LA MÉTRICA: GÉNESIS DE LA TOPOLOGÍA DE VECINDADES.

ÁLVARO ORTÍZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

LA MÉTRICA: GÉNESIS DE LA TOPOLOGÍA DE VECINDADES.

ÁLVARO ORTÍZ

Trabajo de grado presentado para optar al
título de Matemático

Director
DR. JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

Agradecimientos

A la Universidad Industrial de Santander por brindarme la oportunidad de formarme en esta bella rama del saber.

Al profesor Javier Camargo por su gran voluntad y colaboración en la realización de este trabajo.

Al cuerpo de profesores de la Escuela de Matemáticas, quienes me tendieron su ayuda en momentos críticos de mi salud; en particular a los profesores Rafael Isaacs, Michael Rincón, Carlos Uzcátegui y Sergio Pérez, quienes con sus comentarios, ayudaron a mejorar este trabajo.

Dios bendiga esos faros (maestros), que nos iluminan la caverna.

Finalmente, a quien siempre estuvo presente en mi brega, a mi compañera, Luz Marina.

Tabla de Contenido

Introducción

En 1906, en su tesis doctoral, Fréchet introduce la noción abstracta de *Espacio métrico*. Esta definición estaba enfocada al estudio de convergencia y resulta un tanto imprecisa en términos de la matemática actual. Es por esto que la noción de espacio métrico como la conocemos hoy en día es atribuida a F. Hausdorff. En 1914, Hausdorff presenta la definición de espacio métrico con las ideas de los trabajos de Hilbert y Weyl, que a su vez da origen al concepto de "entorno"; objeto fundamental de la *Topología general*. Es por esto que personalidades como Bourbaki en su libro *Topología general* afirma: "con Hausdorff comienza la topología general como se la entiende actualmente."(En [1], página 126 se lee: "Avec Hausdorff commence la topologie générale telle qu'on l'entend aujourd'hui".)

La convergencia en espacios métricos es fundamental en el desarrollo del análisis. Además, la métrica determina el nivel de diferencia o lejanía entre objetos. Es por esto que el estudio de los espacios métricos es de gran importancia y determina una manera de estudiar la topología del espacio.

En cursos básicos de topología general se estudia como la métrica induce naturalmente una colección de abiertos llamada topología, y que, distintas métricas pueden generar la misma topología teniendo propiedades diferentes en el contexto de los espacios métricos. Solo por dar un ejemplo las expresiones $|x-y|$ y $\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ definen métricas que generan la misma topología en $\mathbb{R}$, pero a diferencia de la primera, la segunda únicamente toma valores entre 0 y 1, esto es, es una métrica acotada. En nuestro trabajo investigaremos diferentes tipos de métricas que podemos definir sobre un conjunto. Haremos diferencias entre estas métricas tanto desde el punto de vista topológico, como en el contexto propio de los espacios métricos. Una propiedad "propia de los espacios métricos" es una propiedad que podría dañarse si cambiamos la métrica, sin alterar la topología. En este trabajo planteamos el problema de encontrar propiedades propias de la métrica, y esperamos que el lector se interese por el tema y pueda investigar nuevas propiedades y tal vez, sea un punto de partida para futuras investigaciones.

Esta tesis la dividimos en dos capítulos: en el primer capítulo introducimos la definición de métrica, damos varios ejemplos, comparamos sus topologías y estudiamos algunas propiedades; en el segundo y último capítulo, estudiamos el Teorema de Heine-Borel y abordamos la noción de espacio métrico completo, estudiamos algunas propiedades de esta importante clase de espacios métricos y finalmente, presentamos las funciones uniformemente continuas, planteando algunas preguntas entorno a la influencia de la métrica en las funciones continuas.

Capítulo 1

Conceptos básicos

Este capítulo lo dividimos en tres secciones. En la primera sección, introducimos la definición de métrica y mostramos algunos ejemplos con sus respectivas demostraciones. En la segunda sección, introducimos las nociones de métricas equivalentes y métricas topológicamente equivalentes, estudiamos sus relaciones y mostramos ejemplos. Finalmente, en la sección 1.3, lo dedicamos a estudiar funciones continuas, algunas clases especiales de funciones y ejemplos relacionados con los conceptos introducidos hasta este momento.

1.1. Definición y ejemplos

En esta sección presentaremos las definiciones generales que fundamentan nuestro trabajo.

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto. Una *métrica o distancia* en X es una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ tal que, para cada x, y y z en X, se verifica:

1. $d(x, y) \geq 0$;
2. $d(x, y) = 0$. si, y solo si, $x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdad triangular).

La pareja (X, d) la llamamos *espacio métrico.*

Si $x \in X$ y $r > 0$ denotaremos $B_d(x; r)$ la bola abierta con centro en x y radio r; esto es:

$$B_d(x; r) = \{z \in X : d(x, z) < r\}. \tag{1.1}$$

Una *sucesión* la denotaremos por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde cada $x_n \in X$, para algún espacio métrico (X, d). Diremos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $x_n \in B_d(x_0; \varepsilon)$ para todo $n \geq N$. En este caso escribiremos $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ o simplemente, $x_n \to x_0$.
A continuación daremos algunos ejemplos de métrica con sus respectivas demostraciones. Consideremos un conjunto X dotado con la métrica definida para cada $x, y \in X$ por:

$$d_0(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y; \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases} \tag{1.2}$$

Verifiquemos que efectivamente d_0 es una métrica. Las condiciones 1, 2 y 3 de la Definición 1.1.1 las tenemos directamente. Verifiquemos la desigualdad triangular. Sean $x, y, z \in X$. Probemos que $d_0(x,y) \leq d_0(x,z) + d_0(z,y)$. Notemos que si $d_0(x,y) = 0$, entonces tenemos la desigualdad pues $d_0(x,z) \geq 0$ y $d_0(z,y) \geq 0$. Luego supongamos que $d_0(x,y) = 1$. Observe que si $d_0(x,z) = 0$ y $d_0(z,y) = 0$, entonces $x = z = y$; contradiciendo que $x \neq y$. De lo anterior, $d_0(x,z) = 1$ o $d_0(z,y) = 1$ y $d_0(x,y) \leq d_0(x,z) + d_0(z,y)$.
Un conjunto X dotado de la métrica d_0 lo conocemos como *espacio discreto*. Para un espacio discreto, las bolas dadas en (1.1), únicamente se describen de la siguiente manera:

$$B_{d_0}(x;r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{si } 0 < r \leq 1; \\ X, & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

La siguiente métrica es la más conocida y usada pues, es introducida en los programas de matemáticas e ingeniería desde primeros cursos de álgebra y cálculo elemental. En $\mathbb{R}^2$, definimos para cualesquiera $u = (x_1, x_2)$ y $v = (y_1, y_2)$ la distancia

$$d(u,v) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \tag{1.3}$$

Antes de demostrar que d es en efecto una métrica, mostremos la siguiente desigualdad conocida como la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*. Recordemos que para cada punto $u \in \mathbb{R}^2$, con $u = (x, y)$, la *norma* o *magnitud* del punto u se define por

$$||u|| = d(0,u) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Además, usaremos la notación $\langle u, v\rangle$ para referirnos al producto punto entre dos puntos u y v de $\mathbb{R}^2$.

Lema 1.1.2. *Sean u y v puntos en $\mathbb{R}^2$. Entonces,*

1. $|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||$ *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz).*

2. $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$.

