TOPOLOGÍAS SOBRE ESPACIOS DE PALABRAS

GERARDO CORREDOR RINCÓN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2017

TOPOLOGÍAS SOBRE ESPACIOS DE PALABRAS

GERARDO CORREDOR RINCÓN

Trabajo de grado como requisito para optar al título de:

Matemático

Director:

CARLOS ENRIQUE UZCÁTEGUI AYLWIN

Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2017

"WABBA LUBBA DUB DUB"

Rick y Morty

Dedicado a:

Daniela Arana

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a Dios y a mi madre, Luz Marina Rincón que gracias a sus esfuerzos y sacrificios me han permitido ser quien soy.

A mis abuelos, Rosa Amelía Pimiento y Dionicio Rincón Lizcano que me formaron como persona, estando siempre a mi lado y siendo el motor de mi vida para seguir adelante.

Al profesor Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin que, como director de esta tesis, me ha orientado, apoyado, corregido y motivado a continuar con mis estudios.

Al profesor Hector Edonis Pinedo, que me brindó su amistad y ayuda a lo largo de mi carrera.

A todo aquel que durante los últimos cuatro años me brindó su amistad. En especial agradezco a mis amigos de carrera por su apoyo moral, por darme fuerzas en momentos difíciles y por todas las alegrías que pasamos. Mis mejores recuerdos de la universidad son gracias a ellos.

A cada profesor que contribuyó en mi formación como matemático.

Contenido

RESUMEN

TÍTULO: TOPOLOGÍAS SOBRE ESPACIOS DE PALABRAS. [1]

AUTOR: GERARDO CORREDOR RINCÓN.[2]

PALABRAS CLAVES: ESPACIO DE PALABRAS, ESPACIO DE SUCESIONES, TOPOLOGÍA PRODUCTO, RELACIÓN DE PREFIJO, ÁRBOLES DE PALABRAS, MÉTRICAS SOBRE PALABRAS.

DESCRIPCIÓN:

Estudiamos topologías definidas sobre espacios de palabras. Partiendo de un alfabeto X, definimos los conjuntos X^* y X^ω de las sucesiones finitas e infinitas respectivamente, y $X^\infty = X^* \cup X^\omega$.

En el segundo capítulo estudiamos el orden de prefijos $\sqsubseteq$ sobre X^∞. También se estudian los operadores δ y γ sobre los lenguajes (subconjuntos de X^*), y su relación con el conjunto de ramas de un árbol.

En el tercer capítulo se estudian las topologías sobre X^ω generadas por las métricas ρ y ρ_U, donde ρ_U es una métrica asociada a un lenguaje $U \subseteq X^*$. También estudiamos las topologías τ_R y $\tau_{(\sqsubseteq)}$ sobre X^∞, donde τ_R depende de un operador de Kuratowski, y $\tau_{(\sqsubseteq)}$ es una topología de Alexandroff que depende del orden de prefijos $\sqsubseteq$.

Mostraremos que las topologías métricas asociadas a los lenguajes U y V son iguales si y sólo si $\delta(U) = \delta(V)$. Por otra parte, mostraremos que la topología producto en X^ω es igual a la dada por la métrica ρ_{X^*}. También se verifica que los subconjuntos G_δ (intersección numerable de abiertos) de X^ω con la topología producto, son exactamente los conjuntos de la forma $\delta(U)$.

Finalmente, comparamos algunas de las características de las topologías que se definieron, teniendo en cuenta las topologías que reciben X^* y X^ω como subespacio topológico de X^∞.

[1] Trabajo de grado.

[2] Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Ph.D. en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: TOPOLOGIES ON SPACES OF WORDS. [3]

AUTOR: GERARDO CORREDOR RINCON. [4]

KEY WORDS: WORD SPACE, SEQUENCES SPACE, PRODUCT TOPOLOGY, PREFIX RELATIONSHIP, WORD TREES, METRICS ABOUT WORDS.

DESCRIPTION:

We study topologies defined on word spaces. For a finite non empty set X, let X^* and X^ω be the collection of finite and infinite sequences of element of X, respectively, and $X^\infty = X^* \cup X^\omega$.

In the second chapter we study the order of prefixes $\sqsubseteq$ over X^∞. We also study the operators δ and γ on the languages (subsets of X^*), and its relation to trees.

In the third chapter we study the topologies on X^ω generated by the metrics ρ and ρ_U, where ρ_U is a metric associated with a language $U \subseteq X^*$. We also study the topologies τ_R and $\tau_{(\sqsubseteq)}$ on X^∞, where τ_R is defined by a Kuratowski closure operator, and $\tau_{(\sqsubseteq)}$ is the Alexandroff topology associated to the order of prefixes $\sqsubseteq$.

We show that the metric topologies associated with the languages U and V are equal if and only if $\delta(U) = \delta(V)$. On the other hand, we will show that the product topology in X^ω is metrizable by the metric ρ_{X^*}. We prove that the G_δ subset of X^ω (countable intersection of open sets) with the product topology, are exactly the sets of the form $\delta(U)$.

Finally, we compare all topologies that were defined in this monography including the topologies induced on X^* and X^ω as subspace of X^∞.

[3] Grade work.

[4] School of Mathematics. Faculty of Sciences. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Ph.D. en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de esta tesis es estudiar algunas topologías definidas sobre espacios de palabras. Para definir esos espacios, partimos de un conjunto X llamado alfabeto, y denotamos con X^* al conjunto de las sucesiones finitas de elementos del alfabeto, que se llaman palabras, incluyendo la palabra vacía λ. Los subconjuntos de X^* son llamados lenguajes. Por otra parte, X^ω es el conjunto de las sucesiones infinitas sobre X. Finalmente, $X^\infty = X^* \cup X^\omega$ denota al espacio de palabras que consiste de las sucesiones finitas e infinitas en el alfabeto X.

En el primer capítulo se enuncian algunos teoremas y definiciones clásicas de la topología. En el segundo se inicia con los conceptos básicos sobre los espacios de palabras, en particular estudiamos el orden de prefijo entre palabras. Se definen los operadores δ y γ sobre lenguajes. El operador δ, definido en [2], se usa para caracterizar algunos subconjuntos especiales de palabras. Al final del segundo capítulo se introduce el concepto de árbol, el cual proviene de la teoría descriptiva de conjuntos. Mostraremos la relación entre el conjunto de ramas de un árbol y el operador δ (ver teorema 2.18). Para el desarrollo de esta sección nos guiamos por los textos [3] y [4].

El tercer capítulo contiene la parte mas importante de este trabajo. En él se definen algunas topologías sobre espacios de palabras. La hemos dividido en dos secciones. En la primera presentamos topologías sobre X^ω y en la segunda sobre X^∞. Nos hemos guiado, en parte, en los trabajos [1, 2, 6]. Para cada lenguaje $U \subseteq X^*$ se introduce una métrica ρ_U sobre X^ω. Uno de los objetivos de esta tesis es demostrar que las topologías métricas asociadas a dos lenguajes U, V son iguales si y sólo si $\delta(U) = \delta(V)$ (ver teorema 3.19). Por otra parte, mostraremos un resultado conocido, que la topología producto en X^ω es igual a la dada por la métrica ρ_{X^*}. Otro de los objetivos de la tesis es demostrar que los subconjunto de X^ω que son la intersección numerable de abiertos de la producto (es decir, un conjunto G_δ) son exactamente los conjuntos de la forma $\delta(U)$ (denotado U^δ).

En relación a las topología en X^∞, tenemos las topologías τ_{ρ_∞} y τ_R definidas en [1]. La métrica ρ_∞ resulta ser una extensión de la métrica ρ_{X^*} definida en X^ω. Por otra parte, la topología τ_R resulta tener propiedades interesantes, dado que no es metrizable, pero si completamente regular, además, posee una cubierta disjunta de dos subconjuntos, que resultan ser subespacios discretos de τ_R. Por último, tenemos la topología Alexandroff asociada a un orden muy natural sobre palabras: el orden de prefijo.

Concluimos el trabajo comparando todas las topologías estudiadas. Teniendo en cuenta las topologías que reciben X^* y X^ω como subespacio de X^∞.

La gran mayoría de las demostraciones de los resultados presentados son propias, aunque muchos de ellos son teoremas conocidos en la literatura o aparecen sin demostración en los trabajos consultados. Queremos mencionar la ayuda especial del profesor Ludwig Staiger, uno de los autores de los textos [1, 2, 5, 6], por su ayuda en la demostración del teorema 3.24. Ese teorema aparece sin demostración en [2], y fue ese trabajo el que nos motivó a estudiar las topologías sobre los espacios de palabras.

Los espacios de palabras son estudiados principalmente en la teoría de autómatas. También pueden ser estudiados desde un punto de vista geométrico. Para nuestro trabajo sólo estudiaremos los espacios de palabras desde un punto de vista topológico.

Capítulo

$\boxed{1}$

PRELIMINARES

Para poder presentar las topologías sobre un espacio de palabras, se enuncian a continuación algunas definiciones y teoremas que son importantes para el desarrollo de los siguientes capítulos.

1.1 CONCEPTOS TOPOLÓGICOS

Sea X un conjunto.

Definición 1.1. $d : X \times X \to [0, \infty)$ *es una* ***métrica*** *sobre* X *si:*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x, y \in X$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(x, y)\ \forall x, y, z \in X$.

El par (X, d) es llamado **espacio métrico**, en el cual se definen las bolas $d-$abiertas con centro en x y radio ε como $B_d(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.

Ejemplo 1.2. *Sea* $X = \mathbb{R}^2$*:*

- $d_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

- $d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

- $d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.

d_1, d_2, d_∞ son métricas sobre $\mathbb{R}^2$. Se dice que un conjunto A es $d-$abierto en un espacio métrico si para todo $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(x, \varepsilon) \subseteq A$.

Definición 1.3. *Sea (X, d) un espacio métrico, se dice que $x \in X$ es un **punto aislado** si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_d(x, \varepsilon) = \{x\}$. En particular, si todos los puntos de un subconjunto $A \subseteq X$ son aislados, decimos que A es un **conjunto discreto**.*

Definición 1.4. *Sean X, Y espacios topológicos, decimos que $f : X \to Y$ es **continua** si y solo si $f^{-1}(V)$ es abierto en X para todo $V \subseteq Y$ abierto.*

Definición 1.5. *Se dice que $f : X \to Y$ es un **homeomorfismo** si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son continuas.*

Definición 1.6. *Sean d_1 y d_2 métricas sobre un conjunto X, se dice que d_1 es más fina que d_2, si la función identidad $I_d : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es continua. En particular si I_d es un homeomorfismo se dice que las **métricas son equivalentes**.*

Definición 1.7. *Una **topología** sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X tal que:*

1. $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$.
2. *Si* $A_i \in \tau$ *para cada* $i \in I$ *entonces* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.
3. *Si* $A, B \in \tau$ *entonces* $A \cap B \in \tau$.

El par (X, τ) es llamado **espacio topológico**. Si $A \in \tau$ se dice que A es abierto de X o que A es $\tau-$abierto, y $B \subseteq X$ se dice cerrado, si $X \setminus B$ es abierto.

Ejemplo 1.8. *Sea X un conjunto:*

- $\tau = \mathcal{P}(X)$ *es la topología discreta.*

- $\tau = \{\emptyset, X\}$ *es la topología indiscreta o grosera.*

- *Sea (X, d) un espacio métrico, $\tau_d = \{A \subseteq X \mid A$ es $d-$abierto$\}$ es la topología generada por la métrica d.*

Definición 1.9. *Un subconjunto F de un espacio topológico es **G_δ**, si es una intersección numerable de conjuntos abiertos.*

En los espacios métricos o topológicos, notaremos con U_A a un conjunto abierto que contiene a A. Estos conjuntos pueden ser llamados **entornos** de A.

A continuación definimos algunos axiomas de separación.

Definición 1.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico, decimos que:*

- *El espacio es T_1 o de **Fréchet** si y sólo si para todo par de puntos $x, y \in X$, existen dos entornos U_x, U_y tales que $y \notin U_x$ y $x \notin U_y$. Una equivalencia importante es que todo singleton $\{x\}$ es cerrado.*

- *El espacio es **completamente regular** si y sólo si para todo punto $x \in X$ y para todo cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) = 1$.*

- *El espacio es T_4 o **normal** si y sólo si es T_1 y para todo par de cerrados $A, B \subseteq X$ tal que $A \cap B = \emptyset$, existen dos entornos U_A y U_B tales que $U_A \cap U_B = \emptyset$.*

Definición 1.11. *Dado un conjunto X, sean τ_1, τ_2 dos topologías sobre X. Decimos que las topologías son iguales si para todo $A \subseteq X$:*

$$A \text{ es } \tau_1\text{-abierto} \Leftrightarrow A \text{ es } \tau_2\text{-abierto}.$$

Definición 1.12. *Un subconjunto de un espacio topológico es perfecto si es cerrado, no vacío, y no tiene puntos aislados.*

Definición 1.13. *$K : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un **operador de Kuratowski** sobre X si cumple con las siguientes propiedades:*

1. *$K(\emptyset) = \emptyset$.*

2. $A \subseteq K(A)$, $\forall A \subseteq X$.

3. $K(K(A)) = K(A)$, $\forall A \subseteq X$.

4. $K(A) \cup K(B) = K(A \cup B)$, $\forall A, B \subseteq X$.

Los operadores de Kuratowski son esenciales para comprender la topología definida en la sección 3.2.2. El siguiente teorema nos indica cómo caracterizar las topologías a través de estos operadores.

Teorema 1.14. *$K : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ es un operador de Kuratowski si y sólo si existe una topología τ sobre X tal que $K(A) = \overline{A}$, para todo A subconjunto de X.*

Definición 1.15. *Sea X un conjunto. Decimos que una relación $\leq_X$ es un **orden** sobre X, si para todo $x, y, z \in X$:*

- $x \leq_X x$. *(Reflexiva)*
- *Si* $x \leq_X y$ *y* $y \leq_X x$ *entonces* $x = y$. *(Antisimetría)*
- *Si* $x \leq_X y$ *y* $y \leq_X z$ *entonces* $x \leq_X z$. *(Transitiva)*

*Adicionalmente, se dice **orden lineal** si cumple que:*

- $(\forall x, y \in X)\ (x <_X y \ \vee \ x \geq_X y)$.

Definición 1.16. *Sea X un conjunto con un orden $\leq_X$. Decimos que el orden es **denso** si para todo $x, y \in X$ tal que $x <_X y$ existe $z \in X$ tal que $x <_X z <_X y$.*

Definición 1.17. *Dado $(X, \leq_X)$ y $A \subseteq X$, considere los siguientes elementos y conjuntos:*

- $m = \text{máx}(A) \overset{def}{\Leftrightarrow} m \in A$ *y para todo* $a \in A,\ a \leq_X m$
- $n = \text{mín}(A) \overset{def}{\Leftrightarrow} n \in A$ *y para todo* $a \in A,\ a \geq_X n$.
- r *es* MAXIMAL *de* $A \overset{def}{\Leftrightarrow} r \in A$ *y para todo* $a \in A,\ r \not< a$.

- s *es* MINIMAL *de* $A \overset{def}{\Leftrightarrow} s \in A$ *y para todo* $a \in A,\ s \not> a$.

- $CS(A) := \{x \in X \mid \forall a \in A \ \ a \leq_X x\}$. *(Cotas superiores)*

- $CI(A) := \{x \in X \mid \forall a \in A \ \ x \leq_X a\}$. *(Cotas inferiores)*

- $\sup(A) := \text{mín}\,(CS(A))$. *(Supremo)*

- $\text{ínf}(A) := \text{máx}\,(CI(A))$. *(Infimo)*

En el siguiente capítulo se definen varios órdenes sobre los espacios de palabras, donde podemos caracterizar los elementos anteriores de una forma particular.

Definición 1.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que S es una* ***subbase*** *de τ, si S es una subcolección de τ, tal que todo conjunto abierto propio no vacío en τ se pueda escribir como la unión de intersecciones finitas de elementos de S.*

Definición 1.19. *Para una familia indexada de conjuntos $\{X_i\}_{i\in I}$, su* ***producto cartesiano*** *se denota como:*

$$\prod_{i\in I} X_i := \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid f(i) \in X_i \text{ para todo } i \in I \right\}.$$

Para poder definir la topología producto en términos de una subbase, definimos a continuación las funciones proyecciones.

