

DISEÑO ÓPTIMO DE UN EJE DE TRANSMISIÓN PARA VEHÍCULOS  
FABRICADO CON MATERIALES COMPUESTOS

BRIAN FARID MORALES HERNÁNDEZ  
REYNEL GERMAN BARRERA SANTOS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA  
BUCARAMANGA

2016

DISEÑO ÓPTIMO DE UN EJE DE TRANSMISIÓN PARA VEHÍCULOS  
FABRICADO CON MATERIALES COMPUESTOS

BRIAN FARID MORALES HERNÁNDEZ  
REYNEL GERMAN BARRERA SANTOS

Trabajo de grado para optar al título de Ingeniero Mecánico

Director

Heller Guillermo Sánchez Acevedo

PhD. Ingeniería Mecánica

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA  
BUCARAMANGA

2016

## DEDICATORIA

*A Dios y la Santísima Virgen María por sus constantes bendiciones, a mis padres y hermano, por su afecto, consejos e incondicional apoyo, a mi familia, por animarme día a día en alcanzar mis sueños, y a mis amigos, por todos los momentos compartidos en nuestra formación como profesionales.*

*Brian Farid Morales Hernández*

## DEDICATORIA

*A Dios por darme la salud, fortaleza y permitirme salir adelante en todo momento.*

*A mi abuelita por ser ejemplo de nobleza, por brindarme todo su cariño. A mi madre por su amor y por la educación y valores que me inculcó, a mi padre por ser ejemplo de perseverancia, a mi hermana por su cariño y su compañía. y a mis amigos que me brindaron la oportunidad de compartir momentos agradables junto a ellos y me acompañaron durante mi proceso de formación.*

*Reynel German Barrera Santos*

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Profesor Heller Guillermo Sánchez Acevedo, por su confianza, apoyo y orientación, en el desarrollo del proyecto y nuestra formación como profesionales.

A los profesores de la Escuela de Ingeniería Mecánica, por guiarnos en nuestro proceso de aprendizaje

A los profesores Andrés González Estrada y Alberto Pertuz por su orientación en el desarrollo del proyecto de grado.

A Cláudio Galvão, representante de Stella&Viegas Muniz Rep. Com. Ltda. y SGL The Carbon Company, por su disposición en el proceso de adquisición de la fibra de carbono.

A la Vicerrectoría de Investigación y Extensión, por el apoyo económico brindado a través del programa capital semilla.

Al semillero de investigación en materiales compuestos, por brindarnos las bases para el desarrollo de nuestro proyecto.

## CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	21
1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	22
1.1 IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA	22
1.2 JUSTIFICACIÓN PARA SOLUCIONAR EL PROBLEMA	22
2. OBJETIVOS	24
2.1 OBJETIVO GENERAL	24
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	24
3. MARCO REFERENCIAL	25
3.1 MATERIALES COMPUESTOS	25
3.2 ALGORITMOS GENÉTICOS	26
4. CARACTERIZACIÓN MECÁNICA DEL MATERIAL	27
4.1 ESPECIFICACIONES DEL MATERIAL	27
4.1.1 Resina epóxica	27
4.1.2 Fibra de carbono	28
4.2 DISEÑO DE PROBETAS	28
4.2.1 Estándar ASTM D3039	28
4.2.2 Diseño preliminar	28
4.2.3 Probetas terminadas	28

4.3 ENSAYOS	30
4.4 RESULTADOS	31
5. DISEÑO DEL EJE DE TRANSMISIÓN CON MATERIALES COMPUESTOS	36
5.1 ESPECIFICACIONES DE DISEÑO	36
5.2 CRITERIOS DE DISEÑO	37
5.2.1 Esfuerzo cortante	37
5.2.2 Pandeo por torsión	37
5.2.3 Frecuencias naturales de flexión	38
5.2.4 Frecuencias naturales de torsión	39
5.2.5 Factor de seguridad	39
5.3 ANÁLISIS MACROSCÓPICO DE UNA LÁMINA	40
5.3.1 Relación esfuerzo-deformación de una lámina unidireccional	40
5.3.2 Láminas unidireccionales con orientaciones arbitrarias	41
5.4 ANÁLISIS MACROSCÓPICO DEL LAMINADO	43
5.4.1 Variación de las deformaciones en el laminado	44
5.4.2 Fuerzas y momentos resultantes en el laminado	45
5.4.3 Constantes ingenieriles	46
5.5 CRITERIOS DE FALLA	46
5.5.1 Criterio de falla de Tsai-Wu	49
6. ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN	50
6.1 IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO GENÉTICO	50
6.1.1 Algoritmo genético	50

6.1.2	Función objetivo	52
6.1.3	Restricciones	52
6.1.4	Opciones	53
6.1.5	Combinaciones de apilamiento	54
6.1.6	Cálculos	56
6.1.7	Propiedades	57
6.2	ADECUACIÓN Y DELIMITACIÓN DEL ALGORITMO	57
7.	PROTOTIPO	61
7.1	METODOLOGÍA DE ESCALAMIENTO	61
7.1.1	Escalamiento del momento polar de inercia	61
7.1.2	Escalamiento del torque	61
7.1.3	Escalamiento de la masa	62
7.1.4	Escalamiento de la velocidad de rotación	62
7.2	ESCALAMIENTO	62
7.3	PROTOTIPO FINAL	63
8.	ANÁLISIS MEDIANTE MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	64
8.1	ANÁLISIS DEL LAMINADO	64
8.2	ANÁLISIS ESTÁTICO	65
8.3	ANÁLISIS MODAL	66
8.3.1	Comportamiento simplemente apoyado	66
8.3.2	Comportamiento libre-libre	67
8.4	ANÁLISIS DE PANDEO TORSIONAL	67

9. ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL	68
10. RESULTADOS	70
10.1 DISEÑO ÓPTIMO DEL EJE DE TRANSMISIÓN	70
10.2 ANÁLISIS DEL EJE EN ANSYS	72
10.2.1 Análisis del laminado	72
10.2.2 Análisis estático	72
10.2.3 Análisis modal	73
10.2.4 Análisis de pandeo torsional	74
10.3 PROTOTIPO A ESCALA DEL EJE DE TRANSMISIÓN	75
10.4 ANÁLISIS DEL PROTOTIPO A ESCALA DEL EJE EN ANSYS	77
10.4.1 Análisis del laminado	77
10.4.2 Análisis estático	78
10.4.3 Análisis modal	78
10.4.4 Análisis de pandeo torsional	81
10.5 ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL	81
11. ANÁLISIS DE RESULTADOS	83
12. CONCLUSIONES	86
13. RECOMENDACIONES	87
BIBLIOGRAFÍA	88
ANEXOS	92

## LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Validación de los ensayos	35
Tabla 2. Información Chevrolet NPR Reward Euro IV 2015	36
Tabla 3. Opciones definidas preliminarmente en el algoritmo genético	54
Tabla 4. Ejecución de prueba del algoritmo genético	58
Tabla 5. Ejecución final del algoritmo genético	60
Tabla 6. Valores escalados	62
Tabla 7. Dimensiones de los prototipos construidos	63
Tabla 8. Características principales del eje de transmisión	70
Tabla 9. Restricciones de diseño del eje de transmisión	70
Tabla 10. Constantes elásticas del laminado del eje de transmisión	71
Tabla 11. Constantes elásticas del laminado del eje en ANSYS	72
Tabla 12. Factores de seguridad para cada lámina del eje de transmisión	73
Tabla 13. Modos de vibración del eje de transmisión	73
Tabla 14. Características principales del prototipo a escala del eje	75
Tabla 15. Restricciones de diseño del prototipo a escala del eje	76
Tabla 16. Constantes elásticas del laminado del prototipo a escala del eje	77
Tabla 17. Constantes elásticas del laminado del prototipo a escala del eje en ANSYS	78
Tabla 18. Factores de seguridad para cada lámina del prototipo a escala del eje	78
Tabla 19. Modos de vibración del prototipo a escala del eje	79

Tabla 20. Modos de vibración del prototipo a escala del eje libre	80
Tabla 21. Resultados análisis modal experimental del prototipo 1	82
Tabla 22. Resultados análisis modal experimental del prototipo 2	82
Tabla 23. Verificación de resultados del eje de transmisión	83
Tabla 24. Verificación de resultados del prototipo a escala	83
Tabla 25. Verificación de los modos de vibración del prototipo a escala	84
Tabla 26. Verificación dimensional del prototipo a escala	85

## LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Proceso de enrollado de filamentos	26
Figura 2. Dimensionamiento probetas nuevas	29
Figura 3. Probetas terminadas	30
Figura 4. Modo de fallo de las probetas de carbono/epóxi	31
Figura 5. Curva Esfuerzo vs Deformación probeta 90°	33
Figura 6. Curva Esfuerzo vs Deformación probeta a 0°	34
Figura 7. Zona elástica curva Esfuerzo vs Deformación probeta a 0°	34
Figura 8. Esquema simplificado de un eje de transmisión	36
Figura 9. Ejes locales y globales de una lámina	42
Figura 10. Convención de coordenadas del laminado	44
Figura 11. Envolventes de rotura para un compuesto E-Glass / LY556	47
Figura 12. Envolventes de rotura para un compuesto de carbono/epóxi	48
Figura 13. Constantes ingenieriles en función de la orientación de las fibras	55
Figura 14. Función objetivo vs generaciones transcurridas	59
Figura 15. Prototipo construido	63
Figura 16. Esquema del análisis en ANSYS Workbench	64
Figura 17. Secuencia de apilamiento en el módulo ACP	65
Figura 18. Mallado refinado del eje en el módulo ACP	65
Figura 19. Condiciones de contorno para análisis estático	66
Figura 20. Condiciones de contorno para análisis modal	67

Figura 21. Montaje del prototipo para el análisis modal experimental	68
Figura 22. Adquisición de datos del análisis modal experimental	69
Figura 23. Apilamiento del eje de transmisión	71
Figura 24. Diagrama polar del laminado del eje de transmisión	72
Figura 25. Primer modo de vibración del eje de transmisión	74
Figura 26. Segundo modo de vibración del eje de transmisión	74
Figura 27. Deformación por pandeo torsional en el eje de transmisión	75
Figura 28. Apilamiento del prototipo a escala del eje	76
Figura 29. Diagrama polar del laminado del prototipo a escala del eje	77
Figura 30. Primer modo de vibración del prototipo simplemente apoyado	79
Figura 31. Primer modo de vibración del prototipo libre	80
Figura 32. Segundo modo de vibración del prototipo libre	80
Figura 33. Tercer modo de vibración del prototipo libre	81
Figura 34. Deformación por pandeo torsional en el eje de transmisión	81
Figura 35. Primer modo de vibración experimental del prototipo	82

## LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. Especificaciones de los materiales constituyentes	92
Anexo B. Recomendaciones para probetas según estándar ASTM D3039	93
Anexo C. Fabricación de probetas	94
Anexo D. Máquina de ensayos y montaje de probetas	96
Anexo E. Área transversal y porcentaje en volumen de una lámina	97
Anexo F. Curvas esfuerzo vs deformación	99
Anexo G. Scripts y funciones del algoritmo genético	107
Anexo H. Fabricación del prototipo a escala del eje	129
Anexo I. Planos del eje y prototipo	131
Anexo J. Procedimiento experimental del análisis modal	134

## RESUMEN

**TÍTULO:** DISEÑO ÓPTIMO DE UN EJE DE TRANSMISIÓN PARA VEHÍCULOS FABRICADO CON MATERIALES COMPUESTOS\*

**AUTORES:** BRIAN FARID MORALES HERNÁNDEZ\*\*  
REYNEL GERMAN BARRERA SANTOS\*\*

**PALABRAS CLAVE:** Algoritmo genético, Diseño óptimo, Eje de transmisión, Frecuencias naturales, Materiales compuestos.

## DESCRIPCIÓN

La búsqueda de nuevas tecnologías que permitan mejorar los diseños convencionales en la industria automotriz, ha impulsado el uso de materiales compuestos como una alternativa innovadora y eficaz, gracias a sus altas propiedades mecánicas y a su capacidad de adaptación a los requerimientos de diseño.

El estudio realizado, consistió en determinar el diseño óptimo de un eje de transmisión para vehículos, fabricado a partir de materiales compuestos, mediante el uso de un algoritmo genético de optimización, con el fin de reducir el peso y las dos piezas que constituyen un eje de transmisión convencional. La metodología de diseño incluyó la caracterización mecánica del material compuesto, la implementación del algoritmo de optimización, el análisis del laminado del eje, la construcción de un prototipo a escala y la verificación experimental de los modos de vibración. Los resultados obtenidos mediante el cálculo analítico, la simulación en ANSYS y los estudios experimentales, demostraron que la velocidad de rotación del eje de transmisión, es un factor determinante en el diseño de ejes esbeltos y de gran longitud, debido a los primeros modos de vibración de flexión, que pueden ocasionar un fallo catastrófico durante su operación. La realización del estudio, permitió concluir que los materiales compuestos son una opción viable para reemplazar al acero, en la fabricación de los ejes de transmisión, gracias a la notable reducción en el peso y a la obtención de un eje de una sola pieza.

---

\* Proyecto de grado

\*\* Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director: Heller Guillermo Sánchez Acevedo, PhD. Ingeniería Mecánica.

## ABSTRACT

**TITLE:** OPTIMAL DESIGN OF A DRIVESHAFT FOR VEHICLES MANUFACTURED WITH COMPOSITES\*

**AUTHORS:** BRIAN FARID MORALES HERNÁNDEZ\*\*  
REYNEL GERMAN BARRERA SANTOS\*\*

**KEYWORDS:** Composite materials, Driveshaft, Genetic algorithm, Natural frequencies, Optimal design.

## DESCRIPTION

The search for new technologies to improve conventional designs in the automotive industry, has promoted the use of composite materials as an innovative and effective alternative, thanks to their high mechanical properties and their ability to adapt to the design requirements.

The study was to determine the optimal design of a driveshaft for vehicles, made from composite materials, using a genetic optimization algorithm, in order to reduce the weight and the two parts constituting a conventional driveshaft. The design methodology included the mechanical characterization of the composite, the implementation of the optimization algorithm, the analysis of the laminate shaft, building a scale prototype and experimental verification of the vibration modes. The results obtained by analytical calculation, ANSYS simulation and experimental studies, showed that the speed of rotation of driveshaft, is a determining factor in the design of slender shafts and of great length, because the first bending eigenmodes, which can cause catastrophic failure during operation. The study allowed to conclude that the composites are a viable option to replace steel in making driveshafts, thanks to the remarkable reduction in weight and to obtain a one-piece shaft.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Physicomechanical Faculty of Engineering. School of Mechanical Engineering. Director: Heller Guillermo Sánchez Acevedo, PhD. Mechanical Engineering.

## INTRODUCCIÓN

En la actualidad los materiales compuestos han adquirido gran importancia como alternativa para reemplazar a los materiales convencionales. Aplicaciones que van desde biosensores electroquímicos, estructuras en el campo aeronáutico, prótesis ortopédicas, estructuras de automóviles y autopartes mecánicas<sup>3</sup>, han posicionado a los materiales compuestos como una tecnología apropiada para satisfacer de forma eficiente las necesidades cada vez más exigentes del desarrollo moderno. Por otro lado, los materiales compuestos permiten reducir significativamente el impacto ambiental, incluso con la implementación de materiales naturales en aplicaciones industriales<sup>4</sup>.

Diversos análisis y estudios se han desarrollado para caracterizar los materiales compuestos, algunos de ellos exponen características mecánicas como resistencia a la fatiga<sup>5</sup>, reducción de esfuerzos residuales y propiedades termo-mecánicas. Actualmente se investiga la factibilidad de construcción de ejes de transmisión para vehículos a partir de materiales compuestos<sup>6</sup>, en busca de simplificar los diseños actuales, reducir peso y mejorar su rendimiento.

---

<sup>3</sup> DAY GIL, Lee; DURK HYUN, Cho y JIN HO, Land Choi. Manufacture of one-piece automotive drive shafts with aluminum and composite materials. En: Ninth International Conference on Composite Structures. Mayo, 1997. vol. 38, no. 1-4, p. 309-319.

<sup>4</sup> F. M., AL-Oqla y S. M., Sapuan. Natural fiber reinforced polymer composites in industrial applications: feasibility of date palm fibers for sustainable automotive industry. En: Journal of Cleaner Production. Marzo, 2014. vol. 66, p. 347-354.

<sup>5</sup> MCLARTY, J. Lowrie y PETERS, S. T. Filament Winding. En: Composites ASM Handbook: ASM International, 2001. p. 1266-1299.

<sup>6</sup> MOHAMAD S., Qatu y JAVED, Iqbal. Transverse vibration of a twosegment crossply composite shafts with a lumped mass. En: Composite Structures. Abril, 2010. vol. 92, no. 5, p. 1126-1131.

## **1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA**

### **1.1 IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA**

En vehículos con disposición longitudinal del motor (motores de grandes prestaciones y tamaño), y vehículos de doble tracción; la distancia entre la caja de cambios y el diferencial de las ruedas motrices es relativamente larga. Para evitar que el árbol o eje de transmisión se acerque a las primeras frecuencias naturales de flexión, se requiere dividir el eje en segmentos unidos mediante juntas homocinéticas, lo que repercute en el peso total del vehículo y la eficiencia energética o consumo de combustible.

Uno de los factores más influyentes en la necesidad de dividir el eje, recae en el material de fabricación: el acero, que pese a sus buenas propiedades mecánicas ante las cargas solicitadas, posee una baja rigidez específica, propiedad directamente relacionada con las frecuencias naturales.

### **1.2 JUSTIFICACIÓN PARA SOLUCIONAR EL PROBLEMA**

Ante la necesidad de innovación tecnológica que contribuya con mejoras sustanciales en el rendimiento de los vehículos, el sector automotriz requiere de un proceso investigativo enfocado en la búsqueda de materiales alternativos, que garanticen resistencia, ligereza y que se adecúen ante las necesidades cada vez más exigentes en los requerimientos de diseño actuales, y las políticas de reducción de costos del sector automotriz en general.

Los ejes de transmisión convencionales de acero, frente a los requerimientos de transmisión de potencia entre distancias relativamente largas, requieren ser segmentados en dos o más piezas para alejar las primeras frecuencias naturales

de flexión, por encima de la velocidad de rotación del eje, y así evitar entrar en resonancia y producir fallos catastróficos. La segmentación del eje en dos piezas o más, implica incrementar el número de acoples, lo que se traduce en un aumento significativo de material, peso y costos totales de fabricación.

El acero es un material de amplio uso en el diseño y fabricación de maquinaria debido a sus buenas propiedades mecánicas. Sin embargo, debido a su elevada densidad, a su sensibilidad ante reacciones químicas como la corrosión, a su impacto en el ambiente provocado por los procesos para su obtención, y ante la ausencia de planes adecuados para su reutilización, ha impulsado la búsqueda de materiales con mejores propiedades y con la capacidad de adecuarse eficientemente a las múltiples necesidades de diseño en la industria automotriz. En este sentido los materiales compuestos se han convertido en la principal alternativa para sustituir al acero y otras aleaciones metálicas, gracias a su capacidad de adaptación ante necesidades específicas de diseño.

## **2. OBJETIVOS**

### **2.1 OBJETIVO GENERAL**

Elaborar el diseño óptimo de un eje de transmisión para vehículos, fabricado con materiales compuestos, mediante la implementación de un algoritmo evolutivo.

### **2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Implementar un algoritmo evolutivo para el diseño óptimo de un eje de transmisión minimizando el peso, empleando como restricciones los valores de las frecuencias naturales y la capacidad de transmisión de potencia.
- Caracterizar mecánicamente el material compuesto seleccionado para el diseño óptimo del eje.
- Realizar el diseño óptimo del eje de transmisión mediante el algoritmo implementado.
- Construir a partir de materiales compuestos el prototipo a escala de un eje de transmisión para vehículos.
- Verificar los valores de las frecuencias naturales del prototipo a escala del eje de transmisión de forma experimental, para compararlos con los resultados teóricos.

### 3. MARCO REFERENCIAL

#### 3.1 MATERIALES COMPUESTOS

Los materiales compuestos se definen como una combinación macroscópica de materiales, constituidos por la unión sinérgica de dos o más fases de materiales, insolubles e inertes entre sí, que proporcionan al material resultante, mejores propiedades o características que sus materiales constituyentes<sup>7</sup>.

Los materiales compuestos están formados por dos fases o componentes: una fase continua, constituida por la matriz, y una fase discontinua, constituida por los refuerzos<sup>8</sup>. Es importante que exista una adecuada adherencia o cohesión entre las dos fases o componentes, para garantizar un óptimo funcionamiento ante los requerimientos de diseño.

En la actualidad los materiales compuestos, se posicionan como la principal alternativa para reemplazar a los materiales convencionales, gracias a su capacidad de adaptabilidad y prestaciones para los que fueron concebidos<sup>9</sup>.

Un método de fabricación de piezas con geometrías cilíndricas, a partir de fibra de carbono, es el enrollamiento de filamentos<sup>10</sup>, en donde se disponen las fibras impregnadas, en un ángulo prescrito sobre un mandril giratorio.

---

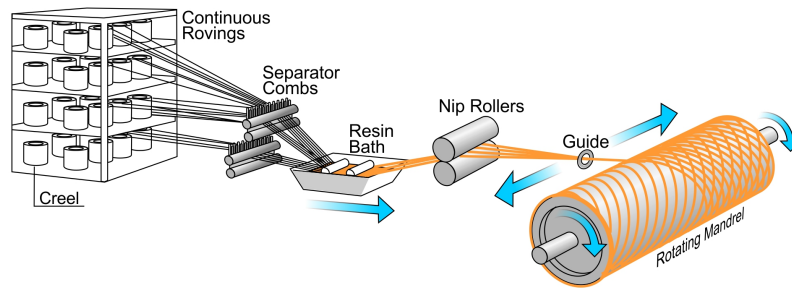
<sup>7</sup> STUPENENGO, Franco. Materiales compuestos. Guía didáctica. En: Materiales y materias primas. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica, 2011. p. 1-27.

<sup>8</sup> ZWEBEN, Carl. Composites Materials. En: KUTZ, MYER. Handbook of Materials Selection. New York: Myer Kutz, Ed., John Wiley & Sons. Inc., 2002. p. 359.

<sup>9</sup> GAY, Daniel; HOA, Suong V. y TSAI, Stephen W. Composite Materials: Design and Applications: CRC Press LLC,. 2002. 552 p. ISBN 978-1-4200-3168-3.

<sup>10</sup> MCLARTY, J. Lowrie y PETERS, S. T. Filament Winding. En: Composites ASM Handbook: ASM International, 2001. p. 1266-1299.

Figura 1. Proceso de enrollado de filamentos



Fuente: <http://www.nuplex.com/composites/processes/filament-winding>.

### 3.2 ALGORITMOS GENÉTICOS

Los algoritmos genéticos son un método de optimización de funciones y búsqueda estocástica, con un amplio rango de aplicación, basados en la evolución biológica y las teorías evolucionistas de Darwin<sup>11</sup>. Por su eficiencia y sencillez de implementación, se han convertido en uno de los algoritmos evolutivos más populares<sup>12</sup>.

El funcionamiento de un algoritmo genético simple<sup>13</sup>, se basa en la aplicación sucesiva de operadores genéticos, a un amplio rango de valores denominados individuos<sup>14</sup>, hasta satisfacer una condición preestablecida para su finalización, que supone la solución óptima.

---

<sup>11</sup> HERRERA, Francisco; LOZANO, Manuel y VERDEGAY, Jose L. Algoritmos Genéticos: Fundamentos, Extensiones y Aplicaciones. En: Arbor CLII. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Septiembre, 1995. vol. 152, no. 597, p. 9-40.

<sup>12</sup> ARAUJO, Lourdes y CERVIGÓN, Carlos. Algoritmos evolutivos: un enfoque práctico. México: Alfaomega Grupo Editor, 2009. 332 p. ISBN 978-607-7686-29-3.

<sup>13</sup> MITCHELL, Melanie. An introduction to genetic algorithms. Cambridge: MIT Press, 1998. 209 p. ISBN 978-026-2631-85-3.

<sup>14</sup> THE MATHWORKS, INC. Genetic Algorithm Terminology. 2016. En: <http://es.mathworks.com/help/gads/some-genetic-algorithm-terminology.html>. (Visitado 23-05-2016).

## 4. CARACTERIZACIÓN MECÁNICA DEL MATERIAL

Para el diseño óptimo del eje de transmisión, se selecciono un material compuesto de matriz polimérica tipo epóxi, reforzado con fibra de carbono. La selección se realizó en base a los estudios de Ghatage y Hargude<sup>15</sup>, y según los siguientes criterios:

- Módulos de elasticidad longitudinal y transversal
- Módulo de cizallamiento
- Esfuerzos últimos
- Adhesión fibra-matriz
- Relación resistencia-peso

Las propiedades mecánicas de los materiales compuestos varían dependiendo los porcentajes de los materiales constituyentes y la orientación en que se disponen las fibras de refuerzo; esta particularidad requiere caracterizar el material física o analíticamente en los procesos de diseño.

### 4.1 ESPECIFICACIONES DEL MATERIAL

**4.1.1 Resina epóxica.** El constituyente de la matriz seleccionado EpoxAmite® 101 Fast, es una resina especializada en laminados con fibras de carbono, vidrio o poliéster, de baja viscosidad y de curado a temperatura ambiente mediante el endurecedor suministrado. Las especificaciones del producto se presentan en el Anexo A.

---

<sup>15</sup> GHATAGE, Kishor y HARGUDE, Narayanrao. Static, Modal and Buckling Analysis of Automotive Composite Drive Shaft. En: IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering, vol. 5, p. 32-42.

® Marca registrada de SMOOTH-ON. El producto está constituido por un componente A: Resina y un componente B: Endurecedor.

**4.1.2 Fibra de carbono.** En base al proceso de fabricación *filament winding* o enrollamiento de fibras, que facilita la construcción de piezas con geometrías cilíndricas, se seleccionó el haz continuo de fibras de carbono SIGRAFIL® C T24-5.0/270-E100. Las especificaciones del material se presentan en el Anexo A.