Demostración. Probemos primero la primera parte. Observe que si u o v son cero la desigualdad se tiene. Luego, supondremos que u y v son diferentes de cero. Tomemos $w = tu - v$ un punto de $\mathbb{R}^2$ donde $t \in \mathbb{R}$. Sabemos por definición que $\langle w, w\rangle \geq 0$. Así, usando propiedades elementales del producto punto

$$\langle w, w\rangle = t^2\langle u, u\rangle - 2t\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \geq 0,$$

para cualquier t. Luego, reemplazando $t = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}$, tenemos que

$$-\frac{\langle u, v\rangle^2}{\langle u, u\rangle} + \langle v, v\rangle \geq 0.$$

De lo anterior, despejando obtenemos $\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle = ||u||^2||v||^2$, y por tanto, $|\langle u, v\rangle| \leq ||u||||v||$ como queríamos.
Veamos ahora el inciso 2. Sean $u = (x_1, x_2)$ y $v = (y_1, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$. Por definición sabemos que $||u+v||^2 = (x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2 = x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2+2(x_1y_1+x_2y_2)$; además, por definición del producto punto podemos decir que $x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2) = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\langle u, v\rangle$. Finalmente, como $\langle u, v\rangle \leq ||u||||v||$, por la primera parte, tenemos que $||u + v||^2 \leq ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||.||v|| = (||u|| + ||v||)^2$. □

Ahora estamos preparados para demostrar que la distancia definida en (1.3) es efectivamente una métrica en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.1.3. *Sea $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ la función definida por*

$$d(u, v) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

donde $u = (x_1, x_2)$ y $v = (y_1, y_2)$. Entonces, d es una métrica sobre $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Sean $u = (x_1, x_2)$ y $v = (y_1, y_2)$. Notemos primero que $d(u, v) \geq 0$, esto es $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \geq 0$ por que cada $(x_1 - y_1)^2$ y $(x_2 - y_2)^2$ son no negativos. Además, $d(u, v) = 0$ si, y solo si, $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2 = 0$; es decir, $x_1 = y_1$ y $x_2 = y_2$. De lo anterior tenemos las condiciones 1 y 2 de la Definición 1.1.1.
También es claro que $d(u, v) = d(v, u)$, pues $(x_1 - y_1)^2 = (y_1 - x_1)^2$ y $(x_2 - y_2)^2 = (y_2 - x_2)^2$. Luego, solo nos resta probar la desigualdad triangular. Haremos uso del Lema 1.1.2 y usaremos únicamente la notación vectorial. Sean u, v y w. Sabemos que $d(u, v) = ||u - v|| = ||(u - w) + (w - v)||$. Por el Lema 1.1.2,

$$||(u - w) + (w - v)|| \leq ||u - w|| + ||w - v|| = d(u, w) + d(w, v).$$

Con lo anterior terminamos la demostración. □

La métrica d se conoce como *métrica usual* o *métrica euclidiana*. Dado $p = (p_1, p_2)$ en $\mathbb{R}^2$ y $r > 0$, la bola con centro en p y radio r estaría dada por

$$B_d(p; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - p_1)^2 + (y - p_2)^2} < r\}.$$

Esta bola se representa como en la siguiente figura.

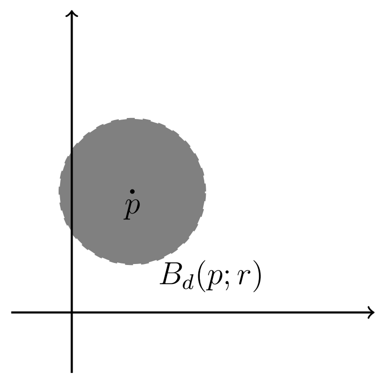

Figure 1.

De manera natural, claramente la métrica d se puede extender a $\mathbb{R}^n$ y las pruebas se desarrollan de la misma manera. Dados $u = (x_1, \ldots, x_n)$ y $v = (y_1, \ldots, y_n)$ puntos de $\mathbb{R}^n$,

$$d(u, v) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Con argumentos similares a los expuestos en el desarrollo de la demostración del Teorema 1.1.3, no es difícil verificar que las siguientes funciones son métricas sobre $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.1.4. *Dados $u = (x_1, x_2)$ y $v = (y_1, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$, definimos las siguientes métricas:*

1. $d_1(u, v) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;
2. $d_\infty(u, v) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.

Siguiendo argumentos similares a los que usamos en la prueba del Teorema 1.1.3, se puede demostrar el siguiente resultado.

Teorema 1.1.5. *Las funciones d_1 y d_∞ son métricas de $\mathbb{R}^2$.*

Por mostrar otro ejemplo, en un contexto diferente, consideremos $C([0, 1], \mathbb{R})$ la colección de funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Definimos

$$\rho(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|, \tag{1.4}$$

para cualesquiera f y g en $C([0,1],\mathbb{R})$. Como mostraremos en el Teorema 1.1.6, ρ es una métrica para $C([0,1],\mathbb{R})$. Una bola en esta métrica la podemos representar como en la siguiente figura.

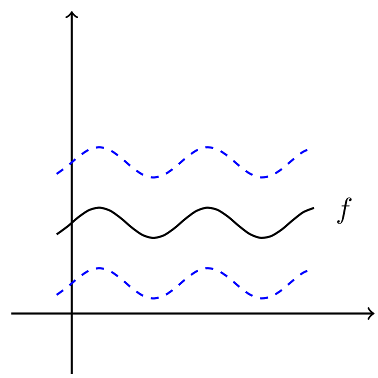

Figure 2. $B_\rho(f;r)$.

A continuación mostraremos que $(C([0,1],\mathbb{R}),\rho)$ es efectivamente un espacio métrico.

Teorema 1.1.6. *Sea $C([0,1],\mathbb{R})$ la colección de funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Para cualesquiera par de funciones f y g en $C([0,1],\mathbb{R})$, definimos $\rho(f,g)$ como en (1.4). Entonces ρ es una métrica sobre $C([0,1],\mathbb{R})$.*

Demostración. Sean $f,g\in C([0,1],\mathbb{R})$. Como $|f(x)-g(x)|\geq 0$ para todo $x\in[0,1]$, tenemos que $\rho(f,g)\geq 0$. Además, $\rho(f,g)=0$ si, y solo si, $|f(x)-g(x)|=0$ para todo $x\in[0,1]$; esto es, $f=g$. Note que $|f(x)-g(x)|=|g(x)-f(x)|$ para cada $x\in[0,1]$. Esto implica la simetría $\rho(f,g)=\rho(g,f)$.
De lo anterior, solo debemos mostrar la desigualdad triangular. Sean $f,g,h\in C([0,1],\mathbb{R})$. Tenemos lo siguiente:

$$|f(x)-g(x)|\leq|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|,\ \text{para cada } x\in[0,1].$$

Así,

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|\leq\sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|\}.$$

Finalmente, observe que

$$\max_{x\in[0,1]}\{|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|\}\leq\max_{x\in[0,1]}|f(x)-h(x)|+\max_{x\in[0,1]}|h(x)-g(x)|.$$

De lo anterior, $\rho(f,g)\leq\rho(f,h)+\rho(h,g)$. $\square$

Definición 1.1.7. *En $C([0,1],\mathbb{R})$ definimos la métrica*

$$\sigma(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\ dx,$$

para cualesquiera funciones f y g en $C([0,1],\mathbb{R})$.

Con argumentos similares a los que mostramos en el teorema anterior es posible demostrar que σ es efectivamente una métrica sobre $C([0,1],\mathbb{R})$.

1.2. Métricas equivalentes

La siguiente definición será de gran importancia en el desarrollo del presente trabajo.

Definición 1.2.1. Sean X un conjunto y ρ y σ métricas de X. Diremos que ρ y σ son *métricas equivalentes* si existen reales positivos c_1 y c_2 tales que

$$c_1\rho(x,y) \leq \sigma(x,y) \leq c_2\rho(x,y),$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

A continuación mostraremos algunos ejemplos de métricas equivalentes.

