

COLAPSO LENTO DE CONFIGURACIONES ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICAS, NO-LOCALES Y  
ANISÓTROPAS EN RELATIVIDAD GENERAL

LAURA MARCELA BECERRA BAYONA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2013

COLAPSO LENTO DE CONFIGURACIONES ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICAS, NO-LOCALES Y  
ANISÓTROPAS EN RELATIVIDAD GENERAL

LAURA MARCELA BECERRA BAYONA

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE:  
FÍSICO

DIRIGIDO POR  
DR. LUIS ALBERTO NÚÑEZ DE VILLAVICENCIO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2013

*“Hemos averiguado que vivimos en un insignificante planeta de una triste estrella perdida en una galaxia metida en una esquina olvidada de un universo en el que hay muchas mas galaxias que personas.”*

Carl Sagan.

*“La ciencia no es sino una perversión de sí misma a menos que tenga como objetivo final el mejoramiento de la humanidad.”*

Nicolas Tesla

*“Vivimos en una sociedad profundamente dependiente de la ciencia y la tecnología y en la que nadie sabe nada de estos temas. Ello constituye una fórmula segura para el desastre. ”*

Carl Sagan

# *Agradecimientos*

---

A mi madre y mi padre, quienes en la mayoría de los momentos han apoyado mis actitudes y decisiones durante mi formación y a pesar de las diferentes discrepancias siempre me han acompañando.

A mi director de tesis, por su guía durante la realización de este trabajo.

A mi hermana, amigos y amigas. A mis compañeros y compañeras con quienes compartí distintos momentos de análisis, debate y discusión y que en cada momento aportaron al constante proceso de aprendizaje en mi formación integral.

A las personas que vieron la necesidad de crear espacios alternativos como los centro de estudios, lugares propicios para fortalecer un ambiente crítico, científico y social dentro de la vida académica.

Al Juano y finalmente, a Cronos, simplemente por que es "bonito y le sale natural".

# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>15</b>
<b>2. Colapso Gravitacional en Relatividad General</b>	<b>19</b>
2.1. Planteamiento del problema y caracterización del sistema físico . . . . .	19
2.2. Aproximación de colapso lento . . . . .	25
2.3. Ecuación de estado no local . . . . .	26
2.4. Condiciones de aceptabilidad física . . . . .	29
<b>3. Colapso lento y adiabático de configuraciones esféricas, anisótropas y no locales</b>	<b>31</b>
3.1. Solución de las Ecuaciones de Campo de Einstein: perfiles de densidad . . . . .	31
3.2. Modelando configuraciones no locales colapsando lenta y adiabáticamente . . . . .	33
<b>4. Colapso lento con ecuación de estado no local: caso no adiabático</b>	<b>41</b>
4.1. Solución de la ecuaciones de campo de Einstein . . . . .	41
4.2. Modelando: resultados y conclusiones . . . . .	43
<b>5. ¿Qué aporta la ecuación de estado no local?</b>	<b>55</b>
5.1. Ecuaciones de Einstein sin la ecuación de estado no local . . . . .	55
5.2. Modelando sin la ecuación de estado no local . . . . .	56
<b>6. Conducción térmica en sistemas con ecuación de estado no local</b>	<b>63</b>

Índice general	8
6.1. Antecedentes . . . . .	63
6.2. Teorías termodinámicas de segundo orden en la aproximación de colapso lento: ecuación de Israel-Stewart y ecuación de Cattaneo-Vernotte . . . . .	65
6.3. Discusión de resultados: evolución de la distribución de temperatura durante el colapso gravitacional lento: . . . . .	68
<b>7. Conclusiones</b>	<b>71</b>
<b>Anexos</b>	<b>78</b>

# Índice de figuras

---

1.1. Estructura radial de una estrella de neutrones . . . . .	15
3.1. Evolución del radio externo de la configuración supuesta para el caso adiabático	34
3.2. Perfiles de densidad en función de la variable normalizada $x = \frac{r}{R(t)}$ correspondiente al colapso lento adiabático y no local. . . . .	35
3.3. Evolución de las funciones de estado que describen el colapso lento, no local y adiabático para diferentes configuraciones de materia caracterizadas por los perfiles de densidad de Florides, Stewart, Buchdahl, Wyman y Tolman IV. . . . .	37
3.4. Caso adiabático: condición de energía dominante . . . . .	38
4.1. Flujo de calor para diferentes tiempos $\tilde{t}$ . . . . .	44
4.2. Caso I. Evolución del radio para una estrella que obedece la ecuación de estado no local y emite energía a una razón constante . . . . .	45
4.3. Caso II: Evolución en el tiempo del radio de una estrella que obedece la ecuación de estado no local y emite radiación en forma de un pulso de Gauss. . . . .	47
4.4. Caso I. Caracterización del comportamiento de la velocidad del fluido $\omega$ para una configuración que obedece la EENL y emite radiación a una razón constante	49
4.5. Caso II.A. Caracterización del comportamiento de la velocidad del fluido $\omega$ para una configuración que obedece la EENL y emite en forma de un pulso gaussiano: efecto de la masa inicial de la configuración . . . . .	50
4.6. Caso II.B. Caracterización del comportamiento de la velocidad del fluido $\omega$ para una configuración que obedece la EENL y emite en forma de un pulso gaussiano: efecto de la fase de la luminosidad . . . . .	51
4.7. Valores críticos asociados al thermal peeling suponiendo un perfil de luminosidad gaussiano . . . . .	52

