA (Análisis de un artículo)

DIANA MARÍA ACEVEDO GALVIS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2008

# FRACTALES EN SECUNDARIA: EXPLORANDO UNA NUEVA GEOMETRÍA (Análisis de un artículo)

**DIANA MARÍA ACEVEDO GALVIS**

Monografía presentada como requisito para optar al
título de Licenciada en Matemáticas

Directora
**SONIA MARLENI SABOGAL PEDRAZA**
Doctora en Matemáticas

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**ESCUELA DE MATEMÁTICAS**
**BUCARAMANGA**
**2008**

# Dedicatoria

A Dios, por su inmenso amor hacia mí, siempre presente en mí vida, siempre guardando mí camino, siempre llenándome de bendiciones siempre conmigo.

A mi madre Maria Galvis, por su comprensión, por su amor, por sus concejos, por todo el apoyo brindado para lograr ser mejor persona no solo como profesional sino en todas las áreas de mi vida.

A mi padre Omar Acevedo, por su apoyo tanto económico como moral, quien creyó en mí hasta el último instante de culminar mi carrera.
A mis hermanos Paola Andrea y Omar Camilo y a mi Cuñado Hugo a quienes amo con todo mi corazón.

A mi novio Néstor quien tiene la llave de mi corazón.

# Agradecimientos

Agradezco a:

Dios por darme claridad y ayudarme a reconocer mis errores, y por regalarme su amor para enfrentar todos los obstáculos que se presentaron durante el camino.

Mis padres Omar y María, por sus concejos, enseñanzas y por todo el apoyo que me brindaron tanto económicamente como moralmente en mi formación profesional. Que Dios los bendiga y les de la oportunidad de recoger los frutos que con tanto esfuerzo han cosechado.

Mis hermanos Paola Andrea y Omar Camilo, por todo el cariño y motivación importantes para sacar esta meta.

Mi cuñado Hugo, por su apoyo incondicional.

Mi profesora y Directora de la monografía Sonia Sabogal, porque más que encontrar una directora para mi proyecto, encontré una amiga que me brindó su colaboración y tuvo paciencia para dirigir este trabajo.

Mi novio y amigo del alma Néstor, quien con su constante amor incondicional, ha sido de gran ayuda durante los últimos años de mi carrera. Que Dios lo bendiga y haga realidad todos los sueños de su corazón.

TITLE: FRACTALS IN HIGH SCHOOL: EXPLORING A NEW GEOMETRY. (ANALYSIS OF AN ARTICLE)[1]

AUTHOR: ACEVEDO GALVIS DIANA MARÍA[2]

KEY WORDS: Geometry, Fractals, Mathematics, Dimension, Self-similarity

DESCRIPTION: This monograph has been worked to develop the topic of the article published in the magazine The Mathematics Teacher in the year 1999 for the mathematics: Randi Lornell and Judy Westerberg, titled: Fractals in High School: Exploring a New Geometry, in which are related: why and how do could be include the fractal geometry in the learning of the young in high school.
A few year ago, the popularity of elementary courses using fractals was largely credited to the surprising beauty fractal pictures and the centrality of the computer. A math or science course filled with striking, unfamiliar visual imagines, where the computer was used almost every day, sometimes by the students. The general education fractal course did not fit into the standard science or mathematics format a novel feature that contributed to their popularity.
We shall argue that novelty was neither the only, nor the most significant factor.

In the first part is translation of the article. In the first chapter finds the presentation and development of the workshops of the article and some commentary.

In the third chapter finds the presentation two workshops: Fractals trees and Menger sponge.

This monograph includes the photocopies of the original of the article. It is necessary for a better understanding of this topic.

[1]Monografía

[2]Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Sonia Marleni Sabogal Pedraza.

TITULO: FRACTALES EN LA SECUNDARIA: EXPLORANDO UNA NUEVA GEOMETRIA (Análisis de un artículo)[3]

AUTOR: ACEVEDO GALVIS Diana María[4]

PALABRAS CLAVES: Geometría, Fractales, Matemáticas, Dimensión, Autosimilitud.

DESCRIPCIÓN: En este trabajo de monografía se ha querido desrrollar el temas del artículo publicado en la revista The Mathematics Teacher en el año 1999 por los matemáticos Randi Lornell y Judy Westerberg, titulado: Fractals in High School: Exploring a New Geometry, en el cual se muestra el por qué y el cómo debe ser incluida la geometría fractal en el aprendizaje de los jóvenes de secundaria.

En la primera parte se encuentra la traducción del artículo.

En el primer capítulo se encuentre el desarrollo de los temas básicos para abordar los resultados presentados en el artículo.

En el segundo capitulo se da a conocer, la presentación y desarrollo de los talleres del artículo y algunos comentarios, sugerencias y modificaciones del artículo, en donde se hizo una adaptación de estas actividades a nuestra propia cultura, cuando se consideró pertinente.

En el tercer capítulo se presentan dos talleres: Árboles fractales y la esponja de Menger. Los cuales han sido diseñados para estudiantes de secundaria.

Este trabajo de monografía incluye como anexo la fotocopia original del artículo para un mejor entendimiento.

---

[3]Monografía

[4]TITULO: FRACTALES EN LA SECUNDARIA: EXPLORANDO UNA NUEVA GEOMETRIA (Análisis de un artículo)[5]

# Índice general

# Introducción

La matemática siempre ha desafiado al hombre a que asimile las estructuras que la integran. Al igual que las demás ciencias, se mantiene en constante progreso, gracias a las mentes brillantes que han surgido a través del tiempo. Es así, como todo buen estudiante debe proponerse encontrar el medio para intentar comprenderla; por esto algunos buscamos fuera de lo tradicional, explorando tópicos de la matemática que estén conectados al mundo natural, usando métodos mas analíticos y que produzcan resultados satisfactorios.

La geometría en su paso por el tiempo además de dejar huellas fue creciendo poco a poco, y hoy es una rama de la matemática que amplía cada vez mas sus dominios contribuyendo a un mejoramiento en los conocimientos humanos. Es así como gracias al descubrimiento de estructuras matemáticas que no concordaban con las tradicionales de los antiguos matemáticos, nace una nueva rama de la geometría, la geometría fractal.

Los cursos de matemáticas para jóvenes de secundaria especialmente en los últimos grados, usualmente apuntan a problemas muy abstractos, lo cual origina en los estudiantes la idea de que la matemática no tiene aplicaciones en la vida real. Esta es una de las razones por las cuales una de las áreas de la matemática que más interés y motivación ha despertado entre algunos matemáticos y educadores matemáticos es la que corresponde al estudio de la geometría fractal. Esta geometría es diferente, pues mientras las soluciones de problemas difíciles a menudo envuelven el uso de matemáticas sofisticadas, frecuentemente en geometría fractal esto no ocurre; procesos simples generan imágenes maravillosas y complicadas que revelan la magnificación de una variedad infinita repetida de patrones.

De este modo, los temas afines que el estudio de la geometría fractal y sus aplicaciones relaciona, han ocupado campos muy diversos. El concepto de fractal es de gran importancia en el área de las matemáticas, y sus aplicaciones han llamado la atención de científicos no solo de estas ramas sino de otras que ayudan al mejoramiento del ser humano. Es difícil dar una definición general de lo que es un fractal porque muchas de las definiciones propuestas no se pueden aplicar a todas las familias de fractales existentes. En realidad aún no existe dicha definición formal y universalmente aceptada desde el punto de vista matemático. Tal vez la mejor forma de describirlos consista en señalar lo que tienen en común los procesos matemáticos que los generan. De esta forma la geometría fractal constituirá quizá un paso intermedio entre la geometría clásica y el análisis moderno, utilizando como este los procesos infinitos. En la geometría fractal se incorporan la naturaleza estática de la geometría clásica y el dinamismo de los procesos infinitos del paso al límite.

En este trabajo de monografía se ha querido desarrollar el tema del artículo titulado: *Fractals in High School: Exploring a New Geometry*[1], publicado en la revista The Mathematics Teacher en el año 1999, el cual muestra un por qué y cómo debe ser incluida la geometría fractal en el aprendizaje de los jóvenes en la secundaria. El trabajo consta de tres capítulos. En el primer capítulo (Preliminares), el lector encontrará algunas generalidades y algunos fundamentos teóricos de los siguientes capítulos, se dará a conocer de una forma especifica los conceptos de geometría fractal que se necesitan para la comprensión del artículo, basándose en las dos propiedades fundamentales de los fractales, autosimilitud (o autosemejanza) y dimensión extraña. Se describen ejemplos de algunos de los fractales más importantes: el conjunto de Cantor, la curva de Koch, la carpeta de Sierpinski, la esponja de Menger y el tetraedro de Sierpinski, presentando las dos propiedades esenciales en cada ejemplo: auto similitud (o auto semejanza) y dimensión extraña. Es importante que el lector se familiaricé con estos conceptos pues le será de mucha ayuda para la explicación de los talleres.

En el segundo capítulo se dará a conocer, la presentación y desarrollo de los talleres del artículo [1] y un análisis en donde se hizo una adaptación de estas actividades a nuestra propia cultura, cuando se consideró pertinente.

En el tercer capítulo se presentan dos talleres: **Árboles Fractales** y la **Esponja de Menger**. Se pretende que los estudiantes a medida que van desarrollando los talleres, traten de construir el concepto de fractal en cada caso, interactuando con el medio natural y lo ubiquen de tal forma que en lo posible ellos mismos puedan identificar las propiedades de cada fractal y, que comprendan las conclusiones dadas en cada taller y saquen sus propias conclusiones. Estos talleres fueron diseñados en base a los talleres propuestos en el artículo [1], sobre el cual se trabajó.

Al finalizar las actividades se espera, que tanto el profesor como el alumno, interactúen, expongan cada uno sus ideas, y saquen nuevas conclusiones sobre el tema, para que de esta forma, los estudiantes observen que esta área de matemáticas no es monótona, ya que esta rama de la geometría, la geometría fractal, les permite interactuar con el mundo natural y observar que procesos matemáticos hacen de los objetos naturales, una nueva forma de análisis y estudio.

Como cuarto capítulo se anexa copia del artículo. [1]

# FRACTALES EN SECUNDARIA: EXPLORANDO UNA NUEVA GEOMETRÍA

Randi Lornell y Judy Westerberg

Marzo de 1999

Por varios años hemos incluido dentro de nuestras clases tradicionales de geometría, una unidad de geometría fractal. Fuimos inicialmente fascinados por este tema por la belleza de las imágenes de los fractales y la matemática en contra de la intuición inherente a ellos a discutir dos fractales, el conjunto de Cantor y la curva de Koch. Este artículo incluye una corta descripción de los fractales y sus características, algunos ejemplos y un argumento acerca de las razones para incluir fractales en el currículo matemático.

# QUÉ ES LA GEOMETRÍA FRACTAL Y CÓMO PUEDE SER ESTUDIADA EN UN SALÓN DE CLASES?

Simplemente la geometría fractal es la geometría de la naturaleza.
Considere la geometría Euclidiana, sistematizada hace más de 2000 años. Esta geometría trata de figuras como líneas, círculos y cubos. Ejemplos de estas figuras abundan en nuestro mundo pero usualmente caracterizan objetos hechos por la gente. Una pared, por ejemplo es una aproximación de un plano en dos dimensiones. Pero como escribió Benoit Maldelbrot padre de la geometría fractal en 1977,[(*las nubes no son esferas...las montañas no son conos, la luz no viaja en línea recta)*], explicando la necesidad de nuevas herramientas matemáticas para entender y describir muchos fenómenos naturales.

## QUÉ CARACTERÍSTICAS DESCRIBEN A UN FRACTAL?

Mandelbrot inventó la palabra fractal para describir estos fenómenos naturales. Fractal viene del verbo latín frangere cuyo significado es romper(Gleick 1987). Este verbo se refiere a una cualidad frecuente que caracteriza objetos naturales; ellos se ven fragmentados, irregulares, quebrados, complejos. Imagine por ejemplo, la sensación de tocar la corteza de un árbol opuesta a la sensación de la superficie de un escritorio. Contrasta la rugosidad de una línea costera con la suavidad de un arco euclidiano. Típicamente los fractales tienen otra cualidad, que es *auto-similitud*, esto significa que una parte del todo es cercanamente parecida al todo. Imagine tomando una coliflor y sacándole un trozo y este trozo se ve igual al original. Este proceso puede ser repetido varias veces con cada parte mas pequeña siendo semejante al coliflor original. Una buena forma de comenzar a estudiar a los fractales es que los estudiantes tengan que comparar objetos familiares que tengan una forma euclidiana con otros objetos familiares que no la tengan. Esta actividad de compare y contraste conduce a la necesidad de encontrar formas adicionales para describir objetos encontrados en el mundo natural que no son euclidianos.

## Actividad 1:

Pedir a los estudiantes que miren alrededor del salón de clase y hagan una lista de objetos y sus formas, por ejemplo un escritorio tiene forma de rectángulo. Los estudiantes dan ideas, y las listan sobre una transparencia o sobre el tablero. Luego se pide a los estudiantes que observen en un patio o en un parque y que listen objetos y sus formas; por ejemplo, el tronco de un árbol es cilíndrico. De nuevo los estudiantes dan ideas y las listan sobre una transparencia o sobre el tablero. Luego discuten si el tronco de un árbol es en realidad cilíndrico como un poste de teléfono. Se pregunta en qué son semejantes y en qué diferentes. Observemos ahora un brócoli, una coliflor y las ramas de un árbol, se muestra a los estudiantes que los objetos naturales son generalmente más rugosos que los objetos euclidianos. Además estos objetos naturales se usan para resaltar la segunda característica de los fractales: auto similitud.
Así, una nueva geometría es necesitada para describir estos objetos naturales

## CÓMO SE "PRODUCE" UN FRACTAL?

Con las características de un fractal, proceso como éste es desarrollado. Este proceso es por *recursión* o *iteración*: "La misma operación dada es repetida sobre una semilla o punto de partida, la producción total de una iteración es la base para una siguiente" (Peitguen, Jurgens y Saupe. 1992,17).

Un camino fácil para entender cómo la iteración puede crear un fractal es estudiando el clásico fractal llamado el Conjunto de Cantor en el cual el tercio medio de un segmento de recta es removido iteradamente.