Definición 1.20. *Dada una familia de conjuntos $\{X_i\}_{i\in I}$, las funciones:*

$$\begin{array}{rccc} \pi_j : & \prod_{i\in I} X_i & \to & X_j \\ & f & \to & f(j) \end{array}$$

Se denominan ***proyecciones*** *de $\prod_{i\in I} X_i$, para cada $j \in I$.*

Ejemplo 1.21. *Sea $X_n = \{0, 1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos el* ***espacio de Cantor***

$$\mathcal{C} := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}\,.$$

Donde sus proyecciones $\pi_n : \mathcal{C} \to \{0,1\}$ *para cada* $f \in \mathcal{C}$ *están dadas por* $\pi_n(f) = f(n)$*. Luego el conjunto* $S = \{\pi_n^{-1}(\{i\}) \mid i \in \{0,1\}$ *y* $n \in \mathbb{N}\}$ *es una subbase que genera la topología dada a* $\mathcal{C}$*.*

Capítulo

2

ESPACIOS DE PALABRAS

2.1 NOCIONES BÁSICAS

Se denota con X al conjunto del **alfabeto**. Supondremos que $2 \leq |X| < \infty$.

Se denota con X^* al conjunto de las **palabras** finitas sobre X, incluyendo la palabra vacía λ. Por ejemplo: $v = v_1 v_2 v_3 ... v_k$ tal que $v_i \in X$ para todo $i \in \{1, 2, 3...k\}$. Donde k es la **longitud** de la palabra $v \in X^*$, la cual se denota por $|v|$. Además, $|\lambda| = 0$.

Se denota con X^ω al conjunto de las **sucesiones** infinitas sobre X, es decir, $x = x_1 x_2 x_3 ... x_r x_{r+1} ...$ tal que $x_i \in X$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Para formalizar un poco más los conceptos anteriores, X^ω se puede ver como el producto cartesiano infinito (numerable) de $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

$$X^\omega := \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$$

Donde $X_i = X$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y cada $f \in \prod X_i$ se identifica por un $x \in X^\omega$, donde cada componente $x_i := f(i)$, $(i \in \mathbb{N})$.

De forma similar X^* se puede ver como la unión de todos los productos cartesianos finitos de X.

$$X^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} X_i$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, cada $f \in \prod_{i=1}^{n} X_i$ se identifica por un $u \in X^*$, donde $|u| = n$ y cada componente $u_i := f(i)$, $(i \in \{1, 2, \cdots, n\})$.

Ejemplo 2.1. *Sea* $X = \{0, 1\}$

Palabras	*Sucesiones*
$u = 10110$	$x = 0101010101 \cdots\cdots$
$v = 01000111$	$y = 0110100110010110 \cdots\cdots$

Se denota con X^∞ al conjunto de palabras y sucesiones, es decir:

$$X^\infty := X^* \cup X^\omega.$$

A los elementos de este conjunto los llamamos **cadenas**.

Se denota con w^R a la **inversa** de una palabra $w \in X^*$, lo cual consiste en escribir al revés una palabra dada. Por ejemplo: $(ab)^R = ba$.

Nota: Cuando una palabra es igual a su inversa, se dice que es un **palíndromo**.

Un **lenguaje** es un subconjunto $U \subseteq X^*$.

La **concatenación** (o producto) entre palabras y sucesiones se denota por $w.v$ y $w.x$ tal que $v, w \in X^*$ y $x \in X^\omega$.

Ejemplo 2.2. *Si* $u = u_1u_2u_3 \cdots u_n$, $w = w_1w_2w_3 \cdots w_m$ *y* $x = x_1x_2x_3 \cdots$ *entonces:*

$$u.w = u_1u_2u_3 \cdots u_nw_1w_2w_3 \cdots w_m.$$

y

$$u.x = u_1u_2u_3 \cdots u_nx_1x_2x_3 \cdots .$$

El conjunto de concatenaciones entre una palabra $w \in X^*$ y un subconjunto de cadenas $A \subseteq X^\infty$ se denota por $w.A$, es decir:

$$w.A := \bigcup_{r \in A} w.r.$$

De igual forma, escribimos la concatenación de dos subconjuntos $W \subseteq X^*$ y $A \subseteq X^\infty$ como:

$$W.A := \bigcup_{w \in W} \bigcup_{r \in A} w.r.$$

Sea $r \in X^\infty$. La notación $r \upharpoonright_n$ se refiere al segmento inicial de r de longitud n. Este segmento es llamado **prefijo**, es decir:

$$r \upharpoonright_n := r_1 r_2 r_3 \cdots r_n.$$

Se denota con $P(r)$ al conjunto de prefijos de $r \in X^\infty$, donde:

$$P(r) := \{r \upharpoonright_n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ , } r \upharpoonright_0 = \lambda.$$

De igual forma, escribimos el conjunto de prefijos de un subconjunto $A \subseteq X^\infty$ como:

$$P(A) := \bigcup_{r \in A} P(r).$$

2.2 UN ORDEN SOBRE LOS ESPACIOS DE PALABRAS

Esta sección está dedicada al estudio de algunos órdenes que podemos aplicar sobre los espacios de palabras. De igual forma estudiaremos las extensiones de algunos órdenes propuestos.

Definimos la relación "$\sqsubseteq$" de prefijos sobre X^∞.

Definición 2.3. *Sean* $r, s \in X^{\infty}$ *entonces:*

$$r \sqsubseteq s \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists s' \in X^{\infty} \text{ tal que } r.s' = s.$$

Nótese que si $w, v \in X^*$ y $x \in X^{\omega}$ tenemos que:

$w \sqsubseteq v \Leftrightarrow \exists v' \in X^*$ tal que $w.v' = v$.

$w \sqsubseteq x \Leftrightarrow \exists x' \in X^{\omega}$ tal que $w.x' = x$.

La definición anterior se puede escribir de manera equivalente como:

$$r \sqsubseteq s \;\Leftrightarrow\; (\exists n \in \mathbb{N})(r = s\restriction_n).$$

Proposición 2.4. *" $\sqsubseteq$ " es una relación de orden, pero no es un orden lineal.*

Demostración. Sean $r, s, t \in X^{\infty}$:

- Claramente $r\lambda = r$ y $\lambda \in X^{\infty}$, entonces $r \sqsubseteq r$.
- Si $r \sqsubseteq s$ y $s \sqsubseteq r$, existen $r', s' \in X^{\infty}$ tal que $r.r' = s$ y $s.s' = r$. Veamos que $r'.s' = \lambda$. Sea $r.(r'.s') = (r.r').s' = s.s' = r$, entonces $r' = s' = \lambda$. Por lo tanto $r = s$.
- Si $r \sqsubseteq t$ y $t \sqsubseteq s$, existen $r', t' \in X^{\infty}$ tal que $r.r' = t$ y $t.t' = s$. Veamos que $r.(r'.t') = s$. Sea $r.(r'.t') = (r.r').t' = t.t' = s$, donde $r'.t' \in X^{\infty}$, entonces $r \sqsubseteq s$.

Ahora veamos que no es un orden lineal. Dado que $|X| \geq 2$, tomamos $a, b \in X$ $(a \neq b)$. Luego $ab \not\sqsubseteq ba$ y $ba \not\sqsubseteq ab$. Así " $\sqsubseteq$ " no es una relación de orden lineal. □

Nótese que si $|X| = 1$, es claro que para todo $r, s \in X^{\infty}$ se tiene que $r \sqsubseteq s \vee s \sqsubseteq r$, entonces " $\sqsubseteq$ " seria una relación de orden lineal. El orden de prefijos nos ayuda a reescribir mejor algunos conjuntos ya mencionados. Los cuales son la base para estudiar y caracterizar las topologías sobre un espacio de palabras, en los siguientes capítulos.

Definición 2.5. *Sea $w \in X^*$ y $r \in X^\infty$ considere los siguientes conjuntos:*

1. $P(r) := \{w \in X^* \mid w \sqsubseteq r\}$ *(Prefijos de r).*
2. $w.X^* := \{u \in X^* \mid w \sqsubseteq u\}$ *(Palabras de prefijo w).*
3. $w.X^\omega := \{x \in X^\omega \mid w \sqsubseteq x\}$ *(Sucesiones de prefijo w).*
4. $w.X^\infty := \{r \in X^\infty \mid w \sqsubseteq r\}$

Ya definido el conjunto de prefijos, se puede ver que dado $r \in X^\infty$, el orden inducido al subconjunto $P(r) \subseteq X^\infty$ es un orden lineal. También podemos preguntarnos cómo caracterizar algunos elementos y subconjuntos de X^∞ con este orden. (Ver definición 1.17).

Teorema 2.6. *Sea $(X^\infty, \sqsubseteq)$ y $A \subseteq X^\infty$ tenemos las siguientes afirmaciones:*

1. $u = \text{máx}(A)$ *si y sólo si* $CS(A) = u.X^\infty$.
2. $v = \text{mín}(A)$ *si y sólo si* $CI(A) = P(v)$.
3. $CS(A) = \{t \in X^\infty \mid A \subseteq P(t)\}$.
4. $CI(A) = \bigcap_{t \in A} P(t)$.
5. r *es* MAXIMAL *de* A *si y sólo si* $r \in A$ *y* $r \notin \bigcup_{t \in (A \setminus \{r\})} P(t)$.
6. s *es* MINIMAL *de* A *si y sólo si* $s \in A$ *y* $P(s) \cap (A \setminus \{s\}) = \emptyset$.
7. *Si* $|A \cap X^\omega| \geq 2$ *entonces* $CS(A) = \emptyset$.

2.3 LOS OPERADORES δ Y γ

En esta sección presentamos los operadores δ y γ sobre lenguajes, los cuales se usan durante el desarrollo de este trabajo. El operador δ, definido en [2], nos ayuda a caracterizar los conjuntos G_δ (definición 1.9) sobre la topología producto, y también a definir una topología sobre el espacio X^∞ en el la sección 3.2.2 .

Definición 2.7. *Dado un lenguaje $U \subseteq X^*$, considere el siguiente conjunto:*

$$U^\delta := \{x \in X^\omega \mid P(x) \cap U \text{ es infinito } \}.$$

Note que δ se puede ver como una aplicación $\delta : \mathcal{P}(X^*) \to \mathcal{P}(X^\omega)$ donde $\delta(U) = U^\delta$.

Ejemplo 2.8. *Sea $U \subseteq X^*$ con $X = \{0, 1\}$. Luego:*

- *Si U es finito entonces $U^\delta = \emptyset$.*
- *Si $U = 01.X^*$ entonces $U^\delta = 01.X^\omega$.*
- *Si $U = \{0, 01\}^*$ entonces $U^\delta = \{0, 01\}^\omega$.*
- *Si $U = \{0^n.1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ entonces $U^\delta = \emptyset$.*
- *Si $U = \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ entonces $U^\delta = \{0\}^\omega$.*
- *Si $U = \{u \in X^* \mid u = u^R\}$ es el conjunto de los palíndromos, entonces $U^\delta = \{x \in X^\omega \mid (\forall n \in \mathbb{N})(\exists n_0 \geq n)$ tal que $x \upharpoonright_{n_0} = (x \upharpoonright_{n_0})^R\}$.*

Proposición 2.9. *Dados dos lenguajes $U, V \subseteq X^*$, se tienen las siguientes propiedades:*

1. $(U.X^*)^\delta = U.X^\omega$.
2. $(U \cup V)^\delta = U^\delta \cup V^\delta$.
3. $(U \cap V)^\delta \subseteq U^\delta \cap V^\delta$.
4. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(U_n)^\delta \subseteq \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)^\delta$.
5. *Si $U \subseteq V$ entonces $U^\delta \subseteq V^\delta$.*
6. *Dado A finito tal que $A \subseteq U$ entonces $U^\delta = (U \setminus A)^\delta$.*
7. *Si todos los elementos de $U \cup V$ son minimales entonces: $(U.X^*)^\delta \subseteq (V.X^*)^\delta$ si y sólo si $U \subseteq V$.*

8. *Si* $A =$ *minimales*$(U, \sqsubseteq)$ *entonces* $(A.X^*)^\delta = (U.X^*)^\delta$.

Demostración. Sean $U, V \subseteq X^*$

1.
$$\begin{aligned} \text{Si } x \in (U.X^*)^\delta &\Leftrightarrow P(x) \cap U.X^* \text{ es infinito} \\ &\Leftrightarrow \text{existe } u \in U \text{ tal que } u \sqsubseteq x \\ &\Leftrightarrow x \in U.X^\omega. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} (U \cup V)^\delta &= \{x \in X^\omega \mid P(x) \cap (U \cup V) \text{ es infinito}\} \\ &= \{x \in X^\omega \mid (P(x) \cap U) \cup (P(x) \cap V) \text{ es infinito}\} \\ &= \{x \in X^\omega \mid P(x) \cap U \text{ es infinito}\} \cup \{x \in X^\omega \mid P(x) \cap V \text{ es infinito}\} \\ &= U^\delta \cup V^\delta. \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} (U \cap V)^\delta &= \{x \in X^\omega \mid P(x) \cap (U \cap V) \text{ es infinito}\} \\ &= \{x \in X^\omega \mid (P(x) \cap U) \cap (P(x) \cap V) \text{ es infinito}\} \\ &\subseteq \{x \in X^\omega \mid P(x) \cap U \text{ es infinito}\} \cap \{x \in X^\omega \mid P(x) \cap V \text{ es infinito}\} \\ &\subseteq U^\delta \cap V^\delta. \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_n)^\delta &\Rightarrow \text{Existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in (U_{n_0})^\delta \\ &\Rightarrow P(x) \cap U_{n_0} \text{ es infinito.} \\ &\Rightarrow P(x) \cap \left(\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \text{ es infinito.} \\ &\Rightarrow x \in \left(\textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right)^\delta. \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in U^\delta &\Rightarrow P(x) \cap U \text{ es infinito}, \quad (U \subseteq V) \\ &\Rightarrow P(x) \cap V \text{ es infinito} \\ &\Rightarrow x \in V^\delta \end{aligned}$$

6. Veamos que $(U \setminus A)^\delta = U^\delta$.

   $\subseteq$ Sea $x \in (U \setminus A)^\delta$, entonces $P(x) \cap (U \setminus A) = (P(x) \cap U) \cap A^c$ es infinito. por lo tanto $P(x) \cap U$ es infinito. Así $x \in U^\delta$.

$\supseteq$ Sea $x \in U^\delta$, entonces $P(x) \cap U$ es infinito. Dado que A es finito $(P(x) \cap U) \setminus A = P(x) \cap (U \setminus A)$ es infinito. Así $x \in (U \setminus A)^\delta$.

7. $\Rightarrow$ Si $t \in U$ entonces $t.X^\omega \subseteq U.X^\omega$ (ítem 5). Dado que $U.X^\omega \subseteq V.X^\omega$ entonces $t.X^\omega \subseteq V.X^\omega$, es decir, existe $s \in V$ tal que $s \sqsubseteq t$ o $t \sqsubseteq s$. Dado que todo elemento de $U \cup V$ es minimal, entonces $s = t$, es decir, $t \in V$. Así $U \subseteq V$.

   $\Leftarrow$ Veamos que $U.X^\omega \subseteq V.X^\omega$ (por el ítem 1). Si $x \in U.X^\omega$, existe $u \in U$ tal que $u \sqsubseteq x$. Ya que $U \subseteq V$ entonces $u \in V$, es decir, $x \in V.X^\omega$. Así $(U.X^*)^\delta \subseteq (V.X^*)^\delta$.

8. Veamos que $A.X^\omega = U.X^\omega$ (ver ítem 1).

   $\subseteq$ Es claro que $A \subseteq U$ entonces $(A.X^*)^\omega \subseteq (U.X^*)^\omega$, es decir $A.X^\omega \subseteq U.X^\omega$.

   $\supseteq$ Si $x \in U.X^\omega$ entonces existe $u \in U$ tal que $u \sqsubseteq x$. Entonces existe $v \in A$ tal que $v \sqsubseteq u$, ya que $A =$ minimales$(U, \sqsubseteq)$. Por lo tanto $v \sqsubseteq x$. Así $x \in A.X^\omega$, es decir $U.X^\omega \subseteq A.X^\omega$.