## **4.2 DISEÑO DE PROBETAS**

El diseño de las probetas está basado en las recomendaciones estipuladas en la norma ASTM D3039/D3039M-14 para ensayos de tracción en materiales compuestos.

**4.2.1 Estándar ASTM D3039.** La norma ASTM D3039<sup>16</sup> describe una metodología estándar de ensayos, para determinar las propiedades de resistencia a la tracción en materiales compuestos de matriz polimérica y refuerzos de alto módulo. En la norma se estipulan recomendaciones para el dimensionamiento y métodos de preparación de muestras para diversas orientaciones de las fibras de refuerzo.

**4.2.2 Diseño preliminar.** Las recomendaciones que establece la norma ASTM D3039 en cuanto a dimensionamiento de los especímenes de ensayo para materiales compuestos con fibras orientadas a 0° y 90°, se presentan en el Anexo B.

**4.2.3 Probetas terminadas.** Considerando la capacidad máxima de fuerza que puede aplicar la máquina de ensayos y las propiedades mecánicas de la fibra de carbono adquirida, se decide modificar el espesor recomendado por la norma ASTM

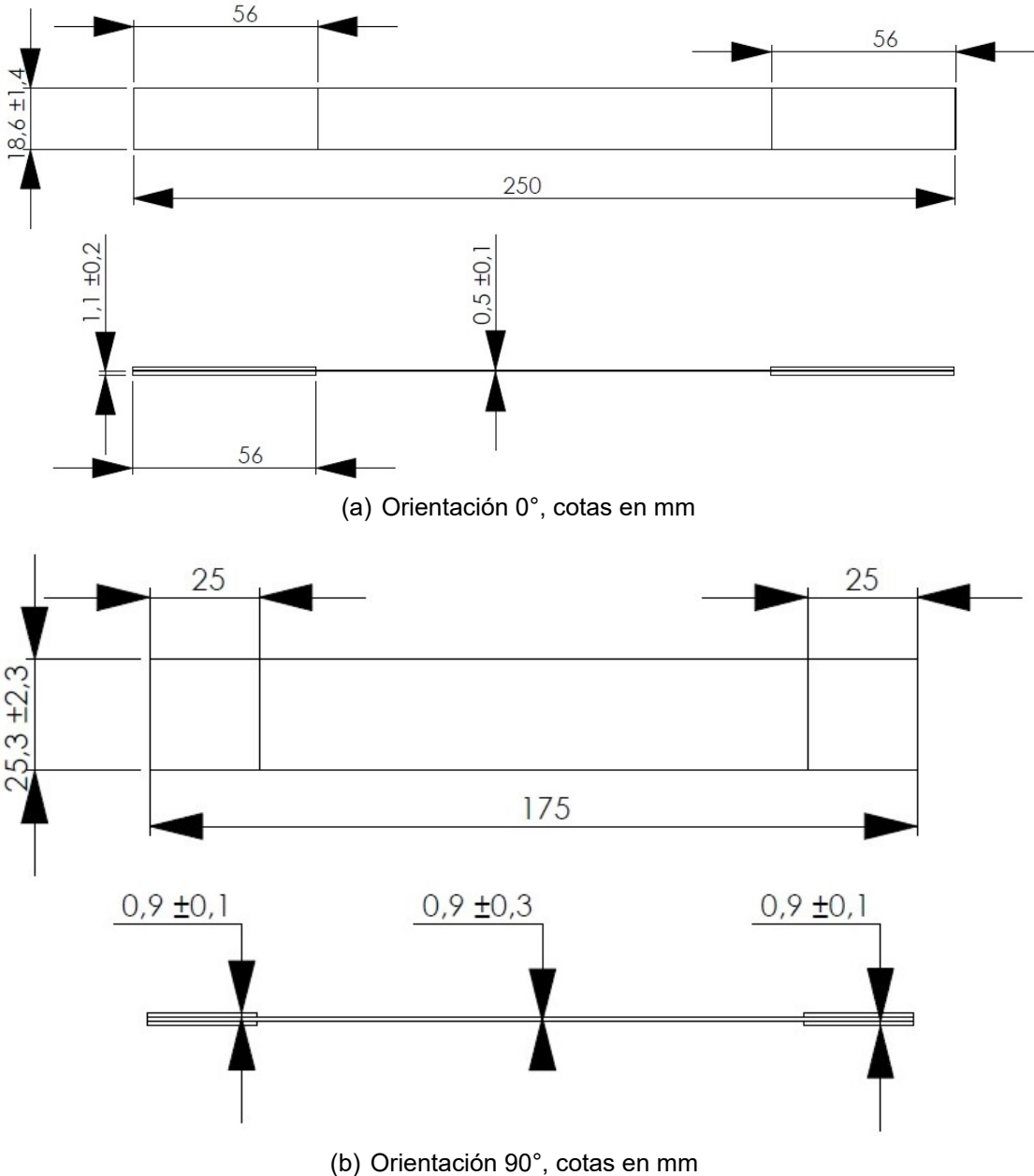
---

® Marca registrada de SGL GROUP THE CARBON COMPANY

<sup>16</sup> AMERICAN SOCIETY FOR TESTING MATERIALS. Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials. ASTM D3039/D3039M-14. West Conshohocken: ASTM International, 2014. 13 p.

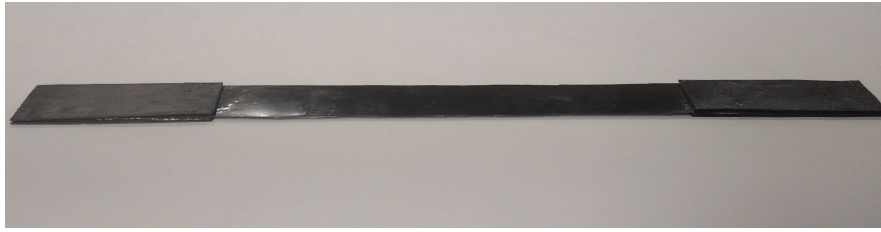
D3039 y reducirlo a la mitad, para los dos tipos de probetas, con el fin de garantizar su rotura. El dimensionamiento y las probetas terminadas se muestran en la Figura 2 y 3 respectivamente.

Figura 2. Dimensionamiento probetas nuevas



Fuente: Autores.

Figura 3. Probetas terminadas



(a) Orientación 0°



(b) Orientación 90°

Fuente: Autores

### 4.3 ENSAYOS

Para tener una idea clara del comportamiento del material, se realizaron ensayos de tracción para identificar las constantes elásticas del material y algunos de sus esfuerzos últimos.

Por medio de la máquina de ensayos MTS Bionix de 25KN de fuerza máxima, se realizaron los ensayos de tracción de 12 probetas de carbono/epóxi con fibras orientadas a 0 y 90°. La máquina de ensayos proporciona datos de fuerza axial de tracción en  $KN$  y desplazamiento axial en  $mm$ , en intervalos de tiempo de aproximadamente 0.1  $s$ . El montaje de las probetas y la máquina de ensayos de presentan en el Anexo D.

La rotura de las probetas con fibras orientadas a  $90^\circ$  estuvo condicionada en gran medida por la resistencia a tracción de la resina epóxica. La falla se produjo a una distancia próxima a las mordazas de sujeción de la máquina, esta particularidad permite evidenciar la presencia de concentradores de esfuerzos, producto de la complejidad en el proceso de construcción de los especímenes de ensayo. Las probetas con fibras orientadas a  $0^\circ$  fallaron en la zona media, con rotura transversal de las fibras y colapso de la resina, esta forma de rotura indica un resultado satisfactorio del ensayo. Los estados de rotura en los especímenes de ensayo se pueden apreciar en la Figura 4.

Figura 4. Modo de fallo de las probetas de carbono/epóxi



(a) Orientación  $90^\circ$



(b) Orientación  $0^\circ$

Fuente: Autores

#### 4.4 RESULTADOS

En el análisis de los datos obtenidos mediante los ensayos de tracción, es necesario determinar de forma precisa el área transversal de las probetas. Sin embargo, mediante el dimensionamiento geométrico es difícil determinarla, debido a las irregularidades presentes en una de las superficies de las probetas.

Para determinar una aproximación del área transversal se construyeron 6 laminados de ancho constante, con 2 y 3 láminas orientadas a  $0^\circ$ , que fueron medidas y pesadas después del tiempo de curado. Con la densidad lineal de cada haz de fibra de carbono, se determina el aporte en masa de fibra y resina al laminado, y mediante las densidades volumétricas el porcentaje en volumen de los dos constituyentes.

Con el volumen total determinado y conociendo la longitud de cada laminado, se puede tener una aproximación más real del área transversal de cada lámina. Los resultados obtenidos se encuentran tabulados en el Anexo E. Los datos promedio son:

- Área transversal 1 lámina:  $3.5314\text{e-}06$  [ $m^2$ ]
- % Fibra: 50.4 %
- % Resina: 49.6 %

Considerando que las probetas con fibras orientadas a  $0^\circ$  están formadas por dos láminas, y las probetas con fibras orientadas a  $90^\circ$  con cuatro láminas, se determina el área transversal, y los esfuerzos correspondientes a los datos de fuerza proporcionados por la máquina de ensayos MTS Bionix.

La longitud inicial de referencia para la máquina de ensayos es equivalente a la longitud de las probetas. Las curvas de esfuerzo vs deformación para los 12 ensayos realizados se presentan en el Anexo F.

El diagrama de esfuerzo-deformación de las probetas con orientación de sus fibras a  $90^\circ$ , en la Figura 5, no presenta zona plástica, esto se debe a las propiedades de la resina epóxica y a los concentradores de esfuerzos que se presentaron en la construcción de dichas probetas.

Figura 5. Curva Esfuerzo vs Deformación probeta 90°



Fuente: Autores.

En el diagrama de esfuerzo-deformación en la Figura 6, se aprecia el comportamiento de una de las probetas con orientación de sus fibras a 0° durante el ensayo de tracción; se puede observar claramente la zona elástica y posteriormente su deformación plástica hasta llegar finalmente a la rotura.

El módulo de Young se obtiene del diagrama de esfuerzo-deformación dentro de la región elástica, en el cual las deformaciones unitarias son proporcionales a los esfuerzos, es decir, está representado por la pendiente de la curva, tal y como se observa en la Figura 5 y 7.

La desviación estándar permite obtener una medida del grado de dispersión de los valores obtenidos con respecto al promedio de cada propiedad calculada por cada ensayo realizado, es decir, nos permite obtener el promedio o variación esperada con respecto a la media aritmética de los ensayos realizados.

Figura 6. Curva Esfuerzo vs Deformación probeta a 0°



Fuente: Autores.

Figura 7. Zona elástica curva Esfuerzo vs Deformación probeta a 0°



Fuente: Autores.

Como se puede observar en la Tabla 1 los valores obtenidos de la desviación estándar brindan un alto grado de confianza respecto a los resultados obtenidos de los ensayos realizados a las probetas orientadas a 0 y 90°, debido a que más del 80% de los datos se encuentran dentro del rango de la desviación obtenida.

Tabla 1. Validación de los ensayos

Ensayo	$E_{1exp}$	$E_{2exp}$	$\sigma_{1texp}$	$\sigma_{2texp}$
2	1,11E+11	8,14E+09	1,13E+09	1,27E+07
3	1,14E+11	7,98E+09	1,35E+09	1,54E+07
4	1,26E+11	7,12E+09	1,45E+09	1,52E+07
5	1,35E+11	7,30E+09	1,36E+09	1,12E+07
6	1,46E+11	7,33E+09	1,65E+09	9,51E+06
7	1,49E+11	7,55E+09	1,28E+09	1,39E+07
Promedio	1,30E+11	7,57E+09	1,37E+09	1,30E+07
Desv Est (s)	1,58E+10	4,06E+08	1,73E+08	2,31E+06
Desv Med $D_m$	1,30E+10	3,27E+8	1,19E+8	1,84E+6
Fuente: Autores.				

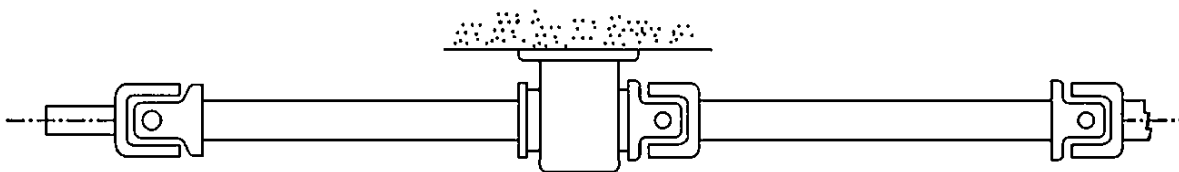
La desviación media es el promedio de las desviaciones absolutas. Los resultados obtenidos del cálculo de la desviación media indica que los datos de los ensayos para cada propiedad están cercanos entre sí.

## 5. DISEÑO DEL EJE DE TRANSMISIÓN CON MATERIALES COMPUESTOS

### 5.1 ESPECIFICACIONES DE DISEÑO

El vehículo seleccionado para el diseño óptimo del eje de transmisión es un camión tipo turbo de referencia Chevrolet NPR Reward Euro IV modelo 2015, cuyas especificaciones de diseño se presentan en la Tabla 2. El eje de transmisión del vehículo está constituido por dos piezas como se muestra en el esquema simplificado en la Figura 8.

Figura 8. Esquema simplificado de un eje de transmisión



Fuente: GAY, Daniel; HOA, Suong V. y TSAI, Stephen W. Composite Materials: Design and Applications: CRC Press LLC., 2002. 552 p. ISBN 978-1-4200-3168-3.

Tabla 2. Información Chevrolet NPR Reward Euro IV 2015

Especificaciones	
Torque máximo	419 [ $N \cdot m$ ]
Velocidad de rotación (Potencia máx.)	2600 [ $rpm$ ]
Relación de transmisión primera marcha	5.979
Relación de transmisión quinta marcha	0.759
Longitud entre salida de caja de transmisión y diferencial trasero	1.4 [ $m$ ]
Diámetro máximo del eje de transmisión	8 [ $cm$ ]
Fuente: Chevrolet	

## 5.2 CRITERIOS DE DISEÑO

Los ejes o árboles de transmisión de los vehículos soportan cargas de torsión producto de la transmisión de potencia entre la salida de la caja de transmisión y el diferencial trasero del vehículo. Las cargas axiales que se generan producto de las variaciones de longitud entre la entrada y salida de potencia del eje, son absorbidas por las juntas deslizantes contiguas al cardan, por lo tanto son asumidas como nulas.

**5.2.1 Esfuerzo cortante.** Las sollicitaciones de torsión generan esfuerzos cortantes que son máximos en la superficie exterior del eje de transmisión. Para calcular el esfuerzo cortante máximo<sup>17</sup> se hace uso de la siguiente ecuación:

$$\tau_{max} = \frac{T \cdot c}{J} \quad (1)$$

El momento polar de inercia  $J$  para un eje hueco<sup>17</sup> se calcula como:

$$J = \frac{\pi}{2} \cdot (r_o^4 - r_i^4) \quad (2)$$

donde  $r_o$  es el radio exterior,  $r_i$  el radio interior y  $c$  la distancia de la fibra más lejana, es decir  $r_o$ .

**5.2.2 Pandeo por torsión.** El eje de transmisión debido a su elevada longitud y pequeño espesor, puede llegar a sufrir pandeo al aplicarle un par torsional. Esta condición que se presenta frecuentemente con los materiales compuestos, se puede prevenir identificando el torque crítico, que en el caso de ejes tubulares con paredes

---

<sup>17</sup> MOTT, Robert L. Diseño de elementos de máquinas. 4 ed. México: Pearson Educación, 2006. 944 p. ISBN 970-26-0812-0.

delgadas y comportamiento ortótropo<sup>18</sup>, se calcula a partir de:

$$T_{cr} = 2\pi r_m h \cdot 0.272 \cdot (E_x E_y^3)^{\frac{1}{4}} \left( \frac{h}{r_m} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3)$$

donde  $r_m$  es el radio medio,  $h$  el espesor de las paredes y  $E_x$  y  $E_y$  los módulos elásticos longitudinal y transversal, en los ejes globales.

**5.2.3 Frecuencias naturales de flexión.** Durante la rotación de un eje este tiende a deformarse, incluso sin la presencia de cargas externas. La magnitud de la deformación depende de la rigidez del eje, del tipo de soportes, de la masa total, y de las piezas que se le añaden. La deformación, considerada como una función de la velocidad de giro del eje, presenta sus valores máximos en las llamadas velocidades críticas.

El cálculo de la velocidad crítica del eje de transmisión se hace en base al método de Rayleigh-Ritz<sup>19</sup>, cuya ecuación es una aproximación conservativa del primer modo de vibración o frecuencia natural. La ecuación está dada por:

$$N_c = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \quad (4)$$

donde  $g$  representa la gravedad y  $\delta_{st}$  la máxima deflexión estática, que para un eje sin carga y simplemente apoyado en los extremos está dada por:

$$\delta_{st} = \frac{5WL^3}{384E_x I} \quad (5)$$

$W$  es el peso,  $L$  la longitud e  $I$  el momento de inercia del eje de transmisión.

---

<sup>18</sup> Column Research Committee of Japan, Eds. Handbook of Structural Stability. Tokyo: Corona Publishing, 1971. 332 p. ISBN 978-607-7686-29-3.

<sup>19</sup> KRÜGER. Critical Speed of Shaft. Technical Bulletin TBN017.0/1998, 5 p.

**5.2.4 Frecuencias naturales de torsión.** Cuando los ejes son largos y/o tienen varias masas distribuidas a lo largo de su longitud, las vibraciones torsionales suelen ser un problema serio de diseño. Hay varios métodos para contrarrestar los efectos de una correspondencia indeseable en las frecuencias forzadas y las frecuencias naturales del sistema. La primera opción es rediseñar las propiedades de masa y rigidez del sistema, con la finalidad de obtener las frecuencias críticas tan arriba de la máxima frecuencia forzada como sea posible. La primera frecuencia correspondiente a la torsión del eje está dada por:

$$F_{nt} = \sqrt{\frac{G_{xy}J}{I_m L}} \quad (6)$$

donde  $G_{xy}$  se define como el módulo de cizallamiento e  $I_m$  la inercia del eje, que se calcula a partir de la siguiente ecuación:

$$I_m = \frac{1}{2}m (r_o^2 + r_i^2) \quad (7)$$

**5.2.5 Factor de seguridad.** El *streth ratio* SR o factor de seguridad, se basa en el criterio de rotura de Tsai-Wu para materiales compuestos ortótropos, aplicado a cada una de las láminas que forman el apilado o laminado del eje de transmisión.

El comportamiento a la fatiga en ejes de transmisión, fabricados a partir de materiales compuestos tipo carbono/epóxi, es notablemente mayor que en ejes convencionales de acero. Según estudios realizados por Gaikwad y Pradhan<sup>20</sup>, el ciclo de vida de un eje de transmisión con materiales compuestos, es superior incluso en un 900%, con respecto a un eje de acero.

---

<sup>20</sup> GAIKWAD, Hrishikesh. T. y PRADHAN, N. Fatigue Analysis of Composite Drive Shaft. *En: International Journal of Engineering Research & Techology*. Mayo, 2015. vol. 4, no. 5, p. 484-489.

En general, los materiales compuestos reforzados con fibras de carbono, poseen mejor resistencia a la fatiga que los metales y otros tipos de fibras de refuerzo<sup>21</sup>.

En base a las consideraciones previas, el factor de seguridad se establece en 3, para prevenir la rotura, y reducir la probabilidad de formación de microgrietas prematuras por fatiga del material<sup>22</sup>.

### 5.3 ANÁLISIS MACROSCÓPICO DE UNA LÁMINA

Para facilitar el análisis del material compuesto, se asume que cada lámina es ortótropa, elástica y homogénea, es decir, tanto las fibras de carbono como la resina epóxica en cualquier punto tendrán los mismos esfuerzos y deformaciones al aplicar una determinada carga.

**5.3.1 Relación esfuerzo-deformación de una lámina unidireccional.** Cada una de las láminas que constituyen el eje de transmisión son delgadas y no presentan cargas en la dirección perpendicular al plano principal, esta condición permite suponer un estado de tensión plana y simplificar el tensor de tensiones, asumiendo  $\sigma_3 = 0$ ,  $\tau_{23} = 0$  y  $\tau_{31} = 0$ .

Las láminas debido a la naturaleza de los materiales compuestos presentan un comportamiento ortótropo, lo que permite reducir la matriz de rigidez de 36 a 9 términos<sup>22</sup>, luego la relación esfuerzo-deformación según la ley generalizada de Hooke se expresa como:

---

<sup>21</sup> Walsh, Paul J. y Zoltec Corporation. Carbon Fibers. En: Composites ASM Handbook: ASM International, 2001. p. 92-107.

<sup>22</sup> KAW, Autar K. Mechanics Of Composite Materials. 2 ed. Boca Raton: CRC Press LLC, Taylor & Francis Group, 2006. 457 p. ISBN 978-0-8493-1343-1.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (8)$$

donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son los esfuerzos normales en la dirección longitudinal y transversal, y  $\tau_{12}$  el esfuerzo cortante en el plano principal de la lámina;  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  son las deformaciones normales en la dirección longitudinal y transversal, y  $\gamma_{12}$  la deformación por cizallamiento en el plano principal de la lámina. Los coeficientes reducidos de rigidez  $Q$  para materiales ortótropos en función de las constantes elásticas son:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad Q_{66} = G_{12} \quad (9)$$

$E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$  y  $\nu_{21}$  son las constantes ingenieriles, en su orden, módulos elásticos longitudinal y transversal, módulo de cizallamiento y coeficientes de Poisson principal y secundario. Los dos coeficientes se relacionan de la siguiente forma:

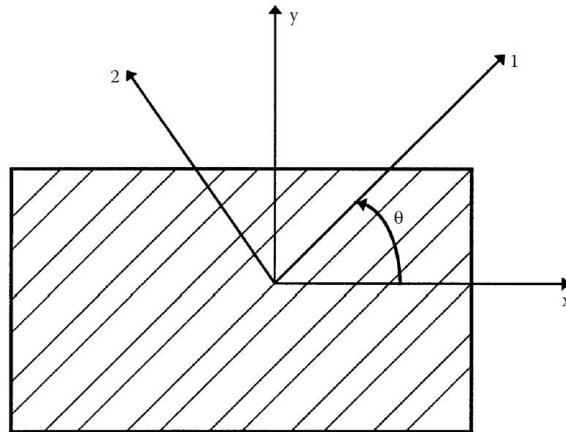
$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2 \quad (10)$$

**5.3.2 Láminas unidireccionales con orientaciones arbitrarias.** Los esfuerzos y deformaciones analizados previamente corresponden a direcciones locales, es decir, en la dirección en que se encuentran orientadas las fibras. Sin embargo, en los procesos de diseño, las fibras son orientadas para satisfacer una condición de carga, provocando que las orientaciones de las fibras de refuerzo no siempre coincidan con las direcciones geométricas o globales  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

Para relacionar los esfuerzos de los ejes locales con los ejes globales del laminado, se establece una matriz de transformación  $T_M$  en función del ángulo de orientación  $\theta$ , dada por:

$$[T_M] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad c = \cos \theta \quad s = \sin \theta \quad (11)$$

Figura 9. Ejes locales y globales de una lámina



Fuente: KAW, Autar K. *Mechanics Of Composite Materials*. 2 ed. Boca Raton: CRC Press LLC, Taylor & Francis Group, 2006. 457 p. ISBN 978-0-8493-1343-1.

La matriz de transformación  $T_M$  al ser invertida y multiplicada por la matriz de esfuerzos en los ejes locales, permite obtener los esfuerzos en los ejes globales, sin embargo, la matriz de transformación no permite relacionar directamente las deformaciones por cizallamiento  $\gamma_{12}$  y  $\gamma_{xy}$  si no sus mitades, por lo que es necesario recurrir a la matriz de Reuter<sup>23</sup> para escalar en 2 el valor de dichas deformaciones. La matriz de Reuter está dada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

<sup>23</sup> BIRD, John; LITTLE, Andrew y ROSS, Carl. *Mechanics of Solids*. 2 ed. Abingdon: Routledge, 2016. 454 p. ISBN 978-1-138-90466-8.

Luego la relación-esfuerzo deformación en los ejes globales, y en función de la matriz de rigidez  $Q$ , la matriz de transformación  $T_M$  y la matriz de Reuter  $R$  es:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T_m]^{-1} [Q] [R] [T] [R]^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Los exponentes a la -1 indican la matriz inversa. La multiplicación de las 5 matrices que definen los esfuerzos en los ejes globales queda como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (14)$$

donde los elementos de la matriz transformada de rigidez  $\bar{Q}$  son:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (15)$$

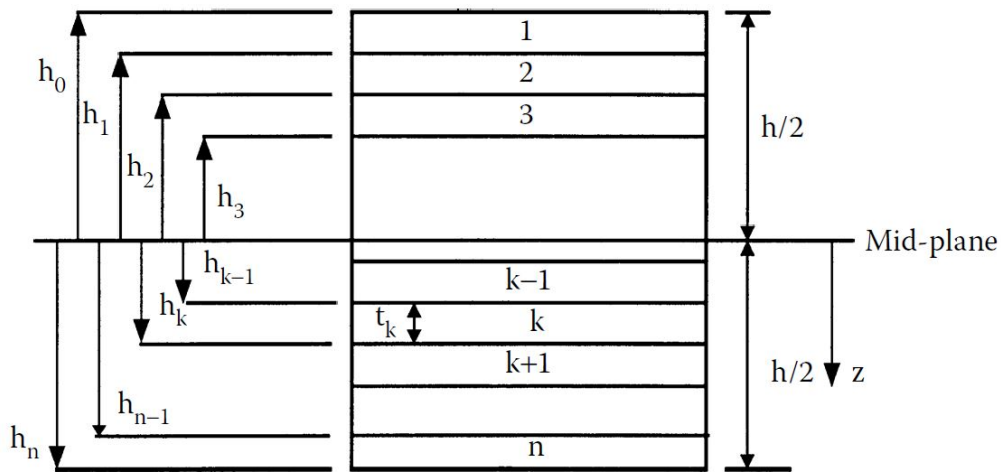
#### 5.4 ANÁLISIS MACROSCÓPICO DEL LAMINADO

Con el análisis previo de cada una de las láminas, se analizará la interacción del orden de apilado y la orientación de las fibras en las constantes ingenieriles del laminado, mediante la teoría clásica de laminados.