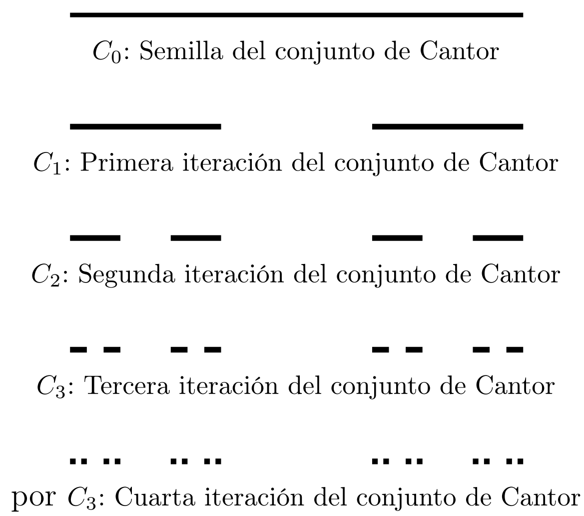



Figura 1:

## Actividad 2:

Se pide a los estudiantes que tracen un segmento de línea aproximadamente de seis pulgadas de largo sobre una hoja de papel. Se asume que este segmento de línea tiene una unidad de largo. Nombre el segmento de línea como $C_0$. Este segmento de línea es llamado la *semilla* del fractal. Luego los estudiantes pueden mentalmente dividir el segmento en tres partes y quitar la de en medio de $C_0$ y dibujar el resultado. A este resultado se le nombra como $C_1$. Luego, pueden dividir en tres partes, los dos segmentos de $C_1$ quitar los de en medio y dibujar el resultado, llamándolo $C_2$. Dibujan $C_3$ y $C_4$ usando el mismo tipo de instrucciones. Ver la **figura 1**.

Discutir cómo se vería el conjunto de Cantor en las iteraciones cinco, diez y cien. Los estudiantes pueden ver que después de solo pocas iteraciones, el conjunto empieza a verse más como un esparcimiento de diminutos puntos que como una serie de segmentos de linea. Se discute como en el conjunto de Cantor se ven dos características básicas de los fractales; autosimilitud y rugosidad, o complejidad. También es importante introducir la noción de que este proceso matemático puede continuar indefinidamente y que el mismo conjunto de Cantor es el resultado de este proceso infinito.

De la mano de la actividad 1, “Representación Gráfica del Conjunto de Cantor"se pide a los estudiantes que completen el gráfico de la semilla y las primeras cuatro iteraciones del conjunto de Cantor, usando sus dibujos. Los resultados pueden ser los siguientes:

| Iteración | Longitud segmento | Número de segmentos | Longitud total |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | $1/3$ | 2 | $2/3$ |
| 2 | $1/9$ | 4 | $4/9$ |
| 3 | $1/27$ | 8 | $8/27$ |
| 4 | $1/81$ | 16 | $16/81$ |

Como los estudiantes buscan patrones en esos datos, ellos podrían ver que las fórmulas para cualquier iteración son las siguientes: iteración $= n$, longitud de cada segmento $= (1/3)^n$ número de segmentos$= 2^n$ y longitud total$= (2/3)^n$.

Discutir las implicaciones de estos datos: El número total de segmentos se duplica en cada iteración, pero cada segmento es $1/3$ de largo de cada segmento en la iteración anterior. Por lo tanto la longitud total disminuye. Los estudiantes calculan el número de segmentos y la longitud total de varias iteraciones y rápidamente ven un extraño fenómeno: el número de segmentos se aproxima al infinito, pero la longitud total se aproxima a cero. Los estudiantes pueden verificar y extender los datos con la calculadora graficadora, como se demuestra en la actividad 4, la cual usa tablas para un segundo fractal clásico llamado la *curva de Koch*. La curva de Koch fue creada por el matemático Sueco Helge Von Koch en 1904. Este fractal tiene un segmento de linea como su semilla. La operación llevada a cabo sobre esta semilla es la creación de un triángulo equilátero cuya base es la tercera mitad del segmento, esta base tiene que ser removida. La semilla y la primera iteración, se conocen como $K_0$ y $K_1$, respectivamente, se pueden ver en la **figura 2**.

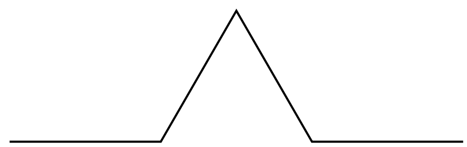
Esta operación es entonces iterada, esto es repetida exactamente, sobre la estructura resultante $K_1$, para formar $K_2$; sobre $K_2$ para formar $K_3$; sobre $K_3$ para formar $K_4$; y así sucesivamente. Ver **figura 3**.

En solo tres iteraciones, las características fractales de la curva de Koch son evidentes: este se ve rugoso, como si fuera áspero al tacto, y es autosimilar, dado que contiene versiones miniaturas del todo en varias escalas.

Imagine cómo estas características son amplificadas después de 10, 20, o 100 iteraciones!.

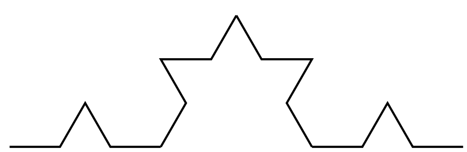
La curva de Koch ha sido extendida a lo que es llamado el *copo de nieve de*

$K_0$: Semilla de la curva de Koch

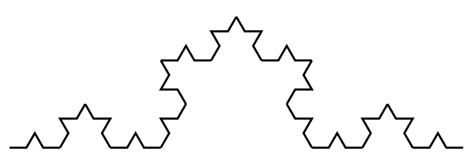


$K_1$: Primera iteración de la curva de Koch

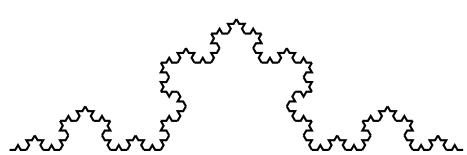
Figura 2:



$K_2$: Segunda iteración de la curva de Koch



$K_3$: tercera iteración iteración de la curva de Koch



$K_4$: Cuarta iteración de la curva de Koch

Figura 3:

*Koch*, en el cuál la semilla es tres segmentos de linea que se juntan en forma de un triángulo equilátero. Cada segmento es entonces iterado siguiendo las direcciones dada anteriormente para la curva. Pedimos a los estudiantes "construir" la semilla y la primera y segunda iteración del copo de nieve Koch con bloques patrón. Ver **figura 4**. Esta actividad les permite mirar el crecimiento de los patrones de perímetro y de área. Ellos usan sus estructuras para explorar las matemáticas del crecimiento del área y perímetro bajo iteraciones y desarrollar las ecuaciones recursivas que describen los mismos. Luego de haber desarrollado las ecuaciones, ellos usan la calculadora graficadora para verificar sus ideas. Estas actividades son separadas para que los estudiantes puedan enfocarse sobre sus modelos físicos antes de intentar las ecuaciones más difíciles.

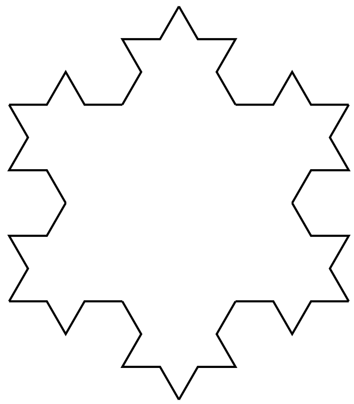
## Actividad 3

Distribuir cubos de bloques patrón a cada pequeño grupo, igualmente distribuir la actividad de la hoja 2, "Explorando el Crecimiento del Copo de Nieve de Koch". Para evitar confusión, los estudiantes tienen que completar esta exploración de perímetro antes de empezar con el área.

### Explorando el perímetro

Se asume que cada bloque patron del triángulo tiene un lado de largo de una unidad para un perímetro de 3 unidades ¿Cuál es el perímetro de los rombos(4 unidades), el de los trapecios (5 unidades) y el de los hexágonos (6 unidades)?

Se dice a los estudiantes que construyan un triángulo equilátero fuera de los bloques patrón donde cada lado tiene de longitud 9 unidades. Este triángulo es la semilla del copo de nieve Koch. Una posibilidad para esta estructura, como también para las dos primeras iteraciones se muestra en la **figura 5**. Se pide a un estudiante que observe la configuración sobre una transparencia, para esta y cada siguiente iteración. Discutir el perímetro de la semilla (27 unidades) y los estudiantes tienen que empezar a llenar la hoja de trabajo. Se pide a un estudiante que observe la configuración sobre una transparencia, para esta y cada siguiente iteración. Discutir el perímetro de la semilla (27 unidades) y los estudiantes tienen que empezar a llenar la hoja de trabajo. Se pide a los estudiantes construir la primera iteración del copo de nieve Koch con bloques patron. De nuevo se discute cuanto ha sido adicionado al



Segunda iteración del copo de nieve de Koch, con bloques patrón.

Figura 4:

perímetro (9 unidades), y el nuevo perímetro total ($27 + 9$, o, 36 unidades). Hacer lo mismo para la segunda iteración (12 unidades son adicionadas para un nuevo perímetro total de $36 + 12$ o 48 unidades).
Discutir el crecimiento del patrón del perímetro del copo de nieve de Koch bajo la iteración, cada iteración tiene $1/3$ mas del perímetro total de la iteración anterior. De este modo, esto mostrará que el perímetro continuará creciendo, aumentando la longitud en cada iteración, con esta razón de crecimiento.

### Explorando el área

Se pide a los estudiantes volver a la semilla del copo de nieve y quitar dos iteraciones del bloque patron. Los estudiantes tienen que continuar con el mismo proceso para el área como el que usaron para el perímetro, asumiendo que el área del bloque patrón de un triángulo verde es una unidad cuadrada. Técnicamente si un lado del triángulo tiene una unidad, entonces el área de este triángulo es $\sqrt{3/4}$, sin embargo, hemos encontrado que los estudiantes están mas interesados en descubrir el crecimiento del área si usan la noción simplificada una unidad cuadrada de área. Cuáles son entonces las áreas de los rombos (2 unidades cuadradas), los trapecios (3 unidades cuadradas) y el hexágono (6 unidades cuadradas). Se pide a los estudiantes calcular el área de esta semilla (81 unidades cuadradas). De nuevo se pide a los estudiantes que construyan la primer iteración del copo de nieve y que calculen ambas,

el área adicionada (27 unidades cuadradas) y la nueva área total ($81 + 27$ o 108 unidades cuadradas). Discutir cómo el cambio del área en esta primera iteración es similar a el cambio del perímetro: el crecimiento es 1/3. Sin embargo cuando los estudiantes construyen la segunda iteración, ellos deberán notar que el crecimiento del área para esta iteración es considerablemente más pequeña (12 unidades cuadradas) resultando una nueva área total de solo 108+12, o, 120 unidades. Esta razón de crecimiento es únicamente 12/108, o, 1/9 la cantidad de crecimiento y la razón de crecimiento van lentamente. Discutir esta aparente discrepancia entre el constante crecimiento de la razón del perímetro bajo iteraciones y la disminución de la razón de crecimiento del área.
Qué pasará si pudiéramos continuar construyendo nuevas iteraciones de el copo de nieve? Esta discusión acerca de las diferencias en los patrones de crecimiento del perímetro y del área del copo de nieve bajo iteraciones con frecuencia es enérgica. Algunos estudiantes creen que el crecimiento de la razón del perímetro será lento, resultando tal vez en una cantidad constante de crecimiento o tal vez en una disminución de la cantidad de crecimiento, parece solo sentido común que el perímetro alcanzará un régimen permanente, otra admiración que podría causar este resultado. También algunos estudiantes no pueden aceptar que una razón del constante crecimiento en el perímetro (lo que resulta en un incremento en la cantidad de crecimiento del perímetro), puede posiblemente coexistir con una razón de crecimiento del área que resulta en una disminución del área que crece; este resultado parece contraintuitivo. De nuevo los estudiantes están construyendo conjeturas sobre la base de solamente una pequeña cantidad de datos. Por lo tanto, estas controversias se pueden aclarar usando la calculadora graficadora para simular el crecimiento del perímetro y del área en nuevas iteraciones.

## Actividad 4

Distribuir la actividad de las hojas 3A y 3B, "Las Extrañas Matemáticas del Copo de Nieve de Koch". Los estudiantes también necesitan calculadoras graficadoras, la TI-82 o TI-83.

### Analizando las matemáticas del perímetro

Discutimos qué sucederá al perímetro en la segunda o tercera iteración y por qué sucederá esto. Los estudiantes podrán ver que el perímetro crecerá de nuevo, 1/3, por que en la tercera iteración, la tercera mitad de cada linea de segmento es quitada, reduciendo el perímetro en 1/3, de nuevo sin embargo, un nuevo triángulo equilátero es agregado a este segmento, incrementando el perímetro a 2/3 para una ganancia de 1/3. Discutir el crecimiento del perímetro en la cuarta y en las siguientes iteraciones, los estudiantes podrán ver que cada perímetro de cada iteración sera 1/3 más que el perímetro de la anterior iteración. Este trabajo, invita a los estudiantes a crear ecuaciones recursivas que describen el perímetro agregado y el perímetro total de cada iteración respectivamente. Estas ecuaciones son como las siguientes:

$$U_n = (1/3)V_{n-1} \text{ (perímetro agregado) } U_0 = 0,$$

$$V_n = (4/3)V_{n-1} \text{ (perímetro total) } Vo = 27$$

Los estudiantes verán que las primeras tres entradas en las tablas creadas para estas ecuaciones corresponden a sus descubrimientos para la semilla y a las primeras dos iteraciones del copo de nieve de Koch usando bloques patrón. Esta correspondencia con el modelo físico ayuda a convencer a los estudiantes de la exactitud de estas ecuaciones. Las tablas para el perímetro agregado del copo de nieve Koch y el total en sus primeras cuarta, séptima, décima y veinteava iteraciones están escritas en la tabla:

| Iteración | Perímetro agregado | Perímetro total |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 27 |
| 1 | 9 | 36 |
| 2 | 12 | 48 |
| 3 | 16 | 64 |
| 4 | 21.333 | 85.333 |
| 7 | 50.568 | 202.27 |
| 10 | 119.86 | 479.46 |
| 20 | 2128.5 | 8514.1 |

Discutir este patron de crecimiento.Los estudiantes deben observar que el perímetro del copo de nieve Koch tiende a infinito, esto significa que aumenta sin parar.