$\square$

Teorema 2.10. *Sea $U \subseteq X^*$, entonces $U^\delta \neq \emptyset$ si y sólo si existe una familia de palabras $\{(u)_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq U$ tal que $(u)_i \sqsubset (u)_{i+1}$.*

Demostración. Sea $U \subseteq X^*$.

$\Rightarrow$) Si $U^\delta \neq \emptyset$, entonces existe $x \in X^\omega$ tal que $P(x) \cap U$ es infinito. Es decir, existe una familia infinita de prefijos $\{(u)_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq P(x)$ tal que $\{(u)_i\}_{i\in\mathbb{N}} = (P(x) \cap U)$. Dado que $((P(x) \cap U), \sqsubseteq)$ tiene inducido un orden total, podemos considerar sin pérdida de generalidad que $(u)_i \sqsubset (u)_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Además es claro que $\{(u)_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq U$.

$\Leftarrow$) Si existe una familia de palabras $\{(u)_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq U$ tal que $(u)_i \sqsubset (u)_{i+1}$. Veamos que $U^\delta \neq \emptyset$, Es claro que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $n_0 > n$ tal que $|(u)_i| = n_0$

para algún $i \in \mathbb{N}$. Así, tome $x \in X^\omega$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, x_n es igual al n-ésimo término de la palabra $(u)_i$, es decir, $x_n = (u)_{i_n}$. Note que $(u)_{i_n} = (u)_{k_n}$ para todo $k \geq i$. Por lo tanto $(u)_i \sqsubseteq x$ para todo $i \in \mathbb{N}$, luego $\{(u)_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq (P(x) \cap U)$, entonces $P(x) \cap U$ es infinito, por lo tanto $x \in U^\delta$. Así $U^\delta \neq \emptyset$.

□

A continuación definimos el operador γ, el cual nos caracteriza algunos conjuntos en el siguiente capítulo.

Definición 2.11. *Dado un lenguaje $V \subseteq X^*$, considere el siguiente conjunto:*

$$V^\gamma := \{x \in X^\omega \mid P(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Recuerde que λ es la palabra vacía. Note que γ se puede ver como una aplicación:

$$\begin{aligned} \gamma : \ \mathcal{P}(X^*) &\to \mathcal{P}(X^\omega) \\ V &\to V^\gamma. \end{aligned}$$

A continuación se escogen los mismos lenguajes del ejemplo 2.8.

Ejemplo 2.12. *Sea $V \subseteq X^*$ con $X = \{0,1\}$. Luego:*

- *Si V es finito entonces $V^\gamma = V.X^\omega$.*
- *Si $V = 01.X^*$ entonces $V^\gamma = 01.X^\omega$.*
- *Si $V = \{0, 01\}^*$ entonces $V^\gamma = 0.X^\omega$.*
- *Si $V = \{0^n.1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ entonces $V^\gamma = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} (0^n.1^n).X^\omega = V.X^\omega$.*
- *Si $V = \bigcup\limits_{w\in X^*} \{w.0\}$ entonces $V^\gamma = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (1^n.0).X^\omega$.*
- *Si $V = \{v \in X^* \mid v = v^R\}$ es el conjunto de los palíndromos, entonces $V^\gamma = X^\omega$.*

En la siguiente proposición podemos notar que γ tiene propiedades similares a las de δ.

Proposición 2.13. *Dados dos lenguajes $U, V \subseteq X^*$, se tienen las siguientes propiedades:*

1. $V^\gamma = V.X^\omega$
2. $(U \cup V)^\gamma = U^\gamma \cup V^\gamma$.
3. $(U \cap V)^\gamma \subseteq U^\gamma \cap V^\gamma$.
4. *Si* $U \subseteq V$ *entonces* $U^\gamma \subseteq V^\gamma$.
5. *Si todos los elementos de* $U \cup V$ *son minimales entonces:* $(U)^\gamma \subseteq (V)^\gamma$ *si y sólo si* $U \subseteq V$.
6. *Si* $A =$ *minimales*$(U, \sqsubseteq)$ *entonces* $(A)^\gamma = (U)^\gamma$.

Demostración. Sean $U, V \subseteq X^*$:

1.
$$\begin{aligned} x \in V^\gamma &\Leftrightarrow P(x) \cap V \neq \{\lambda\} \\ &\Leftrightarrow (\exists v \in V)(v \sqsubseteq x) \\ &\Leftrightarrow x \in V.X^\omega \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} (U \cup V)^\gamma &= \{x \in X^\omega \mid P(x) \cap (U \cup V) \neq \{\lambda\}\} \\ &= \{x \in X^\omega \mid (P(x) \cap U) \cup (P(x) \cap V) \neq \{\lambda\}\} \\ &= \{x \in X^\omega \mid P(x) \cap U \neq \{\lambda\}\} \cup \{x \in X^\omega \mid P(x) \cap V \neq \{\lambda\}\} \\ &= U^\gamma \cup V^\gamma. \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} (U \cap V)^\gamma &= \{x \in X^\omega \mid P(x) \cap (U \cap V) \neq \{\lambda\}\} \\ &= \{x \in X^\omega \mid (P(x) \cap U) \cap (P(x) \cap V) \neq \{\lambda\}\} \\ &\subseteq \{x \in X^\omega \mid P(x) \cap U \neq \{\lambda\}\} \cap \{x \in X^\omega \mid P(x) \cap V \neq \{\lambda\}\} \\ &\subseteq U^\gamma \cap V^\gamma. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \text{Sea } x \in U^\gamma &\Rightarrow P(x) \cap U \text{ es infinito}, \quad (U \subseteq V) \\ &\Rightarrow P(x) \cap V \text{ es infinito} \\ &\Rightarrow x \in V^\gamma \end{aligned}$$

5. $\Rightarrow$ Si $t \in U$ entonces $\{t\}^\gamma \subseteq U^\gamma$ (ítem 4). Dado que $U^\gamma \subseteq V^\gamma$ entonces $\{t\}^\gamma \subseteq V^\gamma$, es decir, existe $s \in V$ tal que $s \sqsubseteq t$ o $t \sqsubseteq s$. Dado que todo elemento de $U \cup V$ es minimal, entonces $s = t$, es decir, $t \in V$. Así $U \subseteq V$.

   $\Leftarrow$ Veamos que $U^\gamma \subseteq V^\gamma$ (ítem 1). Si $x \in U^\gamma$, existe $u \in U$ tal que $u \sqsubseteq x$. Ya que $U \subseteq V$ entonces $u \in V$, es decir, $x \in V^\gamma$. Así $U^\gamma \subseteq V^\gamma$.

6. Veamos que $A^\gamma = U^\gamma$.

   $\subseteq$ Es claro que $A \subseteq U$ entonces $A^\gamma \subseteq U^\gamma$ (ver ítem 1).

   $\supseteq$ Si $x \in U^\gamma$ entonces existe $u \in U$ tal que $u \sqsubseteq x$. Entonces existe $v \in A$ tal que $v \sqsubseteq u$, ya que $A =$ minimales$(U, \sqsubseteq)$. Por lo tanto $v \sqsubseteq x$. Así $x \in A^\gamma$, es decir $U^\gamma \subseteq A^\gamma$.

□

Ya definidos los dos operadores sobre los espacios de palabras, la siguiente proposición es clara.

Proposición 2.14. *Si $U \subseteq X^*$ entonces $U^\delta \subseteq U^\gamma$.*

□

2.4 ÁRBOLES

En esta sección introducimos el concepto de árbol para un lenguaje X arbitrario. Estos conceptos se usa en el siguiente capítulo para caracterizar algunos conjuntos relacionados con las topologías que se definen en el próximo capítulo.

Nos hemos guiado por [3] y [4] aunque las demostraciones son propias y algunas proposiciones y teoremas.

Definición 2.15. *Sea $T \subseteq X^*$, decimos que T es un **árbol** si para todo $t \in T$ se tiene que $P(t) \subseteq T$.*

Definición 2.16. *Sea T un árbol, decimos que T está **bien fundado** si para todo $x \in X^\omega$ se tiene que $P(x) \nsubseteq T$.*

Definición 2.17. *Sea T un árbol, denotamos con $[T]$ al conjunto de **ramas** del árbol T, donde:*

$$[T] := \{x \in X^\omega \mid P(x) \subseteq T\}.$$

Cada rama $x \in [T]$ cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x \upharpoonright_n \in T$, es decir, cada rama de T determina una sucesión estrictamente creciente de prefijos $\{x \upharpoonright_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.Note que $[T] = \emptyset$ si y sólo si T es un árbol bien fundado. Es decir, $[T]$ no posee ramas.

Teorema 2.18. *Sea T un árbol, entonces $[T] = T^\delta$.*

Demostración. Sea T un árbol:

$\subseteq$) Sea $x \in [T]$, entonces $P(x) \subseteq T$. Por lo tanto $P(x) \cap T$ es infinito, es decir, $x \in T^\delta$.

$\supseteq$) Sea $x \in T^\delta$, entonces $P(x) \cap T$ es infinito, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $n_0 > n$ tal que $x \upharpoonright_{n_0} \in T$. Dado que T es un árbol, $P(x \upharpoonright_{n_0}) \subseteq T$. Ya que n_0 puede ser arbitrariamente grande, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(x \upharpoonright_n) \subseteq T$, es decir $P(x) \subseteq T$. Por lo tanto $x \in [T]$.

$\square$

Definición 2.19. *Sea $u \in U \subseteq X^*$, decimos que u es **trascendental** sobre U, si existe un subconjunto infinito $V \subseteq U$, tal que para todo $v \in V$, $u \sqsubset v$.*

Para enunciar el lema de König primero definimos árbol *finitamente ramificado*.

Definición 2.20. *Sea T un árbol, decimos que está **finitamente ramificado** si para cada $t \in T$, el conjunto $\{w \in T \mid t \sqsubseteq w$ y $|w| = |t| + 1\}$ es finito.*

Cada palabra de un árbol finitamente ramificado no tiene infinitas extensiones inmediatamente posteriores, es decir, de longitud una unidad mayor. Es claro que esta definición se trivializa cuando se usa un lenguaje finito X, como lo es en este trabajo. Luego todo árbol es finitamente ramificado, dado que los conjuntos $\{u \in X^* \mid |u| = n\},\ n \in \mathbb{N}$ son finitos.

Lema 2.21. *(Lema de König) Sea T un árbol finitamente ramificado. Si T es infinito, entonces $[T] \neq \emptyset$.*

Demostración. Dado que T es un árbol infinito, es claro que la palabra vacía λ es trascendental sobre T (ver definición 2.19). Dado que T árbol finitamente ramificado, existe un número finito de sucesores de λ, es decir, el conjunto $U_1 = \{t \in T \mid |t| = 1$ y $\lambda \sqsubset t\}$ es finito. Entonces existe $(u)_1 \in U_1$ transcendental, dado que T es infinito.

Así, de forma inductiva, dado $(u)_n \in U_n$ transcendental, el conjunto $U_{n+1} = \{t \in T \mid |t| = n + 1$ y $(u)_n \sqsubset t\}$ es finito. (Dado que T es finitamente ramificado.) Por lo tanto construimos la sucesión estrictamente creciente de prefijos $\{(u)_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Luego, tome $x \in X^*$ tal que $x \upharpoonright_n = (u)_n$. Entonces $P(x) \subseteq T$, es decir, $x \in [T]$. Así, $[T] \neq \emptyset$. $\square$

Proposición 2.22. *Si X es finito, entonces todo árbol bien fundado es finito.*

Demostración. Sea T un árbol bien fundado, supongamos que T es infinito. Dado que trabajamos con un alfabeto finito X, es claro que el árbol T es finitamente ramificado. Luego por el lema de König tenemos que $[T] \neq \emptyset$, es decir, existe $x \in X^\omega$ tal que $P(x) \subseteq T$, lo cual no puede ocurrir, dado que T es bien fundado. Por lo tanto T es finito. $\square$

Definición 2.23. *Sea T un árbol, decimos que está **bien podado** si para todo $t \in T$ existe $w \in T$ tal que $t \sqsubset w$.*

Toda palabra que pertenece a un árbol bien podado, siempre se puede extender a una de mayor tamaño, es decir, cada palabra está contenida en una sucesión infinita de prefijos.

Proposición 2.24. *T es un árbol que no posee maximales respecto al orden de prefijo si y sólo si T es un árbol bien podado.*

Demostración. $\Rightarrow$) Suponemos que T es un árbol que no está bien podado, entonces por definición, debe existir $u \in T$ tal que para todo $w \in T,\ w \sqsubseteq u$ lo cual no puede ocurrir, dado que T no tiene maximales. Por lo tanto T es un árbol bien podado.

$\Leftarrow$) Por la misma definición de árbol bien podado, es claro que T no posee maximales.

□

Proposición 2.25. *Si T es un árbol bien podado, entonces $T = P([T])$.*

Demostración. Sea T un árbol bien podado. Veamos que $T = P([T])$:

$\subseteq$ Dado que T esta bien podado, por la proposición 2.24, T no posee maximales. Entonces para todo $t \in T$ existe una rama $x \in [T]$ tal que $t \sqsubseteq x$. Es decir, para todo $t \in T,\ t \in P([T])$.

$\supseteq$ Sea $t \in P([T])$, por la definición de $[T]$ (ver 2.17), se tiene que $P([T]) \subseteq T$. Por lo tanto $t \in T$.

□

Definición 2.26. *Sea $A \subseteq X^*$, denotamos con $\langle A \rangle$ al **árbol generado** por A, donde:*

$$\langle A \rangle := \bigcap \{T \subseteq X^* \mid (A \subseteq T)(T\text{-\textit{árbol}})\}.$$

Proposición 2.27. *Sea $A \subseteq X^*$, entonces $\langle A \rangle = P(A)$, en particular, $\langle A \rangle$ es un árbol.*

Demostración. Sea $A \subseteq X^*$.

- $\subseteq$ Es claro que $\langle A \rangle \subseteq P(A)$, dado que $A \subseteq P(A)$ y $P(A)$ es un árbol.
- $\supseteq$ Dado $t \in P(A)$, veamos que para todo árbol T, tal que $A \subseteq T$, se cumple que $t \in T$. Por definición de $P(A)$, existe $u \in A$, tal que $t \sqsubseteq u$. Luego $u \in T$, dado que $A \subseteq T$. Como T es un árbol $P(u) \subseteq T$. Así $t \in T$.

Por lo tanto $\langle A \rangle = P(A)$. $\square$

Notemos que, por definición tenemos que T es un árbol si y sólo si $T = P(T)$. Luego, es claro que $\langle A \rangle = P(A) = P(P(A)) = P(\langle A \rangle)$. Es decir, $\langle A \rangle$ es un árbol.

Definición 2.28. *Sea T un árbol, decimos que es **perfecto** si para cada $t \in T$, existen dos ramas diferentes $x, y \in [T]$ tal que $t \sqsubseteq x$ y $t \sqsubseteq y$.*

Teorema 2.29. *Sean T_1, T_2 árboles, tenemos las siguientes propiedades:*

1. *Si T_1, T_2 son bien fundados entonces $T_1 \cup T_2$ es un árbol bien fundado.*
2. *Si T_1, T_2 están bien podados entonces $T_1 \cup T_2$ es un árbol bien podado.*
3. $[T_1] \cup [T_2] = [T_1 \cup T_2]$.
4. $[T_1] \cap [T_2] \subseteq [T_1 \cap T_2]$.
5. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [T_n] \subseteq [\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n]$.

Dados los lenguajes $U, W \subseteq X^*$.

6. $\langle U \rangle \cup \langle W \rangle = \langle U \cup W \rangle$.
7. $\langle U \rangle \cap \langle W \rangle \supseteq \langle U \cap W \rangle$.

Demostración. Sea T_1, T_2 árboles:

1. Si T_1, T_2 son bien fundados, veamos que $T_1 \cap T_2$ es un árbol bien fundado. Es claro que $T_1 \cap T_2$ es un árbol, ya que dado $t \in (T_1 \cap T_2)$, $P(t) \subseteq T_2$ y $P(t) \subseteq T_2$. Es decir $P(t) \subseteq (T_1 \cap T_2)$. Ahora veamos que es bien fundado. Dado $x \in X^\omega$, $P(x) \nsubseteq T_1$ y $P(x) \nsubseteq T_2$. Es decir, existen n_1, n_2, tal que $x \upharpoonright_{n_1+1} \notin T_1$, y $x \upharpoonright_{n_2+1} \notin T_1$. Luego, si $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, $x \upharpoonright_{n_0} \notin (T_1 \cap T_2)$. Así, $P(x) \nsubseteq (T_1 \cap T_2)$, por lo tanto $T_1 \cap T_2$ es un árbol bien fundado.