En el análisis del laminado se asume que no hay presencia de deslizamiento entre láminas, y se establece una convención de coordenadas Figura 10, que relaciona la distancia entre la superficie exterior de cada lámina y el plano medio del laminado dada por:

$$h_i = -\frac{h}{2} + t(1 - n) \quad (16)$$

Figura 10. Convención de coordenadas del laminado



Fuente: KAW, Autar K. Mechanics Of Composite Materials. 2 ed. Boca Raton: CRC Press LLC, Taylor & Francis Group, 2006. 457 p. ISBN 978-0-8493-1343-1.

La variable  $h$  representa el espesor del laminado,  $t$  el espesor de cada lámina y  $n$  el número correspondiente a la posición de la lámina en el apilado.

**5.4.1 Variación de las deformaciones en el laminado.** Las deformaciones según la teoría básica de laminados, varía solo en la dirección de apilamiento  $z$ , y relaciona las deformaciones  $\epsilon^o$  y curvaturas  $\kappa$  en el plano medio, con la distancia a la superficie exterior de cada lámina. La relación de deformación-curvatura en el plano medio está dada por:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (17)$$

**5.4.2 Fuerzas y momentos resultantes en el laminado.** En busca de obtener las deformaciones y curvaturas en el plano medio, se establecen las matrices de rigidez de extensión  $A$ , acoplamiento  $B$  y flexión  $D$ . Las tres matrices se relacionan con las fuerzas y momentos por unidad de longitud aplicados en el plano principal del laminado  $xy$ , y las deformaciones y curvaturas en el plano medio. La relación de fuerzas, rigideces y deformaciones está dada por:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Los elementos de la matriz de extensión  $A$ , acoplamiento  $B$  y flexión  $D$  son:

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^k [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \quad (19)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (20)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^k [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (21)$$

Donde  $k$  representa el número asignado a cada lámina en el apilado,  $h_k$  la distancia del plano medio a la superficie externa de cada lámina, e  $i$  y  $j$  representan los índices

de los elementos de las matrices de rigidez, que toman valores de 1,2 y 6.

En el caso específico del diseño del eje de transmisión, la única carga presente es el torque, luego  $N_x = 0$ ,  $N_y = 0$ ,  $M_x = 0$ ,  $M_y = 0$  y  $M_{xy} = 0$ . La transformación de la carga torsional, a una fuerza por unidad de longitud en el plano principal del laminado  $N_{xy}$ , se hace mediante la siguiente ecuación:

$$N_{xy} = \tau_{max} * h \quad (22)$$

El valor de  $h$  corresponde al espesor del laminado, y  $\tau_{max}$  el esfuerzo cortante máximo del eje de transmisión.

**5.4.3 Constantes ingenieriles.** A partir de la inversa de la matriz de extensión  $A$ , se determinan las constantes ingenieriles en los ejes globales del laminado:

$$E_x = \frac{1}{H \cdot a_{11}} \quad (23)$$

$$E_y = \frac{1}{H \cdot a_{22}} \quad (24)$$

$$G_{xy} = \frac{1}{H \cdot a_{66}} \quad (25)$$

$$\nu_{xy} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \quad (26)$$

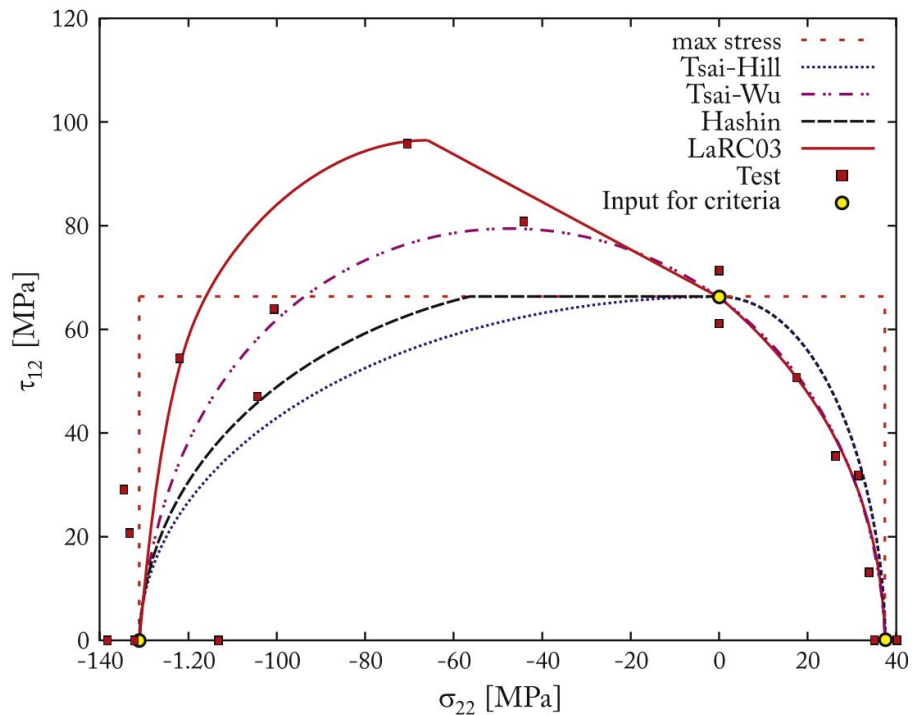
## 5.5 CRITERIOS DE FALLA

En el caso de laminados de materiales compuestos de comportamiento ortótropo algunas de las teorías de falla comúnmente utilizadas son:

- Esfuerzo máximo
- Deformación máxima
- Tsai-Hill
- Hoffman
- Tsai-Wu

Para la selección de la teoría de falla más adecuada para el caso específico de diseño del eje de transmisión, se analizaron los resultados obtenidos de la comparación de algunas teorías de falla con resultados experimentales de Nali y Carrera en la Figura 11. y Daniel y colaboradores en la Figura 12.

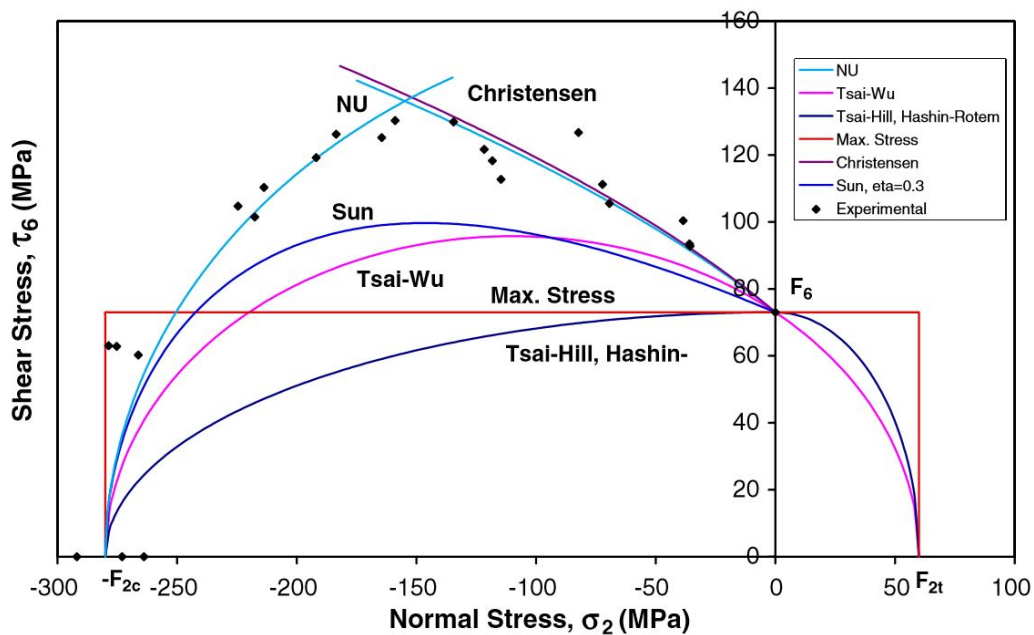
Figura 11. Envoltentes de rotura para un compuesto E-Glass / LY556



NALI, P. y CARRERA, E. A numerical assessment on two-dimensional failure criteria for composite layered structures. En: Composites Part B:Engineering. Marzo, 2012. vol. 43, p. 280-289.

Nali y Carrera<sup>24</sup> comparan las teorías de falla de Tsai-Wu, Tsai-Hill y el criterio de máximo esfuerzo, con resultados experimentales y algunas propuestas nuevas de teorías de falla, para un compuesto unidireccional de fibra de vidrio y matriz polimérica mediante ensayos WWFE. Los resultados evidencian que la teoría de falla de Tsai-Wu tiene un comportamiento más ajustado a los resultados experimentales, y el criterio de máximo esfuerzo y Tsai-Hill un comportamiento más distante.

Figura 12. Envoltentes de rotura para un compuesto de carbono/epóxi



DANIEL, Isaac M. y col. Interfiber/interlaminar failure of composites under multi-axial states of stress. En: Composites Science and Technology. Junio, 2009. vol. 69, p. 764-771.

Daniel y colaboradores<sup>25</sup> realizan un análisis similar, pero esta vez para un material compuesto unidireccional de carbono/epóxi bajo cizallamiento y carga normal

<sup>24</sup> NALI, P. y CARRERA, E. A numerical assessment on two-dimensional failure criteria for composite layered structures. En: Composites Part B:Engineering. Marzo, 2012. vol. 43, p. 280-289.

<sup>25</sup> DANIEL, Isaac M. y col. Interfiber/interlaminar failure of composites under multi-axial states of stress. En: Composites Science and Technology. Junio, 2009. vol. 69, p. 764-771.

transversal. Los resultados nuevamente permiten inferir que el criterio de Tsai-Wu tiene un comportamiento más cercano a los resultados experimentales.

En los dos análisis se evidencia que existen otros criterios de falla o ruptura que simulan con más exactitud la predicción de rotura, sin embargo, Tsai-Wu permite una mejor interacción con cualquier estado de cargas (tracción, compresión y cortante).

**5.5.1 Criterio de falla de Tsai-Wu.** El criterio o teoría de falla de Tsai-Wu<sup>26</sup> para materiales ortótropos, aplicado a cada una de las láminas con comportamiento de tensión plana, considera que una lámina falla cuando:

$$H_1\sigma_1 + H_2\sigma_2 + H_6\tau_{12} + H_{11}\sigma_1^2 + H_{22}\sigma_2^2 + H_{66}\tau_{12}^2 + 2H_{12}\sigma_1\sigma_2 < 1 \quad (27)$$

Los términos  $H$  se calculan analíticamente a partir de los esfuerzos últimos del material ante cargas unidireccionales, exceptuando el término  $H_{12}$  que se calcula a partir de los resultados obtenidos mediante ensayos de cargas bidireccionales.

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{\sigma_{1u}^t} - \frac{1}{\sigma_{1u}^c} \\ H_2 &= \frac{1}{\sigma_{2u}^t} - \frac{1}{\sigma_{2u}^c} \\ H_6 &= 0 \\ H_{11} &= \frac{1}{\sigma_{1u}^t \sigma_{1u}^c} \\ H_{22} &= \frac{1}{\sigma_{2u}^t \sigma_{2u}^c} \\ H_{12} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\sigma_{1u}^t \sigma_{1u}^c \sigma_{2u}^t \sigma_{2u}^c}} \end{aligned} \quad (28)$$

---

<sup>26</sup> TSAI, Stephen W. y WU, Edward M. A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. En: Journal of Composite Materials. Enero, 1971. vol. 5, no. 1, p. 58-80.

## 6. ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN

### 6.1 IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO GENÉTICO

El algoritmo genético de optimización está implementado en lenguaje de cálculo técnico en el entorno de trabajo de MATLAB\*. El algoritmo se desarrolló configurando y adaptando el método de solución de problemas de optimización GA (*Genetic Algorithm*) que hace parte del complemento *Global Optimization Toolbox*. El algoritmo de optimización está estructurado en 9 archivos (Ver Anexo G), que corresponden a:

1. Script `AlgoritmoGenetico.m`
2. Función `FuncionObjetivo.m`
3. Función `Restricciones.m`
4. Función `Opciones.m`
5. Script `MapaDeOrientaciones.m`
6. Archivo de texto `Datos`
7. Función `Lamina.m`
8. Función `Calculos.m`
9. Función `Propiedades.m`

**6.1.1 Algoritmo genético.** La función *Genetic Algorithm* que hace parte del script principal del algoritmo implementado `AlgoritmoGenetico.m`, tiene la siguiente sintaxis:

```
[x, Fval, exitflag, output, population, scores] = ga(FuncObj, NVar, [],  
[], [], [], LimInf, LimSup, Restr, Int, Opciones);
```

---

\* MATLAB R2015b © 1994-2016 The MathWorks, Inc.

Las variables ubicadas a la derecha de la igualdad constituyen los argumentos de entrada, algunas de las variables más relevantes son:

- `FuncObj`: Constituye la función de aptitud. Se encarga de enlazar el script principal del algoritmo con la función `FuncionObjetivo.m`, donde se establece y evalúa la función de aptitud.
- `NVar`: Define el número de variables de optimización. En el caso específico de diseño corresponde a un valor de 2: las combinaciones de apilamiento y el radio exterior  $r_o$ , las variables se representan como un vector  $x(i)$ .
- `LimInf` y `LimSup`: Establecen los límites o desigualdades de restricción lineales de las variables de optimización. El radio exterior se evalúa desde 0.035 hasta 0.055  $m$  y las combinaciones de apilamiento desde 1 hasta 23657.
- `Restr`: Constituye las restricciones o desigualdades no lineales de optimización. La variable enlaza el script principal del algoritmo con la función `Restricciones.m`, en donde se establecen las principales restricciones de diseño.
- `Int`: Establece un integrador de enteros para las variables discretas de optimización que se especifiquen. Las combinaciones de apilamiento son integradas en base a los límites establecidos, luego `Int` toma el valor correspondiente a la posición de la variable de optimización en el vector  $x(i)$ , en este caso 1.
- `Opciones`: El argumento llama a la función `Opciones.m`, donde se establecen los parámetros y configuraciones del algoritmo genético.

Las variables ubicadas a la izquierda de la igualdad constituyen los argumentos de salida.

- $x$ : Variables de optimización de la solución óptima.  $x(1)$  representa las combinaciones de apilamiento, y  $x(2)$  el radio exterior  $r_o$

- `Fval`: Función evaluada en el punto óptimo de diseño.
- `exitflag`, `output`, `population` y `scores`: En su orden representan la razón de finalización del algoritmo, información detallada de cada iteración, número de individuos de la población y la función evaluada en cada uno de los individuos de la última generación.

**6.1.2 Función objetivo.** La función objetivo o función de aptitud definida en el archivo `FuncionObjetivo.m`, es calculada en la función `Calculos` y está dada por:

$$F_{obj} = W \quad (29)$$

La variable  $W$  corresponde al peso total del eje de transmisión y está dada en Newtons  $[N]$ .

**6.1.3 Restricciones.** La función `Restricciones.m` contiene las restricciones de desigualdad no lineales, establecidas para el diseño óptimo del eje de transmisión. La sintaxis requerida para establecer las restricciones en el algoritmo, se basa en un vector denominado  $c(i)$  que contiene todas las restricciones, y una variable `ceq` cuyo valor es 0.

$$c(i) \leq 0 \quad ceq = 0 \quad (30)$$

Las restricciones de diseño se establecen en función de los criterios de diseño correspondientes a:

- Factor de seguridad (Respecto al torque aplicado)  $F_s \geq 3$
- Primera frecuencia natural de flexión  $F_{nf} \geq rpm_m/n_5 \cdot 1.5$
- Primera frecuencia natural de torsión  $F_{nt} \geq rpm_m/n_5 \cdot 1.5$
- Torque crítico  $T_c \geq T \cdot n_1$

La variable  $rpm_m$  corresponde a la velocidad de rotación del motor a potencia máxima,  $T$  al torque máximo,  $n_1$  a la relación de transmisión en 1ra marcha y  $n_5$  a la relación de transmisión en 5ta marcha. La velocidad máxima de rotación del motor puede alcanzar valores por encima de la velocidad de operación en potencia máxima, por lo que es necesario añadir un margen de seguridad que incluya este incremento, y que salvaguarde el eje ante una falla en el control de velocidad de corte del motor.

Tomando como ejemplo el factor de seguridad  $F_s$ , calculado en base al criterio de rotura o falla de Tsai-Wu, la sintaxis para definir dicha restricción es:

```
FS = Fs-3;  
c =[-FS, Restriccion 2, Restriccion 3, ...];  
ceq = [];
```

**6.1.4 Opciones.** En la función `Opciones.m`, se definen los parámetros para el adecuado funcionamiento del algoritmo genético, y las gráficas que se desean visualizar durante su ejecución. Las opciones implementadas preliminarmente en el algoritmo genético, se muestran en la Tabla 3. Otras opciones usadas por el algoritmo, se dejan en la configuración por defecto sugerida por MATLAB.

La población definida como `PopulationSize` se establece en 50 individuos, en base a la capacidad de procesamiento de los computadores usados para la ejecución del algoritmo. Las condiciones de finalización se establecen como el número de generaciones `Generations` o la distancia entre los valores promedio de la función objetivo evaluada `TolFun`, `StallGenLimit` representa el número máximo de generaciones sucesivas que no sufren cambios, y que condicionan la terminación del algoritmo, esta opción se establece en infinito para garantizar la adecuada convergencia en una solución óptima, `@gaplotbestf` grafica el promedio de la

función evaluada para todos los individuos y el valor óptimo contra las generaciones transcurridas.

Tabla 3. Opciones definidas preliminarmente en el algoritmo genético

Opcion	Valor
PopulationType	doublevector
PopulationSize	50
StallGenLimit	inf
Generations	100
TolFun	1e-8
PlotFcns	@gaplotbestf
Fuente: Autores.	

**6.1.5 Combinaciones de apilamiento.** Para garantizar la solución más óptima de diseño, es importante encontrar el menor número de láminas posible, que satisfaga las restricciones y especificaciones de diseño. Las orientaciones de los refuerzos en cada lámina, inciden directamente en la cantidad de láminas a utilizar, lo que sugiere incluir en el rango de búsqueda del algoritmo, todas las combinaciones posibles entre número de láminas y sus orientaciones.

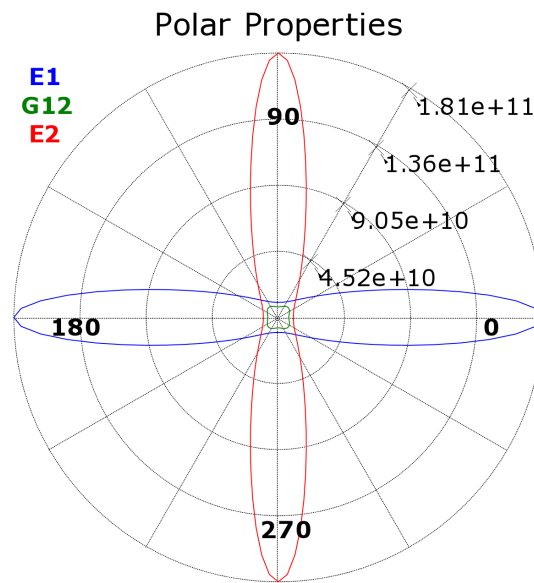
Considerando la cantidad de combinaciones posibles, se establecerán algunas pautas que buscan simplificar el rango de búsqueda, y garantizar que algoritmo converja en la solución más óptima. Las pautas establecidas son:

- Solo se usaran orientaciones en las fibras de refuerzo de 0, 90, -45 y 45°, considerando que en dichas orientaciones se encuentran los módulos y esfuerzos últimos más altos del material, y que las solicitaciones de carga coinciden con los ejes principales del laminado. En la Figura 13 se evidencia

la variación de las constantes elásticas en función de las orientaciones, a través de un diagrama polar.

- El laminado será simétrico, para garantizar que no se presenten deformaciones indeseadas durante el curado, debidas al desequilibrio de los esfuerzos generados por el propio peso del material, cuando aún no se ha alcanzado la consistencia final.
- Las orientaciones de  $-45$  y  $45^\circ$  estarán como pares simultáneos, para garantizar que puedan fabricarse mediante el proceso de enrollado de filamentos.

Figura 13. Constantes ingenieriles en función de la orientación de las fibras



Fuente: Autores.

La generación de la secuencia de apilamiento se basa en lo propuesto por Gürdal, Haftka y Nagendra<sup>27</sup>, quienes establecen variables discretas para representar las

<sup>27</sup> GÜRDAL, Z.; HAFTKA, R.T y NAGENDRA, S. Stacking Sequence Optimization of Simply Supported Laminates with Stability and Strain Constraints. En: AIAA Journal. Agosto, 1992. vol. 30, no. 8, p. 2132-2137.

orientaciones de las láminas en el apilamiento. En concordancia con su propuesta, se establece un valor para cada orientación; "0" representa la ausencia de lámina, "1" fibras orientadas a  $0^\circ$ , "2" fibras orientadas a  $45^\circ$  o  $-45^\circ$  y "3" fibras orientadas a  $90^\circ$ .

Mediante el script `MapaDeOrientaciones.m` se generan las combinaciones posibles para 22 láminas, reducidas a 11 por su condición de simetría, obteniendo 4194304 combinaciones posibles de apilamiento. En base a las condiciones o pautas previamente establecidas es posible reducir las combinaciones a 23657 posibilidades, mejorando notablemente la velocidad de procesamiento y la capacidad del algoritmo de encontrar el diseño óptimo.

El script `MapaDeOrientaciones.m`, genera un archivo de datos nombrado `Datos`, en donde se encuentran todas las combinaciones de apilamiento. Mediante la función `Lamina.m`, el script principal del algoritmo genético lee las combinaciones generadas, y duplica simétricamente los datos para obtener todas las opciones de apilamiento.

**6.1.6 Cálculos.** Las especificaciones o parámetros de diseño, propiedades generales del material y los cálculos referentes a los criterios y restricciones de diseño se generan mediante la función `Calculos.m`. Los argumentos de entrada son las variables de optimización: radio exterior  $r_o$  y combinaciones de apilamiento, con respecto a las combinaciones de apilamiento es necesario hacer un llamado a la función `Lamina.m` para establecer el número de láminas y determinar el espesor del laminado.

El algoritmo puede presentar problemas en las restricciones calculadas, cuando corresponden a números complejos. Para ello se establecen condiciones que permitan reemplazar los números complejos por 0 y garantizar que el algoritmo penalice las variables que producen el error.

**6.1.7 Propiedades.** La función `Propiedades.m`, se encarga de analizar el laminado que constituye el eje de transmisión, y proporcionar los datos necesarios para el cálculo de las restricciones y funcionamiento del algoritmo de optimización. La función está implementada para satisfacer laminados con cualquier configuración de apilamiento, y está estructurada de la siguiente forma:

- Datos: Definición de las constantes elásticas del material, esfuerzos últimos, fuerzas por unidad de longitud y especificaciones del laminado.
- Orientaciones: A los datos discretos de la función `Lamina.m` se les asigna los ángulos correspondientes en cada iteración.
- Análisis macroscópico de cada lámina: Se analiza cada lámina respecto a los esfuerzos, deformaciones y su interacción con las orientaciones de refuerzo. El análisis se desarrolla en base a la sección 5.3 Análisis macroscópico de una lámina.
- Análisis macroscópico del laminado: Se analiza el laminado según la teoría básica de laminados, mediante lo estipulado en la sección 5.4 Análisis macroscópico del laminado.
- Criterio de falla: En base a los análisis previos, se determina el factor de seguridad de cada lámina según lo descrito en la sección 5.5 Criterios de falla. El menor de todos los factores de seguridad constituye una de las restricciones de diseño del algoritmo de optimización.
- Constantes ingenieriles: Cálculo de las constantes ingenieriles o elásticas en los ejes globales del laminado, que son requeridas en el cálculo de las restricciones de diseño.

## 6.2 ADECUACIÓN Y DELIMITACIÓN DEL ALGORITMO

Para mejorar la capacidad de optimización del algoritmo genético, es importante ejecutar pruebas que permitan restringir los límites de búsqueda y facilitar el

incremento de los parámetros de funcionamiento como la población y el número de generaciones, sin generar pérdidas en el tiempo y calidad de procesamiento<sup>28</sup>.

Para delimitar el rango de búsqueda, se realizaron 6 ejecuciones con una población de 50 individuos, 100 generaciones, 23657 posibilidades de apilamiento, y un radio exterior entre 25 y 65 *mm*. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 4.

Tabla 4. Ejecución de prueba del algoritmo genético

Run	$r_o[mm]$	$N^\circ$ <i>Laminas</i>	<i>Orientaciones</i>	$W[N]$	<i>Restricciones</i>
1	57.1771	8	$[0, -45, 45, 90]_s$	14.1698	Si
2	57.1855	8	$[0, 90, 45, -45]_s$	14.172	Si
3	43.6849	12	$[0, 90, 45, -45, 45, -45]_s$	15.9608	Si
4	57.4741	8	$[0, 90, 45, -45]_s$	14.2447	Si
5	44.7991	10	$[-45, 45, -45, 45, 0]_s$	13.7308	Si
6	43.5867	12	$[45, -45, 90, -45, 45, 0]_s$	15.9236	Si
Fuente: Autores.					