Proposición 1.2.2. *En $\mathbb{R}^2$ considere d dada en (1.3) y las métricas d_1 y d_∞ introducidas en la Definición 1.1.4. Entonces, d, d_1 y d_∞ son métricas equivalentes.*

Demostración. Sean $u = (x_1, x_2)$ y $v = (y_1, y_2)$ puntos de $\mathbb{R}^2$. Para la prueba de la proposición mostraremos que:

$$d_\infty(u,v) \leq d(u,v) \leq d_1(u,v) \leq 2d_\infty(u,v). \tag{1.5}$$

Observe que $|x_i - y_i| \leq \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$ para cada $i \in \{1,2\}$. Así, $\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \leq \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$. Con lo que tenemos que $d_\infty(u,v) \leq d(u,v)$.
Note que:

$$d_1(u,v)^2 = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + 2|x_1-y_1||x_2-y_2|,$$

y

$$d(u,v)^2 = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2.$$

De donde se concluye que $d(u,v)^2 \leq d_1(u,v)^2$; esto es, $d(u,v) \leq d_1(u,v)$.
Finalmente, $|x_1-y_1|+|x_2-y_2| \leq 2|x_1-y_1|$, si $|x_1-y_1| \geq |x_2-y_2|$, y $|x_1-y_1|+|x_2-y_2| \leq 2|x_2-y_2|$, si $|x_2-y_2| \geq |x_1-y_1|$. Con esto tenemos que $d_1(u,v) \leq 2d_\infty(u,v)$, concluyendo de esta forma la prueba de (1.5). □

Naturalmente, las métricas definidas en 1.1.4 se pueden enunciar para cualquier espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera: Dados $u = (x_1, \ldots, x_n)$ y $v = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, definimos:

1. $d_1(u, v) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$;
2. $d_\infty(u, v) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$.

De esta forma la Proposición 1.2.2, la podemos enunciar con la misma demostración así:

Proposición 1.2.3. *En $\mathbb{R}^n$ considere las métricas d, d_1 y d_∞. Entonces d, d_1 y d_∞ son métricas equivalentes.*

Dado un espacio métrico X con métrica d y $U \subseteq X$. Diremos que U es *abierto* si para cada $x \in U$ existe un $r > 0$ tal que $B_d(x; r) \subseteq U$.
Sea

$$\tau_d = \{U \subseteq X : U \text{ es abierto}\}.$$

La colección τ de abiertos del espacio métrico (X, d), se conoce como *la topología de X inducida por d*. Además, un subconjunto $A \subseteq X$ se dice *cerrado* si $X \setminus A$ es abierto.

Lema 1.2.4. *Dado X un espacio métrico con métrica d. Entonces $B_d(x; r) \in \tau_d$ para cualesquiera $x \in X$ y $r > 0$.*

Demostración. Sea $z \in B_d(x; r)$. Definamos $s = r - d(z, x)$. Note que $s > 0$. Para mostrar que $B_d(x; r) \in \tau_d$, debemos verificar que $B_d(z; s) \subseteq B_d(x; r)$.
Sea $w \in B_d(z; s)$. Notemos que

$$d(w, x) \leq d(w, z) + d(z, x) < s + d(z, x) = r.$$

Así, $w \in B_d(x; r)$ y $B_d(z; s) \subseteq B_d(x; r)$. □

Proposición 1.2.5. *Sea X un espacio métrico con métrica d. Entonces la colección de abiertos τ_d satisface las siguientes condiciones:*

1. *$\emptyset, X \in \tau_d$;*
2. *$U \cap V \in \tau_d$, para cualesquiera $U, V \in \tau_d$;*
3. *$\bigcup\{U_i : i \in I\} \in \tau_d$, para cualquier colección $\{U_i : i \in I\} \subseteq \tau_d$.*

Demostración. Por definición tenemos que $\emptyset$ y X son elementos de τ_d. Sean $U, V \in \tau_d$. Veamos que $U \cap V \in \tau_d$. Sea $x \in U \cap V$. Como $x \in U$, existe $r > 0$ tal que $B_d(x;r) \subseteq U$. De la misma forma, existe $s > 0$ donde $B_d(x;s) \subseteq V$. Sea $l = \min\{r, s\}$. Tenemos así que $B_d(x;l) \subseteq U \cap V$ y por tanto, $U \cap V \in \tau_d$. Finalmente, sea $\{U_i : i \in I\}$ una colección de elementos de τ_d. Debemos probar que $\bigcup\{U_i : i \in I\} \in \tau_d$. Sea $x \in \bigcup\{U_i : i \in I\}$. Luego, existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$. Así, existe $r > 0$ tal que $B_d(x;r) \subseteq U_{i_0}$. Como $U_{i_0} \subseteq \bigcup\{U_i : i \in I\}$, $B_d(x;r) \subseteq \bigcup\{U_i : i \in I\}$. De lo anterior $\bigcup\{U_i : i \in I\} \in \tau_d$. □

Definición 1.2.6. Sean X un conjunto y ρ y σ métricas de X. Diremos que ρ y σ son métricas *topológicamente equivalentes* si generan las mismas topologías; esto es si $\tau_\rho = \tau_\sigma$.

El siguiente resultado es de gran utilidad para comparar topologías inducidas por diferentes métricas.

Teorema 1.2.7. *Sean X un conjunto y d y ρ métricas sobre X. Entonces, $\tau_d \subseteq \tau_\rho$ si, y solo si, para cualesquiera $x \in X$ y $r > 0$, existe $s > 0$ tal que $B_\rho(x;s) \subseteq B_d(x;r)$.*

Demostración. Supongamos primero que $\tau_d \subseteq \tau_\rho$. Por el Lema 1.2.4, $B_d(x;r) \in \tau_d$. Así, $B_d(x;r) \in \tau_\rho$. Como $x \in B_d(x;r)$, existe $s > 0$ tal que $B_\rho(x;s) \subseteq B_d(x;r)$. Recíprocamente, probemos ahora que $\tau_d \subseteq \tau_\rho$. Sea $U \in \tau_d$. Sea $x \in U$. Luego existe $r > 0$ tal que $B_d(x;r) \subseteq U$. Por hipótesis, existe $s > 0$ donde $B_\rho(x;s) \subseteq B_d(x;r) \subseteq U$. De lo anterior, $U \in \tau_\rho$. Con lo que tenemos que $\tau_d \subseteq \tau_\rho$. □

La siguiente proposición nos muestra en particular, por la Proposición 1.2.2, que las métricas d, d_1 y d_∞ generan los mismos abiertos en $\mathbb{R}^2$; esto es, las topologías τ_d, τ_{d_1} y τ_{d_∞} son iguales.

Proposición 1.2.8. *Sean X un conjunto y d y ρ métricas de X. Si d y ρ son métricas equivalentes, entonces d y ρ son topológicamente equivalentes.*

Demostración. Sean d y ρ métricas equivalentes de X. Luego, existen constantes $k, l > 0$ tales que

$$k\rho(x,y) \leq d(x,y) \leq l\rho(x,y), \text{ para cada } x, y \in X.$$

Sea $B_d(x;r)$ para $x \in X$ y $r > 0$. Encontremos $s > 0$ donde $B_\rho(x;s) \subseteq B_d(x;r)$. Definamos $s = r/l$. Sea $z \in B_\rho(x;s)$. Entonces, $\rho(z,x) < s = r/l$. Como $d(z,x) \leq l\rho(z,x)$, tenemos que $d(z,x) < r$. Así, $z \in B_d(x;r)$ y $B_\rho(x;s) \subseteq B_d(x;r)$. Por el Teorema 1.2.7, $\tau_d \subseteq \tau_\rho$. De forma similar, usando el hecho que $k\rho(x,y) \leq d(x,y)$ para cualesquiera $x, y \in X$, podemos demostrar que $\tau_\rho \subseteq \tau_d$. Así, $\tau_d = \tau_\rho$. □

1.3. Funciones continuas

La manera que relacionamos espacios métricos es mediante las funciones continuas. El concepto de función continua es usado desde los primeros cursos de cálculo en cualquier carrera de matemáticas e ingeniería.