---

4.8. Comportamiento de las funciones de estado que caracterizan la evolución lenta de la configuración de materia que obedece una EENL. . . . .	54
5.1. Perfil de la presión radial en función de la variable normalizada $x = r/R(t)$ , para diferentes grados de anisotropía en el colapso lento adiabático . . . . .	57
5.2. Comparación entre el comportamiento local y no local de las variables físicas que describen la evolución lenta y adiabática de configuraciones compactas. . . . .	58
5.3. Caso radiante: perfil de luminosidad y evolución de la masa total y el radio externo de la configuración. . . . .	59
5.4. Comportamiento de la velocidad del fluido, $\omega$ , para una configuración de materia que obedece una ecuación para la anisotropía y comparación con su contraparte no local . . . . .	61
5.5. Comparación entre el comportamiento local y no local de las variables físicas que describen la evolución lenta de configuraciones compactas. . . . .	62
6.1. Perfil de temperatura para configuraciones no locales calculado a partir de la integración de la ecuación de Cattaneo . . . . .	68
1. Perfil de densidad de Stewart: . . . . .	81
2. Condiciones de energía para los diferentes escenarios de colapso lento de configuraciones no locales . . . . .	90

# Índice de cuadros

---

3.1. Modelos no locales: dependencia radial de las variables físicas que se derivan a través de las ecuaciones de campo de Einstein, al suponer perfiles de densidad $\rho(r, t)$ particulares. . . . .	39
4.1. Parámetros que caracterizan la evolución de la masa total y radio de las estrella cuando emite energía con una razón constante . . . . .	45
4.2. Parámetros que caracterizan la evolución de la masa total y radio externo de la distribución de materia cuando emite energía en forma de un pulso de Gauss . . . . .	46
4.3. Valores de $x = r/R(t)$ en los que la velocidad de fluido $\omega$ se anula en el caso en que la velocidad de la configuración es constante . . . . .	48
4.4. Valores de $x = r/R(t)$ para lo que la velocidad del fluido $\omega$ se anula al suponer un pulso de gaussiano para la luminosidad . . . . .	52
5.1. Caso adiabático: comparación entre los modelos que obedecen una EENL y los modelos que obedecen una ecuación para la anisotropía de los valores centrales de la densidad de energía ( $\rho_c$ ) y presión radial ( $P_{r_c}$ ) y el valor superficial de la presión tangencial ( $P_{\perp\Sigma}$ ) . . . . .	59
5.2. Caso no adiabático: comparación entre los modelos que obedecen una EENL y los modelos que obedecen una ecuación para la anisotropía de los valores centrales de la densidad de energía ( $\rho_c$ ) y presión radial ( $P_{r_c}$ ) y el valor superficial de la presión tangencial ( $P_{\perp\Sigma}$ ) . . . . .	60

# *Índice de anexos*

---

A. Condiciones de acoplamiento	79
B. Colapso lento y adiabático con ecuación de estado no local	80
C. Colapso lento no adiabático con ecuación de estado no local	85
D. Condiciones de Energía: Colapso lento no adiabático (no local)	89
E. Colapso lento radiante con ecuación para la anisotropía	91

# Resumen

---

**Título:** Colapso lento de configuraciones esféricamente simétricas, no-locales y anisótropas en Relatividad General<sup>1</sup>

**Autor:** Laura Marcela Becerra Bayona<sup>2</sup>

**Palabras claves:** Objetos Compactos, Relatividad General, Ecuaciones de estado de la materia

En el presente trabajo se estudiará el colapso gravitacional disipativo de configuraciones ultradensas, simétricamente esféricas y anisótropas al introducir una ecuación de estado no local, en la aproximación de colapso lento. En este tipo particular de ecuaciones, una de las componentes del tensor momento energía ( $T_0^0$  o  $T_1^1$ ), para un determinado instante de tiempo, no es solo función de la otra ( $T_1^1$  o  $T_0^0$ ) sino también de su funcional a lo largo del resto de la configuración.

Se demuestra la viabilidad de usar este tipo de ecuaciones de estado en escenarios de colapso lento de esferas relativistas, a través de la construcción de modelos adiabáticos y radiantes. Para éstos últimos, cuando la mayor parte de la energía radiada proviene de las capas exteriores de la distribución, las configuraciones de materia exhiben cambios de signo en la velocidad con la que se mueve el fluido. Este efecto parece ser muy sensible a la masa inicial de la configuración y a la forma del perfil de luminosidad del objeto compacto.

Con el fin de identificar algunas de las contribuciones de la ecuación de estado no local a la dinámica de las configuraciones, también se han desarrollado modelos locales al suponer una relación para describir el comportamiento de la anisotropía del sistema. Por último, se incorporarán esquemas causales de propagación del calor, relacionándolos con la distribución de temperaturas a través de las teorías termodinámicas de segundo orden: ecuación de Cattaneo.

En conclusión, el objetivo principal será avanzar en la comprensión de escenarios de colapso gravitacional radiante y estudiar los esquemas térmicos que pueden estar presentes cuando el material responde a una ecuación de estado no local.

---

<sup>1</sup>Trabajo de grado

<sup>2</sup>Facultad de Ciencia. Escuela de Física. Director: Luis Núñez de Villavicencio Martínez

# Abstract

---

**Title:** Slow Collapse of Spherical Symmetry, Non-Local and Anisotropy Configuration in General Relativity.<sup>3</sup>

**Author:** Laura Marcela Becerra Bayona<sup>4</sup>

**Keys Words:** Compact Objects, General Relativity, Matter Equation of State, Slow Evolution.

In this work, we'll study the dissipative gravitational collapse of spherical symmetry and anisotropy ultradense configurations, introducing a non local equation of state, in the slow approximation. These particular types of equation of state describe, at a given point, the components of the corresponding energy-momentum tensor ( $T_0^0$  o  $T_1^1$ ) not only as a function at that point, but as a functional throughout the enclosed configuration. We'll consider exclusively the slow evolving systems.

We show the viability of use this type of state equation in slow collapse scenarios of relativistic spheres, through the construction of adiabatic and radiant models. For these last, when most of the radiated energy comes from the outer layers of the distribution, the matter configurations exhibit change of signs in the fluid velocity with which the fluid move. This effect seems to be very sensible of the initial mass of the configuration and the shape of the luminosity profile of the compact object.

With the goal of indentify some of the contribution of the no local equation of state in the dynamics of the configurations, we have also developed some local models assuming a relation that describes the anisotropy behavior of the system. Finally, we'll incorporate casual propagations of heat framework. They will realte with the temperature distribution through the second orden thermodynamics theories: the Cattneo equation.

In conclusion, the main goal of this work is to advance in the understanding of radiative gravitational collapse as well as to study the thermal outlines that can be present when the material behaves according to a non-local equation of state.

---

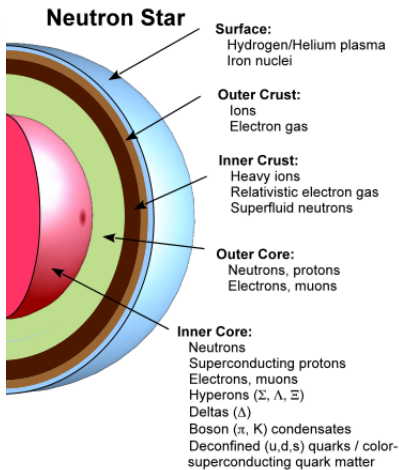
<sup>3</sup>Degree Project

<sup>4</sup>Facultad de Ciencia. Escuela de Física. Director: Luis Núñez de Villavicencio Martínez

# 1. Introducción

Uno de los objetos más exóticos del Universo son las estrellas de neutrones. En estos objetos se pueden encontrar densidades mayores que las nucleares ( $\rho_{core} \approx 2,8 \times 10^{14} g cm^{-3}$ ) y enormes energías de enlace gravitacional ( $\frac{GM^2}{R} \sim 10^{53} ergs$ ) [45]. Esto las hace laboratorios astrofísicos únicos para la exploración de las propiedades de la materia en densidades extremas.

La estructura radial de una estrella de neutrones se divide, comúnmente, en términos de la densidad de las diferentes regiones que la forma. Empezando en la frontera de la estrella y yendo hacia el interior, se puede diferenciar la superficie, la corteza y el núcleo (ver figura 1.1).



**Figura 1.1:** Estructura radial de una estrella de neutrones<sup>1</sup>

contiene la mayor masa de la estrella. La distinción del núcleo solo refleja la ignorancia que existe frente al estado de la materia en densidades extremas, y no implica que la materia sea físicamente diferente, aunque podría serlo [68].

LA SUPERFICIE consiste de materia normal en su estado fundamental. Sus propiedades térmicas, mecánicas y eléctricas son razonablemente conocidas. Ésta se define como la región con  $\rho < \rho_\beta \approx 10^7 g cm^{-3}$ , donde  $\rho_\beta$  es la densidad crítica para la neutronización. LA CORTEZA corresponde a la región con  $\rho_\beta < \rho < \rho_{core}$ . Tiene aproximadamente 1 Km de grosor y contiene solo un pequeño porcentaje de la masa total de la estrella. Ésta a su vez se divide en una corteza interna y en una corteza externa, las cuales se encuentran delimitadas por la densidad límite en la cual el núcleo comienza a desintegrarse ( $\rho_{drip}$ ). La ecuación de estado propuesta por Baym, Pethick y Sutherland, ecuación BPS [7], sugiere que esta densidad crítica ocurre aproximadamente en  $\rho_{drip} \approx 4 \times 10^{11} g cm^{-3}$ . Finalmente, EL NÚCLEO se puede dividir en el núcleo externo con una densidad menor que  $\sim 2\rho_{core}$  y el núcleo interno con densidades más altas, que

La ecuación de estado de la materia en la corteza ha sido calculada con una precisión razonable, y es suficientemente entendida para el propósito de construir modelos de estrellas de neutrones [68]. Por el contrario, existe un gran desconocimiento en torno a la estructura de la ecuación de estado del núcleo, más precisamente en torno a las propiedades que describe la materia en densidades mayores que  $2\rho_{core}$  [15, 21]. Esto se debe a la imposibilidad de verificar procesos microscópicos en densidades tan altas y, a la gran cantidad de fenómenos que deben considerarse (variedad de tipo de partículas, abundancia, interacciones y transiciones de fase).

<sup>1</sup>Imagen tomado de F. Weber, M. Orsaria, H. Rodrigues, S.H. Yang. *e-Print: arXiv:1210.1910*

De hecho, las evidencias experimentales que se tienen actualmente en este campo provienen básicamente de la extrapolación de datos obtenidos en los aceleradores de partículas, la física de altas energías y la física de los rayos cósmicos (ver [25] y allí citadas).

Otro aspecto interesante de las estrellas de neutrones, es que su formación es precedida por un período de colapso gravitacional radiativo. Las estrellas de neutrones nacen de las secuelas del colapso gravitacional del núcleo de estrellas masivas de aproximadamente  $8M_{\odot}$ . Cuando ésta llega al final de su vida, explota en una supernova tipo II y como resultado, una estrella de neutrones se forma con temperaturas internas del orden de  $\sim 10^{11}K$ . Después de su nacimiento, debido a las ondas de choque iniciales, el camino medio de los neutrinos, producidos en su interior, se vuelve más grande que el radio de la estrella de neutrones, y ésta empieza a enfriarse. El enfriamiento es realizado a través de dos canales: la emisión de neutrinos del cuerpo estelar entero y la emisión de calor desde las capas internas a la superficie, lo que resulta en la emisión térmica de fotones [40, 55, 68].

Una teoría física que se adecúa de manera formidable al estudio de objetos compactos es la teoría de la Relatividad General. De hecho, ésta no puede ser ignorada debido a los fuertes campos gravitacionales que se presentan. Además, como existe una gran incertidumbre sobre las propiedades de la materia ultradensa, resulta razonable tratar de hacer un estudio de la materia nuclear utilizando todas las herramientas disponibles a través de las leyes físicas y dentro del marco de la teoría de la Relatividad General. El presente trabajo tiene este objetivo y se centra en la introducción de una ecuación de estado no local para estudiar los posibles escenarios de colapso gravitacional relativista. Continuando con los trabajos previos realizados en [29] y [27], esta relación se propone para el límite estático de la forma:

$$P_r = \rho - \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 \rho \, d\bar{r}, \quad (1.1)$$

y de manera general de la forma:

$$P_r = \rho - \frac{2}{r^3} \int_0^r \left[ \frac{\rho + 2q\omega + P_r\omega^2}{1 - \omega^2} \right] d\bar{r}, \quad (1.2)$$

en donde  $P_r$  representa la presión en la dirección radial,  $\rho$  la densidad de energía,  $q$  el flujo de calor y  $\omega$  la velocidad radial con la que se mueve el fluido. En (1.1) y en (1.2) se identifica claramente un comportamiento colectivo de las funciones de estado que caracterizan el fluido: la presión no sólo es función de la densidad en un punto particular sino que también contribuye un término en forma de funcional que toma en cuenta el resto de la configuración. Este tipo de ecuaciones fue originalmente propuestas por D. G. Ravenhall y C. J. Pethick en 1994 [57], para la determinación del momento de inercia de una estrella de neutrones. Desde ese momento, se ha probado que son muy fructíferas en la descripción de una gran variedad de escenarios astrofísicos [1, 26–29, 51].

Por ejemplo, en el 2009, I Arraut, D. Batic y M. Nowakoski [4], dentro del formalismo de la geometría no-conmutativa, describieron un mini agujero negro, cuya singularidad central estándar fue reemplazada por una gota auto-gravitante anisótropa y no local. Recientemente, en [36] construyen ecuaciones de estado utilizando variables cuasi-locales, para describir fluidos

anisótopos en simetría esférica. Estas variables se definen como cantidades cuyo valor puede ser derivado a partir de la física accesible en una pequeña vecindad. Por último, en [37] se introduce la anisotropía como un funcional de la densidad de energía para estudiar la estabilidad radial en la presión en estrellas gravitacionales de vacío (gravastar).

En cuanto al uso de las ecuaciones (1.1) y (1.2) se puede decir que fueron originalmente propuesta por H.Hernández, L.A Núñez y U. Percoco en [29]. Ellos demostraron que, bajo circunstancias particulares, distribuciones de materia esféricamente simétricas, dinámicas y limitadas pueden satisfacer una ecuación de estado no local en Relatividad General. Así, continuando con su trabajo, los mismos autores, en [27], construyen configuraciones de materia estáticas, no locales y anisótopas a partir de perfiles de densidad conocidos. En [51], A.G Muñoz y L.A Núñez obtienen escenario físicamente aceptables para distribuciones de materia que poseen simultáneamente una métrica conformemente plana y una ecuación de estado no local. En el 2007, H.Abreu, H.Hernández y L.A Núñez en [1], discuten los efectos que tienen pequeñas fluctuaciones de la densidad y la anisotropía local sobre la aparición de fracturas en objetos compactos esféricos y no locales. Recientemente, en [28] se desarrolla un algoritmo para obtener soluciones a las ecuaciones de Einstein de configuraciones de materia esféricamente anisótopas con una ecuación de estado no local e investigan la plausibilidad de las mismas.

Siguiendo con la explotación de la ecuación de estado no local, particularmente en este trabajo se supondrán exclusivamente escenarios de colapso lento. Es decir, los cambios en el sistema toman lugar en una escala de tiempo muy grande comparada con la escala de tiempo hidrostático. Esto implica que el sistema evoluciona a través de estados de equilibrio hidrostático. De esta forma se estudiarán modelos en los que una configuración estelar esférica llega al colapso gravitacional radiativo disipando energía en forma de un flujo radial de calor al espacio-tiempo exterior. Lo anterior tiene como objetivo avanzar en la comprensión de escenarios de colapso gravitacional radiante y estudiar los esquemas térmicos que pueden estar presentes cuando el material responde a una ecuación de estado no local. Es importante señalar que existen una cantidad de efectos térmicos relativistas que no pueden ser obviados [34] y por ello hay que incorporar esquemas causales de propagación del calor a la descripción de los diferentes escenarios físicos a modelar.

Para caracterizar los escenarios de colapso gravitacional lento, que surgen al considerar efectos no locales a través de la ecuación (1.1), se tratará de dar respuesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Son físicamente plausibles los escenarios de colapso gravitacional lento y adiabático que se generan para configuraciones no locales?
2. ¿Cuál es el cambio en la dinámica de las configuraciones no locales cuando se incorpora el flujo de radiación?, específicamente, ¿ cómo influye la ecuación de estado no local en la aparición de efectos térmicos como el “*thermal peeling*”?
3. ¿Cuál es la contribución de la ecuación de estado no local al colapso gravitacional lento adiabático y radiante?
4. ¿Cómo es la evolución del perfil de temperatura para configuraciones no locales? ¿Cómo varían los perfiles de temperatura para el caso local y no local?

De esta manera, la estructura del trabajo es la siguiente: en el capítulo I se presentan los conceptos y ecuaciones básicas de la Relatividad General que serán utilizados. Buscando dar respuesta a la primera de las anteriores preguntas, en el capítulo II se resolverá las ecuaciones de Einstein que describen el colapso gravitacional adiabático. El método utilizado para tal fin, será tomar de la literatura varios perfiles de densidad que corresponden a una solución estática para las ecuaciones de Einstein, generalizando los mismos al caso dinámico [26–28, 51]. En el capítulo III, se tratará la segunda pregunta, por lo que se introducirá al análisis físico la disipación de energía por el objeto autogravitante. El sistema de ecuaciones de Einstein se resuelve introduciendo los mismo perfiles de densidad y estudiando la evolución de la variables físicas en la frontera de la configuración. De esta manera se analizarán varios escenarios de colapso gravitacional y se verificarán cuáles de ellos presentan efectos térmicos y bajo cuáles condiciones de flujo de calor. El capítulo IV se dedica a estudiar la contribución de la introducción de la ecuación de estado no local sobre la evolución del objeto autogravitante, buscando responder la tercera de las preguntas anteriores. La respuesta a la última pregunta se explorará en el capítulo V. Aquí se determinará el comportamiento térmico de los diferentes modelos estudiados hasta el momento. Para esto, se utilizará las conocidas teorías de segundo orden de disipación relativistas como la ecuación de Israel-Stewart [39] y su linealización, la ecuación de Cattaneo [12]. Finalmente en el capítulo VI se presenta las conclusiones y los resultados obtenidos. Luego siguen varios apéndices donde se presentan los cálculos en detalle. Esta organización puede facilitar la lectura del documento.

## 2. Colapso Gravitacional en Relatividad General

---

El colapso gravitacional relativista de estrellas masivas representa uno de los pocos fenómenos observables donde se espera que la Relatividad General juegue un rol importante. Las ecuaciones de Einstein, que forman la base de esta teoría, relacionan la geometría del espacio tiempo (tensor de Einstein,  $G_{\mu}^{\nu}$ ) con el contenido de materia y energía dentro de éste (tensor momento-energía,  $T_{\mu}^{\nu}$ ). Su naturaleza (un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no-lineal) convierte a la obtención de soluciones exactas en un problema matemático sorprendentemente complicado. Aún más, existen una gran variedad de situaciones en las cuales el objeto autogravitante evolucionará de una forma u otra, dependiendo de manera fundamental de la física local de la materia [31].

Desde los trabajos pioneros realizados por Oppenheimer y Snyder [54], el estudio del colapso gravitacional ha atraído la atención de los investigadores, planteándose diferentes métodos para solucionar las ecuaciones de campo gravitacional. Particularmente en nuestro caso, las ecuaciones de Einstein serán integradas dentro de la aproximación de colapso lento. La configuración de materia se supondrá esférica, anisótropa y disipativa, descrita por una ecuación de estado que obedece una relación no local.

A continuación se presentan las ecuaciones básicas de la Relatividad General que permiten el estudio de este tipo de escenario. Se empezará describiendo la situación general en la cual una distribución de materia esférica disipa energía. Así, se irá particularizando el problema imponiendo primero la aproximación de colapso lento e introduciendo luego la ecuación de estado no local. Al final del capítulo, se establecerán las condiciones necesarias para que los escenarios de colapso que se desean modelar sean físicamente viables.

### 2.1 Planteamiento del problema y caracterización del sistema físico

Para describir la evolución de configuraciones ultradensas se supondrá que el espacio-tiempo está constituido por una región interior en la que se encuentra un fluido no local, anisótropo y radiante; y una región exterior en la que sólo hay presencia de radiación nula de neutrinos o fotones ocasionada por el colapso de la configuración.

ESPACIO TIEMPO INTERIOR: el elemento de línea que describe el espacio-tiempo interior de una distribución de materia dinámica y esféricamente simétrica delimitada por una superficie  $\Sigma$ , se puede escribir, en coordenadas de curvatura como:

$$ds^2 = e^{2\nu(r,t)} dt^2 - e^{2\lambda(r,t)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\phi^2); \quad (2.1)$$

donde la numeración de coordenadas es:  $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, r, \theta, \phi)$ . Que el espacio sea esféricamente simétrico hace referencia a que un observador en el centro de la configuración percibe, en cualquier instante, la misma imagen física independiente de su orientación. Es decir, las coordenadas  $\theta$  y  $\phi$  son coordenadas cíclicas [8].

Adoptando el sistema de unidades geometrizadas ( $G = c = 1$ ), las ecuaciones de campo de Einstein que resultan del elemento de línea descrito en (2.1) son:

$$G_{\mu}^{\nu} = R_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu}^{\nu}R = 8\pi T_{\mu}^{\nu} \quad (2.2)$$

↓

$$-8\pi T_0^0 = -\frac{1}{r^2} + e^{-2\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right), \quad (2.3)$$

$$-8\pi T_1^1 = -\frac{1}{r^2} + e^{-2\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} \right), \quad (2.4)$$

$$-8\pi T_2^2 = -e^{-2\nu} \left( \ddot{\lambda} + \dot{\lambda}(\dot{\lambda} - \dot{\nu}) \right) + e^{-2\lambda} \left( \nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right), \quad (2.5)$$

$$-8\pi T_3^3 = -8\pi T_2^2 \text{sen } \theta, \quad (2.6)$$

$$-8\pi T_{01} = -\frac{2\dot{\lambda}}{r}. \quad (2.7)$$

Aquí, y en lo que sigue, los puntos representan diferenciación parcial respecto a la variable temporal y las primas diferenciación parcial respecto a la variable radial. En (2.2),  $R^{\alpha\beta}$  representa el tensor de Ricci y  $R$  la curvatura escalar.

Al solucionar la ecuación (2.4) para la función métrica  $\lambda$ , se puede definir la función de masa  $m(r, t)$ :

$$e^{-2\lambda} (2\lambda' r - 1) = 8\pi r^2 T_0^0 - 1 \quad \Rightarrow \quad e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m(r, t)}{r}, \quad \text{donde} \quad m(r, t) = 4\pi \int_0^r T_0^0 r^2 dr, \quad (2.8)$$

con  $m(0, t) = 0$ . Es interesante resaltar que la función definida en (2.8) coincide con la función de masa de Misner presentada en [30]:

$$m(t, r) = \frac{r^2}{2} R_{232}^3. \quad (2.9)$$

La anterior relación corresponde a la energía total dentro de una esfera de radio  $r$ . Este resultado surge como consecuencia de las condiciones de acoplamiento:  $M = \left( \frac{r^2}{2} R_{232}^3 \right)_{\Sigma}$ , en donde, se interpreta a  $M$  como la energía total dentro de la configuración de materia.

En cuanto al contenido de materia, en general, el tensor momento-energía para un fluido anisótropo ( $P_r \neq P_{\theta} = P_{\phi} = P_{\perp}$ ) y con un flujo de calor diferente de cero, se puede escribir como:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P_{\perp})u_{\mu}u_{\nu} + P_{\perp}g_{\mu\nu} + (P_r + P_{\perp})s_{\mu}s_{\nu} + q_{\mu}u_{\nu} + u_{\mu}q_{\nu}; \quad (2.10)$$

donde  $\rho$  representa la densidad de energía medida por un observador cómovil con velocidad  $u^\mu$ ,  $s^\mu$  representa el flujo de energía y  $q^\alpha$  es el flujo de calor, de forma tal que se cumple que:

$$u^\mu u_\mu = -1 \quad ; \quad q^\mu u_\mu = 0 \quad ; \quad q^\mu q_\mu = q^2 \geq 0. \quad (2.11)$$

Así, para un observador en un sistema de referencia comóvil con el fluido y local de Minkowski, las componentes del tensor momento-energía, a partir de (2.10), son:

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & -q & 0 & 0 \\ -q & P_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\perp \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

En un sistema de referencia inmóvil respecto a las coordenadas de Minkowski, la materia se mueve con velocidad radial  $\omega$ . Por tanto, las componentes del tensor momento-energía en este sistema de referencia, se obtienen realizando una transformación de coordenadas de Lorentz,  $L_\mu^\nu$ :

$$\hat{T}_{\mu\nu} = L_\mu^\alpha L_\nu^\beta \bar{T}_{\alpha\beta} := \hat{T}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\rho + P_r \omega^2 + 2q\omega}{1 - \omega^2} & \frac{\omega(\rho + P_r) + q(\omega^2 + 1)}{\omega^2 - 1} & 0 & 0 \\ \frac{\omega(\rho + P_r) + q(\omega^2 + 1)}{\omega^2 - 1} & \frac{\rho\omega^2 + P_r + 2q\omega}{\omega^2 - 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\perp \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

en donde  $L_\mu^\nu = -\gamma\omega(\delta_\nu^0\delta_\mu^1 + \delta_\nu^1\delta_\mu^0) + \gamma(\delta_\nu^0\delta_\mu^0 + \delta_\nu^1\delta_\mu^1)$ , siendo  $\gamma$  el factor estándar de Lorentz  $\gamma = (1 - \omega^2)^{-1/2}$ .

Teniendo en cuenta que el espacio plano se describe por un tensor métrico de la forma:

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.14)$$

Los elementos métricos de (2.1) y (2.14) se relacionan a través de la transformación local de coordenadas:

$$d\tau = e^\nu dt \quad dx = e^\lambda dr \quad dy = r d\theta \quad dz = r \text{sen}\theta d\phi \quad (2.15)$$

Finalmente, al realizar la anterior transformación, el tensor momento-energía en coordenadas curvilíneas se expresa como:

$$\Lambda_\mu^\nu = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \text{sen}\theta \end{pmatrix} \Rightarrow T_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \hat{T}_{\alpha\beta} \Rightarrow \begin{cases} T_0^0 = \frac{\rho + P_r \omega^2}{1 - \omega^2} + \frac{2q\omega}{1 - \omega^2} \\ T_1^1 = -\frac{\rho\omega^2 + P_r}{1 - \omega^2} - \frac{2q\omega}{1 - \omega^2} \\ T_2^2 = -P_\perp \\ T_3^3 = -P_\perp \\ T_{01} = -\left[ \frac{(\rho + P_r)\omega}{1 - \omega^2} + \frac{q(1 + \omega^2)}{1 - \omega^2} \right] e^{\nu+\lambda} \end{cases} \quad (2.16)$$

Para dotar las componentes del tensor  $\bar{T}_\mu^\nu$  de significado físico, se ha aplicado el esquema propuesto por Bondi en [8]: desde el sistema de referencia comóvil se transforma al sistema de referencia de Schwarzschild (sistema de referencia de la métrica) aplicando un boost inverso de Lorentz en dirección radial y una transformación cambio de base inversa. De la misma forma, las componentes de la quadri-velocidad,  $u^\alpha$  y el flujo de calor,  $q^\alpha$ , en el sistema de referencia de la métrica son:

$$\begin{aligned}\bar{u}^\alpha &= \delta_0^\alpha \Rightarrow u^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha(L_\mu^\beta \bar{u}^\mu) \Rightarrow u^\alpha = \gamma [e^{-\nu}, \omega e^{-\lambda}, 0, 0] \\ \bar{q}^\alpha &= \delta_1^\alpha \Rightarrow q^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha(L_\mu^\beta \bar{q}^\mu) \Rightarrow q^\alpha = q\gamma [\omega e^{-\nu}, e^{-\lambda}, 0, 0]\end{aligned}\quad (2.17)$$

De la ley de conservación :  $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$ , para la componente radial ( $\nu = 1$ ) se obtiene:

$$\dot{\lambda}^2 + \ddot{\lambda} - \dot{\lambda}\dot{\nu} = 4\pi r e^{2\nu} \left[ -(T_1^1)' + (T_0^0 - T_1^1) \nu' + \frac{2}{r} (T_2^2 - T_1^1) \right] \quad (2.18)$$

Es importante resaltar que la ecuación (2.18) no aporta ninguna información adicional a la obtenida a través de las ecuaciones de campo de Einstein.

Además, la velocidad radial con la que se mueve el fluido ( $\omega$ ) está relacionada con la velocidad de un elemento de fluido,  $\frac{dr}{dt}$ , en el sistema coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$ , a través de las ecuaciones (2.15) de la forma:

$$\omega = \frac{dr}{dt} e^{\lambda-\nu} \quad (2.19)$$

donde  $\omega > 0$  implica expansión y  $\omega < 0$  implica contracción

¿POR QUÉ CONSIDERAR MATERIA ANISÓTROPA? La suposición de fluidos perfectos pascalianos es soportada por una gran cantidad de evidencia observacional. Sin embargo, en las últimas décadas varios autores han presentado evidencias fuertes, en trabajos teóricos, que sugieren la aparición de diferentes fenómenos físicos, los cuales dan lugar a un incremento en la anisotropía local en ciertos rangos de densidades [35]. Así, la presencia de anisotropía en sistemas de altas densidades puede ser introducida, por ejemplo, por las transiciones de fase que ocurren en el colapso gravitacional como la condensación de piones [58], la existencia de un núcleo sólido [2] o los efectos de la viscosidad [5, 6]. Adicionalmente, configuraciones anisótropas en Relatividad General han venido siendo estudiadas exhaustivamente a partir del trabajo de Bowers y Liang [10]. Por ejemplo, recientemente, la utilización de ecuaciones de estado anisótropas, para modelar estrellas de neutrones altamente magnetizadas, magneto-estrellas, ha llamado la atención de algunos investigadores [61].

ESPACIO TIEMPO EXTERIOR: el espacio-tiempo exterior de la distribución de materia será descrito por el elemento de línea de Vaydia [64]. Éste corresponde a un espacio-tiempo con radiación de partículas sin masa y se puede interpretar como un generalización del elemento de línea de Schwarzschild cuando la masa total de la configuración varía en el tiempo [62]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad \rightarrow \quad \text{Métrica de Schwarzschild} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ dt &= dU + \frac{dr}{1 - 2M/r} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ ds^2 &= \left(1 - \frac{2M(U)}{R}\right) dU^2 + 2dU dR - R^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2), \longrightarrow \text{Métrica de Vaidya} \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $R$  es una coordenada nula ( $g_{RR} = 0$ ) y  $U$  es una coordenada tipo tiempo. La cantidad  $M(U)$  corresponde a la masa total del objeto autogravitante medida por un observador ubicado en el infinito.

Las líneas nulas radiales en la geometría de Schwarzschild satisfacen la relación  $(dr/dt)^2 = (1 - 2M/r)^2$  ( $d\theta = d\phi = ds = 0$  en (2.20)). Por tanto, se puede decir que las superficies  $U = cte$  son asintóticamente conos de luz abierto al futuro, ya que, les corresponden curvas que satisfacen la ecuación  $dr/dt = 1 - 2M/r$ , según (2.21).

Para la métrica de Vaidya, la única componente del tensor de Ricci diferente de cero es

$$R_{UU} = -\frac{2}{R^2} \frac{dM}{dU}. \quad (2.23)$$

Vía las ecuaciones de campo de Einstein, las componentes del tensor de momento-energía correspondientes al espacio-tiempo exterior son:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi R^2} \frac{dM}{dU} \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \quad (2.24)$$

Éste es precisamente el resultado que se obtendría para un flujo de fotones moviéndose radicalmente con cuadri-momento  $k_\mu = \nabla_\mu U$ .

