

**ALGUNAS DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE
PROBABILIDAD Y POSIBLES APLICACIONES**

**LAURA CRISTINA LÓPEZ BOHÓRQUEZ
LIANA PRAKRITI MORENO ACUÑA**

**Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Especilización en Estadística
Bucaramanga
2015**

ALGUNAS DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD Y POSIBLES APLICACIONES

Autoras

LAURA CRISTINA LÓPEZ BOHÓRQUEZ

LIANA PRAKRITI MORENO ACUÑA

Trabajo de grado como requisito para optar el título de

Especialista en Estadística

Director

Germán Moreno Arenas, Ph.D.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Especialización en Estadística

Bucaramanga

2015

*A Dios por su inmensa misericordia, sabiduría y fortaleza que me brindó a cada instante para
alcanzar esta meta.*

*A mis padres, hermana y novio porque estuvieron siempre apoyándome con sus consejos y su
comprensión.*

Laura López Bohorquez

A Dios por darme la fuerza y el entusiasmo para iniciar y terminar este proyecto, a mi madre por su apoyo incondicional a mi esposo, hermanos y amiga Laura por sus palabras de aliento cuando creí desfallecer y a mi hija Isabella por ser parte de mi vida.

Liana Prakriti Moreno Acuña

Índice general

Introducción	16
1. OBJETIVOS Y METODOLOGÍA	17
1.1. Objetivo General	17
1.2. Objetivos Específicos	17
1.3. Metodología	18
2. MARCO TEÓRICO	19
3. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD	22
3.1. DISTRIBUCIÓN NORMAL	22
3.1.1. Función de densidad de probabilidad Normal	22
3.1.2. Propiedades de la función de densidad de probabilidad Normal	23
3.1.3. Función de distribución Normal	24
3.1.4. Teorema del Límite Central para muestras aleatorias	24
3.1.5. Función característica y función generadora de momentos de la distribución Normal	25
3.1.6. Distribuciones relacionadas con la distribución Normal	25
3.1.7. Estimación de parámetros en poblaciones normales	26
3.1.8. Aplicaciones de la Distribución Normal	27
3.2. DISTRIBUCIÓN WEIBULL	31
3.2.1. Función de densidad de probabilidad Weibull	32
3.2.2. Función de distribución Weibull	33
3.2.3. Propiedades de la distribución de Weibull	34
3.2.4. Función característica y función generadora de momentos de la distribución Weibull	34
3.2.5. Distribuciones relacionadas con la distribución Weibull	34

3.2.6.	Estimación de los parámetros de la distribución Weibull	35
3.2.7.	Aplicaciones de la Distribución Weibull	36
3.3.	DISTRIBUCIÓN GUMBEL	38
3.3.1.	Función de densidad de probabilidad Gumbel	38
3.3.2.	Función de distribución Gumbel	38
3.3.3.	Propiedades de la Distribución Gumbel	40
3.3.4.	Función característica y función generadora de momentos de la distribución Gumbel	40
3.3.5.	Función cuantil de Gumbel	40
3.3.6.	Distribuciones relacionadas con la distribución Gumbel	40
3.3.7.	Estimación de parámetros de Gumbel	41
3.3.8.	Aplicaciones de la Distribución Gumbel	41
3.3.9.	Ajuste a la función de distribución de probabilidad de Gumbel y Lognormal .	43
3.4.	DISTRIBUCIÓN F	47
3.4.1.	Función de densidad de probabilidad F	48
3.4.2.	Función de distribución F	48
3.4.3.	Propiedades de la distribución F	50
3.4.4.	Distribuciones relacionadas con la distribución F	50
3.5.	DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL	50
3.5.1.	Función de densidad de probabilidad Lognormal	50
3.5.2.	Función de distribución Lognormal	51
3.5.3.	Propiedades de la distribución Lognormal	52
3.5.4.	Momentos de la distribución Lognormal	52
3.5.5.	Función característica de la distribución Lognormal	52
3.5.6.	Distribuciones relacionadas con la distribución Lognormal	52
3.5.7.	Estimación de parámetros de la distribución Lognormal	53
3.5.8.	Aplicaciones la distribución Lognormal	54
3.6.	DISTRIBUCIÓN BETA	56
3.6.1.	Función de densidad de probabilidad Beta	56
3.6.2.	Función de distribución Beta	56
3.6.3.	Propiedades de la distribución Beta	56
3.6.4.	Función característica distribución Beta	57
3.6.5.	Momentos de la distribución Beta	58
3.6.6.	Distribuciones relacionadas con la distribución Beta	58

3.6.7.	Estimación de parámetros distribución Beta	59
3.6.8.	Aplicaciones la distribución Beta	60
3.7.	DISTRIBUCIÓN GAMMA	62
3.7.1.	Función de densidad de probabilidad Gamma	62
3.7.2.	Función de distribución de probabilidad Gamma	62
3.7.3.	Propiedades de la distribución Gamma	63
3.7.4.	Momentos de la distribución gamma	64
3.7.5.	Distribuciones relacionadas con la distribución gamma	64
3.7.6.	Estimación de parámetros de la distribución Gamma	65
3.7.7.	Aplicaciones de la Distribución Gamma	66
3.7.8.	La distribución gamma como modelo para analizar la distribución de la renta	67
3.8.	DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL	68
3.8.1.	Función de densidad de probabilidad Exponencial	69
3.8.2.	Función de distribución Exponencial	69
3.8.3.	Propiedades de la distribución Exponencial	69
3.8.4.	Función característica distribución Exponencial	71
3.8.5.	Momentos de la distribución Exponencial	72
3.8.6.	Distribuciones relacionadas con la distribución Exponencial	72
3.8.7.	Estimación de parámetros de la distribución Exponencial	73
3.8.8.	Aplicaciones de la distribución Exponencial	73
4.	CONCLUSIONES	77
	Bibliografía	78
5.	ANEXOS	84

Índice de figuras

3.1. Función de densidad de probabilidad Normal	23
3.2. Función de distribución normal	24
3.3. PH	28
3.4. Curva de distribución normal de la PCO_2	29
3.5. Curva de distribución normal del PO_2	29
3.6. Exceso de base	30
3.7. Distribución normal de las mediciones de la TN observadas en 324 pacientes	31
3.8. Función de densidad de probabilidad Weibull	32
3.9. Función de distribución Weibull	33
3.10. El parámetro de forma de la función de densidad de Weibull en función del coeficiente de asimetría de la variable diámetro	36
3.11. Capacidad del proceso de deserción basados en el modelo de distribución de Weibull	38
3.12. Función de densidad de probabilidad Gumbel	39
3.13. Función de distribución Gumbel	39
3.14. Modelo de ajuste para el modelo MG para la región de estudio	48
3.15. Función de densidad de probabilidad F	49
3.16. función de distribución F	49
3.17. Función de densidad de probabilidad Lognormal	51
3.18. Función de distribución Lognormal	51
3.19. Variable cantidad de mcg de BSA por ml de suero en cada cuerpo.	54
3.20. Valores muestrales	55
3.21. Función de densidad de probabilidad Beta	56
3.22. Función de Distribución Beta	57
3.23. Función de densidad de probabilidad Gamma	63
3.24. Función de distribución de probabilidad Gamma	64
3.25. Función de densidad de probabilidad Exponencial	69

3.26. Función de distribución Exponencial	70
3.27. Histograma de frecuencias, grupo 1	75
3.28. Histograma de frecuencias, grupo 2	75
3.29. Histograma de frecuencias, Tiempo de Servicio	76

Índice de tablas

3.1. Caracterización de las precipitaciones en la región de Atacama	42
3.2. Caracterización de las precipitaciones en la región de Magallanes	43
3.3. Precipitación media anual de las Regiones de Atacama y Magallanes	44
3.4. Precipitación media anual de las Regiones de Atacama y Magallanes	45
3.5. Precipitación media anual de las Regiones de Atacama y Magallanes	46
3.6. Precipitación media anual de las Regiones de Atacama y Magallanes	47
3.7. Distribución de la muestra de la EPF ingreso medio y desviación típica del ingreso .	68

RESUMEN

TÍTULO: ALGUNAS DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD Y POSIBLES APLICACIONES ¹

AUTORAS: LAURA LÓPEZ BOHORQUEZ Y LIANA PRAKRITI MORENO ACUÑA ²

PALABRAS CLAVE: Revisión bibliográfica, Distribución normal, Weibull, Gumbel, Fisher, Lognormal, Gamma, Beta, Exponencial.

DESCRIPCIÓN:

El presente trabajo de grado tiene como propósito presentar una revisión bibliográfica, sobre algunas de las distribuciones continuas de probabilidad, como son la distribución Normal, Weibull, Gumbel, Lognormal, Fisher, Gamma, Beta y Exponencial; con el fin de cumplir este objetivo, se realizó una amplia consulta en libros, investigaciones, conferencias, memorias de congresos académicos, documentos en línea, artículos científicos y trabajos de grado.

El trabajo se muestra en dos partes, la primera consta de una parte teórica, donde se encuentra la definición de las diferentes distribuciones continuas de probabilidad con su función de densidad, función de distribución, función característica, función generadora de momentos, algunas distribuciones que se relacionan, estimación de parámetros y gráficos de la función de densidad y la función de distribución; donde se usó el programa R. Y una segunda parte donde se presenta diferentes campos de aplicación de las distribuciones antes mencionadas como: La medicina, hidrología, economía, finanzas, riesgo sísmico y tiempos de vida entre otros. Donde el principal interés es el análisis estadístico de las muestras tomadas en cada uno de los estudios y se resalta la distribución normal como una de las más utilizada en fenómenos reales.

¹Trabajo de grado

²Facultad de Ciencias.Escuela de Matemáticas, especialización en Estadística.Director GERMÁN MORENO ARENAS, Doctor en Estadística

ABSTRACT

TITLE: SOME CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTIONS AND POSSIBLE APPLICATIONS³

AUTHOR: LAURA LÓPEZ BOHORQUEZ Y LIANA PRAKRITI MORENO ACUÑA⁴

KEY WORDS: LITERATURE REVIEW, NORMAL PROBABILITY DISTRIBUTION, WEIBULL, GUMBEL, FISHER, LOG-NORMAL, GAMMA, BETA, EXPONENTIAL DISTRIBUTION.,

DESCRIPTION:

The current thesis work has the purpose to introduce a literature review, about some of the different continuous probability distributions, as normal distribution, Weibull, Gumbel, Lognormal, Fisher, Gamma, Beta and Exponential distribution: in order to meet this aim, a wide consultation was held in books, research, conferences, memories academic conferences, online documents, scientific articles and thesis Works.

This thesis work is shown in two parts, the first one contains of a theoretical part, where the definition of the different continuous probability distributions meet with its density function, distribution function, characteristic function, moment generating function, some distributions that are related, parameter estimation and graphics of density and distribution function: where the R program was used. The second part present the various fields of application about distributions mentioned above as: Medicine, hidrology, economy, finance, seismic risk, lifetime among others. Where the main interest is the statistical analysis of the samples taken in each of the studies and excels Normal Distribution as one of the tool most used in real phenomena.

³Project degree

⁴Faculty of Sciences. School of Mathematics. Especialization in Statistic. Director Doctor in Statistic GERMÁN MORENO ARENAS

Introducción

El presente trabajo busca presentar una revisión bibliográfica sobre algunas distribuciones continuas de probabilidad, específicamente sobre las distribuciones Normal, Weibull, Gumbel, LogNormal, F, Beta, Gamma y Exponencial, dado que estas distribuciones han tomado fuerza en ciertas áreas del conocimiento porque permite a los investigadores y profesionales modelar los datos con una mayor versatilidad en asimetría y curtosis, facilitado por el avance del software estadístico y los sistemas actuales de computación más avanzados.

Esta revisión bibliográfica se divide en dos partes, una teórica y otra de aplicaciones. La primera consta de un resumen teórico de cada una de las distribuciones continuas mencionadas, incluyendo su definición, la función de densidad de probabilidad, función de distribución acumulada y sus respectivas gráficas, propiedades especiales, principales momentos, función generadora de momentos y relaciones con otras distribuciones. La segunda parte consta de ejemplos obtenidos de algunos trabajos de grado, memorias de congresos académicos y artículos publicados, donde se han usado y aplicado estas distribuciones de probabilidad.

Resaltamos que esta revisión bibliográfica es una profundización sobre este tema específico, reconociendo quiénes son sus autores y no considerándolo como una producción propia de las autoras, buscando ahondar en la comprensión y organización en un documento que sea de más fácil acceso a los lectores y, a los posibles usuarios de estas distribuciones continuas de probabilidad.

Capítulo 1

OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

1.1. Objetivo General

Organizar los conocimientos ya publicados sobre algunas distribuciones continuas de probabilidad, incluyendo su definición, función de densidad de probabilidad y sus respectivas gráficas, función de distribución acumulada, propiedades especiales, principales momentos, función generadora de momentos, relaciones con otras distribuciones y posibles aplicaciones.

1.2. Objetivos Específicos

- Recopilar la información relevante de los trabajos donde se han aplicado las distribuciones continuas de probabilidad: Normal, Weibull, Gumbel, Fisher, Beta, Gamma, Log-normal y Exponencial.
- Revisar e identificar los elementos de cada distribución: definición, la función de densidad de probabilidad y sus respectivas gráficas, función de distribución acumulada, propiedades especiales, función generadora de momentos, relaciones con otras distribuciones y posibles aplicaciones.
- Examinar algunos ejemplos procedentes de diferentes trabajos de grado, memorias de congresos académicos y artículos publicados sobre las distribuciones continuas de probabilidad: Normal, Weibull, Gumbel, Fisher, Beta, Gamma, Lognormal y Exponencial.

1.3. Metodología

La metodología que usamos en este trabajo se basó en una revisión bibliográfica y documental de diferentes trabajos de grado, memorias de congresos académicos y artículos que se han publicado sobre las distribuciones continuas de probabilidad de interés, consultamos diferentes bases de datos y recursos electrónicos, donde se encuentran archivados artículos, libros y tesis, para conocer lo que se ha estudiado sobre estas distribuciones continuas de probabilidad.

Se seleccionaron varios ejemplos que permitieron profundizar en la importancia y la aplicación de las distribuciones de probabilidad en diferentes campos del conocimiento, se estudiaron algunos artículos y libros publicados sobre estas distribuciones de probabilidad y se hizo un estudio selectivo y crítico de la misma.

El propósito fue proporcionar al lector un documento que sea de más fácil acceso en esta área de constante evolución y que sea también de utilidad en la enseñanza de estas distribuciones continuas de probabilidad en un curso básico de estadística y probabilidad.

La intención real es construir un documento que sea llamativo a profesionales o investigadores de campos afines, y que este trabajo sea considerado una buena revisión y su lectura sea una buena forma de estar al día en esta área de interés.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

Los elementos que están incluidos en este apéndice corresponden a definiciones y propiedades básicas que fueron tomadas del libro de Mendenhall, Scheaffer y Wackerly (2008), entre otras fuentes usadas.

Variables aleatorias discretas: Se dice que una variable aleatoria Y es *discreta* si puede tomar sólo un número finito o contablemente infinito¹ de valores distintos.

Para cualquier distribución de probabilidad discreta, se debe cumplir:

1. $0 \leq p(y) \leq 1$ para toda y .
2. $\sum_y p(y) = 1$, donde la sumatoria es para todos los valores de y con probabilidad diferente de cero.

El valor esperado de una variable aleatoria: Sea Y una variable aleatoria discreta con la función de probabilidad $p(y)$. Entonces el *valor esperado* de Y , $E(Y)$, se define como²

$$E(Y) = \sum_y yp(y).$$

Si Y es una variable aleatoria con media $E(Y) = \mu$, la varianza de una variable aleatoria Y se define como el valor esperado de $(Y - \mu)^2$. Esto es,

$$V(Y) = E[(Y - \mu)^2].$$

¹Un conjunto de elementos es contable infinito si los elementos del conjunto se pueden poner en correspondencia biunívoca con los enteros positivos.

²El valor esperado de una variable aleatoria discreta existe si la suma, es absolutamente convergente, es decir si,

$$\sum_y |y|p(y) < \infty.$$

La *desviación estándar* de Y es la raíz cuadrada positiva de $V(Y)$.

Momentos y funciones generadoras de momentos: El k -ésimo momento de una variable aleatoria Y tomada alrededor del origen se define como $E(Y^k)$ y se denota con μ'_k . La función generadora de momentos $m(t)$ para una variable aleatoria Y se define como $m(t) = E(e^{tY})$. Una función generadora de momentos para Y existe si existe una constante positiva b tal que $m(t)$ es finita para $|t| \leq b$.

Si $m(t)$ existe, entonces para cualquier entero positivo k ,

$$\left. \frac{d^k m(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = m^{(k)}(0) = \mu'_k.$$

Si se encuentra la k -ésima derivada de $m(t)$ con respecto a t y luego $t = 0$, el resultado será μ'_k .

Variables aleatorias continuas: Se dice que una variable aleatoria Y es *continua* si su recorrido no es un conjunto numerable. Denótese con Y cualquier variable aleatoria. La *función de distribución de Y* , denotada por $F(Y)$, es tal que

$$F(y) = P(Y \leq y) \text{ para } -\infty < y < \infty.$$

Propiedades de una función de distribución: Si $F(y)$ es una función de distribución entonces:

1. $F(-\infty) \equiv \lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = 0$
2. $F(\infty) \equiv \lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 1$
3. $F(y)$ es una función no decreciente de y . Si y_1 y y_2 son tales que $y_1 \leq y_2$, entonces $F(y_1) \leq F(y_2)$.

Sea $F(Y)$ la función de distribución para una variable aleatoria continua Y . Entonces $f(y)$, está dada por:

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = F'(y),$$

siempre que exista la derivada, se denomina *función de densidad de probabilidad* para la variable aleatoria Y .

Propiedades de una función de densidad: Si $f(y)$ es una función de densidad para una variable aleatoria continua, entonces

1. $f(y) \geq 0$ para toda y con $-\infty < y < \infty$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 1$.

Valores esperados para una variable aleatoria continua: El valor esperado de una variable aleatoria continua Y es

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy,$$

siempre que exista la integral³. Y la varianza es:

$$Var(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} [y - E(Y)]^2 f(y)dy.$$

Método de máxima verosimilitud: Este método de estimación proporciona estimadores insesgados de varianza mínima. Suponga que la función de verosimilitud depende de k parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$. Escoja como estimaciones los valores de los parámetros que maximicen la verosimilitud $L(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$.

Función de supervivencia: La función de supervivencia, también es conocida en ingeniería como función de fiabilidad, esta función mide la probabilidad de que una unidad de interés “sobreviva” más allá de un tiempo dado. Sea Y una variable aleatoria definida en el intervalo $[0, \infty)$. Sea $F(y)$ su función de distribución. Entonces se define la función de supervivencia como:

$$S(t) = P(Y > t) = \int_t^{\infty} f(u)du = 1 - F(t).$$

La función de supervivencia es monótona decreciente, es decir, $S(y_1) \leq S(y_2)$ si $y_1 > y_2$. Además, $S(t) \leq 1$.

Función característica: Dada una variable aleatoria continua Y su función característica, denotada por $\varphi_Y(t)$ para t real, se define como:

$$\varphi_Y(t) = E[e^{itY}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} f(y)dy.$$

Se hace uso de la función exponencial compleja y E denota la esperanza matemática.

³Técnicamente, $E(Y)$ existe si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y| f(y)dy < \infty.$$

Capítulo 3

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

3.1. DISTRIBUCIÓN NORMAL

La distribución normal descubierta por Abraham de Moivre (1733); también llamada distribución Gaussiana por Gauss (1809), es una de las distribuciones de probabilidad más importantes y que más se utiliza. Tiene una gran aplicación en ingeniería, física, ciencias sociales, economía, medicina y ciencias de la salud donde son más usuales los valores centrales y poco común los valores distanciados del centro. Es muy importante resaltar que son muchos los fenómenos naturales que esta distribución permite explicar.

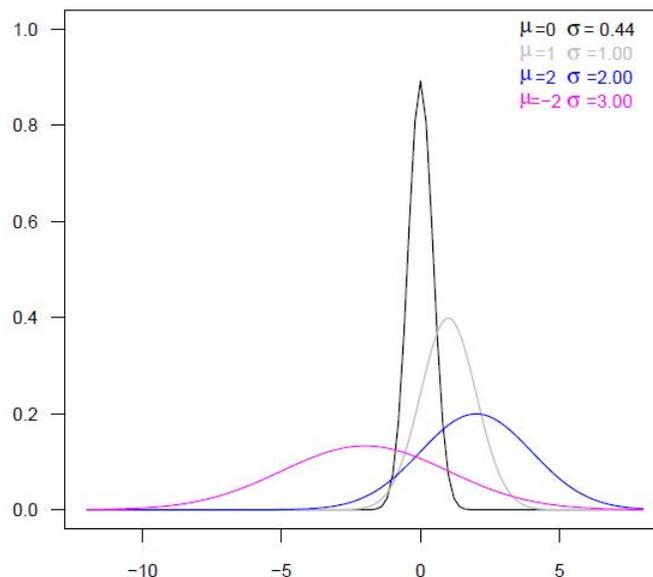
3.1.1. Función de densidad de probabilidad Normal

Se dice que una variable X tiene una *distribución normal de probabilidad* si y solo si, para $\sigma > 0$ y $-\infty < \mu < \infty$, la función de densidad de X es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < \mu < \infty.$$

Donde μ y σ son los parámetros de la distribución normal. Estos parámetros son la media y la desviación estándar.