Definición 1.3.1. Sean X y Y espacios métricos y $a \in X$. Una función $f\colon X \to Y$ es *continua en* a, si para todo abierto V de Y con $f(a) \in V$, existe un abierto U en X con $a \in U$ tal que $f(U) \subseteq V$. Se dice que f es *continua* si f es continua en todo punto de X.

Si Y es cualquier espacio métrico y $f\colon X \to Y$ es cualquier función, donde X es el espacio discreto, entonces f es una función continua.

Teorema 1.3.2. *Sea $f\colon X \to Y$ una función entre espacios métricos X y Y. Entonces, f es continua si, y solo si, $f^{-1}(V)$ es abierto para cada abierto V de Y.*

Demostración. Supongamos primero que f es continua y sea V un abierto de Y. Para mostrar que $f^{-1}(V)$ es abierto de X, sea $x \in f^{-1}(V)$. Como $f(x) \in V$ y f es continua, existe un abierto U tal que $x \in U$ y $f(U) \subseteq V$. Así, $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$. De lo anterior, $f^{-1}(V)$ es abierto.
Recíprocamente, sea $a \in X$ y V un abierto de Y tal que $f(a) \in V$. Como $f^{-1}(V)$ es abierto y $a \in f^{-1}(V)$, basta tomar $U = f^{-1}(V)$ y tenemos que $f(U) \subseteq V$; esto es, f es continua. $\square$

Las siguientes clases de funciones que denominamos isometrías serán de gran importancia en el desarrollo de nuestro trabajo.

Definición 1.3.3. Sea $f\colon X \to Y$ una función definida entre espacios métricos X y Y. Diremos que f es una *isometría* si $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para cualesquiera x e y en X.

Naturalmente toda isometría es una función continua. Además, note que una isometría es una función inyectiva. Así, tomando por ejemplo $f(x) = x^2$ definida en $\mathbb{R}$ es una función continua, que no es una isometría.

Ejemplo 1.3.4. *Consideremos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y p un punto fijo de $\mathbb{R}^n$. Definamos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $f(x) = x + p$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Note que $||f(x) - f(y)|| = ||x + p - y - p|| = ||x - y||$; esto es, f es una isometría.*

Las traslaciones muestran que, dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, existe una isometría $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(a) = b$. Este echo se expresa diciendo que $\mathbb{R}^n$ es *homogéneo*.

Definición 1.3.5. Sea $f\colon X \to Y$ una función continua entre espacios métricos. Diremos que f es un *homeomorfismo* si f es biyectiva y $f^{-1}\colon Y \to X$ es continua.

Note que si f es un homeomorfismo, y τ y ρ son las familias de abiertos de X y Y, respectivamente, entonces $\phi\colon \tau \to \rho$ definida por $\phi(U) = f(U)$ es una biyección.

Proposición 1.3.6. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua. Si f es una isometría, entonces $f\colon X \to f(X)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Sean d y ρ las métricas de X y Y, respectivamente. Notemos que por definición f es una función inyectiva. Así, $f\colon X \to f(X)$ es una biyección. Luego, debemos probar que $f^{-1}\colon f(X) \to X$ es continua. Sean $y \in f(X)$ y W un abierto en X tal que $f^{-1}(y) \in W$. Como $f\colon X \to f(X)$ es biyectiva, existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$ y así, $f^{-1}(y) = x$. Sea $U = f(W)$. Es claro que $y \in U$ y $f^{-1}(U) = W$. Luego, solo debemos mostrar que U es abierto. Sea $z \in U$. Como $f^{-1}(z) \in W$ y W es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_d(f^{-1}(z); r) \subseteq W$. Como f es una isometría, tenemos que $f(B_d(f^{-1}(z); r)) = B_\rho(z; r)$. Así, $B_\rho(z; r) \subseteq U$ y U es abierto. $\square$

Note que por ejemplo, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ es un homeomorfismo que no es una isometría. La relación entre las isometrías y los homeomorfismos la abordaremos con más detalle en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

La métrica y la topología

En este capítulo desarrollamos el objetivo central de esta tesis. Abordaremos algunas propiedades propias de los espacios métricos; esto es, dado un espacio métrico X con métrica d, tenemos una colección de abiertos que denotamos por τ_d. Como vimos en el capítulo 1, es posible definir una métrica diferente ρ sobre X tal que $\tau_d = \tau_\rho$, métricas topológicamente equivalentes (ver Definición 1.2.6), pero sin embargo, existen propiedades que se tienen con la métrica d que no se tienen con ρ, o viceversa. A esto nos referimos con propiedades propias de los espacios métricos. En este capítulo abordamos algunas de estas propiedades y esperamos que el lector, desarrollando su curiosidad, investigue nuevas propiedades que extienda la lista de propiedades que presentamos en este trabajo.

2.1. Conjunto acotado y Heine-Borel

En esta sección presentamos el Teorema de Heine-Borel y resaltamos la importancia de la métrica para su aplicación.

Definición 2.1.1. Sean X un espacio métrico con métrica d y $A \subseteq X$. Diremos que A es *acotado* si existen $x_0 \in X$ y $R > 0$ tal que $A \subseteq B_d(x_0; R)$.

Note que si X es cualquier conjunto y d_0 es la métrica definida en (1.2), X es el espacio discreto, entonces X es acotado y por tanto, cualquier $A \subseteq X$ es acotado, pues $A \subseteq B_{d_0}(x_0; 2)$ para cualquier $x_0 \in X$.
La siguiente proposición es de gran importancia en esta sección.

Proposición 2.1.2. *Sea X un espacio métrico con métrica d. Definimos*

$$d'(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\},$$

para cualesquiera $x, y \in X$. Entonces d' es una métrica de X y además, d y d' son topológicamente equivalentes.

Demostración. Veamos primero que d' es una métrica. Note que como $d(x,y) \geq 0$, $d'(x,y) \geq 0$ para cualesquiera $x, y \in X$. Además, $d'(x,y) = 0$ si, y solo si, $d(x,y) = 0$ y como d es una métrica, esto solo ocurre si $x = y$. Notemos además que $d(x,y) = d'(x,y)$. Así, solo debemos ver la desigualdad del triángulo. Sean $x, y, z \in X$. Probemos que $d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(z,y)$. Consideremos dos casos:

1. $d'(x,y) = d(x,y)$. Esto es $d(x,y) \leq 1$. Como d es una métrica, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Note que si $d(x,z) > 1$ o $d(z,y) > 1$, entonces $d'(x,y) \leq d'(x,z)+d'(z,y)$; pues, $d'(x,y) \leq 1$. Así, $d'(x,z) = d(x,z)$ y $d'(z,y) = d(z,y)$ y
$$d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(z,y).$$

2. $d'(x,y) = 1$. En este caso, $d'(x,y) < d(x,y)$. Nuevamente como d es una métrica, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Si $d'(x,z) < d(x,z)$ o $d'(z,y) < d(z,y)$, entonces $d'(x,z) = 1$ o $d'(z,y) = 1$ y de esta forma, como $d'(x,y) = 1$, tenemos que
$$d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(z,y).$$
De otra forma, $d'(x,z) = d(x,z)$ y $d'(z,y) = d(z,y)$, con lo que
$$d'(x,y) < d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = d'(x,z) + d'(z,y),$$