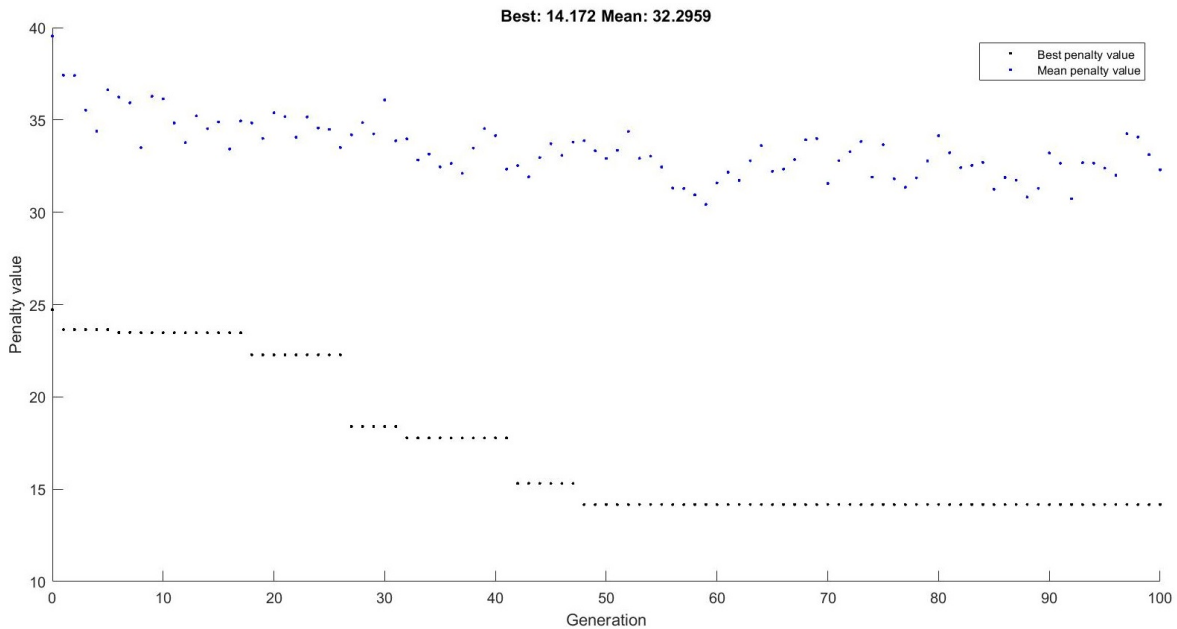
El algoritmo genético, debido a la gran cantidad de combinaciones posibles entre radios, orientaciones y números de láminas, presenta saltos en el espacio de búsqueda y una tendencia de convergencia en la sucesión de generaciones.

En el caso de las ejecuciones de prueba, aunque las generaciones que condicionan la terminación de la optimización son pequeñas, esta tendencia es más visible por el amplio espacio de búsqueda establecido. El comportamiento de convergencia de la función objetivo, se puede ver en la Figura 14, donde los puntos azules

<sup>28</sup> ANDRE, J.; SIARRY, P. y DOGNON, T. An improvement of the standard genetic algorithm fighting premature convergence in continuous optimization. *En: Advances in Engineering Software*, 2011. vol. 32, no. 1, p. 49-60.

dispersos(superiores) representan la función objetivo promedio de la población en cada generación, y los puntos negros(inferiores) los valores más óptimos.

Figura 14. Función objetivo vs generaciones transcurridas



Fuente: Autores.

En base a los resultados obtenidos en las ejecuciones previas, se reduce el número máximo de láminas de 22 a 16, incidiendo en la disminución de 23657 a 1678 opciones de apilamiento. Los límites inferior y superior del radio exterior se reducen a 35 y 55 *mm* respectivamente. El acotamiento de los límites de optimización aumenta significativamente la velocidad de procesamiento, permitiendo aumentar la población y el número de generaciones a 200. Los resultados obtenidos por el cambio en los parámetros del algoritmo se muestran en la Tabla 5.

Los nuevos resultados obtenidos en la ejecución del algoritmo muestran pequeñas variaciones en la función objetivo evaluada, y las variables de optimización. Esta condición permite inferir que los parámetros establecidos son los adecuados.

Tabla 5. Ejecución final del algoritmo genético

Run	$r_o[mm]$	$N^\circ Laminas$	<i>Orientaciones</i>	$W[N]$	<i>Restricciones</i>
1	44.1738	10	$[0, -45, 45, -45, 45]_s$	13.5336	<b>Si</b>
2	44.1255	10	$[45, -45, 90, -45, 45]_s$	13.5184	<b>Si</b>
3	44.1439	10	$[45, -45, 0, -45, 45]_s$	13.5242	<b>Si</b>
4	44.4732	10	$[45, -45, 45, -45, 0]_s$	13.628	<b>Si</b>
5	44.1366	10	$[45, -45, 0, -45, 45]_s$	13.5219	<b>Si</b>
6	44.2966	10	$[45, -45, 0, -45, 45]_s$	13.5723	<b>Si</b>

Fuente: Autores.

## 7. PROTOTIPO

### 7.1 METODOLOGÍA DE ESCALAMIENTO

El escalamiento de un laminado con materiales compuestos es bastante complejo, debido a la imposibilidad de disminuir el espesor de las láminas, y al comportamiento ortótropo que presentan. Una opción viable consiste en conseguir el diseño óptimo, en base al escalamiento de los principales parámetros de diseño: el torque y la velocidad de rotación, en función de la geometría del eje, es decir, por similitud geométrica<sup>2930</sup>.

**7.1.1 Escalamiento del momento polar de inercia.** Para el escalamiento del torque es necesario encontrar la relación existente entre la variación dimensional de la sección transversal del eje y su momento polar de inercia. La relación de proporciones entre las dos variables dimensionales se determina a partir de:

$$J = \frac{\pi}{2} (r_o^4 - r_i^4) \quad J_{esc} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{r_o^4}{esc^4} - \frac{r_i^4}{esc^4} \right) \quad J_{esc} = \frac{J}{esc^4} \quad (31)$$

**7.1.2 Escalamiento del torque.** Las propiedades de una lámina de un material compuesto son inherentes a cambios dimensionales diferentes a su espesor, esta condición permite hacer una relación de proporcionalidad entre la carga aplicada y la geometría. La relación de proporción está dada por:

$$T = \frac{\tau J}{r_o} \quad T_{esc} = \frac{\tau \frac{J}{esc^4}}{\frac{r_o}{esc}} \quad T_{esc} = \frac{T}{esc^3} \quad (32)$$

---

<sup>29</sup> CHACRABORTY, S. Mechanics Over Micro and Nano Scales. New York: Springer, 2011. 169 p. ISBN 978-1-4419-9600-8.

<sup>30</sup> ANAYA, Alejandro y PEDROZA, Humberto. Scaling-up, the art of chemical engineering. En: Tecnología, Ciencia, Educación. Instituto Mexicano de Ingenieros Químicos. Enero, 2008. vol. 23, no. 1, p. 31-39.

**7.1.3 Escalamiento de la masa.** La masa de un cuerpo cilíndrico hueco se relaciona con los cambios dimensionales en su geometría de la siguiente forma:

$$m = \rho * \pi (r_o^2 - r_i^2) L \quad m_{esc} = \rho * \pi \left( \frac{r_o^2}{esc^2} - \frac{r_i^2}{esc^2} \right) \frac{L}{esc} \quad m_{esc} = \frac{m}{esc^3} \quad (33)$$

**7.1.4 Escalamiento de la velocidad de rotación.** Bajo las consideraciones de diseño, la velocidad de rotación del eje está restringida por el primer modo de vibración por flexión. Partiendo de ello y considerando que el momento de inercia  $I$  es igual a  $\frac{J}{2}$ , la relación de proporción entre velocidad y geometría está dada por:

$$rpm = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{384EI}{5mL^3}} \quad rpm_{esc} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{384E \frac{J}{2esc^4}}{5 \frac{m}{esc^3} \frac{L^3}{esc^3}}} \quad rpm_{esc} = esc \cdot rpm \quad (34)$$

## 7.2 ESCALAMIENTO

El escalamiento geométrico del eje de transmisión se realizó a una escala 1:2, en base a las limitaciones presentes en el proceso de construcción por enrollamiento de fibra para ejes con diámetros pequeños. Los parámetros escalados en función de la escala geométrica previamente establecida se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6. Valores escalados

Parámetro	Valor real	Escala	Valor escalado
Limite radio interior [mm]	35	1 : 2	17.5
Limite radio exterior [mm]	55	1 : 2	27.5
Longitud [m]	1.5	1 : 2	0.7
Torque [N · m]	2505.201	1 : 2 <sup>3</sup>	313.15
Vel de rotación [rpm]	5138.34	2 : 1	10276.7
Fuente: Autores.			

### 7.3 PROTOTIPO FINAL

En base a los resultados obtenidos mediante la ejecución del algoritmo genético de optimización se construyeron dos prototipos a escala del eje de transmisión. El procedimiento de construcción de los prototipos se presenta en el Anexo H y las medidas correspondientes a los ejes construidos se muestran en la Tabla 7.

Tabla 7. Dimensiones de los prototipos construidos

Prototipo	Dimensión	Valor	Unidades
Eje 1	Radio interior $r_i$	20.475	$mm$
	Radio exterior $e_o$	22,35	$mm$
	Longitud $L$	0.7	$m$
	Masa $m$	205.9	$g$
Eje 2	Radio interior $r_i$	20.75	$mm$
	Radio exterior $e_o$	22.65	$mm$
	Longitud $L$	0.7	$m$
	Masa $m$	197.8	$g$

Fuente: Autores.

Figura 15. Prototipo construido

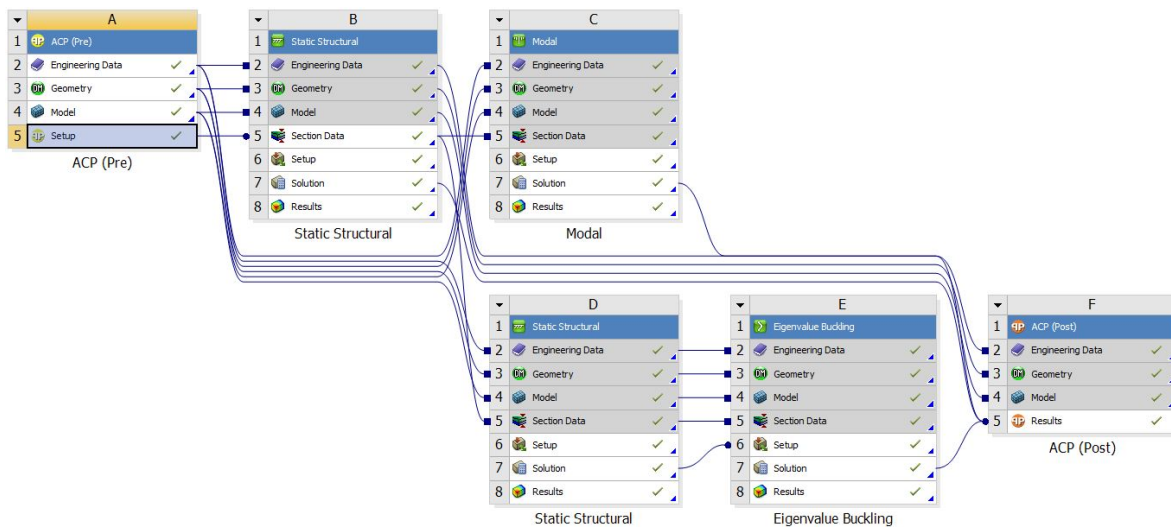


Fuente: Autores.

## 8. ANÁLISIS MEDIANTE MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Por medio del software de simulación ANSYS\* y el entorno de trabajo Workbench, se verifican los resultados obtenidos de forma analítica en el proceso de diseño del eje de transmisión. Los módulos utilizados, y el esquema de análisis desarrollado en el entorno de trabajo Workbench se aprecia en la Figura 16.

Figura 16. Esquema del análisis en ANSYS Workbench



Fuente: Autores.

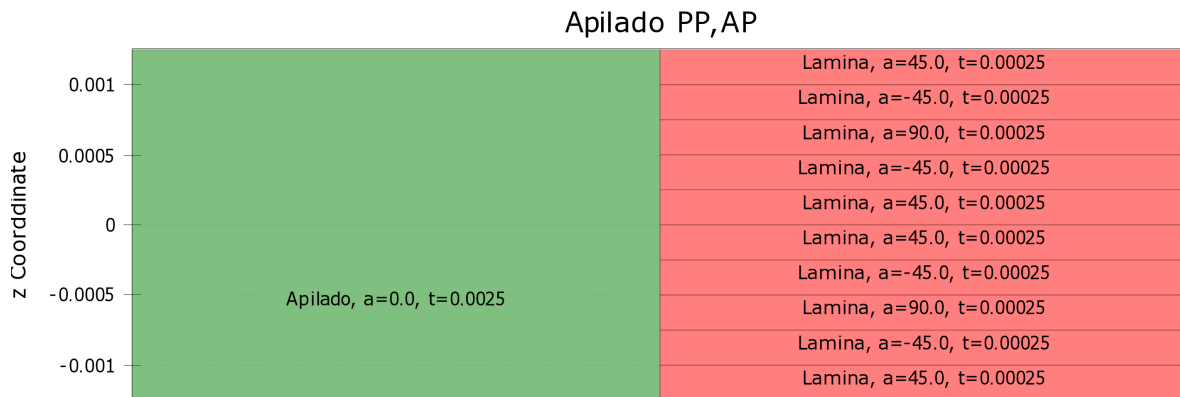
### 8.1 ANÁLISIS DEL LAMINADO

El análisis se realiza mediante el módulo ACP Pre<sup>+</sup> especializado en compuestos, e integrado con los módulos de análisis estándar de Workbench. En el análisis es necesario establecer las propiedades mecánicas del material compuesto, la secuencia de apilamiento (Figura 17), la geometría del eje y el mallado (Figura 18).

\* ANSYS, Inc Release 16.2

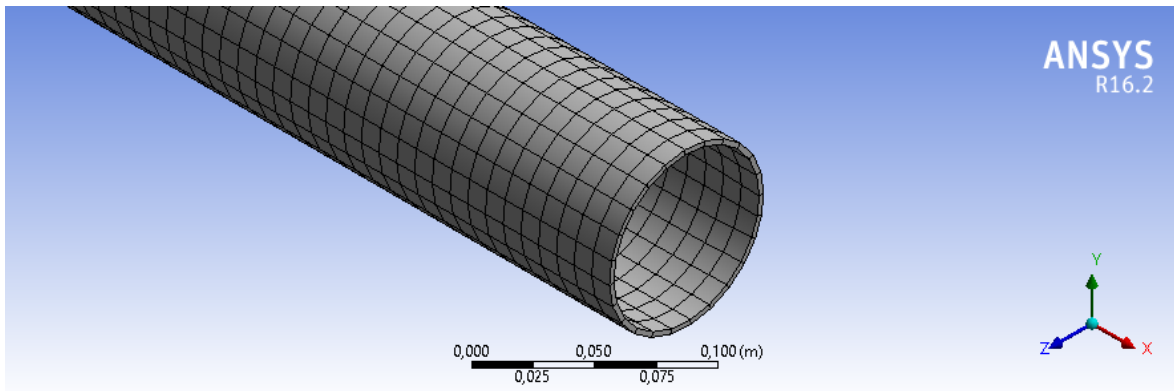
+ ANSYS Composite Prep (ACP)

Figura 17. Secuencia de apilamiento en el módulo ACP



Fuente: Autores.

Figura 18. Mallado refinado del eje en el módulo ACP



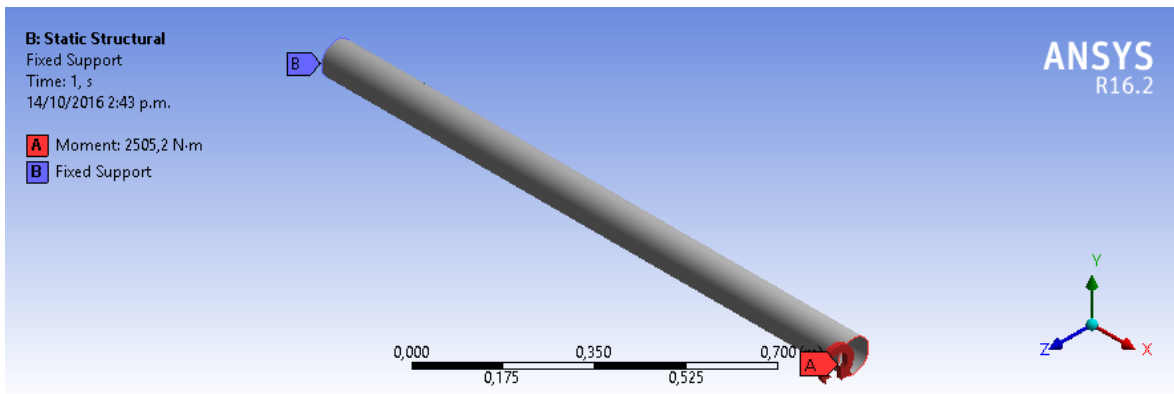
Fuente: Autores.

## 8.2 ANÁLISIS ESTÁTICO

A partir de lo establecido en el módulo ACP Pre, se define el torque y las condiciones de contorno del eje de transmisión, en el módulo *Static Structural*. El torque se aplica como un momento con comportamiento rígido en uno de los extremos del eje, y en su extremo opuesto se establece un soporte fijo como condición de contorno, como

se aprecia en la Figura 19.

Figura 19. Condiciones de contorno para análisis estático



Fuente: Autores.

Con las cargas y condiciones de contorno establecidas, se analiza el factor de seguridad para cada una de las láminas en base al criterio de falla o rotura de Tsai-Wu, mediante el módulo ACP Post<sup>+</sup> y los resultados de esfuerzo y deformación obtenidos en el análisis estático previo.

### 8.3 ANÁLISIS MODAL

El análisis modal se realiza con el módulo *Modal* y los datos establecidos en el módulo ACP Pre. Este análisis comprenderá una referencia para validar los datos obtenidos en los cálculos analíticos y los resultados experimentales, mediante el análisis del eje con condiciones de contorno simplemente apoyado y libre-libre.

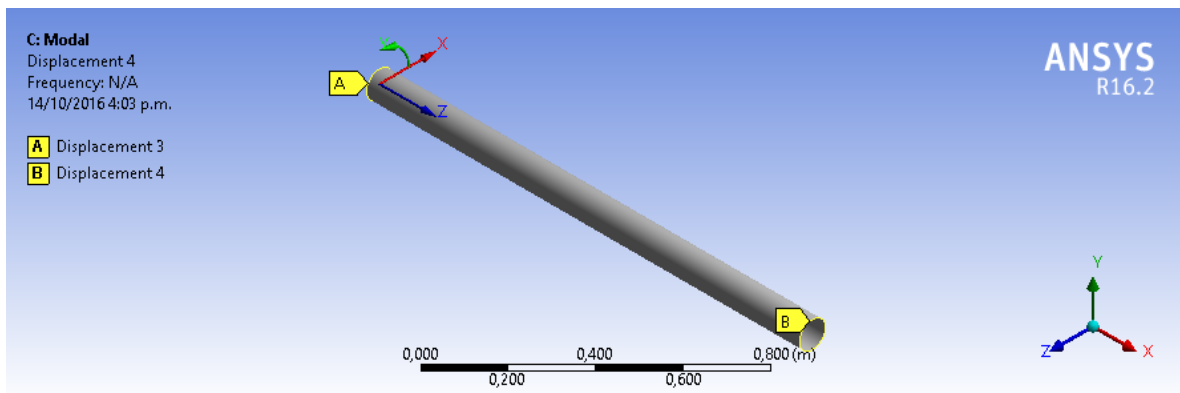
**8.3.1 Comportamiento simplemente apoyado.** El eje de transmisión se analiza como una viga simplemente apoyada, simulando las condiciones reales de

---

<sup>+</sup> ANSYS Composite Post (ACP)

acoplamiento del eje en el vehículo. El análisis permite verificar la velocidad crítica calculada en el proceso de diseño. Las condiciones de contorno se establecieron en base a coordenadas cilíndricas, limitando el desplazamiento radial, y permitiendo libertad axial y tangencial (rotación), ver Figura 20.

Figura 20. Condiciones de contorno para análisis modal



Fuente: Autores.

**8.3.2 Comportamiento libre-libre.** El análisis modal del eje con condiciones de contorno libre-libre, permite verificar el modelo de simulación, validando su comportamiento con los resultados obtenidos mediante el análisis modal experimental.

## 8.4 ANÁLISIS DE PANDEO TORSIONAL

Mediante el módulo *Eigenvalue Buckling* se realiza el análisis de pandeo lineal por cargas de torsión en el eje. Las condiciones de contorno y cargas aplicadas son las mismas que se establecieron en el análisis estático. El análisis de pandeo proporciona el multiplicador de carga o margen de seguridad, directamente relacionado con el torque crítico calculado en el proceso de diseño.

## 9. ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL

El análisis modal experimental permite encontrar los modos de vibración o frecuencias naturales característicos de un elemento o sistema. Consta de 4 pasos fundamentales; excitación de la estructura o elemento, medición de la señal de vibración mediante acelerómetros, tratamiento digital y análisis de las señales obtenidas.

El montaje se realizó suspendiendo el prototipo del eje mediante bandas elásticas a una estructura metálica como se muestra en la Figura 21. A lo largo del eje se establecieron 13 puntos equidistantes para ejecutar el análisis experimental. En un punto fijo se posiciona el acelerómetro y mediante el martillo de impacto o *hammer* se golpea en cada uno de los puntos establecidos como se muestra en la Figura 22.

Figura 21. Montaje del prototipo para el análisis modal experimental



Fuente: Autores.

El análisis modal experimental EMA por sus siglas en inglés, se realizó mediante el método *BroadBand* BBFD, que usa la medición de la función de respuesta en

frecuencia FRF obtenida mediante el tratamiento digital de las señales de fuerza y vibración adquiridas.

Figura 22. Adquisición de datos del análisis modal experimental



Fuente: Autores.

*BroadBand* determina automáticamente los modos de vibración del eje. Sin embargo, es necesario verificar visualmente mediante la gráfica de deformación, si el modo pertenece o no a una frecuencia natural de flexión.

## 10. RESULTADOS

### 10.1 DISEÑO ÓPTIMO DEL EJE DE TRANSMISIÓN

El diseño óptimo del eje de transmisión obtenido mediante la ejecución del algoritmo genético, sus principales características y las restricciones evaluadas, se presentan en la Tabla 8 y la Tabla 9 respectivamente.

Tabla 8. Características principales del eje de transmisión

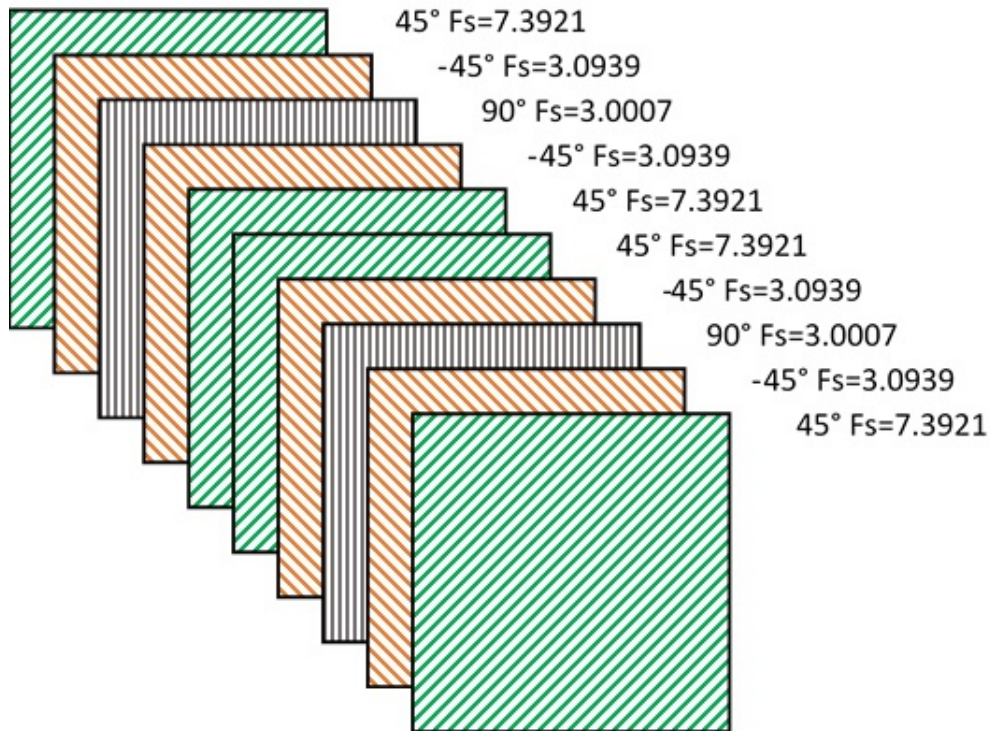
Característica	Valor
Radio exterior $r_o$	44.1255 [mm]
Radio interior $r_i$	41.6255 [mm]
Longitud $L$	1.4 [m]
Espesor $h$	2.5 [mm]
N° de láminas	10
Peso $W$	13.5184 [N]
Masa $m$	1.37802 [Kg]
Fuente: Autores.	

Tabla 9. Restricciones de diseño del eje de transmisión

Restricción	Valor
Frecuencia natural de flexión $F_{nf}$	5550.9 [rpm]
Frecuencia natural de torsión $F_{nt}$	29975 [rpm]
Torque crítico $T_c$	4396.9 [N · m]
Factor de seguridad $F_s$	3.00066
Fuente: Autores.	

La configuración de apilamiento de las láminas que constituyen el eje de transmisión, junto con sus respectivos factores de seguridad se muestran en la Figura 23, y las constantes elásticas asociadas al laminado se presentan en la Tabla 10.

Figura 23. Apilamiento del eje de transmisión



Fuente: Autores.

Tabla 10. Constantes elásticas del laminado del eje de transmisión

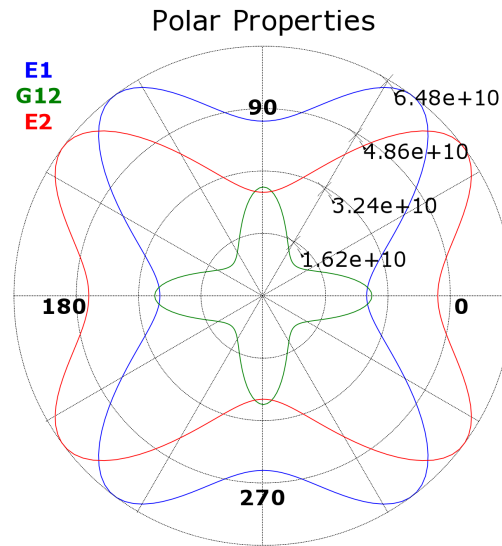
Constante elástica	Valor
Módulo elástico longitudinal $E_x$	26.852 [GPa]
Módulo elástico transversal $E_y$	45.317 [GPa]
Módulo de cizallamiento $G_{xy}$	28.226 [GPa]

Fuente: Autores.