2. Si T_1, T_2 son bien podados, veamos que $T_1 \cup T_2$ es un árbol bien podado. Sea $t \in T_1 \cup T_2$, entonces $t \in T_1$ o $t \in T_2$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $t \in T_1$. Dado que T_1 está bien podado, existe $w \in T_1$ tal que $t \sqsubset w$. Donde $w \in (T_1 \cup T_2)$. Por lo tanto $T_1 \cup T_2$ es un árbol bien fundado.

La demostración de los ítem $3, 4$ y 5 es la misma de los ítem $2, 3$ y 4 de la proposición 2.9, dado que $[T] = T^\delta$ por el teorema 2.18.

Sea $U, W \subseteq X^*$. Usamos que $P(U) = \langle U \rangle$ y $P(W) = \langle W \rangle$, por la proposición 2.27.

6. $\subseteq$ Sea $t \in P(U) \cup P(W)$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $t \in P(U)$. Luego existe $u \in U$ tal que $t \sqsubseteq u$. Claramente $u \in (U \cup W)$, entonces $t \in P(U \cup W)$.

   $\supseteq$ Sea $t \in P(U \cup W)$, entonces existe $u \in (U \cup W)$ tal que $t \sqsubseteq u$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $u \in U$, luego $t \in P(U)$. Es decir, $t \in P(U) \cup P(W)$.

7. Sea $t \in P(U \cap W)$. Entonces existe $u \in U \cap W$ tal que $t \sqsubseteq u$. Dado que $u \in U$ y $u \in W$, tenemos que $t \in P(U)$ y $t \in P(W)$. Es decir, $t \in P(U) \cap P(W)$.

$\square$

Observe que el conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ no siempre es un árbol bien fundado. Un ejemplo es tomar $x \in X^\omega$, luego construir $T_n = \{x \upharpoonright_k \mid k \leq n\}$. Es claro que para cada $n \in \mathbb{N}$, T_n es un árbol bien fundado. Pero $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ no es un árbol bien fundado, ya que $P(x) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$. En particular $P(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$.

Proposición 2.30. *Si S, T son árboles bien podados tal que $[S] = [T]$, entonces $S = T$.*

Demostración. Sean S, T árboles bien podados tal que $[S] = [T]$.

- $\subseteq$ Sea $s \in S$. Dado que S es bien podado, existe $x \in [S]$ tal que $s \sqsubseteq x$. Ya que $[S] = [T]$, $x \in [T]$. Es decir, $P(x) \subseteq T$, por lo tanto $s \in T$.

- $\supseteq$ Sea $t \in T$. Dado que T es bien podado, existe $x \in [T]$ tal que $t \sqsubseteq x$. Ya que $[T] = [S]$, $x \in [S]$. Es decir $P(x) \subseteq S$, por lo tanto $t \in S$.

$\square$

Capítulo

3

TOPOLOGÍAS SOBRE LOS ESPACIOS DE PALABRAS

Este capítulo esta destinado a la definición de algunas topologías sobre los espacios de palabras. Los espacios topológicos que se presentan son: $(X^\infty, \tau_{(\sqsubseteq)})$, $(X^\omega, \tau_{\rho_U})$, (X^ω, τ_ρ), $(X^\infty, \tau_{\rho_\infty})$, (X^∞, τ_R). Para la presentación de algunas de estas topologías nos hemos guiado por [1, 2, 6].

3.1 TOPOLOGÍAS SOBRE X^ω

En esta sección mostraremos dos topologías generadas por las métricas ρ y ρ_U, propuestas en [2], donde ρ_U depende de un lenguaje $U \subseteq X^*$.

3.1.1. Métrica ρ

En esta sección introducimos una topología métrica sobre X^ω.

Definición 3.1. *Sea $n = |X|$, considere las siguientes métricas:*

- $$\begin{array}{lll} \rho_1 : & X^\omega \times X^\omega & \to \mathbb{R} \\ & (x, y) & \to \inf\{\frac{1}{1+|w|} \mid w \in P(x) \cap P(y)\} \end{array}$$

- $$\begin{array}{llll} \rho : & X^\omega \times X^\omega & \to \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to \text{ínf}\{n^{-|w|} \mid w \in P(x) \cap P(y)\}. \end{array}$$

Ejemplo 3.2. *Sea* $X = \{0,1\}$.

- *Si* $x = 01001001\bar{0}$ *,* $y = 01001110\bar{1}$ *entonces* $\rho_1(x,y) = \frac{1}{6}$ *y* $\rho(x,y) = 2^{-5}$.
- *Si* $x = 0100111\bar{0}$ *,* $y = 10110010\bar{1}$ *entonces* $\rho_1(x,y) = 1$ *y* $\rho(x,y) = 2^0 = 1$.

Observe que si $\varepsilon > 1$ se tiene que $B_\rho(x,\varepsilon) = B_{\rho_1}(x,\varepsilon) = X^\omega$.

Proposición 3.3. *ρ_1 y ρ son métricas equivalentes.*

Demostración. sean $x, y \in X^\omega$, $n = |X|$. Observe que:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} n^{1-|P(x)\cap P(y)|} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

$$\rho_1(x,y) = \begin{cases} |P(x)\cap P(y)|^{-1} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Veamos que $f : (X^\omega, \rho_1) \to (X^\omega, \rho)$ tal que $f(x) = x$ es un homeomorfismo. Es decir, para todo $x \in X^\omega$ y para todo $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que $B_{\rho_1}(x,\delta_1) \subseteq B_\rho(x,\varepsilon)$ y $B_\rho(x,\delta_2) \subseteq B_{\rho_1}(x,\varepsilon)$. Supondremos que $\varepsilon < n$.

- Veamos que existe $\delta_1 > 0$ tal que $B_{\rho_1}(x,\delta_1) \subseteq B_\rho(x,\varepsilon)$.

  $$\begin{aligned} B_\rho(x,\varepsilon) &= \{y \in X^\omega \mid \rho(x,y) < \varepsilon\} \\ &= \{y \in X^\omega \mid n^{1-|P(x)\cap P(y)|} < \varepsilon\} \cup \{x\} \end{aligned}$$

  Note que $n^{1-|P(x)\cap P(y)|} < \varepsilon \Leftrightarrow |P(x)\cap P(y)|^{-1} < \frac{ln(n)}{ln(n)-ln(\varepsilon)}$

  Tomamos $\delta_1 = \frac{ln(n)}{ln(n)-ln(\varepsilon)}$

  $$\begin{aligned} B_{\rho_1}(x,\delta_1) &= \{y \in X^\omega \mid \rho_1(x,y) < \delta_1\} \\ &= \{y \in X^\omega \mid |P(x)\cap P(y)|^{-1} < \tfrac{ln(n)}{ln(n)-ln(\varepsilon)}\} \cup \{x\} \end{aligned}$$

  Así $B_{\rho_1}(x,\delta_1) \subseteq B_\rho(x,\varepsilon)$.

- Ahora veamos que existe $\delta_2 > 0$ tal que $B_\rho(x, \delta_2) \subseteq B_{\rho_1}(x, \varepsilon)$.

$$\begin{aligned} B_{\rho_1}(x,\varepsilon) &= \{y \in X^\omega \mid \rho_1(x,y) < \varepsilon\} \\ &= \{y \in X^\omega \mid |P(x) \cap P(y)|^{-1} < \varepsilon\} \cup \{x\} \end{aligned}$$

Note que $|P(x) \cap P(y)|^{-1} < \varepsilon \Leftrightarrow n^{1-|P(x)\cap P(y)|} < n^{1-\frac{1}{\varepsilon}}$

Tomamos $\delta_2 = n^{1-\frac{1}{\varepsilon}}$

$$\begin{aligned} B_\rho(x,\delta_2) &= \{y \in X^\omega \mid \rho(x,y) < \delta_2\} \\ &= \{y \in X^\omega \mid n^{1-|P(x)\cap P(y)|} < n^{1-\varepsilon^{-1}}\} \cup \{x\} \end{aligned}.$$

Así $B_\rho(x, \delta_2) \subseteq B_{\rho_1}(x, \varepsilon)$.

Entonces f es un homeomorfismo, es decir, las métricas ρ y ρ_1 son equivalentes.

$\square$

Definición 3.4. *Para $x, y \in X^\omega$ con $x \neq y$, sea $m_{x,y} \in P(x) \cap P(y)$ el prefijo en común de x e y de mayor longitud. Es decir, para todo $z \in P(x) \cap P(y)$ se tiene $|m_{x,y}| \geq |z|$.*

Observe que $|m_{x,y}| = |P(x) \cap P(y)| - 1$. Entonces $\rho(x, y) = n^{-|m_{x,y}|}$.

Caracterizamos las bolas abiertas del espacio (X^ω, ρ) de la siguiente manera.

Teorema 3.5. *Para todo $x \in X^\omega$ y $\varepsilon > 0$, existe un único $w \in P(x)$ tal que:*

$$B_\rho(x, \varepsilon) = w.X^\omega.$$

Demostración. Sea $x \in X^\omega$, $\varepsilon > 0$ y $k = \min\{j \in \mathbb{N} \mid n^{-j} < \varepsilon\}$ donde $n = |X|$. Sea $w = x \restriction_k$ (es claro que w es único). Veamos que $B_\rho(x, \varepsilon) = w.X^\omega$.

$\subseteq$ Sea $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$. Veamos que $y \in w.X^\omega$, es decir $w \in P(y)$.
Por definición $\rho(x, y) = n^{1-|P(x)\cap P(y)|} < \varepsilon$. Dado que $|m_{x,y}| = |P(x)\cap P(y)|-1$, entonces $n^{-|m_{x,y}|} < \varepsilon$. Dado que $|w| = \min\{j \in \mathbb{N} \mid n^{-j} < \varepsilon\}$ entonces $|w| \leq |m_{x,y}|$. Sabemos que $w, m_{x,y} \in P(x)$. Por lo tanto $w \sqsubseteq m_{x,y}$ donde $m_{x,y} \in P(y)$, entonces $w \in P(y)$. Por lo tanto $y \in w.X^\omega$.

$\supseteq$ Sea $y \in w.X^\omega$, veamos que $y \in B_\rho(x,\varepsilon)$, es decir, $n^{1-|P(x)\cap P(y)|} < \varepsilon$.

Por hipótesis $w \in P(y)$, entonces tenemos que $w, m_{x,y} \in P(x) \cup P(y)$. Por definición de $m_{x,y}$ se tiene que $|m_{x,y}| \geq |w|$. Recordemos que $|m_{x,y}| = |P(x) \cap P(y)| - 1$. Entonces $n^{1-|P(x)\cap P(y)|} = n^{-|m_{x,y}|} < n^{-|w|} < \varepsilon$ por definición de w. Así $n^{1-|P(x)\cap P(y)|} < \varepsilon$. Por lo tanto $y \in B_\rho(x,\varepsilon)$.

$\square$

Es fácil verificar que $|w| = \lfloor -log_n(\varepsilon) \rfloor + 1$.

Corolario 3.6. *Los abiertos del espacio topológico (X^ω, τ_ρ) son de la forma :*

$$W.X^\omega = \bigcup_{w \in W} w.X^\omega,$$

donde $W \subseteq X^*$.

De la proposición 2.13 (ítem 1) obtenemos :

Corolario 3.7. *$A \in \tau_\rho$ si y solo si existe un lenguaje $W \subseteq X^*$ tal que $A = W^\gamma$.*

Es decir, el conjunto de los abiertos básicos es $S = \{\{w\}^\gamma \mid w \in X^*\}$. En particular, veremos que los abiertos básicos también son cerrados.

Proposición 3.8. *Sea $x \in X^\omega$ y $\varepsilon > 0$ entonces el abierto $B_\rho(x,\varepsilon)$ es cerrado.*

Demostración. Por el teorema 3.5, $B_\rho(x,\varepsilon) = w.X^\omega$ para algún $w \in P(x)$. Veamos que $(w.X^\omega)^c = \{x \in X^\omega \mid w \not\sqsubseteq x\}$ es abierto. Sea $x \in (w.X^\omega)^c$ tome $\varepsilon = n^{-|w|}$, y verifiquemos que $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq (w.X^\omega)^c$. Sea $y \in B_\rho(x,\varepsilon)$, entonces $\rho(x,y) = n^{1-|P(x)\cap P(y)|} < n^{-|w|}$. Recordemos que $|m_{x,y}| = |P(x) \cap P(y)| - 1$, luego $n^{-|m_{x,y}|} < n^{-|w|}$, entonces $|m_{x,y}| > |w|$ por lo tanto $w \not\sqsubseteq y$. Así $y \in (w.X^\omega)^c$ y $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq (w.X^\omega)^c$, entonces $(w.X^\omega)^c$ es abierto, luego $w.X^\omega$ es cerrado. Es decir, $B_\rho(x,\varepsilon)$ es cerrado. $\square$

El espacio topológico (X^ω, τ_ρ) es **cero-dimensional**, es decir, admite una base de abiertos-cerrados.

Ahora caracterizamos los conjuntos cerrados del espacio (X^ω, ρ). La adherencia o clausura de un conjunto F se denota :

$$Cl_\rho(F) = \{x \in X^\omega \mid \forall \varepsilon > 0, B_\rho(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Proposición 3.9. *Sea $F \subseteq X^\omega$, $x \in Cl_\rho(F)$ si y sólo si $P(x) \subseteq P(F)$.*

Demostración. Sea $F \subseteq X^\omega$, entonces:

$$\begin{aligned} x \in Cl_\rho(F) &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ B_\rho(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall u \in P(x),\ uX^\omega \cap F \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall u \in P(x),\ \exists y \in F \ \text{ tal que } \ u \sqsubseteq y \\ &\Leftrightarrow P(x) \subseteq P(F). \end{aligned}$$

□

Corolario 3.10. *Sea $F \subseteq X^\omega$, entonces $P(Cl_\rho(F)) = P(F)$.*

Demostración. Es claro que $Cl_\rho(F) \supseteq F$, entonces $P(Cl_\rho(F)) \supseteq P(F)$.
Sea $u \in P(Cl_\rho(F))$. Entonces existe $x \in Cl_\rho(F)$ tal que $u \sqsubseteq x$. Luego por el teorema 3.9, tenemos que $P(x) \subseteq P(F)$. Por lo tanto $u \in P(F)$.

□

Teorema 3.11. *$F \subseteq X^\omega$ es cerrado si y sólo existe un árbol T tal que $F = [T]$.*

Demostración. Sea $F \subseteq X^\omega$. (Ver definición 2.17):

- $\Rightarrow$ Si F es cerrado, tome $T = \bigcup_{x \in F} P(x)$. Veamos que $F = [T]$.
  Si $x \in F$ entonces es claro que $P(x) \subseteq T$. Por lo tanto $x \in [T]$.
  Si $x \in [T]$ entonces $P(x) \subseteq P(T)$. Por lo tanto $x \in F$. (proposición 3.9).

- $\Leftarrow$ Si T es un árbol, veamos que $[T]$ es cerrado, es decir $[T] = Cl_\rho([T])$.
  Si $x \in Cl_\rho([T])$ entonces por la proposición 3.9, $P(x) \subseteq P([T])$. Entonces para todo $u \in P(x)$, existe $y \in [T]$ tal que $u \sqsubseteq y$. Por definición del conjunto

$[T]$, $P(y) \subseteq T$. Por lo tanto $u \in T$ para todo $u \in P(x)$. Es decir, $x \in [T]$. Así, $[T] \supseteq Cl_\rho([T])$. Es claro que $[T] \subseteq Cl_\rho([T])$. Por lo tanto $[T] = Cl_\rho([T])$, entonces $[T]$ es cerrado.

$\square$

Teorema 3.12. *[3] Sea $T \neq \emptyset$ un árbol bien podado, entonces el cerrado $[T]$ es un conjunto perfecto si y sólo si T es un árbol perfecto. (Ver definiciones 1.12 y 2.28).*

Demostración. Sea $T \neq \emptyset$ un árbol bien podado.