Con lo anterior concluimos que d' satisface la desigualdad triangular y d' es una métrica para X.
Demostremos ahora que $\tau_d = \tau_{d'}$. Para esto usaremos el Teorema 1.2.7. Sean $x \in X$ y $r > 0$. Observe que si $r \leq 1$, entonces $B_d(x;r) = B_{d'}(x;r)$. De esta observación tenemos que $B_d(x;r) \subseteq B_{d'}(x;r)$ para todo $r > 0$, y $B_{d'}(x;s) \subseteq B_d(x;r)$ donde $s < \text{mín}\{1, r\}$. Con esto finalizamos la prueba. □

Por el teorema anterior, note que si consideramos $\mathbb{R}$ con la métrica $d(x,y) = |x-y|$ y $d'(x,y) = \text{mín}\{|x-y|, 1\}$, entonces $\tau_d = \tau_{d'}$. Además, tomando $A = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$, tenemos que A es acotado usando la métrica d', pero claramente no acotado en la métrica usual d. De lo anterior la propiedad "ser acotado" es una propiedad propia de la métrica.
A continuación, mostraremos que, por depender de esta propiedad de ser acotado, el Teorema de Heine-Borel se satisface con la métrica euclidiana y no es posible cambiarlo por una métrica topológicamente equivalente.
Dado un espacio métrico X, una colección de abiertos $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ se dice una *cubierta* de X si $X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ es una cubierta de X, diremos que $\mathcal{V}$ es una *subcubierta* de X.

Definición 2.1.3. Un espacio métrico se dice *compacto* si cualquier cubierta admite una subcubierta finita.

A continuación mostramos un ejemplo de un compacto.

Ejemplo 2.1.4. *El intervalo cerrado* $[0,1]$ *es compacto.*

Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta de $[0,1]$. Definamos

$$L = \{t \in [0,1] : [0,t] \subseteq \cup_{i=1}^n U_{\alpha_i}, \text{ para algunos } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ en } \mathcal{A}\}.$$

Es claro que $L \neq \emptyset$, pues $0 \in L$. Como L está acotado superiormente por 1, existe $s \in [0,1]$ tal que $s = \sup L$. Observe que $s \in L$, pues, existe U_λ tal que $s \in U_\lambda$, pero como s es supremo existe $l < s$ donde $[l,s] \subseteq U_\lambda$. De esta forma, $[0,l] \subseteq \cup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ y por tanto, $[0,s] \subseteq (\cup_{i=1}^n U_{\alpha_i}) \cup U_\lambda$. Lo anterior muestra que $s \in L$.
Finalmente, probemos que $s = 1$. Si $s < 1$, entonces un argumento similar muestra que existe $s < t$, donde $[s,t] \subseteq U_\lambda$ y tenemos que $[0,t]$ está contenido en una unión finita de elementos de $\mathcal{U}$, contradiciendo que s es el supremo. De lo anterior, $1 \in L$ y $[0,1]$ es compacto.

El siguiente teorema muestra en particular que la compacidad es una propiedad topológica; esto es, no es una propiedad propia de la métrica, depende exclusivamente de los abiertos del espacio.

Teorema 2.1.5. *Sea* $f\colon X \to Y$ *una función continua donde* X *y* Y *son espacios métricos. Si* $K \subseteq X$ *es compacto, entonces* $f(K)$ *es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{W} = \{W_i : i \in I\}$ una cubierta de $f(K)$. Como f es continua, $\{f^{-1}(W_i) : i \in I\}$ es una cubierta de K (ver Teorema 1.3.2). Como K es compacto, existe un conjunto finito

$$\{f^{-1}(W_1), \ldots, f^{-1}(W_k)\} \subseteq \{f^{-1}(W_i) : i \in I\}$$

tal que $K \subseteq f^{-1}(W_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(W_k)$. Así, $f(K) \subseteq W_1 \cup \cdots \cup W_k$ y $f(K)$ es compacto. $\square$

El siguiente teorema nos muestra que la compacidad en un espacio métrico se caracteriza con sus sucesiones.

Teorema 2.1.6. *Sea* X *un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es compacto.*

2. *Toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Supongamos primero que X es compacto y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Sea $S = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Si S es finito, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión constante, y por tanto convergente. Así, supongamos que S es infinito. Mostremos primero que S tiene un punto límite. Supongamos lo contrario; esto es, para cada $x \in X$, existe $r_x > 0$ tal que $B_d(x; r_x) \cap S$ es finito. Claramente, $X = \bigcup_{x\in X} B_d(x; r_x)$. Como X es compacto, existen $x_1, ..., x_n$ en X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_d(x_i; r_{x_i})$. Como $B_d(x_i; r_{x_i}) \cap S$ es finito para cada $i \in \{1, ..., n\}$, S es finito. Contradicción. Así, S tiene un punto límite x_0 de S. Como $B_d(x_0; \frac{1}{n}) \cap S$ es infinito para cada n, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \in B_d(x_0; \frac{1}{k}) \cap S$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Es claro que $x_{n_k} \to x_0$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. De esto mostramos que 1 implica 2.
Probemos ahora que 2 implica 1. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta de X. Probemos que existe un número $\rho > 0$, que depende de $\mathcal{U}$, tal que para cada $x \in X$ existe $U \in \mathcal{U}$ donde $B_d(x; \rho) \subseteq U$. Supongamos lo contrario, esto es, que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $B_d(x_n; \frac{1}{n})$ no está contenido en ningún U_λ. Por 2, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \to x_0$, para algún $x_0 \in X$. Así, existen $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ y $r > 0$ tales que $B_d(x_0; r) \subseteq U_{\alpha_0}$. Como $x_{n_k} \to x_0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_m} \in B_d(x_0; \frac{r}{2})$ y $\frac{1}{n_m} < \frac{r}{2}$. Es fácil ver que $B_d(x_{n_m}; \frac{1}{n_m}) \subseteq B_d(x_0; r) \subseteq U_{\alpha_0}$, pero esto contradice la selección de x_{n_m}. Así, hemos mostrado la existencia de ρ como queríamos. Sea $x_1 \in X$. De lo anterior, existe $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ tal que $B_d(x_1; \rho) \subseteq U_{\alpha_1}$. Supongamos que existe $x_2 \in X \setminus B_d(x_1; \rho)$ (en caso contrario $\{U_{\alpha_1}\}$ es una subcubierta finita). Así, existe $\alpha_2 \in \mathcal{A}$ tal que $B_d(x_2; \rho) \subseteq U_{\alpha_2}$. Continuando de esta manera, podemos encontrar $x_1, ..., x_n$ en X tales que $x_j \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B_d(x_i; \rho)$, para cada $j \in \{2, ..., n\}$. Obsérvese que si este proceso no se detiene, entonces podemos construir una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $d(x_i, x_j) > \rho$ siempre que $i \neq j$. Pero esta condición conlleva que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones convergentes, contradiciendo 2. Así, $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_d(x_i; \rho)$ para algún n y $\{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. □

El siguiente es una de los resultados más importantes de la topología general. Lo presentamos sin demostración pero puede ser consultado en cualquier libro de topología.

Teorema 2.1.7 (Teorema de Tychonoff). *Si $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una colección de compactos, entonces $\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ es compacto.*

A continuación mostramos otro ejemplo de compacto que usaremos en esta sección. Es una consecuencia directa del Teorema de Tychonoff.

Ejemplo 2.1.8. *El producto $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ es compacto en $\mathbb{R}^n$, para cualquiera reales $a_1, b_1, a_2, \ldots, a_n, b_n$.*

Probaremos algunos resultados necesarios para la demostración del teorema de Heine-Borel.