Figura 3.1 – Función de densidad de probabilidad Normal



3.1.2. Propiedades de la función de densidad de probabilidad Normal

La función de densidad de una variable aleatoria x donde la distribución es normal $N(x; \mu, \sigma)$, cumple las siguientes propiedades:

1. El dominio de f es todo el campo real y su imagen está contenida en el conjunto de los números reales positivos.
2. Es simétrica respecto a la recta $x = \mu$.
3. Tiene una asíntota horizontal, $y = 0$.
4. Alcanza un máximo absoluto en el punto $(\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$.
5. Es creciente en el intervalo $(-\infty, \mu)$ y decreciente en (μ, ∞) .
6. Posee dos puntos de inflexión en $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$.¹
7. Probabilidad en un entorno básico de la media:
 - En el intervalo $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ se encuentra comprendida, aproximadamente, el 68,26 % de la distribución.
 - En el intervalo $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ se encuentra, aproximadamente, el 95,44 % de la distribución.

¹VARGAS, Antonio. Estadística descriptiva e inferencial: Distribución normal. 2ed. España, 1995. p. 273-275.

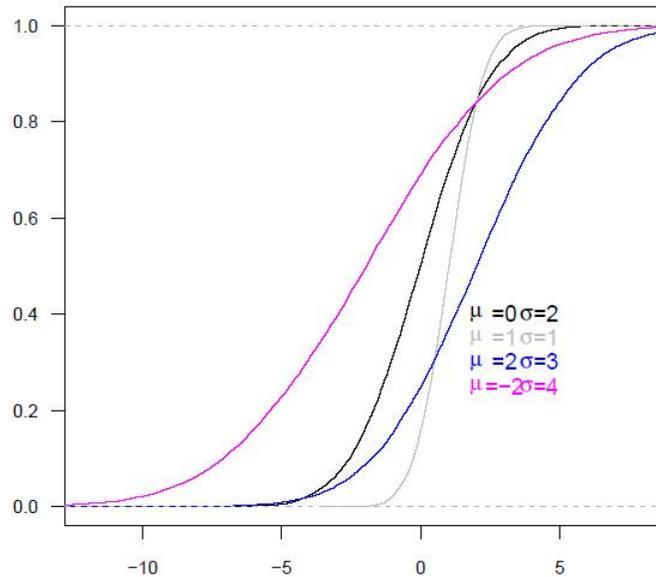
- En el intervalo $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ se encuentra aproximadamente el 99,74% de la distribución.

3.1.3. Función de distribución Normal

La función de distribución de probabilidad de la distribución normal está definida como:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Figura 3.2 – Función de distribución normal



No existe una expresión de forma cerrada para esta integral; en consecuencia, su evaluación requiere el uso de técnicas de integración numérica. Las probabilidades y cuantiles para variables aleatorias con distribuciones normales se encuentran fácilmente usando *R* o *S-Plus*; también se pueden hallar usando la aplicación breve (applet) *Normal Tail Areas and Quantiles* accesibles en www.thomsonedu.com/statistics/wackerly.

3.1.4. Teorema del Límite Central para muestras aleatorias

Considere la población dada por la variable aleatoria X que con media poblacional μ y varianza poblacional σ^2 . Dada una muestra aleatoria de esta población $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ para n suficientemente grande (" $n \rightarrow \infty$ ") se tiene que:

1. la media muestral \bar{X} sigue una distribución normal:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

2. La suma muestral $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ sigue una distribución normal:

$$S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2).$$

Para muestras de tamaño mayor igual a 30, la distribución normal es una breve aproximación a la distribución de \bar{X} y S_n .

$$\bar{X} \sim_{aprox} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), S_n \sim_{aprox} N(n\mu, n\sigma^2).$$

3.1.5. Función característica y función generadora de momentos de la distribución Normal

La función generadora de momentos es:

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{tx} dx = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Se puede verificar esta expresión completando el cuadrado en el exponente.

Teniendo presente que una variable normal general puede verse como una transformación lineal de una variable normal reducida.

La función característica es:

$$\varphi_X(it) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{itx} dx = e^{\mu it - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Sea $X \sim N(0, 1)$. La función característica de X es:

$$\phi^*(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

3.1.6. Distribuciones relacionadas con la distribución Normal

A continuación se nombran algunas distribuciones relacionadas con la distribución Normal.

1. Distribución chi-cuadrado (χ^2), que tiene n grados de libertad de la variable aleatoria. Se aproxima a una normal cuando k es suficientemente grande, esto se da por el teorema central

del límite.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\chi_k^2(x)}{k} = N_{(k, \sqrt{2k})}(x)$$

2. La Distribución F de Fisher-Snedecor, cuando los valores m y n tienden a infinito la distribución se asimila a una normal.
3. La Distribución t-student cuando los grados de libertad tienden a infinito se ajusta a una distribución normal estándar.

3.1.7. Estimación de parámetros en poblaciones normales

Sea una variable aleatoria $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ caracterizada por dos parámetros: La media μ y la varianza σ^2 .

Se destaca que para la estimación de μ como de σ^2 se debe tener en cuenta el efecto del tamaño muestral y además al estimar la media también se debe mirar si la varianza poblacional es conocida o desconocida.²

Estimación de la media μ

Supongamos que disponemos de X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria simple de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. La media poblacional μ se puede estimar con la media muestral:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

cuya distribución en el muestreo también es normal:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Estimación de la varianza σ^2

En la estimación de la media se hace necesario utilizar un estimador de la varianza σ^2 , en caso que esta no sea conocida. Para esto podemos utilizar la varianza muestral s^2 o la cuasivarianza muestral S^2 . Se muestran a continuación

²FARALDO, Pedro, y PATEIRO, Beatriz. Estadística y metodología de la investigación: Estimación de parámetros. España, 2012. p. 1-5

Varianza muestral:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Cuasivarianza:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Se puede observar la relación entre ellos, ya que:

$$s^2 = \frac{n-1}{n} S^2$$

o bien,

$$S^2 = \frac{n}{n-1} s^2$$

Estos estimadores solo se distinguen en su denominador, y para n grande, no hay diferencias notorias entre ellos. Como la varianza muestral proporciona valores (aleatorios) positivos, su distribución tendrá como soporte $[0, \infty)$. Esta distribución será la distribución Chi-cuadrado χ^2 .

Si X_1, \dots, X_n es una muestra aleatoria simple de variables normales con varianza σ^2 entonces:

$$\frac{ns^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2,$$

o bien

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2,$$

donde χ_{n-1}^2 es una distribución chi-cuadrado con $(n-1)$ grados de libertad.

Esta distribución es necesaria cuando el tamaño de la muestra es pequeño. Para n suficientemente grande podemos aproximar una distribución χ_n^2 por $N(n, 2n)$.

3.1.8. Aplicaciones de la Distribución Normal

A continuación se mostrarán algunas aplicación donde se ha utilizado la distribución Normal.

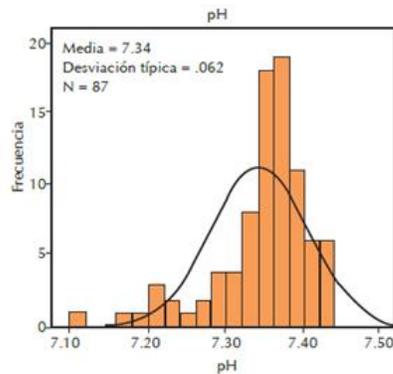
Ginecología

En Ginecología se realizan varios estudios donde se usa la distribución normal; se mostrará una aplicación donde se estudian los valores normales de gases en la vena del cordón umbilical durante el pos-parto y pos-cesárea inmediato en fetos de término normales; donde se aplica la distribución normal.³

Se estudiaron 100 pacientes que cumplieron con los criterios de inclusión pero se excluye una porque al neonato se le identificaron características fenotípicas de síndrome de Down (trisoma 21), tres se catalogaron como partos distócicos por la aplicación de fórceps. En 5 pacientes se identificaron características clínicas de desprendimiento prematuro de placenta normal inserta y en 4 de las 100 pacientes se necesita la administración de anestesia general balanceada por lo que también se excluyeron del estudio. Al final, el estudio se efectuó en 87 pacientes. La edad gestacional fue de 37.3 a 41.3 semanas, con una media de 37.8 semanas. El puntaje de la escala de Apgar al minuto fue de 7 a 9, con una media de 8.92. El puntaje de la escala de Apgar a los 5 minutos varía entre 9 y 10 con una media e 9.02. Los límites de peso al nacimiento fueron 2,525 g y 3,486. Los límites de la edad materna fueron 21 y 44 años con una media de 32.82 años.

En el grupo de estudio la distribución normal del pH tiene un promedio de 7.34 con desviación estándar de 0.62.(figura 3.3).

Figura 3.3 – PH

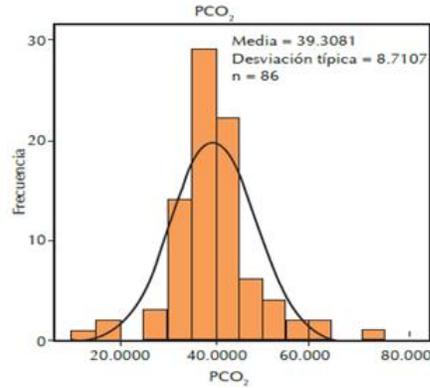


Fuente: BERNADEZ, Francisco, y MORENO, César. Valores normales de gases en la vena del cordón umbilical durante el postparto y postcesárea inmediato en fetos de término normales. En: Ginecol Obstet Mex. vol.,82.(2014); p. 170-176.

La distribución normal de la PCO_2 tiene un promedio de 39.3081, con desviación estándar de 8.7107.(figura 3.4)

³BERNADEZ, Francisco, y MORENO, César. Valores normales de gases en la vena del cordón umbilical durante el postparto y postcesárea inmediato en fetos de término normales. En: Ginecol Obstet Mex. vol.,82.(2014); p. 170-176

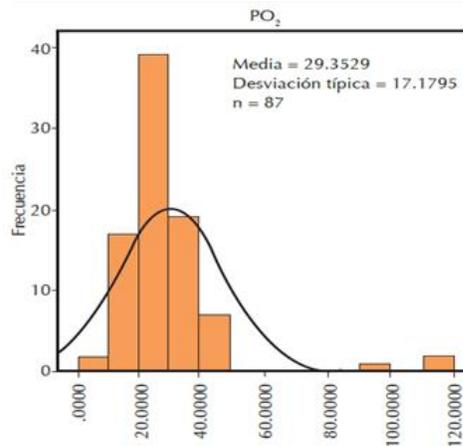
Figura 3.4 – Curva de distribución normal de la PCO_2



Fuente: BERNADEZ, Francisco, y MORENO, César. Valores normales de gases en la vena del cordón umbilical durante el parto y postcesárea inmediato en fetos de término normales. En: Ginecol Obstet Mex. vol.,82.(2014); p. 170-176.

La distribución normal del HCO_3 tiene un promedio de 20.66, con desviación estándar de 2.948.

Figura 3.5 – Curva de distribución normal del PO_2

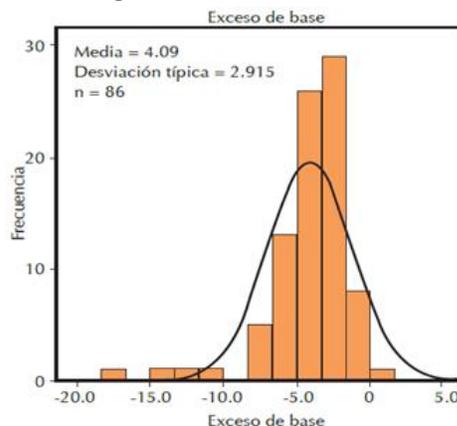


Fuente: BERNADEZ, Francisco, y MORENO, César. Valores normales de gases en la vena del cordón umbilical durante el parto y postcesárea inmediato en fetos de término normales. En: Ginecol Obstet Mex. vol.,82.(2014); p. 170-176.

La curva de distribución normal de la PO_2 tiene un promedio de 29.3529, con desviación estándar de 17.1795 (Figura 3.5).

La curva de distribución normal del exceso de base tiene un promedio de 4.09, con desviación estándar de 2.915.

Figura 3.6 – Exceso de base



Fuente: BERNADEZ, Francisco, y MORENO, César. Valores normales de gases en la vena del cordón umbilical durante el postparto y postcesárea inmediato en fetos de término normales. En: *Ginecol Obstet Mex.* vol.,82.(2014); p. 170-176.

La curva de distribución normal de la hemoglobina fetal tiene un promedio de 15.18, con desviación estándar de 2.074.

En conclusión la gasometría del cordón es un método sencillo, práctico y, sobre todo, objetivo para la valoración del estado fetal intraparto. Los valores encontrados en nuestro análisis no demuestran diferencias estadísticamente significativas con los valores de otros estudios a altitudes menores que la de la Ciudad de México. En nuestro medio la sangre venosa de cordón umbilical se utiliza para determinar grados de asfixia con el método realizado en este trabajo, no es invasivo, toma en cuenta 2 desviaciones estándar.

Tamizaje de Aneuploidías (síndrome Down)

Hace varios años se publicó por primera vez la relación existente entre el incremento de la translucencia nucal (TN) y la presencia de aneuploidías fetales; se observó que era más apropiado usar una curva de valores de referencia respecto de la longitud cráneo-caudal (LCC) del feto; el objetivo es identificar un grupo de riesgo donde sea más probable hacer el diagnóstico de aneuploidías por medio del estudio citogénético de material fetal.⁴

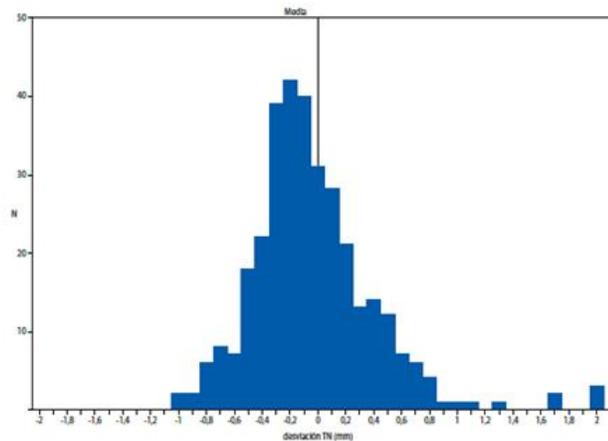
También se evaluaron marcadores ecográficos secundarios: Hueso Nasal (HN), Doppler del ductos venoso (DV), Reflujo en la válvula Tricúspide (RT) y medida del ángulo facial (AF), y la evaluación

⁴ALBINAGURTA, Roberto, y CAMPODÓNICO, David. Experiencia en la aplicación del algoritmo de la fundación de medicina fetal en el tamizaje de Aneuploidías entre las 11-13 semanas. En: *Revista peruana Ginecol obstet.* vol.,59. (27 nov, 2012); p.187-193.

de la placenta, líquido amniótico y cordón umbilical.

En la aplicación del algoritmo de la fundación de medicina fetal (F.M.F) en el tamizaje prenatal de aneuploidías en el primer trimestre de pacientes no seleccionados, donde se evaluó 324 pacientes que cumplieran con los criterios de inclusión; LCC, TN, al mismo tiempo que los marcadores ecográficos secundarios HN, DV, RT y AF, en 100, 99,6, 100 y 94,4 % de los casos respectivamente. Se concluyó que la distribución de las medidas de TN (Translucencia Nucal) y LCC (Longitud Craneo Caudal) presentarán una distribución normal. (figura 3.7).

Figura 3.7 – Distribución normal de las mediciones de la TN observadas en 324 pacientes



Fuente: ALBINAGURTA, Roberto, y CAMPODÓNICO, David. Experiencia en la aplicación del algoritmo de la fundación de medicina fetal en el tamizaje de Aneuploidías entre las 11-13 semanas. En: Revista peruana Ginecol obstet. vol.,59. (27 nov, 2012); p.187-193.

3.2. DISTRIBUCIÓN WEIBULL

La distribución Weibull descubierta por Wallodi Weibull (1951); es un modelo de probabilidad ampliamente utilizado en situaciones donde los datos están relacionados con tiempos de vida (tiempo de falla o duración de vida) y análisis de supervivencia ver por ejemplo, Lawless en su libro.⁵

En algunos estudios en los que se desea observar la confiabilidad de ciertos artículos esta distribución es útil para modelar el comportamiento de las observaciones encontradas.⁶ Ha sido estudiada

⁵LAWLESS, Jerald. Statistical Models and Methods for Lifetime Data. En: John Wiley and Sons. New York:(1982).

⁶VARGAS N, José, y MONTAÑO, Tysua. Carta de control $CEV\bar{X}$ para distribuciones Weibull con datos censurados. En: Revista colombiana de estadística. vol.,28.(Dic. 2005); p.125-139.

extensivamente por diversos autores.⁷⁸ En su forma simple, el modelo Weibull consta de dos parámetros, uno de escala y otro de forma, y puede considerarse uno adicional, de localización, pero en este caso ocurre a menudo que la función de verosimilitud falla en proporcionar los estimadores de máxima verosimilitud cuando las observaciones son pequeñas y el parámetro de forma es menor que la unidad. Es una de las pocas distribuciones que puede ser usada para modelar datos que presentan asimetría negativa.

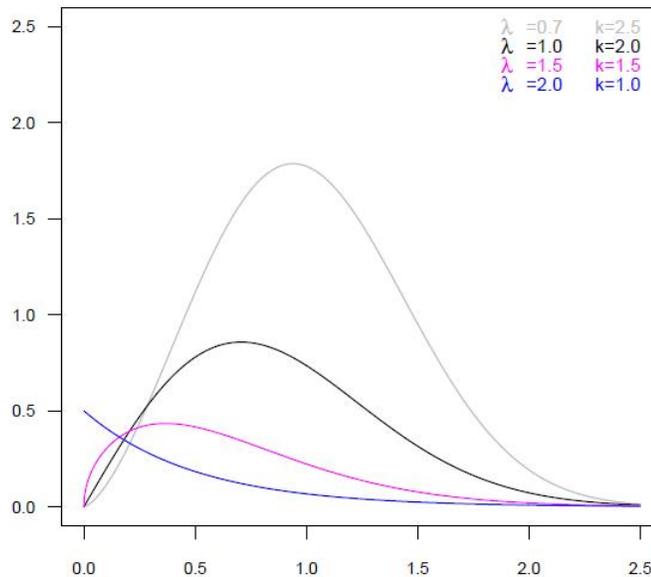
3.2.1. Función de densidad de probabilidad Weibull

La función de densidad de probabilidad Weibull está dada por:

$$f(x; \lambda, k) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}.$$

Se puede observar que se necesita de dos parámetros $\lambda > 0$ y $k > 0$, donde λ es un parámetro de escala y k es un parámetro de forma.

Figura 3.8 – Función de densidad de probabilidad Weibull



⁷SMITH, Richard, y WEISSMAN, Ishay. Maximum likelihood estimation of the lower tail of a probability distribution. En: Royal Statistical Society. vol.,47.(1985); p.285-298.

⁸BAIN, Lee, y ANTLE, Charles. Inferences on the parameters of the weibull distribution. En: Technometrics. vol.;11.(agto 1969); p.445-460.