## 10.2 ANÁLISIS DEL EJE EN ANSYS

**10.2.1 Análisis del laminado.** Los resultados obtenidos del análisis del laminado respecto a las constantes elásticas, se presentan en la Figura 24 y la Tabla 11.

Figura 24. Diagrama polar del laminado del eje de transmisión



Fuente: Autores.

Tabla 11. Constantes elásticas del laminado del eje en ANSYS

Constante elástica	Valor
Módulo elástico longitudinal $E_x$	26.8524 [GPa]
Módulo elástico transversal $E_y$	45.3167 [GPa]
Módulo de cizallamiento $G_{xy}$	28.2256 [GPa]
Fuente: Autores.	

**10.2.2 Análisis estático.** Los factores de seguridad mínimos de cada una de las láminas que constituyen el eje de transmisión, se muestran en la Tabla 12.

Tabla 12. Factores de seguridad para cada lámina del eje de transmisión

Lámina	Orientación	Factor de seguridad
1	45	4.9377
2	-45	2.2655
3	90	2.3174
4	-45	2.5483
5	45	5.7076
6	45	5.3496
7	-45	2.4522
8	90	2.2557
9	-45	2.2408
10	45	4.0228

Fuente: Autores.

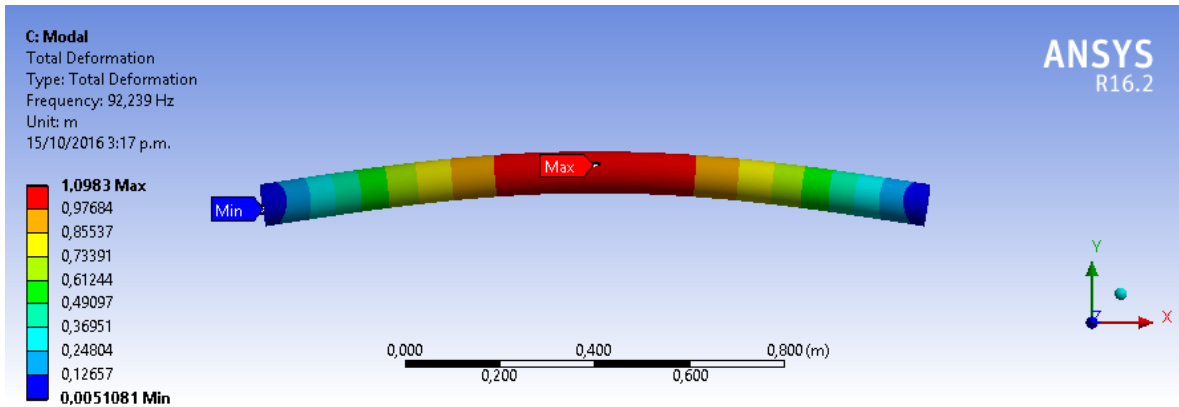
**10.2.3 Análisis modal.** Los primeros 3 modos de vibración de flexión del eje, con condiciones de contorno simplemente apoyado en sus extremos, se muestran en la Tabla 13, y la deformación correspondiente al primer y segundo modo de vibración se muestran en la Figura 25 y 26 respectivamente.

Tabla 13. Modos de vibración del eje de transmisión

Modo	Frecuencia [Hz]
1	92.239
2	359.55
3	777.18

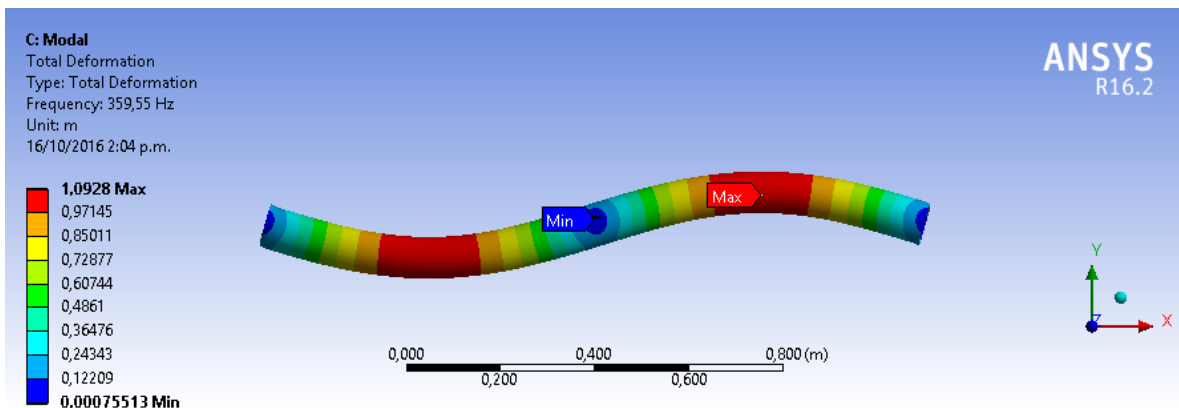
Fuente: Autores.

Figura 25. Primer modo de vibración del eje de transmisión



Fuente: Autores.

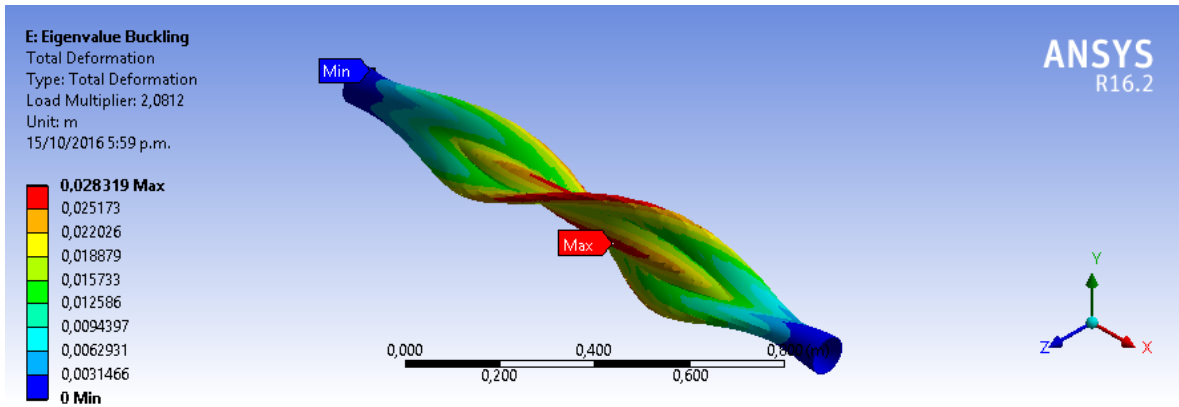
Figura 26. Segundo modo de vibración del eje de transmisión



Fuente: Autores.

**10.2.4 Análisis de pandeo torsional.** Los resultados obtenidos del análisis de pandeo por torsión, proporcionan un multiplicador de carga que es análogo con la relación entre el torque crítico y el torque aplicado. El resultado de la simulación se presenta en la Figura 27.

Figura 27. Deformación por pandeo torsional en el eje de transmisión



Fuente: Autores.

### 10.3 PROTOTIPO A ESCALA DEL EJE DE TRANSMISIÓN

Las características del prototipo a escala, obtenidas mediante la ejecución del algoritmo de optimización, y las restricciones de diseño evaluadas, se presentan en la Tabla 14 y 15 respectivamente.

Tabla 14. Características principales del prototipo a escala del eje

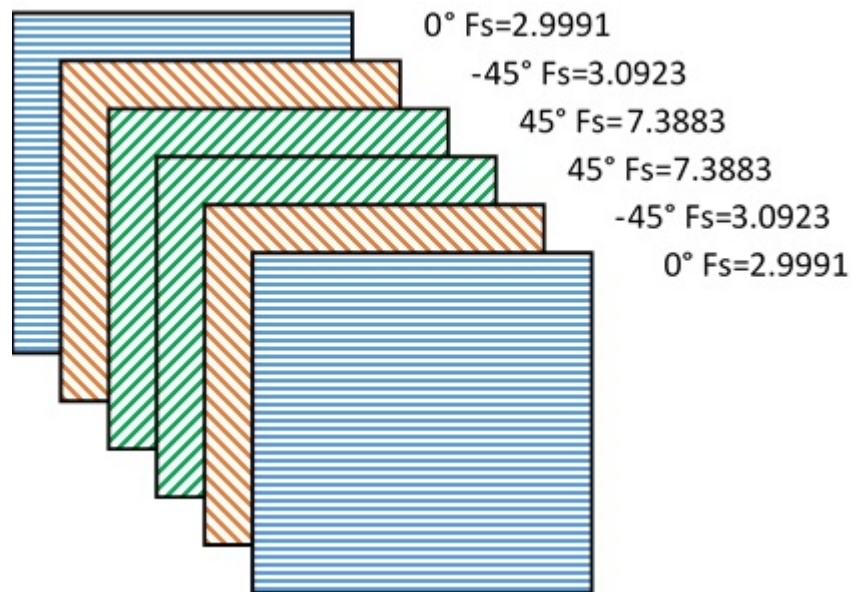
Característica	Valor
Radio exterior $r_o$	21.7203 [mm]
Radio interior $r_i$	20.2203 [mm]
Longitud $L$	0.7 [m]
Espesor $h$	1.5 [mm]
N° de láminas	6
Peso $W$	1.98354 [N]
Masa $m$	0.202196 [Kg]
Fuente: Autores.	

Tabla 15. Restricciones de diseño del prototipo a escala del eje

Restricción	Valor
Frecuencia natural de flexión $F_{nf}$	16182 [rpm]
Frecuencia natural de torsión $F_{nt}$	56100.4 [rpm]
Torque crítico $T_c$	683.96 [N · m]
Factor de seguridad $F_s$	2.99912
Fuente: Autores.	

La secuencia de apilamiento junto con los factores de seguridad de cada lámina, y las constantes elásticas del laminado en los ejes globales, se presentan en la Figura 28 y la Tabla 16 respectivamente.

Figura 28. Apilamiento del prototipo a escala del eje



Fuente: Autores.

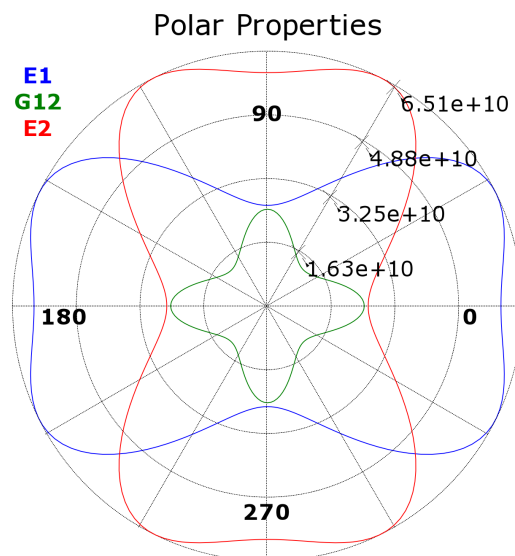
Tabla 16. Constantes elásticas del laminado del prototipo a escala del eje

Constante elástica	Valor
Módulo elástico longitudinal $E_x$	59.596 [GPa]
Módulo elástico transversal $E_y$	25.700 [GPa]
Módulo de cizallamiento $G_{xy}$	24.716 [GPa]
Fuente: Autores.	

## 10.4 ANÁLISIS DEL PROTOTIPO A ESCALA DEL EJE EN ANSYS

**10.4.1 Análisis del laminado.** Los resultados obtenidos del análisis del laminado en ANSYS Workbench ACP respecto a las constantes elásticas o ingenieriles para el prototipo a escala del eje de transmisión, se presentan en la Figura 29 y Figura ??.

Figura 29. Diagrama polar del laminado del prototipo a escala del eje



Fuente: Autores.

Tabla 17. Constantes elásticas del laminado del prototipo a escala del eje en ANSYS

Constante elástica	Valor
Módulo elástico longitudinal $E_x$	59.596 [GPa]
Módulo elástico transversal $E_y$	25.700 [GPa]
Módulo de cizallamiento $G_{xy}$	24.716 [GPa]
Fuente: Autores.	

**10.4.2 Análisis estático.** Los factores de seguridad mínimos, obtenidos mediante la simulación en ANSYS para cada una de las láminas que constituyen el prototipo a escala del eje de transmisión, se muestran en la Tabla 18.

Tabla 18. Factores de seguridad para cada lámina del prototipo a escala del eje

Lámina	Orientación	Factor de seguridad
1	0	1.9039
2	-45	2.2409
3	45	5.4826
4	45	4.8923
5	-45	2.2585
6	0	2.5586
Fuente: Autores.		

**10.4.3 Análisis modal.** El análisis modal en ANSYS del prototipo a escala del eje de transmisión, proporciona diversos modos de vibración que no siempre corresponden a frecuencias naturales de flexión. Los valores que se muestran a continuación, comprenden solo los modos de vibración por flexión en el plano vertical  $xy$ , para los ejes con condiciones de contorno libre-libre y simplemente apoyado.

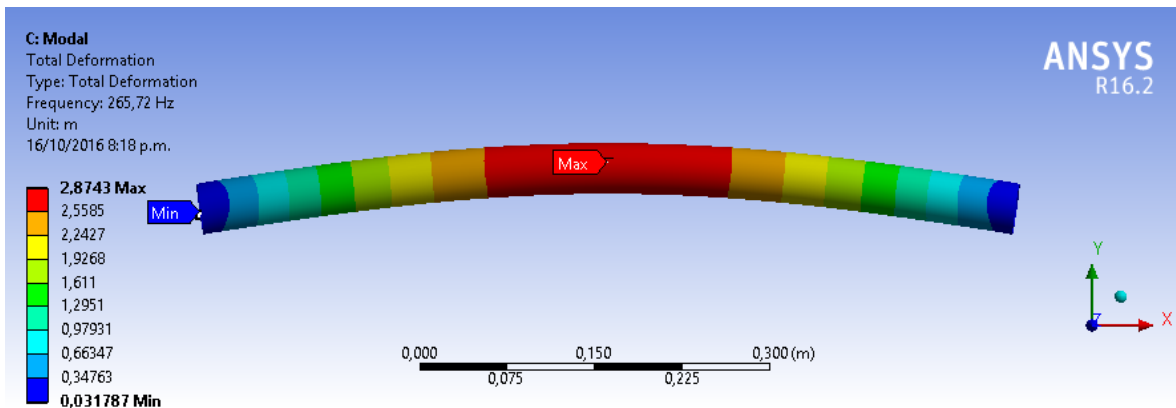
- **Simplemente apoyado.** Los modos de vibración de flexión del prototipo a escala del eje de transmisión, correspondientes a la condiciones de contorno simplemente apoyado en sus extremos, se muestran en la Tabla 19, y la deformación asociada al primer modo de vibración en la Figura 30.

Tabla 19. Modos de vibración del prototipo a escala del eje

Modo	Frecuencia [Hz]
1	265.72
2	1003
3	2070.7

Fuente: Autores.

Figura 30. Primer modo de vibración del prototipo simplemente apoyado



Fuente: Autores.

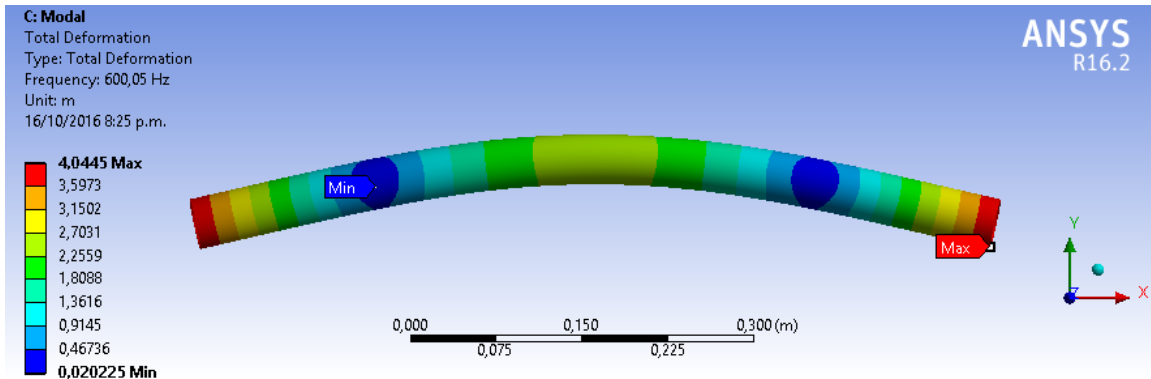
- **Libre-libre.** Los modos de vibración de flexión, correspondientes al prototipo a escala del eje de transmisión con condiciones de contorno libre-libre, se muestran en la Tabla 20, y las deformaciones asociadas a los tres primeros modos de vibración, se muestran en la Figura 31, 32 y 33 respectivamente.

Tabla 20. Modos de vibración del prototipo a escala del eje libre

Modo	Frecuencia [Hz]
1	600.05
2	1577.7
3	2905.1

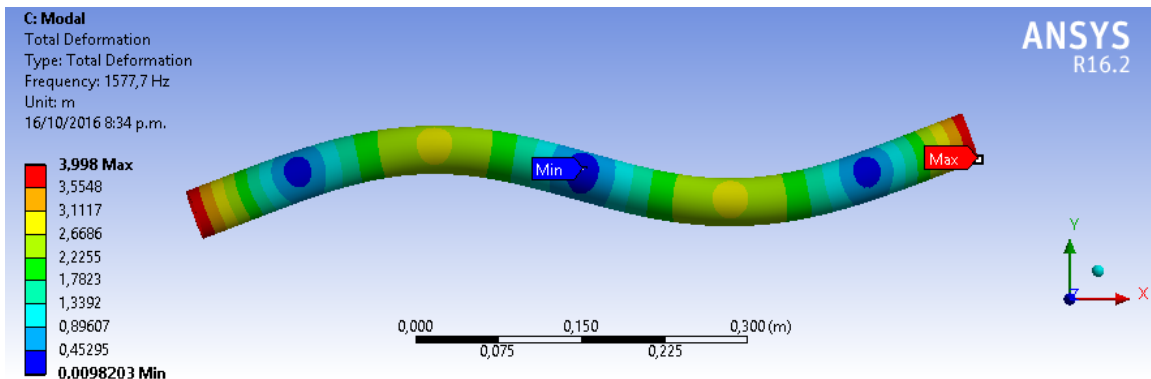
Fuente: Autores.

Figura 31. Primer modo de vibración del prototipo libre



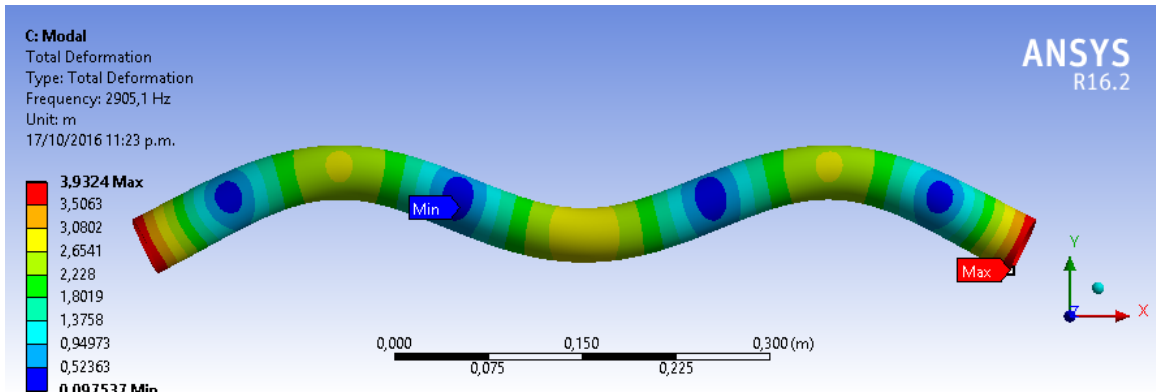
Fuente: Autores.

Figura 32. Segundo modo de vibración del prototipo libre



Fuente: Autores.

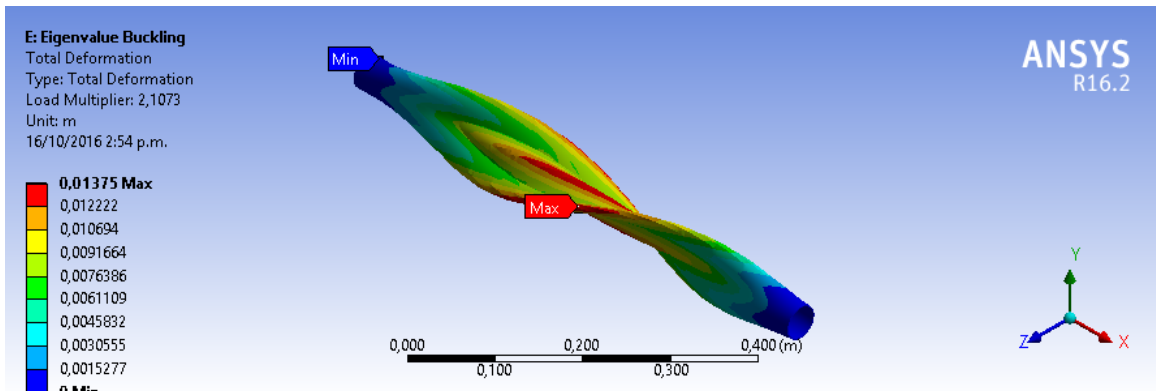
Figura 33. Tercer modo de vibración del prototipo libre



Fuente: Autores.

**10.4.4 Análisis de pandeo torsional.** El resultado del análisis de pandeo torsional, del prototipo a escala del eje de transmisión, se muestra en la Figura 34.

Figura 34. Deformación por pandeo torsional en el eje de transmisión



Fuente: Autores.

## 10.5 ANÁLISIS MODAL EXPERIMENTAL

Los resultados obtenidos del análisis modal experimental, para los dos prototipos a escala fabricados, se muestran en la Tabla 21 y 22, y la deformación asociada al primer modo de vibración en la Figura 35.

Tabla 21. Resultados análisis modal experimental del prototipo 1

Modo	Toma 1	Toma 2	Toma 3	Promedio
1	630	629	628	629
2	1681	1679	1679	1680
3	2939	2928	2889	2919

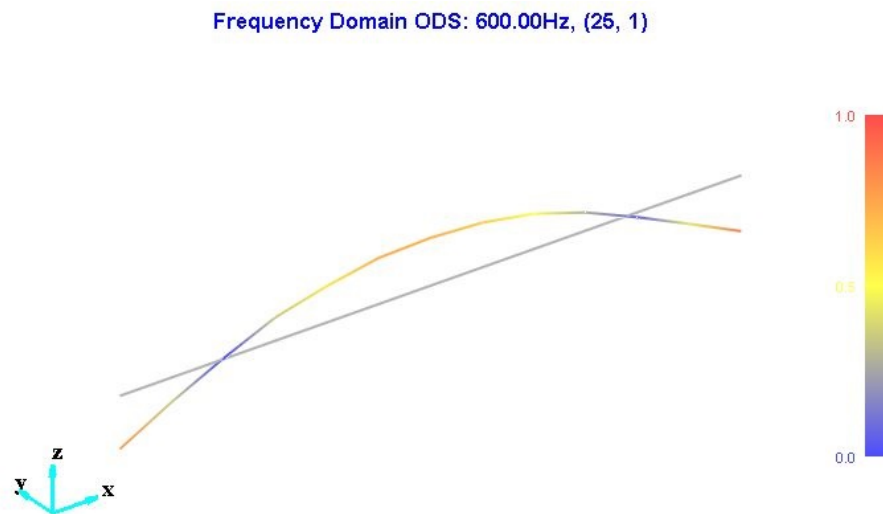
Fuente: Autores.

Tabla 22. Resultados análisis modal experimental del prototipo 2

Modo	Toma 1	Toma 2	Toma 3	Promedio
1	609	609	609	609
2	1623	1624	1624	1624
3	2812	2697	2787	2765

Fuente: Autores.

Figura 35. Primer modo de vibración experimental del prototipo



Fuente: Autores.

## 11. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Las constantes ingenieriles calculadas mediante el algoritmo de optimización, coinciden en gran medida con el análisis del laminado del eje en ANSYS. Estos resultados permiten validar el análisis macroscópico realizado para el laminado, en cada iteración del algoritmo genético de optimización.

Tabla 23. Verificación de resultados del eje de transmisión

Parámetro	Cálculo analítico	Simulación Ansys	% Error
$E_x$ [GPa]	26.852	26.852	0
$E_y$ [GPa]	45.317	45.317	0
$G_{xy}$ [GPa]	28,23	28,23	0
$F_s$	3.0007	2.3174	22,78
$T_c$ [N · m]	4396.9	5213.8	15,7
$F_{nf}$ [Hz]	92.515	92.239	0,3
Fuente: Autores.			

Tabla 24. Verificación de resultados del prototipo a escala

Parámetro	Cálculo analítico	Simulación ANSYS	% Error
$E_x$ [GPa]	59.596	59.5963	0
$E_y$ [GPa]	25.700	25.6999	0
$G_{xy}$ [GPa]	24.716	24.7163	0
$F_s$	2.9991	1.9039	36.5
$T_c$ [N · m]	683.96	659.9	3.52
$F_{nf}$ [Hz]	269.7	265.72	1.48
Fuente: Autores.			

El análisis estático, referente al factor de reserva o seguridad según el criterio de rotura de Tsai-Wu en ANSYS, difiere en gran medida con los resultados obtenidos mediante el algoritmo de optimización. Esta diferencia radica principalmente en la forma en que ANSYS analiza los esfuerzos y deformaciones en el laminado, es decir, por el método de elementos finitos y la inferencia de la geometría cilíndrica en el laminado.