$\Rightarrow$ Si $[T]$ es un conjunto perfecto y $t \in T$, veamos que existen sucesiones diferentes $x, y \in [T]$ tales que $t \sqsubseteq x$ y $t \sqsubseteq y$.
Dado que T es un árbol bien podado, existe $x \in [T]$ tal que $t \sqsubseteq x$. Tome $\varepsilon > 0$ tal que $B_\rho(x, \varepsilon) = s.X^\omega$. Ya que x no es un punto aislado, entonces no puede ocurrir que $s.X^\omega \cap [T] = \{x\}$. Por lo tanto existen $y \neq x$ tal que $y \in s.X^\omega \cap [T]$. Es decir $s \sqsubseteq y$ y $s \sqsubseteq x$. Así, T es un árbol perfecto.

$\Leftarrow$ Si T es un árbol perfecto, veamos que $[T]$ es un conjunto perfecto. Solo falta verificar que $[T]$ no tiene puntos aislados.
Supongamos que existe $x \in [T]$ un punto aislado. Entonces existe una $B_\rho(x, \varepsilon)$ tal que $B_\rho(x, \varepsilon) \cap [T] = \{x\}$. Por el teorema 3.5, $B_\rho(x, \varepsilon) = w.X^\omega$ para algún $w \in P(x)$. Dado que $P(x) \subseteq T$, tome $u \in P(x)$ tal que $w \sqsubseteq u$. Ya que T es un árbol perfecto, existen $y, z \in [T]$ tal que $y \neq z$, $u \sqsubseteq y$ y $u \sqsubseteq z$. Por lo tanto $w \sqsubseteq y$ y $w \sqsubseteq z$. Es decir $y, z \in B_\rho(x, \varepsilon) \cap [T]$ lo cual no es posible. Por lo tanto $[T]$ no tiene puntos aislados. Así, $[T]$ es un conjunto perfecto.

$\square$

3.1.2. Métrica ρ_U

En esta sección definimos una métrica ρ_U asociada a un lenguaje $U \subseteq X^*$, de tal manera que ρ_U induce la topología τ_{ρ_U} propuesta en [2]. Esta sección generaliza la métrica de la sección anterior, por ello, no se realizarán demostraciones de algunas proposiciones, dado que son muy similares a las de la sección anterior. Esto para centrarnos en la demostración del Teorema 3.19, uno de los teoremas mas relevantes de este trabajo.

Definición 3.13. *Dado un lenguaje $U \subseteq X^*$ considere la siguiente métrica*

$$\begin{aligned} \rho_U : \quad X^\omega \times X^\omega \quad &\to \mathbb{R} \\ (x, y) \qquad &\mapsto \rho_U(x, y) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x = y \\ n^{1-|P(x)\cap P(y)\cap U|} & \textit{si } x \neq y \end{cases} \end{aligned}$$

Donde $n = |X|$, note que si $\varepsilon > n$ entonces $B_{\rho_U}(x, \varepsilon) = X^\omega$.

Caracterizamos las bolas abiertas del espacio (X^ω, ρ_U) de la siguiente manera.

Teorema 3.14. *Para todo $x \in X^\omega$ y $\varepsilon > 0$, existe un único $w \in P(x) \cap U$ tal que:*

$$B_{\rho_U}(x, \varepsilon) = w.X^\omega \quad \textit{ó} \quad B_{\rho_U}(x, \varepsilon) = \{x\}.$$

El segundo caso solo puede suceder cuando $P(x) \cap U$ es finito, y tomando un $\varepsilon \leq n^{-k}$, donde $k = |P(x) \cap U| - 1$, ya que $k \geq |P(x) \cap P(y) \cap U| - 1$ para todo $y \in X^\omega$, tenemos que $\varepsilon \leq \rho_U(x, y)$.

Corolario 3.15. *Los abiertos del espacio topológico $(X^\omega, \tau_{\rho_U})$ son de la forma :*

$$V \cup W.X^\omega$$

donde $V \subseteq \{x \in X^\omega \mid |P(x) \cap U| \text{ es finito }\}$ y $W \subseteq U$.

De la proposición 2.13 (ítem 1) obtenemos :

Corolario 3.16. *$A \in \tau_{\rho_U}$ si y solo si existe un lenguaje $W \subseteq U$ y $V \subseteq \{x \in X^\omega \mid |P(x) \cap U|$ es finito $\}$ tal que $A = V \cup W^\gamma$.*

Es decir, el conjunto de los abiertos básicos es $S = \{\{u\}^\gamma \mid u \in X^*\}$. En particular, veremos que los abiertos básicos también son cerrados.

Proposición 3.17. *Sea $x \in X^\omega$ y $\varepsilon > 0$ entonces el abierto $B_{\rho_U}(x, \varepsilon)$ es cerrado.*

Veamos que la topología U^δ contiene la topología de Cantor.

Proposición 3.18. *Dados $U, V \subseteq X^*$ tenemos las siguientes afirmaciones:*

(i) Si $x, y \in X^\omega$ y $U \subseteq V$ entonces $\rho_U(x, y) \geq \rho_V(x, y)$.

(ii) La función identidad $I_d : (X^\omega, \rho_U) \to (X^\omega, \rho)$ es continua, es decir, $\tau_\rho \subseteq \tau_{\rho_U}$.

Demostración. Dados $U, V \subseteq X^*$

(i) Si $U \subseteq V$, es claro que para todo $x, y \in X^\omega$,

$$|P(x) \cap P(y) \cap V| - 1 \geq |P(x) \cap P(y) \cap U| - 1.$$

Entonces

$$n^{1-|P(x)\cap P(y)\cap U|} \geq n^{1-|P(x)\cap P(y)\cap V|},$$

es decir,

$$\rho_U(x, y) \geq \rho_V(x, y).$$

(ii) Dado un abierto $w.X^\omega \in \tau_\rho$ donde $w \in X^*$, veamos que $w.X^\omega \in \tau_{\rho_U}$.
Sea $x \in w.X^\omega$ tenemos los siguientes dos casos:

- Si $P(x) \cap U$ es infinito, entonces existe $u \in P(x) \cap U$ tal que $|u| \geq |w|$.
Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{\rho_U}(x, \varepsilon) = u.X^\omega$.
Entonces $B_{\rho_U}(x, \varepsilon) \subseteq w.X^\omega$
- Si $P(x) \cap U$ es finito, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{\rho_U} = \{x\}$.
Entonces $B_{\rho_U}(x, \varepsilon) \subseteq w.X^\omega$.

Por lo tanto $w.X^\omega \in \tau_{\rho_U}$.

$\square$

A continuación enunciamos uno de los teoremas principales de este trabajo.

Teorema 3.19. *[2] Sean $U, V \subseteq X^*$ lenguajes. Las topologías τ_{ρ_U} y τ_{ρ_V} sobre X^ω coinciden si y sólo si $U^\delta = V^\delta$.*

Demostración. Sean $U, V \subseteq X^*$.

- $\Rightarrow$ Sean $\tau_{\rho_U}, \tau_{\rho_V}$ topologías iguales sobre X^ω, veamos que $U^\delta = V^\delta$.

  Sea $x \in U^\delta$ y $(u)_1 \in P(x) \cap U$, luego $(u)_1.X^\omega$ es τ_{ρ_U}-abierto (teorema 3.14). Dado que las topologías son iguales $(u)_1.X^\omega$ es τ_{ρ_V}-abierto (teorema 1.11). Es decir, para $x \in (u)_1.X^\omega$ existe $(w)_1 \in P(x) \cap V$ tal que $(w)_1.X^\omega \subseteq (u)_1.X^\omega$. Note que $(u)_1 \sqsubseteq (w)_1 \sqsubseteq x$.
  Dado que $P(x) \cap U$ es infinito, existe $(u)_2 \in P(x) \cap U$ tal que $|(u)_2| > |(w)_1|$.
  El conjunto $(u)_2.X^\omega$ es τ_{ρ_U}-abierto, entonces $(u)_2.X^\omega$ es τ_{ρ_V}-abierto.
  Es decir, para $x \in (u)_2.X^\omega$ existe $(w)_2 \in P(x) \cap V$ tal que $(w)_2.X^\omega \subseteq (u)_2.X^\omega$. Note que $(w)_1 \sqsubset (u)_2 \sqsubseteq (w)_2 \sqsubseteq x$.
  Así, de forma recursiva, construimos una sucesión estrictamente creciente de prefijos
  $$\{(w)_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq P(x) \cap V.$$
  Es decir $P(x) \cap V$ es infinito, por lo tanto $x \in V^\delta$. Entonces $U^\delta \subseteq V^\delta$.
  De forma equivalente se obtiene que $V^\delta \subseteq U^\delta$. Por lo tanto $U^\delta = V^\delta$.

- $\Leftarrow$ Dados los espacios $(X^\infty, \tau_{\rho_U})\ y\ (X^\infty, \tau_{\rho_V})$ tales que $U^\delta = V^\delta$.
  Veamos que las topologías son iguales.
  Es decir, dado $w \in X^*$, $w.X^\omega \in \tau_{\rho_U}$ si y sólo si $w.X^\omega \in \tau_{\rho_V}$ (teorema 1.11).

  Si $w.X^\omega \in \tau_{\rho_U}$. Veamos que si $x \in w.X^\omega$ existe $B_{\rho_V}(x, \varepsilon)$ tal que $B_{\rho_V}(x, \varepsilon) \subseteq w.X^\omega$. Por hipótesis $w \sqsubseteq x$:

- Si $x \in U^\delta$ entonces $x \in V^\delta$. Es decir, $P(x) \cap V$ es infinito.
  Por lo tanto, existe $v \in P(x) \cap V$ tal que $|v| \geq |w|$.
  Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{\rho_V}(x, \varepsilon) = v.X^\omega$.
  Entonces $B_{\rho_V}(x, \varepsilon) \subseteq w.X^\omega$.
- Si $x \notin U^\delta$ entonces $x \notin V^\delta$. Es decir , $P(x) \cap V$ es finito.
  Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{\rho_V}(x, \varepsilon) = \{x\}$.
  Entonces $B_{\rho_V}(x, \varepsilon) \subseteq w.X^\omega$.

$\therefore w.X^\omega \in \tau_{\rho_V}$.

$\square$

3.1.3. Topología producto

En esta sección mostraremos que la topología generada por la métrica ρ, coincide con la topología producto en X^ω. También mostraremos una caracterización interesante (ver Teorema 3.24) de los conjuntos $\mathbf{G}_\delta$ con ayuda del operador δ.

Definición 3.20. *Dada una familia indexada de espacios topológicos $\{X_i, \tau_i\}_{i \in I}$, la topología producto es la topología sobre $\prod X_i$ generada por la subbase $\mathcal{S}$, formada por la colección de las imágenes inversas de abiertos por medio de las proyecciones π_i. Es decir,*

$$\mathcal{S} = \{\pi_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \tau_i, i \in I\}.$$

La cual denotaremos por τ_{prod}.

Veamos cómo es la topología producto en X^ω. Recordemos que el conjunto X es nuestro alfabeto (que se supone es finito) y que $X_i = X$ para todo i. Le damos a X la topología discreta $\tau = \mathcal{P}(X)$. Así que dado un abierto básico $\{a\} \in \tau$, tenemos que un elemento de la subbase de la topología producto sobre X^ω es:

$$\pi_i^{-1}(\{a\}) = \{x \in X^\omega \mid x_i = a\}.$$

Proposición 3.21. *La topología τ_ρ (generada por la métrica ρ) es igual a la topología producto τ_{prod} sobre el espacio X^ω.*

Demostración. Veamos que $\tau_{prod} = \tau_\rho$. Para demostrar $\tau_{prod} \subseteq \tau_\rho$ basta con tomar un elemento de la subbase de τ_{prod} y verificar que pertenece a τ_ρ, ya que los abiertos de τ_{prod} son uniones arbitrarias de intersecciones finitas de los elementos de la subbase de τ_{prod}.

- Sea $\pi_i^{-1}(\{a\})$ un conjunto de la subbase de τ_{prod}. Donde $a \in X$, $i \in I$. Veamos que $\pi_i^{-1}(\{a\}) \in \tau_\rho$. Sea $x \in \pi_i^{-1}(\{a\})$, hallemos $\varepsilon > 0$ tal que $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq \pi_i^{-1}(\{a\})$. Es decir, si $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$ entonces $y_i = a$. Tenemos que $x \in \pi_i^{-1}(\{a\})$ luego $x_i = a$, entonces basta con verificar que $|m_{x,y}| > i$ para todo $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$ (ver 3.4).
  Sea $\varepsilon = n^{-i}$, $y \in B_\rho(x, n^{-i})$ entonces $\rho(x, y) < n^{-i}$. Recordemos que $\rho(x, y) = n^{1-|P(x)\cap P(y)|}$ y $|m_{x,y}| = |P(x) \cap P(y)| - 1$. entonces $n^{-|m_{x,y}|} = n^{1-|P(x)\cap P(y)|} < n^{-i}$. Así $|m_{x,y}| > i$, por lo tanto $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq \pi_i^{-1}(\{a\})$. Entonces $\pi_i^{-1}(\{a\}) \in \tau_\rho$, es decir $\tau_{prod} \subseteq \tau_\rho$

- Sea $B_\rho(x, \varepsilon) \in \tau_\rho$, veamos que $B_\rho(x, \varepsilon) \in \tau_{prod}$. Recordemos que existe un único prefijo $w \in P(x)$ tal que $B_\rho(x, \varepsilon) = w.X^\omega$. Construiremos $B_\rho(x, \varepsilon)$ a partir de una intersección finita de conjuntos de la subbase de τ_{prod}. Si $|w| = k$ tome los conjuntos $\{\pi_i^{-1}(\{x_i\})\}_{i\in\{1,2,\ldots,k\}}$ los cuales perteneces a la subbase de τ_{prod}.
  Así $A := \bigcap_{i=1}^{k} \{\pi_i^{-1}(\{x_i\})\}$ es un básico de τ_{prod}, por lo tanto un abierto.
  Recuerde que $\pi_i^{-1}(\{x_i\}) = \{y \in X^\omega \mid y_i = x_i\}$. Entonces

  $$A = \{y \in X^\omega \mid y_i = x_i, \forall i \in \{1, 2, ..., k\}, \} = w.X^\omega = B_\rho(x, \varepsilon),$$

  luego, por construcción tenemos que $B_\rho(x, \varepsilon) \in \tau_{prod}$, entonces $\tau_\rho \subseteq \tau_{prod}$.

$\square$

Lema 3.22. *Sea $F \subseteq X^\omega$ abierto o cerrado, existe $U \subseteq X^*$ tal que $F = U^\delta$. En el caso que F sea abierto, U es de la forma $U = W.X^*$ para algun $W \subseteq X^*$.*

Demostración. Sea F abierto, entonces existe $W \subseteq X^*$ tal que $F = W.X^\omega$. Tome $U = W.X^*$ y veamos que $F = U^\delta$.

$\subseteq$) Sea $x \in F$. Veamos que $x \in U^\delta$, es decir, $P(x) \cap U$ es infinito. Dado que $x \in W.X^\omega$, existe $w \in W$ tal que $w \in P(x)$. Note que el conjunto $A = \{v \in P(x) \mid v \sqsubseteq w\} \subseteq P(x) \cap W.X^*$. Entonces $P(x) \cap U$ es infinito. Así $x \in U^\delta$.

$\supseteq$) Sea $x \in U^\delta$. Veamos que $x \in F$, es decir, existe $w \in W$ tal que $w \in P(x)$. Dado que $x \in U^\delta$, se tiene que $P(x) \cap U \neq \emptyset$. Entonces existe $u \in P(x) \cap U$ tal que $u \sqsubseteq x$ y $u \in W.X^*$, luego existe $w \in W$ tal que $w \sqsubseteq u$. Entonces $w \sqsubseteq x$. Así $x \in F$.

Observemos que U satisface la propiedad indicada en el enunciado.

Sea F cerrado, entonces $x \in F$ si y sólo si $P(x) \subseteq P(F)$ (proposición 3.9).
Tome $U = P(F)$ y veamos que $F = U^\delta$.

$\subseteq$) Sea $x \in F$. Note que $P(x) \cap P(F) = P(x)$ es infinito. Así $x \in U^\delta$.