Teorema 2.1.9. *Sean X un espacio métrico y $K \subseteq X$. Si K es compacto, entonces K es cerrado y acotado.*

Demostración. Veamos primero que K es cerrado. Para esto, probemos que $X \setminus K$ es abierto. Sea $x \in X \setminus K$. Como X es un espacio métrico, para cada $k \in K$, existe $r_k > 0$ tal que $B_d(k; r_k) \cap B_d(x; r_k) = \emptyset$. Observe que $\{B_d(k; r_k) : k \in K\}$ es una cubierta de K. Como K es compacto, existen $k_1, \ldots, k_m$ en K tales que $K \subseteq B_d(k_1; r_{k_1}) \cup \cdots \cup B_d(k_m; r_{k_m})$. Tomemos $s = \text{mín}\{r_{k_1}, \ldots, r_{k_m}\}$. Es claro que $B_d(x; s) \cap B_d(k_i; r_{k_i}) = \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Así, $B_d(x; s) \cap K = \emptyset$. De lo anterior, $B_d(x; s) \subseteq X \setminus K$. Como x fue un punto arbitrario de $X \setminus K$, $X \setminus K$ es abierto y por consiguiente, K es cerrado.
Demostremos ahora que K es acotado. Sea $x_0 \in X$ y consideremos la familia $\{B_d(x_0; n) : n \in \mathbb{N}\}$. Observemos que si $x \in K$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_0) < m$. Así, $x \in \cup_{n \in \mathbb{N}} B_d(x_0; n)$. Como x lo tomamos arbitrariamente de K, $K \subseteq \cup_{n \in \mathbb{N}} B_d(x_0; n)$; es decir, $\{B_d(x_0; n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta de K. Como K es compacto, existen $n_1, \ldots, n_m$ en $\mathbb{N}$ tales que $K \subseteq B_d(x_0; n_1) \cup \cdots \cup B_d(x_0; n_m)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $n_1 < \cdots < n_m$. Así,

$$K \subseteq B_d(x_0; n_1) \cup \cdots \cup B_d(x_0; n_m) = B_d(x_0; n_m).$$

De lo anterior, K es acotado. $\square$

Teorema 2.1.10. *Sean X un compacto y $K \subseteq X$. Si K es cerrado, entonces K es compacto.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta de K. Observe que

$$\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} \cup \{X \setminus K\},$$

es una cubierta de X. Como X es compacto, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en $\mathcal{A}$ tales que $X \subseteq U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n} \cup (X \setminus K)$. De lo anterior,

$$K \subseteq U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}.$$

Así, K es compacto y terminamos nuestra prueba. $\square$

Ahora estamos preparados para dar una prueba del Teorema de Heine-Borel.

Teorema 2.1.11 (Teorema de Heine-Borel)**.** *Sea K un subconjunto del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Entonces, K es compacto si, y solo si, K es cerrado y acotado.*

Demostración. Note que K es cerrado y acotado siempre que K sea compacto, por el Teorema 2.1.9. Recíprocamente, supongamos que K es cerrado y acotado. Como K es acotado, existe $R > 0$ tal que $K \subseteq B_d(0; R)$. Note que $B_d(0; R) \subseteq [-R, R]^n$. Por el Ejemplo 2.1.8, $[-R, R]^n$ es compacto. Así K es un cerrado contenido en el compacto $[-R, R]^n$. Finalmente, K es compacto por el Teorema 2.1.10. $\square$

En este punto resaltamos que si dotamos a $\mathbb{R}^n$ con la métrica d' definida en la Proposición 2.1.2, entonces la métrica usual d y la métrica d' son topológicamente equivalentes; esto es, generan la misma topología. Sin embargo, conjuntos como $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$, $[0, \infty)^n$ o $\{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 = \cdots = x_n\}$ son cerrados y acotados en $\mathbb{R}^n$ con la métrica d', pero no son compactos. Esto muestra que el Teorema de Heine-Borel muestra una propiedad de la métrica usual en $\mathbb{R}^n$.
A continuación mostramos la diferencia entre tener métricas equivalentes y métricas topológicamente equivalentes (ver definiciones 1.2.1 y 1.2.6).

Teorema 2.1.12. *Sean K un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y d y ρ métricas equivalentes, donde d es la métrica usual de $\mathbb{R}^n$. Entonces, K es compacto si, y solo si, K es cerrado y acotado en $(\mathbb{R}^n, \rho)$.*

Demostración. Note que K es cerrado y acotado siempre que K sea compacto, por el Teorema 2.1.9. Recíprocamente, supongamos que K es cerrado y acotado en $(\mathbb{R}^n, \rho)$. Como K es acotado, existe $R > 0$ tal que $K \subseteq B_\rho(0; R)$. Como d y ρ son métricas equivalentes, existen reales positivos c_1 y c_2 tales que

$$c_1\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq c_2\rho(x, y), \text{ para cualesquiera } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Con esto tenemos que $B_\rho(0; R) \subseteq B_d(0; c_2R)$. Note que $B_d(0; c_2R) \subseteq [-c_2R, c_2R]^n$. Por el Ejemplo 2.1.8, $[-c_2R, c_2R]^n$ es compacto. Así, K es un cerrado contenido en el compacto $[-c_2R, c_2R]^n$. Finalmente, K es compacto, por el Teorema 2.1.10. $\square$

En el capítulo anterior definimos las métricas d_1 y d_∞ en $\mathbb{R}^n$; métricas, que por la Proposición 1.2.3, son equivalentes. De esta manera podemos dotar a $\mathbb{R}^n$ de las métricas d_1 o d_∞, y usar la versión de Heine-Borel que mostramos en el Teorema 2.1.12 para mostrar si un subconjunto K de $\mathbb{R}^n$ es compacto.

2.2. Espacios completos

En esta sección mostraremos que la completez es una propiedad propia de la métrica. Es decir, existen espacios métricos homeomorfos tal que uno de ellos es completo y el otro no.
Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de *Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$, existe N tal que $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ para cualesquier $i, j \geq N$.

Proposición 2.2.1. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión. Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *para algún* $x_0 \in X$*, entonces* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to x_0$, existe N tal que $x_n \in B_d(x_0; \frac{\varepsilon}{2})$ para cada $n \geq N$. Sean $i, j \geq N$, entonces

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_0) + d(x_0, x_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De lo anterior, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. □

Definición 2.2.2. Un espacio métrico (X, d) es *completo* si toda sucesión de Cauchy converge.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión en $\mathbb{R}$ definida por $x_n = \frac{1}{n}$ para cada n. Por la Proposición 2.2.1, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Ahora considere $(0, 1)$ el espacio métrico con la métrica que hereda de $\mathbb{R}$. Note que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0, 1)$, pero no es convergente en $(0, 1)$. Esto es, $(0, 1)$ no es completo con la métrica usual en $\mathbb{R}$.

Ahora mostraremos algunos resultados para presentar ejemplos de espacios completos.

Proposición 2.2.3. *Sean* X *un espacio métrico completo y* $Y \subseteq X$*. Si* Y *es cerrado, entonces* Y *es completo.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en Y. Como $Y \subseteq X$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Así, existe $x_0 \in X$ tal que $x_n \to x_0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en Y y Y es cerrado, $x_0 \in Y$ y por tanto, Y es completo. □

Con el Ejemplo 2.1.4 y el siguiente teorema, tenemos en particular que el intervalo cerrado $[0, 1]$ es completo.