La variación en el refinamiento del mallado, incide de forma directa en el error generado en el análisis de pandeo torsional, esto se debe a que un mallado más refinado, simula de mejor manera la sección transversal circular del eje.

Tabla 25. Verificación de los modos de vibración del prototipo a escala

Prototipo	Modo	Simulación ANSYS	Análisis experimental	% Error
Eje 1	1	629	600	4.60
	2	1680	1578	6.07
	3	2919	2905	0.465
Eje 2	1	609	600	1.49
	2	1624	1578	2.38
	3	2765	2905	5.05

Fuente: Autores.

La velocidad crítica o primer modo de vibración de flexión, calculado de forma analítica, coincide en gran porcentaje con el primer modo determinado mediante la simulación en ANSYS, para el eje simplemente apoyado. Al realizar la simulación con el mismo modelo, pero modificando las condiciones de contorno a libre-libre, se obtuvieron valores bastante cercanos a los obtenidos mediante el análisis experimental, lo cuál da validez al proceso de diseño implementado.

Tabla 26. Verificación dimensional del prototipo a escala

Prototipo	Parámetro	Analítico	Experimental	% Error
Eje 1	Radio interior <i>mm</i>	20.2	20.5	1.24
	Radio exterior <i>mm</i>	21.7	22.4	2.82
	Masa <i>g</i>	0.202	0.210	1.80
Eje 2	Radio interior <i>mm</i>	20.2	20.8	2.55
	Radio exterior <i>mm</i>	21.7	22.7	4.10
	Masa <i>g</i>	0.202	0.198	2.22
Fuente: Autores.				

El error entre las dimensiones geométricas del prototipo construido, y los valores obtenidos en el diseño óptimo del eje es bajo, teniendo en cuenta que la construcción del elemento se realizó de modo manual, por lo cual la precisión en las medidas se reduce considerablemente.

La masa aproximada de un eje de transmisión de acero sin acoples, con dimensiones similares al modelo escogido<sup>31</sup> para implementar el diseño, oscila alrededor de 6 *Kg*, y la masa del eje de transmisión obtenida mediante el algoritmo de optimización es de 1.378 *Kg*. El porcentaje de reducción de masa es de aproximadamente 77%, una reducción significativa que da soporte al adecuado funcionamiento del algoritmo de optimización.

---

<sup>31</sup> DORMAN PRODUCTS. Eje propulsor. 936-937. 2016. En: <http://www.dormanproducts.es>. (Visitado 23-08-2016).

## 12. CONCLUSIONES

- La implementación del algoritmo genético permitió ampliar el intervalo de búsqueda de soluciones óptimas, mediante la inclusión de todas las posibles combinaciones de apilamiento y el análisis particular de las eventuales soluciones de diseño.
- Se identificaron experimentalmente las propiedades globales del material compuesto, requeridas para determinar el diseño óptimo del eje de transmisión. La caracterización evidenció la influencia de las propiedades de los materiales constitutivos en las propiedades globales del material compuesto.
- Mediante el algoritmo genético implementado se logró encontrar la mejor opción de diseño del eje de transmisión, cumpliendo con los parámetros y restricciones establecidos para su adecuado funcionamiento y manufactura. Los resultados también permiten evidenciar la reducción significativa de peso en el eje de transmisión con respecto a un eje convencional de acero.
- La construcción del prototipo a escala del eje de transmisión, mediante el proceso de enrollamiento de fibras de forma manual, está sujeto a posibles errores durante su elaboración. Sin embargo, los resultados obtenidos fueron satisfactorios, lo que permite evidenciar la efectividad del proceso de diseño.
- El análisis modal experimental del eje de transmisión, demostró la validez de los resultados obtenidos analíticamente, mediante su contrastación con el análisis de simulación. Los resultados obtenidos del estudio, también permitieron verificar los módulos de elasticidad longitudinal y transversal obtenidos en la caracterización mecánica del material.

### 13. RECOMENDACIONES

- Complementar el algoritmo genético de optimización, con el análisis de la incidencia de la geometría cilíndrica del eje, en las propiedades finales del laminado.
- Diseñar a partir de materiales compuestos, los acoples del eje de transmisión, para realizar un análisis más profundo del comportamiento real del eje en el vehículo.
- Realizar un análisis de simulación en ANSYS más exhaustivo, considerando implementar un mallado mas refinado del modelo del eje de transmisión.
- Construir el eje de transmisión o el prototipo a escala, por medio de una máquina automatizada de enrollamiento *filament winding*, que permita una disposición más tecnificada de las fibras, evitando la generación de irregularidades en el laminado durante su construcción.
- Caracterizar el comportamiento del material compuesto, a fatiga por esfuerzos cortantes, y complementar el análisis del algoritmo de optimización en base a los resultados obtenidos.

## BIBLIOGRAFÍA

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING MATERIALS. Standard Test Method for Tensile Properties of Polymer Matrix Composite Materials. ASTM D3039/D3039M-14. West Conshohocken: ASTM International, 2014. 13 p.

ANAYA, Alejandro y PEDROZA, Humberto. Scaling-up, the art of chemical engineering. En: Tecnología, Ciencia, Educación. Instituto Mexicano de Ingenieros Químicos. Enero, 2008. vol. 23, no. 1, p. 31-39.

ANDRE, J.; SIARRY, P. y DOGNON, T. An improvement of the standard genetic algorithm fighting premature convergence in continuous optimization. En: Advances in Engineering Software, 2011. vol. 32, no. 1, p. 49-60.

ARAUJO, Lourdes y CERVIGÓN, Carlos. Algoritmos evolutivos: un enfoque práctico. México: Alfaomega Grupo Editor, 2009. 332 p. ISBN 978-607-7686-29-3.

BIRD, John; LITTLE, Andrew y ROSS, Carl. Mechanics of Solids. 2 ed. Abingdon: Routledge, 2016. 454 p. ISBN 978-1-138-90466-8.

CHACRABORTY, S. Mechanics Over Micro and Nano Scales. New York: Springer, 2011. 169 p. ISBN 978-1-4419-9600-8.

Column Research Committee of Japan, Eds. Handbook of Structural Stability. Tokyo: Corona Publishing, 1971. 332 p. ISBN 978-607-7686-29-3.

DANIEL, Isaac M. y col. Interfiber/interlaminar failure of composites under multi-axial states of stress. En: Composites Science and Technology. Junio, 2009. vol. 69, p. 764-771.

DAY GIL, Lee; DURK HYUN, Cho y JIN HO, Land Choi. Manufacture of one-piece automotive drive shafts with aluminum and composite materials. En: Ninth International Conference on Composite Structures. Mayo, 1997. vol. 38, no. 1-4, p. 309-319.

DIMENTBERG, F. M. Flexural Vibrations of Rotating Shafts. London: BUTTERWORTH & CO. LTD., 1961. 243 p.

DORMAN PRODUCTS. Eje propulsor. 936-937. 2016. En: <http://www.dormanproducts.es>. (Visitado 23-08-2016).

F. M., AL-Oqla y S. M., Sapuan. Natural fiber reinforced polymer composites in industrial applications: feasibility of date palm fibers for sustainable automotive industry. En: Journal of Cleaner Production. Marzo, 2014. vol. 66, p. 347-354.

GAIKWAD, Hrishikesh. T. y PRADHAN, N. Fatigue Analysis of Composite Drive Shaft. En: International Journal of Engineering Research & Technology. Mayo, 2015. vol. 4, no. 5, p. 484-489.

GAY, Daniel; HOA, Suong V. y TSAI, Stephen W. Composite Materials: Design and Applications: CRC Press LLC, 2002. 552 p. ISBN 978-1-4200-3168-3.

GHATAGE, Kishor y HARGUDE, Narayanrao. Static, Modal and Buckling Analysis of Automotive Composite Drive Shaft. En: IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering, vol. 5, p. 32-42.

GÜRDAL, Z.; HAFTKA, R.T y NAGENDRA, S. Stacking Sequence Optimization of Simply Supported Laminates with Stability and Strain Constraints. En: AIAA Journal. Agosto, 1992. vol. 30, no. 8, p. 2132-2137.

HERRERA, Francisco; LOZANO, Manuel y VERDEGAY, Jose L. Algoritmos Genéticos: Fundamentos, Extensiones y Aplicaciones. En: Arbor CLII. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Septiembre, 1995. vol. 152, no. 597, p. 9-40.

INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMALIZACIÓN Y CERTIFICACIÓN. Documentación. Presentación de tesis, trabajos de grado y otros trabajos de investigación. NTC 1486. Bogotá D.C.: ICONTEC, 2008. 36 p.

INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMALIZACIÓN Y CERTIFICACIÓN. Referencias bibliográficas. Contenido, forma y estructura. NTC 5613. Bogotá D.C.: ICONTEC, 2008. 33 p.

KAW, Autar K. Mechanics Of Composite Materials. 2 ed. Boca Raton: CRC Press LLC, Taylor & Francis Group, 2006. 457 p. ISBN 978-0-8493-1343-1.

KRÜGER. Critical Speed of Shaft. Technical Bulletin TBN017.0/1998, 5 p.

MCLARTY, J. Lowrie y PETERS, S. T. Filament Winding. En: Composites ASM Handbook: ASM International, 2001. p. 1266-1299.

MITCHELL, Melanie. An introduction to genetic algorithms. Cambridge: MIT Press, 1998. 209 p. ISBN 978-026-2631-85-3.

MOHAMAD S., Qatu y JAVED, Iqbal. Transverse vibration of a twosegment crossply composite shafts with a lumped mass. En: Composite Structures. Abril, 2010. vol. 92, no. 5, p. 1126-1131.

MOTT, Robert L. Diseño de elementos de máquinas. 4 ed. México: Pearson Educación, 2006. 944 p. ISBN 970-26-0812-0.

NALI, P. y CARRERA, E. A numerical assessment on two-dimensional failure criteria for composite layered structures. En: Composites Part B:Engineering. Marzo, 2012. vol. 43, p. 280-289.

PHIL, M. y ZAVERI, K. Modal Analysis of Large Structures-Multiple Exciter Systems. 1 ed. Denmark: Brüel & Kjær, 1985. 124 p. ISBN 87-87355-03-5.

STUPENENGO, Franco. Materiales compuestos. Guía didáctica. En: Materiales y materias primas. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica, 2011. p. 1-27.

THE MATHWORKS, INC. Genetic Algorithm Terminology. 2016. En: <http://es.mathworks.com/help/gads/some-genetic-algorithm-terminology.html>. (Visitado 23-05-2016).

TSAI, Stephen W. y WU, Edward M. A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. En: Journal of Composite Materials. Enero, 1971. vol. 5, no. 1, p. 58-80.

Walsh, Paul J. y Zoltec Corporation. Carbon Fibers. En: Composites ASM Handbook: ASM International, 2001. p. 92-107.

ZWEBEN, Carl. Composites Materials. En: KUTZ, MYER. Handbook of Materials Selection. New York: Myer Kutz, Ed., John Wiley & Sons. Inc., 2002. p. 359.

## ANEXO A. ESPECIFICACIONES DE LOS MATERIALES CONSTITUYENTES

### Especificaciones técnicas de la resina epóxica

Propiedades	Valor	Unidades
Proporción de mezcla en peso	100 A : 24 B	<i>Kg</i>
Viscosidad mezcla	1000	<i>CPS</i>
Densidad mezcla	1130	$\frac{kg}{m^3}$
Esfuerzo último de tensión	54.68	<i>MPa</i>
Módulo elástico de tensión	3068	<i>MPa</i>
Esfuerzo último de compresión	79.63	<i>MPa</i>
Fuente: SMOOTH-ON.		

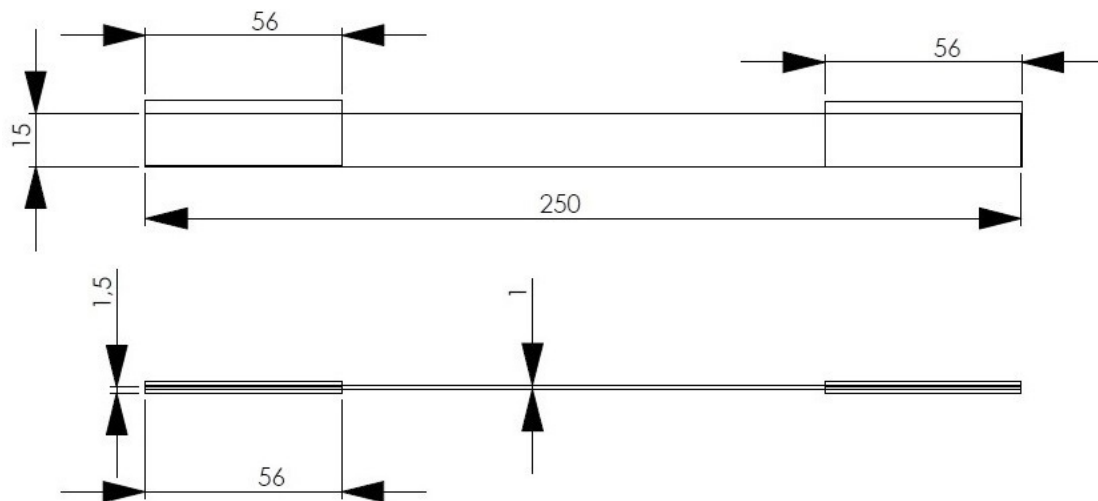
### Especificaciones técnicas de la fibra de carbono

Propiedades	Valor	Unidades
Número de filamentos	24K	
Finura de hilos	1.6	$\frac{g}{m}$
Densidad	1810	$\frac{kg}{m^3}$
Esfuerzo último de tensión	5.2	<i>GPa</i>
Módulo elástico de tensión	265	<i>GPa</i>
Alargamiento a la rotura	2.0	%
Fuente: SGL GROUP.		

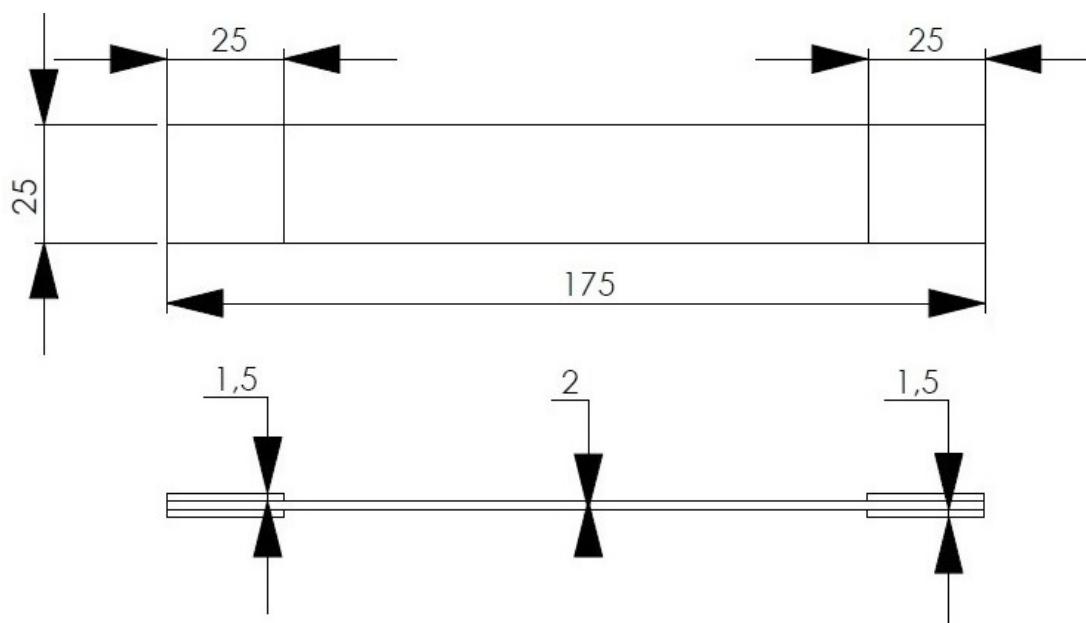
## ANEXO B. RECOMENDACIONES PARA PROBETAS SEGÚN ESTÁNDAR ASTM D3039

Las cotas están dadas en [mm]

Especímenes de ensayo según estándar ASTM D3039



(a) Orientación 0°



(b) Orientación 90°

Fuente: Autores.

## ANEXO C. FABRICACIÓN DE PROBETAS

### CONSTRUCCIÓN DE PROBETAS

Fibra de carbono, resina, endurecedor y desmoldante



Fuente: Autores.

### Herramientas.

- Cera desmoldante Mold Release TR-108
- Pomo
- Lanilla
- Acetatos
- Tijeras
- Pinceles de cerdas suaves
- Vaso precipitado de vidrio
- Recipientes de almacenamiento

## **Procedimiento de construcción.**

1. Se aplica cera desmoldante por medio de un pomo a cada una de las láminas de acetato.
2. Cuando los solventes de la cera se evaporan (20 minutos aproximadamente), se procede a lustrar con una lanilla la superficie de cada lámina, retirando el exceso de cera.
3. Se repiten los pasos anteriores por lo menos tres veces para garantizar que el desmoldante cubra la totalidad de la lámina.
4. Mediante un vaso de precipitado se prepara la mezcla de resina epóxica y endurecedor con una relación de peso de 100 a 24 respectivamente hasta lograr una mezcla uniforme.
5. Con un pincel de cerdas suaves se añade una capa delgada de resina al acetato, procurando la mayor uniformidad posible en la película formada.
6. Se coloca la fibra de carbono sobre la resina y se corta de acuerdo a las dimensiones establecidas según recomendaciones de la norma ASTM D3039.
7. Se añade otra capa de resina en la superficie de la fibra de carbono.
8. Posteriormente se añaden capas de resina y fibra hasta satisfacer el espesor requerido.
9. Las probetas se dejan curando a temperatura ambiente por más de 24 horas.
10. Se retiran las probetas de las láminas de acetato.
11. Siguiendo la metodología previamente mencionada, se construyen los agarres, y se adhieren con resina al cuerpo de la probeta.
12. Finalmente se dejan curar las probetas un tiempo mayor a 7 días.

## ANEXO D. MÁQUINA DE ENSAYOS Y MONTAJE DE PROBETAS

Máquina de ensayos MTS Bionix



Fuente: Autores.

Montaje de probetas



(c) Orientación a 90°



(d) Orientación a 0°

Fuente: Autores

## ANEXO E. ÁREA TRANSVERSAL Y PORCENTAJE EN VOLUMEN DE UNA LÁMINA

Dimensiones de la lámina

Masa $g$	Longitud $m$	Ancho $m$	N° de capas	N° de cintas
3.8	0.272	0.0186	3	6
4.2	0.275	0.0186	3	6
4.5	0.269	0.019	3	6
2.5	0.251	0.0187	2	4
2.7	0.254	0.0186	2	4
2.7	0.252	0.0189	2	4

Fuente: Autores.

Aporte en masa de los materiales consitutivos del compuesto

Masa $g$	Masa de fibra $g$	Masa de resina $g$	Vol de fibra $m^3$	Vol de resina $m^3$
3.8	2.6112	1.1888	1.44E-06	1.07E-06
4.2	2.64	1.56	1.46E-06	1.40E-06
4.5	2.5824	1.9176	1.43E-06	1.72E-06
2.5	1.6064	0.8936	8.88E-07	8.03E-07
2.7	1.6256	1.0744	8.98E-07	9.65E-07
2.7	1.6128	1.0872	8.91E-07	9.77E-07

Fuente: Autores.

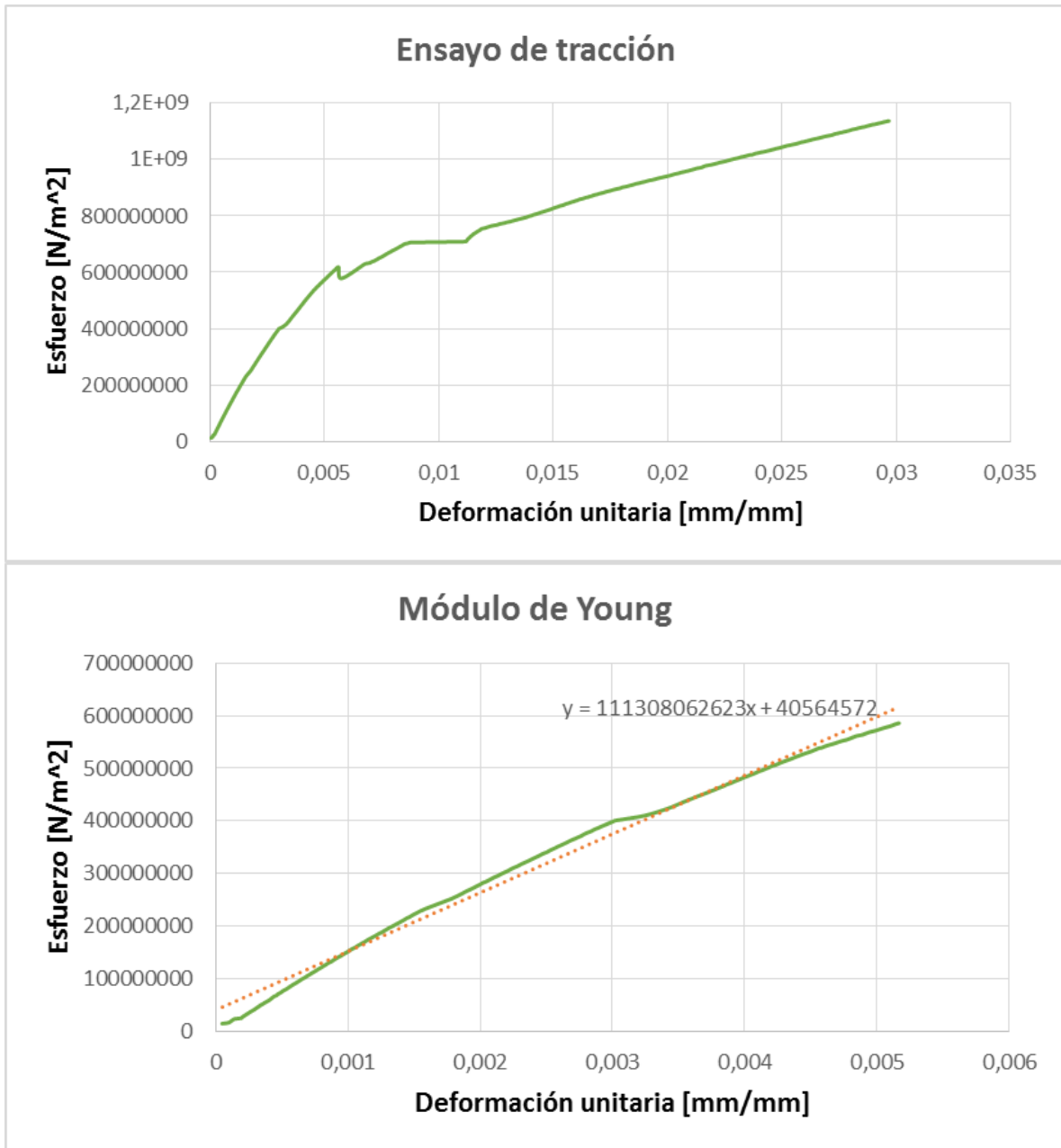
### Área, volumen y composición

Masa $g$	Vol de material $m^3$	% Fibra	% Resina	Área transversal $m^2$
3.8	2.51E-06	57.4	42.5	9.23E-06
4.2	2.86E-06	51.0	49.0	1.04E-05
4.5	3.15E-06	45.3	54.7	1.17E-05
2.5	1.69E-06	52.5	47.5	6.73E-06
2.7	1.86E-06	48.2	51.8	7.34E-06
2.7	1.87E-06	47.7	52.3	7.41E-06

Fuente: Autores.