### Analizando las matemáticas del área

Crear ecuaciones para la suma del área y el total del área del copo de nieve de Koch es de mucha dificultad para muchos estudiantes. Nosotros asignamos esta sección para créditos extra y entonces durante el período de clases se tiene que todos los estudiantes siguen las direcciones para establecer las ecuaciones. Discutir lo encontrado acerca del área de los bloques patrón, donde, mientras la primera iteración aumenta 1/3 mas al area inicial de la semilla, la segunda iteración aumenta únicamente 1/9 mas al área de la primera iteración. Qué es lo que probablemente sucede sobre la tercera iteración y por qué? Por lo menos algunos estudiantes pueden ver que en cada iteración, cada nuevo triángulo agregado tiene un área de 1/9, como el área en cada triángulo agregado de la iteración anterior. Empezando en la segunda iteración cuatro nuevos triángulos son agregados. Luego a cada iteración se le agrega 4/9 del área agregada en la anterior iteración, las ecuaciones son:

$$U_n = (4/9)V_{n-1},$$

$$V_n = (4/9)V_{n-1}(U_{n-1} + V_{n-1})$$

Los resultados están en la tabla:

| Iteración | Area sumada | Area total |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 81 |
| 1 | 27 | 108 |
| 2 | 12 | 120 |
| 3 | 5.333 | 125.333 |
| 6 | 0.46822 | 129.23 |

Los datos para la primera iteración no aparecen en la calculadora porque no se agrega área la primera vez. Luego, nosotros debemos dejar $n_{min} = 1$ en la calculadora. Los estudiantes ven que el área continua creciendo en una razón que esta disminuyendo bastante resultando en una absoluta disminución en la cantidad del crecimiento, hasta por la treceava iteración el área total tiende a 129.6 unidades cuadradas sobre la calculadora. Dividiendo 129.6 en 81, el área de la semilla, obtenemos 1.6, el cual representa el limite del crecimiento del área del copo de nieve comparado con su semilla. De este modo, el copo de nieve Koch tiene un perímetro infinito contenido un área acotada. Estas características aparentemente anómalas del conjunto de Cantor y del copo de nieve de Koch, el primero, teniendo un infinito número de trozos con un total de longitud 0 y el segundo teniendo un perímetro infinito contenido en un área acotada son típicas de los fractales. Hemos encontrado un rango en las reacciones de los estudiantes de estas características, desde la fascinación a incredulidad, de frustración a excitación. Puntualizando que muchos objetos naturales tienen características similares. Por ejemplo, los seres humanos al nacer contienen miles de vasos sanguíneos conteniendo un volumen acotado, y las hojas de los árboles proporcionan una enorme cantidad de superficie de area conteniendo un volumen limitado. Esto parece tranquilizar a algunos estudiantes.

# DE DÓNDE PROVIENEN LOS FRACTALES?

Las raíces de la geometría fractal contemporánea se encuentran a finales del siglo 19 y a principios del siglo 20. Matemáticos como George Cantor, Helge Von Koch, Gaston Julia y Pierre Fatou experimentaron con los que ahora son considerados fractales clásicos. Sus propósitos en seguir esta linea de estudio fueron variados. Cantor por ejemplo, desarrolló, el que es ahora conocido como el Conjunto de Cantor para su trabajo en teoría de conjuntos. Julia, cuyas ideas fueron posteriormente desarrolladas por Mandelbrot, estuvo interesada con el calculo de las raíces de $Z^3 - 1 = 0$ usando el método de Newton (Peitgen, Jurgens, y Saupe 1992).
Al tiempo de sus desarrollos, los fractales clásicos creados por estos matemáticos parecieron ser botados a la basura de la historia. Despreciados por la comunidad matemática como "patológicamente distinto a lo encontrado en la naturaleza" y "monstruos" (Gleick 1987,100), ellos languidecieron hasta los años 1970's cuando Mandelbrot y otros matemáticos los revisitaron con una nueva y poderosa herramienta : el computador.
La crucial importancia del computador en el nuevo campo de la geometría fractal es tal vez más clara en comparación con el trabajo de Gaston Julia, Pierre Fatou y el de Mandelbrot. Estas tres personas estuvieron interesadas en le comportamiento de puntos en el plano complejo bajo iteración de varias funciones. En sus exploraciones, ellos tuvieron que dibujar las órbitas de millones de puntos. Julia y Fatou fueron capaces de *deducir* el comportamiento; aunque ellos estaban indudablemente convencidos, sus resultados fueron menos significativos para la mayoría del mundo. Mandelbrot, pensó, que era capaz de ver el comportamiento por programación de computador. Su imagen es conocida ahora como el conjunto de Mandelbrot y los fractales computarizados creados por otros matemáticos y artistas, se han originado una explosión de intereses en el tema.

# POR QUÉ LOS FRACTALES PUEDEN SER INCLUIDOS EN EL CURRÍCULO MATEMÁTICO?

El estudio de la geometría fractal es apropiada en la secundaria por muchas razones. Los estudiantes tienen la oportunidad de investigar temas tradicionales de matemáticas desde una nueva aproximación, a hacer ambas conexiones dentro de las matemáticas y entre matemáticas y la naturaleza y el mundo humano, y a explorar las matemáticas en los caminos no analíticos.
Tales tópicos tradicionales como área y perímetro de polígonos, (área de la superficie y volumen de poliedro, y prestando ellos mismos al algebra una fácil ilustración usando fractales) Por ejemplo, el copo de nieve de Koch tiene un perímetro infinito, pero un área acotada. Como los estudiantes están a la delantera de descubrir esta aparente anomalía, ellos están con frecuencia fascinados y algunas veces preocupados.
La geometría fractal puede ser usada para hacer conexiones dentro de las matemáticas. Por ejemplo, pedimos a los estudiantes desarrollar las fórmulas algebraicas que describen el crecimiento del perímetro y el área del copo de nieve de Koch, como bien el número de trozos y el total de longitud del conjunto de Cantor. En el álgebra avanzada, nosotros también usamos el conjunto de Mandelbrot para conectar el álgebra de números complejos con la geometría. Finalmente, conceptos de cálculo se presentan naturalmente cuando, se discuten fenómenos tales como el hecho que la longitud total del conjunto de Cantor se aproxima pero nunca alcanza al cero.
La geometría fractal también permite conectar las matemáticas con el mundo fuera de clase. Por ejemplo, Mandelbrot, mientras fue investigador de la IBM, uso el conjunto de Cantor para modelar la transmisión electrónica de datos(Gleick 1987). Desde la contaminación del aire por el humo, a la identificación del cáncer de hígado a un diseño de moda, los fractales pueden ser encontrados en un creciente número de áreas.
Finalmente los estudiantes necesitan la experiencia matemática en otros caminos que, aplicando lápiz y papel a algoritmos de ejercicios de rutina. La geometría fractal les permite explorar conceptos matemáticos trabajando con sus manos, ambos en modelos de construcción y dibujando imágenes de iteraciones consecutivas de fractales clásicos. Ellos entonces usan este manual de experiencias, para descubrir las fórmulas recursivas que gobiernan las

formas. También, la naturaleza contraintuitiva de los fractales. ¿Cómo puede el copo de nieve de Koch tener un perímetro infinito y un área acotada? Obliga a esfuerzo intelectual para muchos estudiantes. Entonces el concepto de que los fractales son infinitos, sus formas pueden ser aproximadas pero no completamente dibujadas. Y los estudiantes son con frecuencia excitados por la belleza y complejidad de estas formas- no euclidianas.

## CONCLUSIÓN

Nuestra experiencia en la enseñanza de geometría fractal nos ha convencido que el tema es académicamente apropiado y dentro de la capacidad de los estudiantes de secundaria. Nuestros estudiantes han estado fascinados con las anomalías inherentes en los fractales. Las actividades lúdicas han sido capaz de intrigar a los estudiantes que no siempre responden a problemas tradicionales. Descubriendo tales patrones como el límite de el área del copo de nieve de Koch permiten a nuestros estudiantes mejor dotados analíticamente a extender sus destrezas en álgebra. El uso de fractales en tales áreas disparejas como biología, ingeniería electrónica, economía y artes, toca el interés de muchos estudiantes.

Tal vez el mayor tributo a la potencia de la geometría fractal para fascinar a los adolecentes viene de el entrenador del equipo de basketball de niñas de nuestra escuela, el mismo profesor de matemáticas. Él se nos acercó un día un poco aturdido, no estaba bastante seguro de estar contento o frustrado. Sus jugadoras estaban supuestamente practicando los tiros pero aquellas al final del gimnasio habían parado a favor de una seria discusión. Cuando él las alcanzó, se dio cuenta que el tema que paró los tiros libres era la geometría fractal.
**El entrenador estuvo aturdido: las Jugadoras habían parado la práctica de los tiros para discutir la geometría fractal.**

# Capítulo 1

# Preliminares

En este capítulo se encuentran algunos conceptos necesarios para el adecuado análisis y comprensión del artículo, y los resultados que se usarán en los siguientes capítulos, Estos conceptos se han clasificado en: generalidades sobre la geometría fractal, la autosimilitud, la dimensión extraña, y, ejemplos de algunos conjuntos fractales.

## 1.1. Generalidades sobre geometría fractal

La palabra geometría viene del griego geo: tierra y metrein: medir. La geometría fractal se encuentra dentro del área de la matemática llamada geometría, junto a las demás geometrías, la geometría euclidiana, las no euclidianas y la topología. La geometría en su paso por el tiempo, además de dejar huellas, ha ido creciendo poco a poco y hoy es una rama de la matemática que amplía cada vez más sus dominios.

Primero fue estudiada sistemáticamente por Euclides hacia el año 300 a.c, quien la formalizó mediante definiciones, axiomas, postulados y teoremas. Los matemáticos la siguieron desarrollando por más de dos mil años; en algún momento al sentirse inquietos empezaron a indagar sobre ella y entonces salieron algunas imperfecciones a flote y con ello, otras ramas de la geometría, llamadas no-euclidianas. Las formas y figuras que estudia la geometría euclidiana son bastante regulares, es decir alejadas de lo que

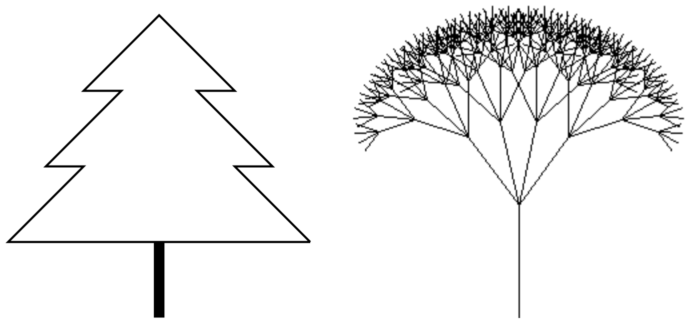


Figura 1.1: Árbol euclidiano y árbol fractal

realmente se encuentra en la naturaleza: superficies ásperas, rugosas, no regulares. Las geometrías llamadas no euclidianas junto con la euclidiana, hicieron posible que la geometría aumentara sus campos de acción, sin salirse de las matemáticas clásicas, generadas por Euclides y cultivadas por el ingenioso Newton.

Entonces gracias al descubrimiento de estructuras matemáticas que no concordaban con las de Euclides ni con las de Newton, nace una nueva rama de la geometría: la geometría fractal. La geometría fractal pretende acercarse un poco más a los objetos y fenómenos de la naturaleza. Si se piensa por ejemplo en un árbol, una representación usando figuras de la geometría euclidiana seria como lo muestra la figura 1.1(árbol izquierda) usando los principios básicos de la geometría fractal, seria como lo muestra la figura 1.1(árbol derecha).
Así la geometría fractal se podría describir como una geometría de la naturaleza. Así lo escribió en 1977 Benoit Mandelbrot, padre de la geometría fractal, explicando la necesidad de nuevas herramientas matemáticas para entender y describir muchos fenómenos naturales: *"Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las líneas costeras no son circunferencias y la corteza de un árbol no es lisa, como tampoco es cierto que la luz viaje en línea recta"* [8].

Pero, **¿qué es un fractal?** "Fractal"viene del verbo en latín “frangere” cuyo significado es “romper”. Se refiere a una cualidad frecuente que caracteriza los objetos naturales: ellos se ven fragmentados, irregulares, complejos. Se aclara que aún NO existe una definición formal y universal (desde el punto de vista matemático) de lo que es un fractal.

Se ha demostrado que en la naturaleza abundan objetos cuyas representaciones son conjuntos fractales. Estos objetos llamados fractales, son objetos naturales que resulta útil representarlos matemáticamente por un conjunto fractal.

La dimensión fractal en sentido genérico, se puede interpretar como un número que sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico, o de un objeto natural.

Se observa entonces que aunque la geometría fractal es relativamente reciente, ejemplos de fractales existen desde tiempos remotos y es asombroso que los fractales en realidad hayan estado siempre presentes en la naturaleza. También existen ejemplos en tiempos remotos de las matemáticas (y dentro de otras ciencias)

Existen dos propiedades fundamentales que caracterizan lo que es un fractal: la *autosimilitud* o *autosemejanza* y la *dimensión extraña.*

## 1.2. La autosimilitud

Pensemos por ejemplo en una coliflor: la cabeza de este vegetal esta conformada por muchos racimos, cada uno de los cuales al ser comparados con toda la cabeza resultan ser similares a esta. De igual forma dichos racimos están conformados por pequeñas réplicas de sí mismos. Esta propiedad se puede encontrar en muchos otros objetos de la naturaleza: un árbol, cierta clase de helechos, las olas del mar, las nubes, las montañas el sistema bronquial humano, etc.

Pasemos ahora al campo de la matemática. Consideremos un cuadrado cualquiera junto con su interior, es decir "relleno". Dividamos el cuadrado en nueve cuadrados idénticos y se descarta el cuadrado central; después a cada uno de los ocho cuadraditos que quedan se le aplica el mismo proceso (se divide cada cuadrado en nueve cuadrados idénticos y se quita el central),

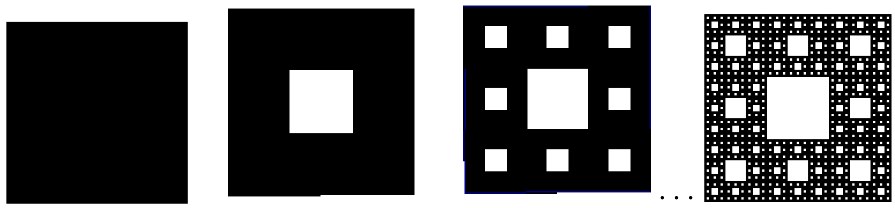



Figura 1.2: Construcción de carpeta de Sierpinski

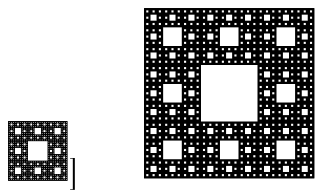


Figura 1.3: Autosimilitud de la carpeta de Sierpinski

obteniéndose ahora sesenta y cuatro cuadraditos (véase figura 1.2) de esta manera obtenemos una sucesión de figuras $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$.
La "última" figura es la que se conoce con el nombre de *la carpeta de Sierpinski*. En rigor no se puede decir que existe una última figura pues este es un proceso infinito, nunca va a terminar; pero si se puede decir que entre más grande sea $n$, la figura $C_n$ se acerca cada vez más a una figura en particular llamada "figura límite". Si se observa la figura límite, la carpeta de Sierpinski $C$, se observa que contiene infinitas copias de ella misma, más pequeñas. Esta propiedad la llamamos autosimilitud o autosemejanza y es una propiedad esencial de los fractales: "el todo está formado por varias copias de sí mismo, sólo que reducidas y colocadas en diferente posición", o de otra forma: "el todo es igual a sus partes salvo el tamaño"
(Ver figura 1.3).
Pero con base a esta propiedad, se nota que varios conjuntos de la geometría euclidiana pueden ser también autosimilares, como por ejemplo, un triángulo. Esta figura puede verse como la unión de cuatro copias de sí mismo, como se puede ver en la figura 1.4.
Luego ¿qué se puede concluir? Que debe existir otra propiedad que solo la posean los fractales, esta propiedad se llama la "dimensión extraña", y es la segunda propiedad esencial de los fractales.