Teorema 2.2.4. *Todo espacio métrico compacto es completo.*

Demostración. Sean X un espacio métrico compacto y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Por la Proposición 2.1.6, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \to x_0$ para algún $x_0 \in X$. Sea $\epsilon > 0$. De esta manera, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n_k > n_0$. Por otro lado, siendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ con $n_1 > n_0$, tal que $d(x_{n_k}, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $m, n_k > n_1 > n_0$. Por lo tanto,

$$d(x_m, x_0) \leq d(x_m, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \epsilon, \quad \text{si } m > n_1.$$

En consecuencia, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. □

Ejemplo 2.2.5. El espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$ es completo para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^m$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x_l) < 1$ para cualesquiera $k, l \geq N$. Sea

$$M = \text{máx}\{d(x_1, 0), ..., d(x_{N-1}, 0), d(x_N, 0) + 1\}.$$

Nótese que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [-M, M]^m$. Como $[-M, M]^m$ es compacto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, por el Teorema 2.2.4. De lo anterior, $\mathbb{R}^m$ es completo.

El espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$ es completo y no compacto. Luego el recíproco del Teorema 2.2.4 no es cierto.

Notemos lo siguiente: Los espacios métricos $(0, 1)$ y $\mathbb{R}$ son homeomorfos; por ejemplo, basta considerar la función $f(t) = \tan(\pi t - \frac{\pi}{2})$ para cada $t \in (0, 1)$, y tenemos un homeomorfismo, y sin embargo, como hemos visto en esta sección $(0, 1)$ no es completo, y $\mathbb{R}$ si lo es. Consideremos en $(0, 1)$ la métrica:

$$\sigma(t, s) = |f(t) - f(s)|, \text{ para cada } t, s \in (0, 1).$$

Considerando $f\colon ((0, 1), \sigma) \to \mathbb{R}$ es una isometría y por tanto, un homeomorfismo. Esto es, $((0, 1), d)$ (donde d es la métrica usual de $\mathbb{R}$) y $((0, 1), \sigma)$ son homeomorfos; es decir, las métricas d y σ son métricas topológicamente equivalentes. Como vemos en el siguiente teorema $((0, 1), \sigma)$ es completo.

Teorema 2.2.6. *Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos y $f\colon X \to Y$ una isometría sobreyectiva. Si (X, d) es completo, entonces (Y, ρ) es también completo.*

Demostración. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en Y. Como f es una isometría sobreyectiva, es inmediato verificar que $(f^{-1}(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X (ver Definición 1.3.3). Como X es completo, existe $x_0 \in X$ tal que $f^{-1}(y_n) \to x_0$. Finalmente, como f es continua, $y_n \to f(x_0)$, donde $f(x_0) \in Y$. De lo anterior, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y Y es completo. $\square$

Lo que tenemos es que la completez es una propiedad propia de la métrica; el intervalo $(0, 1)$ como espacio topológico se le pueden considerar dos métricas, con una es completo y con la otra no. En el siguiente teorema mostramos que si un espacio métrico es homeomorfo a un completo, entonces existe una métrica sobre él que lo hace completo.

Teorema 2.2.7. *Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos homeomorfos. Si (X, d) es completo, entonces existe una métrica σ sobre Y, tal que ρ y σ son topológicamente equivalentes y (Y, σ) es completo.*

Demostración. Sea $h\colon (X,d) \to (Y,\rho)$ un homeomorfismo. Tomemos $f\colon X \to Y$ como biyección, sin topología, y definamos sobre Y la métrica

$$\sigma(y,z) = d(f^{-1}(y), f^{-1}(z)), \text{ para cualesquiera } y,z \in Y.$$

Es inmediato verificar que σ satisface las condiciones de la Definición 1.1.1. Así, $f\colon (X,d) \to (Y,\sigma)$ es una isometría sobreyectiva y por tanto, un homeomorfismo (ver Proposición 1.3.6). Como (X,d) es completo, por el Teorema 2.2.6, (Y,σ) es completo. Finalmente, note que $f \circ h^{-1}\colon (Y,\rho) \to (Y,\sigma)$ es un homeomorfismo y ρ y σ son topológicamente equivalentes. De esta manera concluimos nuestra prueba. □

A continuación mostraremos otro ejemplo.

Ejemplo 2.2.8. *Sea* $(0,1]$ *como subespacio de* $\mathbb{R}$*. Observe que si* d *es la métrica usual sobre* $\mathbb{R}$*,* $(0,1]$ *no es completo. Sea* $\rho\colon (0,1] \times (0,1] \to \mathbb{R}$ *definida para cada* $t,s \in (0,1]$ *por:*

$$\rho(t,s) = \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{s} \right|.$$

La función ρ *es una métrica y además, hace que la función* $g\colon (0,1] \to [1,\infty)$ *definida por* $g(x) = \frac{1}{x}$ *para cada* $x \in (0,1]$*, sea una isometría sobreyectiva.* $[0,\infty)$ *es cerrado en* $\mathbb{R}$*. Como* $\mathbb{R}$ *es completo (Ejemplo 2.2.5),* $[0,\infty)$ *es completo, por el Proposición 2.2.3. Finalmente,* $((0,1],\rho)$ *es completo por el Teorema 2.2.6.*

Finalizamos esta sección mostrando que la completez se preserva mediante métricas equivalentes.

Teorema 2.2.9. *Sean* X *un conjunto y* d *y* ρ *dos métricas equivalentes de* X*. Si* (X,d) *es completo, entonces* (X,ρ) *es completo.*

Demostración. Como d y ρ son equivalentes, por la Definición 1.2.1, existen c_1 y c_2 reales positivos tales que

$$c_1\rho(x,y) \leq d(x,y) \leq c_2\rho(x,y), \text{ para cualesquiera } x,y \in X.$$

Veamos que (X,ρ) es completo. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (X,ρ). Probemos primero que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (X,d). Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (X,ρ), existe N tal que $\rho(x_i,x_j) < \frac{\varepsilon}{c_2}$ para cada $i,j \geq N$. Así,

$$d(x_i,x_j) \leq c_2\rho(x_i,x_j) < \varepsilon,$$

para cualesquiera $i,j \geq N$. De lo anterior, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (X,d). Como (X,d) es completo, existe $x_0 \in X$ tal que $x_n \to x_0$ es (X,d). Para finalizar la prueba debemos probar que $x_n \to x_0$ en (X, ρ). Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe N tal que $x_n \in B_d(x_0; c_1\varepsilon)$ para todo $n \geq N$. Esto es, $d(x_0, x_n) < c_1\varepsilon$ para cada $n \geq N$. Tenemos así que $c_1\rho(x_0, x_n) \leq d(x_0, x_n) < c_1\varepsilon$ para todo $n \geq N$. Concluimos que $\rho(x_0, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ y $x_n \to x_0$ en (X, ρ). Por consiguiente, (X, ρ) es completo. $\square$

2.3. Continuidad uniforme

En esta sección trabajaremos con la funciones uniformemente continuas que definimos a continuación.

Definición 2.3.1. Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos y $f\colon X \to Y$ una función. Diremos que f es *uniformemente continua* si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$, siempre que $d(x, y) < \delta$.

Por definición, toda función uniformemente continua es continua. Además, si consideramos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ es continua, pero no es uniformemente continua. Una pregunta que nos interesa abordar en esta sección es: ¿podemos encontrar una métrica σ sobre $\mathbb{R}$, sin alterar la topología, tal que la función $f\colon \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \sigma)$ o $f\colon (\mathbb{R}, \sigma) \to \mathbb{R}$, sea uniformemente continua?

El siguiente teorema nos permite mostrar más ejemplos de funciones uniformemente continuas.