$\supseteq$) Sea $x \in U^\delta$. Veamos que $x \in F$, es decir, $P(x) \subseteq P(F)$. Dado que $x \in U^\delta$, se tiene que $P(x) \cap P(F)$ es infinito. Supongamos que $P(x) \not\subseteq P(F)$, entonces existe $u \in P(F)$ tal que $u \notin P(x)$. Note que el conjunto $A = \{v \in P(x) \mid u \sqsubseteq v\} \cap P(F) = \emptyset$, luego $P(x) \setminus A \cap P(F) = P(x) \cap P(F)$ Donde $P(x) \setminus A = \{v \in P(x) \mid u \not\sqsubseteq v\}$ es finito. Por tanto $P(x) \cap P(F)$ es finito (contradicción). Por lo tanto $P(x) \subseteq P(F)$. Así $x \in F$.

□

Corolario 3.23. *Si $F \subseteq X^\omega$ es cerrado o abierto, entonces existen infinitos $U \in X^*$ tal que $F = U^\delta$.*

Demostración. Por el lema 3.22 existe un lenguaje $U \subseteq X^*$ tal que $U^\delta = F$. Considere la siguiente colección infinita de conjuntos $\{U \setminus \{u\}\}_{u \in U}$ (U es infinito). Luego por el ítem 6 de la proposición 2.9 cada elemento de la colección cumple que $(U \setminus \{u\})^\delta = F$. □

Podemos caracterizar los conjuntos $\mathbf{G}_\delta$ (definición 1.9) de la siguiente manera:

Teorema 3.24. *[2] En el espacio de Cantor, un subconjunto $F \subseteq X^\omega$ es $\mathbf{G}_\delta$ si y sólo si existe un lenguaje $U \subseteq X^*$ tal que $F = U^\delta$.*

Demostración. Sea $F \subseteq X^\omega$:

$\Rightarrow$ Si F es $\mathbf{G}_\delta$, entonces $F = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} F_i$, con F_i abierto, podemos suponemos que $F_i \supseteq F_{i+1}$. Procedemos a construir $U \subseteq X^\omega$ tal que $U^\delta = F$.

Por el lema 3.22, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $V_i \subseteq X^*$ tal que $V_i^\delta = F_i$ y para todo $v \in V,\ v.X^* \subseteq V$. Note que el conjunto $A_i = \{v \in V_i \mid |v| \leq i\}$ es finito. Definimos $U_i := V_i \setminus A_i$ que es el conjunto de todas las palabras en V_i de longitud mayor a i. Luego por el ítem 6 de la proposición 2.9 tenemos que $U_i^\delta = V_i^\delta$, luego $F_i = U_i^\delta$.

- Afirmación: Si $i \leq i^{'}$ entonces $V_i \supseteq V_{i^{'}}$ y $U_i \supseteq U_{i^{'}}$.

  Demostración. Dado que $F_i \supseteq F_{i^{'}}$, por el ítem 7 y 8 de la proposición 2.9, $V_i \supseteq V_{i^{'}}$. Recordemos que $U_i = V_i \setminus A_i$ y $U_{i'} = V_{i'} \setminus A_{i'}$. Sea $u \in U_{i'}$ entonces $u \in V_{i'}$ y $u \notin A_{i'}$. Entonces $u \in V_i$. Ya que $|u| > i' \geq i$, se tiene que $u \notin A_i$. Es decir, $u \in U_i$. Por lo tanto $U_i \supseteq U_{i^{'}}$. □

Ahora definimos $U_i' :=$ minimales$(U_i, \sqsubseteq) = \{u \in U_i \mid \forall s \in U_i$ tal que $s \not\sqsubset u\}$ que es el conjunto de minimales de U_i. Luego

$$U := \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i^{'}.$$

Veamos que $F = U^\delta$.

$\subseteq$) Sea $x \in F$, entonces para todo $i \in \mathbb{N}$, $x \in U_i^\delta$, es decir, $P(x) \cap U_i$ es infinito.

Supongamos que $P(x) \cap U$ es finito. Entonces existe el máximo $u \in P(x) \cap U$. Si $|u| = k$, entonces $P(x) \cap U_k' = \emptyset$ (pues los elementos de U_k tienen longitud mayor que k).

Observemos que si $P(x) \cap U_k \neq \emptyset$, entonces $\text{mín}(P(x) \cap U_k)$ pertenece a $P(x) \cap U_k'$. Por lo tanto $P(x) \cap U_k = \emptyset$, lo cual no puede ocurrir, ya que $P(x) \cap U_i$ es infinito para todo $i \in \mathbb{N}$, en particular para $i = k$. Esta contradición nos indica que $P(x) \cap U$ es infinito. Es decir, $x \in U^\delta$.

$\supseteq$) Sea $x \in U^\delta$. Veamos que $x \in F$, es decir, $x \in U_i^\delta$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Dado que $x \in U^\delta$, entonces $P(x) \cap U$ es infinito. Es decir, $\bigcup_{i=0}^{\infty} \left(P(x) \cap U_i'\right)$ es infinito. Note que para todo $i \in \mathbb{N}$, $|P(x) \cap U_i'| \leq 1$. Entonces existen infinitos índices i tales que $P(x) \cap U_i'$ no es vacío, es decir, para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $i_0 > i$ tal que $P(x) \cap U_{i_0}' \neq \emptyset$.

- Afirmación: Si $P(x) \cap U_{i_0}' \neq \emptyset$, entonces $P(x) \cap U_{i_0}$ es infinito.

  Demostración. Sea $P(x) \cap U_{i_0}' \neq \emptyset$. Entonces $P(x) \cap U_{i_0} \neq \emptyset$, ya que $U_{i_0}' \subseteq U_{i_0}$. Luego existe $u \in P(x) \cap U_{i_0}$. Recordemos que $U_{i_0} = V_{i_0} \setminus A_{i_0}$. Sea $B = \{t \in P(x) \mid |t| \geq |u|\}$. Veamos que $B \subseteq P(x) \cap U_{i_0}$. Es claro que $B \subseteq P(x)$. Por el lema 3.22, $V_{i_0} = W.X^*$ para algun $W \subseteq X^*$. Si $t \in B$ entonces $u \sqsubseteq t$, dado que $u \in V_{i_0}$ entonces $t \in V_{i_0}$. Ya que $|t| \geq |u| \geq i_0$ entonces $t \notin A_{i_0}$, es decir, $t \in U_{i_0}$. Luego $B \subseteq U_{i_0}$, por lo tanto $B \subseteq P(x) \cap U_{i_0}$. Dado que B es infinito, entonces $P(x) \cap U_{i_0}$ es infinito. □

Entonces por la afirmación anterior $P(x) \cap U_{i_0}$ es infinito. Dado que $U_{i_0}' \subseteq U_{i_0}$ y que $U_n \supseteq U_{i_0}$ para todo $n \leq i_0$ (por la primera afirmación) , entonces $P(x) \cap U_n$ es infinito para todo $n \leq i_0$. Ya que i_0 es arbitrariamente grande $P(x) \cap U_n$ es infinito para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $x \in U_n^\delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $x \in F$.

$\therefore F = U^\delta$.

$\Leftarrow$ Sea $U \subseteq X^*$, veamos que U^δ es G_δ. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$S_n := \{x \in X^\omega \mid |P(x) \cap U| \geq n\}.$$

Veamos que S_n es abierto. Dado $x \in S_n$ existe el conjunto $\{u_1, u_2, ..., u_n\} \subseteq P(x) \cap U$. Si $u = \text{máx}(\{u_1, u_2, ..., u_n\}, \sqsubseteq)$, entonces $u.X^\omega \subseteq S_n$. Por lo tanto S_n es abierto. Mostraremos que $U^\delta = \bigcap_{n=o}^{\infty} S_n$.

$$\begin{aligned} x \in U^\delta &\Leftrightarrow P(x) \cap U \text{ es infinito} \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, |P(x) \cap U| \geq n \\ &\Leftrightarrow x \in \textstyle\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n. \end{aligned}$$

$\therefore U^\delta$ es G_δ.

$\square$

3.2 TOPOLOGÍAS SOBRE X^∞

En esta sección definimos las topologías τ_{ρ_∞}, τ_R y $\tau_{(\sqsubseteq)}$ sobre X^∞. Donde $\tau_{(\sqsubseteq)}$ es una topología de Alexandroff y ρ_∞ es una métrica. También verificamos que τ_R es no metrizable pero si completamente regular.

3.2.1. Topología τ_{ρ_∞}

Ya definida la topología τ_ρ sobre el espacio de las sucesiones X^ω, en esta sección nos dedicamos a extender esta topología al espacio X^∞, guiados por [1]. En esta sección se toma $|X| = n$.

A continuación añadimos un nuevo símbolo $\perp$ al alfabeto.

Considere $\widehat{\rho} : (X \cup \{\perp\})^\omega \times (X \cup \{\perp\})^\omega \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\widehat{\rho}(x, y) = \text{ínf}\{n^{-|w|} \mid w \in P(x) \cap P(y)\}.$$

Observemos que si $x, y \in X^\omega$ entonces $\widehat{\rho}(x,y) = \rho(x,y)$.

La motivación de agregar un símbolo nuevo al alfabeto es para poder identificar X^* con un subespacio de $(X \cup \{\perp\})^\omega$. Este proceso de convertir las palabras en sucesiones lo lleva a cabo la función φ que se define a continuación.

Definición 3.25. *Sea $\varphi : X^\infty \to (X \cup \{\perp\})^\omega$, donde:*

$$\varphi(s) = \begin{cases} s & \textit{si } s \in X^\omega \\ s.\{\perp\}^\omega & \textit{si } s \in X^* \end{cases}$$

Observemos que φ es inyectiva. Esto permite definir una métrica sobre X^∞ de la manera siguiente.

Definición 3.26. *Considere la siguiente métrica $\rho_\infty : X^\infty \times X^\infty \to \mathbb{R}$ tal que:*

$$\rho_\infty(r,s) = \widehat{\rho}\left(\varphi(r), \varphi(s)\right).$$

Ahora mostraremos que X^* es discreto respecto a la métrica ρ_∞. Para esto necesitamos primero mostrar el siguiente resultado. Recordemos que $m_{x,y} \in P(x) \cap P(y)$ denota el prefijo en común de x e y de mayor longitud (ver definición 3.4).

Lema 3.27. *Si $s, r \in X^\infty$ tal que $s \neq r$ entonces $P(\varphi(s)) \cap P(\varphi(r)) = P(s) \cap P(r)$. Además $|m_{\varphi(s),\varphi(r)}| \leq \min\{|s|, |r|\}$. Luego $m_{\varphi(s),\varphi(r)} \in P(s) \cap P(r)$.*

Demostración. Si $|P(s) \cap P(r)| = k$ entonces $s \restriction_{k-1} = r \restriction_{k-1}$ donde $s \restriction_k \neq r \restriction_k$. Por la definición 3.25, es claro que $\varphi(s) \restriction_{k-1} = \varphi(r) \restriction_{k-1}$ donde $\varphi(s) \restriction_k \neq \varphi(r) \restriction_k$. Por lo tanto $|P\varphi(s) \cap P\varphi(r)| = |P(s) \cap P(r)| = k$, entonces

$$P(s) \cap P(r) = \{s \restriction_n\}_{n \in \{0,1,\cdots k-1\}} = \{\varphi(s) \restriction_n\}_{n \in \{0,1,\cdots k-1\}} = P(\varphi(s)) \cap P(\varphi(r)).$$

Dado que $m_{\varphi(s),\varphi(r)} \in P(\varphi(s)) \cap P(\varphi(r))$ entonces $m_{\varphi(s),\varphi(r)} \in P(s) \cap P(r)$. Veamos que $|m_{\varphi(s),\varphi(r)}| \leq \min\{|s|, |r|\}$.

Note que $|P(\varphi(s)) \cap P(\varphi(r))| = |P(s) \cap P(r)| \leq \text{mín}\{|s|+1, |r|+1\}$.
Por lo tanto $|m_{\varphi(s),\varphi(r)}| = |P(\varphi(s)) \cap P(\varphi(r))| - 1 \leq \text{mín}\{|s|, |r|\}$. $\square$

Teorema 3.28. *X^* es un conjunto discreto respecto a ρ_∞. Es decir, todas las palabras $u \in X^*$ son puntos aislados.*

Demostración. Dado $u \in X^*$ y $\varepsilon = n^{-|u|}$. Veamos que $B_{\rho_\infty}(u, \varepsilon) = \{u\}$.
Sea $r \in B_{\rho_\infty}(u, \varepsilon)$.
Supongamos que $r \neq u$ entonces $\rho_\infty(u, r) < \varepsilon$. Es decir, $\widehat{\rho}\,(\varphi(u), \varphi(r)) < n^{-|u|}$.
Recordemos que $\widehat{\rho}\,(\varphi(u), \varphi(r)) = n^{1-|P(\varphi(u)) \cap P(\varphi(r))|} = n^{-|m_{\varphi(u),\varphi(r)}|}$ (definición 3.4).
Por lo tanto $n^{-|m_{\varphi(u),\varphi(r)}|} < n^{-|u|}$, entonces $|u| < |m_{\varphi(u),\varphi(r)}|$ lo cual no es posible, ya que $|m_{\varphi(u),\varphi(r)}| \leq \text{mín}\{|u|, |r|\}$ por el lema 3.27. Por lo tanto $r = u$. Es decir, $B_{\rho_\infty}(u, \varepsilon) = \{u\}$. $\square$

Definición 3.29. *Sea $U \subseteq X^*$:*

$$U.X^\infty := \bigcup_{r \in U} r.X^\infty.$$

Caracterizamos las bolas abiertas del espacio (X^∞, ρ_∞) de la siguiente manera.

Teorema 3.30. *Para todo $s \in X^\infty$ y $\varepsilon > 0$, existe un único $r \in P(s)$ tal que:*

$$B_{\rho_\infty}(s, \varepsilon) = r.X^\infty \quad \textit{ó} \quad B_{\rho_\infty}(s, \varepsilon) = \{s\}$$

Demostración. Sea $s \in X^\infty$, $\varepsilon > 0$ y $n = |X|$. Si $s \in X^*$ entonces por el teorema 3.28, $B_{\rho_\infty}(s, \varepsilon) = \{s\}$ cuando $\varepsilon \leq n^{-|s|}$. Veamos cuándo se da el otro caso.
Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k = \text{mín}\{j \in \mathbb{N} \mid n^{-j} < \varepsilon\}$ donde $n = |X|$. Sea $r \in P(s)$ tal que $|r| = k$. Claramente el prefijo r es único. Veamos que $B_{\rho_\infty}(s, \varepsilon) = r.X^\infty$.
Estaremos usando constantemente el lema 3.27.

$\subseteq$ Sea $t \in B_{\rho_\infty}(s, \varepsilon)$ tal que $t \neq s$. Veamos que $t \in r.X^\infty$, es decir $r \in P(t)$.
Por definición

$$\rho_\infty(s, t) = \widehat{\rho}(\varphi(s), \varphi(t)) = n^{1-|P(\varphi(s)) \cap P(\varphi(t))|} < \varepsilon.$$

Como $|m_{\varphi(s),\varphi(t)}| = |P(\varphi(s)) \cap P(\varphi(t))| - 1$, entonces $n^{-|m_{\varphi(s),\varphi(t)}|} < \varepsilon$. Recordemos que $|r| = \text{mín}\{j \in \mathbb{N} \mid n^{-j} < \varepsilon\}$ entonces $|r| \leq |m_{\varphi(s),\varphi(t)}|$. Sabemos que $r, m_{\varphi(s),\varphi(t)} \in P(s)$. Por lo tanto $r \sqsubseteq m_{\varphi(s),\varphi(t)}$ donde $m_{\varphi(s),\varphi(t)} \in P(t)$, entonces $r \in P(t)$. Así $t \in r.X^{\infty}$.