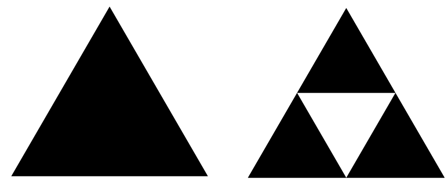


Figura 1.4: Autosimilitud

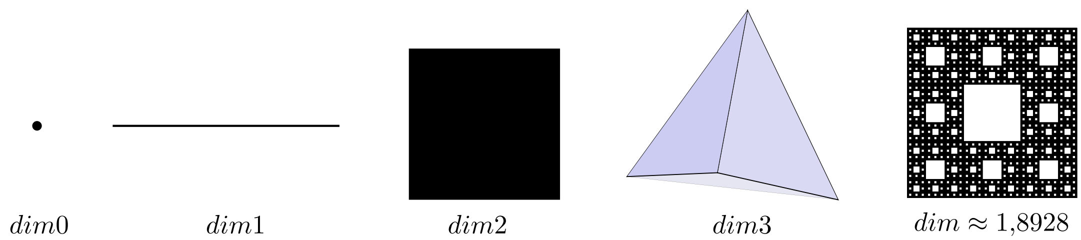



Figura 1.5: Dimensiones

## 1.3. Dimension extraña

La geometría fractal ofrece un modelo alternativo al de la geometría clásica basado en las relaciones entre el objeto y sus partes a diferentes escalas, sin necesidad de recurrir a otras formas geométricas (esferas, planos, cilindros) exteriores a él. La geometría fractal busca y estudia aspectos geométricos que son invariantes con el cambio de escala, permitiendo esta invarianza definir el concepto de dimensión fractal. Esta geometría es revolucionaria, innovadora e incluso, en sus orígenes, escandalosa. La principal novedad reside en la introducción de un concepto de dimensión geométrica que no tiene por qué ser un número natural. La geometría euclidiana asigna a un punto, dimensión 0, a una recta, dimensión 1, a las superficies planas, dimensión 2, y a los sólidos, dimensión 3.
En principio estas dimensiones conocidas 0, 1, 2 y 3 parecerían ser los únicos valores que podría tomar la dimensión de un objeto geométrico. (Ver figura 1.5)¿Cuál es la dimensión de la carpeta de Sierpinski?
¿Una dimensión de 1.8928? (ver figura 1.5). Existe una "extraña" dimensión para nuestros conjuntos fractales. Una explicación que nos aproxima un poco a este fenómeno es que existen varias clases de dimensión: dimen-

| Número de copias | Factor de ampliación |
|---|---|
| $4^0$ | $2^0$ |
| $4^1$ | $2^1$ |
| $4^2$ | $2^2$ |
| $4^3$ | $2^3$ |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| $4^n$ | $2^n$ |

Tabla 1.1:

sión topológica, dimensión de Hausdorff y dimensión fractal. No se entrará a definir formalmente qué significan estos términos, pues nos saldríamos de los límites del presente trabajo. Solamente intentaremos acercarnos a una explicación, mediante ejemplos. Recordemos la Figura 1.4. El triángulo se puede descomponer en cuatro triángulos congruentes y el factor de ampliación es 2; ( es decir el número por el cual hay que multiplicar el lado de cada copia reducida, para obtener el conjunto total). Seguidamente podemos descomponer el triángulo en dieciséis triángulos con factor de ampliación 4, luego podemos descomponer el triángulo en sesenta y cuatro triángulos con factor 8. En general, el triángulo se puede descomponer en $4^n$ copias de sí mismo en donde cada copia se puede ampliar por un factor $2^n$ para alcanzar la figura original (Ver Tabla 1.1).
Obsérvese que para cada $n$ se cumple que $n^d = N$, donde $n$ es el factor de ampliación, $N$ el número de copias y $d$, la dimensión, (en nuestro ejemplo $d = 2$ pues es un triángulo, figura en el plano). Entonces:

$$d = \frac{ln(\text{número de copias semejantes a la figura original})}{ln(\text{factor de ampliación para obtener la figura original})}$$

Obsérvese ahora que la carpeta de Sierpinski se puede ver como la unión de ocho copias reducidas de sí misma (es decir $N = 8$), cada una con factor de ampliación $n = 3$. Así la dimensión del conjunto fractal llamado la carpeta de Sierpinski estaría dada por: $\log 8/\log 3 \approx 1{,}8927$. De esta manera $1 < d < 2$, de donde se puede deducir que la carpeta de Sierpinski no es una curva ni una superficie, expresando este resultado de manera intuitiva $C$ llena el espacio más que una curva pero menos que una superficie.
Existe un fractal famoso llamado el **tetraedro de Sierpinski** que se puede

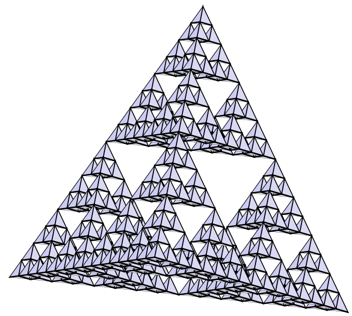


Figura 1.6: Tetraedro de Sierpinski

ver como la versión del triángulo de Sierpinski en $\mathbb{R}^3$. Éste fractal posee dimensión igual a: $D = ln4/ln2 = 2$, luego posee una dimensión entera!. Hablaremos mas detalladamente de este fractal más adelante (ver figura 1.6)

En este caso nos preguntamos entonces ¿Qué diferencia la geometría fractal de la geometría euclidiana, si nos damos cuenta que este fractal posee dimensión entera? Anteriormente habíamos dicho que existen otras dimensiones de las cuales hablaremos, una es la dimensión de Hausdorff y la otra es la dimensión topológica. La dimensión $D_h$ de *Hausdorff-Besicovitch* llamada así, en honor a sus creadores, no tiene mucho en común con la dimensión topológica $D_t$. Cuando se trabaja en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, ninguna de las dos dimensiones $(D_t, D_h)$ es inferior a cero ni superior a $n$, sin embargo la dimensión $D_t$ es siempre un entero mientras que $D_h$ no siempre lo es. La desigualdad $D_h \geq D_t$ siempre se cumple para todo objeto euclidiano por ejemplo en un cuadrado, $D_h = D_t = 2$. Para un segmento de línea se cumple también que $D_h = D_t$, con dimensión 1. Pero para todo fractal $D_h \geq D_t$, por esta razón Mandelbrot define fractal como un conjunto para el cual la dimensión de Hausdorff-Besicovitch excede estrictamente la dimensión topológica. Por ejemplo para el Triángulo de Sierpinski la dimensión topológica es 1 mientras que la dimensión de Hausdorff es $\ln 3/\ln 2$ y para el tetraedro de Sierpinski la dimensión topológica es 1 y la dimensión de Hausdorff es 2. Entonces se podría definir qué es un fractal así: fractal es un conjunto autosimilar para el cual la dimensión de Hausdorff excede estrictamente su dimensión topológica. En este trabajo, no se darán en detalle las definiciones de los conceptos de dimensión de Hausdorff y dimensión topológica ya que su contenido es complejo.

## 1.4. Ejemplos de conjuntos fractales

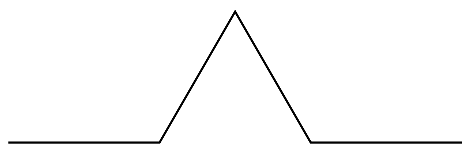
### 1.4.1. La curva de Koch

Helge Von Koch (1870-1924) inspiró a Mandelbrot en el descubrimiento de la geometría fractal con esta curva hermosa que se asemeja a una costa natural. Para su construcción geométrica se inicia con un segmento de recta de longitud 1, $K_0$ (ver figura 1.7). En el primer paso, este segmento se divide en tres partes equivalentes. La parte del centro se reemplaza por un triángulo equilátero al que se le quita la base, el segmento queda entonces convertido en una curva conformada por cuatro segmentos de igual longitud (1/3 de $K_0$). Este primer paso lo llamamos $K_1$ (ver figura 1.7). Se repite el proceso por cada segmento formado obteniéndose una sucesión $(K_j)$, con $j$ en los naturales, la curva de Koch es lo que podríamos llamar la curva "límite" de esta sucesión de curvas, obtenida después de realizar el proceso "infinitas veces"; el límite de esta sucesión se denota como $K$. Se puede observar una propiedad fundamental en los fractales: la auto similitud (ver figura 1.7).
Cuánto mide la curva de Koch? Iniciamos con $K_0$ el cual es un segmento de línea que tiene longitud $L$, en $K_1$ la curva consta de cuatro segmentos de igual longitud $(L(1/3))$, la curva tiene $4 * 4$ segmentos de longitud $L(1/3^2)$ y luego 4,4,4 segmentos lineales con longitud $L(1/3^3)$, en la tercera iteración y así sucesivamente. En la etapa $n$ la curva tendrá de longitud $4^n L(1/3^n)$ como se observa, en cada iteración la longitud de la curva crece por un factor de 4/3, convirtiéndose en una curva de longitud infinita. Algo maravilloso ,no.

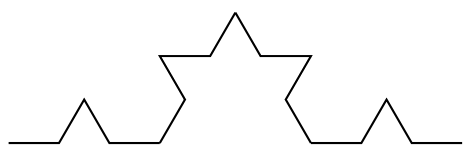
Ahora, si en lugar de una línea hubiese escogido un triángulo como semilla y sobre cada lado de éste se construye una curva de Koch en forma tal que las tres partes resulten congruentes, se obtiene una figura muy particular conocida como *el copo de nieve o isla de Koch*, llamada así por el parecido con copos e islas reales. (ver figura 1.8).

Cuál es la dimensión de $K$? Obsérvese simplemente que en este caso $N = 4$ y $n = 3$ de modo que $D = \ln 4 / \ln 3 \approx 1{,}2618$.

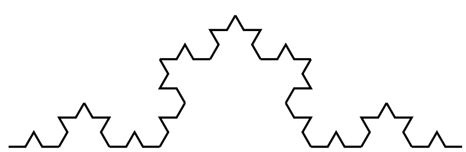
$K_0$: Semilla de la curva de Koch



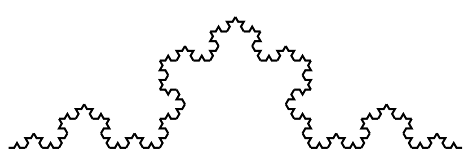
$K_1$: Primera iteración de la curva



$K_2$: Semilla de la curva de Koch

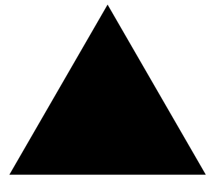


$K_3$: Primera iteración de la curva de Koch

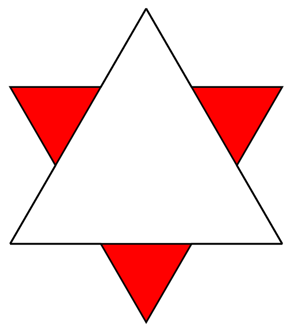


$K_4$: Segunda iteración de la curva de Koch

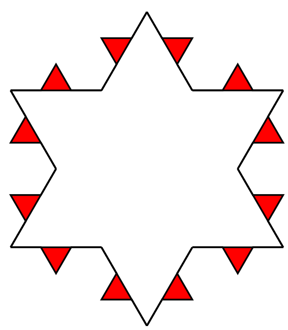
Figura 1.7: Descripción de la construcción de la curva de Koch



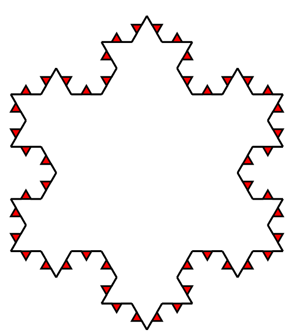
$I_0$: Semilla



$I_1$: Primera iteración



$I_2$: Segunda iteración



$I_3$: Tercera iteración

Figura 1.8: Descripción de la construcción de la isla de Koch

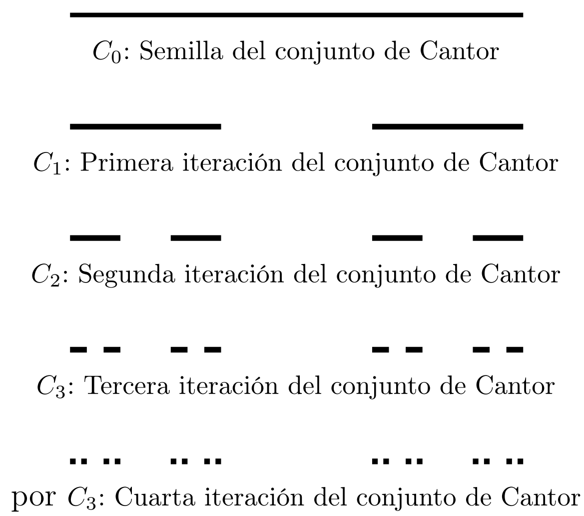



Figura 1.9: Descripción de la construcción del conjunto de Cantor

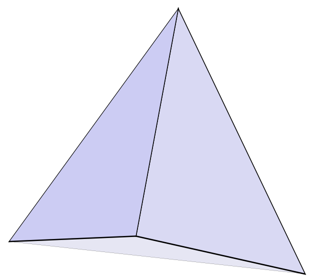
## 1.4.2. El conjunto de Cantor

Estudiado por el matemático alemán George Cantor (1845-1918), el conjunto de Cantor es considerado como un precursor de los fractales. Posee una serie de notables propiedades métricas, y es complejo de describir con el lenguaje de las matemáticas. Se trata de un conjunto difícil de aceptar conceptualmente porque se desvanece progresivamente hasta casi hacerse invisible, aunque por otro lado se puede demostrar que tiene infinitos elementos incluso más que el conjunto de los números naturales. Para construir el conjunto de Cantor partimos del segmento $C = [0, 1]$ el cual se encuentra contenido en los reales, dividimos dicho intervalo en tres partes iguales y eliminamos el segmento central, considerando solo los dos intervalos cerrados de los extremos (ver figura 1.9).
$C_{11} = [0, 1/3], C_{12} = [2/3, 1]$ cada uno de ellos de longitud $1/3$.
Cada uno de estos intervalos se divide a su vez en tres intervalos iguales, descartando de nuevo los intervalos centrales que resultan de tal división y considerando los cuatro intervalos cerrados: $C_{21} = [0, 1/9], C_{22} = [2/9, 1/3], C_{23} = [2/3, 7/9], C_{24} = [8/9, 1]$ cada uno de ellos de longitud $1/9$. Este proceso es repetitivo. Después de la $n$-sima etapa quedan $2^n$ intervalos de longitud $1/3^n$. El conjunto de Cantor es el conjunto de puntos que quedan al llevar a cabo todas las etapas de eliminación. Y aunque pareciera

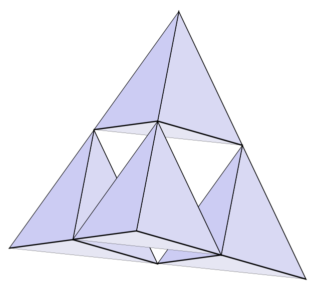
que quedan pocos puntos se puede demostrar que queda no solo un número infinito de puntos sino que quedan tantos puntos como números reales. Si realizamos la resta de la longitud inicial 1 menos los diferentes segmentos que vamos eliminando en cada fase de construcción del conjunto obtenemos que el conjunto de Cantor tiene longitud 0 (ver figura 1 del artículo [1]).
En este conjunto de Cantor se puede observar una propiedad de los fractales: la auto similitud. Es una propiedad intrínseca pues el conjunto se puede ver como una colección de piezas arbitrariamente pequeñas, cada una de las cuales es una versión exacta, pero reducida proporcionalmente del conjunto de Cantor. Se deja como ejercicio al lector determinar la dimensión del conjunto de Cantor.