Teorema 2.3.2. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua entre espacios métricos. Si X es compacto, entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como f es continua, $\mathcal{U} = \{f^{-1}(B(y; \frac{\epsilon}{2})) \mid y \in Y\}$ es una cubierta abierta de X. Así, existe un número ρ asociado a $\mathcal{U}$ tal que si $d(x, x') < \rho$, entonces existe $y_0 \in Y$ tal que $\{x, x'\} \subseteq f^{-1}(B(y_0; \frac{\epsilon}{2}))$. De lo que se sigue que $d(f(x), f(x')) < \epsilon$ y f es uniformemente continua. $\square$

Note que toda isometría es uniformemente continua. Luego, para el caso de la función $f(x) = x^3$, haciendo uso que f es un homeomorfismo, podemos definir una nueva métrica de tal manera que f sea una isometría, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, por $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$ y de esta manera $f\colon (\mathbb{R}, \rho) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ es una isometría y por tanto, uniformemente continua.

Ejemplo 2.3.3. *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por $f(x) = x^2$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Existe una métrica ρ sobre $\mathbb{R}$ tal que $f\colon (\mathbb{R}, \rho) \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua.*

Consideremos el homeomorfismo $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido para cada $x \in \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 0; \\ -x^2, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Como hemos hecho en casos anteriores, convertimos h en una isometría sin alterar su topología definiendo la métrica $\rho\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\rho(x, y) = |h(x) - h(y)|$ para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y considerando $h\colon (\mathbb{R}, \rho) \to \mathbb{R}$.
Probemos que $f\colon (\mathbb{R}, \rho) \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \varepsilon$. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $\rho(x, y) < \delta$. Consideremos algunos casos:

1. $x, y \geq 0$. En este caso $\rho(x, y) = |x^2 - y^2| = |f(x) - f(y)| < \delta = \varepsilon$.
2. $x, y < 0$. Por definición de h, $\rho(x, y) = |-x^2 - (-y^2)| = |x^2 - y^2| = |f(x) - f(y)| < \delta = \varepsilon$.
3. $x < 0$ y $y \geq 0$. Ahora $\rho(x, y) = |-x^2 - y^2| = |x^2 + y^2| < \delta$. Note que

   $$|x^2 - y^2| \leq |x^2| + |y^2| = |x^2 + y^2|.$$

   De esto, $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| \leq |x^2 + y^2| < \delta = \varepsilon$.

Con lo anterior concluimos que f es uniformemente continua.

Con estos sencillos ejemplos se muestra que la continuidad uniforme es un propiedad propia de la métrica.

Teorema 2.3.4. *Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos y $f\colon (X, d) \to (Y, \rho)$ una función continua. Si σ es una métrica en X equivalente a d y f es uniformemente continua, entonces $f\colon (X, \sigma) \to (Y, \rho)$ es uniformemente continua.*

Demostración. Como d y σ son equivalentes, por la Definición 1.2.1, existen c_1 y c_2 reales positivos tales que

$$c_1\sigma(x, y) \leq d(x, y) \leq c_2\sigma(x, y), \text{ para cualesquiera } x, y \in X.$$

Veamos que $f\colon (X, \sigma) \to (Y, \rho)$ es uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$. Como $f\colon (X, d) \to (Y, \rho)$ es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon \text{ siempre que } d(x, y) < \delta.$$

Sea $\gamma = \frac{\delta}{c_2}$. Sean $x, y \in X$ tales que $\sigma(x, y) < \gamma$. Entonces, $\sigma(x, y) < \frac{\delta}{c_2}$; luego, $c_2\sigma(x, y) < \delta$. Como $d(x, y) \leq c_2\sigma(x, y)$, tenemos que $d(x, y) < \delta$ y por tanto, $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Con esto concluimos que $f\colon (X, \sigma) \to (Y, \rho)$ es uniformemente continua. $\square$

Terminamos el trabajo mostrando que siempre es posible modificar una métrica, sin alterar la topología, para convertir una función continua en uniformemente continua.
La métrica utilizada en el siguiente teorema fue sugerida por el doctor Michael Rincón, profesor de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Agradecemos al profesor Rincón por este valioso aporte al desarrollo de este trabajo.

Teorema 2.3.5. *Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos y $f\colon X \to Y$ una función continua. Si definimos*

$$\sigma(x, y) = d(x, y) + \rho(f(x), f(y)) \text{ para cualesquiera } x, y \in X,$$

entonces σ es una métrica topológicamente equivalente a d tal que $f\colon (X, \sigma) \to (Y, \rho)$ es uniformemente continua.

Demostración. Probemos primero que σ es una métrica. Por definición $\sigma(x, y) \geq 0$ para cada $x, y \in X$. Además, $\sigma(x, y) = 0$ si y solo si $d(x, y) = 0$ y $\rho(f(x), f(y)) = 0$; pero, como d es una métrica, tenemos que esto solo ocurre cuando $x = y$. Es inmediato verificar que $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$. Así, solamente debemos probar la desigualdad triangular. Sean x, y y z en X. Entonces, $\sigma(x, y) = d(x, y) + \rho(f(x), f(y))$. Como d y ρ son métricas, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ y $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), f(z)) + \rho(f(z), f(y))$. Luego,

$$\begin{aligned}\sigma(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) + \rho(f(x), f(z)) + \rho(f(z), f(y)) = \\ [d(x, z) + \rho(f(x), f(z))] + [d(z, y) + \rho(f(z), f(y))] = \sigma(x, z) + \sigma(z, y).\end{aligned}$$

Con lo anterior mostramos todas la condiciones dadas en la Definición 1.1.1, y σ es una métrica sobre X.

Ahora, con el Teorema 1.2.7, probaremos que las métricas d y σ son topológicamente equivalentes. Note que si $\sigma(x, y) < r$, para algún $r > 0$, entonces $d(x, y) < r$, pues $\rho(f(x), f(y)) \geq 0$. Así, $B_\sigma(x; r) \subseteq B_d(x; r)$ para cualesquiera $x \in X$ y $r > 0$. Con esto tenemos que $\tau_d \subseteq \tau_\sigma$.
Veamos ahora que $\tau_\sigma \subseteq \tau_d$. Sean $x \in X$ y $r > 0$. Como $f\colon (X, d) \to (Y, \rho)$ es continua en x, existe $s > 0$, tal que

$$\rho(f(x), f(z)) < \frac{r}{2}, \text{ siempre que } d(x, z) < s. \tag{2.1}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $s < \frac{r}{2}$. Debemos mostrar que $B_d(x; s) \subseteq B_\sigma(x; r)$. Sea $z \in B_d(x; s)$. Sabemos que $d(z, x) < s < \frac{r}{2}$ y por tanto, $\rho(f(x), f(z)) < \frac{r}{2}$, por (2.1). Así,

$$\sigma(x, z) = d(x, z) + \rho(f(x), f(z)) < s + \frac{r}{2} < r.$$

De lo anterior, $B_d(x;s) \subseteq B_\sigma(x;r)$. Concluimos de esta manera que las métricas d y σ son topológicamente equivalentes.

Finalmente, nos resta probar que $f\colon (X,\sigma) \to (Y,\rho)$ es uniformemente continua. Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon$ y si $\sigma(x,y) < \delta$, entonces $d(x,y) + \rho(f(x), f(y)) < \delta = \varepsilon$. Como $d(x,y) \geq 0$, tenemos que $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Es decir, f es uniformemente continua. $\square$

Bibliografía

[1] N. Bourbaki, Topologie générale, Springer Berlin, Heidelberg, 2006.

[2] J. Camargo, E. Villamizar, Topología general, Ediciones UIS, Colombia, 2020.

[3] I. Lakatos, Pruebas y Refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático, Alianza Universidad, Madrid, 1922.

[4] E. L. Lima, Espacios Métricos, Rio de Janeiro, IMPA, 2020.