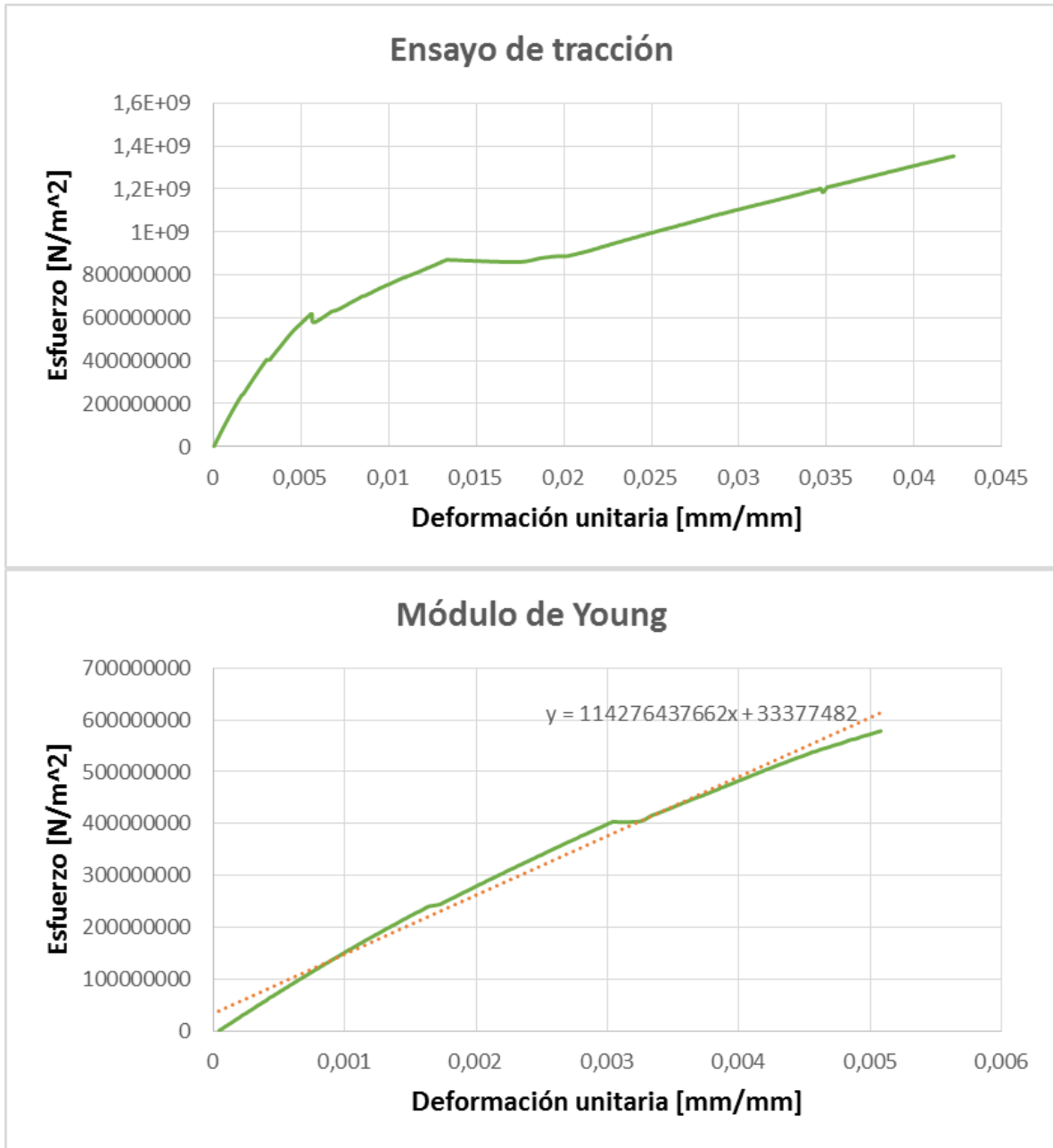
## ANEXO F. CURVAS ESFUERZO VS DEFORMACIÓN

Curvas ensayos de tracción probetas 0° Toma 2



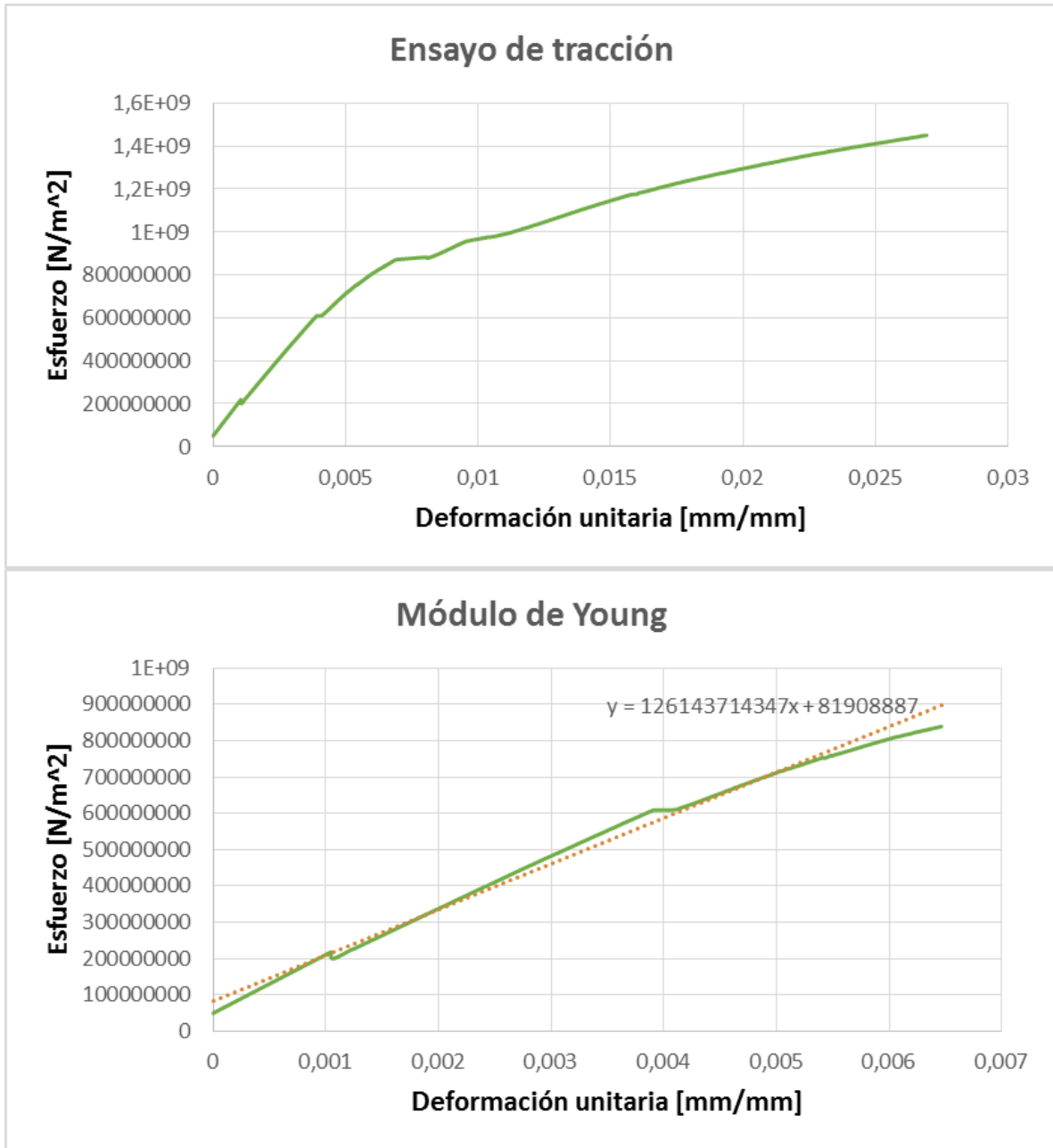
Fuente: Autores.

Curvas ensayos de tracción probetas 0° Toma 3



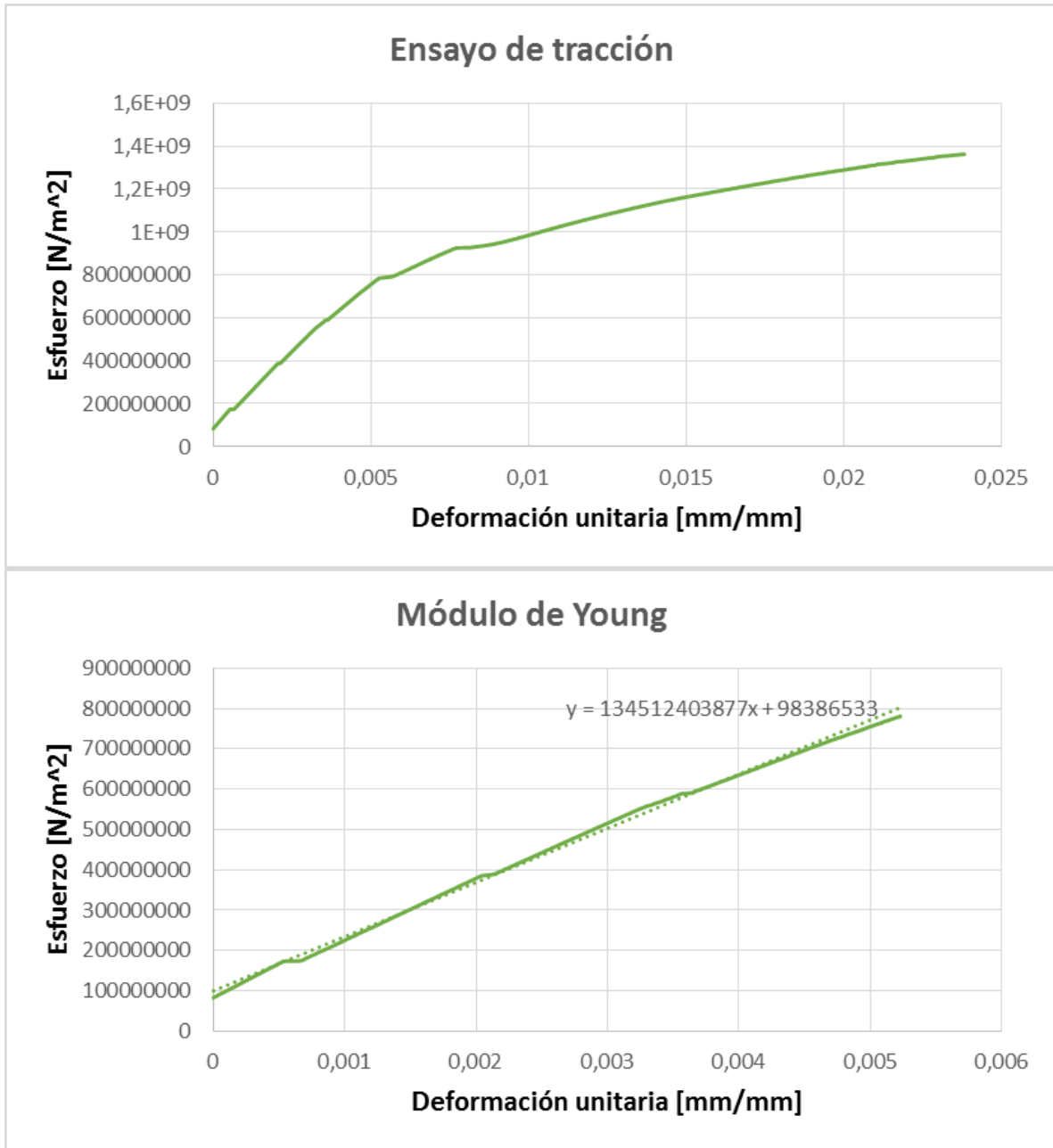
Fuente: Autores.

Curvas ensayos de tracción probetas 0° Toma 4



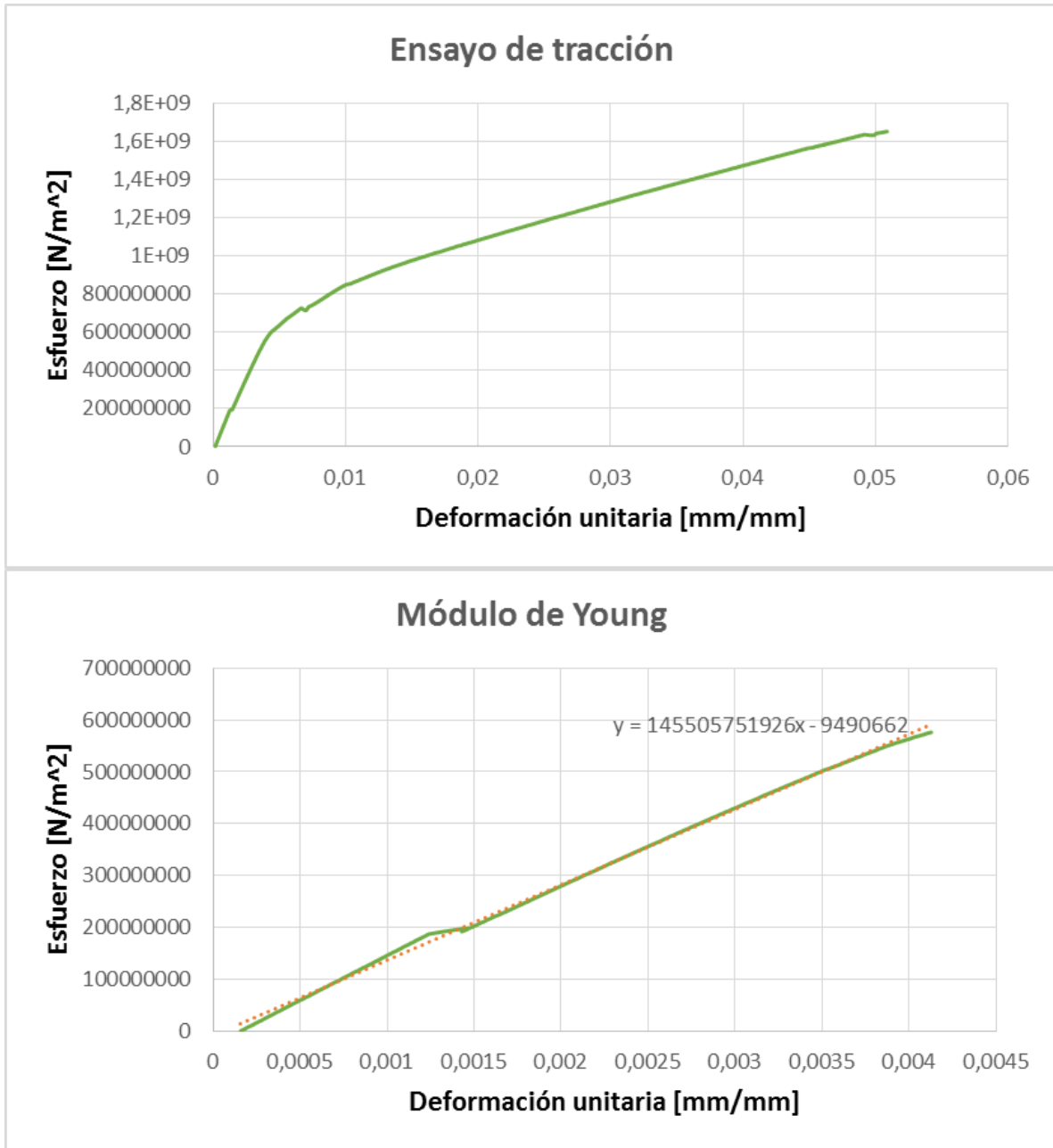
Fuente: Autores.

Curvas ensayos de tracción probetas 0° Toma 5



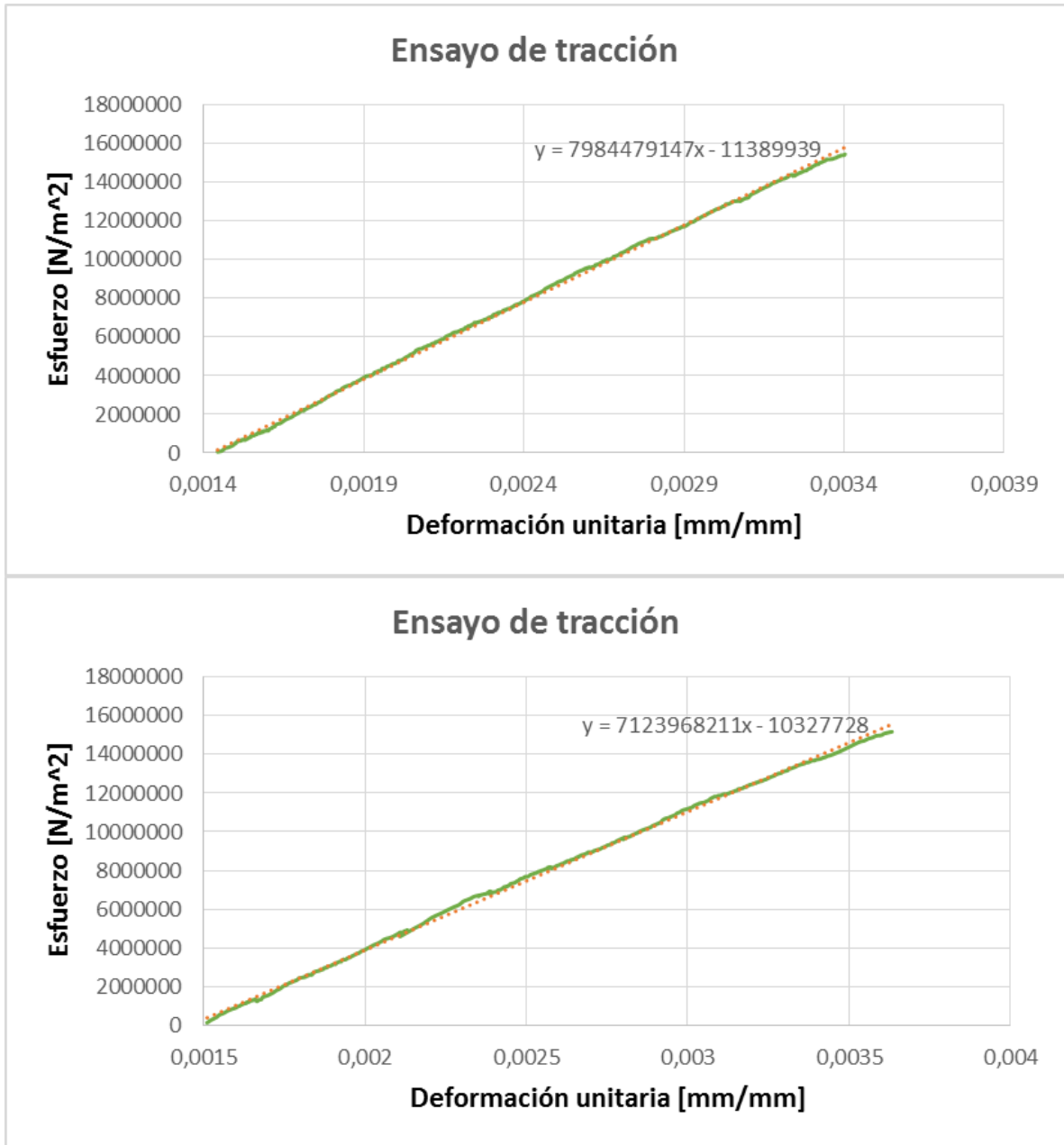
Fuente: Autores.

Curvas ensayos de tracción probetas 0° Toma 6



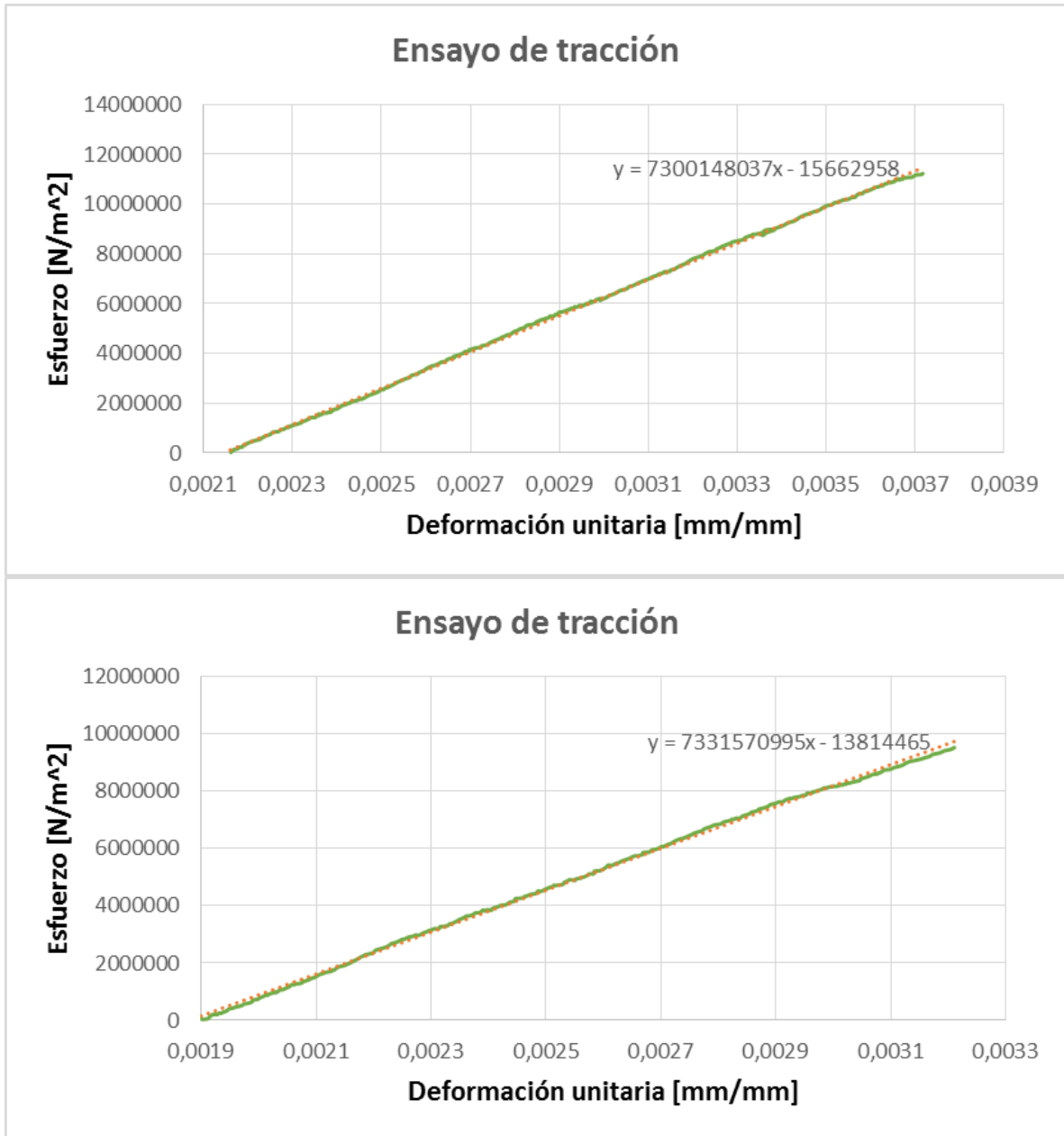
Fuente: Autores.

Curvas ensayos de tracción probetas 90° Toma 2 y 3



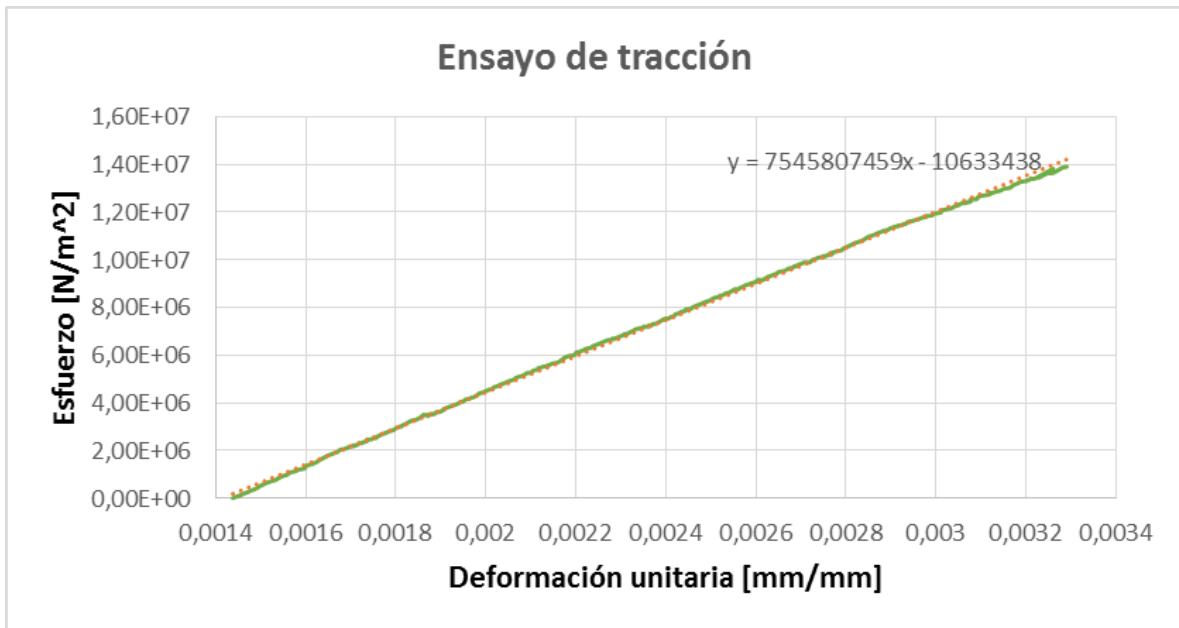
Fuente: Autores.

Curvas ensayos de tracción probetas 90° Toma 4 y 5



Fuente: Autores.

## Curvas ensayos de tracción probetas 90° Toma 6



Fuente: Autores.