### 1.4.3. El tetraedro de Sierpinski

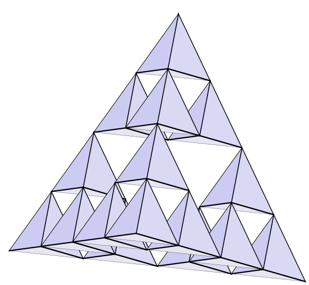
Para la construcción del tetraedro de Sierpinski, se toma un tetraedro regular $P_0$ con longitud de arista 1. Se ubican los puntos medios de cada arista y se conectan. Se conservan los cuatro nuevos tetraedros formados por los vértices y se remueve el restante del tetraedro inicial $P_0$, que resulta ser un octaedro de longitud de arista $1/2$, el cual se define como $O_0$. La figura que se obtiene consta de cuatro tetraedros semejantes al tetraedro inicial $P_0$, figura que se denota como $P_1$. El proceso se repite para cada tetraedro semejante al tetraedro inicial Po, es decir, se ubican los puntos medios de cada arista (en cada tetraedro por separado) y se conectan. Se conservan los tetraedros formados por el proceso y se remueve el restante (octaedro de longitud de arista $1/2$, el cual se denota como $O_1$). La figura obtenida la llamaremos $P_2$, así sucesivamente construiremos $P_3, P_4, P_5, \cdots, P_n$ cual nos genera una sucesión $(P_n)$, con $n$ en los naturales de figuras que cada vez son más similares, indicando de esta manera que al realizar varios pasos de la construcción, de las figuras no parecen tener cambios notables, perceptibles al ojo humano (ver figura 1.10).
Aunque no se tiene una herramienta que permita dibujar el resultado con todo detalle, la tecnología computacional da una idea de lo que sería tal límite. Esta figura limite se le da el nombre de Tetraedro de Sierpinski (ver figura 1.11).
Supongamos que el volumen del tetraedro original es igual a 1. Cuando el octaedro inicial es removido en el primer paso, él toma la mitad del volumen inicial, y en el próximo paso toma otro medio dejando solo $1/4$ del volumen original. En el siguiente paso toma otro medio dejando solo $1/8$ del volumen



$I_0$: Semilla



$I_1$: Primera iteración



$I_2$: Segunda iteración

Figura 1.10: Tres primeras iteraciones del tetraedoro de Serpienski

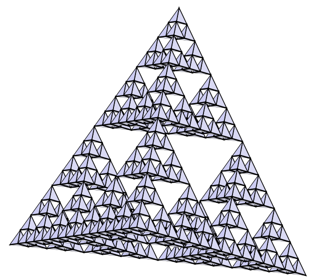


Figura 1.11: Tetraedoro de Serpienski

inicial. En el cuarto paso, solo permanece $1/16$ del volumen que había en el tetraedro original. Entonces nos damos cuenta que el volumen removido va creciendo. Por tanto, a medida que avanzamos en la construcción del tetraedro, se van obteniendo figuras que van teniendo cada vez menos y menos volumen (1, $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/32$,$\cdots$), lo que nos muestra que el volumen en la figura límite es cero.

### 1.4.4. La esponja de Menger

Este bello fractal creado por Karl Menger en 1926, matemático pionero de la teoría de la dimensión topológica; siendo el primero en dar una definición de dimensión estrechamente relacionada con la dimensión topológica, además construyó un ejemplo clásico de fractal llamado la esponja de Menger.
Este majestuoso fractal es una especie de visión tridimensional de la carpeta de Sierpinski.
Para su construcción se toma un cubo como parte inicial $M_0$, el cual se divide en 27 cubos y se elimina el cubo central de cada cara y el que queda exactamente en el centro del cubo, es decir, se eliminan en total 7 cubos, quedando 20 y obteniéndose $M_1$ (ver figura 1.12). En cada uno de los 20 cubos que quedan se repite el proceso (se divide en 27 cubos y se eliminan 7) y así sucesivamente. Se obtiene la sucesión de figuras $M_0, M_1, M_2, \cdots, M_j, \cdots$.
Es claro que $M$ está formado por 20 copias de sí misma, con un factor de ampliación 3, luego su dimensión de Hausdorff es;
$D_H = \ln 20/\ln 3$ aproximadamente 2.7268
Su dimensión topológica es 2, luego se cumple que $D_h > D_t$. Este valor 2.7268 nos deja ver que la esponja de Menger no es bidimensional ni tridimensional,

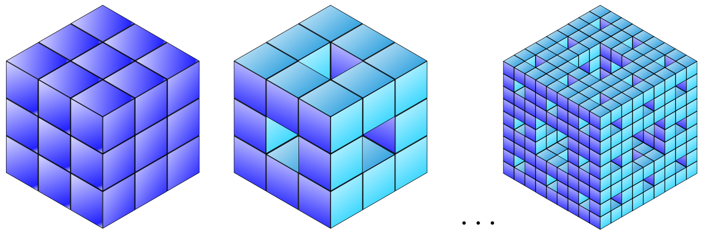


Figura 1.12: Descripción de la construcción de la esponja de Menger

no es una superficie, pero tampoco es un sólido, sino "algo intermedio" entre ellos.

# Capítulo 2

# Comentarios y desarrollo de los talleres del artículo

En este capítulo se dará a conocer, el desarrollo de los talleres del articulo[1] (cuya traducción esta al inicio de este documento) y comentarios, sugerencias y modificaciones al mismo.

## 2.1. Desarrollo de los talleres

**Hoja 1. Datos obtenidos para el conjunto de Cantor**

| Iteración | Longitud segmento | Número de segmentos | Longitud total |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | $1/3$ | 2 | $2/3$ |
| 2 | $1/9$ | 4 | $4/9$ |
| 3 | $1/27$ | 8 | $8/27$ |
| 4 | $1/81$ | 16 | $16/81$ |

Escriba el patrón general para cada columna.

El patrón general para el número de iteraciones es: $n$.
El patrón general para la longitud de cada segmento es: $(1/3)^n$.
El patrón general para el número de segmentos es: $2^n$.
El patrón general para la longitud total es: $(2/3)^n$.

**Hoja 2. Explorando el crecimiento del copo de nieve Koch**

**1. Explorando el perímetro**

**1.** Orientados por el profesor para dibujar la semilla de el copo de nieve Koch, complete los datos obtenidos:

| Iteración | Perímetro agregado | Perímetro total |
|---|---|---|
| $K_0$ | 0 | 27 |
| $K_1$ | 9 | 36 |
| $K_2$ | 12 | 48 |

**2.** Investigue los patrones que se ven en los datos que están en su tabla. Qué conclusiones puede sacar? Sea lo mas especifico y preciso posible.

Se puede observar que el perímetro del copo de nieve Koch se va haciendo más y más grande, con lo cual se puede afirmar que se aproxima al infinito. Después de muchas iteraciones se puede observar que el perímetro agregado será 1/3 por el valor del perímetro total de la iteración anterior. En forma general el perímetro agregado $U_n$ esta dado por:

$$U_n = (1/3)V_{n-1}(\text{perímetro agregado}), U_0 = 0$$

Se puede observar que el perímetro total, después de muchas iteraciones será 4/3 por el valor del perímetro total de la iteración anterior. En forma general, el perímetro total $V_n$ esta dado por:

$$V_n = (4/3)U_{n-1} + V_{n-1}(\text{perímetro total}), V_0 = 27$$

**3. Explorando el área**

Volver al paso inicial del copo de nieve Koch. Esta vez, completar los datos obtenidos para el área del copo de nieve Koch.

| Iteración | Área sumada | Área total |
|---|---|---|
| $\mathrm{K}_0$ | 0 | 81 |
| $\mathrm{K}_1$ | 27 | 108 |
| $\mathrm{K}_2$ | 12 | 120 |

**4.** Investigue los patrones que se ven en los datos que están en su tabla. Qué conclusiones puede sacar? Sea lo mas especifico y preciso posible.

Se observa con cada iteración que el área continúa creciendo en una razón que se disminuye, resultando en una absoluta disminución en la cantidad de crecimiento, hasta la iteración número 13 el área total tiende a 129.6 . Entonces se observa que el área del copo de nieve Koch es acotada.
Después de muchas iteraciones se puede observar que el área adicionada será 4/9 por el valor del área total de la iteración anterior. En forma general el área adicionada Un esta dada por:

$$Un = (4/9) * V_{n-1} \quad \text{(área adicionada)}, \quad Uo = 0$$

Se puede observar que el área total, después de muchas iteraciones será 4/9 por el valor del área total de la iteración anterior mas el valor del área adicionada de la iteración anterior. En forma general, el área total $V_n$ esta dada por:

$$Vn = (4/9) * Vn - 1 \quad \text{(área total)}, \quad Vo = 81$$

**Hoja 3 A. Explorando las matemáticas del perímetro**

**1.** Escriba ecuaciones recursivas que describan el primer perímetro agregado de el copo de nieve Koch en estas $n$ iteraciones ( llame a cada iteración $U_n$) y luego el perímetro total del copo de nieve Koch en estas $n$ iteraciones (llame a esta iteración $Vn$). Use los datos de la actividad de la hoja 2. Continué con estas ecuaciones en su calculadora y escriba las ecuaciones aquí:

$$U_n = (1/3)V_{n-1} \quad \text{(perímetro adicionado)} \quad V_0 = 0$$

$$V_n = (4/3)V_{n-1} \quad \text{(perímetro total)} \quad V_0 = 27$$

**2.** Estén seguros que sus calculadoras estén en modo “seq”, el cual admite ecuaciones recursivas, su ventana puede ser como la siguiente:

| | | |
|---|---|---|
| $U_n$ inicial = 0 | $n$Max. = 10 | $Y$max. = 500 |
| $V_n$ inicial = 27 | $X$min. = -2 | $Y$scl = 100 |
| $N$ inicial = 0 | $X$max. = 10 | $X$scl = 5 |
| $Y$min. = 0 | $N$min=0 . | |

**3.** Use las tablas claves para crear las tablas para el perímetro agregado, hallado en $U_n$, y el perímetro total en $V_n$, escriba sus resultados.

| Iteración | Perímetro agregado | Perímetro total |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 27 |
| 1 | 9 | 36 |
| 2 | 12 | 48 |
| 3 | 16 | 64 |
| 4 | 21.333 | 85.333 |
| 7 | 50.568 | 202.27 |
| 10 | 119.86 | 479.46 |
| 20 | 2128.5 | 8514.1 |

**4.** Verifique de nuevo los resultados de su calculadora; para determinar el perímetro con bloques patrón, si usted encuentra alguna discrepancia necesitará cambiar las ecuaciones que usted ingresó en la calculadora.

**5.** Usando la calculadora, encontrar el perímetro total y el agregado, en la cuarta, séptima y décima iteración.

| Iteración | Perímetro agregado | Perímetro total |
|---|---|---|
| 4 | 21.333 | 85.333 |
| 7 | 50.568 | 202.27 |
| 10 | 119.86 | 479.46 |

**6.** Qué parece sucederle a el perímetro total del copo de nieve Koch bajo cada iteración? Argumente su respuesta.

En cada iteración el perímetro total aumenta rápidamente.

### Explorando la Matemática de Área

**7.** Escriba las ecuaciones recursivas para el area agregada, $V_n$, y el área total del copo de nieve, $V_n$ ingrese estas ecuaciones en su calculadora y escríbalas aquí:

$$U_n = V_n - V_n - 1$$

área adicionada

$$V_n = 4/9U_{n-1} + V_{n-1}$$

**8.** Reinicie su calculadora para el perímetro, con los siguientes cambios en la ventana:

$U_n$ Inicial $= 27$ $\quad$ $V_n$ Inicial $= 108$

**9.** Use la tabla clave para crear la tabla del área adicionada, encontrar un Un, y el área total en $V_n$, escriba sus resultados.

| Iteración | Area sumada | Area total |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 81 |
| 1 | 27 | 108 |
| 2 | 12 | 120 |

**10.** Verifique de nuevo los resultados de su calculadora; para determinar el área con bloques patrón, si usted encuentra alguna discrepancia necesitara cambiar las ecuaciones que usted ingreso en la calculadora.

**11.** Usando la calculadora, encontrar el área total y la agregado, en la cuarta, séptima iteración.

| Iteración | Area sumada | Area total |
|---|---|---|
| 4 | 5.33 | 127.70 |
| 7 | 0.468 | 129.23 |
| 10 | 0.817 | 129.58 |

**12.** Que parece sucederle a el área total del copo de nieve Koch bajo cada iteración? Argumente su respuesta.

En cada iteración se aprecia que el área total aumenta aunque no tan rápidamente como ocurría con el perímetro.

## 2.2. Algunas sugerencias, comentarios y modificaciones al artículo [1]

El artículo propone una serie de actividades sobre fractales para estudiantes de secundaria, estudiando específicamente el conjunto de Cantor y el copo de nieve Koch. En la parte anterior a las actividades se da una reseña de la geometría fractal y de la definición de fractal, no en sentido formal. Al hablar de "fractal", se dice que en las actividades los estudiantes podrán ver dos características que representan un fractal: autosimilitud y rugosidad. En este sentido, se puede decir que como una sugerencia y a la vez modificación a esta parte del articulo [1], se propone además considerar la característica de fractal, explicando, de una manera sencilla a que se refiere "dimensión" debido al alcance limitado de este tema en el área de las matemáticas correspondiente al bachillerato, el calculo y la comprensión lo proponemos en el taller que presentamos en el siguiente capítulo, sobre la Esponja de Menger.

Por otra parte, en la actividad 2, se pide a los estudiantes que construyan el conjunto de Cantor para lo cual se les pide trazar un segmento de línea de 6 pulgadas. Naturalmente en nuestro contexto las medidas en pulgadas, es conveniente transformarlas de manera adecuada a centímetros. Sería de nuevo interesante adicionar en las actividades, otra donde los estudiantes calculen la dimensión de este fractal.