$\supseteq$ Sea $t \in r.X^{\infty}$, veamos que $t \in B_{\rho_\infty}(s, \varepsilon)$, es decir,

$$\rho_\infty(s,t) = \widehat{\rho}(\varphi(s), \varphi(t)) = n^{1-|P(\varphi(s)) \cap P(\varphi(t))|} < \varepsilon.$$

Por hipótesis $r \in P(t)$, entonces tenemos que $r, m_{\varphi(s),\varphi(t)} \in P(s) \cap P(t)$. Por definición de $m_{\varphi(s),\varphi(t)}$ se tiene que $|m_{\varphi(s),\varphi(t)}| \geq |r|$. Recordemos que $|m_{\varphi(s),\varphi(t)}| = |P(\varphi(s)) \cap P(\varphi(t))| - 1$. Entonces $n^{1-|P(s) \cap P(t)|} < n^{-|r|}$. Dado que $n^{-|r|} < \varepsilon$, entonces $n^{1-|P(s) \cap P(t)|} < \varepsilon$. Por lo tanto $\rho_\infty(s,t) < \varepsilon$, es decir $t \in B_{\rho_\infty}(s, \varepsilon)$.

$\square$

Es fácil verificar que $|r| = \lfloor -log_n(\varepsilon) \rfloor + 1$.

Como es usual, τ_{ρ_∞} denota la topología generada por la métrica ρ_∞.

Corolario 3.31. *Los abiertos de* $(X^{\infty}, \tau_{\rho_\infty})$ *son de la forma:*

$$U.X^{\infty} \cup V = \bigcup_{u \in U} \bigcup_{v \in V} (u.X^{\infty} \cup v)$$

donde $U, V \subseteq X^*$.

Proposición 3.32. *Sea* $s \in X^{\infty}$ *y* $\varepsilon > 0$ *entonces el abierto* $B_{\rho_\infty}(s, \varepsilon)$ *es cerrado.*

Demostración. Por el teorema 3.30 $B_{\rho_\infty}(s, \varepsilon) = r.X^{\infty}$ para algún $r \in P(s)$. Veamos que $(r.X^{\infty})^c = \{t \in X^{\infty} \mid r \not\sqsubseteq t\}$ es abierto. Sea $t \in (r.X^{\infty})^c$, tome $\varepsilon = n^{-|r|}$, y verifiquemos que $B_{\rho_\infty}(t, \varepsilon) \subseteq (r.X^{\infty})^c$. Sea $p \in B_{\rho_\infty}(t, \varepsilon)$, entonces $\rho_\infty(t,p) = n^{1-|P(t) \cap P(p)|} < n^{-|r|}$. Recordemos que $|m_{\varphi(t),\varphi(p)}| = |P(t) \cap P(p)| - 1$, luego $n^{-|m_{\varphi(t),\varphi(p)}|} < n^{-|r|}$, entonces $|m_{\varphi(t),\varphi(p)}| > |r|$. Por lo tanto $r \not\sqsubseteq p$. Así

$p \in (r.X^\infty)^c$ y $B_{\rho_\infty}(t,\varepsilon) \subseteq (r.X^\infty)^c$, entonces $(r.X^\infty)^c$ es abierto, luego $r.X^\infty$ es cerrado. $\square$

El espacio topológico $(X^\infty, \tau_{\rho_\infty})$ también es cero-dimensional (un espacio que admite una base de abiertos-cerrados).

Ahora caracterizamos los conjuntos cerrados del espacio $(X^\infty, \tau_{\rho_\infty})$. La adherencia o clausura de un conjunto $A \subseteq X^\infty$ se denota $Cl_{\rho_\infty}(A) = \{r \in X^\infty \mid \forall \varepsilon > 0, B_{\rho_\infty}(r,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$.

Proposición 3.33. *Sea $A \subseteq X^\infty$, entonces $s \in Cl_{\tau_{\rho_\infty}}(A)$ si y sólo si $P(s) \subseteq P(A)$.*

Demostración. Sea $A \subseteq X^\infty$, entonces:

$$\begin{aligned} s \in Cl_{\tau_{\rho_\infty}}(A) &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ B_{\rho_\infty}(s,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall u \in P(s),\ u.X^\infty \cap A \neq \emptyset \vee \{s\} \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall u \in P(s),\ \exists r \in A \text{ tal que } u \sqsubseteq r \\ &\Leftrightarrow P(s) \subseteq P(A) \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 3.34. *Sea $A \subseteq X^\infty$, entonces $P(Cl_{\tau_{\rho_\infty}}(A)) = P(A)$.*

Demostración. Es claro que $Cl_{\rho_\infty}(A) \supseteq A$, entonces $P(Cl_{\rho_\infty}(A)) \supseteq P(A)$.
Sea $r \in P(Cl_{\rho_\infty}(A))$. Entonces existe $s \in Cl_{\rho_\infty}(A)$ tal que $r \sqsubseteq s$. Luego por la proposición 3.33, tenemos que $P(s) \subseteq P(A)$. Por lo tanto $r \in P(A)$.

$\square$

Teorema 3.35. $A \subseteq X^\infty$ *es cerrado si y sólo existe un árbol T tal que $A = [T] \cup (A \cap X^*)$.*

Demostración. Sea $A \subseteq X^\infty$. (Ver definición 2.17):

$\Rightarrow$ Si A es cerrado, tome $T = \bigcup_{s \in A} P(s)$. Veamos que $A = [T] \cup (A \cap X^*)$.

- $\subseteq$ Dado $s \in A$, si $s \in (A \cap X^{\omega})$ es claro que $P(s) \subseteq T$. Por lo tanto $s \in [T]$. Caso contrario $s \in (A \cap X^*)$. Es decir $s \in [T] \cup (A \cap X^*)$.
- $\supseteq$ Si $s \in [T]$ entonces $P(s) \subseteq P(T)$. Por lo tanto $s \in (A \cap X^{\omega})$. Caso contrario $s \in (A \cap X^*)$. Es decir $s \in A$.

$\Leftarrow$ Si T es un árbol y $A \subseteq X^{\infty}$. Veamos que $[T] \cup (A \cap X^*)$ es cerrado, es decir $[T] \cup (A \cap X^*) = Cl_{\rho_\infty}([T] \cup (A \cap X^*))$.

- $\subseteq$ Es claro que $[T] \cup (A \cap X^*) \subseteq Cl_{\rho_\infty}([T] \cup (A \cap X^*))$.
- $\supseteq$ Si $s \in Cl_{\rho_\infty}([T] \cup (A \cap X^*))$ luego por la proposición 3.33, $P(s) \subseteq P([T] \cup (A \cap X^*))$. Entonces para todo $r \in P(s)$, existe $t \in [T] \cup (A \cap X^*)$ tal que $r \sqsubseteq t$. Si $t \in [T]$, por definición del conjunto $[T]$, $P(t) \subseteq T$. Por lo tanto $r \in T$ para todo $r \in P(s)$. Es decir, $s \in [T]$. Caso contrario $t \in (A \cap X^*)$. Es decir $Cl_{\rho_\infty}([T] \cup (A \cap X^*)) \subseteq [T] \cup (A \cap X^*)$.

Por lo tanto $[T] \cup (A \cap X^*)$ es cerrado.

$\square$

3.2.2. Topología τ_R

En esta sección se define la topología τ_R sobre X^{∞}, propuesta por Redziejowski en [1]. Esta nueva topología viene dada por un operador clausura de Kuratowski en X^{∞}. El resultado mas importante de esta sección es el Teorema 3.46 (tomado de [1]) que dice, entre otras cosas, que τ_R no es metrizable.

Definición 3.36. *Dado A un subconjunto de X^{∞}, considere:*

$$K_R(A) = A \cup (A \cap X^*)^{\delta}.$$

Proposición 3.37. *K_R es un operador de Kuratowski en X^{∞}.*

Demostración. Veamos que K_R cumple con las 4 propiedades que hacen falta para ser un operador Kuratowski. Sean $A, B \subseteq X^{\infty}$:

1. Si $A = \emptyset$, entonces $K_R(\emptyset) = \emptyset \cup (\emptyset \cap X^*)^\delta = (\emptyset)^\delta = \emptyset$.

2. Claramente $A \subseteq A \cup (A \cap X^*)^\delta = K_R(A)$.

3. Veamos que $K_R(K_R(A)) = K_R(A)$

$$\begin{aligned} K_R(K_R(A)) &= K_R(A) \cup (K_R(A) \cap X^*)^\delta \\ &= \left(A \cup (A \cap X^*)^\delta\right) \cup \left(\left(A \cup (A \cap X^*)^\delta\right) \cap X^*\right)^\delta \\ &= \left(A \cup (A \cap X^*)^\delta\right) \cup \left((A \cap X^*) \cup \left((A \cap X^*)^\delta \cap X^*\right)\right)^\delta . \end{aligned}$$

Dado que $(A \cap X^*)^\delta \subseteq X^\omega$ tenemos $(A \cap X^*)^\delta \cap X^* = \emptyset$. Así

$$\begin{aligned} K_R(K_R(A)) &= \left(A \cup (A \cap X^*)^\delta\right) \cup ((A \cap X^*) \cup \emptyset)^\delta \\ &= A \cup (A \cap X^*)^\delta \cup (A \cap X^*)^\delta \\ &= A \cup (A \cap X^*)^\delta \\ &= K_R(A) \end{aligned}$$

4. Veamos que $K_R(A \cup B) = K_R(A) \cup K_R(B)$

$$\begin{aligned} K_R(A \cup B) &= (A \cup B) \cup ((A \cup B) \cap X^*)^\delta \\ &= (A \cup B) \cup ((A \cap X^*) \cup (B \cap X^*))^\delta \\ &= (A \cup B) \cup (A \cap X^*)^\delta \cup (B \cap X^*)^\delta \text{ proposición 2.9 (ítem 2)} \\ &= \left(A \cup (A \cap X^*)^\delta\right) \cup \left(B \cup (B \cap X^*)^\delta\right) \\ &= K_R(A) \cup K_R(B). \end{aligned}$$

□

La topología τ_R en X^∞ propuesta por Redziejowski en [1] se define con el operador de Kuratowski K_R como:

$$\tau_R = \{A \subseteq X^\infty \mid K_R(X^\infty \setminus A) = X^\infty \setminus A\}.$$

Caracterizamos las abiertos del espacio (X^∞, τ_R) de la siguiente manera.

Teorema 3.38. *Si $A \subseteq X^\infty$ entonces:*

$$A \in \tau_R \Leftrightarrow (\exists F \subseteq X^\omega)\,(\exists U \subseteq X^*)\left[\left(U^\delta \cap F = \emptyset\right) \wedge (A = (X^* \setminus U) \cup F)\right].$$

Demostración. Sea $A \subseteq X^\infty$

$\Rightarrow$ Sea $F = (A \cap X^\omega)$ y $U = X^* \setminus (X^* \cap A)$. Es claro que $A = (X^* \setminus U) \cup F$. Note que:

$$\begin{aligned} K_R(X^\infty \setminus A) &= (X^\infty \setminus A) \cup [X^* \cap (X^\infty \setminus A)]^\delta \\ &= (X^\infty \setminus A) \cup (X^* \setminus A)^\delta \\ &= (X^\infty \setminus A) \cup [X^* \setminus [(X^* \setminus U) \cup F]]^\delta \\ &= (X^\infty \setminus A) \cup (U)^\delta . \end{aligned}$$

Dado que $A \in \tau_R$ entonces $K_R(X^\infty \setminus A) = X^\infty \setminus A$.
Por lo tanto $U^\delta \subseteq (X^\infty \setminus A)$.
Entonces $U^\delta \cap F = \emptyset$ dado que $U^\delta \cap A = U^\delta \cap [(X^* \setminus U) \cup F] = \emptyset$.

$\Leftarrow$ Dado $F \subseteq X^\omega$ y $U \subseteq X^*$ tales que $A = (X^* \setminus U) \cup F$. Veamos que $A \in \tau_R$. Ya que para todo $x \in U^\delta, \ x \notin F$ entonces $U^\delta \subseteq (X^\infty \setminus A)$. Entonces:

$$\begin{aligned} K_R(X^\infty \setminus A) &= (X^\infty \setminus A) \cup (U)^\delta \\ &= (X^\infty \setminus A) \end{aligned}$$

Por lo tanto $A \in \tau_R$.

$\square$

Corolario 3.39. *Si F es cerrado, entonces*

$$(F \cap X^*)^\delta \cap [X^\omega \setminus (F \cap X^\omega)] = \emptyset.$$

Lema 3.40. *Dado $x \in X^\omega$, el conjunto*

$$\{A \cup \{x\} \mid A \subseteq P(x) \text{ tal que } P(x) \setminus A \text{ es finito}\}.$$

es una base local de x respecto a τ_R.

Demostración. Dado $x \in X^\omega$ y $T \in \tau_R$ tal que $x \in T$, veamos que existe $A \subseteq P(x)$ tal que $P(x) \setminus A$ es finito, y $A \cup \{x\} \subseteq T$.
Tome $A = P(x) \cap (T \cap X^*)$. Note que $A \cup \{x\} \subseteq (T \cap X^*) \cup (T \cap X^\omega) = T$.

Dado que $T \in \tau_R$ entonces $(X^* \setminus (T \cap X^*))^\delta \cap (T \cap X^\omega) = \emptyset$.

Luego, ya que $x \in T \cap X^\omega$ entonces $P(x) \cap (X^* \setminus (T \cap X^*))$ es finito.

Es decir, $P(x) \setminus (T \cap X^*) = P(x) \setminus A$ es finito.

Por lo tanto, $A \cup \{x\} \subseteq T$. □

Teorema 3.41. *Dado* $x \in X^\infty$ *entonces* $\{x_{\restriction n}\}_{n \in \mathbb{N}} \to x$ *en* τ_R*.*

Demostración. Se sigue del Lema 3.40. □

Proposición 3.42. X^* *es denso, abierto y discreto respecto a* τ_R*.*

Demostración. Sea $X^* \subseteq X^\infty$

- Supongamos que X^* no es denso en (X^∞, τ_R).
  Entonces existe un abierto $A \subseteq X^\omega$ diferente de vacío tal que $A \cap X^* = \emptyset$.
  Por el teorema 3.38 $A = (X^* \setminus U) \cup F$ tal que $U^\delta \cap F = \emptyset$.
  Es claro que $U = X^*$, entonces $U^\delta = X^\omega$. Por lo tanto $F = \emptyset$, es decir, $A = \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis. Por lo tanto X^* es denso en (X^∞, τ_R).

- X^* es abierto, dado que se puede escribir como $X^* = (X^* \setminus U) \cup F$, donde $U = F = \emptyset$, y claramente cumple que $U^\delta \cap F = \emptyset$.

- Veamos que para todo $u \in X^*$, $\{u\} \in \tau_R$.
  Dado $u \in X^*$, podemos escribir $\{u\} = (X^* \setminus U) \cup F$, donde $F = \emptyset$.
  Por lo tanto, $U^\delta \cap F = \emptyset$, es decir, $\{u\} \in \tau_R$. Entonces X^* es discreto.

□

Proposición 3.43. X^ω *es un subespacio cerrado y discreto de* (X^∞, τ_R)*.*

Demostración. Veamos que X^ω es discreto como subespacio topológico de (X^∞, τ_R).

Afirmación: Si $x \in X^\omega$ entonces $(X^* \cup \{x\}) \in \tau_R$, en efecto:

$$\begin{aligned} K_R(X^\infty \setminus (X^* \cup \{x\})) &= K_R(X^\omega \setminus \{x\}) \\ &= (X^\omega \setminus \{x\}) \cup ((X^\omega \setminus \{x\}) \cap X^*)^\delta \\ &= (X^\omega \setminus \{x\}) \cup (\emptyset)^\delta \\ &= X^\omega \setminus \{x\} \\ &= X^\infty \setminus (X^* \cup \{x\}) \end{aligned}$$

Dado $x \in X^\omega$, entonces $\{x\} = (X^* \cup \{x\}) \cap X^\omega$ es abierto en X^ω.
Por lo tanto X^ω es discreto y cerrado. □

Proposición 3.44. *Si $u \in X^*$ entonces $u.X^\infty \in \tau_R$*

Demostración. Dado $u \in X^*$. Definimos $B := X^\infty \setminus u.X^\infty = \{s \in X^\infty \mid u \not\sqsubseteq s\}$.
Veamos que $u.X^\infty \in \tau_R$:

$$\begin{aligned} K_R(B) &= B \cup (X^* \cap B)^\delta \\ &= B \cup (\{w \in X^* \mid u \not\sqsubseteq w\})^\delta \\ &= B \cup \{x \in X^\omega \mid u \not\sqsubseteq x\} \\ &= B \end{aligned}$$

Por lo tanto $u.X^\infty \in \tau_R$. □

Ahora mostraremos que (X^∞, τ_R) es no metrizable. Para esto necesitamos primero mostrar un resultado clásico de topología. Recordemos que dado un espacio topológico (X, τ), un conjunto $B \subseteq X$ es discreto con la topología de subespacio, si para cada $x \in B$ existe $A \in \tau$ tal que $A \cap B = \{x\}$. La demostración del siguiente resultado la tomamos de [7].