## ANEXO G. SCRIPTS Y FUNCIONES DEL ALGORITMO GENÉTICO

### SCRIPT ALGORITMO GENÉTICO

```
clear
clc

% ARGUMENTOS
FuncObj = @FuncionObjetivo;
NVar = 2;
LimInf = [1 0.035];
LimSup = [23657 0.055];
Restr = @Restricciones;
Int = 1;

% SINTAXIS PRINCIPAL DEL ALGORITMO
[x, Fval, exitflag, output, population, scores] = ...
    ga(FuncObj, NVar, [], [], [], [], LimInf, LimSup, ...
        Restr, Int, Opciones);

[Num_Lam, Orient_cod] = Lamina(x);
[W, Tc, Fnf, Fnt, ~, ~, Nxy] = Calculos(x);
[Fs, Ex, Ey, Gxy, theta, SR, H] = Propiedades(Num_Lam, ...
    Orient_cod, Nxy);

% IMPRESION EN ARCHIVO DE RESULTADOS
fid=fopen('Resultados.txt','wt');
fprintf(fid, '\n          Radio interior = %g', ...
    (x(2)-H)*1000);
```

```

fprintf(fid, '[mm]');
fprintf(fid, '\n          Radio exterior = %g', ...
        x(2)*1000);
fprintf(fid, '[mm]');
fprintf(fid, '\n          Espesor = %g', H*1000);
fprintf(fid, '[mm]');
fprintf(fid, '\n          N° Capas = %g', Num_Lam);
fprintf(fid, '\n          Orientaciones : ');
fprintf(fid, '\n          %g', theta);
fprintf(fid, '\n          Peso = %g', W);
fprintf(fid, '[N]');
fprintf(fid, '\n          Masa = %g', W/9.81);
fprintf(fid, '[Kg]');
fprintf(fid, '\n          Fact seg Tsai-Wu = %g', Fs);
fprintf(fid, '\n          Frec naturales Flex = %g', Fnf);
fprintf(fid, '[Hz]');
fprintf(fid, '\n          Frec naturales Tors = %g', Fnt);
fprintf(fid, '[Hz]');
fprintf(fid, '\n          Fact seg Torque critico = %g', ...
        Tc/(419*5.979));
fprintf(fid, '\n');
fclose(fid);

```

## SCRIPT MAPA DE ORIENTACIONES

```

Map = zeros(4194304,11);
pos = 1;
for a = 0:3
    for b = 0:3

```

```

for c = 0:3
    for d = 0:3
        for e = 0:3
            for f = 0:3
                for g = 0:3
                    for h = 0:3
                        for i = 0:3
                            for j = 0:3
                                for k = 0:3
                                    Map(pos,:) = ...
                                        [a b c d ...
                                         e f g h i ...
                                         j k];
                                    pos = pos + 1;
                                end
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end

for i = 1:length(Map)
    cont = 0;

```

```

for j = 1:11
    if Map(i,j) == 0
        cont = cont+1;
    end
    if Map(i,j) == 1 || Map(i,j) == 2 || Map(i,j) == 3
        if j<11
            if Map(i,j+1) == 0
                Map(i,1) = 4;
            end
        end
    end
end
if cont >= 10
    Map(i,1) = 4;
end
end

for i = 1:length(Map)
    m = 0;
    c = 0;
    count = zeros(1,11);
    for j = 1:11
        if Map(i,j) == 2
            c = c+1;
        end
        if Map(i,j) == 1 || Map(i,j) == 3
            m = m+1;
            count(1,m) = c;
        end
    end
end

```

```

                c = 0;
            end
        end

        if (-1)^c < 0
            Map(i,1) = 4;
        end

        for k = 1:11
            if (-1)^count(1,k) < 0
                Map(i,1) = 4;
            end
        end
    end
end

Map((Map(:,1)==4),:)=[];
dlmwrite('Datos',Map,'delimiter',' ');

```

## **FUNCIÓN LÁMINA**

*% Lectura de numero de laminas y orientaciones*

```
function [Num_Lam,Orient_cod] = Lamina(x)
```

```

p = x(1);
Laminas = dlmread('Datos');
Orient_cod = Laminas(p,:);
No_ceros = find(Orient_cod);
Num_Lam = 2*length(No_ceros);

```

## FUNCIÓN CÁLCULOS

```
function [W,Tc,Fnf,Fnt,Fs,H,Nxy] = Calculos(x)

[Num_Lam,Orient_cod] = Lamina(x);

Tn = 419;           % Torque nominal
n_p = 5.979;       % 1ra relacion de transmision
T = Tn*n_p;       % Torque en el eje
t = 0.00025;      % Espesor de una lamina del material
H = Num_Lam*t;    % Espesor del laminado
ro = x(2);        % Radio exterior del eje
ri = ro - H;      % Radio interior del eje
L = 1.4;          % Longitud del eje
A = pi*(ro^2-ri^2); % Area transversal del eje
V = A*L;          % Volumen del eje

P_r = 0.5;        % Porcentaje en volumen de resina
P_f = 0.5;        % Porcentaje en volumen de fibra
Vr = P_r*V;      % Volumen de resina
Vf = P_f*V;      % Volumen de fibra
rho_r = 1113;    % Densidad de la resina
rho_f = 1810;    % Densidad de la fibra

mr = rho_r*Vr;   % Masa de resina
mf = rho_f*Vf;   % Masa de fibra
m = mf+mr;       % Masa total del eje

g = 9.81;        % Gravedad
```

```

W = m*g; % Peso

r_m = (ri+ro)/2; % Radio medio del eje
t_p = ro-ri; % Espesor del eje hueco
J = pi/2*(ro^4-ri^4); % 2do momento polar de inercia radial
I = J/2; % 2do momento polar de inercia axial
Im = 1/2*m*(ri^2+ro^2); % Inercia de masa

Tao = (T*ro)/J; % Esfuerzo cortante maximo
Nxy = Tao*t_p; % Fuerza por unidad de longitud

[Fs,Ex,Ey,Gxy,~,~,H] = Propiedades(Num_Lam,Orient_cod,Nxy);

% FUNCIONES DE RESTRICION

% Pandeo por torsion
Tc = (2*pi*r_m^2*t_p)*0.272*(Ex*Ey^3)^0.25*(t_p/r_m)^1.5;
% Frecuencias naturales de flexion
Fnf = ((384*Ex*I)/(5*m*L^3))^0.5*(30/pi);
% Frecuencias naturales de torsion
Fnt = (((Gxy*J)/(Im*L))^0.5*(30/pi));

% CONDICIONES NECESARIAS PARA EVITAR NUMEROS COMPLEJOS

if Fnf^2 < 0
    Fnf=0;
end
if Fnt^2 < 0

```

```

        Fnt=0;
end
if Tc^2 < 0
    Tc=0;
end

```

## **FUNCIÓN PROPIEDADES**

```

function [Fs,Ex,Ey,Gxy,theta,SR,H] = ...
    Propiedades(Num_Lam,Orient_cod,Nxy)

```

```

% Modulos elasticos

```

```

E1 = 130e9;
E2 = 7.6e9;
G12 = 7.17e9;
v12 = 0.28;
v21 = v12*E2/E1;

```

```

% Esfuerzos ultimos

```

```

sigma_1t = 1371e6;
sigma_1c = 1317e6;
sigma_2t = 40e6;
sigma_2c = 246e6;
tao_12u = 68e6;

```

```

% Cargas aplicadas

```

```

Nx = 0;
Ny = 0;
Mx = 0;

```

```

My = 0;
Mxy = 0;

% Especificaciones del laminado

Orientaciones = Orient_cod;
theta1 = zeros(Num_Lam/2,1);
m = 1;

for i = 1:11
    if Orientaciones(i) == 3
        theta1(m) = 90;
        m = m+1;
    end
    if Orientaciones(i) == 2 && (-1)^i == 1
        theta1(m) = 45;
        m = m+1;
    end
    if Orientaciones(i) == 2 && (-1)^i == -1
        theta1(m) = -45;
        m = m+1;
    end
    if Orientaciones(i) == 1
        theta1(m) = 0;
        m = m+1;
    end
end
end

```

```

theta2 = flipud(theta1);
theta(1:Num_Lam/2,:) = theta1;
theta(Num_Lam/2 +1:Num_Lam,:) = theta2;

Lamina = Num_Lam;
t = 0.00025;
H = t*Lamina;

% -----
% |                                     |
% | ANALISIS MACROSCOPICO DE UNA LAMINA |
% | ----- |
% |                                     |

% LEYES DE HOOKE PARA UNA LAMINA UNIDIRECCIONAL 2D

% Coeficientes de rigidez
Q11 = E1/(1-v21*v12);
Q12 = (v12*E2)/(1-v21*v12);
Q22 = E2/(1-v21*v12);
Q66 = G12;

% Matriz de rigidez
Q = [Q11 Q12 0
     Q12 Q22 0
     0   0 Q66];

% Sistema de coordenadas para orientaciones arbitrarias
c = zeros(Lamina,1);

```

```

s = zeros(Lamina,1);

for i = 1:Lamina
c(i) = cosd(theta(i));
s(i) = sind(theta(i));
end

% Elementos de la matriz de transformacion
T11 = zeros(1,1,Lamina);
T12 = zeros(1,1,Lamina);
T13 = zeros(1,1,Lamina);
T21 = zeros(1,1,Lamina);
T22 = zeros(1,1,Lamina);
T23 = zeros(1,1,Lamina);
T31 = zeros(1,1,Lamina);
T32 = zeros(1,1,Lamina);
T33 = zeros(1,1,Lamina);

for i = 1:Lamina
T11(1,1,i) = c(i)^2;
T12(1,1,i) = s(i)^2;
T13(1,1,i) = 2*s(i)*c(i);
T21(1,1,i) = s(i)^2;
T22(1,1,i) = c(i)^2;
T23(1,1,i) = -2*s(i)*c(i);
T31(1,1,i) = -s(i)*c(i);
T32(1,1,i) = s(i)*c(i);
T33(1,1,i) = c(i)^2-s(i)^2;

```

```
end
```

```
% Matriz de transformacion
```

```
T = [T11 T12 T13  
      T21 T22 T23  
      T31 T32 T33];
```

```
% Elementos de la matriz transformada de rigidez
```

```
Qr11 = zeros(1,1,Lamina);  
Qr12 = zeros(1,1,Lamina);  
Qr16 = zeros(1,1,Lamina);  
Qr22 = zeros(1,1,Lamina);  
Qr26 = zeros(1,1,Lamina);  
Qr66 = zeros(1,1,Lamina);
```

```
for i=1:Lamina
```

```
    Qr11(1,1,i) = Q11*c(i)^4 + Q22*s(i)^4 + 2*(Q12 + ...  
        2*Q66)*s(i)^2*c(i)^2;  
    Qr12(1,1,i) = (Q11 + Q22 - 4*Q66)*s(i)^2*c(i)^2 + ...  
        Q12*(c(i)^4 + s(i)^4);  
    Qr16(1,1,i) = (Q11 - Q12 - 2*Q66)*c(i)^3*s(i) - ...  
        (Q22 - Q12 - 2*Q66)*s(i)^3*c(i);  
    Qr22(1,1,i) = Q11*s(i)^4 + Q22*c(i)^4 + ...  
        2*(Q12 + 2*Q66)*s(i)^2*c(i)^2;  
    Qr26(1,1,i) = (Q11 - Q12 - 2*Q66)*c(i)*s(i)^3 - ...  
        (Q22 - Q12 - 2*Q66)*s(i)*c(i)^3;  
    Qr66(1,1,i) = (Q11 + Q22 - 2*Q12 - ...  
        2*Q66)*s(i)^2*c(i)^2 + Q66*(s(i)^4 + c(i)^4);
```

```

end

% Matriz transformada de rigidez
Qr = [Qr11 Qr12 Qr16
      Qr12 Qr22 Qr26
      Qr16 Qr26 Qr66];

% -----
% |
% | ANALISIS MACROSCOPICO DEL LAMINADO |
% | -----
% |

% Distancia al plano medio del laminado
h = zeros(Lamina,1);
for i=1:Lamina+1
    h(i) = -H/2 + t*(i-1);
end

% Elementos de la matriz de extension
Aij11 = zeros(Lamina,1);
Aij12 = zeros(Lamina,1);
Aij16 = zeros(Lamina,1);
Aij22 = zeros(Lamina,1);
Aij26 = zeros(Lamina,1);
Aij66 = zeros(Lamina,1);

A11 = 0;
A12 = 0;

```

```

A16 = 0;
A22 = 0;
A26 = 0;
A66 = 0;

for i=1:Lamina
    Aij11(i) = Qr11(i)*(h(i+1)-h(i));
    A11 = A11 + Aij11(i);
    Aij12(i) = Qr12(i)*(h(i+1)-h(i));
    A12 = A12 + Aij12(i);
    Aij16(i) = Qr16(i)*(h(i+1)-h(i));
    A16 = A16 + Aij16(i);
    Aij22(i) = Qr22(i)*(h(i+1)-h(i));
    A22 = A22 + Aij22(i);
    Aij26(i) = Qr26(i)*(h(i+1)-h(i));
    A26 = A26 + Aij26(i);
    Aij66(i) = Qr66(i)*(h(i+1)-h(i));
    A66 = A66 + Aij66(i);
end

% Matriz de extension
A = [A11 A12 A16
     A12 A22 A26
     A16 A26 A66];

a = inv(A);

a11 = a(1,1);

```

```

a12 = a(1,2);
a22 = a(2,2);
a66 = a(3,3);

% Elementos de la matriz de acoplamiento
Bij11 = zeros(Lamina,1);
Bij12 = zeros(Lamina,1);
Bij16 = zeros(Lamina,1);
Bij22 = zeros(Lamina,1);
Bij26 = zeros(Lamina,1);
Bij66 = zeros(Lamina,1);

B11 = 0;
B12 = 0;
B16 = 0;
B22 = 0;
B26 = 0;
B66 = 0;

for i=1:Lamina
    Bij11(i) = Qr11(i)*((h(i+1))^2-(h(i))^2);
    B11 = B11 + Bij11(i);
    Bij12(i) = Qr12(i)*((h(i+1))^2-(h(i))^2);
    B12 = B12 + Bij12(i);
    Bij16(i) = Qr16(i)*((h(i+1))^2-(h(i))^2);
    B16 = B16 + Bij16(i);
    Bij22(i) = Qr22(i)*((h(i+1))^2-(h(i))^2);
    B22 = B22 + Bij22(i);

```

```

    Bij26(i) = Qr26(i)*((h(i+1))^2-(h(i))^2);
    B26 = B26 + Bij26(i);
    Bij66(i) = Qr66(i)*((h(i+1))^2-(h(i))^2);
    B66 = B66 + Bij66(i);
end

% Matriz de acoplamiento
B = [B11 B12 B16
     B12 B22 B26
     B16 B26 B66];
B = 1/2*B;

% Elementos de la matriz de flexion
Dij11 = zeros(Lamina,1);
Dij12 = zeros(Lamina,1);
Dij16 = zeros(Lamina,1);
Dij22 = zeros(Lamina,1);
Dij26 = zeros(Lamina,1);
Dij66 = zeros(Lamina,1);

D11 = 0;
D12 = 0;
D16 = 0;
D22 = 0;
D26 = 0;
D66 = 0;

for i=1:Lamina

```

```

    Dij11(i) = Qr11(i)*((h(i+1))^3-(h(i))^3);
    D11 = D11 + Dij11(i);
    Dij12(i) = Qr12(i)*((h(i+1))^3-(h(i))^3);
    D12 = D12 + Dij12(i);
    Dij16(i) = Qr16(i)*((h(i+1))^3-(h(i))^3);
    D16 = D16 + Dij16(i);
    Dij22(i) = Qr22(i)*((h(i+1))^3-(h(i))^3);
    D22 = D22 + Dij22(i);
    Dij26(i) = Qr26(i)*((h(i+1))^3-(h(i))^3);
    D26 = D26 + Dij26(i);
    Dij66(i) = Qr66(i)*((h(i+1))^3-(h(i))^3);
    D66 = D66 + Dij66(i);
end

% Matriz de flexion
D = [D11 D12 D16
     D12 D22 D26
     D16 D26 D66];
D = 1/3*D;

% Matriz de rigidez de extension, acoplamiento y flexion
ABD = [A B; B D];

% Matriz de cargas aplicadas
Load = [Nx;Ny;Nxy;Mx;My;Mxy];

% Deformaciones y curvatura en el plano medio
StrCurv_o = ABD\Load;

```

```

% Deformaciones en el plano medio
Strain_o = StrCurv_o(1:3,1);
epsilon_x_o = Strain_o(1,1);
epsilon_y_o = Strain_o(2,1);
gamma_xy_o = Strain_o(3,1);

% Curvaturas en el plano medio
Curvature_o = StrCurv_o(4:6,1);
k_x = Curvature_o(1,1);
k_y = Curvature_o(2,1);
k_xy = Curvature_o(3,1);

% Deformaciones en la superficie superior de cada lamina
Strain = zeros(3,1,Lamina);
for i = 1:Lamina
    Strain(:, :, i) = Strain_o + h(i)*Curvature_o;
end

% Esfuerzos en la superficie superior de cada lamina
Stress = zeros(3,1,Lamina);
for i = 1:Lamina
    Stress(:, :, i) = Qr(:, :, i)*Strain(:, 1, i);
end

gamma_xy_mit = Strain(3, :, :)/2;
Strain_mit = Strain;
Strain_mit(3, :, :) = gamma_xy_mit;

```

```

% Deformaciones locales en cada lamina
Strain_l = zeros(3,1,Lamina);
for i = 1:Lamina
    Strain_l(:,:,i) = T(:,:,i)*Strain_mit(:,:,i);
end

Strain_l(3,::) = Strain_l(3,::)*2;
epsilon_1 = Strain_l(1,::);
epsilon_2 = Strain_l(2,::);
gamma_12 = Strain_l(3,::);

% Esfuerzos locales en cada lamina
Stress_l = zeros(3,1,Lamina);
for i = 1:Lamina
    Stress_l(:,:,i) = T(:,:,i)*Stress(:,:,i);
end

sigma_1 = Stress_l(1,::);
sigma_2 = Stress_l(2,::);
tao_12 = Stress_l(3,::);

% CRITERIO DE FALLAS DE TSAI-WU

H1 = (1/sigma_1t) - (1/sigma_1c);
H11 = 1/(sigma_1t*sigma_1c);
H2 = 1/sigma_2t - 1/sigma_2c;
H22 = 1/(sigma_2t*sigma_2c);

```

```

H6 = 0;
H66 = 1/tao_12u^2;
H12 = -1/2*sqrt(1/(sigma_1t*sigma_1c*sigma_2t*sigma_2c));

% Factor de seguridad
Uno = H1.*sigma_1 + H2.*sigma_2 + H6.*tao_12;
Dos = H11.*sigma_1.^2 + H22.*sigma_2.^2 + H66.*tao_12.^2 +...
      2.*H12.*sigma_1.*sigma_2;
Tres = -1;

SR = (-Uno + sqrt(Uno.^2 - 4.*Dos.*Tres))./(2.*Dos);
Fs = min(SR);

% CONSTANTES ELASTICAS DE INGENIERIA
Ex = 1/(H*a11);
Ey = 1/(H*a22);
Gxy = 1/(H*a66);
vxy = -a12/a11;

% SIMBOLOS

% E1 : Constante elastica longitudinal
% E2 : Constante elastica transversal
% G12 : Modulo cortante o de cizallamiento
% v12 : Principal coeficiente de Poisson
% t : Espesor
% Lamina : Numero de laminas
% theta : Angulo de orientacion de las fibras

```

## **FUNCIÓN FUNCIÓN OBJETIVO**

```
function F_obj = FuncionObjetivo(x)
```

```
[W,~,~,~,~,~,~] = Calculos(x);
```

```
F_obj = W;
```

## **FUNCIÓN RESTRICCIONES**

```
function [c,ceq] = Restricciones(x)
```

```
[~,Tc,Fnf,Fnt,Fs,~,~] = Calculos(x);
```

```
FS = Fs-3;
```

```
Torque = Tc - 419*5.979
```

```
Frecuencias_nf = Fnf - 2600/0.759*1.5;
```

```
Frecuencias_nt = Fnt - 2600/0.759*1.5;
```

```
c = [-FS,-Torque,-Frecuencias_nf,-Frecuencias_nt];
```

```
ceq = [];
```

## **FUNCIÓN OPCIONES**

```
% Configuracin del algoritmo gentico, mediante la funcin  
% 'gaoptimset' que permite crear la estructura de opciones  
% para su adecuado funcionamiento.  
%  
% PopulationType : Tipo nmerico de datos evaluados  
% durante la ejecucin del algoritmo
```

```

% PopulationSize :      Nmero de soluciones de la funcin
%                       objetivo para cada una de las
%                       repeticiones efectuadas.
% Generations :        Nmero mximo de repeticiones del
%                       algoritmo.
% TolFun :             Distancia entre los valores promedio
%                       de la funcin objetivo evaluada.
% InitialPenalty :     Valor de penalizacin que se establece
%                       ante el
%                       incumplimiento de las restricciones.
% PenaltyFactor :      Factor de incremento del valor de
%                       penalizacin al cambiar de generacin.
% PlotFcns :           Establece las funciones a graficar
%                       durante la ejecucin del algoritmo.

```

```
function Opc = Opciones
```

```

Opc = gaoptimset('PopulationType', 'doubleVector', ...
                'PopulationSize', 50, ...
                'EliteCount', [], ...
                'CrossoverFraction', [], ...
                'StallGenLimit', inf, ...
                'Generations', 100, ...
                'TolFun', 1e-8, ...
                'InitialPenalty', [], ...
                'PenaltyFactor', [], ...
                'PlotFcns',{@gaplotbestf});

```

## **ANEXO H. FABRICACIÓN DEL PROTOTIPO A ESCALA DEL EJE**

### **CONSTRUCCIÓN**

#### **Herramientas.**

- Molde de madera (cilindro de madera)
- Cera desmoldante Mold Release TR-108
- Pomo
- Lanilla
- Tijeras
- Pinceles de cerdas suaves
- Espátula
- Vaso precipitado de vidrio
- Recipientes de almacenamiento
- Cartulina
- Cinta de enmascarar
- Anillo de acero (guía para el haz de fibras de carbono)
- Rodillo pequeño

#### **Procedimiento de construcción.**

1. Se toma el eje de madera y se envuelve en cartulina para facilitar su extracción una vez finalizada la construcción del prototipo a escala del eje.
2. Se cubre la superficie del eje de madera envuelto en cartulina con cinta de enmascarar para impedir que se deslice la cartulina y evitar que la resina se adhiera a la superficie de madera del eje.
3. Se aplica desmoldante por medio de un pomo en toda la superficie del eje de madera.

4. Cuando los solventes de la cera se evaporan (20 minutos aproximadamente), se procede a lustrar con una lanilla la superficie de cada lámina, retirando el exceso de cera.
5. Se repiten el paso 3 y 4 por lo menos tres veces para garantizar que el desmoldante cubra la totalidad de la superficie del eje de madera.
6. Mediante un vaso precipitado se prepara la mezcla de resina epóxica y endurecedor con una relación de peso de 100 a 24 respectivamente hasta lograr una mezcla uniforme.
7. Con una espátula se añade una capa delgada y uniforme de resina a la superficie del eje de madera.
8. Se procede a colocar la primera capa de fibra de carbono (orientación de las fibras a  $0^\circ$ ), es decir, a lo largo del eje de madera hasta cubrir totalmente la superficie del mismo.
9. Posteriormente se añade una capa delgada y uniforme de resina sobre la primera capa de fibra de carbono.
10. Para las fibras orientadas a  $45^\circ$  y  $-45^\circ$ , la fibra pasa a través de un anillo guía, el cual tiene como objetivo brindar un ancho constante al haz de fibras, seguidamente atraviesa un rodillo previamente impregnado de resina con lo cual al momento de enrollarse una capa sobre otra de fibra orientada a  $-45^\circ$  y  $45^\circ$  se adhieran de una mejor manera, tal y como se aprecia en la figura.

Disposición de fibras de refuerzo a  $-45^\circ$  y  $45^\circ$



Fuente: Autores.

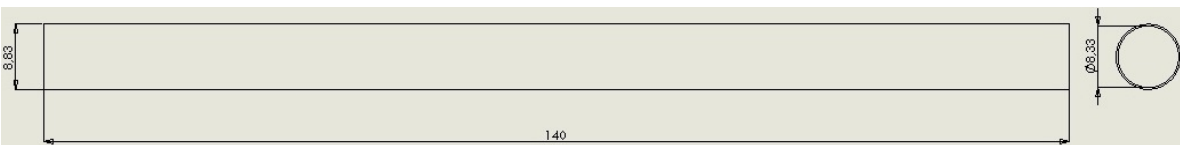
## ANEXO I. PLANOS DEL EJE Y PROTOTIPO

Modelo eje de transmisión



Fuente: Autores.

Dimensionamiento eje de transmisión. Cotas de longitud en [cm]



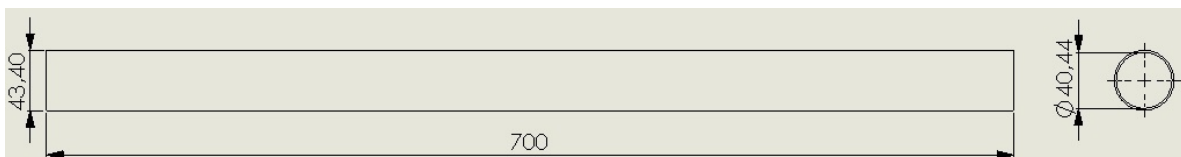
Fuente: Autores.

Modelo del prototipo real del eje de transmisión



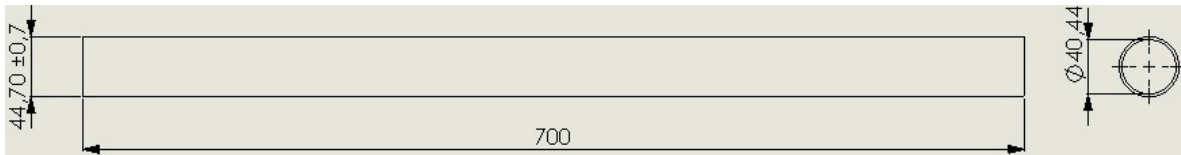
Fuente: Autores.

Dimensionamiento del prototipo calculado del eje de transmisión. Cotas de longitud en [mm]



Fuente: Autores.

Dimensionamiento del prototipo real del eje de transmisión. Cotas de longitud en [mm]



Fuente: Autores.

## ANEXO J. PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL DEL ANÁLISIS MODAL

### EQUIPOS

Mediante el analizador de vibraciones OROS 35\* y el software OROS 5.2 se validaron los resultados analíticos obtenidos mediante el software de simulación ANSYS.

Analizador de vibraciones OROS 35



Fuente: Autores.

La detección de las vibraciones en el prototipo se tomaron por medio de un acelerómetro mini uniaxial\*\* adecuado para el análisis en elementos livianos.

---

\* Sistema de adquisición y análisis de señales de vibraciones mecánicas OR35-Analizador de 8 canales FFT S/N 902581

\*\* Acelerómetro mini uniaxial IEPE con sensibilidad 10 mV/g de alta temperatura

Acelerómetro mini uniaxial



Fuente: Autores.

Se utilizó un martillo de impacto (HAMMER) + como excitador del eje con el objetivo de identificar las resonancias en todo el elemento.

Martillo de impacto (Hammer)



Fuente: Autores.

## EJECUCIÓN EXPERIMENTAL DEL ANÁLISIS MODAL

El montaje se realizó suspendiendo el prototipo del eje de fibra de carbono en una estructura metálica por medio de unas bandas elásticas en los extremos del elemento, las cuales le permitían oscilar libremente ante una excitación externa.

---

+ Martillo de impacto(Hammer) con sensibilidad de 100mV/Lbf 5050B

Posteriormente se procedió a colocar el acelerómetro por medio de una resina para fijarlo en la superficie externa del eje, se conectó el acelerómetro y el martillo de impacto al analizador de vibraciones como se observa en las siguientes figuras.

Montaje prototipo de eje



Fuente: Autores.

Montaje final



Fuente: Autores.

## **CONFIGURACIÓN DEL SOFTWARE OROS 5.2**

Se ejecuta el programa y se crea un nuevo proyecto en el cual se establece la geometría del elemento a analizar, se establecen los puntos en los cuales se excitará

el eje y se introducen los datos de sensibilidad de los equipos que se usarán en el proceso de adquisición de datos. Para la adquisición de datos se estableció realizar tres tomas en cada punto en el cual se golpearía el eje.

Software OROS 5.2



Fuente: Autores.

Finalizada la toma de datos se consignaron los datos en el programa y se procedió a realizar el análisis modal utilizando el método de análisis modal experimental (EMA) BROADBAND.