En el articulo [1], no se explica la diferencia entre la curva de Koch y el copo de nieve de Koch, de esta manera, el estudiante puede confundirse. Debería darse una explicación en forma gráfica del copo de nieve de Koch antes de las actividades propuestas, explicando paso a paso la construcción del copo de nieve, como un fractal ajeno a la curva de Koch, para luego exhibirlo como un arreglo especial de la curva de Koch. Esta explicación se puede hacer como la de la curva de Koch, es decir, como puede verse en las figuras 2 y 3 de [1]. Una sugerencia sobre la construcción puede verse en la figura 1.8.

En la actividad 4([1]) se dice a los estudiantes que los que quieran utilicen las calculadoras graficadoras TI-82, o TI-83 para resolver los puntos 3.5 de la hoja 3A y, 9 y 11 de la hoja de respuestas 3B . Estos cálculos también se pueden hacer en calculadoras no tan sofisticadas, ya que debido al alto costo de la TI en nuestro país no todas las instituciones de educación secundaria cuentan con esta herramienta.

Para las instituciones que si cuentan con ellas deben pedir a los estudiantes que ingresen las ecuaciones recursivas $U_n$ ny $V_n$ para alcanzar el perímetro adicionado y total y el área adicionada y total del copo de nieve de Koch, luego deben estar seguros de que la calculadora se encuentre en modo seq ingresando los siguientes valores:

$U_n inicial = 0, \quad V_n inicial = 27, \quad ninicial = o$
$nmnimo = 0, \quad nmximo = 10, \quad Xmin = -2$
$Xmax = 10, \quad Xscl = 5, \quad Ymin = 0,$
$Ymax = 500$
Luego hallan los valores para el perímetro adicionado y el perímetro total, y el área adicionada y total de las iteraciones 1,2,4,7,10 y anotan los resultados que estan en las hojas respuestas 3A y 3B.

Al resolver las actividades de la hoja 3A, explorando las matemáticas del área, vemos que la fórmula general para el área adicionada $U_n$ es:

$$U_n = V_n - V_n - 1$$

área adicionada

De esta forma encontramos los valores del área adiconada en las iteraciones 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 del copo de nieve de Koch.
Finalmente se sugiere la aplicación y análisis de cada uno de los talleres desarrollados en el articulo [1], junto con los propuestos en este trabajo de monografía como posible tema a desarrollar en otras monografías.

# Capítulo 3

# Talleres propuestos

En este capítulo se proponen dos talleres: Árboles fractales y la esponja de Menger. Cada uno contiene una serie de actividades diseñadas para estudiantes de secundaria, en donde a medida que ellos van desarrollando cada taller, se espera que construyan la parte básica del concepto de fractal y saquen sus propias conclusiones.

## 3.1. Taller 1. Árboles fractales

**Objetivo**: a partir de la construcción de ün árbol fractal", identificar características propias de los fractales y realizar cálculos relacionados con sus medidas.

### 3.1.1. Actividad 1

Se pide a cada estudiante que lea, analice y discuta con sus compañeros el siguiente escrito: "Fractal" viene de la palabra del latín "frangere", que significa romper, y el adjetivo en latín es "fractus" el cual significa roto e irregular. Aunque a los fractales se les llamó así, porque tenían dimensiones extrañas (fraccionaria), los fractales aún poseen una definición formal y universal (desde el punto de vista matemático). Son objetos que se presentan en la naturaleza: si tomamos por ejemplo una coliflor: la cabeza de este vegetal está conformada por muchos racimos, cada uno de los cuales al ser comparados con toda la cabeza resultan ser similares a esta. A su vez cada racimo

está constituido por varias réplicas reducidas de sí mismo. Si vemos en el mar, las olas están conformadas por pequeñas olas y estas a su vez por otras olas más pequeñas y así sucesivamente.
Estos objetos cumplen una propiedad llamada autosimilitud que corresponde a una propiedad esencial de los fractales y se puede describir así: el todo está formado por varias copias de sí mismo sólo que reducidas y colocadas en diferente posición, o, de otra manera, el todo es igual a sus partes salvo el tamaño.
Fractal como ya se había expuesto, viene del verbo frangere cuyo significado es romper. Romper tiene varios significados, dependiendo del contexto en que se aplique. Por ejemplo: fractura significa roto; implica romper, una riña es pelearse; implica romper, una fracción es la parte de un número; implica romper, refracción es un ejemplo del rompimiento de la luz, fragmento es un ejemplo de parte de una pieza; implica romper, infracción es un ejemplo del rompimiento de la ley.
Cada estudiante debe escribir sobre su cuaderno de apuntes ejemplos de la naturaleza en donde se encuentren objetos fractales y decir por qué creen que son objetos fractales.

### 3.1.2. Actividad 2

Para realizar esta actividad, los estudiantes necesitan una hoja de papel milimetrado, regla y transportador.

**Paso 0**
Se pide a los estudiantes que sobre la hoja de papel milimetrado, dibujen un tronco de un árbol con el grosor y la longitud que cada uno quiera, como se ve en la figura 3.1.
**Paso 1**
Se pide a los estudiantes que dibujen dos ramas de menor grosor y longitud, la mitad del tronco, teniendo en cuenta que:

a.El ángulo formado por las dos nuevas ramas debe ser de 90º.
b.El ángulo que forma una nueva rama y el tronco debe ser 135º.
A este paso lo llamaremos paso 1.
Para este paso 1, se pide a los estudiantes responder:

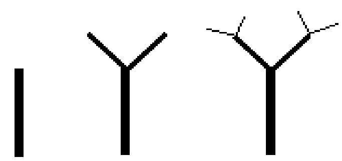


Figura 3.1: Primeros tres pasos del arbol fractal

1. El número de nuevas ramas es:
2. El número total de ramas es:
3. La longitud de una nueva rama es:
4. La longitud total de las ramas es:

**Paso 2**
Se pide a cada estudiante que dibuje sobre las ramas hechas, dos ramas mas, para dibujar las cuatro, (dos por cada rama) se debe tener en cuenta que:

a. El ángulo formado por las dos nuevas ramas debe ser de 90º.
b. El ángulo que forma una nueva rama y una rama del paso anterior debe ser 135º. A este paso lo llamaremos paso 2.
Para este paso 2, se pide a los estudiantes responder:

1. El número de nuevas ramas es:
2. El número total de ramas es:
3. La longitud de una nueva rama es:
4. La longitud total de las ramas es:

**Paso 3**
Se pide a cada estudiante que continué con las mismas instrucciones del paso anterior y que responda estas mismas preguntas. Pueden hacer el proceso los pasos que quieran.

Para esta actividad ver figura 3.1.

### 3.1.3. Actividad 3

Para esta actividad ya no se necesita el papel milimetrado pues cada estudiante debe sacar conclusiones y escribirlas en su cuaderno de apuntes.

Se pide a los estudiantes que contesten las preguntas vistas en el numeral anterior y apunten en sus cuadernos las respuestas. Se pide a cada estudiante que diga que pasa en el paso 5, en el paso $9, \cdots$ en el paso $n$. Para este paso $n$ se pide a cada estudiante que conteste las siguientes preguntas (ver figura 2.1):

1. El número de nuevas ramas para el paso $n$ es:
2. El número total de ramas para el paso $n$ es:
3. La longitud de una nueva rama para el paso $n$ es:
4 . La longitud total de las ramas en el paso $n$ es:

### 3.1.4. Actividad 4

Se pide a los estudiantes responder y discutir en torno a la pregunta: ¿ Cuál es la longitud total del árbol fractal?

### 3.1.5. Actividad 5

Se pide a los estudiantes que resulevan los siguientes puntos:
1. Cada estudiante debe inventar otro fractal que tenga forma de árbol.
2. Qué características se identifican en el árbol fractal?
3. Se pide a los estudiantes, variar los ángulos en cada paso, hacer las figuras correspondientes y sacar conclusiones.
4. Se pide a los estudiantes, variar en número de ramas en cada paso, y sacar conclusiones.

## 3.2. Taller 2. La esponja de Menger

**Objetivo**: Construir modelos de los tres primeros pasos de la esponja de Menger, deducir su dimensión y su volumen.

### 3.2.1. Actividad 1

Se pide a cada estudiante que lea, analice y discuta con sus compañeros el siguiente escrito:

La geometría en su paso por el tiempo, fue creciendo poco a poco y hoy es una rama de la matemática que amplía cada vez mas sus dominios contribuyendo a un mejoramiento en los conocimientos humanos. Y en la búsqueda de estos conocimientos, se encontró una rama de la geometría llamada geometría fractal. Esta geometría constituye quizá un paso intermedio entre la geometría clásica y el análisis moderno, utilizando procesos que generan imágenes maravillosas. Estas imágenes maravillosas, reciben el nombre de fractal. Los fractales poseen dos propiedades esenciales: autosimilitud y dimensión.

La autosimilitud o autosemejanza es: “el todo está formado por varias copias de sí mismo, sólo que reducidas y colocadas en diferente posición”, o de otra forma: “el todo es igual a sus partes salvo el tamaño”.

Una novedad reside en la introducción de un concepto de dimensión geométrica que no tiene por qué ser un número natural. La geometría euclidiana asigna a un punto, dimensión 0, a una recta, dimensión 1, a las superficies planas, dimensión 2, y a los sólidos, dimensión 3.
En principio estas dimensiones conocidas 0, 1, 2 y 3 parecerían ser los únicos valores que podría tomar la dimensión de un objeto geométrico (ver figura 1.5).
Existe otro tipo de dimensión para nuestros conjuntos fractales. Para explicar en que consiste esta propiedad vamos a tomar el siguiente ejemplo: un triángulo se puede descomponer en cuatro triángulos congruentes y el factor de ampliación es 2; (es decir el número por el cual hay que multiplicar el lado de cada copia reducida, para obtener el conjunto total). Seguidamente podemos descomponer el triángulo en dieciséis triángulos con factor de ampliación 4, luego podemos descomponer el triángulo en sesenta y cuatro triángulos con factor 8. Luego, el triángulo se puede descomponer en $4^n$ copias de sí mismo en donde cada copia se puede ampliar por un factor $2^n$ para alcanzar la figura original. (Ver Tabla 1.1)

Obsérvese que para cada n se cumple que $n^d = N$ donde $n$ es el factor de ampliación, $N$ el numero de copias y $d$, la dimensión, (en nuestro ejemplo $d = 2$ pues es un triángulo, figura en el plano). Entonces:

$$d = \frac{ln(\text{número de copias semejantes a la figura original})}{ln(\text{factor de ampliación para obtener la figura original})}$$

Un fractal maravilloso conocido con el nombre de la esponja de Menger fue creado por Karl Menger en 1926, el cual se ve como una versión tridimensional de la carpeta de Sierpinski. (Ver figura 1.6 y 1.13)

Se construye partiendo de un cubo $E_0$, el cual se divide en 27 cubos y se elimina el cubo central de cada cara y el que queda en el centro del cubo inicial, es decir, en total se eliminan 7 cubos, quedando 20; de esta manera se obtiene $E_1$ (Ver figura 1.6)
Se repite el mismo proceso en cada uno de los 20 cubos que quedan (dividir en 27 cubos y eliminar 7) y así sucesivamente. Luego de varios procesos se puede ver una aproximación del fractal: la esponja de Menger.
Se pide a cada estudiante que saque por lo menos tres conclusiones del texto.

### 3.2.2. Actividad 2

Para realizar esta actividad los estudiantes necesitan colbon, tijeras, cartulina, lápiz y regla. Se pueden hacer en grupos de cuatro estudiantes.

**Paso 0**
Se pide a cada grupo de estudiantes que construyan en cartón-cartulina un cubo de 9 centímetros de arista. Suponer que el cubo tiene volumen 1. (Ver figura 3.2)

**Paso 1**
Se pide a cada grupo de estudiantes que construyan en cartulina 27 cubos, cada uno de tres centímetros de arista. Luego de construidos los 27 cubos, se pide a los estudiantes que armen con ellos el cubo del paso anterior, sin pegar los cubitos( ver figura 3.3). A este paso se le llamará paso 1. Para este paso 1, se pide a los estudiantes responder:
1. El número de nuevos cubos es
2. El número total de cubos es
3. El volumen de cada cubo pequeño es

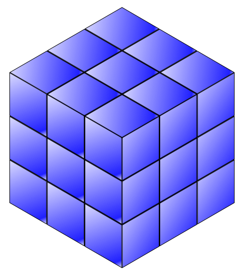


Figura 3.2: Esponja de Menger paso cero

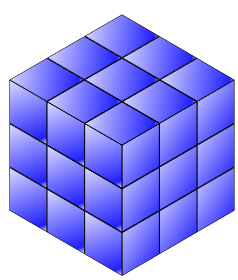


Figura 3.3: Esponja de Menger paso 1

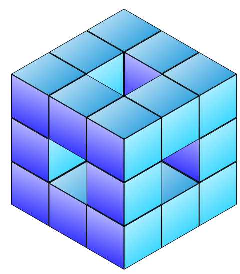


Figura 3.4: Esponja de Menger paso 2

4. El volumen del cubo grande es

**Paso 2**
Se pide a cada grupo de estudiantes que eliminen cada cubo que está en el centro de cada cara y el que queda en todo el centro (er figura 3.4).
Para este paso 2, se pide a los estudiantes responder:

1. El número de cubos que quedan es:
2. El volumen de cada cubo es:
3. El volumen de la figura que queda es:

**Paso 3**
Para el paso3 deben imajinar que en cada uno de los veintecubitosque forman la figura del paso 2,realizan el mismo proceso, es decir; dividir cada cubito en 27 y eliminar : el que está en el centro de cada cara y el que queda en todo el centro.
Se pide a cada grupo de estudiantes que diga qué pasa en el paso 3,4,5,... 9,... y en el paso $n$.

Para este paso $n$ se pide a cada estudiante que conteste las siguientes preguntas:

1. El número total de cubos para el paso $n$ es
2. El volumen de cada cubo para el paso $n$ es
3. El volumen total de la figura del paso $n$ es

### 3.2.3. Actividad 3

Se pide a cada estudiante que halle en la calculadora los valores correspondientes al volumen en cada paso de la construcción de la esponja de Menger, para el paso 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,8 9, y 10 y los ubiquen en la siguiente tabla:

| Paso $n$ | Volumen en el paso $n$ ($\mathrm{v}_n$) |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |
| 10 | |

Donde $n$ es el numero de pasos y $V_n$ el volumen en cada paso. Se pide a cada estudiante que responda las siguientes preguntas:

1.¿Qué le sucede al volumen en cada paso?
2.¿Cual piensa que es el volumen de la esponja de Menger? Porqué?
3.¿Conoce objetos de la naturaleza o del mundo real que se parezcan a la esponja de Menger, cuáles?
4.¿Qué conclusiones puede sacar de esta actividad?

### 3.2.4. Actividad 4

Con base en la lectura de la actividad 1, e identificando para la esponja de Menger los parámetros $N$ (número de copias semejantes a la figura original) y $n$ (factor de ampliación para obtener la figura oriinal), los estudiantes deben calcular la dimensión de la esponja de Menger.