3.2.2. Función de distribución Weibull

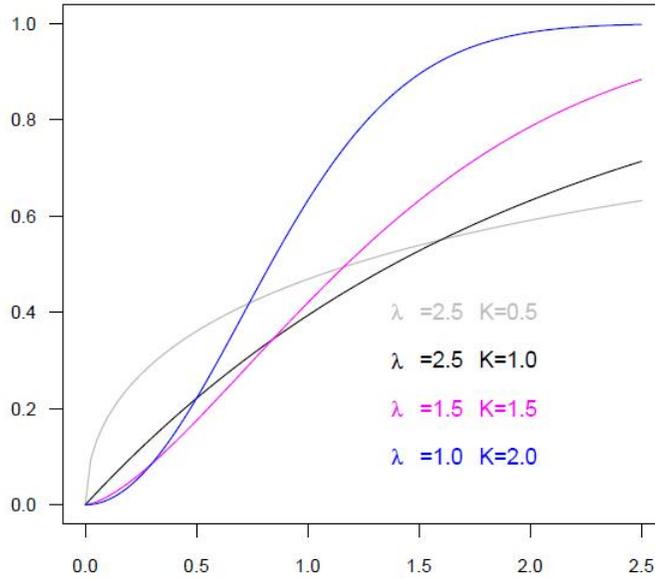
La función de distribución de probabilidad Weibull se obtiene por la integración de la función de densidad:

$$F(X) = Pr(X \leq x) = 1 - e^{-(x/\lambda)^k}, \quad x \geq 0.$$

La distribución de Weibull se suele utilizar como modelo paramétrico en problemas de análisis de supervivencia. En este ámbito, es de interés la probabilidad de que se presente la falla o muerte después de transcurrido un tiempo x ; de ahí que se defina la función de supervivencia.

$$S(X) = Pr(X > x) = 1 - F(x) = e^{-(x/\lambda)^k}, \quad x \geq 0.$$

Figura 3.9 – Función de distribución Weibull



Cuando se aplica la distribución Weibull se obtiene la distribución de fallas del conjunto de donde proviene la muestra, únicamente ajustando los parámetros del modelo al conjunto de componentes ensayados. Los parámetros característicos de la distribución Weibull se pueden extraer directamente de la muestra. Esto permite conseguir un modelo estadístico que representa con mayor o menor exactitud la distribución de las fallas del conjunto o lote de donde provienen los componentes ensayados.

3.2.3. Propiedades de la distribución de Weibull

1. Si tomamos $k = 1$ tenemos una distribución Exponencial.
2. La esperanza tiene el valor de:

$$E(X) = \lambda \Gamma \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

3. La varianza tiene valor de:

$$\text{var}(X) = \lambda^2 \left[\Gamma \left(1 + \frac{2}{k} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right],$$

donde Γ es la función gamma.

4. La razón de fallo es:

$$h(x; k, \lambda) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{k-1}.$$

3.2.4. Función característica y función generadora de momentos de la distribución Weibull

La función generadora de momentos del logaritmo de la distribución Weibull es:

$$E [e^{t \log X}] = \lambda^t \Gamma \left(\frac{t}{k} + 1 \right),$$

donde Γ es la función gamma.⁹

La función característica del logaritmo de la distribución de Weibull es:

$$E [e^{it \log X}] = \lambda^{it} \Gamma \left(\frac{it}{k} + 1 \right).$$

En particular, el n -ésimo momento de X es:

$$m_n = \lambda^n \Gamma \left(1 + \frac{n}{k} \right).$$

3.2.5. Distribuciones relacionadas con la distribución Weibull

A continuación se nombran algunas distribuciones relacionadas con la distribución Weibull.

⁹PAPOULIS, Athanasios, y PILLAI, Unnikrishna. Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. 4ta edición. New York, 2002.

1. La distribución Weibull se puede ver como una generalización de la distribución exponencial cuando $k = 1$.¹⁰
2. En algunos casos especiales incluye la distribución Exponencial y la distribución Rayleigh. Utilizadas en algunos trabajos de confiabilidad mencionado por Kao ¹¹ y Berrettoni.¹²

3.2.6. Estimación de los parámetros de la distribución Weibull

Existen varios métodos para estimar los parámetros de la distribución Weibull entre ellos están los analíticos y los gráficos, de los cuales los analíticos son los que obtienen una mejor aproximación. Entre los analíticos se encuentra el método de máxima verosimilitud y el método implícito; a continuación se enunciará el método de máxima verosimilitud ya que de los dos métodos este es el que proporciona una mejor aproximación de los parámetros.

Método de Máxima verosimilitud

El estimador de máxima verosimilitud para el parámetro λ dado k es:

$$\hat{\lambda}^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k.$$

El estimador de máxima verosimilitud para k es,

$$\hat{k}^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^k \ln x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^k} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i.$$

Al tratarse de una función implícita, se debe resolver por medios numéricos.

Cuando $x_1 > x_2 > \dots > x_N$ son las N mayores muestras observadas de un conjunto de datos de más de N muestras, entonces el estimador de máxima verosimilitud para el parámetro λ dado k es:

$$\hat{\lambda}^k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^k - x_N^k).$$

Además dado esa condición, el estimador de máxima verosimilitud para k es:

$$\hat{k}^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i^k \ln x_i - x_N^k \ln x_N)}{\sum_{i=1}^N (x_i^k - x_N^k)} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln x_i.$$

¹⁰A, Juan, y SERRAT, C. Ingeniería en organización industrial: Distribuciones habituales en fiabilidad. Catalunya, 2006. p. 6-17.

¹¹KAO, John.H.K. Computer methods for estimating Weibull parameters in reliability studies. En: Reliability and quality control. vol.,13.(1958); p. 15-22

¹²BERRETTONI, J. Practical applications of the Weibull distribution. En: Industrial quality control. vol.,21.(1964); p. 71-79.

3.2.7. Aplicaciones de la Distribución Weibull

A continuación se mostrarán trabajos donde se trabajó o se aplicó la distribución Weibull.

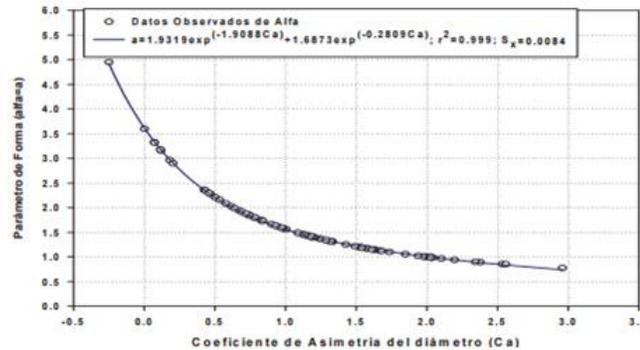
Bosques nativos del norte de México

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar un método sencillo, flexible en la estimación de parámetros de la función de densidad Weibull, para predecir las estructuras diamétricas de bosques nativos del norte de México.¹³

Se extendieron ecuaciones empíricas para pronosticar los parámetros de forma, α , escala, β y localización, ε , de la distribución. Estos parámetros se ajustaron a funciones de regresión para predecir parámetros de otras cuatro fuentes independientes de datos de diámetros de bosques templados de Guanajuato y Durango y tropicales de San Luis Potosí. Resaltando que la función de Weibull ha sido muy conocida por su flexibilidad y forma cerrada, lo que hace que se ajuste a un sin número de variables aleatorias.¹⁴

El modelo desarrollado para estimar el parámetro α se presenta en la figura 3.10. Es notorio que el modelo de caída doble exponencial predice adecuadamente la relación coeficiente de asimetría y parámetro de forma de la función de densidad Weibull.

Figura 3.10 – El parámetro de forma de la función de densidad de Weibull en función del coeficiente de asimetría de la variable diámetro



Fuente: NÁVAR, José. Estimaciones empíricas de parámetros de la distribución Weibull en bosques nativos del norte de México. En: Revista forestal latinoamericana. vol.,24.(2009); p. 51-68.

Este trabajo logró probar un método simple de estimación de parámetros de la distribución Weibull de tres parámetros. El modelo es empírico por naturaleza, porque estima a través de ecuaciones de

¹³NÁVAR, José. Estimaciones empíricas de parámetros de la distribución Weibull en bosques nativos del norte de México. En: Revista forestal latinoamericana. vol.,24.(2009); p. 51-68.

¹⁴VANCLAY, K.V. Modeling forest growth and yield: Applications to mixed tropical forests. Wallingford, p. 312.

regresión, los parámetros de forma α , escala β , y localización, ε , de la distribución.

Deserción en las Universidades Colombianas

En la valoración de estrategias propuestas en procesos sociales, como los problemas de deserción universitaria: La propuesta es aplicar los Índices de Capacidad del Proceso (ICP) para el proceso de control de la deserción. Se sabe que los indicadores de capacidad fueron diseñados para ser utilizados en la industria de manufactura, pero no hay alguna oposición de emplearlos para evaluar procesos sociales cuando los estudiantes desertores se asemejan a los productos defectuosos. Es posible, hacer una analogía entre la industria en donde se pretende controlar el número de productos defectuosos generados, y las universidades donde se trata de controlar el número de desertores por período académico.¹⁵

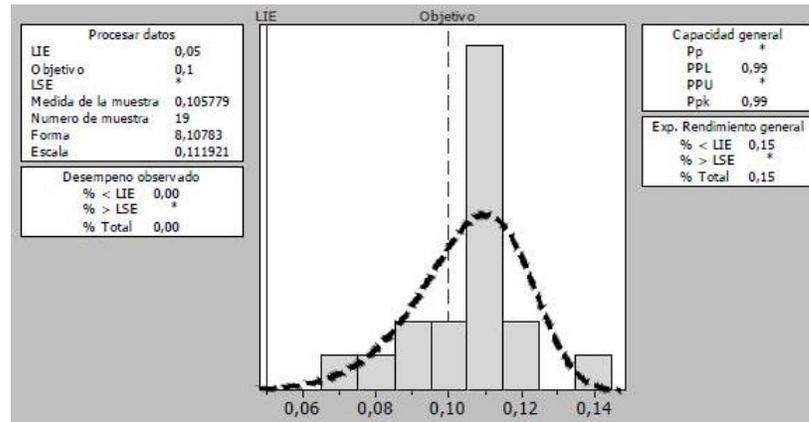
Si los datos no siguen una distribución normal, se usan datos transformados como Box y Cox, o, Johnson. Cuando ninguno de los anteriores procedimientos resulta exitoso, se busca una distribución que se ajuste a los datos. Para tal fin, se utiliza las distribuciones de Weibull, Gamma, exponencial, logística, log-normal, distribución de Pareto Generalizada u otras. Donde se concluye que para el caso de la deserción en las universidades colombianas, los datos obtenidos no tienen problema de normalidad. En este caso, los ICP encuentran un lugar importante en su aplicación, afirmando que el proceso está en capacidad de cumplir con la meta propuesta por el Gobierno nacional, de tener la deserción nacional en el 40 %.

Se puede concluir por lo tanto, que los ICP también pueden ser usados para el control de procesos de deserción (que son procesos sociales), con excelentes resultados para los casos de datos normalmente distribuidos, y para datos no normales. Con estos ejemplos concretos, se demuestra que es posible utilizar esta herramienta estadística de control de procesos industriales, para estudiar la capacidad de procesos que pueden denominarse procesos sociales. En particular, la utilización de los ICP permite hacer el seguimiento a los procesos de deserción y fijar metas alcanzables de deserción de corto o largo plazo.

Con este ejemplo de aplicación al caso de la deserción en las universidades colombianas, se ofrece un método detallado de cómo solucionar el problema de la no normalidad de los datos con el uso de la transformación de Box-Cox y la distribución de Weibull. Ver figura 3.11

¹⁵MOSQUERA, JD., MOSQUERA, JC y ARTAMÓNA, I. Indicadores de capacidad aplicados a la deserción en las universidades colombianas. En: Ciencia e Ingeniería Neogranadina. vol.,21-2. (2011); p. 183-203.

Figura 3.11 – Capacidad del proceso de deserción basados en el modelo de distribución de Weibull



Fuente: MOSQUERA, JD., MOSQUERA, JC y ARTAMÓNA, I. Indicadores de capacidad aplicados a la deserción en las universidades colombianas. En: Ciencia e Ingeniería Neogranadina. vol.,21-2. (2011); p. 183-203.

3.3. DISTRIBUCIÓN GUMBEL

Es una de las distribuciones más utilizada en la actualidad para el análisis de estudios de hidrología; llamada así en honor a Emil Julius Gumbel(1891-1966). Es una distribución asintótica también llamada distribución de valores extremos ya que se utiliza para representar el comportamiento de crecientes y sequías (máximos y mínimos); esta teoría del valor extremo la desarrolló junto con Leonard Tippett y Ronald Fischer.¹⁶ Según Reiss y Thomas,¹⁷ la distribución de Gumbel tiene la misma importancia que la distribución normal en otras aplicaciones.

3.3.1. Función de densidad de probabilidad Gumbel

La función de densidad de probabilidad de la distribución Gumbel viene dada por:

$$f(x) = e^{-(x-\mu)/\beta} - e^{-(x-\mu)/\beta} / \beta, x \in (-\infty, \infty).$$

3.3.2. Función de distribución Gumbel

La función de distribución Gumbel es:

$$F(x) = e^{-e^{-(x-\mu)/\beta}}.$$

¹⁶FISCHER, Ronald, y TIPPETT, Leonard. Limiting form of the frequency distribution of the largest of smallest members of a sample. En: Proceeding of the cambridge philosophical society. vol.,24.(1928); p.180-190.

¹⁷REISS, R-D , THOMAS, M. Statistical Analysis of Extreme Values With Applications to Insurance, Finance, Hidrology and Other Fields. Third Edition. Birkhauser Verlag.(2007) ISBN: 978-3764372309

Figura 3.12 – Función de densidad de probabilidad Gumbel

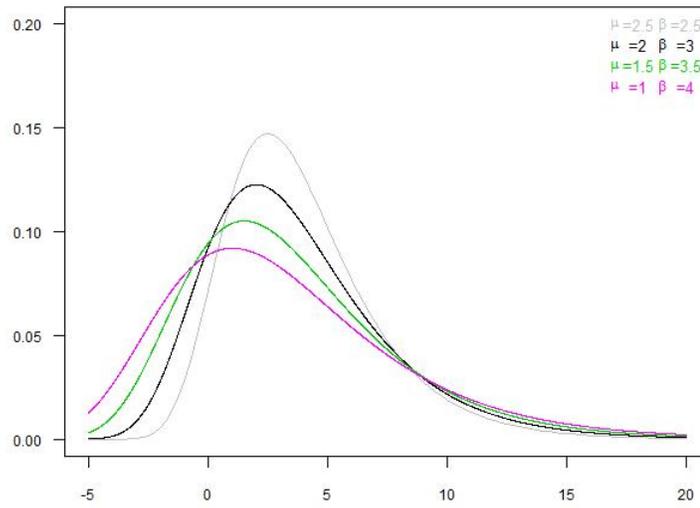
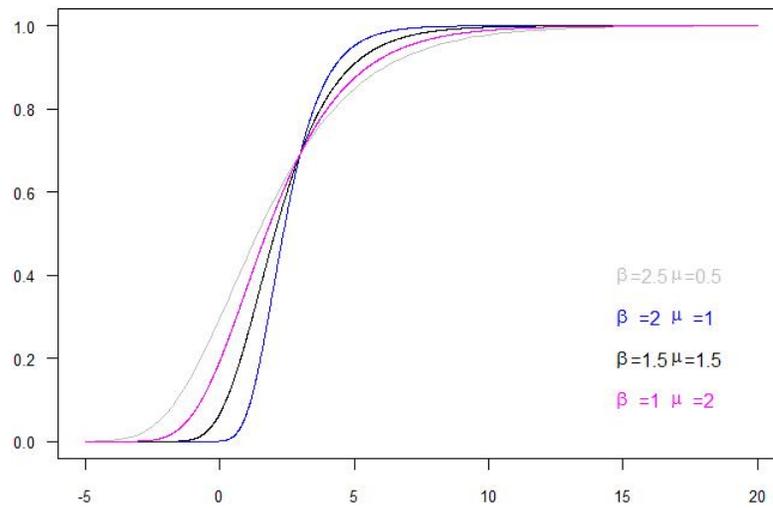


Figura 3.13 – Función de distribución Gumbel



3.3.3. Propiedades de la Distribución Gumbel

- Media: $\mu + \gamma\beta$ donde γ es la constante Euler.
- Mediana: $\mu - \beta \ln(\ln(2))$.
- La desviación estándar es: $\beta\pi/\sqrt{6}$.
- La moda es: μ .

3.3.4. Función característica y función generadora de momentos de la distribución Gumbel

La función característica de la distribución Gumbel es:

$$\Gamma(1 - i\beta t)e^{i\mu t}.$$

La función generadora de momentos de la distribución Gumbel es:

$$\Gamma(1 - \beta t)e^{\mu t}.$$

3.3.5. Función cuantil de Gumbel

Dado que la función cuantil (función de distribución acumulada inversa), $Q(p)$, de una distribución Gumbel está dada por:

$$Q(p) = \mu - \beta \ln(-\ln(p)).$$

La variable aleatoria $Q(U)$ tiene una distribución Gumbel con parámetros μ y β cuando el valor aleatorio U se extrae de la distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$.

3.3.6. Distribuciones relacionadas con la distribución Gumbel

A continuación se nombran algunas distribuciones relacionadas con la distribución Gumbel.

1. Distribución Gompertz; esta distribución es más flexible que la distribución Gumbel. La cdf de Y es el inverso de la función de distribución Gumbel, entonces Y tiene una función de densidad que es una función de Gompertz.
2. Distribución Exponencial; la distribución Gumbel converge hacia una exponencial cuando x tiende a infinito.

3.3.7. Estimación de parámetros de Gumbel

Se estiman los parámetros en base a la media aritmética y la desviación estándar de la muestra:

$$\beta = \frac{\sqrt{6}s}{\pi}$$

$$\mu = \bar{x} - 0,5772\beta$$

3.3.8. Aplicaciones de la Distribución Gumbel

A continuación se mostrarán algunas aplicaciones de la Distribución Gumbel.

Zonas áridas secas y semiáridas frías

Se muestra el siguiente estudio donde se utilizan las distribuciones de Gumbel y Log-normal y se realiza un análisis espacial y temporal de las precipitaciones de treinta y seis estaciones pluviométricas ubicadas en la zona árida de Chile y en la región de Magallanes.¹⁸

Para los datos de precipitación y de los índices; se definen los siguientes periodos 1960-1982; 1983-2006; y los periodos 1981-1993 y 1994-2006. Los datos que se recolectaron fueron datos de precipitaciones correspondientes a estaciones pluviométricas pertenecientes a la Región de Atacama y a la Región de Magallanes. De la Región de Atacama fueron elegidas 17 estaciones pluviométricas de un total de 27; en cuanto a la Región de Magallanes, se seleccionaron 20 estaciones, de un total de 47 estaciones.

La región de Atacama cuenta con 27 estaciones pluviométricas; se consideró 20 años como la cantidad mínima de registro de precipitaciones para que una estación fuera seleccionada, lo que llevó a contar con 16 estaciones en la Región de Atacama. A continuación, se presentan las estaciones seleccionadas para esta Región (Tabla 3.1).

La Región de Magallanes cuenta con una dotación de 47 estaciones pluviométricas también se contó con un mínimo de 20 años, para la selección de las estaciones. En la Región de Magallanes se seleccionaron 20 estaciones. A continuación se presentan las estaciones seleccionadas en la Región de Magallanes (Tabla 3.2.)

Los datos de precipitación se trabajaron de manera anual; estos fueron obtenidos realizando la suma de las precipitaciones mensuales de cada año y para cada estación en ambas regiones. Posteriormente, se establecieron en algunas de las estaciones intervalos de aproximadamente +/- 20 años.

¹⁸MENDOZA, Romina. Análisis comparativo de las precipitaciones y su agresividad climática en zonas áridas secas y semiáridas frías. Chile, 2011. Memoria de grado (Ingeniero forestal). Universidad de Talca. Facultad de ciencias forestales. Talca.

Tabla 3.1 – Caracterización de las precipitaciones en la región de Atacama

Estación	Precipitación anual		
	máxima	mínima	media
LAS VEGAS	390,2	0	50,8
J. EN LA GUARDIA	164,2	0	43,4
IGLESIA COLORADA	163,1	1,2	51,7
MANFLAS	207,1	0	44,5
LAUTARO EMBLASE	205,5	0	34,2
LOS LOROS	113,7	0	33,2
ELIBOR CAMPAMENTO	201	0	28,9
PASTOS GRANDES	149,5	0	31,8
COPIAPO	149,7	0	18
EL TOTORAL	168,9	0	32,7
CANTO DE AGUA	184,2	0	35,6
CONAY	241,6	1,5	72,1
JUANTA DEL CARMEN	234,5	0	50,9
SAN FÉLIX	369,6	0	66,7
SANTA JUANA	210,1	0	46,6
VALLENAR DGA	124,1	0	31,8
Promedio	204,8	0,2	42,1

Fuente: MENDOZA, Romina. Análisis comparativo de las precipitaciones y su agresividad climática en zonas áridas secas y semiáridas frías. Chile, 2011. Memoria de grado (Ingeniero forestal). Universidad de Talca. Facultad de Ciencias Forestales. Talca. Modificada por las autoras.

Los datos fueron analizados en términos de probabilidades para lo cual se aplicó la función de densidad de probabilidad de Gumbel. Además, el análisis se realizó para distintos periodos de retorno; en este caso se utilizaron periodos de 30 y 50 años y estos cálculos fueron realizados para cada una de las estaciones, en ambas regiones.

Los cálculos para los diferentes índices utilizados en el estudio, a saber, Índice de Fournier, Índice Modificado de Fournier, Índice Modificado de Fournier Maule e Índice de Concentración de Precipitaciones; además, se calcularon los promedios móviles asociados a todos los índices ya mencionados. Posterior a esto se aplicó la función de distribución de probabilidad de Gumbel, a todos los índices ya calculados.