Lema 3.45. *(Lema Jones) Si un espacio topológico X contiene un subconjunto denso A y un subespacio cerrado discreto B, con $|B| \geq 2^{|A|}$, entonces X no es normal.*

Demostración. Sea X un espacio topológico, con $A \subseteq X$ denso, $B \subseteq X$ cerrado y discreto con la topología de subespacio, tal que $|B| \geq 2^{|A|}$. Supongamos que X es normal.

Sea $F \subseteq B$, tenemos que F y $B \setminus F$ son disjuntos y cerrados. Dado que X es normal, existen U_F y V_F abiertos disjuntos, tal que $F \subseteq U_F$ y $(B \setminus F) \subseteq V_F$. Definimos:

$$\begin{aligned} \Gamma: \ \ \mathcal{P}(B) & \to \mathcal{P}(A) \\ F \quad & \to U_F \cap A \end{aligned}$$

Veamos que Γ es inyectiva.
Dado $F_1, F_2 \subseteq B$, con $F_1 \neq F_2$, tenemos que $F_1 \cap (B \setminus F_2) \neq \emptyset$.
Entonces $U_{F_1} \cap V_{F_2}$ es no vacío y abierto en X. Dado que A es denso $(U_{F_1} \cap V_{F_2}) \cap A \neq \emptyset$, donde $(U_{F_1} \cap V_{F_2} \cap A) \subseteq U_{F_1} \cap A$ pero $(U_{F_1} \cap V_{F_2} \cap A) \not\subseteq U_{F_2} \cap A$.
Por lo tanto $(U_{F_1} \cap A) \neq (U_{F_2} \cap A)$. Es decir $\Gamma(F_1) \neq \Gamma(F_2)$.
Entonces $|\mathcal{P}(B)| \leq |\mathcal{P}(A)|$, luego $|B| < 2^{|A|}$, lo cual no es posible por hipótesis.

$\therefore$ X no es normal.

$\square$

Teorema 3.46. *[1] La topología τ_R cumple lo siguiente:*

1. *Cada subconjunto $F \subseteq X^{\omega}$ es cerrado en X^{∞}.*
2. *(X^{∞}, τ_R) no es metrizable.*
3. *(X^{∞}, τ_R) es completamente regular.*

Demostración. Dado el espacio topológico (X^{∞}, τ_R).

1. Si $F \subseteq X^{\omega}$, entonces

$$\begin{aligned} K_R(F) &= F \cup (F \cap X^*)^{\delta} \\ &= F \cup (\emptyset)^{\delta} \\ &= F \end{aligned}$$

$\therefore F$ es cerrado en X^{∞}.

2. Haciendo uso del lema 3.45. y las proposiciones 3.42 y 3.43, el espacio topológico (X^{∞}, τ_R) contiene un subconjunto denso X^* y un subespacio cerrado y discreto X^{ω}, donde $|X^{\omega}| \geq 2^{|X^*|}$, entonces (X^{∞}, τ_R) no es normal. Por lo tanto (X^{∞}, τ_R) no es metrizable.

3. Veamos que (X^{∞}, τ_R) es completamente regular (ver definición 1.10). Dado $r \in X^{\infty}$ y $F \subseteq X^{\infty}$ cerrado tal que $r \notin F$, verifiquemos los siguientes dos casos, haciendo uso del teorema 3.38.

   (i) si $r \in X^*$, definimos

$$\begin{array}{rccl} f: & X^{\infty} & \to & [0,1] \\ & s & \mapsto & f(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s = r \\ 1 & \text{si } s \in X^{\infty} \setminus \{r\} \end{cases} \end{array}$$

   Por la proposición 3.42, es claro que $f^{-1}[\{0\}] = \{r\} \in \tau_R$.
   Note que $f^{-1}(\{1\}) = (X^* \setminus \{r\}) \cup X^{\omega}$, donde $\{r\}^{\delta} \cap X^{\omega} = \emptyset$.
   Entonces $f^{-1}(\{1\}) \in \tau_R$. Por lo tanto f es continua.

   (ii) si $r \in X^{\omega}$, definimos

$$\begin{array}{rccl} f: & X^{\infty} & \mapsto & [0,1] \\ & s & \mapsto & f(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in F \cup P(F \cap X^{\omega}) \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \end{array}$$

   Es claro que $f(r) = 0$, dado que $r \notin F$ y $r \in X^{\omega}$.
   Veamos que las imágenes inversas de cada punto es un abierto de τ_R.
   Para facilitar la escritura, denotaremos con $A = F \cap X^*$ y $B = F \cap X^{\omega}$.

   - Entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1\}) &= F \cup P(B) \\ &= [X^* \setminus [X^* \setminus [A \cup P(B)]]] \cup B. \end{aligned}$$

     Note que

$$[X^* \setminus [A \cup P(B)]]^{\delta} \cap B = \emptyset.$$

Por lo tanto $f^{-1}(\{1\}) \in \tau_R$.

- Dado que F es cerrado, entonces $X^\infty \setminus F$ es abierto de τ_R. Dado que:

$$X^\infty \setminus F = [X^* \setminus A] \cup [X^\omega \setminus B].$$

Entonces

$$A^\delta \cap [X^\omega \setminus B] = \emptyset. \tag{3.1}$$

Veamos que $f^{-1}(\{0\}) \in \tau_R$. Dado que:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{0\}) &= X^\infty \setminus [F \cup P(B)] \\ &= [X^* \setminus [A \cup P(B)]] \cup [X^\omega \setminus B]. \end{aligned}$$

Falta verificar que

$$[A \cup P(B)]^\delta \cap [X^\omega \setminus B] = \emptyset.$$

Haciendo uso del resultado anterior 3.1 en $\star$

$$\begin{aligned} [A \cup P(B)]^\delta \cap [X^\omega \setminus B] &= [A^\delta \cup (P(B))^\delta] \cap [X^\omega \setminus B] \\ &=^\star [A^\delta \cap [X^\omega \setminus B] \cup [B \cap [X^\omega \setminus B]] \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f^{-1}(\{0\}) \in \tau_R$.

□

3.2.3. Topología Alexandroff

La topología que se define es esta sección está definida a partir del orden de prefijos $\sqsubseteq$ que se estudio en el segundo capítulo.

Definición 3.47. *Sea Y un conjunto con un orden " $\leq_Y$ ". La* topología Alexandroff $\tau_{(\leq_Y)}$ *asociada al orden $\leq_Y$ está dada por: Sea $A \subseteq Y$,*

$$A \in \tau_{(\leq_Y)} \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A)(\forall y \in Y)(x \leq_Y y \Rightarrow y \in A).$$

Observemos que la única topología Alexandroff que es T_1 es la topología discreta. En otras palabras, $\tau_{(\leq_Y)}$ es la topología discreta si y sólo si $\leq_Y$ es el orden discreto (es decir, $x \leq_Y y$ si y sólo si $x = y$).

A partir del orden de prefijos $\sqsubseteq$, obtenemos la topología Alexandroff $\tau_{(\sqsubseteq)}$ sobre el espacio de palabras X^∞. Es decir, obtenemos el siguiente espacio topológico:

$$(X^\infty, \tau_{(\sqsubseteq)})$$

De lo anterior se deduce que el espacio $(X^\infty, \tau_{(\sqsubseteq)})$ no es T_1. También observe que:

- Si $r \in X^*$ entonces $r.X^\infty$ es el abierto mínimo que contiene a r respecto a $\tau_{(\sqsubseteq)}$.
- Si $r \in X^\omega$ entonces $\{r\}$ es abierto en $\tau_{(\sqsubseteq)}$.

Por lo tanto, tenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 3.48. *Los abiertos del espacio $(X^\infty, \tau_{(\sqsubseteq)})$ son de la forma:*

$$W.X^\infty \cup F,$$

donde $W \subseteq X^*$ y $F \subseteq X^\omega$.

$\square$

Proposición 3.49. *La topología que recibe X^ω como subespacio topológico de $(X^\infty, \tau_{(\sqsubseteq)})$, es la topología discreta.*

$\square$

En el siguiente capítulo comparamos la topología de Alexandroff con las diferentes topologías mencionadas en este capítulo.

Capítulo

4

CONCLUSIÓN

En este último capítulo revisamos algunas relaciones que guardan las topologías estudiadas a lo largo de este trabajo.
La demostraciones de los teoremas enunciados en este capítulo se basan en los teoremas y proposiciones ya mencionados en el capítulo anterior.

Antes de continuar, nos planteamos las siguientes preguntas:

- ¿Qué relación guardan las topologías que recibe X^* como subespacio de $(X^\infty, \tau_{\rho_\infty})$, (X^∞, τ_R) y $(X^\infty, \tau_{(\sqsubseteq)})$?
- ¿Qué relación guarda τ_ρ y τ_{ρ_U} con las topologías que recibe X^ω como subespacio de $(X^\infty, \tau_{\rho_\infty})$, (X^∞, τ_R) y $(X^\infty, \tau_{(\sqsubseteq)})$?
- ¿Qué relación guardan los espacios topológicos $(X^\infty, \tau_{\rho_\infty})$, (X^∞, τ_R) y $(X^\infty, \tau_{(\sqsubseteq)})$?

Para facilitar la escritura de los siguientes teoremas tenemos la siguiente notación.

Definición 4.1. *Las topologías que reciben los espacios de palabras X^* y X^ω como subespacio topológico de $(X^\infty, \tau_{\rho_\infty})$, (X^∞, τ_R) y $(X^\infty, \tau_{(\sqsubseteq)})$ las denotamos como:*

- $\tau_{\rho_\infty} \upharpoonright_{X^*} := \{A \cap X^* \mid A \in \tau_{\rho_\infty}\}$.
- $\tau_R \upharpoonright_{X^*} := \{B \cap X^* \mid B \in \tau_R\}$.
- $\tau_{\rho_\infty} \upharpoonright_{X^\omega} := \{A \cap X^\omega \mid A \in \tau_{\rho_\infty}\}$.
- $\tau_R \upharpoonright_{X^\omega} := \{B \cap X^\omega \mid B \in \tau_R\}$.

Con la ayuda de los teoremas y proposiciones que se estudiaron a lo largo de este trabajo, podemos enunciar y demostrar de forma sencilla los siguientes teoremas.

Teorema 4.2. $\tau_{(\sqsubseteq)} \upharpoonright_{X^*} \subset \tau_R \upharpoonright_{X^*} = \tau_{\rho_\infty} \upharpoonright_{X^*}$.

Demostración. Por la proposición 3.42 y el teorema 3.28, tenemos que las topologías $\tau_R \upharpoonright_{X^*}$ y $\tau_{\rho_\infty} \upharpoonright_{X^*}$ son la topología discreta. □

Teorema 4.3. $\tau_{\rho_\infty} \upharpoonright_{X^\omega} = \tau_\rho \subsetneq \tau_{\rho_U} \subsetneq \tau_R \upharpoonright_{X^\omega} = \tau_{(\sqsubseteq)} \upharpoonright_{X^\omega} =$ *discreta.*

Demostración. Recordemos que si $x, y \in X^\omega$ entonces $\widehat{\rho}(x, y) = \rho(x, y)$.
Luego, por la definición 3.26 obtenemos que $\tau_\rho = \tau_{\rho_\infty} \upharpoonright_{X^\omega}$.
Por la proposición 3.18 se obtiene que $\tau_\rho \subsetneq \tau_{\rho_U}$.
Por último, las proposiciones 3.43 y 3.49 nos dicen que $\tau_R \upharpoonright_{X^\omega}$ y $\tau_{(\sqsubseteq)} \upharpoonright_{X^\omega}$ son la topología discreta. □

Teorema 4.4. $\tau_{\rho_\infty} \subset \tau_R$.

Demostración. Si $A \in \tau_{\rho_\infty}$ entonces $A = W.X^\infty \cup U$ para algún $U, W \subseteq X^*$ (corolario 3.31). Haciendo uso de la caracterización de los abiertos de τ_R (Teorema 3.38), veamos que $A \in \tau_R$. Note que:

$$A = W.X^\infty \cup U = (W.X^* \cup U) \cup w.X^\omega = [X^* \setminus (X^* \setminus w.X^* \cup U)] \cup w.X^\omega.$$

Si $V := X^* \setminus (w.X^* \cup U)$ y $F := w.X^\omega$ entonces $A = (X^* \setminus V) \cup F$.

Veamos que $V^\delta \cap F = \emptyset$.

$$V = \{t \in X^* \mid t \not\sqsubseteq w\} \cap (X^* \setminus U).$$

Luego, por el ítem 3 de la proposición 2.9

$$V^\delta = (\{t \in X^* \mid t \not\sqsubseteq w\} \cap (X^* \setminus U))^\delta \subseteq (\{t \in X^* \mid t \not\sqsubseteq w\})^\delta \cap (X^* \setminus U)^\delta.$$

Donde

$$F \cap (\{t \in X^* \mid t \not\sqsubseteq w\})^\delta = \emptyset.$$

Entonces

$$V^\delta \cap F = \emptyset.$$

Por lo tanto $A \in \tau_R$ $\square$

Uno de los aspectos mas interesantes del espacio (X^∞, τ_R) es que no es una topología metrizable, pero si completamente regular. A demás, X^ω y X^* resultan ser subespacios discretos de τ_R, donde $X^\infty = X^\omega \cup X^*$. Otra de las topologías que resulta ser discreta es $(X^*, \tau_{\rho_\infty} \restriction_{X^*})$.

También definimos topologías a partir de una métrica, como lo son τ_ρ, τ_{ρ_U} y τ_{ρ_∞}. Por último encontramos la topología $\tau_{(\sqsubseteq)}$ que no es T_1.

La siguiente tabla resume las topologías que se presentaron a lo largo de este trabajo.

Espacios	Topologías		
X^∞	$\tau_{(\sqsubseteq)}$	τ_{ρ_∞}	τ_R
X^ω	$\tau_{\rho_\infty} \restriction_{X^\omega} = \tau_\rho$	τ_{ρ_U}	$\tau_R \restriction_{X^\omega} = \tau_{(\sqsubseteq)} \restriction_{X^\omega}$
X^*	$\tau_{(\sqsubseteq)} \restriction_{X^*}$	$\tau_R \restriction_{X^*} = \tau_{\rho_\infty} \restriction_{X^*}$	

Tabla 1: Topologías sobre los espacios de palabras.

REFERENCIAS

[1] Calude, C. S., Jürgensen, H., & Staiger, L. (2009). Topology on words. *Theoretical Computer Science*, 410(24), 2323-2335.

[2] Calude, C. S., Marcus, S., & Staiger, L. (2003). A topological characterization of random sequences. *Information Processing Letters*, 88(5), 245-250.

[3] Castillo, C. I. TEORIA DESCRIPTIVA DE CONJUNTOS.

[4] Di Prisco, C. A., & Uzcátegui, C. E. (1991). *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Escuela Venezolana de Matemáticas, Asociación Matemática Venezolana, Centro de Estudios Avanzados, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas.

[5] Staiger, L. (1987). Sequential mappings of ω-languages, *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications* , 21(2), 147-173.

[6] Schwarz, S., & Staiger, L. (2010, June). Topologies refining the Cantor topology on X^ω. In *IFIP TCS* (pp. 271-285).

[7] Willard, S. (2004). *General topology*. Courier Corporation. ISO 690

BIBLIOGRAFÍA

Calude, C. S., Jürgensen, H., & Staiger, L. (2009). Topology on words. *Theoretical Computer Science*, 410(24), 2323-2335.

Calude, C. S., Marcus, S., & Staiger, L. (2003). A topological characterization of random sequences. *Information Processing Letters*, 88(5), 245-250.

Di Prisco, C. A., & Uzcátegui, C. E. (1991). *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Escuela Venezolana de Matemáticas, Asociación Matemática Venezolana, Centro de Estudios Avanzados, Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas.