ENSEÑANZA DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS DE SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS Y DEL ÁNGULO DOBLE POR MEDIO DE LAS DEMOSTRACIONES SIN PALABRAS

ARTURO MANTILLA RODRÍGUEZ

JENNY PAOLA COGOLLO TORRES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2010

ENSEÑANZA DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS DE SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS Y DEL ÁNGULO DOBLE POR MEDIO DE LAS DEMOSTRACIONES SIN PALABRAS

ARTURO MANTILLA RODRÍGUEZ

JENNY PAOLA COGOLLO TORRES

Trabajo de Grado para optar al Título de

Licenciado(a) en Matemáticas

Director

WILSON OLAYA LEÓN

Magister en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2010

DEDICATORIA

A Dios y a nuestros padres

Por su amor y apoyo leal e ilimitado.

AGRADECIMIENTOS

A Dios y la Virgen, por darnos la fortaleza y sabiduría para sacar adelante este trabajo y la carrera en general.

A nuestros padres, fuente de inspiración que nos motivaron a salir adelante y que con su apoyo incondicional, su amor, sus oraciones y buenos deseos nos ayudaron a superar los momentos difíciles. Y a Tato, por cada palabra de aliento, por su paciencia y cariño incondicional, así como su apoyo y comprensión.

A nuestros profesores, excelentes personas y maestros que con gran conocimiento, impartieron en nosotros, con paciencia y dedicación, las enseñanzas que hoy nos permiten ser Licenciados en Matemáticas.

Al profesor Ricardo Monturiol por su aporte para el mejoramiento y la culminación de este trabajo

Al profesor Wilson Olaya, orientador de nuestro proyecto de grado, por darnos las pautas necesarias para desarrollar este trabajo y por guiarnos con gran entusiasmo y dedicación.

A los directivos y a los alumnos del grado décimo del Instituto Comunitario Minca, por permitirnos realizar la experiencia de aula y atender con entusiasmo a nuestras explicaciones.

A nuestras familias y amigos, que de alguna manera contribuyeron en la realización de este proyecto.

A Jenny y Arturo por su amor sincero, por su compañía y el apoyo absoluto durante este tiempo.

RESUMEN

TÍTULO: ENSEÑANZA DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS DE SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS Y DEL ÁNGULO DOBLE POR MEDIO DE LAS DEMOSTRACIONES SIN PALABRAS. *

AUTOR(ES): MANTILLA RODRÍGUEZ ARTURO Y COGOLLO TORRES JENNY PAOLA.**

PALABRAS CLAVES: Enseñanza, Geometría, Identidades Trigonométricas, Demostraciones sin palabras.

Esta investigación de aula tiene como objetivo plantear y analizar una estrategia de aprendizaje de las identidades trigonométricas de suma y diferencia de ángulos y del ángulo doble por medio de las demostraciones sin palabras tomadas del libro *Proofs withuot Words II.*

A través de este trabajo buscamos responder a la pregunta ¿Cómo influyen las demostraciones sin palabras de las identidades trigonométricas en el aprendizaje de la trigonometría?

En este trabajo nos referimos a demostraciones sin palabras como representaciones graficas que nos permiten deducir resultados matemáticos por medio de conceptos conocidos y cuya finalidad es que el estudiante no aprenda estos resultados de forma memorística sino de una forma deductiva apoyados en un soporte geométrico evidente

El método de investigación utilizado para el desarrollo de este trabajo es el estudio de casos cualitativo: a través del análisis de las guías de trabajo, el desempeño de los alumnos en la clase y los diálogos con la profesora titular del curso, daremos a conocer cómo influyen en la enseñanza de las identidades trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos y el ángulo doble las demostraciones sin palabras.

---

* Trabajo de Grado.

** Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas. Director: Wilson Olaya León, Magister en Ciencias Matemáticas.

SUMMARY

TITLE: * TEACHING ADITION TRIGONOMETRIC IDENTITIES AND DIFERENCE OF ANGLES AND DOUBLE ANGLE THROUGH THE DEMOSTRATION WITHOUT WORDS.

AUTHORS: MANTILLA RODRÍGUEZ ARTURO Y COGOLLO TORRES JENNY PAOLA.**

KEYWORDS: Education, Geometry, Trigonometric Identities, Demonstrations without words.

This classroom research aims to raise and discuss a strategy for learning the adition and substraction trigonometric identities of angles and double angle through the demonstration without words take from the book “Proofs withuot Words II”.

Through this work we seek to answer the question how do the demostrations without words of the trigonometric identities affect in learning trigonometry

In this paper we refer to proofs without words such as graphical representations that allow us to derive mathematical results known by means of concepts and whose purpose is that the student does not learn by heart the results instead of a deductive form supported by a clear geometrical support.

The research method used for the development of this work is the qualitative case study. That through the analysis of the working guidelines, the performance of students in the class and talks with the teacher of the course, we will present how they affect the teaching of the adition and substraction trigonometric identities and double angle through the demonstration without words take from the book “Proofs withuot Words II”.

* Grade work

**Faculty of science, school of Mathematics. Director: Wilson Olaya León, Magister en Mathematical sciencies.

CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCIÓN 1

1. RESEÑA HISTORICA DE LA TRIGONOMETRÍA 4

1.1 APORTES DE PTOLOMEO A LA TRIGONOMETRÍA. 8

1.2 APORTES DE LAS CULTURAS INDIA Y ÁRABE. 12

1.3 LA TRIGONOMETRÍA SE VUELVE ANALÍTICA. 14

1.4 EL ÁLGEBRA DE FRANÇOIS VIÉTE. 14

1.5 EL PASO DEL GRADO AL RADIAN. 15

2. LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRIA. 20

2.1 LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA EN COLOMBIA. 21

2.2 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS 22

2.3 QUE SE ENSEÑA EN TRIGONOMETRÍA 25

3. CONSTRUCCIÓN DE LAS DEMOSTRACIONES SIN PALABRAS DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA, DIFERENCIA Y EL ÁNGULO DOBLE. 32

4. LA EXPERIENCIA EN EL AULA. 44

5. REFLEXIONES Y CONCLUSIONES. 61

BIBLIOGRAFÍA 63

ANEXOS 65

INTRODUCCIÓN

La trigonometría como las demás ramas de las matemáticas se ha constituido como herramienta para resolver problemas del mundo físico y ha llegado a tener un amplio campo de aplicación en todas las áreas de la ingeniería. Su estudio inició varios siglos atrás y con el transcurrir de los años se ha alcanzado un gran desarrollo de su contenido, lo cual ha encaminado a que los matemáticos y especialistas en enseñanza matemática, busquen el método más apropiado para enseñarla.

A finales del siglo XX se estudiaban los problemas relacionados con la enseñanza de las matemáticas separando el contenido –propio de los matemáticos- del método de enseñanza –propio de los pedagogos-. Ahora, con los avances de los conocimientos sobre los procesos de aprendizaje y enseñanza, se ha cambiado esta perspectiva y un licenciado en matemáticas reúne no solo el conocimiento de los contenidos matemáticos sino también el conocimiento del método de enseñanza.

Es decisión del docente establecer cómo desarrollar el contenido de los temas y que método de enseñanza utilizar, pues este depende del contexto en que se da la clase y del grupo de estudiantes hacia el cual se está dirigiendo, por tanto, este debe estar en capacidad de elegir la metodología más adecuada teniendo en cuenta que no todos los estudiantes asimilan el aprendizaje de la misma manera y no todos poseen iguales presaberes.

Es una responsabilidad para nosotros, como estudiantes de licenciatura en matemáticas, fijarnos en la importancia que tiene el método de enseñanza y analizar cómo influyen estos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Hicimos entonces una serie de observaciones y notamos precisamente que la trigonometría es una de las principales ramas donde los estudiantes muestran falencias, lo que se debe posiblemente a que cada tema comprende cierta cantidad de fórmulas que deben ser memorizadas y de no ser así, es complicado llegar a la solución en un ejercicio dado. Además, pensamos en que tal vez una manera más adecuada de presentar estas fórmulas es deduciéndolas o relacionándolas con una gráfica para que el estudiante capte con mayor claridad los conceptos y se sienta más motivado en el aprendizaje.

Por lo tanto nos surgió el siguiente interrogante: "¿Cómo influyen las demostraciones sin palabras de las identidades trigonométricas en el aprendizaje de la trigonometría?". Interrogante que nos llevó a realizar nuestra investigación de estudio de caso con alumnos del grado décimo del instituto Comunitario MINCA de Floridablanca, basándonos en las demostraciones sin palabras de las identidades del libro PROOFS WITHOUT WORDS II. ([46], [47]).

El informe de esta experiencia de aula consta de cuatro capítulos distribuidos así:

En el primer capítulo hacemos una reseña histórica de la trigonometría, de cómo se ha desarrollado a través de los años y destacamos la importancia de su estudio y las múltiples aplicaciones que tiene.

En el segundo capítulo, la enseñanza de la trigonometría, hacemos énfasis en los métodos que se utilizaron antiguamente para la enseñanza de la trigonometría y de los métodos que se utilizan actualmente en nuestro país. Más aún abordamos el método de resolución de problemas el cual establece pautas para afrontar las situaciones prácticas que surgen de la aplicación de la trigonometría y que evidenciaron fuertes dificultades con los estudiantes.

El tercer capítulo hace referencia a la construcción de las demostraciones sin palabras de las identidades trigonométricas de la suma, diferencia y el ángulo doble.

Por último, en el cuarto capítulo describimos las actividades que se llevaron a cabo en cada una de las clases y analizamos la experiencia a la luz de la soluciones de las guías trabajadas por los estudiantes.

Planteamos reflexiones, conclusiones y recomendaciones de esta experiencia de aula y las cuales nos sirvieron para fortalecer nuestra vocación como docentes.

1. RESEÑA HISTORICA DE LA TRIGONOMETRÍA

La trigonometría es la rama de las matemáticas que se encarga de estudiar la relación entre los ángulos y los lados de un triángulo y se suele definir, justamente, como: ¨medida del triangulo¨. En este sentido puede decirse que la trigonometría nace desde que las primeras mediciones hechas por el hombre daban lugar a triángulos y posteriormente su estudio ha ido tomando gran importancia por sus múltiples aplicaciones.

La historia de la trigonometría se divide en dos momentos, el de sus inicios prácticos y el de sus fundamentos teóricos. En los inicios prácticos encontramos actividades, como la medición y la astronomía, desarrolladas en diferentes culturas y que cimentan el inicio de los estudios sobre trigonometría.

Así por ejemplo, encontramos el papiro de Rhind, que es la mayor fuente de conocimiento de matemática egipcia, contiene 87 problemas matemáticos con cuestiones aritméticas básicas, fracciones, cálculos de área, volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica. Fue escrita por Ahmes aproximadamente en el 1650 A.C, se encontró en el siglo XIX en las ruinas de un edificio en Luxor y fue adquirido por A.H.Rhind alrededor de 1860.

En este papiro el problema 56 contiene aspectos de trigonometría y de una cierta teoría de triángulos semejantes en la construcción de las pirámides, un problema esencial era el de mantener la pendiente uniforme en cada cara e igual en las cuatro. Puede haber sido este problema el que llevo a los egipcios a introducir un concepto equivalente al de la cotangente de un ángulo; para lograr sus construcciones calculaban la

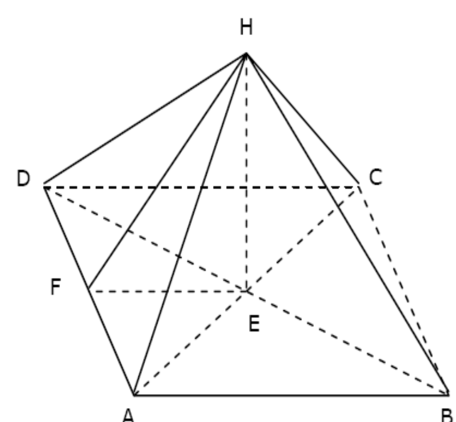


Fig. 1

separación de una recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura. Dicho cálculo recibía el nombre de se-quet, y con ello lograban mantener las proporciones de la pirámide y la inclinación de sus caras. De manera formal el se-quet se calcula de la siguiente forma: supongamos la pirámide constituida por ABCD el cuadrado de su base, E su centro, H el vértice y F el punto medio del lado AD de la base; él se-quet es el cociente EF/EH, es decir un concepto equivalente a la cotangente del ángulo de inclinación (como se muestra en la Fig.1). Esta relación establecida por los egipcios pone la atención en las razones en términos de proporciones (Boyer, 1968).

Siglos después retomando los conocimientos matemáticos de los egipcios y de los pueblos orientales, son adoptados y perfeccionados por los griegos gracias a los intercambios comerciales. Talhes de Mileto (600 años A.C) introduce en Grecia la geometría egipcia y desarrolla diversas ideas alrededor de los triángulos y sus ángulos (Heath, 1981).

Junto con la medición, la astronomía genera aportes empíricos importantes para lo que hoy conocemos como trigonometría. La astronomía ha estado ligada al ser humano desde la antigüedad y todas las civilizaciones han tenido contacto con esta ciencia. Un estimulo para observar los fenómenos celestes fue la necesidad de tener intervalos de tiempo y de forma natural el primer referente fue el cambio noche-día, y por lo tanto el estudio de los movimientos de la luna y el sol; pero con el tiempo estos fueron insuficientes para determinar cuáles eran los tiempos más apropiados para llevar a cabo la agricultura, la pesca, la navegación y el comercio. Razón por la cual comenzó la observación de los cambios en la posición de las estrellas y los planetas.

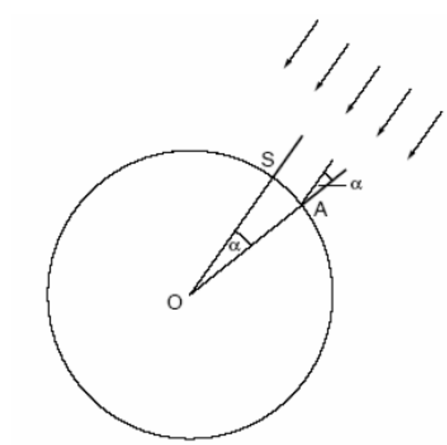
Fue en Mesopotamia donde se encontraron textos basados en una teoría matemática consistente sobre los movimientos planetarios y lunar. Esta región se considera que es el punto de partida de la civilización actual ya que se ha determinado influencia de los sumerios en las civilizaciones egipcias, hindú, y china.

En la matemática griega encontramos por primera vez un estudio metódico de las relaciones entre los ángulos centrales en un círculo y las cuerdas que los subtienden. Hipócrates de Quíos (460 a.C) se ocupó del problema de la cuadratura del círculo y consiguió, con la llamada lúnula de Hipócrates, trazar una lúnula de área igual a la de un triángulo que es mitad de un cuadrado dado.

Eudoxo (408-355 a.C) fue el primero en plantear un modelo planetario basado en un modelo matemático, por lo que se le considera el padre de la astronomía matemática. Con Aristarco (310-230 A.C) se tiene la primera muestra existente de la geometría pura utilizada con un objeto trigonométrico.

Aristarco argumento que el sol, la luna, y la tierra forman un triangulo recto en el momento del cuarto creciente o menguante, estimaba que el ángulo opuesto al cateto mayor era de 87º, usó una correcta geometría pero datos de observación inexactos, Aristarco concluyó erróneamente que el sol estaba 20 veces más lejos que la luna. Realmente el sol está 390 veces más lejos.

Otro cálculo que utilizó diferentes conceptos geométricos fue el originado por la medida de la tierra, una de las mediciones más precisas por los fundamentos involucrados fue la realizada por Eratóstenes en la cual inventó y empleó un método trigonométrico, él sabía que en Siena (hoy Asuán[1] en Egipto) el día del solsticio de verano los objetos no proyectaban sombra alguna y la luz alumbraba el fondo de los pozos, esto significaba que la ciudad estaba situada justamente sobre la línea del trópico y su



[1] Situado a 950 km, aproximadamente, al sur del Cairo.

latitud era igual a la de la eclíptica[2]. Eratóstenes suponía que Siena y Alejandría tenia la misma longitud (realmente distan 3º) y que el sol se encontraba tan alejado de la tierra que sus rayos podrían suponerse paralelos, midió la sombra en Alejandría el mismo día de solsticio de verano al medio día, demostrando que los rayos del sol inciden directamente en Siena, pero en Alejandría hacen un ángulo con la vertical, ese ángulo es igual al que formarían las verticales de las dos ciudades si los prolongamos hasta el centro de la tierra. Es decir, es igual a la diferencia de latitud geográfica entre siena y Alejandría. Eratóstenes comprobó que el ángulo α era de alrededor de 7,5º y dado que la distancia entre las dos ciudades se calculó en 5250 estadios[3] entonces la medida de la circunferencia total de la tierra debe ser 252000 estadios aproximadamente 40000 Km.

Hasta este momento no hemos hablado de trigonometría tal como se le designa en la matemática moderna, sin embargo los antecedentes que dejaron las culturas babilónicas, griega y egipcia en sus inicios muestra que la problemática de construir un modelo a escala, con base en los datos empíricos acumulados, sienta las bases para la construcción de un cuerpo teórico que más adelante se llamaría trigonometría.

El fundador de la trigonometría fue el primer gran astrónomo de la historia, Hiparco de Nicea y se considera que los cálculos y modelos son algunas de las más importantes bases de la trigonometría por dar aproximaciones muy buenas. Se sabe que fue el primero en construir una tabla trigonométrica.

En astronomía, descubrió la precesión de los equinoccios y descubrió el movimiento aparente de las estrellas fijas cuya medición fue de 46 minutos muy aproximada a la actual de 50,26 minutos. Calculó un periodo de eclipses de 126.007 días y una hora; Calculó la distancia a la luna basándose en la observación de un eclipse el 14 de marzo de 190 A.C. Su cálculo fue entre 59 y 67

[2] La Eclíptica es la línea curva por donde «transcurre» el Sol alrededor de la Tierra.

[3]Un estadio es una medida antigua que equivale a cerca de 157,5 metros.

radios terrestres el cual está muy cera del real (60) radios. Desarrolló un modelo teórico del movimiento de la luna basado en epiciclos.

Es importante destacar que gracias a los tres siglos de diferencia entre Hiparco y Ptolomeo, este último contaba ya con observaciones, hipótesis de los epiciclos y las excéntricas, así como con cálculos astronómicos. Y con base en ellos construyó su sistema.

El sistema planetario Ptolemaico situaba a la tierra en una posición inamovible considerándola el centro del universo y el centro de los movimientos planetarios. Este sistema Ptolemaico se atribuía a Aristóteles antes de la formulación de Ptolomeo en el siglo IV a.C y su estructura se ordenaba de la siguiente manera: la tierra, la luna, mercurio, Venus. El sol, Marte, Júpiter, Saturno. Las esferas planetarias se movían de acuerdo al impulso que recibían del noveno cielo con la ayuda de dios. Este sistema fue ampliamente aceptado y conocido en la antigüedad clásica y en el mundo árabe.

1.1 Aportaciones *de* Ptolomeo *a la trigonometría*

En primer lugar calculó cuerdas inscribiendo en un círculo polígonos regulares de tres, cuatro, cinco, seis, y diez lados, lo que le permitía calcular las cuerdas subtendidas por ángulos de 36º, 60º, 72º, 90º y 120º. Encontró, luego un método para hallar la cuerda subtendida por la mitad del arco de una cuerda conocida añadiendo a esto interpolaciones, con esto pudo calcular cuerdas con un buen grado de exactitud. Por ejemplo, encontró que el seno de 30 minutos (medio grado) era en notación mesopotámica 0;0,31,25 es decir $\frac{31}{60^2}+\frac{25}{60^3}\cong 0{,}00872685$ mientras que en nuestras calculadoras obtenemos 0, 00872654. El error de Ptolomeo es menor que 10^{-6}.

Ptolomeo fue construyendo las primeras tablas de trigonometría, en las que aparecían las razones trigonométricas de ángulos cuyas medidas en grados sexagesimales eran números naturales. Se basó en un teorema de Euclides que aparece en el libro XIII de los elementos, en el que se demuestra que un triángulo cuyos lados son respectivamente los lados de un pentágono, hexágono y decágono regulares inscritos en la misma circunferencia es un triángulo rectángulo.

Ptolomeo dice: consideremos un semicírculo de centro O y de diámetro AB (figura 3), tomamos los puntos C y D, puntos medios respectivamente del radio OB y del arco AB asimismo, tomamos un punto E del segmento AO, de tal manera que CE = CD.

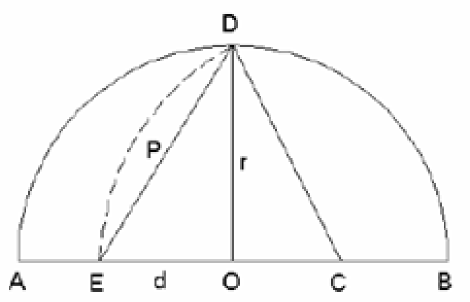


Fig. 3

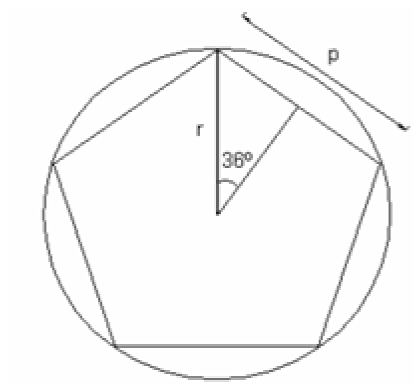


Fig. 4

El teorema mencionado anteriormente nos dice que ED = p, OD = r y OE = d son respectivamente las longitudes de los lados del pentágono, hexágono y decágono regulares inscritos en esa circunferencia.

De esto podemos deducir que:

$$OC = \frac{r}{2} \;\; \rightarrow \;\; CD = CE = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

$$d = EO = EC - OC = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$P = \sqrt{r^2 + d^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2\left(6 - 2\sqrt{5}\right)}{4}} = r^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Y de la figura 4 tenemos:

$$sen\, 36º = \frac{\frac{p}{2}}{r} = \frac{\frac{r}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{r} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 0{,}58778525$$

Y si utilizamos la relación fundamental de la trigonometría obtenemos:

$$cos\, 36º = \frac{1}{4}\sqrt{2\sqrt{5} + 6} = 0{,}86602699 \ldots$$

Ptolomeo utilizo sus fórmulas para el cálculo del seno y coseno de la diferencia de los ángulos de 36º y 30º, con lo que obtiene:

$$sen\, 6º = 0{,}10452846 \ldots \quad \text{Y} \quad \cos 6º = 0{,}99452189 \ldots$$

Luego, mediante las fórmulas del seno y coseno de la mitad del ángulo obtiene:

$$sen\, 3º = \sqrt{\frac{1 - cos\, 6º}{2}} = 0{,}05233595 \ldots \quad \text{Y} \quad cos\, 3º = \sqrt{\frac{1 + cos\, 6º}{2}} = 0{,}99862953 \ldots$$

Repitiendo el proceso sucesivamente obtuvo:

Sen 1º30 `= 0,02617694…* *Cos 1º30 `= 0,99965732…

Y por último: $\text{sen } 45` = 0{,}01308959 \ldots$ Este valor le sirvió a Ptolomeo para calcular el lado del polígono regular de 240 lados inscrito en la circunferencia, lo que le condujo a obtener el valor $\frac{377}{120}$ como aproximación del número π.

Si se realiza ahora una interpolación lineal entre los valores de sen 45` y sen 1º30` tenemos que:

$$sen\ 1º = sen\ 45` + \frac{sen\ 1º30´ - sen\ 45´}{3} = 0{,}01745204\ ...$$

Evidentemente, este valor obtenido es una aproximación del valor real de sen 1º, ya que la función seno no es una función lineal. Ptolomeo tomó la aproximación de sen 1º = 0,017452 para construir con seis decimales las primeras tablas de senos, cifras que coinciden todas ellas con las seis primeras cifras decimales del valor real de sen 1º, lo que nos da una idea del grado de exactitud de las tablas que construyó.

Del mismo modo obtuvo el cos 1º. A partir de aquí, utilizando sus fórmulas de las razones trigonométricas de una suma y de una diferencia de ángulos, pudo calcular de una manera exacta las razones de los ángulos cuyas medidas en grados sexagesimales eran múltiplos de 3, y de un modo muy aproximado las de los múltiplos de tres, más uno y menos uno. Veamos como ejemplo los valores del seno hasta el ángulo de 10º.

sen 2º = sen(3º-1º)   sen 4º = sen(3º+1º)   sen 6º (ya calculado)   sen 5º = sen(6º-1º)

sen 7º = sen(6º+1º)   sen 9º = sen(6º+3º)   sen 8º = sen(9º-1º)   sen 10º=sen(9º+1º)

Después de estos primeros cálculos, Ptolomeo establece el teorema que le permitió operar con las longitudes encontradas, seguido de tres corolarios de donde se pueden calcular más longitudes de cuerdas: la cuerda de la diferencia de dos arcos, la cuerda de la mitad de un arco y la cuerda de la suma de dos arcos. Estos corolarios son equivalentes a las identidades trigonométricas para el seno de la diferencia de dos ángulos, el seno de la mitad de un ángulo y el seno de la suma de dos ángulos respectivamente.

1.2 Aportes de las culturas India y Árabe

Hacia el siglo I, con la declinación del imperio romano el centro de la investigación matemática comenzó a desplazarse hacia la India y más tarde hasta Mesopotamia, dentro de las contribuciones indias a las ciencias exactas encontramos el libro más antiguo Surya Siddhanta que contiene cálculos precisos sobre el diámetro de la tierra y la distancia existente entre esta y la luna. En la trigonometría india se determinaba la semicuerda correspondiente al ángulo doble, es decir, el antecedente al actual seno. Surya Siddhanta utilizo seno (jya), coseno (kojya o "seno perpendicular") y seno inverso (jya del otkvam), también contiene el uso más temprano de tangente y secante.

Por su parte, la cultura árabe adaptó los números e inventaron el cero. Siendo únicamente dos los pueblos que consideraron la nada como existente, dándole un valor numérico, el cero. Se sistematizó el uso del seno del ángulo, en lugar de la correspondiente cuerda helénica, además del seno-verso (1-cosα) que ya conocía la trigonometría india, los árabes introdujeron las restantes funciones trigonométricas.

Habas Al-Hasib (aprox 762-862) astrónomo y matemático árabe, vivió en Bagdad, donde enseñó y llevó a cabo varias observaciones astronómicas. Se destaca su aportación al desarrollo de la trigonometría ya que fue el primero que elaboro una tabla de senos, también determinó la longitud de la sombra de un gnomon[4] horizontal colocado en una pared, cuya medida tomó como unidad (según los diferentes ángulos del sol entre 0º y 90º), los resultados los recopilo en una tabla que equivale a una tabla de tangentes.

Otros de los pensadores árabes más destacados en esta materia que merece un reconocimiento fue Abul Wefa (940-998) quien realizó observaciones

[4] Del latín gnomon, actualmente se le define como indicador de las horas en los relojes solares más comunes.

astronómicas corrigiendo las tablas de sus predecesores escribiendo además su propia versión del Almagesto, totalmente original. En los primeros capítulos de su Almagesto Abul Wefa desarrolló las formulas de las tangentes y de la secante, también presento tablas de tangentes y secantes para ángulos menores de 90º, cambió además las formulas de los triángulos desterrando las incomodas expresiones compuestas, donde se encontraban a la vez senos y cosenos de la incógnita. Una de estas formulas es la del seno de la suma o diferencia de ángulos, que dice: “multiplicar el seno de una por el coseno del otro, expresados en sexagesimales y sumar los dos productos si buscamos el seno de la suma de los dos arcos o restar si buscamos el seno de su diferencia”.

En su tratado de astronomía Kitab al-kabil, Abul Wefa define y hace uso de las seis funciones trigonométricas; generalmente en el mundo islámico se utilizaba un radio de longitud 60 unidades.

Años más tarde, ya en pleno ocaso de la ciencia árabe, el matemático, físico, astrónomo, filosofo y teólogo iraní Nasir Al Din Tusi (1201-1274) es quizás el primer matemático de la antigüedad en tratar la trigonometría como una disciplina o rama separada del tronco de las matemáticas. En su tratado sobre los cuadriláteros fue el primero en enumerar la lista de los seis casos distintos de ángulo recto en un triangulo esférico.

Johann Muller (1436-1476) más conocido como Regiomontano, escribió el primer tratado extenso sobre trigonometría moderna. En su “de triagulis omnimodis libri quinque” desarrolla el tema partiendo de unos conceptos geométricos básicos hasta llegar a la definición del seno. Muestra entonces cómo resolver cualquier triangulo (plano o esférico) usando el seno del ángulo o el seno de su complemento (el coseno).

1.3 La trigonometría se vuelve analítica

A pesar de las grandes obras de Regiomontano y otros importantes matemáticos como Copérnico, el termino trigonometría apareció hasta 1595 en el libro “trigonometriae sirve de dimensione triangulorum libri quinque” de Bartolomaus Pitiscus (1561-1614) un sacerdote alemán interesado por las matemáticas.

A partir de esta época y hasta nuestros días la trigonometría ha tomado un carácter analítico donde se la da gran importancia a las relaciones trigonométricas, no sin dejar atrás los orígenes geométricos de estas relaciones. Ya que se seguía representando a las cuerdas subtendidas por un arco, por ejemplo, Katz (1987) señala que dado que el seno y el coseno son los ejemplos de funciones periódicas más familiares uno esperaría que se hicieran presentes en cualquier discusión sobre fenómenos físicos periódicos; y de hecho así fue, pero en un contexto geométrico que no dio oportunidad al desarrollo de ideas analíticas. Esto debe interpretarse como una apreciación distinta de las propiedades de las relaciones trigonométricas.

Dentro de la transformación de la trigonometría podemos encontrar muchos trabajos que contribuyen para que esta sea hoy lo que es, trabajos en los que se relaciona la geometría y un álgebra con frases simbólicas y concisas.

1.4 El Álgebra de François Viéte.

El álgebra de literales permitió a los matemáticos aplicar métodos algebraicos a problemas que hasta este momento sólo habían sido tratados en forma puramente geométrica, también hizo posible resolver los problemas relativos a las magnitudes y figuras. “Siguiendo un camino seguro y regular”. Todo este avance matemático se le debe en gran parte al matemático francés François Viéte (1540 – 1603), quien fue el responsable de que la trigonometría experimentara un cambio significativo: admitir procesos infinitos en sus rangos.

En 1571, bajo el título de “Canon Mathematicus Seu ad Triangula cum Appendicibus”, Viéte hace el primer tratamiento sistemático de los métodos para resolver triángulos planos y esféricos, usando las seis funciones trigonométricas. Desarrolla las tres fórmulas de suma y producto (por ejemplo sen$\alpha + sen\beta = 2sen\frac{(\alpha+\beta)}{2} \cdot cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}$), con fórmulas similares para $sen\alpha + cos\beta \;\; y \;\; cos\alpha + cos\beta$, de donde Napier pudiera obtener la idea de los logaritmos, dado que permiten (al moverse a la inversa) reducir un producto de dos números a la suma de otros dos números. Viéte es el primero que aplica métodos algebraicos a la trigonometría.

Posterior a Viéte, particularmente en Inglaterra, tres personajes hicieron importantes contribuciones a la trigonometría en el transcurso de la primera mitad del Siglo XVII.

La invención de los logaritmos en 1614 por Jhon Napier (1550 – 1617) ayudó en los cálculos numéricos, particularmente en la trigonometría. William Oughtred (1574 – 1660) fue el primero en usar símbolos trigonométricos, en su Trigonometrie, or, The manner of Calculating the Sides and Angles of Triangles, by the Mathematical Canon, demostrated (Inglaterra, 1657), usó las abreviaciones s, t, se, s co, t co, y se co, para el seno, tangente, secante, coseno (complemento del seno), cotangente y cosecante, respectivamente. Y, finalmente, el trabajo en series infinitas, precursor de los trabajos de Newton en esta dirección, de John Wallis (1616 – 1703).

1.5 El paso del grado al radian

Hasta el momento nos hemos referido al contexto geométrico, donde las relaciones trigonométricas asocian los elementos de un triangulo inscrito en la circunferencia, al contexto analítico, donde se les consideran como cantidades trascendentes generadas por el círculo. En este acontecer, la medida angular pasa del estudio de la forma al estudio del giro cuantificable, pasando así entre arcos, grados y radianes.

El ángulo visto como forma proviene del estudio de la sombra que producen las posiciones del sol durante el día. En un modelo geométrico veríamos dos casos: proyectar ángulos iguales en una línea vertical que no interceptan en segmentos iguales (caso 1) o segmentos iguales no eran resultado de la división en ángulos iguales (caso2).

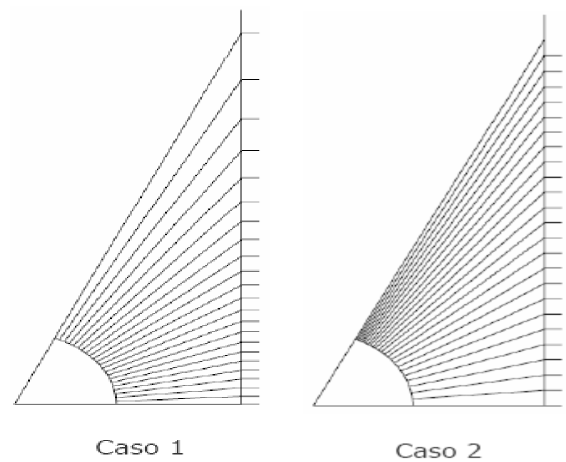


Fig. 5

Se cree que el grado, unidad de medida angular, tiene su origen en la cultura babilónica. Habitualmente se asume que se dividió la circunferencia en 360 arcos iguales. Cada una de esas partes recibió el nombre de grado y a cada una de ellas se le asignó un dios. En el zodiaco vuelve a aparecer el doce, pues esa cantidad de signos o casas tiene el sistema abarcando un arco de 30 grados y un conjunto de la misma cantidad de dioses.

En cualquier caso, el sistema encaja bien con el sistema numérico sexagesimal (base 60) de los babilonios que posteriormente fuera adoptado por los griegos y usado por Ptolomeo en su tabla de cuerdas.

El grupo Bourbaki señala que la medida de los ángulos a partir de los arcos que cortan en una circunferencia, es una concepción intuitiva y correcta, pero para llegar a ser rigurosa requiere de la noción de longitud de curva (cálculo integral).

Curiosamente como sistema de numeración el sistema sexagesimal es obsoleto hoy en día, pero la división del círculo en 360 partes ha sobrevivido no sólo como medición angular, también en la división de la hora en 60 minutos y el minuto en 60 segundos.

La palabra grado se originó en Grecia, usando la palabra $\mu\tau\rho\alpha$ (Moira) que los Árabes tradujeron como daraja (que significa paso, marcha, escalón) finalmente este se tradujo al latín como gradus, de donde viene la palabra grado.

Lo que resulta más curioso es el origen de sus subdivisiones, los minutos y los segundos. Resulta que Ptolomeo llevado por la superioridad del sistema de numeración sexagesimal babilónico, dividió los grados en sesenta primeras partes menores y cada una de estas en sesenta segundas partes menores. El tiempo y la pereza harían que nos quedásemos tan solo con minutae y secundae, es decir, minutos y segundos, aunque en origen solo significaran menor y segunda.

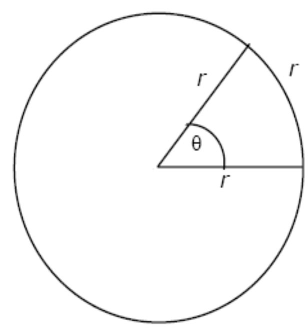


Fig. 6

Actualmente el radián o unidad de medida circular se ha adoptado universalmente como la unidad natural de una medida angular. Un radian es la unidad de ángulo plano en el sistema Internacional de unidades. Representa el ángulo central en una circunferencia que subtiende un arco cuya longitud es igual a la del radio. Dado que el círculo completo comprende $2\pi(\approx 6.28$ s a lo largo de la circunferencia, y cada uno de estos radios corresponde al ángulo central de un radián, tenemos que 360° es equivalente a 2π radianes, de aquí que un radian sea equivalente a $\frac{360°}{2\pi} \approx 57.29°$.

El manejo simultaneo de los arcos (su proporción respecto del círculo) y los radianes (expresados en términos de π) surge a partir de los problemas que trae consigo la matemática de la variación y el cambio.

Actualmente las posturas respecto del uso del radian son diversas. Una de las más frecuentes afirma que el radian es una unidad más conveniente que el grado por ser más grande, y ello nos permita expresar ángulos con números más pequeños.

Consideramos que a nivel teórico domina el criterio de la analiticidad a fin de cumplir que el $\lim_{\theta \to 0} \frac{sen\ \theta}{\theta} = 1$, es decir, que el ángulo y su seno tiendan a ser iguales cuando θ es pequeño. Que es de suma importancia en el cálculo diferencial e integral y en la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Además, en esta última también encontramos importante la fórmula o relación de Euler, la cual es utilizada a menudo para simplificar derivadas, incluso si la respuesta final es una función real en la que aparezcan senos o cosenos.

La identidad de Euler es una consecuencia inmediata de la fórmula de Euler, la cual es atribuida al matemático Leonhard Euler y establece que:

$$eix = cos\, x + i \cdot sin\, x.$$

Para todo número real *x*. Aquí, *e* es la base del logaritmo neperiano, *i* (también denotada *j*) es la unidad imaginaria, y *sin* y *cos* son el seno y el coseno, las funciones trigonométricas.

La fórmula puede interpretarse geométricamente como una circunferencia de radio unidad en el plano complejo, dibujada por la función e^{ix} al variar *x* sobre los números reales. Así, *x* es el ángulo de una recta que conecta el origen del plano y un punto sobre la circunferencia unidad, con el eje positivo real, medido en sentido contrario a las agujas del reloj y en radianes. La fórmula solo es válida si también el seno y el coseno tienen sus argumentos en radianes.

La demostración está basada en el desarrollo en serie de Taylor de la exponencial e^z (donde *z* es un número complejo), y el desarrollo de $sen\, x$ y $cos\, x$.

La fórmula de Euler fué demostrada por primera vez por Roger Cotes en 1714, y luego redescubierta y popularizada por Euler en 1748. Es interesante notar que ninguno de los descubridores vió la interpretación geométrica señalada anteriormente: la visión de los números complejos como puntos en el plano surgió unos 50 años mas tarde.

La formula proporciona una potente conexión entre el análisis matemático y la trigonometría. Se utiliza para representar los números complejos en coordenadas polares y permite definir el logaritmo para números complejos.

De las reglas de la exponenciación

$$e^{a+b} = e^a e^b \quad \text{Y} \quad (e^a)^b = e^{ab}$$

(válidas para todo par de números complejos *a* y *b*), se pueden derivar varias identidades trigonométricas, así como la fórmula de Moivre.

La fórmula de Euler también permite interpretar las funciones seno y coseno como meras variaciones de la función exponencial:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Estas fórmulas sirven así mismo para definir las funciones trigonométricas para argumentos complejos *x*. Las dos ecuaciones anteriores se obtienen simplemente resolviendo las fórmulas:

$$e^{ix} = \cos x + isen\, x$$

$$e^{-ix} = \cos x - isen\, x$$

2. LA ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA

Después del nacimiento y desarrollo de la trigonometría, la preocupación que embarca a los matemáticos y a los especialistas en enseñanza matemática, es el método o la forma más apropiada para enseñarla. Pero esta preocupación no solo es con la trigonometría, sino con todos los campos de la matemática.

Hasta finales del siglo XX los problemas relacionados con la enseñanza de las matemáticas los estudiaban separando el contenido –competencia de los matemáticos- del método de enseñanza –competencia de los pedagogos-. Consideraban también que el conocimiento que debía tener el maestro acerca de la disciplina y sobre la aplicación de métodos generales de enseñanza le permitirían un buen dominio del conocimiento matemático y sobre las formas de enseñarlo.

Los avances en el conocimiento sobre los procesos de aprendizaje y de enseñanza han permitido cambiar esta perspectiva, hoy podemos ver que la forma como nos apropiamos de un saber determinado depende en gran medida de la naturaleza misma de ese saber y que, por lo tanto, el estudio de los problemas relacionados con su aprendizaje y con su enseñanza debe considerar las características especificas, ya que por ejemplo no se puede enseñar o aprender de igual manera historia, matemáticas o educación artística.

La trigonometría como las demás ramas de las matemáticas se ha construido a lo largo del tiempo como herramientas para resolver cierto tipo de problemas del mundo físico, social y también del propio campo de las matemáticas. Sin embargo, las matemáticas tradicionales, aquellas que son reconocidas socialmente como el saber matemático, han pasado por un proceso de descontextualización donde se han separado de los problemas que las originaron para integrar cuerpos estructurados de conocimiento. Por ejemplo, los sistemas de numeración, los números racionales, la proporcionalidad, etcétera. Ahora podemos encontrarlos en los diferentes programas educativos.

Para ser enseñados, estos conocimientos teóricos y descontextualizados deben seguirse transformando a lo largo de un proceso. Aunque la tendencia dominante ha sido enseñarlos en su versión final, pero de manera simplificada. En esta simplificación, con mucha frecuencia la teoría se deforma, pierde su sentido original y no es raro que se reduzca a un conjunto de símbolos y técnicas con escaso significado.

2.1 La enseñanza de la trigonometría en Colombia

En el contexto de la nueva sociedad del conocimiento, la educación se reconoce como la causa principal del progreso.

El ministerio de educación nacional entrega a los educadores y a las comunidades educativas del país, la serie de documentos titulada lineamientos curriculares, un conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodología y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local.

En el ámbito de las matemáticas se propone una educación matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos, que no solo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos, sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender. El principal objetivo de cualquier trabajo en matemáticas es ayudar a las personas a dar sentido al mundo que les rodea y a comprender los significados que otros construyen y cultivan. Mediante el aprendizaje de las matemáticas los alumnos no solo desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica sino que al mismo tiempo, adquieren un conjunto de instrumentos poderosísimos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla. En resumen para actuar en ella y para ella.

En los lineamientos curriculares se presentan unos conocimientos básicos para todas las edades y que se seleccionan en diferentes clases de pensamientos: pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico, pensamiento aleatorio y pensamiento variacional[5].

En la enseñanza de la trigonometría intervienen tres de estos pensamientos con unos estándares específicos relacionados con la materia, que los estudiantes deben completar de acuerdo con el currículo implementado en cada institución. Estos tres pensamientos y sus respectivos estándares son: pensamiento espacial y sistemas geométricos en el cual debe utilizar relaciones trigonométricas para determinar longitudes y medidas de ángulos. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, donde reconoce las funciones trigonométricas inversas, construye sus graficas en el plano cartesiano y deduce sus principales propiedades, reconoce las identidades trigonométricas fundamentales y deduce otras identidades a partir de ellas, simplifica expresiones trigonométricas, deduce fórmulas trigonométricas para la suma y diferencia de ángulos, la mitad y el doble de un ángulo y otras formulas básicas, resuelve ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas. Y por ultimo pensamiento métrico y procesos matemáticos en el cual utiliza ideas geométricas y de la trigonometría para resolver problemas tanto de las matemáticas como de otras disciplinas.

2.2 Resolución de problemas para la enseñanza de la matemática

Para el desarrollo de los pensamientos que se involucran en la trigonometría, podemos ver en los diferentes textos y publicaciones del ministerio de educación, que siempre es importante apoyar los ejercicios y ejemplos de cada tema con la

---

[5] Tomado de lineamientos curriculares, ministerio de educación nacional http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-89869.html.

solución de problemas o situaciones que estén relacionadas con el diario vivir de los alumnos. Sobre este tema, el matemático húngaro George Polya (1887-1985), escribió un libro de cómo plantear y resolver problemas, en el cual él dice “se entenderá que resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado que no es conseguible de forma inmediata utilizando los medios adecuados”. Una pieza importante a tener en cuenta es no ver la resolución de problemas como un resultado, la táctica tiene que dirigirse hacia el beneficio del potencial que ofrece este proceso.

Teniendo en cuenta la huella que produjo en el mundo de la enseñanza de la Matemática los trabajos del profesor Polya, en especial a la enseñanza – aprendizaje de la resolución de problemas, se muestra que para resolver un problema, se requiere trabajar mucho con estos, estudiarlos a profundidad y analizar las distintas posibilidades que permiten enfrentar su solución.

En el trabajo de Polya existen un conjunto, de variables a considerar de resolución de problemas, las cuales se agrupan en cuatro grandes categorías:

Comprender el problema

- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición? ¿Es la solución suficiente para determinar la incógnita? ¿es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Concebir un plan

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? O ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.

- He aquí un problema relacionado con el suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de utilizarlo?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente?
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En que forma puede variar? ¿Puede usted deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?
- ¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Ejecución del plan

- Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos.
- Puede usted ver claramente que el paso es correcto? Puede usted demostrarlo?

Examinar la solución obtenida

- Puede usted verificar el resultado? Puede verificar el razonamiento?
- Puede obtener el resultado en forma diferente? Puede verlo de golpe? Puede usted emplear el resultado o el método en algún problema?

Aparte de estos cuatro pasos Polya también dice: los problemas deben dar a los alumnos la oportunidad de explorar relaciones conocidas y utilizarlas para descubrir o asimilar nuevos conocimientos los cuales a su vez servirán para resolver nuevos problemas. Esta es esencialmente, la naturaleza de la actividad matemática. Y menciona que es muy importante y necesario que los estudiantes aprendan a plantearse y resolver problemas en situaciones que tengan sentido para ellos y les permitan generar y comunicar conjeturas. Deben conocer y comprender los procedimientos que sirven para resolver problemas, factores que les faciliten la motivación hacia la resolución de los mismos.

Por todo lo anterior según Polya y por lo que se ha podido observa en la práctica a través de los años, la resolución de problemas es un factor importantísimo para la enseñanza de las matemáticas en general.

2.3 Qué se enseña en trigonometría

En la actualidad podemos encontrar muchos textos para cada curso, textos de diferentes editoriales pero en general en todos se encuentran los mismos contenidos debido a que en cada curso se debe cumplir con los estándares de los lineamientos curriculares. Sin embargo estos textos se diferencian unos de otros por las estrategias de enseñanza, por los ejemplos y por los ejercicios propuestos como refuerzo.

Para el curso de matemáticas de décimo grado específicamente en trigonometría podemos encontrar en los textos que los contenidos son los siguientes: funciones trigonométricas, gráficas de las funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas, aplicaciones de las funciones trigonométricas e identidades trigonométricas y ecuaciones trigonométricas. (Tomado del libro Matemáticas 10. Editorial Santillana siglo XXI.)

En el primer tema de funciones trigonométricas, construyen la definición de éstas de la siguiente manera:

> *Si* θ *es un ángulo en posición normal, M(x,y) es cualquier punto sobre su lado final, diferente de (0,0), y r = OM =* $\sqrt{x^2+y^2}$, *entonces, las funciones trigonométricas para el ángulo* θ *se definen:*

$$seno\ \theta = sen\ \theta = \frac{y}{r}$$

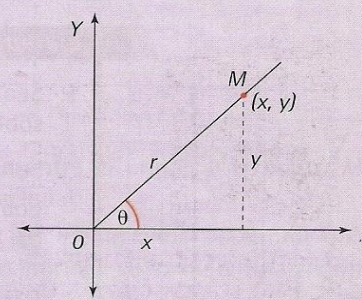
$$coseno\ \theta = cos\ \theta = \frac{x}{r}$$

$$tangente\ \theta = tan\ \theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

$$cotangente\ \theta = cot\ \theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$

$$secante\ \theta = sec\ \theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0$$

$$cosecante\ \theta = csc\ \theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0$$



Luego determinan el dominio y el rango de las funciones trigonométricas de la siguiente manera:

> *Dada la definición de las funciones trigonométricas es posible determinar su dominio y su rango así, como en el lado final del ángulo* θ *está el punto M(x,y) ≠ (0,0) entonces,* $r = \sqrt{x^2+y^2}$ *nunca es cero. Por lo tanto, el dominio de las funciones seno y coseno está constituido por todos los ángulos* θ. *Pero las funciones tangente y secante no están definidas para los ángulos cuyo lado final coincide con el eje y, es decir, para x = 0. De modo que los dominios de la función tangente y secante*

Dominio y rango de las funciones trigonométricas

Dom (sen) = $\mathbb{R}$

Ran (sen) = $[-1, 1]$

Dom (cos) = $\mathbb{R}$

Ran (sen θ) = $[-1, 1]$

Dom (tan) =

$\mathbb{R} - \{\theta \mid \theta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,$

$n \in \mathbb{Z}\}$

Ran (tan) = $\mathbb{R}$

están formados por todos los valores de θ, excepto los valores $\pm\frac{\pi}{2}$ o $\pm\frac{3\pi}{2}$. En general, los dominios de las funciones tangente y secante se enuncian, Dom tan = {θ / θ ≠ (2n+1)$\frac{\pi}{2}$, n∈Z}, Dom sec = {θ / θ ≠ (2n+1)$\frac{\pi}{2}$, n∈Z} Las funciones cotangente y cosecante no están definidas para ángulos cuyo lado final coincide con el lado x, es decir, para y=0. Así, los dominios de las funciones cotangente y cosecante comprenden todos los ángulos θ, excepto ángulos como ±π, ±2π, ±3π, entre otros. En general, los dominios de estas dos funciones son: = {θ / θ ≠ nπ, n∈Z}.

También hallan el signo de las funciones trigonométricas según el cuadrante donde este ubicado el ángulo y lo presentan a los estudiantes por medio del siguiente cuadro:

función / cuadrante	Sen θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	Sec θ	Csc θ
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

Posterior a la definición, dominio, rango y el signo de las funciones trigonométricas se construyen y analizan las graficas de las funciones trigonométricas y las funciones trigonométricas inversas, analizan las aplicaciones de las funciones trigonométricas en triángulos rectángulos y triángulos oblicuángulos por medio de ejercicios de aplicación en las matemáticas y las ingenierías.

Enseguida, en los textos podemos ver que se inicia el estudio de las identidades trigonométricas y las ecuaciones trigonométricas. Por ejemplo, en el libro trigonometría y geometría analítica de la editorial Santillana observamos cómo se plantea la enseñanza de las identidades trigonométricas para la suma de ángulos, donde de una figura geométrica deducen las identidades de sen(α+β), cos(α+β) y tan(α+β) de la siguiente manera:

Sean α *y* β *dos ángulos consecutivos en posición normal, tales que p es un punto en el lado final de* α+β *y R es un punto del lado final de* α.

En la figura, PQ es perpendicular a OS, y PR es perpendicular a OR. Luego, <RPQ es congruente con <ROS. Además, TO – RS y OS – TR. Así,

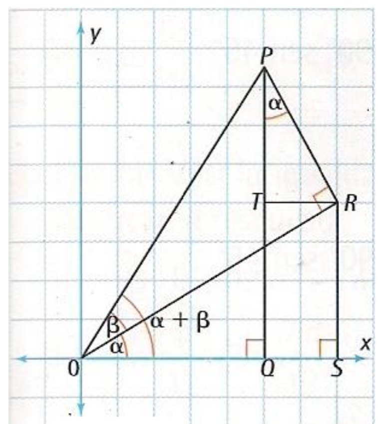


Fig. 7

$$\text{Sen}\ (\alpha+\beta)=\frac{PQ}{OP}=\frac{PT+TQ}{OP}=\frac{PT}{OP}+\frac{TQ}{OP}=\frac{PT}{OP}+\frac{RS}{OP}=\frac{PT}{OP}\cdot\frac{PR}{PR}+\frac{RS}{OP}\cdot\frac{OR}{OR}$$
$$=\frac{PT}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}+\frac{RS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}$$

Luego,

$$\text{sen}\ (\alpha+\beta)\ =\ \text{sen}\alpha\cdot\cos\beta\ +\ \cos\alpha\cdot\text{sen}\beta$$

Ahora,

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OQ}{OP}=\frac{OS-QS}{OP}=\frac{OS}{OP}-\frac{QS}{OP}=\frac{OS}{OP}-\frac{TR}{OP}=\frac{OS}{OP}\cdot\frac{OR}{OR}-\frac{TR}{OP}\cdot\frac{PR}{PR}=\frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}-\frac{TR}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

Es decir,

$$\cos(\alpha+\beta)\ =\ \cos\alpha\cos\beta-\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Y por ultimo:

$$\tan(\alpha+\beta)=\ \frac{\operatorname{Sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=$$

$$\frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}=\frac{tan\propto+tan\beta}{1-tan\propto tan\beta}$$

Por lo tanto:

$$\tan(\alpha+\beta)\ =\ \frac{tan\propto\ +tan\beta}{1\ -\ tan\propto\ tan\beta}$$

Similar a la forma como lo hicieron para la suma también lo hacen para la diferencia de ángulos, utilizando los resultados anteriores de $sen\,(\alpha+\beta)$, $cos\,(\alpha+\beta)$ y $tan\,(\alpha+\beta)$, para realizar las demostraciones así:

Demostración de $sen\,(\alpha-\beta)$: *como la función seno es impar se tiene que* $sen\quad(-\alpha)\ =\ -sen\alpha$ *y como la función coseno es par se cumple que* $cos\,(-\alpha)\ =\ cos\,\alpha$, *por lo tanto,*

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}[\propto+(-\beta)]$$
$$=\ \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta)\ +\ \cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta)\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\ +\ \cos\alpha(-\operatorname{sen}\beta)$$

Luego,

$$sen(\alpha-\beta)\ =\ sen\alpha cos\beta-cos\alpha sen\beta$$

Demostración de $cos\ (\alpha - \beta)$:

$$cos(\alpha - \beta) = cos[\alpha + (-\beta)] = cos\ \alpha\ cos\ (-\beta) - sen\ \alpha\ sen\ (-\beta)$$
$$= cos\alpha cos\beta - sen\alpha(-sen\ \beta).$$

Así,

$$cos\ (\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta.$$

Demostración de tan (α-β)*: La función tangente es impar, por tanto, tan (-*α*) = -tan* α*. Entonces,*

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan[\alpha + (-\beta)] = \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)} = \frac{\tan\alpha + (-\tan\beta)}{1 - tan\alpha\ (-\tan\beta)}$$

por lo tanto,

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Después de explicar las identidades para la diferencia y suma de ángulos en el libro se demuestra las identidades para ángulos dobles y ángulos medios, basándose en la fórmula para la suma de ángulos de la siguiente manera:

*Demostración de sen 2*α *:* $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, *entonces,* $sen\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha.$

Demostración de cos 2α: como $cos2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha$, *entonces,* $\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$

*Demostración de tan 2*α*: tan 2*α $= \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}$,

por lo tanto, $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}$

Y las identidades para ángulos medios, que las deducen definiendo β = $\frac{\alpha}{2}$, así:

Demostración de $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$: *como* $\cos 2\beta = 1 - sen^2\beta$, *entonces,* $\cos\alpha = 1 - 2sen^2\frac{\alpha}{2}$. *Al despejar* $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, *se obtiene* $2sen^2\frac{\alpha}{2} = 1 - cos\alpha$, *entonces,* $\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

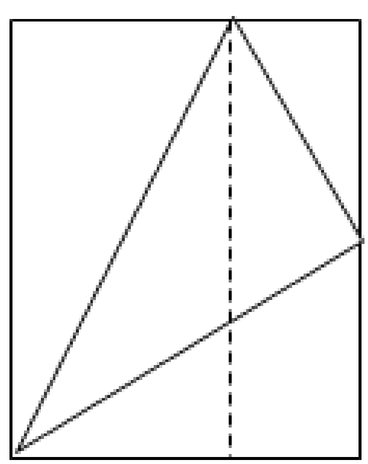
Demostración de $\cos\boldsymbol{\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$: *como* $cos2\beta = 2cos^2\beta - 1$, *entonces,* $\cos\alpha = 2cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$. *Al despejar cos* $\frac{\alpha}{2}$, *se obtiene* $2cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + cos\alpha$, *luego, cos* $\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

Al terminar todo lo relacionado con las relaciones y las identidades trigonométricas, continúan con aplicación de lo visto en la resolución de problemas de diferentes disciplinas como física, astronomía, ingeniería y tecnología, etc.