Los índices ya mencionados, fueron expuestos a un análisis, en el cual se utilizaron funciones de distribución de probabilidad (fdp). Para cumplir con esto, fue necesario dividir las series de datos, en series más pequeñas, para lo cual se utilizó un número de años determinado; cabe señalar que a su vez existían series que no cumplían con este requisito, por lo que se consideró una amplitud de +/- 4 años. Esto con el fin de poder comparar series de datos de una misma estación y así poder visualizar cambios o tendencias ocurridas durante el tiempo.

Como parámetro de comparación, se consideró la probabilidad de excedencia asociada a dos periodos

Tabla 3.2 – Caracterización de las precipitaciones en la región de Magallanes

Estación	precipitación anual		
	máxima	mínima	media
CERRO GUIDO	355,9	111	248
CERRO CASTILLO	466,6	21	307,3
TORRES DEL PAINE	1051,8	274,3	698,2
PUERTO NATALES	1144,9	248,2	510,9
CASAS VIEJAS	503,3	28,1	227,1
ISLA RIESO	704,5	317	432,1
RIO PÉREZ	746,9	303,9	537,9
SAN GREGORIO	355	84,8	266,9
SAN JUAN	1061	391,5	670,4
LAGO PARRILLAR	1129,2	583,1	795,9
PUNTA ARENAS	672,6	23,9	487,1
LAGUNA LYNCH	840,9	69	401,9
VILLA TEHUELCHÉ	533,2	207,5	344,4
TENIENTE MRINO	486,4	29,5	223
CERRO SOMBRERO	442,5	174,6	259,4
BAHÍA SAN FELIPE	752,1	40	340,8
PORVENIR	507,1	102,5	340,8
ONASIN M. C.	485,2	218,2	355,7
SAN SEBASTIAN	422,2	131,1	280,5
SECCIÓN RÍO GRANDE	247,4	637,4	399,4
Promedio	645,44	199,83	406,41

Fuente: MENDOZA, Romina. Análisis comparativo de las precipitaciones y su agresividad climática en zonas áridas secas y semiáridas frías. Chile, 2011. Memoria de grado (Ingeniero forestal). Universidad de Talca. Facultad de Ciencias Forestales. Talca. Modificada por las autoras.

de retorno, a saber 30 y 50 años; así, se calcularon las probabilidades tanto para los índices en estudio, como para las precipitaciones anuales.

3.3.9. Ajuste a la función de distribución de probabilidad de Gumbel y Lognormal

Los ajustes fueron considerados para dos periodos de +/- 20 años, a saber, 1960-1982 y 1983-2006; pero, al igual que con el análisis de promedios móviles ello solo pudo ser posible en la Región de Atacama, ya que Magallanes presenta registros solo en el segundo periodo. Lo anterior obligó a una subdivisión del periodo 1983-2006 en dos series, las cuales fueron 1981-1993 y 1994-2006, subdivisión que permitió el análisis en ambas regiones.

Las distribuciones utilizadas fueron Gumbel y Log Normal, donde Gumbel pudo ser aplicada en la Región de Magallanes para las precipitaciones y los índices, en tanto que en Atacama sólo pudo ser utilizada en el ICP y en la mayoría de las estaciones con datos de precipitación.

Tabla 3.3 – Precipitación media anual de las Regiones de Atacama y Magallanes

Estaciones	PP			
	1960-1982	1983-2006	1981-1993	1994-2006
LAS VEGAS	s/i	S/A	G	G
J.GUARDIA	G	G	G	G
IGLESIA C.	s/i	G	G	G
MANFLAS	G	G	G	G
LAUTARO E.	G	G	G	G
LOS LOROS	G	G	G	G
ELIBOR C.	s/i	G	G	G
PASTOS G.	G	G	G	G
COPIAPO	G	G	G	G
EL TOTORAL	s/i	G	G	G
CANTO AGUA	s/i	G	G	G
CONAY	G	G	G	G
JUANTA DEL C.	G	G	G	G
SAN FÉLIX	G	G	G	G
SANTA JUANA	G	G	G	G
VALLENAR DGA	G	G	G	G

LN:Log-normal
G:Gumbel
S/A:Sin ajuste

Fuente: MENDOZA, Romina. Análisis comparativo de las precipitaciones y su agresividad climática en zonas áridas secas y semiáridas frías. Chile, 2011. Memoria de grado (Ingeniero forestal). Uniiversidad de Talca. Facultad de Ciencias Forestales. Talca. Modificada por las autoras.

La tabla 3.3 entrega la información acerca de cuáles estaciones de la Región de Atacama con sus respectivos índices fueron ajustadas con la función de Gumbel y cuales con la función Lognormal. Con base al estudio realizado se llegó a las siguientes conclusiones.

- En el estudio la distribución que más se utilizó fue la de Gumbel.
- En los casos que la distribución de Gumbel no muestra resultados satisfactorios se utilizó la distribución Lognormal.
- La distriución Log normal cumplió satisfactoriamente en casi todos los casos donde se uso, las demandas de ajuste.
- Se puede apreciar que existen décadas en las cuales la variabilidad temporal de las precipitaciones está muy marcada; así la década de los ochenta en la tercera región presenta los montos más altos de precipitación, al contrario de lo que sucede en la decimosegunda donde esta misma década no se caracteriza por ser un lapso muy lluvioso. Ver figura 3.4, 3.5 y 3.6.

Tabla 3.4 – Precipitación media anual de las Regiones de Atacama y Magallanes

Estaciones	IF			
	1960-1982	1983-2006	1981-1993	1994-2006
LAS VEGAS	s/i	G	G	G
J. GUARDIA	LN	LN	G	G
IGLESIA C.	s/i	G	G	G
MANFLAS	G	G	G	G
LAUTARO E.	LN	G	G	G
LOS LOROS	G	G	G	G
ELIBOR C.	s/i	S/A	G	G
PASTOS G.	G	LN	G	G
COPIAPO	G	S/A	G	S/A
EL TOTORAL	s/i	S/A	S/A	S/A
CANTO AGUA	s/i	S/A	S/A	S/A
CONAY	G	G	G	G
JUANTA C.	G	LN	G	G
SAN FÉLIX	LN	G	G	G
SANTA JUANA	LN	LN	G	G
VALLENAR DGA	G	S/A	G	G

LN:Log-normal
G:Gumbel
S/A:Sin ajuste

Fuente: MENDOZA, Romina. Análisis comparativo de las precipitaciones y su agresividad climática en zonas áridas secas y semiáridas frías. Chile, 2011. Memoria de grado (Ingeniero forestal). Uniiversidad de Talca. Facultad de Ciencias Forestales. Talca. Modificada por las autoras.

Caudales Máximos

La estimación de caudales máximos es básico para el diseño de estructuras hidráulicas, estudios ambientales y control de inundaciones. Esta aplicación muestra, los resultados del modelo MG en Antioquia y el eje Cafetero comparados con los obtenidos por otros métodos de hidrología con información escasa, como: Método Racional, Método de Grandex, Hidrógrafas Unitarias Sintéticas y Regionalización de las Características Medias entre otros.

El modelo MG es un modelo paramétrico desarrollado por Majone ¹⁹ y calibrado originalmente para ríos italianos (véase Vélez, Quintero y Delgado²⁰ para mayores detalles). Este modelo permite calcular caudales máximos asociados a periodos de retorno altos, usando la media de las series históricas por medio de la ecuación

$$\frac{Q}{\mu} = 1 + (A + B \ln T_r) C v^b,$$

¹⁹MAJONE, U, y Tomirotti, M. A trans national regional frequency analysis of peak flood flows. En: Revista L'A CQUA.PP. p. 9-17

²⁰VÉLEZ, Victoria, QUINTERO, Wilson, y DELGADO, Juan. Implementación del modelo MG para Antioquia y el eje cafetero. En:Avances en recursos hidraulicos. Número 14(oct. 2006). p.87-97.

Tabla 3.5 – Precipitación media anual de las Regiones de Atacama y Magallanes

Estaciones	IMF			
	1960-1982	1983-2006	1981-1993	1194-2006
LAS VEGAS	s/i	S/A	G	G
J. EN LA GUARDIA	G	G	G	G
IGLESIA COLORADA	s/i	G	G	G
MANFLAS	G	G	G	G
LAUTARO EMBLASE	LN	LN	G	G
LOS LOROS	G	G	G	LN
ELIBOR C.	s/i	LN	G	G
PASTOS GRANDES	G	LN	G	G
COPIAPO	G	S/A	G	S
EL TOTORAL	s/i	S/A	S/A	S/A
CANTO DE AGUA	s/i	S/A	S/A	S/A
CONAY	G	G	G	G
JUANTA C.	G	G	G	G
SAN FÉLIX	LN	G	G	G
SANTA JUANA	G	LN	G	G
VALLENAR DGA	G	S/A	G	G

LN:Log-normal
G:Gumbel
S/A:Sin ajuste

Fuente: MENDOZA, Romina. Análisis comparativo de las precipitaciones y su agresividad climática en zonas áridas secas y semiáridas frías. Chile, 2011. Memoria de grado (Ingeniero forestal). Uniiversidad de Talca. Facultad de Ciencias Forestales. Talca. Modificada por las autoras.

donde A y B son los parámetros del modelo. Y se define como una variable estandarizada que se aproxima a la distribución de probabilidad de Y en su parte central a una función lineal de la forma: $Y = A + C \ln T_R$. El estudio se realiza con 110 estaciones de Antioquia, Risaralda y el Eje Cafetero, tomando los datos de drenaje de las cuencas hasta las estaciones respectivas y calculando el coeficiente de variación se obtiene:

$$\frac{Q}{\mu} = 1 + 3Cv^{1,28},$$

el periodo de retorno a partir de la variable estandarizada Y estimada, $Y = 2,4211 + 0,7164 \ln(T_R)$ y por último se obtiene la ecuación característica del modelo MG para la zona colombiana

$$\frac{Q}{\mu} = 1 + (2,421 + 0,716 \ln T_r)Cv^{1,28}.$$

Los caudales calculados por el Método MG son comparables con los obtenidos a partir de las distribuciones de Gumbel, Lognormal de dos parámetros y el método Racional. Los resultados obtenidos por los métodos de hidrógrafas unitarias sintéticas siempre están por encima de los caudales es-

Tabla 3.6 – Precipitación media anual de las Regiones de Atacama y Magallanes

Región Atacama		Región de Magallanes	
Estación	P. Media	Estación	P. media
LAS VEGAS	50,8	CERRO G.	248
J. GUARDIA	43,4	CERRO C.	307,3
IGLESIA C.	51,7	TORRES P.	698,2
MANFLAS	44,5	PUERTO N.	510,9
LAUTARO E.	34,2	CASAS VIEJAS	227,5
LOS LOROS	33,2	ISLA RIESGO	432,1
ELIBOR C.	28,9	RÍO PÉREZ	537,9
PASTOS G.	31,8	SAN GREGORIO	266,9
COPIAPO	18	SAN JUAN	670,4
EL TOTORAL	32,7	LAGO P.	795,9
CANTO AGUA	35,6	PUNTA A.	487,1
CONAY	72,1	LAGUNA LYNCH	401,9
JUANTA C.	50,9	VILLA T.	344,4
SAN FÉLIX	66,7	TENIENTE M.	223
SANTA J.	46,6	CERRO S.	259,4
VALLENAR D.	31,8	BAHÍA S.F.	340,8
		PORVENIR	340,8
		ONASIN M. C.	355,7
		S.SEBAANTIAN	280,5
		SECCIÓN R. G.	399,4
Promedio	42,1	Promedio	406,41

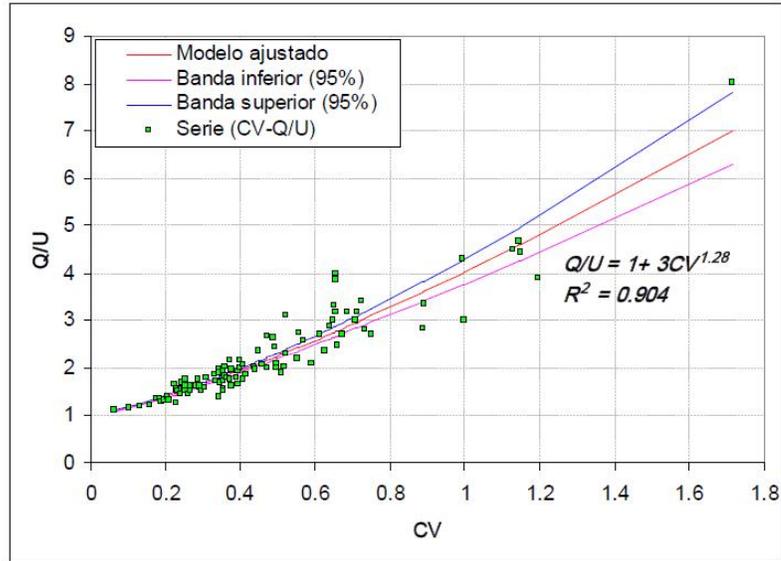
Fuente: MENDOZA, Romina. Análisis comparativo de las precipitaciones y su agresividad climática en zonas áridas secas y semiáridas frías. Chile, 2011. Memoria de grado (Ingeniero forestal). Uniiversidad de Talca. Facultad de Ciencias Forestales. Talca. Modificada por las autoras.

timados por los métodos restantes. El modelo MG calibrado para Antioquia y Risaralda muestra valores de los parámetros ajustados por encima de los obtenidos empleando el ajuste realizado en el modelo MG. En la Quebrada Doña María el método racional y el método MG presentan resultados similares, menores a los obtenidos a través de hidrógrafas unitarias sintéticas (ver figura 3.14).

3.4. DISTRIBUCIÓN F

Es una distribución de probabilidad continua con gran aplicación en la inferencia estadística, principalmente en la prueba de la igualdad de varianza de dos poblaciones normales; fundamentalmente en el análisis de varianza. Depende de dos parámetros, se le conoce como distribución F por el matemático G. Snedecor (1882-1974) quién le puso este nombre en honor a R.A. Fisher (1890-1962). Sean W y Y variables aleatorias chi-cuadrada independientes, con u y v grados de libertad, respectivamente. Se construye el siguiente cociente:

Figura 3.14 – Modelo de ajuste para el modelo MG para la región de estudio



Fuente: VÉLEZ, Victoria, QUINTERO, Wilson, y DELGADO, Juan. Implementación del modelo MG para Antioquia y el eje cafetero. En: Avances en recursos hidraulicos. Número 14(oct. 2006). p.87-97.

$$F = \frac{W/u}{Y/v}.$$

3.4.1. Función de densidad de probabilidad F

La función de densidad de probabilidad de la distribución F es:

$$h(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2}x^{(u/2)-1}}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\left[\frac{u}{v}x+1\right]}, 0 < x < \infty,$$

se afirma que sigue la distribución F con u grados de libertad en el numerador y v grados de libertad en el denominador. Suele abreviarse como $F_{u,v}$.

3.4.2. Función de distribución F

La función de distribución F es:

$$H(x; u, v) = I_{\frac{ux}{ux+v}}\left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}\right),$$

donde I es la función beta incompleta regularizada.

Figura 3.15 – Función de densidad de probabilidad F

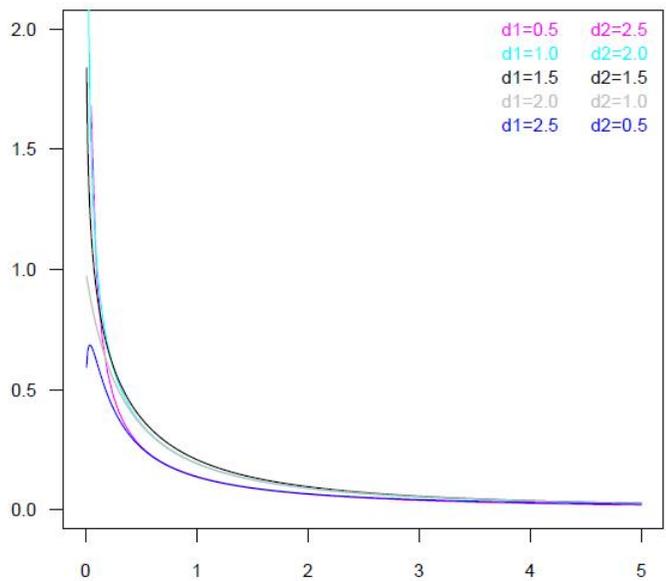
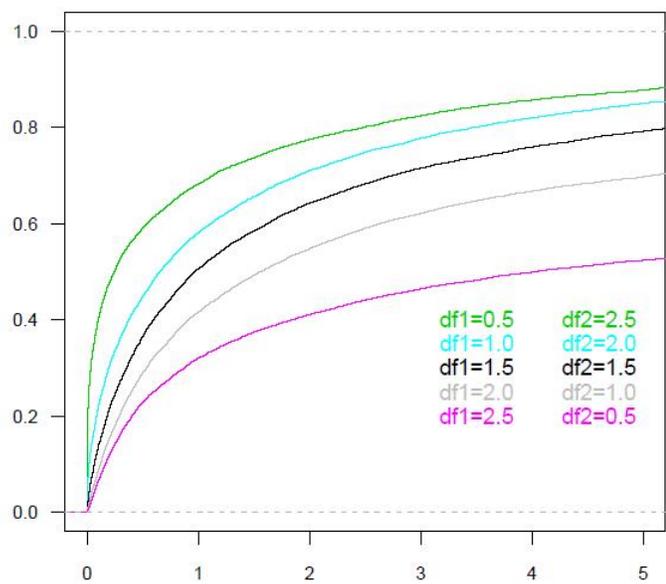


Figura 3.16 – función de distribución F



3.4.3. Propiedades de la distribución F

1. La media está dada por:

$$\mu = \frac{v}{v-2}, \text{ para, } v > 2.$$

2. La varianza está dada por:

$$\sigma^2 = \frac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)} \text{ para } v > 4.$$

3. Tiene un sesgo positivo F no puede ser negativa.
4. A medida que aumentan los valores, la curva se aproxima al eje x , pero nunca lo toca.
5. Está relacionada con el coeficiente de varianzas.
6. Los parámetros de la variable F son sus grados de libertad u y v .

3.4.4. Distribuciones relacionadas con la distribución F

A continuación se mencionaran algunas distribuciones relacionadas con la distribución F :

1. Cuando los valores m y n tienden a infinito de la distribución F , esta se asimila a la distribución normal.
2. El cociente entes dos Chi-cuadrado divididas por sus grados de libertad corresponde a una distribución F de Snedecor.

3.5. DISTRIBUCIÓN LOGNORMAL

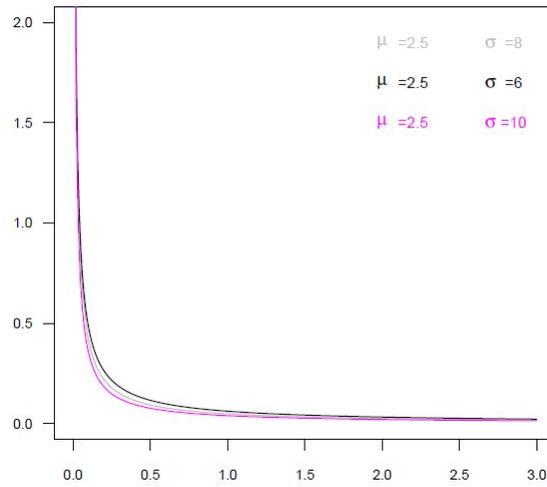
La variable aleatoria continua X se distribuye lognormalmente si el logaritmo de la variable aleatoria $Y = \ln(X)$ tiene una distribución normal.

3.5.1. Función de densidad de probabilidad Lognormal

La función de densidad de probabilidad de la distribución lognormal viene dada por:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\ln(x)-\mu]^2}{2\sigma^2}}, x \in (0, \infty)$$

Figura 3.17 – Función de densidad de probabilidad Lognormal

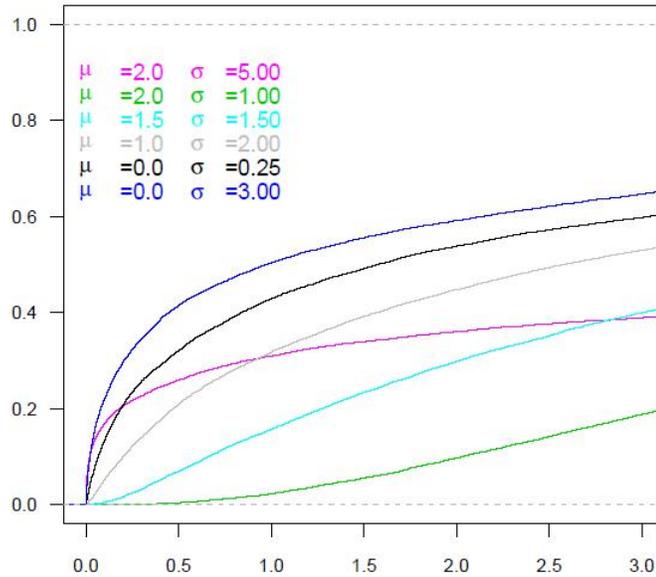


3.5.2. Función de distribución Lognormal

La función de distribución Lognormal es:

$$F(x) = \Phi\left[\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right], x \in (0, \infty)$$

Figura 3.18 – Función de distribución Lognormal



3.5.3. Propiedades de la distribución Lognormal

Las propiedades de la distribución lognormal son:

- La moda es el punto de máximo global de la función de densidad de probabilidad.

$$\text{Moda}[X] = e^{\mu - \sigma^2}$$

- La mediana es un punto tal donde:

$$F[X] = 1/2 :$$

$$\text{Mediana}[X] = e^{\mu}.$$

- El coeficiente de variación aritmética $CV[X]$ es la relación $\frac{SD[X]}{E[X]}$ en la escala natural. Para una distribución lognormal es igual a: $CV[X] = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$. El coeficiente de variación aritmética es independiente de la media aritmética.

3.5.4. Momentos de la distribución Lognormal

La función generadora de momentos esta dada por:

$$M(t) = E(e^{tx}), t \in \Re$$

Los momentos de una distribución lognormal vienen dados por:

$$E[X^k] = \exp\left(K\mu + \frac{K^2\sigma^2}{2}\right), K = 1, 2, \dots$$

3.5.5. Función característica de la distribución Lognormal

La función característica lognormal viene dada por:

$$e^{itX} = 1 \text{ para todo } t \in \Re$$

3.5.6. Distribuciones relacionadas con la distribución Lognormal

A continuación se mencionaran algunas distribuciones relacionadas con la distribución Lognormal:

1. Las relaciones más importantes son las que hay entre las distribuciones logarítmicas normales y normales, como en la siguiente definición: Si X tiene una distribución logarítmica normal entonces $\ln(X)$ tiene una distribución normal; por el contrario si Y tiene una distribución normal, entonces e^y tiene una distribución lognormal. La distribución logarítmica normal es también una familia amplia. Supongamos que X tiene la distribución lognormal con parámetros $\mu \in \Re$ y $\sigma \in (0, \infty)$ y que $c \in (0, \infty)$. Entonces cX tiene la distribución lognormal con parámetros $\mu + \ln(c)$ y σ . Es decir: Por la definición podemos escribir $X = e^y$ donde Y tiene distribución normal con media μ y σ la desviación estándar. por lo tanto

$$cX = ce^y = e^{\ln(c)}e^Y = e^{\ln(c)+Y}$$

Pero $\ln(c) + Y$ tiene la distribución normal con media $\ln(c) + \mu$ y desviación estándar σ .

3.5.7. Estimación de parámetros de la distribución Lognormal

La distribución lognormal tiene dos parámetros, μ_y , media aritmética del logaritmo de la población, (parámetro escalar), estimado y y σ_y , desviación estandar de los logaritmos de la población estimado s_y , para estimar dichos parámetros se tiene:

$$y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

$$s_y = \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\ln(x_i) - y)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

La media de una distribución lognormal vendrá dada por:

Para una variable

$$x \Rightarrow \log - normal(\mu_y; \sigma_y) \equiv LN(\mu_{\ln y}; \sigma_{\ln y})$$

$$E[x] = \mu_x = e^{\mu_y + \frac{1}{2}\sigma_y^2}$$

$$Var[x] = \sigma_x^2 = (e^{\sigma_y^2} - 1)e^{2\mu_y + \sigma_y^2}$$

3.5.8. Aplicaciones la distribución Lognormal

A continuación se mostrarán algunas aplicaciones de la Distribución Lognormal.

Optimización en estudios de Monte Carlo en Estadística: Aplicaciones al contraste de Hipótesis

El trabajo se enmarca en la Simulación Estadística e incluye herramientas de Estadística Computacional y se divide en siete capítulos, donde en el capítulo seis se estudia la simulación de algunos ejemplos del problema de Behrens-Fisher en el ámbito de la experimentación médico-biológica.²¹ En el artículo R.E Dolkar et al.²² Se presenta un estudio para dar una explicación en la incidencia y gravedad de las infecciones en pacientes con diabetes. Donde se realiza el estudio de los anticuerpos del torrente sanguíneo en ratones normales y con diabetes alloxan con o sin insulina, para lo cual se inyecta una proteína (BSA) que hará de marcador, que tiene tamaño muestral 20 y 19, respectivamente; donde al realizar la comparación de medias de entre el grupo de ratones normales y ratones con diabetes alloxan tratados con insulina, se verificó la normalidad y la igualdad de varianzas por medio de la prueba de Lilliefors para la media y la varianza poblacional donde se obtuvo como resultado el rechazo de la normalidad para un nivel de significancia de 0.05.

Figura 3.19 – Variable cantidad de mcg de BSA por ml de suero en cada cuerpo.

<u>Normal</u>	<u>Alloxan+Insulina</u>	<u>Normal</u>	<u>Alloxan+Insulina</u>
155.76	82.50	349.14	19.80
282.00	99.66	108.90	100.32
197.34	97.66	143.22	71.94
297.00	150.48	64.02	133.32
115.50	242.88	25.54	464.64
126.72	67.98	85.80	36.96
119.46	227.70	122.10	46.20
29.04	130.68	454.85	34.32
252.78	73.26	655.38	43.56
122.10	17.82	13.86	

Fuente: VEGAS LOZANO, Esteban. Optimización en estudios de Monte Carlo en Estadística: Aplicaciones al contraste hipótesis. Barcelona, 1996, 165-177p. Tesis (Doctor en Biología). Universidad de Barcelona. Facultad de Biología. Departamento de Estadística.

Al aplicar la prueba de Kolmogorov-smirnov se observa que los datos de los grupos de estudio se ajustaron a la distribución lognormal, de igual forma se aplicó el test F de comparación de varianzas que arrojó como resultado la existencia de diferencias significativas entre ellas.

²¹VEGAS LOZANO, Esteban. Optimización en estudios de Monte Carlo en Estadística: Aplicaciones al contraste hipótesis. Barcelona, 1996, 165-177p. Tesis (Doctor en Biología). Universidad de Barcelona. Facultad de Biología. Departamento de Estadística.

²²DOLKART, Ralph E. HALPERN, Bernard y PERLMAN, Janice. Comparison of antibody responses in normal and alloxan diabetic mice. En: Diabetes, vol., 20, No 3,(1971); p. 162-167.

Figura 3.20 – Valores muestrales

	n	\bar{x}	s^2
Normal	20	186.03	25265.3
Diabetes Alloxan+Insulina	19	112.72	11200.2

Fuente: VEGAS LOZANO, Esteban. Optimización en estudios de Monte Carlo en Estadística: Aplicaciones al contraste hipótesis. Barcelona, 1996, 165-177p. Tesis (Doctor en Biología). Universidad de Barcelona. Facultad de Biología. Departamento de Estadística.

Aportaciones al estudio del proceso de difusión lognormal: Bandas de confianza aproximadas y generalizadas. Estudio de caso polinómico

Este estudio resalta que la distribución Lognormal ha sido ampliamente estudiada para ajustar datos reales. El modelo de difusión Lognormal ha tenido gran importancia en el campo de la economía y las finanzas.²³ El trabajo tiene como fin construir bandas de confianza aproximadas y generalizadas para las funciones media y moda en el proceso difusión lognormal con factores exógenos y plantear un proceso de difusión lognormal con factores exógenos de tipo polinómico que permita resolver el problema de la no disponibilidad de la información externa.²⁴

Se inicia realizando un resumen de los resultados existentes sobre el proceso de difusión Lognormal unidimensional con factores exógenos; luego se hace la descripción del proceso de difusión Lognormal no homogéneo a partir de sus características mas sobresalientes como: La función de densidad, distribuciones finito-dimensionales, momentos y funciones media, covarianza, moda y de cuantiles.

Se extienden los resultados existentes sobre métodos de construcción de intervalos de confianza aproximados y generalizado para la función media y moda de la distribución Lognormal; mediante la conveniente adaptación de los correspondientes métodos disponibles para la media de una distribución Lognormal. Luego se consideran por separado los casos homogéneo y no homogéneo del proceso Lognormal, obteniendo bandas de confianza aproximadas generalizadas.

En la última parte de este estudio se profundiza en la estimación del máximo verosímil de los parámetros del modelo; esto permitió la obtención de expresiones recursivas para los estimadores máximo verosímiles de los parámetros que dió paso para actualizar la estimación en cada etapa del procedimiento.

²³MARCUS, Alan; SHAKED, Israel. The relationship between accounting measures and prospective probabilities of insolvency: An application to the banking industry. En: Financial Review. Vol., 19. No 1 (1984); p. 67-83.

²⁴RICO CASTRO, Nuria. Aportaciones al estudio del proceso de difusión lognormal: Bandas de confianza aproximadas y generalizadas. Estudio del caso polinómico. Granada, 2005, 49-74p. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Departamento de Estadística.

3.6. DISTRIBUCIÓN BETA

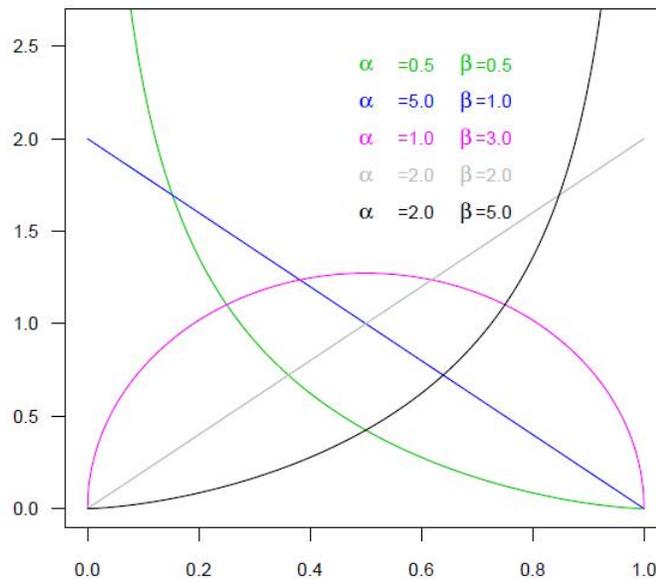
Una distribución que tiene dos parámetros, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Se utiliza frecuentemente como modelo para problemas económicos. Además juega un papel muy importante en la estadística bayesiana.

3.6.1. Función de densidad de probabilidad Beta

La función de densidad de probabilidad de la distribución beta es:

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}$$

Figura 3.21 – Función de densidad de probabilidad Beta



3.6.2. Función de distribución Beta

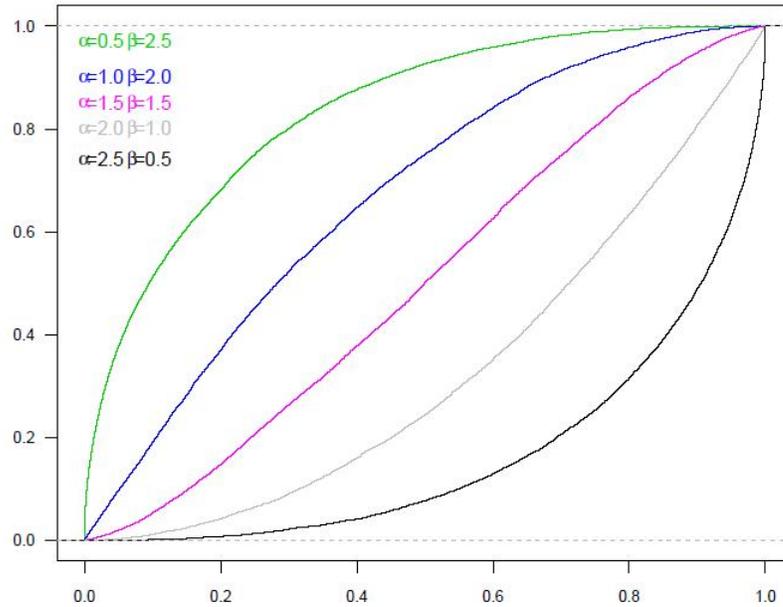
La función de distribución para la variable aleatoria beta es:

$$F(y) = \int_0^y \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} d(t) = I_y(\alpha, \beta).$$

3.6.3. Propiedades de la distribución Beta

Las propiedades básicas de la distribución beta son:

Figura 3.22 – Función de Distribución Beta



1. Media de la variable aleatoria X con distribución Beta de parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$:

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

2. Varianza:

$$\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

3. Coeficiente de asimetría:

$$\frac{2(\beta - \alpha)\sqrt{\alpha + \beta + 1}}{\sqrt{\alpha\beta}(\alpha + \beta + 2)}$$

4. Curtosis relativas

$$\frac{3(\alpha + \beta + 1)[2(\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta(\alpha + \beta - 6)]}{\alpha\beta(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 3)}$$

3.6.4. Función característica distribución Beta

La función característica de Beta es :

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\beta(a,b)} e^{-2\pi i x t} dx \\ &= {}_1F_1(a; a+b; it), \end{aligned}$$

Y ${}_1F_1(a; b; z)$ es una función hipergeométrica confluyente de primera clase.

3.6.5. Momentos de la distribución Beta

Por medio del método directo se puede obtener los momentos de la variable aleatoria beta.

$$\begin{aligned}\mu'_r = E(X^r) &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+r-1}(1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha + r, \beta) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha + r)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + r)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + \beta + r)}\end{aligned}$$

Como resultado,

$$\begin{aligned}E(X) &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(X) &= \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha + \beta)^2} \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}\end{aligned}$$

3.6.6. Distribuciones relacionadas con la distribución Beta

A continuación se mencionaran algunas distribuciones relacionadas con la distribución Beta:

1. La función beta y gamma se encuentran relacionadas por la expresión.

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

2. El siguiente resultado da una conexión entre la distribución beta y la distribución F. Si X tiene la distribución F con $n > 0$ grados de libertad en el numerador y $d > 0$ grados de libertad en

el denominador a continuación

$$Y = \frac{\frac{n}{d}X}{1 + \frac{n}{d}X},$$

tiene la distribución beta con parámetros a la izquierda $a = n/2$ y derecha parámetro $b = d/2$.

3.6.7. Estimación de parámetros distribución Beta

Si X es una variable aleatoria que se distribuye Beta (α, β) la variable tiene una media y una varianza dadas por las siguientes ecuaciones:

1. Media

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

2. Varianza:

$$\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

A partir de la ecuación 1, tenemos la siguiente relación entre α y β

$$\alpha = \beta \left(\frac{1 - E(X)}{E(X)} \right)$$

Luego, sustituyendo en 2, tenemos:

$$\sigma^2(X) = \frac{\alpha^2 \left(\frac{1 - E(X)}{E(X)} \right)}{\left(\frac{\alpha}{E(X)} \right)^2 \left(\frac{\alpha}{E(X)} + 1 \right)}$$

$$\sigma^2(X) = \frac{(E(X)(1 - E(X)))}{\left(\frac{\alpha}{E(X)} + 1 \right)}$$

$$\alpha = E(X) \left(\frac{E(X)(1 - E(X))}{\sigma^2(X)} - 1 \right)$$

$$\alpha = \left(\frac{E(X) - E^2(X) - \sigma^2(X)}{\sigma^2 X} \right)$$

Definiendo:

$$C^2 = \frac{\sigma^2}{E(X)}$$

Sustituyendo

$$\alpha = \frac{E(X) - E^2(X) - E(X)C^2(X)}{C^2(X)}$$

3.6.8. Aplicaciones la distribución Beta

A continuación se presentan aplicaciones de la distribución Beta

Generación de distribuciones aplicables en Ambiente de incertidumbre y en el ámbito financiero

Se enuncia que se abusa de la distribución Beta como una alternativa acotada de la distribución normal y resalta que se encuentran aplicaciones en diferentes ámbitos desde la ingeniería a la medicina. Presenta interés en una aplicación como distribución subyacente en la metodología PERT (Técnica que permite dirigir la programación de un proyecto) propuesta por la Marina Estadounidense.²⁵

La distribución Beta no tiene una expresión cerrada de su función de distribución y sus parámetros carecen de una interpretación intuitiva; a pesar de esto la distribución Beta se continúa aplicando en diferentes campos como en problemas económicos: Fidelidad a una marca, análisis de inversiones, valoración, duración de maleabilidad para representar diferentes situaciones.

El principal objetivo de este trabajo es presentar un conjunto de distribuciones acotadas que podría servir de alternativas a la distribución Beta en la metodología PERT, en el ámbito financiero y la construcción de distribuciones acotadas en un dominio finito; donde se nombran algunas distribuciones alternativas a la distribución Beta como la distribución Two-Sided porwer presentada por, Van Dorp y Kotz²⁶ y publicada por Gupta y Nadarajah;²⁷ esta distribución es una generalización de la distribución triángular que presenta una característica apropiada en el caso de ajuste de datos financieros que presentan histogramas con apuntamiento pronunciado; entre otras distribuciones como: la distribución bipolarabólica,²⁸ y la distribución coseno.²⁹

²⁵LÓPEZ MARTÍN, María del Mar. Generación de distribuciones aplicables en ambiente de incertidumbre y en el ámbito financiero. Granada, 2010, 1-32p. Memoria de Tesis (Doctora). Universidad de Granada. Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa.

²⁶KOTZ, Samuel; VAN DORP, J. René. A novel method for fitting unimodal continuous distributions on a bounded domain utilizing expert judgment estimates. En: IIE Transactions. Vol., 38, No 5 (2006); p. 421-436.

²⁷GUPTA, Arjun K.; NADARAJAH, Saralees (ed.). Handbook of beta distribution and its applications. CRC Press, 2004.

²⁸GARCIA, C.B. Generalizaciones de la distribución biparamétrica: Aplicaciones en el ámbito financiero y en el campo de la valoración, 2007. Universidad de Granada.

²⁹CASTRUP, Howard. Distributions for uncertainty analysis. En: Proc. Int. Dimensional Workshop (IDW). 2001. p. 1-12.

Se resalta que las distribuciones de probabilidad rectangular y Beta son utilizadas dentro de la metodología PERT, en el estudio de la duración de las diferentes actividades,³⁰ para la valoración de bienes en ambiente de incertidumbre.³¹

Al observar el apuntamiento de la distribución Beta, se tiene que esta presenta un menor valor para el coeficiente de curtosis, siendo superado por el de las distribuciones GBC, TSP y GBP, cuando M está próximo a 0,5, y que al realizar una comparación entre las distribuciones anteriormente mencionadas; se observa que en la mayoría de las situaciones la distribución $U - BETA$ presenta un valor de la varianza más elevado.

Se concluye que se utilizaron diferentes distribuciones combinadas con la distribución uniforme, esto surge de los resultados teóricos que aporta, Hanh³² en la construcción de la distribución $U - BETA$, Hanh describe esta distribución como una función de densidad más flexible; caracterizada por la presencia de colas más pesadas.

Riesgo Sísmico

Los años esperados en entornos urbanos se analizan mediante curvas de fragilidad o matrices de probabilidad de daño. De la misma manera para cada edificio, para cada terremoto y para cada estado, la matriz de probabilidad de daño define la probabilidad de que el edificio considerado sufra este nivel de daño; las curvas de fragilidad y las matrices de probabilidad de daño son equivalentes para un edificio dado.³³

Este trabajo muestra como se ha establecido una forma de caracterizar los edificios mediante índices de vulnerabilidad y espectros de capacidad, también se han definido los escenarios sísmicos en términos de intensidad macrosísmica; y muestra el desarrollo de matrices de probabilidad de daño para los escenarios sísmicos en términos de intensidad macrosísmica y el desarrollo de matrices de probabilidad de daño para los escenarios sísmicos escogidos.

Aplicando dos métodos: método del índice de vulnerabilidad (MIV) y el método del espectro de capacidad (MEC); estos dos métodos pretenden estimar el daño esperado. Cuando se conoce el MIV

³⁰ROMERO, Carlos. Técnicas de programación y control de proyectos. Ediciones Pirámide, 1997.

³¹CABALLER, V. Valoración Agraria. Teoría y Práctica. 4 Edición. Ediciones Pirámide, 1993.

³²Hahn, Eugene David. Mixture densities for project management activity times: A robust approach to PERT. En: European Journal of Operational Research. Vol.,188, (Jul, 2008); P 450-459

³³LANTADA ZARZOSA, María Nieves. Evaluación del riesgo sísmico mediante métodos avanzados y técnicas GIS. Aplicación a la ciudad de Barcelona. Barcelona, 2007, 1-303p. Tesis (Doctora). Universidad Politécnica de Cataluña. Departamento de Ingeniería del Terreno, Cartografía y Geofísica.

de un edificio y la intensidad esperada en su emplazamiento; define la función de distribución de probabilidad de los estados de daño para este edificio; el tipo de relaciones entre intensidad, vulnerabilidad y daño son fundamentales para determinar el daño probable y el riesgo sísmico.

La probabilidad de que un edificio de una tipología determinada sufra un cierto grado de daño al ser afectado por un terremoto de una intensidad sísmica determinada, puede modelarse mediante una función Beta o Binomial equivalente.

La distribución Beta es más versátil que la distribución Binomial pero con los parámetros así ajustados es equivalente a ella. La probabilidad de que el estado de daño se halle entre los valores a y x se define mediante la función de Distribución Beta.

La curva de fragilidad manejada en estudios de daño y riesgo sísmico para un edificio y un estado de daño dado, define la probabilidad de excedencia en función de la intensidad sísmica. Esta curva se obtiene a partir de la Función de Distribución Beta.

3.7. DISTRIBUCIÓN GAMMA

Se le conoce, también, como una generalización de la distribución exponencial, además de la distribución de Erlang y la distribución Ji-cuadrada. Es una distribución de probabilidad continua adecuada para modelizar el comportamiento de variables aleatorias con asimetría positiva y/o los experimentos en donde está involucrado el tiempo.³⁴

3.7.1. Función de densidad de probabilidad Gamma

Una variable aleatoria X tiene una distribución gamma si su función de densidad está dada por:

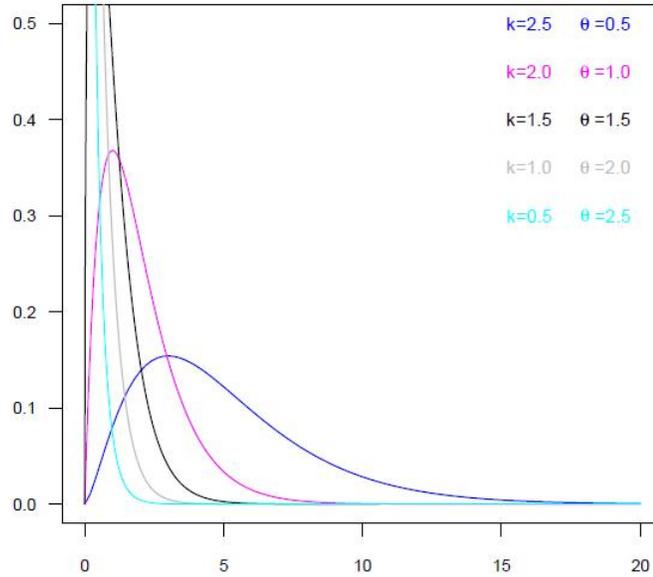
$$f(x, \alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} & x, \alpha, \theta > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

3.7.2. Función de distribución de probabilidad Gamma

La función de distribución de probabilidad Gamma esta dada por:

³⁴ARROYO, Indira; BRAVO M., Luis C.; LLINÁS, Humberto; MUÑOZ, Fabián L. Distribuciones Poisson y Gamma: una discreta y continua relación. En: Prospectiva. Vol., 12, No 1 (en- jun, 2015), pag 99-107

Figura 3.23 – Función de densidad de probabilidad Gamma



$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{(\lambda u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda e^{-\lambda u} du, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

3.7.3. Propiedades de la distribución Gamma

Las propiedades básicas de la distribución gamma son:

1. $E(X)$:

$$\alpha\beta$$

2. Varianza:

$$\alpha\beta^2$$

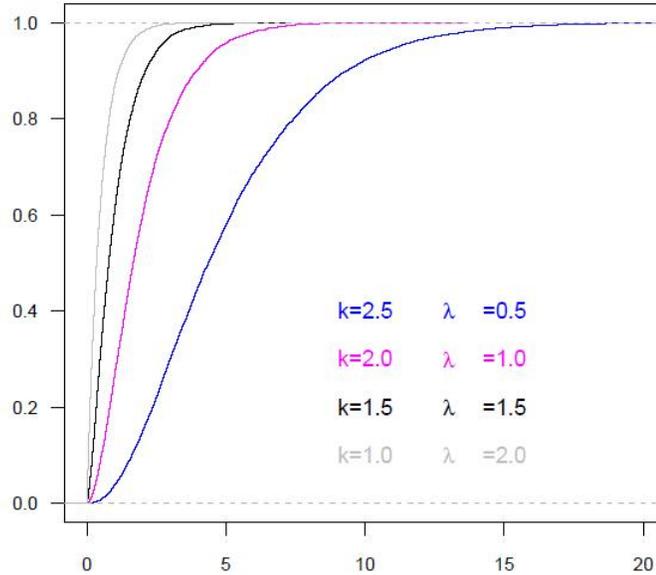
3. Coeficiente de asimetría:

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

4. Curtosis relativa:

$$3\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)$$

Figura 3.24 – Función de distribución de probabilidad Gamma



3.7.4. Momentos de la distribución gamma

La función generadora de momentos para la variable aleatoria gamma X esta dada por

$$E[\exp(tX)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} \int_0^x x^{\alpha-1} \exp[-(1-\theta t)x/\theta] dx$$

Sea

$$u = (1-\theta t)x/\theta, x = u\theta/(1-\theta t), y dx = [\theta(1-\theta t)] du$$

Entonces

$$\begin{aligned} E[\exp(tX)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} \int_0^x \frac{u^{\alpha-1} \theta^{\alpha-1}}{(1-\theta t)^{\alpha-1}} \exp(-u) \frac{\theta}{(1-\theta t)} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-\theta t)^\alpha} \int_0^x u^{\alpha-1} \exp(-u) du \\ &= (1-\theta t)^{-\alpha}; 0 \leq t < 1/\theta \end{aligned}$$

3.7.5. Distribuciones relacionadas con la distribución gamma

A continuación se mencionaran algunas distribuciones relacionadas con la distribución Gamma:

- Para valores grandes α la distribución gamma puede aproximarse, en algún grado, por una distribución normal. Esto es, la variable aleatoria.³⁵
- Cuando α es un entero positivo, la distribución gamma se conoce como distribución de Erlang en honor al científico danés que la usó por primera vez a principios de 1900 a fin de establecer resultados útiles para problemas de tráfico en líneas telefónicas. Existe una asociación entre los modelos de probabilidad de Poisson y Erlang. Si el número de eventos aleatorios independientes que ocurren en un lapso específico es una variable de Poisson con una frecuencia constante de ocurrencia de $\frac{1}{\theta}$, entonces para una α , el tiempo de espera hasta que ocurra el α -ésimo evento de Poisson tiene una distribución de Erlang.
- Cuando el parámetro de forma α es igual a 1, la distribución de Erlang se reduce a lo que se conoce como la distribución exponencial negativa.
- Otro caso especial de modelo de probabilidad gamma es la distribución chi-cuadrado. Si se reemplaza en:

$$f(x, \alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp^{-x/\theta} & x, \alpha, \theta > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

El parámetro de la forma $v/2$ y el parámetro de escala θ con 2, el resultado es la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria chi-cuadrado y se determina por:

$$f(x; v) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(v/2)2^{v/2}} v^{v/2-1} \exp^{-x/2} & x > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro valor} \end{cases}$$

3.7.6. Estimación de parámetros de la distribución Gamma

Los dos parámetros de la distribución son α el parámetro de forma; y β el parámetro de escala. Estos parámetros se pueden estimar mediante la aproximación de Thom.³⁶

$$\gamma = \frac{1}{4A} \left[1 + \sqrt{\left(1 + \frac{4A}{3} \right)} \right]$$

$$A = \ln \bar{x} - \frac{\sum \ln x}{n}$$

$$\beta = \frac{\bar{x}}{\gamma}$$

³⁵CANAVOS. C George. Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos. Madrid. Mc Graw Hill, 1988. 651p.

³⁶H.C.S, Thom. A note on the Gamma Distribution Statistical Laboratory, Iowa State College, 1947 (Manuscript).

3.7.7. Aplicaciones de la Distribución Gamma

A continuación se presentan aplicaciones de la Distribución Gamma.

Caracterización y aplicación de la distribución Birnbaum-Saunders como modelo de tiempos de vida

La distribución Birnbaum-Saunders fue desarrollada originalmente para modelar tiempos de ruptura de metales que estaban expuestos a fatiga.³⁷

El concepto de confiabilidad en los sistemas técnicos empezaron a ser aplicados a comienzos del siglo XX, junto con la tecnología generada durante la I Guerra Mundial (1914-1918), para medir la seguridad operacional de aviones a través del número de accidentes por hora de vuelo.

Una asociación de ingenieros empezó a trabajar con problemas asociados a la confiabilidad de sistemas, lo cual motivó a la creación de la primera revista científica del tema, "IEEE-Transactions on Reliability (1963).

En el mundo industrial no es suficiente que los dispositivos sean de calidad, sino que además estas características como materiales de fabricación, diseño y planes de inspección y otras, deben mantenerse a través del tiempo, es decir, deben ser confiables. Esta confiabilidad se mide en términos del tiempo de funcionamiento, que es una variable aleatoria, lo cual permite el uso de procedimientos estadísticas y probabilísticos.

La distribución Birnbaum-Saunders fue derivada a partir de un modelo que muestra que la fallas se deben al desarrollo y crecimiento de un crack dominante, Birnbaum-Saunders³⁸ presentaron este modelo que describe totalmente el tiempo de falla que ha transcurrido cuando cierta clase de daño acumulado excede un umbral; la confiabilidad intenta crear modelos matemáticos de predicción válidos para obtener una tecnología estable dando lugar a la teoría matemática de la confiabilidad llamada teoría de confiabilidad.

El papel de la distribución Exponencial llegó a ser más importante en 1957 con el informe (AGREE del Departamento de Defensa de los EEUU; también es popular por su amplia explotación en teoría de la confiabilidad, porque tiene una tasa de falla constante y procesamiento de datos sencillos. Por

³⁷ESPINOSA CUELLO, Edgar. Caracterización y aplicación de la distribución Birnbaum-Saunders como modelo de tiempo de vida. Saltillo, 2002, 1-53p. Tesis (Maestro en Ciencias en Estadística Experimental). Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro.

³⁸BIRNBAUM, Z.W, y SAUNDERS, S.C (1968). Aprobabilistic interpretation of miner's rule. En: Journal of applied mathematics. vol.,16; p.637-652.

esta razón también surge el uso de la distribución Gamma para modelar la suma de falla exponencial. Se tomó la distribución de vida Birnbaum-Saunders; donde se desarrolló una primera generalización de la distribución Birnbaum-Saunders de tres parámetros.³⁹

El investigador en lugar de pruebas de bondad de ajuste para sus datos, puede seleccionar la distribución de vida apropiada. El tiempo de vida de cada unidad puede modelarse por una distribución Exponencial y el tiempo de vida del sistema puede ser modelado por una distribución Gamma.

3.7.8. La distribución gamma como modelo para analizar la distribución de la renta

Este trabajo, busca un modelo de distribución de la renta para poder obtener a partir de él estimaciones de algunas medidas de desigualdad. Por tanto, se necesita un modelo que reúna una serie de propiedades aptas para esta finalidad instrumental. Entre las propiedades más importantes que debe satisfacer se destacan, por un lado, la posibilidad de estimar las medidas de desigualdad asociadas a dicho modelo sin grandes dificultades y, por otro, un buen grado de ajuste a la realidad empírica. Además, resulta recomendable contar con un método de estimación que permita conocer las propiedades de los estimadores de los parámetros y derivar, a partir de ellos, las propiedades de los estimadores de las medidas de desigualdad.⁴⁰

Tales características se han encontrado en la distribución gamma biparamétrica, razón por la cual ha sido el modelo que se ha seleccionado para realizar el estudio.

La información es tomada de la base de la Encuesta de Presupuestos Familiares que elabora el Instituto Nacional de Estadística de España, y más concretamente de la que tiene como período de referencia el que va de abril de 1990 a marzo de 1991. Esta encuesta permite conocer ciertas características de los hogares, tales como los gastos e ingresos por naturaleza, el equipamiento y las condiciones y servicios de las viviendas. El método de la selección de la muestra es bietápico con estratificación. Los resultantes de la investigación estadística contienen información sobre 21.155 hogares del Estado Español, lo que supone una cobertura de 72.123 personas. De entre las variables que contenía el fichero de hogares, la investigación se ha centrado exclusivamente en la Comunidad Autónoma de residencia.

Para la estimación de medidas de desigualdad, se realiza un análisis gráfico de la distribución muestral lo que permitió tener en cuenta tres candidatas: las distribuciones lognormal, Weibull y gamma.

³⁹DÍAZ-GARCÍA, José A.; LEIVA-SÁNCHEZ, Víctor; GALEA, Manuel. Singular elliptical distribution: density and applications. En: Communications in Statistics-Theory and Methods. Vol., 31, No 5, (2002); p. 665-681.

⁴⁰LAFUENTE LECHUGA, Matilde. La distribución gamma como modelo para analizar la distribución de la renta: Una aplicación a la E.P.F. 1990-91. En: Revista de Estudios Regionales. No 50 (1998); p. 161-168.

Tabla 3.7 – Distribución de la muestra de la EPF ingreso medio y desviación típica del ingreso

Comunidad Autónoma	Número de hogares	Número de personas	Ingreso Medio	Desviación típica del ingreso
TOTAL	21.155	721.238	29.656,82	546.742,27
Andalucía	3.674	13.452	703.299,65	533.400,84
Aragón	1.105	3.518	878.577,94	550.434,26
Principado de Asturias	443	1.449	881.185,20	427.945,22
Baleares	429	1.365	982.726,65	534.561,56
Canarias	772	2.879	728.195,01	441.099,00
Cantabria	362	12.418	61.593,39	479.861,09
Castilla y León	3.162	10.216	853.508,78	514.500,15
Castilla- La Mancha	1.694	5.595	776.311,73	458.717,20
Cataluña	1.644	5.357	976.399,86	538.550,05
Comunidad Valenciana	1.706	5.614	822.530,17	465.439,87
Extremadura	830	2.859	662.768,81	419.772,25
Galicia	1.739	6.140	803.986,30	524.699,56
Madrid	764	2.608	1.040.345,82	926.849,64
Región de Murcia	526	1.899	739.922,60	563.894,51
Navarra	367	1.303	978.214,81	465.106,57
País Vasco	1.360	4.639	988.773,16	587.287,88
La Rioja	357	1.199	1.006.945,80	671.955,90
Ceuta y Melilla	221	790	724.112,62	524.172,77

Fuente: LAFUENTE LECHUGA, Matilde. La distribución gamma como modelo para analizar la distribución de la renta: Una aplicación a la E.P.F. 1990-91. En: Revista de Estudios Regionales. No 50 (1998); p. 161-168. Modificada por las autoras.

Se realiza el ajuste de estos tres modelos obteniendo los estimadores de máxima verosímiles de sus parámetros.

Aplicando el test de Kolmogorov-Smirnov, se observa que de estas tres distribuciones únicamente con la gamma biparamétrica se acepta la hipótesis de que los datos originales provengan de una población así distribuida, a un nivel de significación del 5%.

Estos argumentos llevan a concluir que la distribución gamma es el modelo biparamétrico que mejor se ajusta a la distribución de la renta que se deduce de los datos de la Encuesta de Presupuestos Familiares 90-91 y se nota que se ajusta a una distribución gamma biparamétrica,

3.8. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

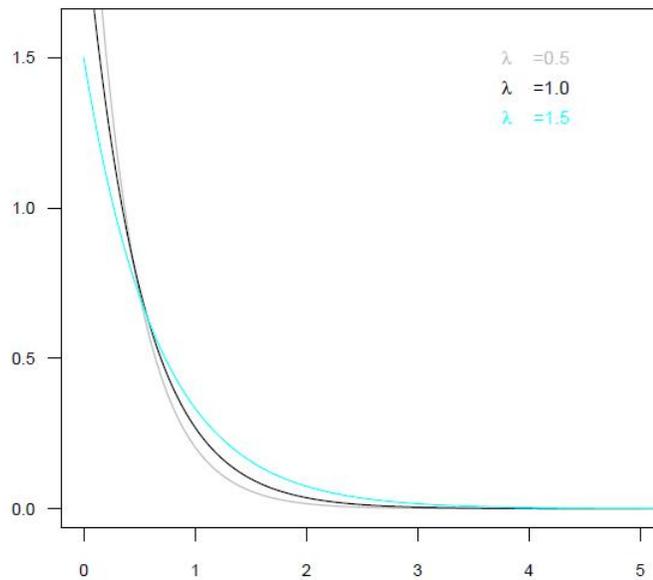
Es un caso especial de la distribución gamma (Erlang), se usa para modelar los problemas de tipo falla-tiempo y problemas de líneas de espera.

3.8.1. Función de densidad de probabilidad Exponencial

La variable aleatoria continua X tiene una distribución exponencial, con parámetro β si su función de densidad esta dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Figura 3.25 – Función de densidad de probabilidad Exponencial



3.8.2. Función de distribución Exponencial

La función de distribución Exponencial es:

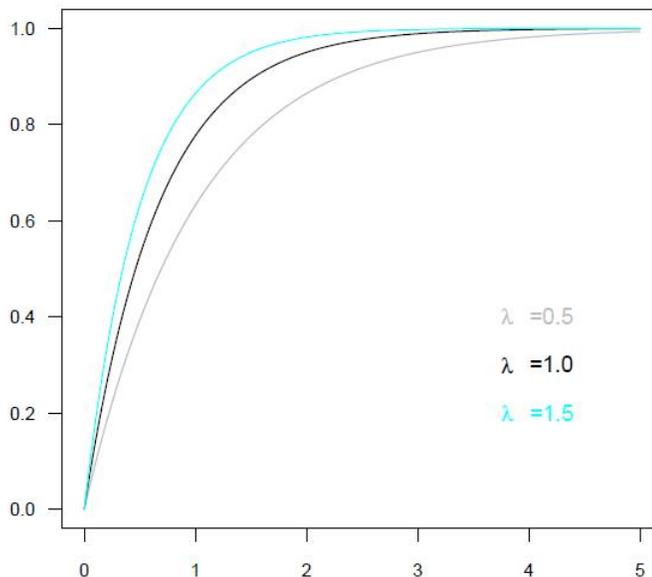
$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

3.8.3. Propiedades de la distribución Exponencial

Las propiedades de la distribución exponencial son: La esperanza de x esta dada por:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Figura 3.26 – Función de distribución Exponencial



La varianza de X está dada por:

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

La mediana de X está dada por:

$$m[X] = \frac{\ln(2)}{\lambda} < E[X].$$

Otras propiedades a tener en cuenta son:

1. La primera propiedad es la de la pérdida de memoria, que solo cumple esta distribución (continua). Se dice que una variable aleatoria carece de memoria si:

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s), \forall s, t \geq 0$$

Por lo tanto la distribución exponencial carece de memoria ya que:

$$P(X > s + t) = e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} \cdot e^{-\lambda t} = P(X > s)P(X > t)$$

2. La segunda propiedad es la de reproductividad, que hace referencia a que la suma de distribuciones exponenciales independientes e idénticamente distribuidas sigue una distribución gamma.

En efecto, si X_1, \dots, X_n son n variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmen-

te, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda) \forall i$, entonces $X_1 + \dots + X_n$ sigue una distribución gamma de parámetros $p = n$ y $a = \lambda$, cuya función de densidad es

$$f(t) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$E[X_1 + \dots + X_n] = p/a = n/\lambda$$

$$V[X_1 + \dots + X_n] = p/a^2 = n/\lambda^2$$

3. La tercera propiedad es la que el mínimo de n variables aleatorias exponenciales independientes se distribuye exponencialmente. En efecto, si X_1, \dots, X_n son n variables aleatorias independientes y con distribución exponencial, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i) \forall i$, entonces $X = \min X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\sum_i \lambda_i)$.
4. La cuarta propiedad es la que hace referencia a la probabilidad de que una distribución exponencial, sea menor que otra. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes y con distribución exponencial de parámetros λ_1 y λ_2 , respectivamente.

Entonces, $P(X_1 < X_2) = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$, ya que (teorema de la probabilidad total)

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2) &= \int_0^{\infty} P(X_1 < X_2 \mid X_2 = x) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx \\ &= \int_0^{\infty} P(X_1 < x) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx \\ &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda_1 x}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx \\ &= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^{\infty} \lambda_1 + \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x} dx \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

3.8.4. Función característica distribución Exponencial

La función característica de la exponencial esta dada por:

$$\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$$

3.8.5. Momentos de la distribución Exponencial

Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ , o sea con densidad

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$$

La función generadora de momentos

$$\begin{aligned} M_x(t) = E^{tX} &= \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-t)x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-t} \int_0^{\infty} (\lambda-t) e^{-(\lambda-t)x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-t} \end{aligned}$$

3.8.6. Distribuciones relacionadas con la distribución Exponencial

A continuación se mencionaran algunas distribuciones relacionadas con la distribución Exponencial:

1. La relación entre la distribución exponencial (a menudo denominada exponencial negativa) y la distribución de Poisson, donde esta se puede desarrollar como una distribución de un solo parámetro con parámetro λ se puede interpretar como el número medio de eventos por unidad de tiempo. Considérese la variable aleatoria discreta por el tiempo que se requiere para que ocurra el primer evento. Con el uso de la distribución de Poisson, encontramos que la probabilidad de que no ocurra algún evento, es el periodo hasta el tiempo t esta dada por:

$$p(0, \lambda t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

Podemos ahora utilizar lo anterior y hacer que X sea el tiempo para el primer evento de Poisson. La probabilidad de que la duración del tiempo hasta el primer evento exceda x es la misma que la probabilidad de que no ocurra algún evento de Poisson en x . Esto último, por supuesto, esta dado por $e^{-\lambda t}$. Como resultado

$$P(X \geq x) = e^{-\lambda t}$$

Así la función de distribución para X está dada por

$$P(0 \leq X \leq x) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Ahora bien, con el fin de reconocer la presencia de la distribución exponencial, podemos diferenciar la función de distribución acumulada anterior para obtener la función de densidad

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda t}$$

que es la función de densidad de la distribución exponencial $\lambda = \frac{1}{\beta}$ (Walpole, H Myers y L Myers)

3.8.7. Estimación de parámetros de la distribución Exponencial

Supongamos que una variable aleatoria X tiene distribución exponencial con parámetro λ . Sea (x_1, \dots, x_n) una muestra aleatoria de X . Como hay un solo parámetro a estimar, basta plantear una ecuación basada en el primer momento.

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = E(X) \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda' = \frac{1}{\bar{X}}$$

3.8.8. Aplicaciones de la distribución Exponencial

A continuación se presentan aplicaciones de la distribución Exponencial.

Análisis de Confiabilidad, disponibilidad y mantenibilidad del sistema de crudo diluido de Petrozuata

El análisis de confiabilidad, disponibilidad y mantenibilidad (CDM) es una herramienta que permite el estudio probabilístico de los tiempos promedios entre fallas y tiempos de reparación de los equipos; con esto se logra disminuir costos y fallas de los equipos con menor riesgo del personal y al ambiente.⁴¹

El objetivo de aplicar CDM al sistema de crudo diluido, es encontrar las debilidades y proponer las acciones necesarias para garantizar el aumento en la tasa de bombeo; también el de pronosticar la

⁴¹VERGARA REA, Edgar Jesús. Análisis de confiabilidad, disponibilidad y mantenibilidad del sistema de crudo diluido Petrozuata. Caracas, 2007, 1-53p. Trabajo especial de grado (Especialista en Confiabilidad de Sistemas Industriales). Universidad Simón Bolívar. Decanato de Estudios de Posgrados.

producción perdida y la indisponibilidad de un proceso de producción, de acuerdo a su configuración, a la confiabilidad de sus componentes, a las políticas de mantenimiento, al recurso disponible y a la filosofía operacional.⁴²

Este estudio se realizó en la petrolera Zuata; el fin de esta asociación es la de producir, transportar y procesar crudo extrapesado, con este estudio se espera conocer cual es la disponibilidad real del sistema de crudo diluido, también los puntos débiles de dicho sistema, con el fin de poder planificar todas las acciones necesarias que permiten dar continuidad al negocio sin poner en riesgo las instalaciones y la producción de las empresas usuarias del sistema.

Al observarse por un largo periodo de tiempo una población de equipos; con alta probabilidad se encontrará que al analizar los tiempos para la falla de la población de equipos, discriminando por componente que produjo la falla, tienden a seguir distribuciones como Weibull, Gamma, Lognormal, Beta entre otras.⁴³

Si se analizan todos los tiempos para la falla en la población de equipos, sin discriminar por el componente que causó la falla, se hallará que los tiempos para la falla en la gran mayoría de los casos siguen la distribución Exponencial, es decir la tasa de falla es constante.

Aplicación de teoría de colas en una entidad financiera: Herramientas para el mejoramiento de los procesos de atención al cliente

Los procesos de servicio en general son estructuras complicadas cuya composición depende de los flujos de llegada o salida hacia los puntos de atención o hacia los nodos de servicio. Debido a esto, cada centro de atención dispone según su conveniencia de una distribución en forma de red para atender al cliente. Dentro de este tipo de estructuras se encuentran las redes tipo estrella, bus, cíclica, mixta, anillo, árbol, maya y totalmente conexa.⁴⁴

Este trabajo se hace por medio de la recolección de datos, relacionados con tiempos de llegada y de atención, y el análisis exploratorio estadístico de los mismos para comprobar supuestos del modelo y confiabilidad de los datos. De acuerdo con la tasa de llegada de clientes a la agencia y realizando comparaciones múltiples se estableció que el comportamiento de llegada de los clientes a la agencia

⁴²YAÑEZ, M., GÓMEZ, H. y VALBUENA, G. Ingeniería de Confiabilidad y Análisis Probabilístico de Riesgo. Reliability and Risk Management, S.A. Venezuela. (2004).

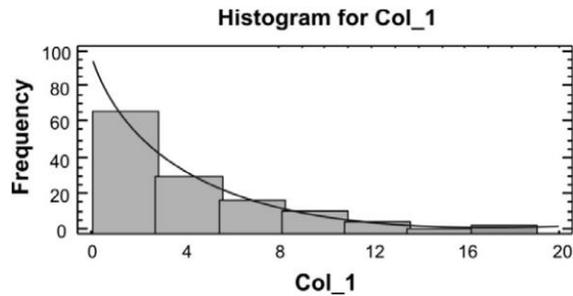
⁴³EBELING, C.E. An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering, New York: Mc Graw-Hill, (1997).

⁴⁴GOMÉZ JIMENÉZ, Fredy Alexander. Aplicación de teoría de colas en una entidad financiera: Herramientas para el mejoramiento de los procesos de atención al cliente. En: Revista Universidad EAFIT. Vol., 44. No 150 (abr- jun. 2008); p.51-63.

donde se realizó el estudio provenía principalmente de dos poblaciones, es decir, en el transcurso de la semana, la agencia posee dos comportamientos diferentes en el volumen de llegada de los usuarios. Lo que hace que se establezcan dos grupos; Grupo 1 y Grupo 2.

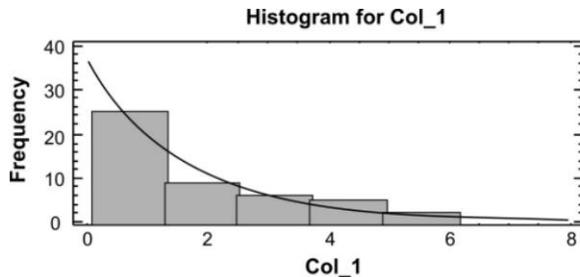
A continuación se examina la distribución de cada uno de los grupos. En el caso del Grupo 1 se toma una muestra de 130 datos, después de aplicar las pruebas de bondad de ajuste se determina que los datos se comportan como una función continua de probabilidad exponencial, para el caso del Grupo 2 se toma una muestra de 50 datos, después de aplicar la prueba de bondad se confirma que los datos se distribuyen de manera exponencial.

Figura 3.27 – Histograma de frecuencias, grupo 1



Fuente: GOMÉZ JIMENÉZ, Fredy Alexander. Aplicación de teoría de colas en una entidad financiera: Herramientas para el mejoramiento de los procesos de atención al cliente. En: Revista Universidad EAFIT. Vol., 44. No 150 (abril- junio. 2008); p.51-63.

Figura 3.28 – Histograma de frecuencias, grupo 2

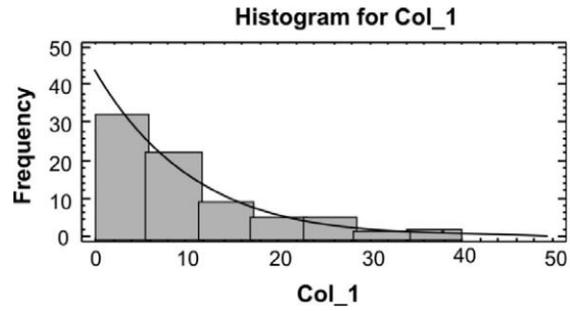


Fuente: GOMÉZ JIMENÉZ, Fredy Alexander. Aplicación de teoría de colas en una entidad financiera: Herramientas para el mejoramiento de los procesos de atención al cliente. En: Revista Universidad EAFIT. Vol., 44. No 150 (abril- junio. 2008); p.51-63.

En el caso de la variable aleatoria: Tiempo que demora un promotor en atender un cliente, se toman 80 lapsos de atención y se confirma que los datos se distribuyen de forma exponencial.

Una vez identificado el comportamiento de la llegada de los clientes a la agencia, a través de las días-horas de la semana, y después de haber calculado el tiempo promedio de servicio y su distribución de

Figura 3.29 – Histograma de frecuencias, Tiempo de Servicio



Fuente: GOMÉZ JIMENÉZ, Fredy Alexander. Aplicación de teoría de colas en una entidad financiera: Herramientas para el mejoramiento de los procesos de atención al cliente. En: Revista Universidad EAFIT. Vol., 44. No 150 (abril- junio. 2008); p.51-63.

probabilidad, se está en capacidad de aplicar la herramienta utilizada en el campo de la Investigación de Operaciones para realizar análisis a las líneas de espera: la teoría de colas.

Capítulo 4

CONCLUSIONES

- La investigación sirvió para mostrar que las distribuciones de probabilidad para variables continuas tiene un amplio campo de aplicación, y que facilitan a lector o al interesado encontrar la distribución que mejor se ajusta a sus datos.
- La Normal es una de las distribuciones de probabilidad de variable continua que con más frecuencia aparece en fenómenos reales. La importancia de esta distribución radica en que permite modelar numerosos fenómenos naturales y sociales.
- La distribución Weibull es utilizada para el análisis de fiabilidad y es derivada de la distribución exponencial y normal. Nos permite calcular el periodo de vida de algún componente hasta su primera falla; es muy importante en el área industrial y científica, ya que puede ayudar a prevenir muchos gastos innecesarios.
- La función de probabilidad de Gumbel, es la más apropiada para ajustarse a caudales; se recomienda su uso por rapidez y facilidad de cálculo; obtiene buenos resultados para valores extremos independientes de variables meteorológicas y se ajusta bastante bien a los valores máximos de la precipitación en diferentes intervalos de tiempo.
- La distribución F nos permite la comparación de varianzas, y realizar el contraste de hipótesis referentes a varianzas de poblaciones normales e independientes, y también poder comparar medias de varias poblaciones resumido en un análisis de la varianza.
- La distribución Log-normal permite describir la dispersión de las tasas de fallo de componentes que es originada por diferente origen de los datos, entorno, bancos de datos diferentes. En este caso la variable independiente de la distribución es la tasa de fallos.

- Se observó los diferentes campos de aplicación de las distribuciones estudiadas y el manejo de unas de las distribuciones de variable aleatoria continúa más comunes como la normal.

Bibliografía

- [1] A, Juan, y SERRAT, C. Ingeniería en organización industrial: Distribuciones habituales en fiabilidad. Catalunya, 2006. p. 6-17.
- [2] ALBINAGURTA, Roberto, y CAMPODÓNICO, David. Experiencia en la aplicación del algoritmo de la fundación de medicina fetal en el tamizaje de Aneuploidías entre las 11-13 semanas. En: Revista peruana Ginecol obstet. vol.,59. (27 nov, 2012); p.187-193.
- [3] ARROYO, Indira; BRAVO M., Luis C.; LLINÁS, Humberto; MUÑOZ, Fabián L. Distribuciones Poisson y Gamma: una discreta y continua relación. En: Prospectiva. Vol., 12, No 1 (en- jun, 2015), pag 99-107
- [4] BAIN, Lee, y ANTLE, Charles. Inferences on the parameters of the weibull distribution. En: Technometrics. vol.,11.(agto 1969); p.445-460.
- [5] BERNADEZ, Francisco, y MORENO, César. Valores normales de gases en la vena del cordón umbilical durante el postparto y postcesárea inmediato en fetos de término normales. En: Ginecol Obstet Mex. vol.,82.(2014); p. 170-176.
- [6] BERRETTONI, J. Practical applications of the Weibull distribution. En: Industrial quality control. vol.,21.(1964); p. 71-79.
- [7] BIRNBAUM, Z.W, y SAUNDERS, S.C (1968). Aprobabilistic interpretation of miner's rule. En: Journal of applied mathematics. vol.,16; p.637-652.
- [8] CABALLER, V. Valoración Agraria. Teoría y Práctica. 4 Edición. Ediciones Pirámide, 1993.
- [9] CANAVOS. C George. Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos. Madrid. Mc Graw Hill, 1988. 651p.
- [10] CASTRUP, Howard. Distributions for uncertainty analysis. En: Proc. Int. Dimensional Workshop (IDW). 2001. p. 1-12.

- [11] DÍAZ-GARCÍA, José A.; LEIVA-SÁNCHEZ, Víctor; GALEA, Manuel. Singular elliptical distribution: density and applications. En: *Communications in Statistics-Theory and Methods*. Vol., 31, No 5, (2002); p. 665-681.
- [12] DOLKART, Ralph E. HALPERN, Bernard y PERLMAN, Janice. Comparison of antibody responses in normal and alloxan diabetic mice. En: *Diabetes*, vol., 20, No 3,(1971); p. 162-167.
- [13] EBELING, C.E. *An Introduction to Reliability and Maintainability Engineering*, New York: Mc Graw-Hill, (1997).
- [14] ESPINOSA CUELLO, Edgar. Caracterización y aplicación de la distribución Birnbaum-Saunders como modelos de tiempo de vida. Saltillo, 2002, 1-53p. Tesis (Maestro en Ciencias en Estadística Experimental). Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro.
- [15] FARALDO, Pedro, y PATEIRO, Beatriz. Estadística y metodología de la investigación: Estimación de parámetros. España, 2012. p. 1-5.
- [16] FISCHER, Ronald, y TIPPETT, Leonard. Limiting form of the frequency distribution of the largest of smallest members of a sample. En: *Proceeding of the cambridge philosophical society*. vol.,24.(1928); p.180-190.
- [17] GARCIA, C.B. Generalizaciones de la distribución biparamétrica: Aplicaciones en el ámbito financiero y en el campo de la valoración, 2007. Universidad de Granada.
- [18] GOMÉZ JIMENÉZ, Fredy Alexander. Aplicación de teoría de colas en una entidad financiera: Herramientas para el mejoramiento de los procesos de atención al cliente. En: *Revista Universidad EAFIT*. Vol., 44. No 150 (abr- jun. 2008); p.51-63.
- [19] GUPTA, Arjun K.; NADARAJAH, Saralees (ed.). *Handbook of beta distribution and its applications*. CRC Press, 2004.
- [20] H.C.S, Thom. A note on the Gamma Distribution Statistical Laboratory, Iowa State College, 1947 (Manuscript).
- [21] HAHN, Eugene David. Mixture densities for project management activity times: A robust approach to PERT. En: *European Journal of Operational Research*. Vol.,188, (Jul, 2008); P 450-459
- [22] KAO, John.H.K. Computer methods for estimating Weibull parameters in realibility studies. En: *Reliability and quality control*. vol.,13.(1958); p. 15-22.

- [23] KOTZ, Samuel; VAN DORP, J. René. A novel method for fitting unimodal continuous distributions on a bounded domain utilizing expert judgment estimates. En: IIE Transactions. Vol., 38, No 5 (2006); p. 421-436.
- [24] LAFUENTE LECHUGA, Matilde. La distribución gamma como modelo para analizar la distribución de la renta: Una aplicación a la E.P.F. 1990-91. En: Revista de Estudios Regionales. No 50 (1998); p. 161-168.
- [25] LANTADA ZARZOSA, María Nieves. Evaluación del riesgo sísmico mediante métodos avanzados y técnicas GIS. Aplicación a la ciudad de Barcelona. Barcelona, 2007, 1-303p. Tesis (Doctora). Universidad Politécnica de Cataluña. Departamento de Ingeniería del Terreno, Cartografía y Geofísica.
- [26] LAWLESS, Jerald. Statistical Models and Methods for Lifetime Data. En: John Wiley and Sons. New York:(1982).
- [27] LÓPEZ MARTÍN, María del Mar. Generación de distribuciones aplicables en ambiente de incertidumbre y en el ámbito financiero. Granada, 2010, 1-32p. Memoria de Tesis (Doctora). Universidad de Granada. Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa.
- [28] MAJONE, U, y Tomirotti, M. A trans national regional frequency analysis of peak flood flows. En: Revista L'A CQUA.PP. p. 9-17
- [29] MARCUS, Alan; SHAKED, Israel. The relationship between accounting measures and prospective probabilities of insolvency: An application to the banking industry. En: Financial Review. Vol., 19. No 1 (1984); p. 67-83.
- [30] MENDOZA, Romina. Análisis comparativo de las precipitaciones y su agresividad climática en zonas áridas secas y semiáridas frías. Chile, 2011. Memoria de grado (Ingeniero forestal). Uniiversidad de Talca. Facultad de ciencias forestales. Talca.
- [31] MOSQUERA, JD., MOSQUERA, JC y ARTAMÓNA, I. Indicadores de capacidad aplicados a la deserción en las universidades colombianas. En: Ciencia e Ingenieria Neogranadina. vol.,21-2. (2011); p. 183-203.
- [32] MUÑOZ, Fabián. Distribuciones Poisson y Gamma: Una Discreta y Continua. En: Prospectiva, vol., 12, no 1(2014); p. 99-107.
- [33] NÁVAR, José. Estimaciones empíricas de parámetros de la distribución Weibull en bosques nativos del norte de México. En: Revista forestal latinoamericana. vol.,24.(2009); p. 51-68.

- [34] PAPOULIS, Athanasios, y PILLAI, Unnikrishna. Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. 4ta edición. New York, 2002.
- [35] REISS, R-D , THOMAS, M. Statistical Analysis of Extreme Values With Applications to Insurance, Finance, Hidrology and Other Fields. Third Edition. Birkhauser Verlag.(2007) ISBN: 978-3764372309
- [36] RICO CASTRO, Nuria. Aportaciones al estudio del proceso de difusión lognormal: Bandas de confianza aproximadas y generalizadas. Estudio del caso polinómico. Granada, 2005, 49-74p. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Departamento de Estadística.
- [37] ROMERO, Carlos. Técnicas de programación y control de proyectos. Ediciones Pirámide, 1997.
- [38] SANABRIA, Giovanni. Comprendiendo la estadística inferencial: Distribución muestral y el teorema central de límite. México, 2007. p. 16-17.
- [39] SMITH, Richard, y WEISSMAN, Ishay. Maximum likelihood estimation of the lower tail of a probability distribution. En: Royal Statistical Society. vol.,47.(1985); p.285-298.
- [40] VANCLAY, K.V. Modeling forest growth and yield: Aplicaciones to mixed tropical forests. Wallingford, p. 312.
- [41] VARGAS N, José, y MONTAÑO, Tysua. Carta de control $CEV\bar{X}$ para distribuciones Weibull con datos censurados. En: Revista colombiana de estadística. vol.,28.(Dic. 2005); p.125-139.
- [42] VARGAS, Antonio. Estadística descriptiva e inferencial: Distribución normal. 2ed. España, 1995. p. 273-275.
- [43] VEGAS LOZANO, Esteban. Optimización en estudios de Monte Carlo en Estadística: Aplicaciones al contraste hipótesis. Barcelona, 1996, 165-177p. Tesis (Doctor en Biología). Universidad de Barcelona. Facultad de Biología. Departamento de Estadística.
- [44] VÉLEZ, Victoria, QUINTERO, Wilson, y DELGADO, Juan. Implementación del modelo MG para Antioquia y el eje cafetero. En: Avances en recursos hidraulicos. Número 14(oct. 2006). p.87-97.
- [45] VERGARA REA, Edgar Jesús. Análisis de confiabilidad, disponibilidad y mantenibilidad del sistema de crudo diluido Petrozuata. Caracas, 2007, 1-53p. Trabajo especial de grado (Especialista en Confiabilidad de Sistemas Industriales). Universidad Simón Bolívar. Decanato de Estudios de Posgrados.

- [46] WALPOLE, Ronald E. Probabilidad y Estadística para Ingenieros. Sexta edición. México. Prentice Hall, 1999. 752p.
- [47] YAÑEZ, M., GÓMEZ, H. y VALBUENA, G. Ingeniería de Confiabilidad y Análisis Probabilístico de Riesgo. Reliability and Risk Management, S.A. Venezuela. (2004).