Se pide a los estudiantes opinar y discutir en torno a las siguientes preguntas:

1.¿Considera que el número encontrado para la esponja de Menger es extraño, por qué?.

2.¿Es la esponja de Menger una superficie?, ¿Es un sólido?, ¿Por qué?.

En cada grupo deben sacar y escribir al menos tres conclusiones a partir de lo discutido.

# Conclusiones

Debido al desconocimiento y poco interés de los estudiantes y profesores de secundaria hacia la geometría elemental, vemos la necesidad de crear una propuesta metodológica para la enseñanza de esta área enfocada por la via de la geometría fractal.

Como es conocido, el inicio de la geometría fractal no posee un formalismo como otras áreas de la matemática, y que para su estudio en un comienzo son necesarios dos conceptos fundamentales: autosimulitud y dimensión, con los cuales los estudiantes de secundaria ya están familiarizados.

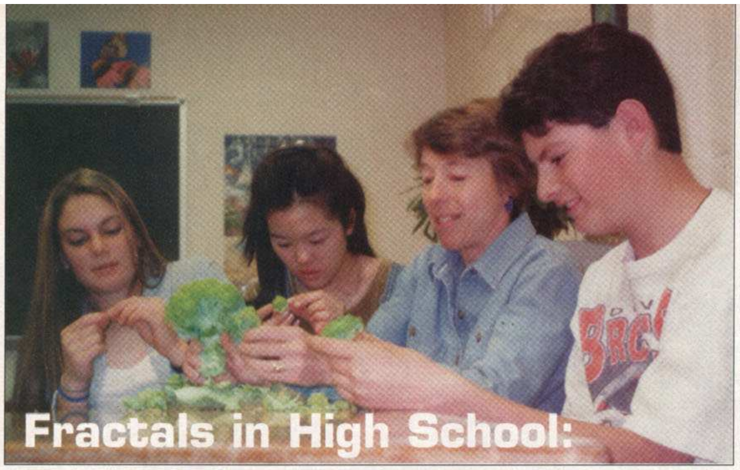
Se sugiere el diseño de talleres similares a los presentados en este trabajo para explorar la matemática de dos fractales en especial: la carpeta de Sierpinski y el tetraedro de Sierpinski, analizando el área y la dimensión del primero y el volumen y la dimensión del segundo.

Una forma de incluir la enseñanza de la Geometría Fractal en la secundaria es mediante talleres, los cuales ya han sido tema de desarrollo de otros trabajos de monografía, se componen de diferentes actividades en donde se facilita al estudiante el aprendizaje de los conceptos de fractales.

Los medios informáticos ofrecen posibilidades interesantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje en general. En Geometría Fractal este poderoso medio, permite a los estudiantes utilizar diferentes conceptos geométricos, manipulando expresiones numéricas e identificando las propiedades: autoslimilitud y dimensión, de los objetos de estudio de la geometría fractal.

# Capítulo 4

# ANEXOS





# Fractals in High School: Exploring a New Geometry

Randi Lornell and Judy Westerberg

For several years we have included a unit about fractal geometry in our traditional geometry classes. We were initially fascinated by this subject because of the beauty of fractal images and the counterintuitive mathematics inherent in them, as we discuss for two fractals, the Cantor set and the Koch snowflake. This article includes a brief description of fractals and their characteristics, some examples from our unit, and an argument about the reasons for including fractals in the mathematics curriculum.

*Fractals typically have the property of self-similarity*

## WHAT IS FRACTAL GEOMETRY, AND HOW CAN IT BE STUDIED IN THE CLASSROOM?

Most simply, fractal geometry is the geometry of nature.

Consider Euclidean geometry, systematized more than two thousand years ago. This geometry deals with such shapes as lines, circles, and cubes. Examples of these shapes abound in our world, but they usually characterize objects made by people. A wall, for example, is an approximation of a two-dimensional plane. But

> [c]louds are not spheres ... Mountains are not cones. Lightning does not travel in a straight line.... (Gleick 1987, 94).

So wrote Benoit Mandelbrot, father of fractal geometry, in 1977, explaining the need for new mathematical tools to describe and understand many natural phenomena.

### *What characteristics describe a fractal?*

Mandelbrot coined the word *fractal* to describe these natural phenomena. It comes from the Latin verb *frangere,* which means *to break* (Gleick 1987). This verb refers to a quality often characterizing natural objects; they look fragmented, irregular, broken, complex. Imagine, for example, the feel of tree bark as opposed to the feel of the top of a desk. Contrast the roughness of a coastline with the smoothness of a Euclidean arc.

Fractals typically have one other quality, that of *self-similarity*, meaning that a part of the whole closely resembles the whole. Imagine taking a cauliflower and breaking off a chunk. That chunk looks like the original. This process can be repeated several times, with each smaller piece resembling the original cauliflower.

A good way to begin the study of fractals is to have students compare familiar objects that have a definite Euclidean shape with other familiar objects that do not have a definite Euclidean shape. This compare-and-contrast activity drives home the need for additional ways to describe objects found in the natural world that are not Euclidean.

### *Activity 1*

Ask students to look around the classroom and to list objects and their shapes, for example, a desktop

*Randi Lornell, rlornell@aol.com, presently teaches seventh-grade mathematics at Cresthill Middle School, Highlands Ranch, CO 80126. She is interested in integrating mathematics with other disciplines. Judy Westerberg, judy–westerberg@ceo.cudenver.edu, teaches at Douglas County High School, Castle Rock, CO 80104. Her interests include performance-based education, the International Baccalaureate program, and fractals.*

is in the shape of a rectangle. Share students' ideas, and list them on a transparency or on the chalkboard. Then ask students to envision their backyard or a park and list objects and their shapes; for example, a tree trunk is cylindrical. Again share students' ideas, and list them on the transparency or on a chalkboard.

Next discuss whether a tree trunk really is a cylinder like a telephone pole. Ask how they are the same and how they differ. Pass around broccoflower, cauliflower, and tree branches; show the students that natural objects are generally rougher than Euclidean objects. Also use these natural objects to focus on the second major characteristic of fractals: self-similarity.

Thus, a new geometry is needed to describe these natural objects.

### *How does a fractal "grow"?*

Entwined with the characteristics of a fractal is the process by which it develops. That process is *recursion,* or *iteration:* "The same operation is carried out repeatedly [on a seed, or starting point], the output of one iteration being the input for the next one" (Peitgen, Jürgens, and Saupe 1992, 17).

An easy way to understand how iteration can create a fractal is by studying the classical fractal called the *Cantor set,* in which the middle third of a line segment is removed, iteratively.

### *Activity 2*

Ask students to draw a line segment about six inches long on a sheet of paper; assume that this line segment is one unit long. Label the line segment $C_0$. This line segment is called the *seed* of the fractal. Next, the students should mentally remove the middle third of $C_0$ and draw the result. Label this result $C_1$. Then they should mentally remove the middle third of the two segments from $C_1$ and draw the result, labeling it $C_2$. Draw $C_3$ and $C_4$ using the same set of instructions. See **figure 1.**

Discuss what the Cantor set would look like in its fifth, tenth, and one hundredth iterations. Students should see that after only a few iterations, the set begins to look more like a scattering of tiny dots, or dust, than a series of line segments. Discuss how the Cantor set shows the two basic characteristics of fractals, self-similarity and roughness, or complexity. It is also important to introduce the notion that this mathematical process can continue indefinitely and that the Cantor set itself is the result of this infinite process.

Hand out activity sheet 1, "Data Chart for the Cantor Set." Ask students to complete the chart for the seed and first four iterations of the Cantor set, using their drawings. The results should be as follows:

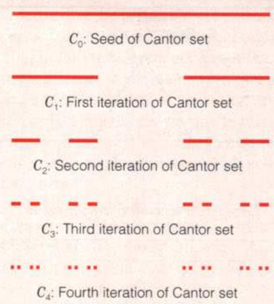



Fig. 1
Seed and first four iterations of the Cantor set

| Iteration | Length of Each Segment | Number of Segments | Total Length |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1/3 | 2 | 2/3 |
| 2 | 1/9 | 4 | 4/9 |
| 3 | 1/27 | 8 | 8/27 |
| 4 | 1/81 | 16 | 16/81 |

As students look for patterns in these data, they should see that the formulas for any iteration are as follows: iteration = $n$, length of each segment = $(1/3)^n$, number of segments = $2^n$, and total length = $(2/3)^n$.

Discuss the implications of these data: The total number of segments doubles in each iteration, but each segment is one-third the length of each segment in the previous iteration. Therefore, the total length decreases. Students compute the number of segments and total length for various iterations and quickly see an odd phenomenon: the number of segments approaches infinity, but the total length approaches zero.

Students can verify and extend the data with the graphing calculator, as demonstrated in activity 4, which uses data from a second classical fractal, called the *Koch curve.* The Koch curve was created by Swedish mathematician Helge von Koch in 1904. This fractal has a line segment as its seed. The operation that is carried out on this seed is the creation of an equilateral triangle whose base is the middle third of the segment; that base has been removed. The seed and the first iteration, known as $K_0$ and $K_1$, respectively, are shown in **figure 2.**

This operation is then iterated, that is, repeated exactly, on the resulting structure $K_1$, to form $K_2$; on $K_2$ to form $K_3$; on $K_3$ to form $K_4$; and so on. See **figure 3.**

In only three iterations, the fractal characteris-

***A new geometry is needed to describe these natural objects***

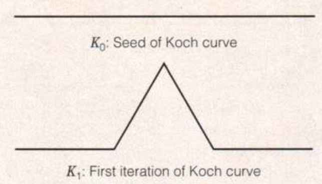



Fig. 2
Seed and first iteration of Koch curve

**_Students construct the first two iterations of the Koch snowflake with pattern blocks_**

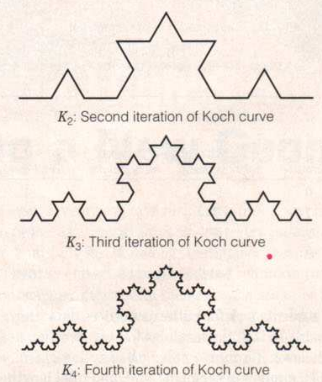



Fig. 3
Second, third, and fourth iterations of Koch curve

tics of the emerging Koch curve are evident: it looks rough, as if it would be bumpy to the touch, and it is self-similar, since it contains miniature versions of the whole on varying scales. Imagine how these characteristics are magnified after ten, twenty, or one hundred iterations!

The Koch curve has been extended to what is called the *Koch snowflake,* in which the seed is three line segments joined to form an equilateral triangle. Each segment is then iterated, following the directions given in the foregoing for the curve.

We ask students to "construct" the seed and first two iterations of the Koch snowflake with pattern blocks. See **figure 4.** This activity allows them to see the growth patterns of the perimeter and area. They then use their structures to explore the mathematics of the growth of area and perimeter under iteration and to develop the recursive equations describing the same. After they have developed the equations, they use the graphing calculator's table feature to verify their thinking. These activities are separated so that students can focus on their physi-



Fig. 4
Students building the Koch snowflake with pattern blocks

cal models before they attempt the more difficult equations.

*Activity 3*

Distribute buckets of pattern blocks to each small group. Also distribute activity sheet 2, "Exploring the Growth of the Koch Snowflake." To avoid confusion, have students complete their exploration of perimeter before they begin area.

*Exploring perimeter.* Assume that each green triangle pattern block has a side length of one unit, for a perimeter of three units. What are the perimeters of the blue rhombus (four units), the red trapezoid (five units), and the yellow hexagon (six units)? Ask students to build an equilateral triangle out of the pattern blocks so that each side length is nine units. This triangle is the seed of the Koch snowflake. One possibility for this structure, as well as for the first two iterations, is shown in **figure 5.** Ask a student to show the configuration on an overhead transparency, for this and each succeeding iteration. Discuss the perimeter of the seed (27 units), and have students begin to fill out the worksheet.

Ask students to construct the first iteration of the snowflake with pattern blocks. Again, discuss how much has been added to the perimeter (9 units), and the new total perimeter (27 + 9, or 36, units). Do the same for the second iteration (12 units are added, for a new total perimeter of 36 + 12, or 48, units). Discuss the growth pattern of the perimeter of the Koch snowflake under iteration: each iteration has one-third more total perimeter than the previous iteration. Thus, it appears that the perimeter will continue to grow, adding increasing length in each iteration through this constant growth rate.

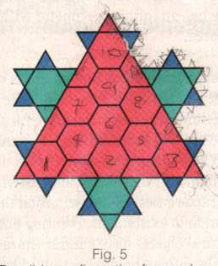


Fig. 5
Possible configuration for seed and first two iterations of the Koch snowflake using pattern blocks

*Exploring area.* Ask the students to go back to the seed of the snowflake by removing the two iterations' pattern blocks. Have the students follow the same process for area that they used for perimeter, this time assuming that the area of a green triangle pattern block is one square unit. Technically, if a side of the triangle is one unit, then the area of that triangle is $\sqrt{3}/4$; however, we have found that students are more successful in discovering the growth of area if they use the simplifying notion of one square unit. What then are the areas of the blue rhombus (2 square units), the red trapezoid (3 square units), and the yellow hexagon (6 square units)? Ask the students to calculate the area of this seed (81 square units).

Again ask students to construct the first iteration of the snowflake and to calculate both the added area (27 square units) and the new total area (81 + 27, or 108, square units). Discuss how the area change in this first iteration is similar to the perimeter change: the growth is 1/3. However, when the students build the second iteration, they should notice that the area growth for this iteration is considerably smaller (12 square units), resulting in a new total area of only 108 + 12, or 120, square units. This growth rate is only 12/108, or 1/9. It appears, then, that both the amount of growth and the growth rate are slowing.

Discuss this apparent discrepancy between the constant growth rate of the perimeter under iteration and the decreasing growth rate of the area. What will happen if we could continue to build further iterations of the snowflake?

This discussion about the differing growth patterns of perimeter and area of the snowflake under iteration often is spirited. Some students believe that the perimeter's growth rate will slow, resulting perhaps in a constant amount of growth or perhaps in a decreasing amount of growth; it seems only common sense that the perimeter will reach a steady state. Others wonder what would cause this result. Also, some students cannot accept that a constant growth rate in perimeter, resulting in an increasing amount of growth of perimeter, can possibly coexist with an area growth rate that is decreasing so quickly that it results in a decreasing amount of area growth. Again, this result seems counterintuitive.

The students are making conjectures on the basis of only a small amount of data. Therefore, these controversies lead easily into using the graphing calculator to simulate the growth of perimeter and area in further iterations.

### *Activity 4*

Distribute activity sheets 3A and 3B, "The Strange Mathematics of the Koch Snowflake." Students also need graphing calculators. The TI-82 or TI-83 graphing calculator can be used. This activity sheet reflects the use of the TI-82 graphing calculator.