3. CONSTRUCCIÓN DE LAS DEMOSTRACIONES SIN PALABRAS DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA, DIFERENCIA Y EL ÁNGULO DOBLE

Las siguientes son las construcciones paso a paso, de las demostraciones visuales de las identidades trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos y el ángulo doble, tomadas del libro *Proofs withuot Words II*. ([46], [47]). A continuación, encontraremos las construcciones geométricas de las demostraciones según se presentaron en las actividades realizadas en el salón de clases. Además, presentamos una construcción de las mismas identidades utilizando álgebra vectorial, las cuales surgieron durante el desarrollo de este trabajo como un aporte del profesor Ricardo Monturiol[6].

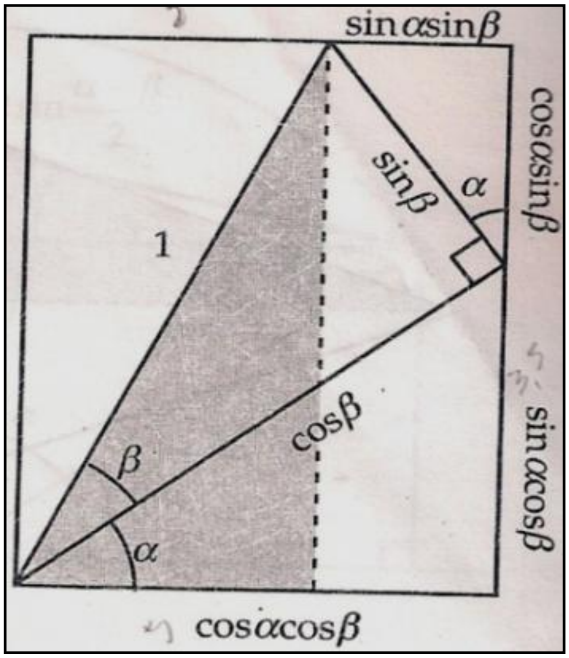
Cabe destacar que las primeras seis construcciones comienzan todas con la misma figura, la cual hemos llamado “una figura seis identidades”. La idea básica de las demostraciones sin palabras es que sólo observando la figura se deduzca las identidades trigonométricas utilizando los conceptos trigonométricos elementales.



[6] Profesor de la escuela de matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, evaluador del proyecto.

UNA FIGURA SEIS IDENTIDADES

Seno y coseno de la suma de dos ángulos

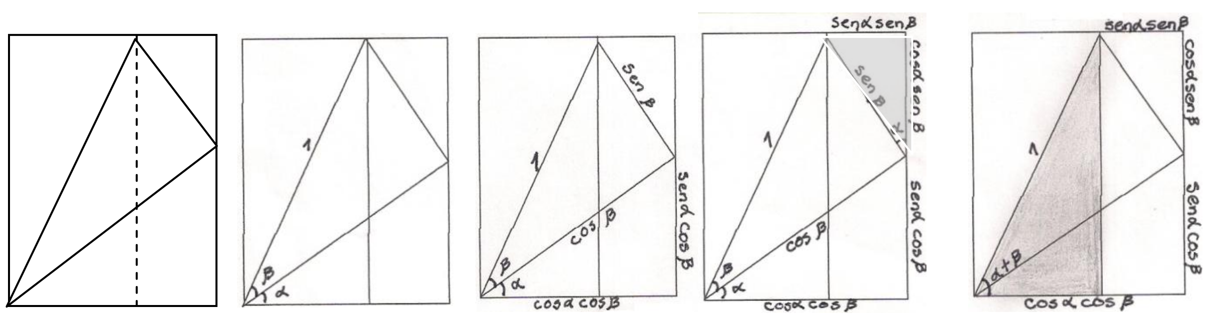


$$\mathbf{Sen}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{sen\alpha cos\beta} + \boldsymbol{cos\alpha sen\beta}$$

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{cos\alpha cos\beta} - \boldsymbol{sen\alpha sen\beta}$$

Pasos para la construcción

(1) (2) (3) (4) (5)



(1) Para la demostración comenzamos con la figura “una figura seis identidades”.

(2) colocamos los ángulo α y β, y 1 en la hipotenusa del triangulo que utilizaremos al final, en el cual está el ángulo $(\alpha + \beta)$.

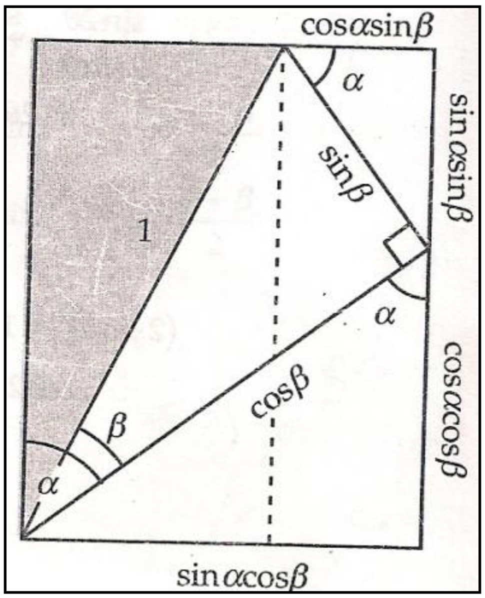
(3) hallamos las relaciones en los triángulos rectángulos para los ángulos β y α respectivamente.

(4) obtenemos las relaciones para el ángulo α en el triangulo rectángulo de menor área,

(5) identificamos el triangulo rectángulo que forma el ángulo (α+β). Y obtenemos:

$\mathbf{Sen}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{sen\alpha cos\beta} + \boldsymbol{cos\alpha sen\beta}$ $\mathbf{Cos}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{cos\alpha cos\beta} - \boldsymbol{sen\alpha sen\beta}$

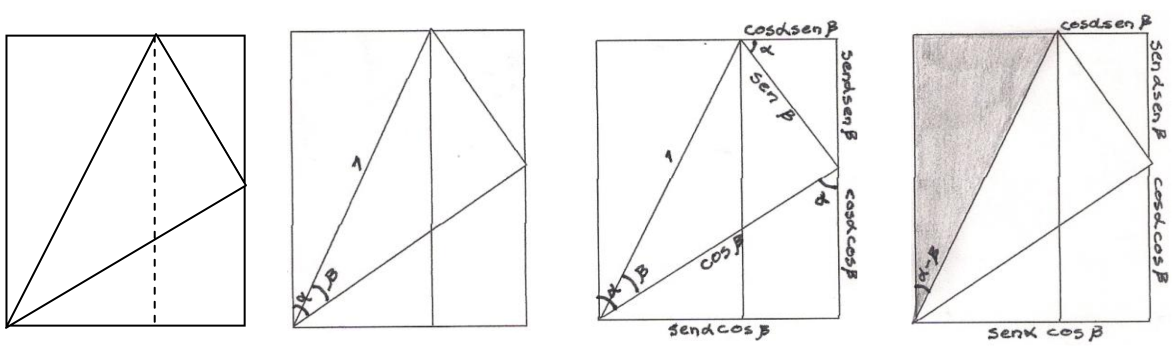
Seno y coseno de la diferencia de dos ángulos



$$\mathbf{Sen}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{sen\alpha cos\beta} - \boldsymbol{cos\alpha sen\beta}$$

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{cos\alpha cos\beta} + \boldsymbol{sen\alpha sen\beta}$$

Pasos para la construcción



(1) (2) (3) (4)

(1)Para la demostración comenzamos con la figura inicial.

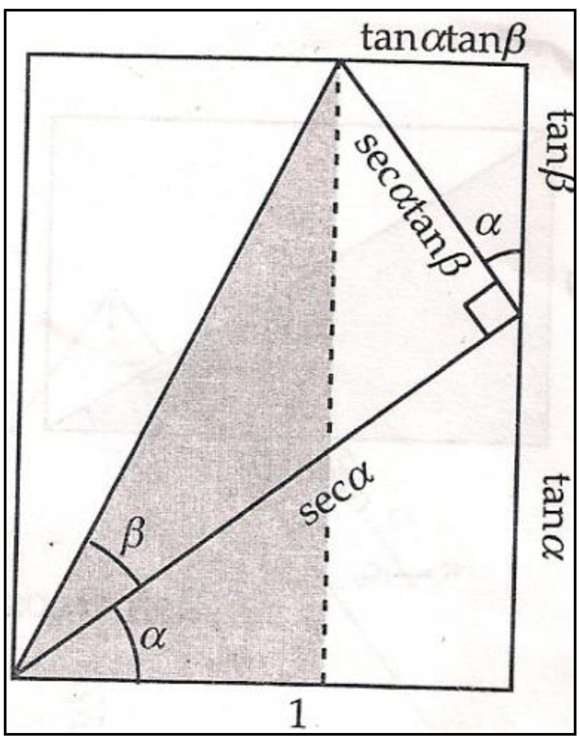
(2) Colocamos los ángulo α y β, y 1, de tal forma que se facilite la obtención de las relaciones para el ángulo (α-β).

(3) hallamos las relaciones en los triángulos rectángulos para los ángulos β y para el ángulo α en todos los triángulos rectángulos posibles.

(4) Identificamos el triangulo rectángulo que forma el ángulo (α-β). Y obtenemos las identidades de seno y coseno para la diferencia de dos ángulos.

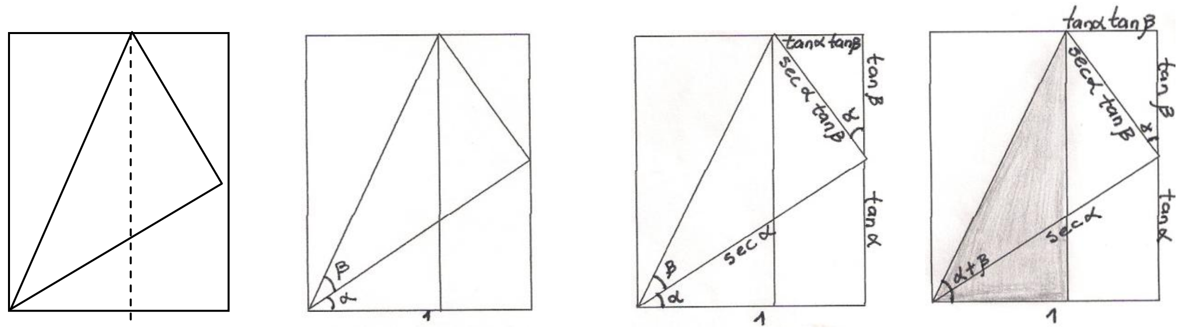
$\mathbf{Sen}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{sen\alpha cos\beta} - \boldsymbol{cos\alpha sen\beta}$ $\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{cos\alpha cos\beta} + \boldsymbol{sen\alpha sen\beta}$

Tangente de la suma de dos ángulos



$$\mathbf{tan}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \frac{\boldsymbol{tan\alpha}+\boldsymbol{tan\beta}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{tan\alpha tan\beta}}$$

Pasos para la construcción



(1) (2) (3) (4)

(1)-Comenzamos con la figura "una figura seis identidades".

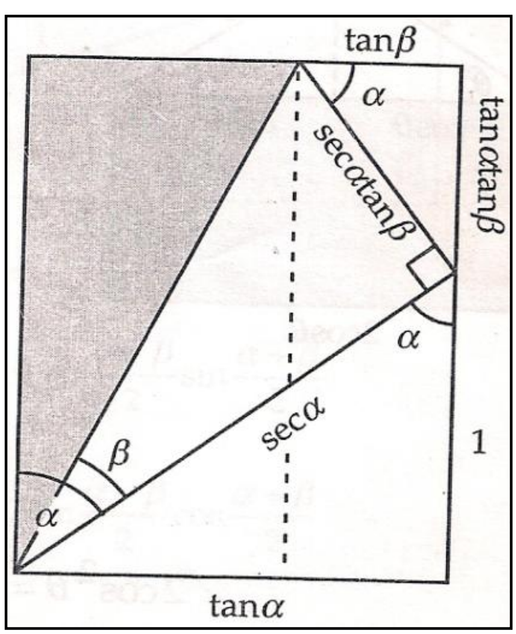
(2) colocamos los ángulos α y β, y como la relación de tangente es cateto opuesto sobre cateto adyacente, entonces, colocamos 1 en el cateto adyacente al ángulo α.

(3) Obtenemos las relaciones de los ángulos α y β en los triángulos rectángulos, incluyendo el ángulo α en el triangulo de menor área.

(4) Identificamos el triangulo rectángulo donde está el ángulo (α+β). Y obtenemos la identidad de tan (α+β):

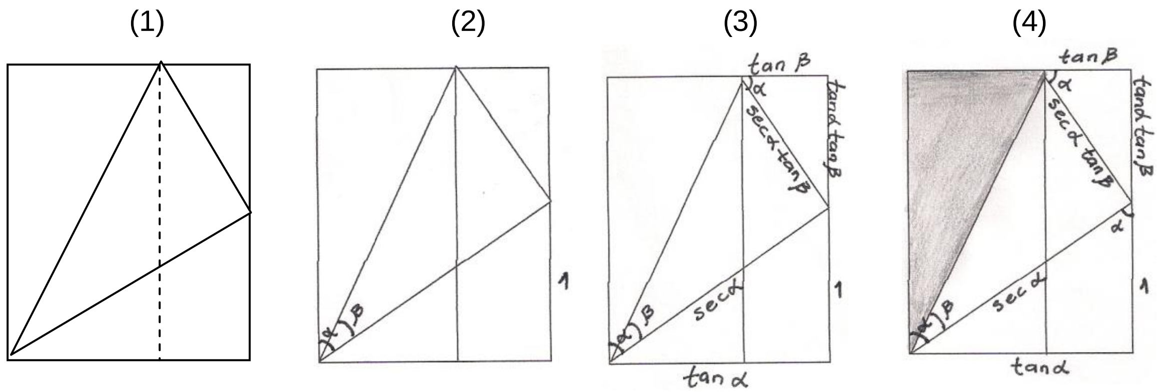
$$\tan(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \frac{\boldsymbol{tan\alpha + tan\beta}}{\mathbf{1} - \boldsymbol{tan\alpha tan\beta}}$$

Tangente de la diferencia de dos ángulos



$$\tan(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = \frac{\boldsymbol{tan\alpha - tan\beta}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{tan\alpha tan\beta}}$$

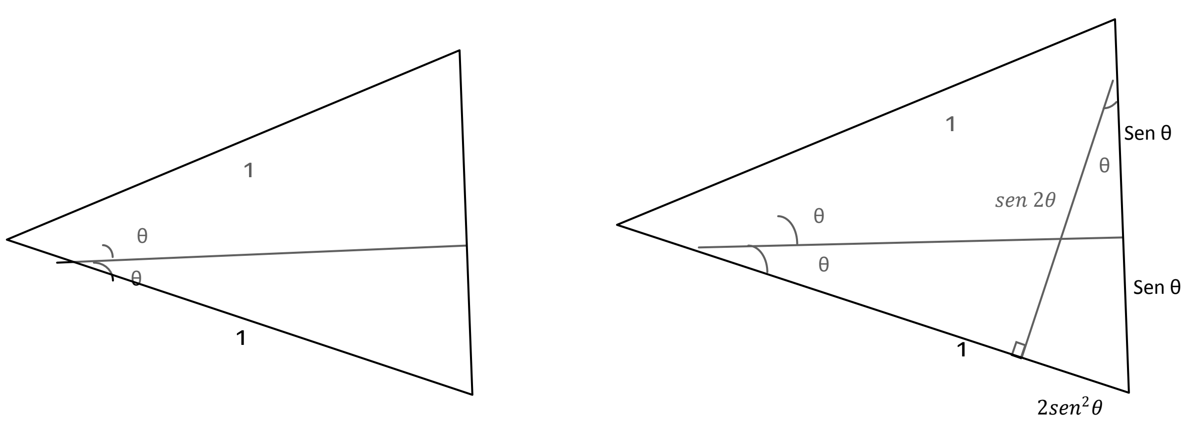
Pasos para la construcción



(1)Comenzamos con la figura "una figura seis identidades". (2) Colocamos los ángulo α y β de tal forma que sea fácil la deducción de las relaciones para el ángulo $(\alpha - \beta)$, y 1 en el cateto adyacente al ángulo α del triangulo rectángulo. (3) Hallamos las relaciones en los triángulos rectángulos para el ángulo β y para los ángulos α respectivamente. (4) Identificamos el triangulo rectángulo que forma el ángulo (α-β). Y Obtenemos la identidad de tangente para la diferencia de dos ángulos.

$$\mathbf{tan}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) = \frac{\boldsymbol{tan\alpha - tan\beta}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{tan\alpha tan\beta}}$$

Seno y coseno del ángulo doble



Como se ve en la grafica:

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{sen}\ 2\theta}{2\mathrm{sen}\ \theta}$$

De donde:

$$sen\ 2\theta = 2sen\theta\cos\theta$$

También podemos deducir que:

$$\cos 2\theta = 1 - 2sen^2\theta$$

Para la construcción del seno y coseno del ángulo doble, iniciamos con la figura que es un triangulo isósceles. Dividimos el triangulo isósceles en dos triángulos rectángulos, colocando 1 en la hipotenusa de cada triangulo y θ en el ángulo que fue dividido en dos. Hallamos los lados opuestos de θ en cada triangulo y trazamos la altura del triangulo isósceles tomando como base uno de los lados que mide 1, después hallamos los lados de los dos triángulos rectángulos que se forman con la altura para deducir las identidades del seno y coseno del ángulo doble.

DEDUCCION VECTORIAL DE LAS IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Las siguientes son otras demostraciones de las identidades trigonométricas utilizando álgebra vectorial, estas surgieron en el desarrollo de este trabajo como un aporte del profesor Ricardo Monturiol y fueron presentados también a los estudiantes.

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR A SOBRE UN VECTOR $B \neq 0$

Como se observa en la figura tB es la proyección (sombra) de A sobre B. El vector C completa el triángulo rectángulo con catetos tB, C y hipotenusa A. Además, $\mathrm{tB} + \mathrm{C} = \mathrm{A}$.

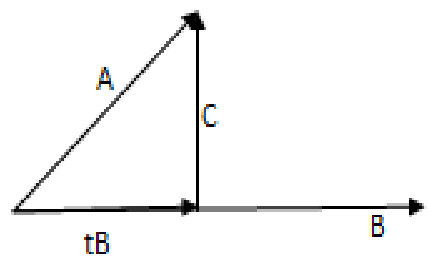


Fig. 8

Si multiplicamos escalarmente por B obtenemos:

$$B \cdot (tB + C) = A \cdot B$$

Con lo cual:

$$tB \cdot B + B \cdot C = A \cdot B$$

Pero $B \cdot C = 0$ ya que B es perpendicular a C, por lo tanto

$$tB \cdot B = A \cdot B$$

Y así

$$t = \frac{A \cdot B}{B \cdot B} = \frac{A \cdot B}{|B|^2}$$

Obteniéndose la proyección: por un lado $tB = \frac{A \cdot B}{|B|^2} \cdot B$ por otro lado, como se sabe de cualquier curso de vectores $tB = proy_B^A = \frac{A \cdot B}{|B|} \cdot B$ luego $t = \frac{A \cdot B}{|B|}$.

Ahora si $|A| = |B| = 1$ en la figura 8 y θ es el ángulo entre los vectores A y B, Se ve que:

$$cos\theta = \frac{t|B|}{|A|} = t$$

Utilizando $t = \frac{A \cdot B}{|B|}$ obtenemos que $\cos\theta = A.B$.

Ahora Consideremos los vectores unitarios $\mathrm{A} = (\cos\beta, sen\beta)$ y $\mathrm{B} = (\cos\alpha, sen\alpha)$ y $\theta = \beta - \alpha$

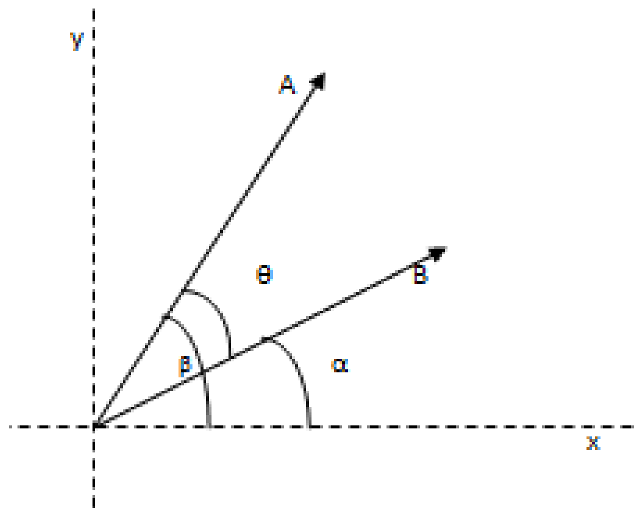


Fig. 9

Entonces:

$$\cos\theta = \cos(\beta - \alpha) = A.B = \cos\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$$

de donde obtenemos la identidad principal:

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha \qquad (1)$$

que es válida para todos los números reales $\alpha\ y\ \beta$.

Si es válido para α también lo es para $-\alpha$ con lo cual:

$$\cos\ \big(\beta - (-\alpha)\big) = \cos\beta\cos(-\alpha) + sen\ \beta\ sen\ (-\alpha)$$

de donde se obtiene:

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos\beta\cos\alpha - sen\ \beta sen\alpha. \qquad (2)$$

Puesto que coseno es par y seno es impar, como puede verse en las figuras 10 y 11.

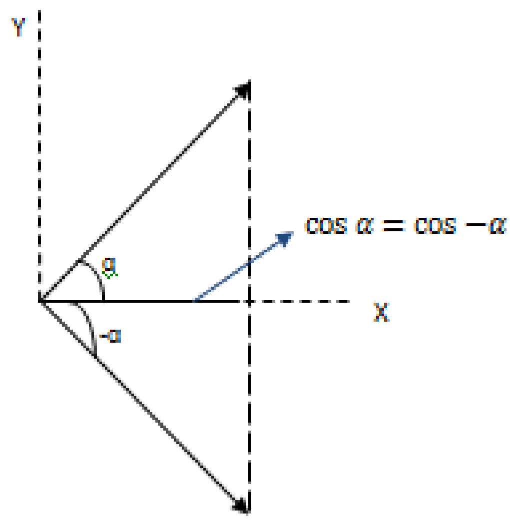


Fig. 10

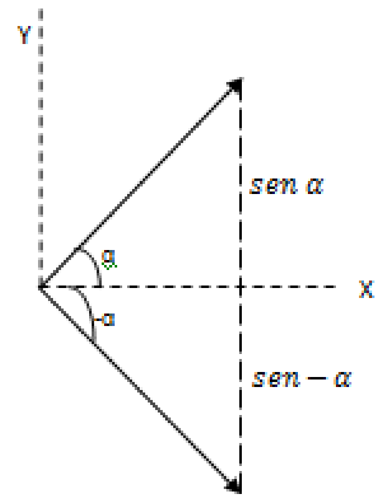


Fig. 11

Ahora:

$$\cos\left(\pi/2 - (\beta - \alpha)\right) = sen(\beta - \alpha)$$

Ver figura 12

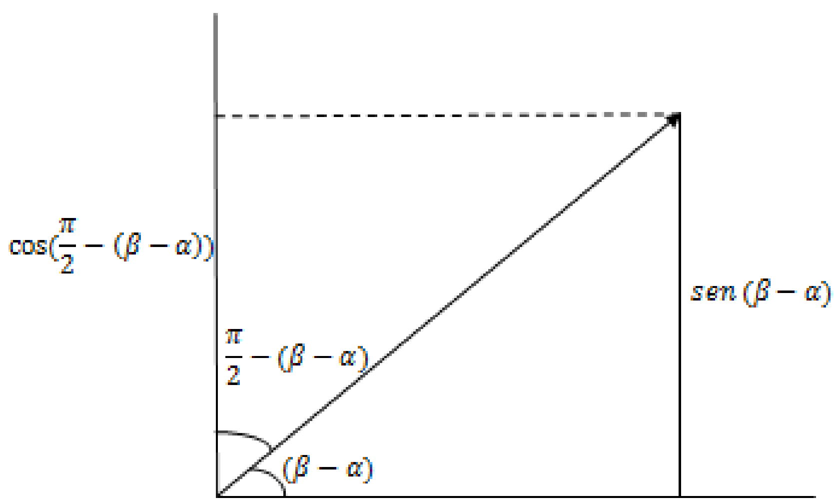


Fig. 12

Con lo cual

$$\operatorname{sen}(\beta-\alpha)=\cos(\pi/_2-(\beta-\alpha))=\cos((\pi/_2-\beta)+\alpha)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cos\alpha-sen\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)sen\ \alpha=$$

$$=sen\beta\cos\alpha-\cos\beta\ sen\alpha$$

Entonces:

$$\operatorname{sen}(\beta-\alpha)=sen\beta\cos\alpha-\cos\beta\ sen\alpha$$

Puesto que $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=sen\ \beta$ y $sen\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$

Ver figura 13

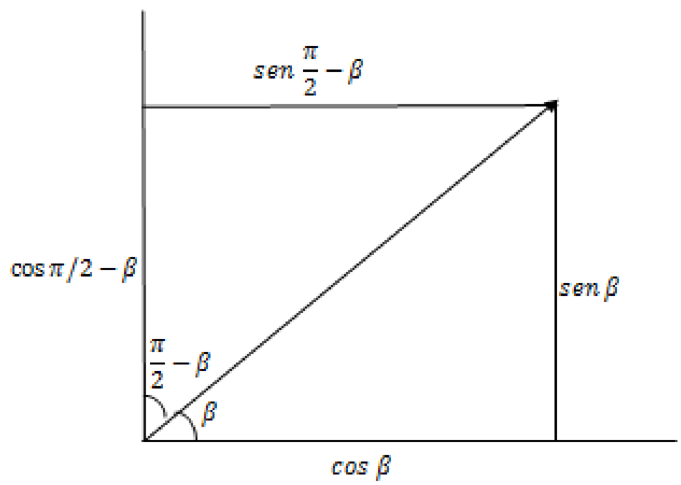


Fig. 13

Por lo que dé (1) obtenemos:

$$\operatorname{sen}(\beta-\alpha)=sen\beta\cos\alpha-\cos\beta\ sen\alpha \quad (3)$$

Como esto es válido para todo α,β que pertenece a los reales, entonces también lo es para $-\alpha$ y asi tenemos:

$$sen\ (\beta-(-\alpha))=sen\ (\beta+\alpha)=sen\ \beta\cos(-\alpha)-\cos\beta\ sen(-\alpha)$$

Y nuevamente como coseno es par y seno es impar entonces:

$$sen\,(\beta + \alpha) = sen\,\beta \cos\alpha + \cos\beta\ sen\,\alpha$$

Generándose (2), (3), y (4) a partir de (1).

4. LA EXPERIENCIA EN EL AULA

En este capítulo analizaremos cada una de las siete guías que aplicamos en clase con el objetivo de observar cómo influyen en el aprendizaje de los estudiantes. Estas se encuentran en los anexos.

4.1 Análisis de la Guía 1: prueba diagnóstica

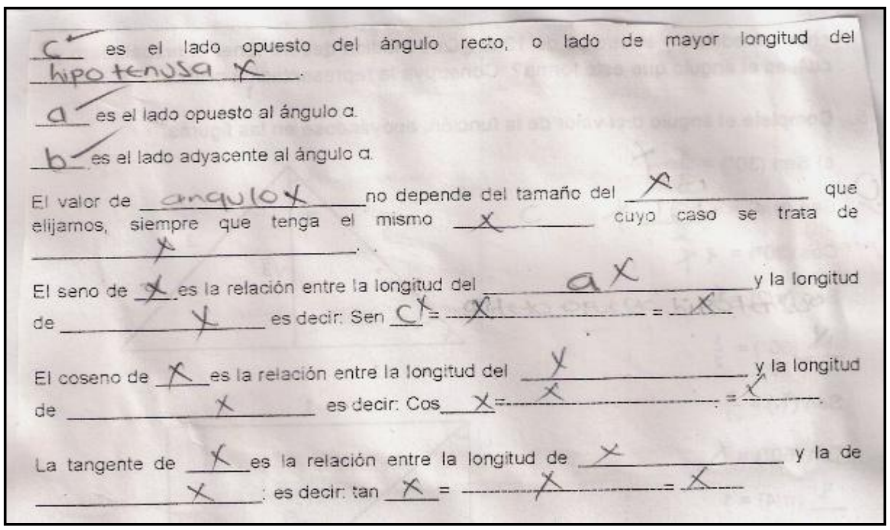
Para el inicio de nuestra investigación de aula, era importante tener conocimiento de los pres saberes que tienen los estudiantes y como asimilan los nuevos conceptos de trigonometría ya que siempre que se va a enseñar un tema nuevo se utilizan conceptos de temas anteriores y es importante saber si los alumnos los poseen. Para esto, el día 07 de abril de 2010 realizamos una prueba diagnóstica con los estudiantes del grado décimo B del instituto comunitario Minca, a los cuales se les pidió resolver un taller de 5 puntos relacionados con triángulo rectángulo, funciones trigonométricas y algunas aplicaciones de estos para resolver problemas.

El número de estudiantes evaluado fue de 25 y los resultados obtenidos no fueron muy satisfactorios; pues de una posible calificación de 10, diez estudiantes obtuvieron un puntaje inferior a 2, igual cantidad de estudiantes un puntaje entre 3 y 6, y tan sólo cinco un puntaje entre 7 y 9, siendo esta última la nota más alta. Esta guía fue calificada por solicitud de la profesora titular del curso ya que esta nota tendría un porcentaje para la nota final del periodo.

Aunque estas notas no fueron buenas, de ninguna manera son desmotivantes, por el contrario, son la muestra de que la mayoría de los estudiantes tienen dificultades con el aprendizaje y creemos que es una buena oportunidad para plantear nuestra estrategia “demostraciones sin palabras de las identidades trigonométricas fundamentales” para observar si ésta facilita el entendimiento de estos temas.

Pero no solo es importante saber si los estudiantes están bien o mal en cuanto a estos temas, sino también cuáles son sus principales falencias, pues ésto nos da una clara idea de los conceptos en los cuales debemos profundizar y las bases que debemos tener en cuenta para construir los talleres con los cuales vamos a trabajar posteriormente.

Ahora, analizaremos con mayor detenimiento la guía de la prueba diagnóstica (ver guía anexo 1),


c es el lado opuesto del ángulo recto, o lado de mayor longitud del hipotenusa.

a es el lado opuesto al ángulo α.

b es el lado adyacente al ángulo α.

El valor de angulo no depende del tamaño del ___ que elijamos, siempre que tenga el mismo ___ cuyo caso se trata de ___.

El seno de ___ es la relación entre la longitud del a y la longitud de ___ es decir: Sen c = ___ = ___

El coseno de ___ es la relación entre la longitud del y y la longitud de ___ es decir: Cos ___ = ___ = ___.

La tangente de ___ es la relación entre la longitud de ___ y la de ___: es decir: tan ___ = ___ = ___

Vemos que en el primer punto que constaba de completar los espacios en blanco teniendo en cuenta el concepto de triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras, y las identidades trigonométricas de seno, coseno y tangente, podemos observar que un gran número de estudiantes no logró completarlos correctamente, lo que demuestra que probablemente tienen un problema para interpretar y relacionar algunos conceptos de temas que ellos ya habían estudiado. Para ver un ejemplo específico, un alumno solo logró distinguir cual es el lado opuesto de un ángulo y cual el lado adyacente, pero tuvo dificultad para recordar en ese momento cómo se relacionan la hipotenusa y los lados de un triángulo rectángulo para calcular el seno, el coseno y la tangente de un ángulo en dicho triángulo.

Así mismo, aproximadamente otros 13 de los 25 estudiantes tuvieron este mismo inconveniente al desarrollar este punto; y caso contrario sucedió con los demás estudiantes, que lograron completar el ejercicio demostrando conocer los conceptos básicos de trigonometría.

El segundo punto fue muy similar al primero, pero con la diferencia que en este había que hacer un desarrollo numérico para encontrar el valor de uno de los dos lados de un triángulo rectángulo utilizando el teorema de Pitágoras, y con base a este dato completar las razones trigonométricas para seno, coseno y tangente de los dos ángulos no rectos de este triángulo. Para esto, se les daba como datos conocidos el valor de la hipotenusa y de uno de los dos lados y entonces tenían que aplicar el teorema de Pitágoras y despejar de la ecuación el valor del otro lado. Sólo 9 de los 25 estudiantes aplicó correctamente este teorema -tan importante en trigonometría-, otros nueve enunciaron bien el teorema pero se equivocaron al resolver la ecuación, y los otros 7 estudiantes ni siquiera copiaron correctamente el teorema. Además, para este punto se puede hacer dos observaciones, primero, que algunos estudiantes no pudieron resolver el ejercicio por el problema de no saber las fórmulas, y segundo, que los otros estudiantes no solucionaron este punto debido a que no saben cómo resolver ecuaciones.

El tercero y cuarto punto son dos problemas de aplicación de los conceptos citados anteriormente. En el tercero, se daba un ángulo y su respectivo cateto opuesto como datos conocidos y se pedía hallar el valor de la hipotenusa, es decir, aplicar el seno de dicho ángulo. En el cuarto punto, se daba la altura de dos edificios y la distancia horizontal que hay entre ellos y debían hallar la longitud y ángulo de un resbaladero que se iba a construir entre estos dos edificios, es decir, se conocía los dos lados de un triángulo rectángulo y la solución consistía en encontrar la hipotenusa y un ángulo, lo cual se hacía utilizando el teorema de Pitágoras y alguna de las razones trigonométricas.

En el tercer punto, ninguno de los estudiantes logró resolver el problema y en el cuarto solo dos lo resolvieron. Esto nos indica que a los estudiantes les hace falta analizar la forma en que pueden aplicar estos conceptos de trigonometría a situaciones de la vida cotidiana y se les dificulta leer problemas, extraer los datos importantes de este y construir una representación que les facilite el desarrollo del mismo.

En el quinto punto, el objetivo era hallar el valor de algunas razones trigonométricas para ciertos ángulos y se les daba dos figuras con los datos de los lados y ángulos necesarios para encontrar estos valores. En consecuencia, los estudiantes necesitaban conocer cómo relacionar el seno, el coseno y la tangente de ciertos ángulos, con sus respectivos lados. Este punto tan sólo lo resolvieron aceptablemente 7 estudiantes, lo que evidencia una vez más que estos conceptos de trigonometría, a pesar de ya haberlos visto, se les olvida con facilidad.

Después de analizar los cinco puntos, queda claro que, aunque todos los estudiantes tienen dificultades, no se puede generalizar y tratar de buscar una única solución, pues cada uno de los estudiantes piensa diferente, tiene diferentes conocimientos y su método de aprendizaje es diferente; por lo tanto, es importante conocer a cada uno de nuestros estudiantes, saber cuáles son sus fortalezas y debilidades y de esta forma poder contribuir de manera más eficiente en su aprendizaje.

Posterior a la realización y el análisis de la guía diagnóstica, interactuamos con los estudiantes durante una clase aclarando los diferentes temas en los que habían mostrado falencias, como lo fueron las relaciones trigonométricas en un triangulo rectángulo y el teorema de Pitágoras, temas sumamente importantes ya que se puede decir que son la base de la trigonometría. Además algunos alumnos participaron aportando ideas acerca de una posible forma de retener estas fórmulas y no olvidarlas. Ideas que consistían en estrategias memorísticas para poder recordar con facilidad las identidades, por ejemplo un alumno explicó que él se guiaba por la primera letra de cada palabra y de esta manera relaciona el seno, coseno y tangente con $so, ca\ y\ toa$ respectivamente, que significan: el seno con el opuesto, coseno con el adyacente y tangente con opuesto sobre adyacente, refiriéndose a los catetos del triangulo.

4.2 Análisis de la Guía 2: Relaciones trigonométricas y teorema de Pitágoras

En la siguiente clase, y con el ánimo de verificar que tanto se había avanzado con las explicaciones de los temas mencionados anteriormente, propusimos una segunda guía (ver guía anexo 2), la cual constaba de cuatro puntos que se fundamentaron en las razones trigonométricas, el teorema de Pitágoras y dos problemas de aplicación; conceptos importantes que los estudiantes debían manejar bien en esa parte del curso para asimilar con mayor facilidad los temas que estaban por verse.

Los resultados obtenidos –en comparación con los de la prueba diagnóstico- fueron considerablemente mejores, aunque algunos estudiantes continuaron con falencias, principalmente en la solución de problemas de aplicación; falencias que de alguna manera había que tratar de corregir, pues uno de los interrogantes de los estudiantes es: ¿Para qué sirve el estudio de la trigonometría?, y con la solución de estos problemas se pueden dar cuenta de su utilidad en varios campos de la ingeniería.

En esta segunda guía, propusimos dos problemas de aplicación, el tercero y cuarto punto, en donde los estudiantes debían leer el problema, analizarlo y establecer las relaciones trigonométricas correspondientes que podían utilizar para llegar a la solución. De aquí se puede rescatar que el desarrollo matemático no fue el mayor inconveniente, sino el planteamiento del problema. Es decir, un gran porcentaje de los estudiantes plantearon incorrectamente el ejercicio, pero utilizaron adecuadamente los conceptos trigonométricos necesarios para llegar a la solución. Claro está que es un inconveniente que había que tratar de resolver, pues la solución de problemas es un tema que se ha visto desde primaria y todo estudiante debe estar en capacidad de analizar, plantear y luego utilizar las operaciones necesarias para encontrar la solución a un problema. Por esta razón decidimos indagar diferentes trabajos de investigación sobre la resolución de problemas, y después de leer algunas teorías sobre cómo resolver un problema, optamos por la teoría de George Polya la cual presenta en su libro como plantear y resolver problemas[7].

Los otros dos puntos de esta guía estaban relacionados con el manejo de las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras. En el primero de ellos, se daban dos triángulos rectángulos, uno superpuesto en el otro, y el objetivo era hallar las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente para un ángulo común a los dos triángulos, y la hipotenusa del triángulo mayor por medio del teorema de Pitágoras. En el otro ejercicio se debía buscar el valor del coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante de un triangulo rectángulo a partir del valor del seno, que se daba como la fracción del cateto opuesto sobre la hipotenusa. Con este ejercicio se buscaba analizar la influencia que habían tenido las explicaciones de la clase anterior.

4.3 Análisis de la Guía 3: valor de las funciones trigonométricas

En la siguiente clase quisimos que los estudiantes aprendieran a deducir el valor de las funciones trigonométricas para ángulos de 30, 45, 60 y 90 grados, por medio de un cuadrado de lado 1 y un triangulo equilátero de lado 2. También que hicieran conversiones de grados a radianes y viceversa. Para esto hicimos una

[7] Ver teoría pág. ([24]).

breve explicación y les pedimos que desarrollaran una guía (ver anexo 3) que constaba de tres puntos.

El primer punto consistía en convertir unos ángulos dados en grados, a radianes, y se daban las respectivas equivalencias - de grado a radian y viceversa-. Como resultado se obtuvo que el total de los estudiantes solucionara de manera correcta este punto, lo que indica que saben manejar conversiones aplicando regla de tres y que probablemente no tuvieron problema porque no tenían que recordar fórmulas, solamente saber manejar herramientas que le serán útiles en el estudio de la trigonometría.

El segundo punto, algo similar a uno de los puntos de la prueba diagnóstico, buscaba que el estudiante determinara el valor de las razones trigonométricas de unos triángulos ubicados en tres figuras y el objetivo era conocer si los estudiantes podían recordar fórmulas, y aunque algunos de ellos presentaron falencias nuevamente, el resultado, en comparación con la prueba diagnóstico, fue muy alentador ya que la mayoría lo resolvió correctamente.

En el tercer punto, no sólo debían recordar fórmulas, sino analizar un problema relacionado con la vida real y tratar de utilizar la trigonometría con todos los conceptos vistos. De aquí se puede acotar que algunos estudiantes, aunque utilizaron bien los conceptos de trigonometría, fallaron en el momento de plantear la solución del problema, lo que demuestra que estos estudiantes presentan falencias en cuanto a temas vistos en otros cursos, pero en general los estudiantes resolvieron bien un gran porcentaje de la guía.

En consecuencia, el desarrollo de esta guía nos permitió analizar el avance que se puede lograr con una clase y a distinguir a aquellos estudiantes que volvieron a presentar falencias, pues la idea es tratar de corregir estas fallas y hacerles un seguimiento para apoyarlos y facilitar de alguna manera su comprensión frente a estos temas.

4.4 Análisis de la Guía 4: una figura seis identidades

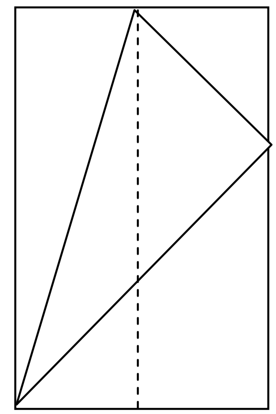


Fig. 8

Luego de haber visto las relaciones trigonométricas de un triangulo rectángulo y como obtener estas para los ángulos de 30°,45° y 60° utilizando el cuadrado de lado 1 y el triangulo equilátero de lado 2, el objetivo era trabajar con los estudiantes las identidades de seno y coseno para la suma y diferencia de dos ángulos. Para esto, formamos grupos de cinco estudiantes y a cada grupo les entregamos un pliego de papel con la figura. También les entregamos diferent[illegible]s con el valor de los ángulos y de los lados de los triángulos rectángulos que se forman en esta figura y les pedimos que los ubicaran en el gráfico según correspondiera. Las medidas o símbolos a ubicar eran: 1, α, β, cosβ, senβ, senαsenβ, cosαcosβ, senβcosα, senαcosβ.

Inicialmente los estudiantes se mostraron confundidos ya que no sabían cómo empezar a ubicar estas medidas, y por lo tanto hubo necesidad de darles la siguiente explicación: “La clave es obtener el seno y coseno de la suma de dos ángulos, para lo cual se ubican las medidas de una manera, y el seno y coseno de la diferencia de dos ángulos ubicando las medidas de forma diferente. Entonces, primero se ubican los ángulos α y β y el valor de 1 en las posiciones más convenientes.”

Además, a manera de ejemplo, les mostramos donde ubicar los ángulos α y β y les dijimos que el valor de 1 lo ubicaran en la hipotenusa del triangulo rectángulo que se forma con la suma de estos dos ángulos y que de esta manera se podía obtener el seno y coseno de esta suma. Con estas indicaciones, los estudiantes lograron ubicar las medidas faltantes sobre el grafico y dedujeron correctamente las identidades de seno y coseno para la suma de dos ángulos.

Después, les pedimos hallar las identidades de seno y coseno para la diferencia de dos ángulos con el objetivo de que trataran de ubicar las medidas y deducir la fórmula sin ayuda, pero nuevamente tuvieron dificultad para ubicar los ángulos α y β, por lo que hubo necesidad de asesorarlos y, una vez ubicados convenientemente estos ángulos, vieron con mayor claridad el gráfico y lograron deducir con éxito estas dos identidades.

Posteriormente les recalcamos la importancia de esta figura, pues haciéndole los ajustes necesarios podemos obtener cuatro identidades con sólo saber identificar las relaciones que hay en un triángulo rectángulo, es decir, los conceptos básicos de trigonometría que son más fáciles de recordar.

Con el ánimo de reforzar estas deducciones, diseñamos una guía (ver anexo 4) en la cual los estudiantes debían construir la demostración sin palabras de estas identidades, pero esta vez de manera individual, y con estos resultados solucionar algunos ejercicios. El primer punto consistía precisamente en deducir las identidades de seno y coseno para la suma y diferencia de dos ángulos por medio de la construcción de la misma gráfica que se trabajó anteriormente en grupos.

Después de deducir dichas identidades, se pedía en el segundo punto calcular el valor del seno y coseno de los siguientes ángulos: 15, 75, 105, 135, 210 y 315 grados. Este cálculo debían hacerlo sin utilizar calculadora ya que en clases anteriores se había visto cómo calcular el seno y el coseno de los ángulos de 30, 45, 60 y 90 grados con el uso de un triángulo equilátero de lado 2 y un cuadrado de lado 1, y sumando o restando parejas de estos ángulos se podían obtener los valores que se necesitaban para solucionar el segundo punto junto con el uso de las identidades ya deducidas en el primer punto. No todos los estudiantes desarrollaron correctamente el ejercicio, pero si la gran mayoría. Algunos estudiantes nos pidieron asesoría argumentando que no habían estado muy atentos cuando se realizó el trabajo en grupo y por tanto se les dificultaba deducir las fórmulas, pero con las explicaciones lograron completar las deducciones y realizar correctamente el ejercicio, pues el cálculo de seno y de coseno para los ángulos de 30, 45, 60 y 90 grados sí recordaron cómo hacerlo.

4.5 Análisis de la Guía 5: Una figura seis identidades

En la siguiente clase diseñamos una guía (ver anexo 5) para deducir las identidades de la tangente de la suma y diferencia de dos ángulos a partir de la gráfica: “una figura seis identidades”, de forma similar a como se hizo con el seno y el coseno, pero cada estudiante trabajando de manera individual con el objetivo de observar si ellos habían comprendido cómo obtener las identidades a partir de esta figura.

El contenido de esta guía eran dos puntos, el primero era la deducción de estas identidades a partir de la figura, y el segundo, calcular la tangente de los siguientes ángulos: 15, 30, 60, 75, 105 y 135 grados.

En el primer punto los estudiantes notaron fácilmente que debían empezar a trabajar con el ángulo α y la relación trigonométrica de la tangente, ya que el cateto adyacente era igual a 1 y esto facilitaba encontrar el valor de todos los lados del triángulo. Similarmente lo hicieron para el triángulo donde estaba el ángulo β y el triángulo rectángulo de menor área, hasta obtener el valor de los lados necesarios para deducir la relación de la tangente del ángulo (α + β).

Esta identidad fue deducida por la totalidad de los alumnos aunque algunos necesitaron de cierta orientación, por ejemplo, en el momento de hallar la hipotenusa del triángulo donde estaba el ángulo α, algunos estudiantes optaron por trabajar con el coseno relacionando el cateto adyacente, que es igual a 1, con la hipotenusa, pero no notaron que era más conveniente trabajar con la secante, ya que relaciona estos mismos lados pero con la diferencia que el denominador queda igual a 1.

Para hallar la tangente de la diferencia de dos ángulos, hubo mayor dificultad ya que necesitaban hacer algunas traslaciones de ángulos para comenzar a hallar los lados de los triángulos y ellos no se acordaban o al momento de hacerlo, lo hacían mal. En este punto necesitaron más orientación principalmente en conceptos geométricos para la realización de las traslaciones de los ángulos α y β. Pero después de esto lograron hallar los respectivos lados de los triángulos rectángulos de la figura para deducir la identidad.

Para la realización del segundo punto, donde debían obtener los valores para algunos ángulos los estudiantes recordaron cómo hacerlo ya que en la guía anterior lo habían hecho para seno y coseno, entonces utilizando la identidad de tan (α-+β) y tan(α–β) y apoyándose en valores ya conocidos lograron obtener los valores en su totalidad la mayoría de los alumnos del curso.

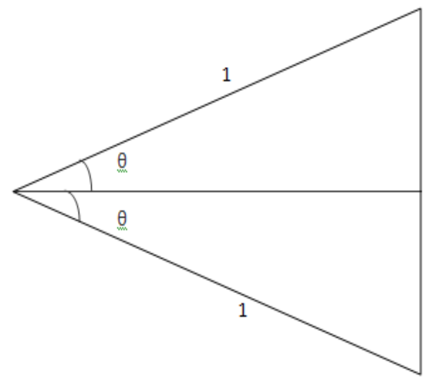


Fig. 9

Posterior a la realización de la guía y una pequeña socialización, se presento la siguiente figura, de donde se puede deducir o demostrar las identidades de seno y coseno del ángulo doble. Al igual que con la figura anterior buscamos que los alumnos trataran de deducir la identidad, obteniendo los lados de cada triangulo, pero a diferencia del anterior en ésta se debía trabajar con un triangulo isósceles por lo que tocaba utilizar la ley del seno y la ley del coseno para la deducción de la identidad.

En este paso ningún estudiante logro deducirla, la mayoría ni siquiera recordaba las leyes y los otros no sabían utilizarlas en la figura, por lo que se debió trabajar en forma grupal hasta obtener las identidades de seno y coseno para el ángulo doble (sen2θ=2senθcosθ y cos2θ=1-$2sen^2\theta$). En esta guía también quisimos que los estudiantes utilizaran la identidad para hallar algunos valores como son sen 120°, sen70°, cos150° y cos300°, aplicado la identidad apropiada, por ejemplo: sen 120°= sen(2)(60º)= 2sen60·cos60= $2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pero solo algunos estudiantes lograron hacerlo, entonces decidimos que uno de ellos le explicara a sus compañeros como lo había realizado y él lo hizo de una forma clara y acertada ya que los compañeros que no lograron hacerlo anteriormente, entendieron el primero y así pudieron realizar los otros tres ejercicios.

4.6 Análisis de la Guía 6: Resolución de problemas

En la siguiente clase quisimos darles a los estudiantes las pautas para resolver problemas basándonos en el libro “como plantear y resolver problemas” de G. Polya[8], ya que en las guías anteriores la mayoría de ellos no logro comprender, plantear y dar solución a los problemas de aplicación propuestos.

Para esto iniciamos la clase preguntándoles: “¿Qué es para ustedes un problema?” y algunas de sus respuestas fueron: un reto que trae cosas positivas y negativas, buscar la respuesta a una inquietud, un obstáculo en la vida, proceso para resolver una pregunta, entre otras. Estas respuestas fueron debatidas por todo el grupo y se logro ajustar una sola definición: “no tener respuesta frente a una situación dada”.

Posteriormente, socializamos las cuatro pautas para resolver problemas que consisten en:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecución del plan.
4. Examinar la solución obtenida.

Luego, y como una forma de poner en práctica estas pautas, se propuso una guía (ver anexo 6) de resolución de problemas aplicando las identidades trigonométricas y la ley de senos y cosenos.

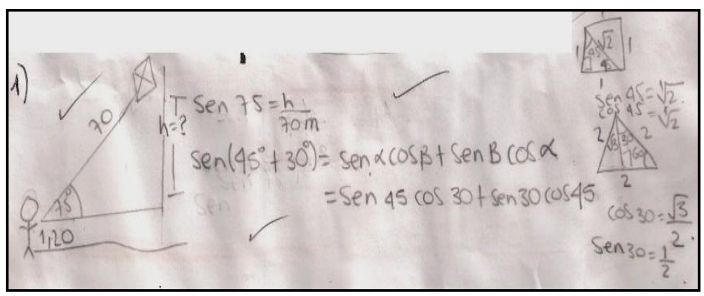
El contenido de esta guía fueron cinco problemas, los cuales hubo necesidad de repartirlos para ser solucionados en cinco grupos de cinco estudiantes cada uno,

[8] IDEN. 6

ya que el tiempo de duración de la clase no era suficiente, para que cada grupo solucionara todos los problemas.

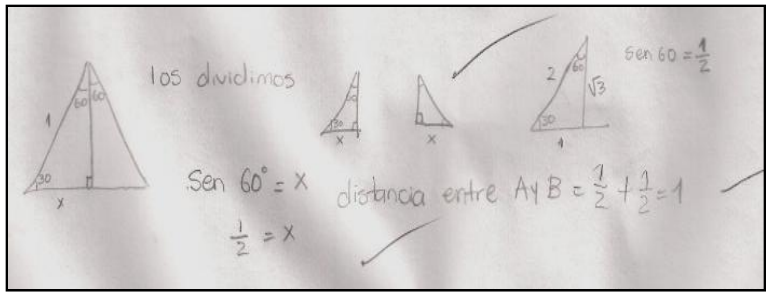
Durante este desarrollo logramos observar que los estudiantes seguían en orden las pautas para resolver problemas que se les había explicado anteriormente. Se les vio participar activamente, intercambiaron ideas para llegar al planteamiento del problema y por lo general cada estudiante respaldo sus ideas con argumentos matemáticos bien fundamentados, aunque hubo estudiantes que no lograron desarrollar los ejercicios por cuenta de ellos.

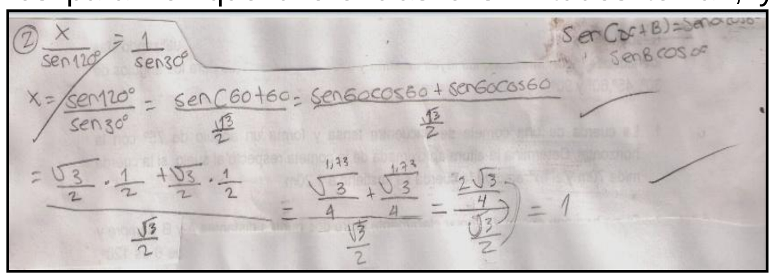
El primer problema consistía en hallar la altura a la que se encontraba una cometa que se sostenía a 1.20 m del suelo, tenía una longitud total de 70m y formaba un ángulo de 75° con la horizontal. Para esto, los integrantes del grupo leyeron el enunciado conjuntamente, comprendieron los datos conocidos y la incógnita o pregunta que proponía el ejercicio. Posterior a esta lectura y análisis, realizaron un grafico para modelar físicamente, las características del problema, lo cual les facilito la comprensión del desarrollo, que debían seguir para llegar a la solución.



El gráfico obtenido fue un triángulo rectángulo con hipotenusa igual a 70m, un ángulo de 75° y su respectivo lado opuesto que era la incógnita o dato que se podía hallar. De inmediato los estudiantes notaron que para encontrar la solución debían hallar el seno de 75°- Sin utilizar calculadora- y multiplicarlo por la hipotenusa. En esta parte presentaron dificultad y hubo necesidad de asesorarlos haciéndoles ver que podían hallar el seno de 30° y de 45° utilizando el cuadrado del lado 1 y el triangulo de lado 2 que se había visto anteriormente, y con estos dos valores, hallar el seno de 75º como el seno de la suma de 30°+45°.De esta manera el grupo completó la solución del primer problema.

El grupo que le correspondió el segundo punto trabajó de manera diferente. Ellos decidieron resolver el ejercicio individualmente y luego socializar los cinco desarrollos para ver que diferencias o similitudes tenían; y efectivamente no todos lo hicieron con el mismo método; dos utilizaron triángulos rectángulos y los otros tres la ley de senos. Esto les pareció muy interesante, pues después de socializar las dos clases de desarrollo, y de verificar que se obtuvo el mismo resultado, llegaron a la conclusión de que no siempre se puede utilizar un solo método para resolver un problema y que es importante conocer la diferentes herramientas matemáticas para aplicar la que sea más conveniente según la clase de problema.





En la solución del tercer problema, los estudiantes del correspondiente grupo presentaron dificultad para comprenderlo y representarlo gráficamente, por lo que hubo necesidad de explicarles. Después, en cuanto al desarrollo, utilizaron correctamente la ley de seno y las identidades de seno y coseno de la suma y diferencia de dos ángulos, las cuales dedujeron fácilmente con las figuras geométricas “demostraciones sin palabras”, vistas en clases anteriores.

En el cuarto problema había que hallar la longitud de uno de los lados de un triangulo isósceles, lo cual podía realizarse mediante el uso de la ley del seno, pues se conocía el valor de la base y del ángulo que ésta forma con los dos lados iguales de dicho triangulo. Este ángulo se daba en radianes, lo que en principio les represento cierta confusión a los estudiantes y por lo tanto optaron por convertirlo a grados, pues les es más familiar trabajar en este sistema.

En el quinto problema, al igual que en el anterior, los ángulos se daban en radianes y el enunciado del problema resulto ser confuso, por lo tanto, los estudiantes no lograron plantear la solución. Luego de ciertas aclaraciones que les dimos, notaron que estaban fallando y así continuaron con el desarrollo. Además, les pedimos hacer las operaciones con los ángulos en radianes con el fin de practicar este sistema. Finalmente lograron encontrar la solución.

De esta manera, los cinco grupos solucionaron el total de los problemas y el tiempo que restaba de clase estaba destinado para la socialización en el tablero por parte de cada uno de los grupos. Así, fue pasando grupo a grupo a presentar la solución y a resolver las dudas que se generaban en sus compañeros.

Finalmente, los estudiantes estuvieron de acuerdo con nosotros de que es muy importante saber deducir las identidades trigonométricas por medio de la figura. Además es muy útil obtener el valor de las identidades para los ángulos de 30, 45, 60, y 90 grados, gráficamente y sin necesidad de utilizar la calculadora, en caso tal de no tenerla.

4.7 Análisis de la Guía 7: Deducción vectorial de las identidades de la suma y diferencia de ángulos

La siguiente y última clase, quisimos mostrarle a los estudiantes que hay otras formas de deducir o demostrar las identidades trigonométricas estudiadas en clases anteriores. Además, quisimos pedirle su opinión acerca de cómo les había parecido el proceso que llevamos a cabo para la enseñanza de las identidades trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos y el ángulo doble por medio de las demostraciones sin palabras.

Esta deducción consistía en utilizar un método vectorial, por lo que iniciamos la clase recordándole la formulas vectorial del seno y coseno del ángulo entre dos vectores, el producto cruz de vectores y el producto escalar con el objetivo de que intentaran deducir la identidad del seno y del coseno de la suma y diferencia de dos ángulos resolviendo las operaciones con los datos de las representaciones graficas de los vectores en la guía (ver anexo 7).

Después de cierto tiempo notamos que algunos estudiantes no habían comprendido el objetivo del ejercicio y otros no lograron resolver las operaciones, aunque tenían una idea de qué era lo que debían realizar. Al intercambiar opiniones ellos expresaron que las operaciones con vectores se les dificultaban, unos porque no recordaban y otros aseguraron no haberlos visto.

Optamos entonces por hacer el ejercicio en el tablero interactuando con los estudiantes quienes hacían preguntas frecuentemente sobre todo al realizar el producto cruz de los vectores de la figura 2 ya que para poder resolverlo se debía trabajar en el espacio tridimensional, por lo que allí está definido este producto.

Luego de deducir estas formulas, el segundo punto de la guía consistía en un problema de aplicación de conceptos vistos en clases anteriores, conceptos que algunos recordaron fácilmente y otros dedujeron a través de las figuras. Finalmente el total de los estudiantes logró solucionar el problema.

Reflexión de los estudiantes acerca de la experiencia en el aula

Al final de la guía, se presento un punto donde se les pedía a los estudiantes dar una opinión acerca del trabajo que realizamos conjuntamente sobre el proceso de aprendizaje de la trigonometría. Para esto realizamos las siguientes tres preguntas:

a) ¿Que opinión tiene acerca de las dos formas de deducir las identidades trigonométricas? A lo que la mayoría de estudiantes respondió: que eran muy interesantes, que para todos los temas de matemáticas debería buscarse estas formas de deducción que facilitan el aprendizaje, también algunos estudiantes hicieron una comparación entre las dos formas de deducción y aunque dijeron que era más sencillo por medio de la figura, no descartaron la otra –vectorialmente- porque también es sencilla.

b) A usted le parece más conveniente aprenderse las formulas de memoria o aprender a deducirlas de alguna manera?. Para esta pregunta destacamos dos clases de respuesta: algunos escribieron que eran buenos para memorizar formulas por lo tanto preferían aprendérselas. Otros escogieron como mejor opción la deducción de la formula por medio de la figura ya que es más fácil recordar esta cuando se trata de una memoria a largo plazo.

c) ¿Cómo le pareció el desarrollo de las clases? Sintetizando las respuestas en una general podemos resumir que los estudiantes expresaron que las clases fueron didácticas y enriquecedoras, que la forma dinámica de trabajar les hizo ver la materia más sencilla y se refirieron al método de las demostraciones sin palabras como un método más didáctico y productivo para el aprendizaje de esta área de la matemática.

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES

Al inicio de nuestra investigación, nos planteamos el interrogante: ¿Cómo influyen las demostraciones sin palabras de las identidades trigonométricas en el aprendizaje de la trigonometría?, y para tratar de responderla, hicimos un estudio de caso con estudiantes de decimo grado desarrollando siete guías con múltiples actividades.

Las conclusiones que presentamos a continuación, son el resultado de esta experiencia.

- ✓ Se notó una adecuada acogida a las deducciones de las identidades de seno y coseno para la suma y diferencia de dos ángulos y del ángulo doble, la gran mayoría de los estudiantes logró entenderlas, se mostraron atentos, motivados y llegaron correctamente a la solución del problema.

- ✓ Las demostraciones sin palabras facilitan el proceso de aprendizaje de los estudiantes ya que les muestra paso a paso la deducción de las fórmulas y esto les permite manejar los conceptos con mayor destreza.

- ✓ En trigonometría como en otras ramas de la matemática, se pueden utilizar diferentes métodos u operaciones para llegar a la solución de un ejercicio. Así mismo hay muchos métodos tanto de enseñanza como también de aprendizaje y la idea es buscar que la mayoría de los estudiantes se acomode a dicho método.

- ✓ Para el entendimiento de los temas es importante captar la atención y el interés de los estudiantes, por lo que es importante hacer diferentes actividades en la clase para que esta no se vuelva rutinaria y aburrida.

- ✓ El diseño de las guías de trabajo deben realizarse con mucho análisis buscando incluir los temas vistos, el grado de dificultad adecuado y el tiempo justo para realizar las actividades.

- ✓ Aunque se lograron buenos resultados con la implementación de este método, no todos los estudiantes se acogieron a él ya que algunos prefieren memorizar formulas o utilizar otros métodos. Se debe entonces hacer un seguimiento diferente con estos estudiantes.

- ✓ Las deducciones de las identidades del seno y el coseno de la suma y diferencia de dos ángulos por medio del producto cruz y el producto escalar de dos vectores resultó muy complicado para los estudiantes, pues su desarrollo les exige habilidad con las operaciones vectoriales y se evidenció que este tema tiene un alto grado de dificultad para los estudiantes ya que no los han estudiado con suficiente profundidad.

- ✓ Durante el desarrollo de la guía nº 5, fue necesario indicarles a los estudiantes la ubicación de los ángulos en la grafica para que continuaran solucionando el ejercicio. Esto debimos haberlo hecho cuando diseñamos la guía, pues pedirle a los estudiantes que los ubicaran era exigirles un grado de dificultad que aún no estaban en capacidad de realizar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] CARREÑO Z, José Julián. Una Revisión de los fundamentos de la trigonometría. (2003) Universidad Industrial de Santander, Colombia.

[2] CARVAJALINO O, Mandius y PARADA A, Viviana Andrea. Uso de talleres creativos alrededor de aplicaciones de las funciones trigonométricas como actividades de refuerzo para educandos de decimo grado. (2007). Monografía de grado Universidad Industrial de Santander, Colombia.

[3] CHAVEZ, H. & CASTIBLANCO, S. (2000). Matemáticas 10. Bogotá: Editorial Santillana Siglo XXI.

[4] DIAZ B, Frida y HERNANDEZ R, Gerardo. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. (1998) McGRAW-HILL México.

[5] HIPARCO Y LA TRIGONOMETRIA. Tomado: http://www.astronomia.com/biografias/hiparco.htm.

[6] HISTORIA DE MESOPOTAMIA. Tomado: http:www.tayabeixo.org/historia/his_mesopotamia.htm.

[7] LA ASTRONOMIA EN GRECIA. Tomado: www.cam.educaciondigital .net.

[8] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1998). Lineamientos Curriculares Matemáticas. Editorial Magisterio. Bogotá, Colombia.

[9] MONTIEL E, Gisela. Construcción social de la función trigonométrica. (2006). CICATA del IPN México.

[10] NELSEN, Robert, B. *Proofs without Words II: More exercises in visual thinking,* The Mathematical Association of America Washington. USA, 2000.

[11] PERALTA A, María y RODRÌGUEZ G, Gladys Soraya. El lenguaje y la trigonometría: una mirada desde el planteamiento y la resolución de problemas. (2008) Monografía de grado Universidad Industrial de Santander, Colombia.

[12] VILCHEZ G, Jesús. La enseñanza de las funciones trigonométricas en el grado quinto de educación superior. (2005). Biblioteca Pontificia Universidad Católica Del Perú.

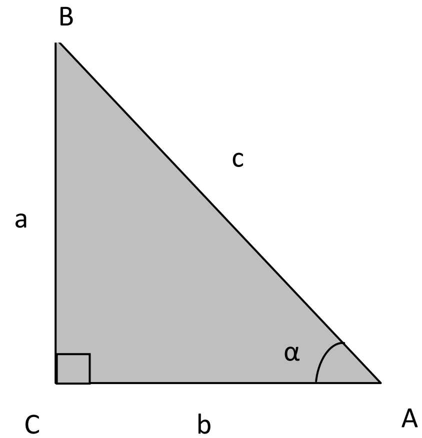
ANEXOS

GUIA 1

Prueba diagnostica

NOMBRE: ____________________________________ _GRADO: ________ FECHA: __________

1. Utilizando los símbolos que aparecen en el triangulo rectángulo o las palabras que aparecen en el listado complete los espacios en blanco del siguiente texto.



Ángulo
cateto adyacente
Triángulos semejantes
Triangulo rectángulo
Hipotenusa
Funciones trigonométricas
Cateto opuesto

_____ es el lado opuesto del ángulo recto, o lado de mayor longitud del _________________________.

_____ es el lado opuesto al ángulo α.

_____ es el lado adyacente al ángulo α.

El valor de _____________________no depende del tamaño del _________________ que elijamos, siempre que tenga el mismo _____________ cuyo caso se trata de ______________________________.

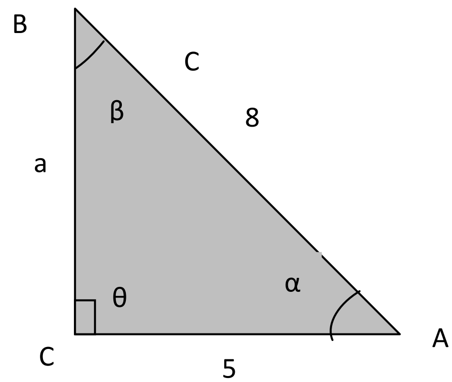
El seno de ____es la relación entre la longitud del _________________________y la longitud de ___________________ es decir: Sen ___ = ----------------------------- = ----------.

El coseno de _____es la relación entre la longitud del _____________________ y la longitud de _______________________ es decir: Cos_____=------------------------------- = ------------.

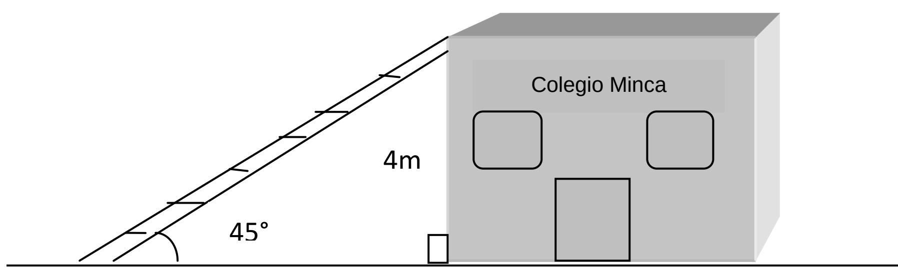
La tangente de ______es la relación entre la longitud de ___________________ y la de _____________________: es decir: tan _____= -----------------------------= ----------

2. Halle el valor de a y complete la tabla basándose en el triangulo ABC.

Función Trigonométrica	Relación Numérica
Sen (α)	
	5/8
	5/8
Tan (β)	
Tan (α)	
Cos (β)	



3. En el colegio Minca sede D un obrero necesita subir al techo para hacer un arreglo, si sabemos que la altura del colegio es de 4m y que la escalera forma un ángulo de inclinación de 45 grados con el suelo. ¿Cuál es la medida de la escalera que llega justo al borde del techo?

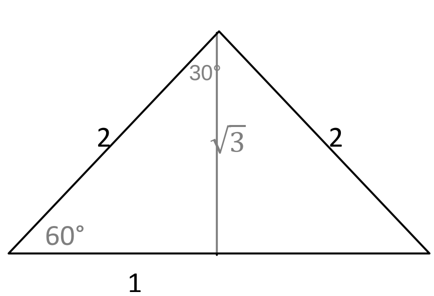


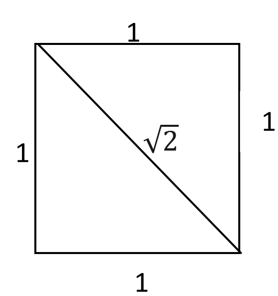
4. Si se va a construir un resbaladero desde la punta de un edificio a otro, y sus medidas son: 48m el más grande y 32m el más pequeño. La distancia horizontal entre un edificio y el otro es de 12m. ¿Qué medida deberá tener el resbaladero y cuál es el ángulo que este forma? Construya la representación grafica.

5. Complete el ángulo o el valor de la función, apoyándose en las figuras.

a) Sen (30°) b) Sec (π/4 c) Cos (30°) d) Sen (π/2) e) ___ (60°) = $\frac{1}{2}$

f) Sen ( ) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ g) Tan (60°) h) _____ (π/4) = 1 i) Sen ( ) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ j) Cos (45°) =

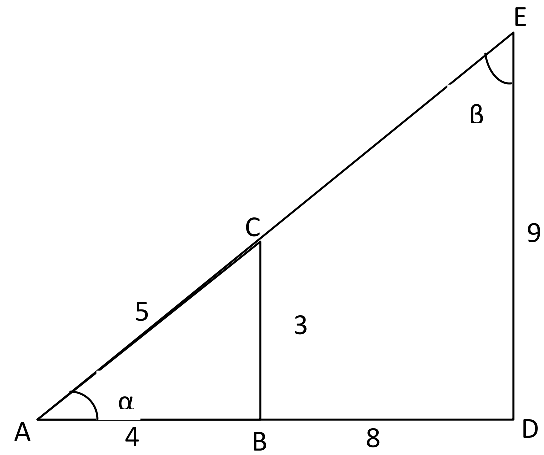




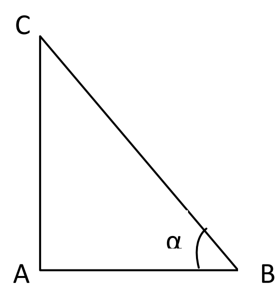
GUIA 2

Relaciones trigonométricas y teorema de Pitágoras

1. Determinar los valores de senα, cosα, y tanα. En los triángulos ABC y ADE.



2. Si senα = $\frac{8}{17}$ en el triangulo ABC, encuentra el valor de las otras funciones trigonométricas (Cos, tan, Sec, csc, ctg) en ABC.

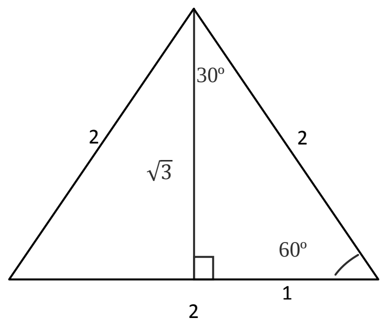


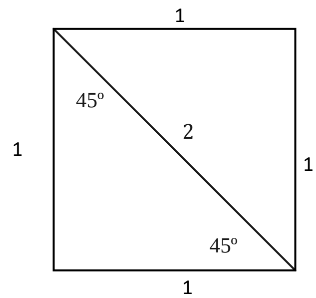
3. Desde un punto A en la orilla de un rio se ve un árbol justo enfrente. Si caminamos 150 metros rio abajo, por la orilla del rio, llegamos a un punto B desde el que se ve el árbol formando un ángulo de 15º con nuestra orilla. Calcule la anchura del rio.

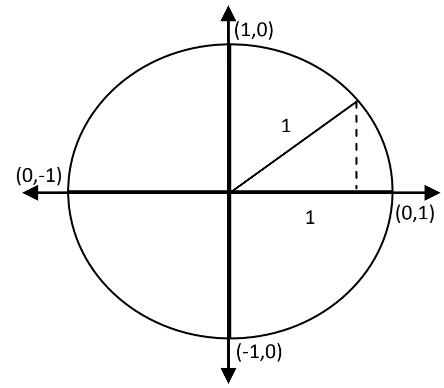
4. Un edificio proyecta una sombra de 150 m, cuando el sol forma un ángulo de 20º sobre el horizonte. Calcula la altura del edificio.

GUIA 3

Valor de las funciones trigonométricas







Debido a su importancia en las aplicaciones posteriores, es buena idea memorizarlas o saber encontrarlas rápidamente usando triángulos rectángulos o por medio de la circunferencia de centro (0,0) y radio 1.

Para obtener la medida en radianes de cualquier ángulo conociendo su medida en grados sexagesimales y recíprocamente, podemos utilizar las siguientes relaciones:

$$180^{o} = \pi \text{ radianes}$$

$$1^{o} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes} \approx 0{,}01745 \text{ radianes (con } \pi = 3{,}14159)$$

$$1 \text{ radián} = \left(\frac{180}{\pi}\right) \text{ grados} \approx 57^{o}17'45'' \approx 57{,}296^{o} \text{ (con } \pi = 3{,}14159)$$

1. Con la ayuda de las relaciones anteriores encontrar la medida en radianes de θ.

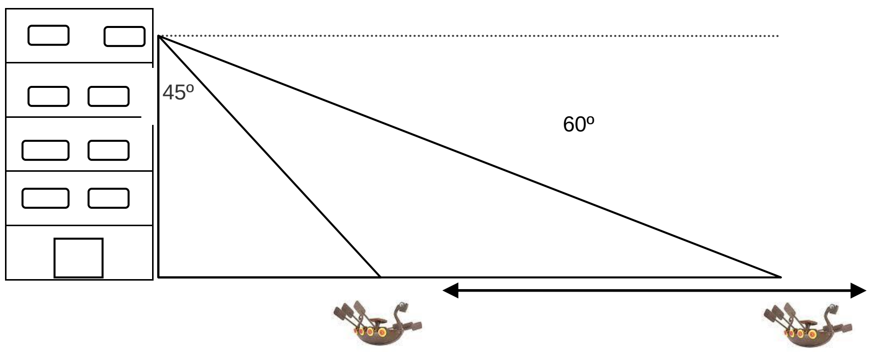
   a) a) si θ = 150º b) si θ = 45º c) si θ = 135º d) si θ = 210º
   e) si θ = 270º f) si θ = 360º g) si θ = 450º h) si θ = 30º

2. Utilizando las figuras anteriores completa el cuadro:

ángulo	Sen	Cos	Tan	Sec	Csc	ctg
0						
π/6						
π/4						

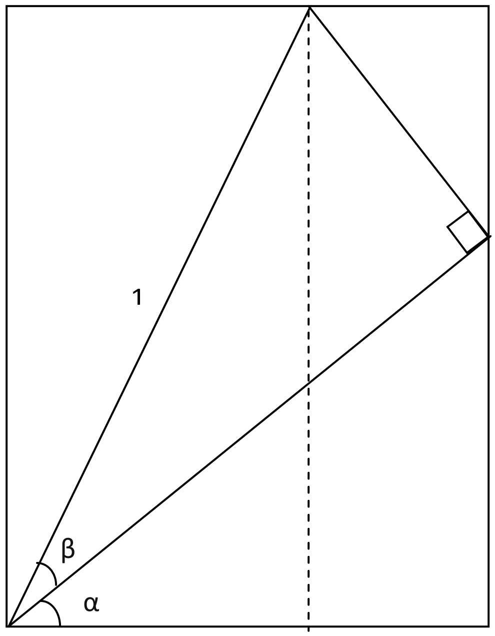
π/2						
3π/4						
Π						
3π/2						
2π						

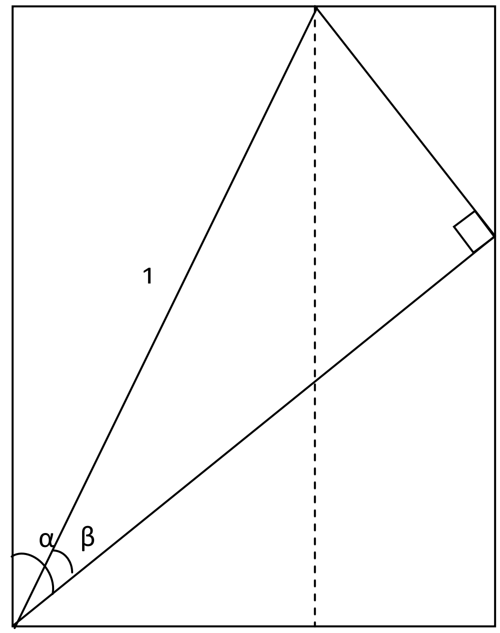
3. Desde un punto de observación en un edificio frente al océano, los ángulos de depresión de dos botes alineados son 45º y 60º. Encontrar la distancia entre los botes si el punto de observación esta a una altura de 60 metros.



GUIA 4

Una figura seis identidades





1) Con lo visto en clase, complete las figuras con los ángulos y los lados correspondientes. y utilizando los gráficos, deduzca las siguientes identidades trigonométricas.

$sen(\alpha+\beta) =$ $\qquad$ $\cos(\alpha+\beta) =$

$sen(\alpha-\beta) =$ $\qquad$ $\cos(\alpha-\beta) =$

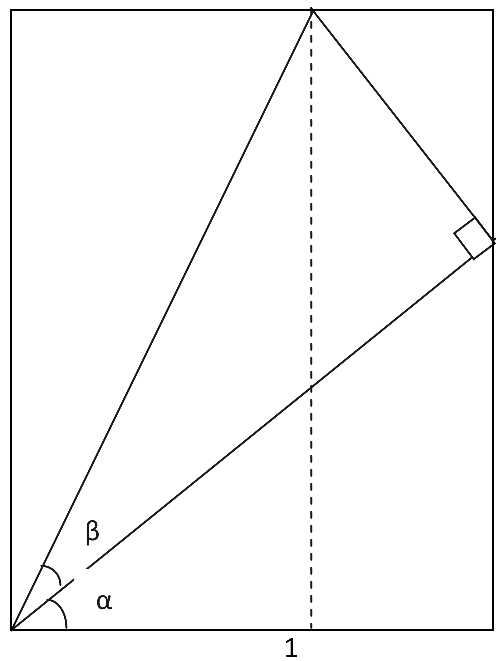
2) Apoyándose en los ángulos de 30, 45, 60 y 90 deducidos en el cuadrado de lado 1 y el triangulo equilátero de lado 2, y aplicando las identidades trigonométricas del punto 1, Hallar los siguientes valores

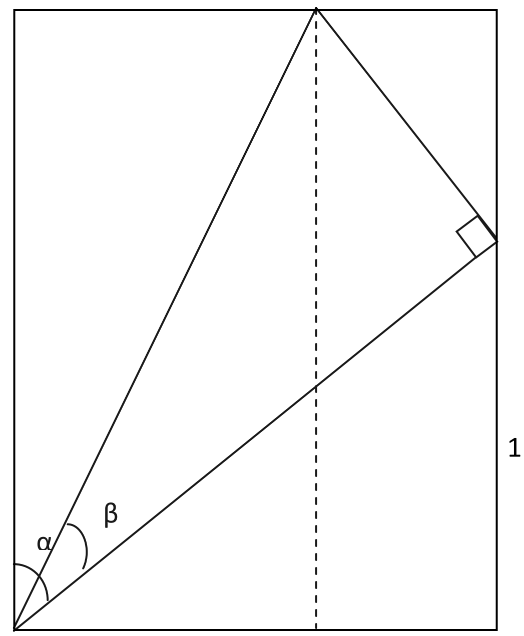
-Sen 135º - Cos 75º -Sen 105º -Cos 15º -Cos 315º -Sen 210º

GUIA 5

Una figura seis identidades

1) Complete el grafico, y deduzca las identidades trigonométricas.





$\tan(\alpha + \beta) =$

$\tan(\alpha - \beta) =$

2) Apoyándose en los ángulos de 30, 45, 60 y 90 deducidos en el cuadrado de lado 1 y el triangulo equilátero de lado 2, y aplicando las identidades trigonométricas del punto 1, Hallar los siguientes valores:

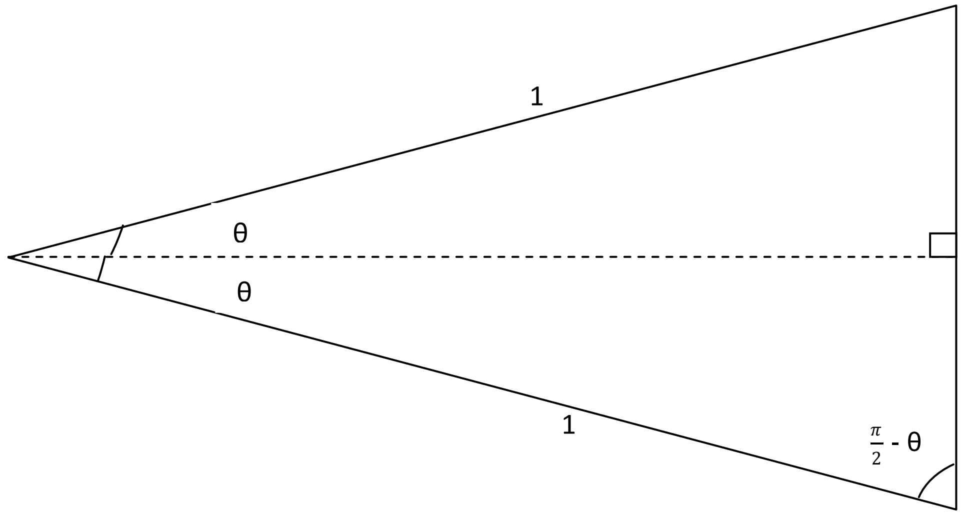
-tan 135º - tan 75º - tan 105º - tan 15º - tan 30º - tan 60º

3) completa la grafica utilizando la ley del seno y del coseno, para deducir las identidades trigonométricas del ángulo doble:

sen2θ=

cos2θ=

IDENTIDAD DE SENO Y COSENO DEL ÁNGULO DOBLE



4) Utilizando las identidades trigonométricas deducidas en el punto anterior hallar el valor de los siguientes ángulos:

-Sen 120º - Cos 150º -Cos 300º -Sen 70º

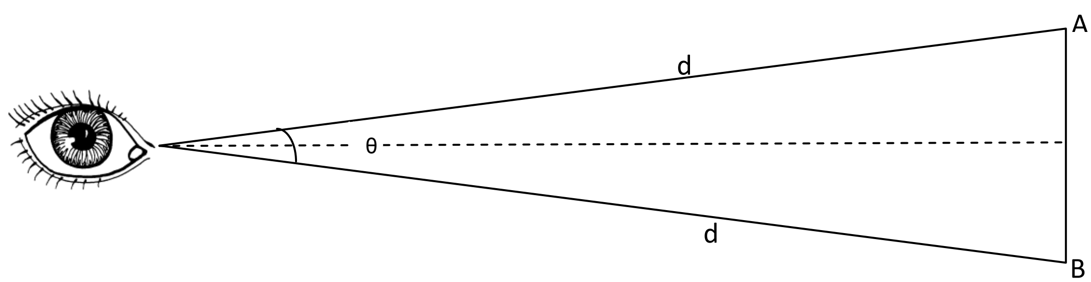
GUIA 6

Resolución de problemas

Resuelva los siguientes problemas siguiendo las pautas de Polya, utilizando las identidades trigonométricas de suma y diferencia de ángulos y el ángulo doble, las leyes de seno y coseno, y los valores para los ángulos de 30º, 45º,60º y 90º.

1. La cuerda de una cometa se encuentra tensa y forma un ángulo de 75º con la horizontal. Determina la altura aproximada de la cometa respecto al suelo, si la cuerda mide 70m y el extremo de la cuerda se sostiene a 1.20m.

2. El ojo humano puede distinguir claramente entre dos puntos equidistantes A y B siempre y cuando el ángulo de resolución θ no sea muy pequeño. Supongamos que θ es 120º, hallar la distancia entre los puntos A y B si la distancia d = 1m, y luego si la distancia es d = 5m.



3. Los ángulos de elevación de un globo desde los puntos A y B a nivel del suelo son 15º y 60º respectivamente. Los puntos A y B están a 275 km entre si y el globo se encuentra entre ambos puntos, con el mismo plano vertical. Calcula la altura del globo sobre el suelo.

4. La longitud de la base de un triangulo isósceles es de 42cm, cada ángulo de la base mide $\frac{5\pi}{12}$. Encuentre la longitud de cada uno de los lados iguales del triangulo.

5. Una mujer sabe que cuando se para a 120 metros de la base de un asta de bandera, el ángulo de elevación hasta el extremo superior es de $\frac{\pi}{4}$. Si sus ojos están a 1,5 metros por arriba del piso. calcule la altura del asta.

GUIA 7

Deducción vectorial de las identidades de la suma y diferencia de ángulos

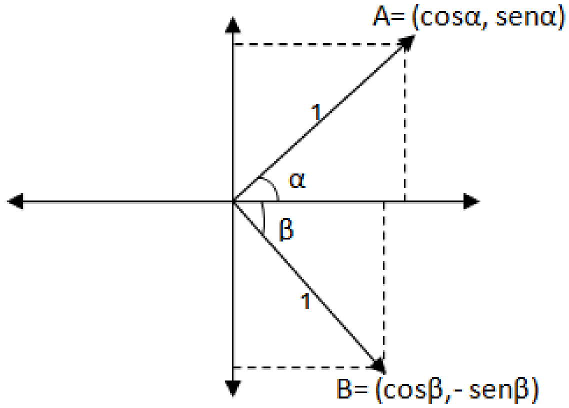


Figura 1

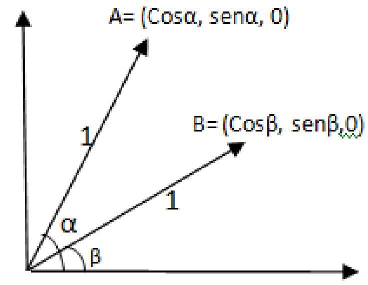


Figura 2

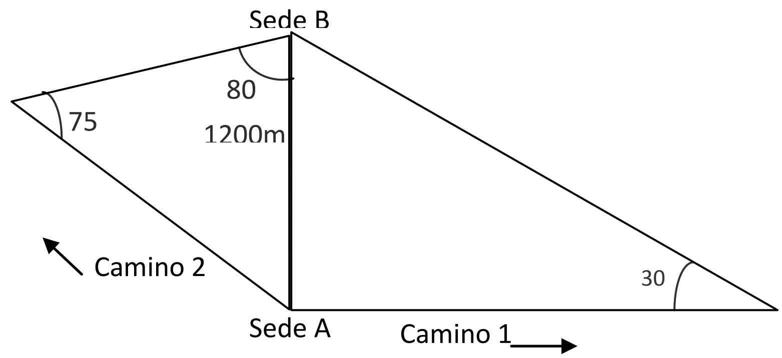
1 Por medio del producto escalar de los vectores $\vec{A}$= (cosα, senα) y $\vec{B}$= (cosβ,- senβ) de la figura 1 se obtiene otra forma de deducir o demostrar gráficamente la identidad trigonométrica del coseno de la suma de dos ángulos. Y con el producto cruz de los vectores $\vec{A}$= (Cosα, senα, 0) y $\vec{B}$= (Cosβ, senβ, 0) en la figura 2 podemos deducir la identidad del seno de la diferencia de dos ángulos.

EJERCICIOS

1) para deducir las identidades trigonométricas del coseno de la suma de dos ángulos y el seno de la diferencia de dos ángulos, realizar el producto escalar de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura 1 y el producto cruz de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ da la figura 2 y utilizando las formulas vectoriales del seno y coseno del ángulo entre dos vectores, es decir:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} \qquad \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

2) Los estudiantes del colegio Minca deben trasladarse de la sede B a la sede A que se encuentra a una distancia de 1200 metros, si hay dos posibles caminos para llegar (ver figura) por cual camino se iría? ¿Por qué?



3) Problema abierto: encuentre otra forma para demostrar (deducir) las identidades trigonométricas.

4) Responda las siguientes preguntas:
   a. Que opinión tiene acerca de las dos formas de deducir las identidades trigonométricas.
   b. A usted le parece más conveniente aprenderse las formulas de memoria o aprender a deducirlas de alguna manera.
   c. ¿Cómo le pareció el desarrollo de las clases?