Capítulo 5

ANEXOS

Programas en R

Función de densidad Normal

```
f=function(x){(1/((2*pi(sigma^2))^(0.5)))exp(-((x-mu)^2/(2*sigma^2)))}
mu=0
sigma=sqrt(0.2)
plot(f, ylim=c(0,1), xlim=c(-5, 5), las=T, ylab="", xlab="",
cex.axis=0.85, cex.lab=0.85, col=2)
text(4,1, expression(mu), col=2)
text(4.2,1,"=0" , col=2, cex=0.85)
text(4.5,1, expression(sigma), col=2)
text(4.9,1, "=0.44", col=2, cex=0.85)
x=seq(-5,5,by=0.1)
sigma=1
lines(x, f(x), col=3)
text(4,0.95, expression(mu), col=3)
text(4.2,0.95,"=0" , col=3, cex=0.85)
text(4.5,0.95, expression(sigma), col=3)
text(4.9,0.95, "=1", col=3, cex=0.85)
sigma=sqrt(5)
lines(x, f(x), col=4)
text(4,0.90, expression(mu), col=4)
```

```

text(4.2,0.90,"=0" , col=4, cex=0.85)
text(4.5,0.90, expression(sigma), col=4)
text(4.9,0.90, "=2.23", col=4, cex=0.85)
sigma=sqrt(0.5)
mu=-2
lines(x, f(x), col=6)
text(4,0.85, expression(mu), col=6)
text(4.2,0.85,"=0" , col=6, cex= 0.85)
text(4.5,0.85, expression(sigma), col=6)
text(4.9,0.85, "=0.70", col=6, cex=0.85)

```

Función de distribución Normal

```

x.norm=rnorm(10000, 0, sqrt(0.2))
plot(ecdf(x.norm), xlim=c(-5,5), ylim=c(0,1), las=T,
cex.axis=0.85, main="", ylab="", xlab="", col=2)
text(2, 0.4, expression(mu), col=2)
text(2.3, 0.4, "=0", col=2)
text(3, 0.4, expression(sigma), col=2)
text(3.5, 0.4, "=0.44", col=2)
x.norm=rnorm(10000, 0, sqrt(1))
lines(ecdf(x.norm), col=3)
text(2, 0.35, expression(mu), col=3)
text(2.3, 0.35, "=0", col=3)
text(3, 0.35, expression(sigma), col=3)
text(3.5, 0.35, "=1", col=3)
x.norm=rnorm(10000, 0, sqrt(5))
lines(ecdf(x.norm), col=4)
text(2, 0.30, expression(mu), col=4)
text(2.3, 0.30, "=0", col=4)
text(3, 0.30, expression(sigma), col=4)
text(3.5, 0.30, "=2.23", col=4)
x.norm=rnorm(10000, -2, sqrt(0.5))
lines(ecdf(x.norm), col=6)
text(2, 0.25, expression(mu), col=6)

```

```

text(2.3, 0.25, "--2", col=6)
text(3, 0.25, expression(sigma), col=6)
text(3.5, 0.25, "=0.70", col=6)

```

Función de densidad de Gumbel

```

f=function(x){ ( m*(x^(m-1)) /sigma )*exp(-(x^m)*sigma)}
x=seq(0,2.5, by=0.001)
m=0.5
sigma=1
plot(f, xlim=c(0,2.5), ylim=c(0,2.5), las=T, xlab="", ylab="",
cex=0.75, cex.axis=0.75, cex.lab=0.75, main="", col=4)
text(2,2.5, expression(lambda), col=4)
text(2.05,2.5,"=1" , col=4, cex=0.85)
text(2.3,2.5, "k=0.5", col=4, cex=0.85)
m=1
lines(x, f(x), col=2)
text(2,2.4, expression(lambda), col=2)
text(2.05,2.4,"=1" , col=2, cex=0.85)
text(2.3,2.4, "k=0.5", col=2, cex=0.85)
m=1.5
lines(x, f(x), col=6)
text(2,2.3, expression(lambda), col=6)
text(2.05,2.3,"=1" , col=6, cex=0.85)
text(2.3,2.3, "k=1.5", col=6, cex=0.85)
m=5
lines(x, f(x), col=3)
text(2,2.2, expression(lambda), col=3)
text(2.05,2.2,"=1" , col=3, cex=0.85)
text(2.3,2.2, "k=5", col=3, cex=0.85)

```

Función de distribución de Gumbel

```

f=function(x){1-exp(-(x/lambda)^k)}
x=seq(0,2.5, by=0.001)
lambda=1

```

```

k=0.5
plot(f, col=4, ylim=c(0,1), xlim=c(0,2.5), las=T,
cex.axis=0.85, cex.lab=0.85, xlab="", ylab="")
text(1.5, 0.4, expression(lambda), col=4)
text(1.6, 0.4, "=1", col=4)
text(1.8,0.4, "K=0.5", col=4)
k=1
lambda=1
lines(x, f(x), col=2)
text(1.5, 0.3, expression(lambda), col=2)
text(1.6, 0.3, "=1", col=2)
text(1.8,0.3, "K=1", col=2)
k=1.5
lambda=1
lines(x, f(x), col=6)
text(1.5, 0.2, expression(lambda), col=6)
text(1.6, 0.2, "=1", col=6)
text(1.8,0.2, "K=1.5", col=6)
k=5
lambda=1
lines(x, f(x), col=3)
text(1.5, 0.1, expression(lambda), col=3)
text(1.6, 0.1, "=1", col=3)
text(1.8,0.1, "K=1", col=3)

```

Función de densidad de Weibull

```

f=function(x){ ( m*(x^(m-1)) /sigma )*exp(-(x^m)*sigma)}
x=seq(0,2.5, by=0.001)
m=0.5
sigma=1
plot(f, xlim=c(0,2.5), ylim=c(0,2.5), las=T, xlab="", ylab="",
cex=0.75, cex.axis=0.75, cex.lab=0.75, main="", col=4)
text(2,2.5, expression(lambda), col=4)
text(2.05,2.5,"=1" , col=4, cex=0.85)

```

```

text(2.3,2.5, "k=0.5", col=4, cex=0.85)
m=1
lines(x, f(x), col=2)
text(2,2.4, expression(lambda), col=2)
text(2.05,2.4,"=1" , col=2, cex=0.85)
text(2.3,2.4, "k=0.5", col=2, cex=0.85)
m=1.5
lines(x, f(x), col=6)
text(2,2.3, expression(lambda), col=6)
text(2.05,2.3,"=1" , col=6, cex=0.85)
text(2.3,2.3, "k=1.5", col=6, cex=0.85)
m=5
lines(x, f(x), col=3)
text(2,2.2, expression(lambda), col=3)
text(2.05,2.2,"=1" , col=3, cex=0.85)
text(2.3,2.2, "k=5", col=3, cex=0.85)

```

Función de distribución de Weibull

```

f=function(x){1-exp(-(x/lambda)^k)}
x=seq(0,2.5, by=0.001)
lambda=1
k=0.5
plot(f, col=4, ylim=c(0,1), xlim=c(0,2.5), las=T,
cex.axis=0.85, cex.lab=0.85, xlab="", ylab="")
text(1.5, 0.4, expression(lambda), col=4)
text(1.6, 0.4, "=1", col=4)
text(1.8,0.4, "K=0.5", col=4)
k=1
lambda=1
lines(x, f(x), col=2)
text(1.5, 0.3, expression(lambda), col=2)
text(1.6, 0.3, "=1", col=2)
text(1.8,0.3, "K=1", col=2)
k=1.5

```

```

lambda=1
lines(x, f(x), col=6)
text(1.5, 0.2, expression(lambda), col=6)
text(1.6, 0.2, "=1", col=6)
text(1.8,0.2, "K=1.5", col=6)
k=5
lambda=1
lines(x, f(x), col=3)
text(1.5, 0.1, expression(lambda), col=3)
text(1.6, 0.1, "=1", col=3)
text(1.8,0.1, "K=1", col=3)

```

Función de densidad de F

```

f=function(x){(gamma( (d1+d2)/2)/(x*gamma(d1/2)*gamma(d2/2)))*
((d1*x)/(d1*x+d2))^(d1/2)* (1-((d1*x)/(d1*x+d2)))^(d2/2)}
x=seq(0,5, by=0.01)
d1=1
d2=1
plot(f, ylim=c(0,2),las=T, xlim=c(0,5), col=1, ylab="",
xlab="", cex.axis=0.85, cex.axis=0.85)
text(4,2,"d1=1", col=1, cex=0.85)
text(4.5, 2, "d2=1", col=1, cex=0.85)
d1=2
d2=1
lines(x, f(x), col=4)
text(4,1.9,"d1=2", col=4, cex=0.85)
text(4.5, 1.9, "d2=1", col=4, cex=0.85)
d1=5
d2=2
lines(x, f(x), col=3)
text(4,1.8,"d1=5", col=3, cex=0.85)
text(4.5, 1.8, "d2=2", col=3, cex=0.85)
d1=100
d2=1

```

```

lines(x, f(x), col=2)
text(4,1.7,"d1=100", col=2, cex=0.85)
text(4.5, 1.7, "d2=1", col=2, cex=0.85)
d1=100
d2=100
lines(x, f(x), col=6)
text(4,1.6,"d1=100", col=6, cex=0.85)
text(4.5, 1.6, "d2=100", col=6, cex=0.85)

```

Función de distribución de F

```

x.rf=rf(10000, 1, 1)
plot(ecdf(x.rf), xlim=c(0,5), ylim=c(0,1), las=T,
cex.axis=0.85, main="", ylab="", xlab="", col=1)
text(4, 0.4, "df1=1", col=1)
text(4.5, 0.4, "df2=1", col=1)
x.rf=rf(10000, 2, 1)
lines(ecdf(x.rf), col=4)
text(4, 0.35, "df1=2", col=4)
text(4.5, 0.35, "df2=1", col=4)
x.rf=rf(10000, 5, 2)
lines(ecdf(x.rf), col=3)
text(4, 0.30, "df1=5", col=3)
text(4.5, 0.30, "df2=2", col=3)
x.rf=rf(10000, 100, 1)
lines(ecdf(x.rf), col=2)
text(4, 0.25, "df1=100", col=2)
text(4.5, 0.25, "df2=1", col=2)
x.rf=rf(10000, 100, 100)
lines(ecdf(x.rf), col=4)
text(4, 0.20, "df1=100", col=4)
text(4.7, 0.20, "df2=100", col=4)

```

Función de densidad Log-normal

```

f=function(x){(1/(sigma*x*sqrt(2*pi)))*exp(-((log(x)-mu)^2)/

```

```

(2*(sigma^2)) )}
x=seq(0,3, by=0.01)
mu=0
sigma=0.25
plot(f, ylim=c(0,2), xlim=c(0,3), col=2, las=T, cex.axis=0.75,
cex.lab=0.85, cex=0.75, main="", ylab="", xlab="")
text(2.5,2, expression(mu), col=2)
text(2.6,2,"=0" , col=2, cex=0.85)
text(2.7,2, expression(sigma), col=2)
text(2.85,2, "=0.25", col=2, cex=0.85)
sigma=0.5
lines(x, f(x), col=3)
text(2.5,1.9, expression(mu), col=3)
text(2.6,1.9,"=0" , col=3, cex=0.85)
text(2.7,1.9, expression(sigma), col=3)
text(2.85,1.9, "=0.5", col=3, cex=0.85)
sigma=1
lines(x, f(x), col=4)
text(2.5,1.8, expression(mu), col=4)
text(2.6,1.8,"=0" , col=4, cex=0.85)
text(2.7,1.8, expression(sigma), col=4)
text(2.85,1.8, "=1", col=4, cex=0.85)

```

Función de distribución Log-normal

```

x.rlnorm=rlnorm(10000, 0, 1.5)
lines(ecdf(x.rlnorm), col=3)
text(0.2, 0.85, expression(mu), col=3)
text(0.3, 0.85, "=0", col=3)
text(0.5, 0.85, expression(sigma), col=3)
text(0.6, 0.85, "=1.5", col=3)
x.rlnorm=rlnorm(10000, 0, 1)
lines(ecdf(x.rlnorm), col=4)
text(0.2, 0.80, expression(mu), col=4)
text(0.3, 0.80, "=0", col=4)

```

```

text(0.5, 0.80, expression(sigma), col=4)
text(0.6, 0.80, "=1", col=4)
x.rlnorm=rlnorm(10000, 0, 0.5)
lines(ecdf(x.rlnorm), col=6)
text(0.2, 0.75, expression(mu), col=6)
text(0.3, 0.75, "=0", col=6)
text(0.5, 0.75, expression(sigma), col=6)
text(0.6, 0.75, "=0.5", col=6)
x.rlnorm=rlnorm(10000, 0, 0.25)
lines(ecdf(x.rlnorm), col=1)
text(0.2, 0.70, expression(mu), col=1)
text(0.3, 0.70, "=0", col=1)
text(0.5, 0.70, expression(sigma), col=1)
text(0.7, 0.70, "=0.25", col=1)
x.rlnorm=rlnorm(10000, 0, 0.125)
lines(ecdf(x.rlnorm), col=5)
text(0.2, 0.65, expression(mu), col=5)
text(0.3, 0.65, "=0", col=5)
text(0.5, 0.65, expression(sigma), col=5)
text(0.7, 0.65, "=0.125", col=5)

```

Función de densidad de Beta

```

f=function(x){ (gamma(a+b)/ (gamma(a)*gamma(b)) ) *x^(a-1)*
(1-x)^(b-1)}
x=seq(0,1, by=0.001)
a=0.5
b=0.5
plot(f, xlim=c(0,1), ylim=c(0,2.6), col=2, las=T,
cex.axis=0.85, cex.lab=0.85, xlab="", ylab="")
text(0.6, 2.5, expression(alpha), col=2)
text(0.65, 2.5, "=0.5", col=2, cex=0.85)
text(0.7, 2.5, expression(beta), col=2)
text(0.75, 2.5, "=0.5", col=2, cex=0.85)
a=5

```

```

b=1
lines(x, f(x), col=3)
text(0.6, 2.4, expression(alpha), col=3)
text(0.65, 2.4, "=5", col=3, cex=0.85)
text(0.7, 2.4, expression(beta), col=3)
text(0.75, 2.4, "=1", col=3, cex=0.85)
a=1
b=3
lines(x, f(x), col=4)
text(0.6, 2.3, expression(alpha), col=4)
text(0.65, 2.3, "=1", col=4, cex=0.85)
text(0.7, 2.3, expression(beta), col=4)
text(0.75, 2.3, "=3", col=4, cex=0.85)
a=2
b=2
lines(x, f(x), col=6)
text(0.6, 2.2, expression(alpha), col=6)
text(0.65, 2.2, "=2", col=6, cex=0.85)
text(0.7, 2.2, expression(beta), col=6)
text(0.75, 2.2, "=2", col=6, cex=0.85)
a=2
b=5
lines(x, f(x), col=1)
text(0.6, 2.1, expression(alpha), col=1)
text(0.65, 2.1, "=2", col=1, cex=0.85)
text(0.7, 2.1, expression(beta), col=1)
text(0.75, 2.1, "=5", col=1, cex=0.85)

```

Función de distribución Beta

```

x.rbeta=rbeta(10000, 0.5, 0.5)
plot(ecdf(x.rbeta), xlim=c(0,1), ylim=c(0,1), las=T,
cex.axis=0.85, main="", ylab="", xlab="", col=2)
text(0, 0.9, expression(alpha), col=2)
text(0.05, 0.9, "=0.5", col=2)

```

```

text(0.1, 0.9, expression(beta), col=2)
text(0.15 , 0.9, "=0.5", col=2)
x.rbeta=rbeta(10000, 5, 1)
lines(ecdf(x.rbeta), col=3)
text(0, 0.85, expression(alpha), col=3)
text(0.05 , 0.85, "=5", col=3)
text(0.1, 0.85, expression(beta), col=3)
text(0.15 , 0.85, "=1", col=3)
x.rbeta=rbeta(10000, 1, 3)
lines(ecdf(x.rbeta), col=4)
text(0, 0.8, expression(alpha), col=4)
text(0.05 , 0.8, "=1", col=4)
text(0.1, 0.8, expression(beta), col=4)
text(0.15 , 0.8, "=3", col=4)
x.rbeta=rbeta(10000, 2, 2)
lines(ecdf(x.rbeta), col=6)
text(0, 0.75, expression(alpha), col=6)
text(0.05 , 0.75, "=2", col=6)
text(0.1, 0.75, expression(beta), col=6)
text(0.15 , 0.75, "=2", col=6)
x.rbeta=rbeta(10000, 2, 5)
lines(ecdf(x.rbeta), col=1)
text(0, 0.70, expression(alpha), col=1)
text(0.05 , 0.70, "=2", col=1)
text(0.1, 0.70, expression(beta), col=1)
text(0.15 , 0.70, "=5", col=1)

```

Función de densidad Gamma

```

f=function(x){(lambda*exp(-lambda*x))* (lambda*x)^(k-1)/
gamma(k)}
x=seq(0,20, by=0.01)
k=1
lambda=0.5
plot(f, xlim=c(0,20), ylim=c(0,0.5), col=2, cex=0.75, ylab="",

```

```

xlab="", cex.lab=0.75, cex.axis=0.75, las=T)
text(16,0.5, "k=1", col=2, cex=0.85)
text(17, 0.5, expression(theta), col=2, cex=0.85)
text(17.5, 0.5, "=2", col=2,cex=0.85)
k=2
lambda=0.5
lines(x, f(x), col=3)
text(16,0.48, "k=2", col=3, cex=0.85)
text(17, 0.48, expression(theta), col=3, cex=0.85)
text(17.5, 0.48, "=2", col=3,cex=0.85)
k=3
lambda=0.5
lines(x, f(x), col=4)
text(16,0.46, "k=3", col=4, cex=0.85)
text(17, 0.46, expression(theta), col=4, cex=0.85)
text(17.5, 0.46, "=2", col=4,cex=0.85)
k=5
lambda=1
lines(x, f(x), col=6)
text(16,0.44, "k=5", col=6, cex=0.85)
text(17, 0.44, expression(theta), col=6, cex=0.85)
text(17.5, 0.44, "=1", col=6,cex=0.85)
k=9
lambda=2
lines(x, f(x), col=1)
text(16,0.42, "k=9", col=1, cex=0.85)
text(17, 0.42, expression(theta), col=1, cex=0.85)
text(17.7, 0.42, "=0.5", col=1,cex=0.85)

```

Función de distribución Gamma

```

x.rgamma=rgamma(10000, 1, 0.5)
plot(ecdf(x.rgamma), xlim=c(0,20), ylim=c(0,1), las=T,
cex.axis=0.85, main="", ylab="", xlab="", col=2)
text(10, 0.4, "k=1", col=2)

```

```

text(11, 0.4, expression(lambda), col=2)
text(11.5, 0.4, "=2", col=2)
x.rgamma=rgamma(10000, 7.5, 1)
lines(ecdf(x.rgamma), col=6)
text(10, 0.35, "k=7.5", col=6)
text(11, 0.35, expression(lambda), col=6)
text(11.5, 0.35, "=1", col=6)
x.rgamma=rgamma(10000, 5, 1)
lines(ecdf(x.rgamma), col=3)
text(10, 0.30, "k=5", col=3)
text(11, 0.30, expression(lambda), col=3)
text(11.5, 0.30, "=1", col=3)
x.rgamma=rgamma(10000, 9, 2)
lines(ecdf(x.rgamma), col=1)
text(10, 0.25, "k=9", col=1)
text(11, 0.25, expression(lambda), col=1)
text(11.5, 0.25, "=2", col=1)

```

Función de densidad, distribución Exponencial

```

f=function(x){lambda*exp(-lambda*x)}
x=seq(0,20, by=0.01)
lambda=0.5
plot(f, xlim=c(0,5), ylim=c(0,1.6), col=2, cex=0.75, ylab="",
xlab="", cex.lab=0.75, cex.axis=0.75, las=T)
text(4, 1.5, expression(lambda), col=2, cex=0.85)
text(4.2, 1.5, "=0.5", col=2,cex=0.85)
lambda=1
lines(x, f(x), col=3)
text(4, 1.45, expression(lambda), col=3, cex=0.85)
text(4.2, 1.45, "=1", col=3,cex=0.85)
lambda=1.5
lines(x, f(x), col=4)
text(4, 1.40, expression(lambda), col=4, cex=0.85)
text(4.2, 1.40, "=1.5", col=4,cex=0.85)

```

Función de distribución de la exponencial

```
f=function(x){1-exp(-lambda*x)}
x=seq(0, 5, by=0.01)
lambda=0.5
plot(f, col=2, ylim=c(0,1), xlim=c(0,5), cex.axis=0.85,
las=T, ylab="", xlab="")
text(4, 0.4, expression(lambda), col=2)
text(4.2, 0.4, "=0.5", col=2)
lambda=1
lines(x, f(x), col=1)
text(4, 0.3, expression(lambda), col=1)
text(4.2, 0.3, "=1", col=1)
lambda=1.5
lines(x, f(x), col=3)
text(4, 0.2, expression(lambda), col=3)
text(4.2, 0.2, "=1.5", col=3)
```