*Analyzing the mathematics of the perimeter.* Discuss what will happen to the perimeter in the next, or third, iteration and why it will happen. Students should see that the perimeter will again grow by one-third because in the third iteration, the middle third of each line segment is removed, reducing the perimeter by one-third; however, a new equilateral triangle is added to that segment, increasing the perimeter by two-thirds, for a net gain of one-third. Discuss the perimeter growth in the fourth and further iterations; students should see that each iteration's perimeter will be one-third more than the perimeter of the previous iteration.

This worksheet asks students to create recursive equations that describe the added perimeter and the total perimeter in each iteration, respectively. These equations are as follows:

$U_n = (1/3) * V_{n-1}$ (added perimeter) $\quad U_0 = 0$
$V_n = (4/3) * V_{n-1}$ (total perimeter) $\quad V_0 = 27$

Students will see that the first three entries in the tables created by these equations correspond to their discoveries for the seed and first two iterations of the snowflake using pattern blocks. This correspondence with the physical model helps convince students of the accuracy of these equations.

The tables for the Koch snowflake's added perimeter and the total perimeter in its first four, seventh, tenth, and twentieth iterations are shown in **table 1.** Discuss this growth pattern. Students should see that the perimeter of the emerging Koch snowflake approaches infinity, that is, it increases without bound.

***What will happen if we continue to build further iterations of the Koch snowflake?***

| TABLE 1 | | |
|---|---|---|
| **Perimeter of the Koch Snowflake** | | |
| Iteration | Added Perimeter | Total Perimeter |
| 0 | 0 | 27 |
| 1 | 9 | 36 |
| 2 | 12 | 48 |
| 3 | 16 | 64 |
| 4 | 21.333 | 85.333 |
| 7 | 50.568 | 202.27 |
| 10 | 119.86 | 479.46 |
| 20 | 2128.5 | 8514.1 |

*Analyzing the mathematics of the area.* Creating equations for the added area and total area of the Koch snowflake is very difficult for most students. We assign this section for extra credit and then, during the next class period, have all students follow the directions for entering the equations.

Discuss the findings about area from the pattern blocks: whereas the first iteration adds one-third more to the initial area of the seed, the second iteration adds only one-ninth more to the area of the first iteration. What is likely to happen on the third iteration, and why? At least some students should see that in each iteration, each new added triangle has an area one-ninth as large as the area in each added triangle of the previous iteration. Beginning in the second iteration, four new triangles are added; therefore, each iteration adds four-ninths of the area added in the previous iteration. The equations are

$$U_n = 4/9 * V_{n-1},$$
$$V_n = 4/9 * U_{n-1} + V_{n-1}.$$

***Students are fascinated that the Koch snowflake has an infinite perimeter but a bounded area***

The outcomes are shown in **table 2.** The data for the first iteration do not appear on the calculator because no area is added the first time. Therefore, we have to let $n_{\min}$ equal 1 on the calculator.

| TABLE 2 | | |
|---|---|---|
| **Area of the Koch Snowflake** | | |
| Iteration | Added Area | Total Area |
| 0 | 0 | 81 |
| 1 | 27 | 108 |
| 2 | 12 | 120 |
| 3 | 5.333 | 125.333 |
| 6 | 0.46822 | 129.23 |

Students see that the area continues to grow at a rate that is decreasing enough to result in an absolute decline in the amount of growth, until by the thirteenth iteration the total area converges to 129.6 square units on the calculator. Dividing 129.6 by 81, the area of the seed, we get 1.6, which represents the limit of the growth of the snowflake's area compared with the area of its seed. Thus, the Koch snowflake has an infinite perimeter within a bounded area.

These apparently anomalous characteristics of the Cantor set and the Koch snowflake—the former having an infinite number of pieces with a total length of 0 and the latter having an infinite perimeter within a bounded area—are typical of fractals. We have found a range of student reactions to these characteristics, from fascination to disbelief to frustration to excitement. Pointing out that many natural objects have similar characteristics—for example, human beings contain miles of blood vessels within a bounded volume, and the leaves of trees afford an enormous amount of surface area within a limited volume—seems reassuring to some students.

## WHERE DID FRACTAL GEOMETRY COME FROM?

The roots of contemporary fractal geometry lie in the late nineteenth and early twentieth centuries. Such mathematicians as Georg Cantor, Helge von Koch, Gaston Julia, and Pierre Fatou experimented with what are now considered classic fractals. Their purposes in pursuing this line of study were varied. Cantor, for example, developed what is now known as the Cantor set for his work in set theory. Julia, whose ideas were further developed by Mandelbrot, was concerned with computing the roots of $z^3 - 1 = 0$ using Newton's method (Peitgen, Jürgens, and Saupe 1992).

At the time of their development, the classic fractals created by these mathematicians seemed headed for the dustbin of history. Scorned by the mathematical community as "pathologically unlike anything to be found in nature" and "monstrous" (Gleick 1987, 100), they languished until the 1960s and 1970s, when Mandelbrot and other mathematicians revisited them with a powerful new tool: the computer.

The crucial importance of the computer in the new field of fractal geometry is perhaps clearest in comparing the work of Gaston Julia and Pierre Fatou with that of Mandelbrot. All three people were interested in the behavior of points in the complex plane under iteration of various functions. In their explorations, they had to plot the orbits of millions of points. Julia and Fatou were able to *deduce* the behavior; although they were undoubtedly convinced, their results were meaningless to most of the world. Mandelbrot, though, was able to see the behavior by programming a computer. His image of what is now known as the Mandelbrot set, and the computerized fractals created by other mathematicians and artists, have given rise to the current explosion of interest in the subject.

## WHY SHOULD FRACTALS BE INCLUDED IN THE MATHEMATICS CURRICULUM?

The study of fractal geometry is appropriate in high school for many reasons. Students have the opportunity to investigate traditional mathematics topics from a new approach, to make connections both within mathematics and between mathematics and the natural and human worlds, and to explore mathematics in nonanalytic ways.

Such traditional topics as area and perimeter of polygons, surface area and volume of polyhedra, and algebra lend themselves easily to illustration using fractals. For example, the Koch snowflake has an infinite perimeter but a bounded area. As students are led to discover this apparent anomaly, they are often fascinated and sometimes troubled.

Fractal geometry can be used to make connections within mathematics. For example, we have asked students to develop the algebraic formulas to describe the growth of the perimeter and area of the Koch snowflake, as well as the number of pieces and total length of the Cantor set. In advanced algebra, we have also used the Mandelbrot set to connect the algebra of complex numbers with geometry. Finally, concepts of calculus arise naturally when discussing such phenomena as the fact that the total length of the Cantor set approaches, but never reaches, zero.

Fractal geometry also allows us to connect mathematics with the world outside the classroom. For example, Mandelbrot, while a researcher at IBM, used the Cantor set to model the electronic transmission of data (Gleick 1987). From the containment of air-polluting soot to the identification of liver cancer to fashion design, fractals can be found in a growing number of areas.

Finally, students need to experience mathematics in ways other than applying paper-and-pencil algorithms to routine exercises. Fractal geometry allows them to explore mathematical concepts by working with their hands, both in building models and in drawing pictures of consecutive iterations of classical fractals. They then use these manual experiences to discover the recursive formulas governing the shapes. Also, the counterintuitive nature of fractals—how can the Koch snowflake have an infinite perimeter in a bounded area?—forces an intellectual stretch for most students. So does the concept that fractals are infinite; their shape can be approximated but not completely drawn. And students are often excited by the beauty and complexity of these non-Euclidean shapes.

## CONCLUSION

Our experience in teaching fractal geometry has convinced us that the topic is both academically appropriate and within the capability of high school students. Our students have been fascinated by the anomalies inherent in fractals. The hands-on activities have been able to intrigue students who do not always respond to traditional problems. Discovering such patterns as the limit of the area of the Koch snowflake allows our most analytically gifted students to stretch their algebra skills. The use of fractals in such disparate areas as biology, electrical engineering, economics, and art touches the interest of many students.

Perhaps the greatest tribute to the power of fractal geometry to fascinate teenagers came from the coach of the girls' basketball team at our school, a mathematics teacher himself. He approached us one day a bit bemused, not quite sure whether he was pleased or frustrated. His players were supposed to be practicing shots, but those at one end of the gym had stopped in favor of an earnest discussion. When he reached them, he realized that the topic that stopped the free throws was fractal geometry.

***The coach was bemused: players had stopped practicing foul shots to discuss fractal geometry***

## BIBLIOGRAPHY


Briggs, John. *Fractals: The Patterns of Chaos.* New York: Simon & Schuster, 1992.

Devaney, Robert. *Chaos, Fractals, and Dynamics.* Menlo Park, Calif.: Addison-Wesley Publishing Co., 1990.

Gleick, James. *Chaos.* New York: Penguin Books, 1987.

Kasner, Edward, and James Newman. *Mathematics and the Imagination.* New York: Simon & Schuster, 1940.

Lauwerier, Hans. *Fractals: Endlessly Repeated Dynamic Figures.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1991.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, Va.: NCTM, 1989.

Peak, David, and Michael Frame. *Chaos under Control: The Art and Science of Complexity.* New York: W. H. Freeman & Co., 1994.

Peitgen, Hans-Otto, Hartmut Jürgens, and Dietmar Saupe. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science.* New York: Springer-Verlag, 1992.

Peitgen, Hans-Otto, and Dietmar Saupe, eds. *The Science of Fractal Images.* New York: Springer-Verlag, 1988.

Wahl, Bernt. *Exploring Fractals on the Macintosh.* Menlo Park, Calif.: Addison-Wesley Publishing Co., 1995.


*(Worksheets begin on page 266)*

(Continued from page 265)

DATA CHART FOR THE CANTOR SET

SHEET 1

| Iteration | Length of Each Segment | Number of Segments | Total Length |
|---|---|---|---|
| | | | |

Write the general pattern for each column.

From the *Mathematics Teacher*, March 1999

*Exploring perimeter*

1. Follow your teacher's directions for making the seed of the Koch snowflake. As your teacher gives you directions, fill in the following chart:

| Iteration | Added Perimeter | Total Perimeter |
|---|---|---|
| Seed | __________ | __________ |
| $K_1$ | __________ | __________ |
| $K_2$ | | |

2. Investigate the patterns that you see in the data listed in your table. What conclusions can you make? Be as specific, precise, and thorough as possible.

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

*Exploring area*

3. Go back to the original seed of the snowflake. This time, fill in the chart with information about the area of the snowflake:

| Iteration | Added Area | Total Area |
|---|---|---|
| Seed | | |
| $K_1$ | __________ | __________ |
| $K_2$ | __________ | __________ |

4. Investigate the patterns that you see in the data listed in this chart on area. What conclusions can you make? Be specific, precise, and thorough.

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

____________________________________________________________

From the *Mathematics Teacher,* March 1999

*Exploring the mathematics of perimeter*

1. Write recursive equations that describe first the added perimeter of the Koch snowflake in its $n$th iteration (call this iteration $U_n$) and then the total perimeter of the snowflake in its $n$th iteration (call this iteration $V_n$). Use your data from activity sheet 2. Enter these equations in your calculator, and write the equations here:

   $U_n$ = ______________________

   $V_n$ = ______________________

2. Make sure that your calculator is in "seq" mode, which allows recursive equations. Your window should be as follows:

| | |
|---|---|
| *U n*Start = 0 | Xmax = 10 |
| *V n*Start = 27 | Xscl = 5 |
| *n*Start = 0 | Ymin = 0 |
| *n*Min = 0 | Ymax = 500 |
| *n*Max = 10 | Yscl = 100 |
| Xmin = –2 | |

3. Use the **TABLE** key to create the tables for the added perimeter, found in $U_n$, and the total perimeter, in $V_n$. Write your results:

| Iteration | Added Perimeter | Total Perimeter |
|---|---|---|
| Seed (or $K_0$) | ________ | ________ |
| $K_1$ | ________ | ________ |
| $K_2$ | ________ | ________ |

4. Check your calculator results against your results from determining the perimeter with pattern blocks. If you find any discrepancies, you will need to change the equations that you entered in the calculator.

5. Using the calculator, find the added and total perimeter in the fourth, seventh, and tenth iterations.

| Iteration | Added Perimeter | Total Perimeter |
|---|---|---|
| $K_4$ | ________ | ________ |
| $K_7$ | ________ | ________ |
| $K_{10}$ | ________ | ________ |

6. What seems to happen to the total perimeter of the Koch snowflake under iteration? Defend your answer.

_______________________________________________

_______________________________________________

From the *Mathematics Teacher*, March 1999

*Exploring the mathematics of area*

7. Write the recursive equations for the added area of the snowflake; call this added area $U_n$, and the total area of the snowflake, $V_n$. Enter these equations in your calculator, and write them here:

$U_n$ = ______________________________

$V_n$ = ______________________________

8. Initialize your calculator as for perimeter, with the following changes in the window:

U*n*Start = 27

V*n*Start = 108

9. Use the **TABLE** key to create the tables for the added area, found in $U_n$, and the total area, in $V_n$. Write your results.

| Iteration | Added Area | Total Area |
|---|---|---|
| Seed (or $K_0$) | ________ | ________ |
| $K_1$ | ________ | ________ |
| $K_2$ | ________ | ________ |

10. Check your calculator results against your results from figuring area with pattern blocks. If you find any discrepancies, you will need to change the equations that you entered in the calculator.

11. Using the calculator, find the added and total area in the fourth, seventh, and tenth iterations.

| Iteration | Added Area | Total Area |
|---|---|---|
| $K_4$ | ________ | ________ |
| $K_7$ | ________ | ________ |
| $K_{10}$ | ________ | ________ |

12. What seems to happen to the total area of the Koch snowflake under iteration? Defend your answer.

______________________________________________________________

______________________________________________________________

______________________________________________________________

From the *Mathematics Teacher,* March 1999

# Bibliografía


[1] LORNELL Randi, WESTERBERG Judy. *"Fractals in High School: Exploring a New Geometry"*. The Mathematics Teacher, Vol. 92, N3, 1999, Págs. 262-26 2.

[2] NAYLOR, Michael, Exploring Fractals in the Classroom, The Mathematics Teacher, Vol. 92, No 4, 1999, pag. 361 - 366.

[3] DAZA H, Carlos J, Geometría Fractal en el Bachillerato: Acercamiento por Sistemas Dinamicos; Monografía, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Bucaramanga, 1999.

[4] CASTRO, G, Fabiola. Geometría Fractal en el Bachillerato Monografía, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Bucaramanga, 1994.

[5] PEREZ, N Patricia; Talleres sobre geometría fractal aplicados a grupos de estudiantes básica, secundaria y media, Monografía, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Bucaramanga, 1995.

[6] PEITGEN, H.O Jurguens, H. SAUPE D; Fractals for the classroom strategic activities, volume two, Springer-Verlag, New York, 1992.

[7] ESTRADA, William F.; Geometría Fractal conceptos y procedimientos para la construcción de fractales; Editorial Magisterio, Bogotá, 2004.

[8] MANDELBROT, Benoit B., The fractal Geometry of Nature, W: H Freeman and Company, New York, 1977.