CONDICIONES DE ACOPLAMIENTO: para garantizar una descripción completa entre los espacios tiempo interior y exterior, es necesario realizar un acoplamiento entre los mismos. Esto además evita comportamientos singulares de las variables físicas sobre la superficie que los separa. Darmois [14] estableció que la condición necesaria y suficiente para el acoplamiento de dos espacio-tiempos sobre una hipersuperficie, es que, tanto la métrica inducida sobre ésta (primera forma fundamental) como la derivada covariante del vector normal, proyectada sobre dicha hipersuperficie (segunda forma fundamental) sean continuas a través de la misma. En el Anexo 7 se realiza el planteamiento formal del problema siguiendo el enfoque realizado en [38].

El objetivo de esta sección es determinar las condiciones que acoplan la métrica interior tipo Schwarzschild (2.1) con la métrica exterior de Vaidya (2.22) sobre la hipersuperficie  $\Sigma$ . Para ello, la métrica inducida para cada uno de los espacios-tiempos es:

$$\vartheta^- : r - r_\Sigma = 0 \longrightarrow ds_{(-)}^2 = \left( e^{2\nu} - e^{2\lambda} \left( \frac{dr_\Sigma}{dt} \right)^2 \right) dt^2 - r_\Sigma^2 d\Omega^2, \quad (2.25)$$

$$\vartheta^+ : R - R_\Sigma = 0 \longrightarrow ds_{(+)}^2 = \left( 1 - \frac{2M(U)}{R_\Sigma} + 2 \frac{dR_\Sigma}{dU} \right) dU^2 - R_\Sigma^2 d\Omega^2. \quad (2.26)$$

De esta manera, la primera condición de Darmois se traduce a:

$$\left( e^{2\nu} - e^{2\lambda} \left( \frac{dr_\Sigma}{dt} \right)^2 \right)^{1/2} dt = \left( 1 - \frac{2M(U)}{R_\Sigma} + 2 \frac{dR_\Sigma}{dU} \right)^{1/2} dU, \quad (2.27)$$

$$r_\Sigma = R_\Sigma. \quad (2.28)$$

Reordenando los términos de la ecuación (2.21) y evaluando esta expresión en la superficie, se obtiene:

$$\frac{dU}{dt} = 1 - \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{-1} \frac{dr}{dU} \frac{dU}{dt} \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{dU}{dt} \right)_\Sigma = \left( 1 + \frac{R_\Sigma}{R_\Sigma - 2M} \frac{dR_\Sigma}{dU} \right)^{-1}. \quad (2.29)$$

Combinando las ecuaciones (2.27) y (2.29):

$$\begin{aligned} e^{2\nu_\Sigma} \left[ 1 - \frac{2M}{R_\Sigma} + \frac{dR_\Sigma}{dU} \right]^2 - \left( 1 - \frac{2M}{R_\Sigma} \right)^3 &= \left[ e^{2\lambda_\Sigma} \left( \frac{dR_\Sigma}{dU} \right)^2 + 2 \frac{dR_\Sigma}{dU} \right] \left( 1 - \frac{2M}{R_\Sigma} \right)^2 \\ &\Downarrow \\ e^{2\nu_\Sigma} \left[ \frac{2}{1 - \frac{2M}{R_\Sigma}} \frac{dR_\Sigma}{dU} + \left( \frac{1}{1 - \frac{2M}{R_\Sigma}} \frac{dR_\Sigma}{dU} \right)^2 \right] &+ \left( e^{2\nu_\Sigma} - 1 + \frac{2M}{R_\Sigma} \right) = e^{2\lambda_\Sigma} \left( \frac{dR_\Sigma}{dU} \right)^2 + 2 \frac{dR_\Sigma}{dU}. \end{aligned}$$

Iguando términos en la anterior expresión, finalmente se tiene que (3) se satisface si:

$$e^{-2\lambda_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{R_\Sigma}, \quad (2.30)$$

$$e^{2\nu_\Sigma} = 1 - \frac{2M}{R_\Sigma}. \quad (2.31)$$

Para este caso particular, una manera equivalente de acoplar las dos métricas, es exigir la continuidad de la primera forma (ecuaciones (2.30) y (2.31)) y la continuidad de las componentes independientes del flujo de momento energía a través de la superficie [47, 53]:

$$(T_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu)_\Sigma^{(+)} = (T_{\mu\nu} \eta^\mu \eta^\nu)_\Sigma^{(-)}; \quad (T_{\mu\nu} \eta^\mu v^\nu)_\Sigma^{(+)} = (T_{\mu\nu} \eta^\mu v^\nu)_\Sigma^{(-)}, \quad (2.32)$$

siendo  $\eta^\mu$  el vector unitario normal a una superficie  $\Psi$ :

$$\eta_\nu^\pm = \frac{\partial_\nu \Psi}{(-\partial_\alpha \Psi \partial_\beta \Psi g^{\alpha\beta})^{1/2}}. \quad (2.33)$$

Para cada uno de los espacios-tiempo se obtiene:

$$\eta_\nu^{(+)} = \left( 1 - \frac{2M}{R_\sigma} + 2 \frac{dR_\Sigma}{dU} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{dR_\Sigma}{dU}, 1, 0, 0 \right); \quad \eta_\nu^{(-)} = \left( e^{\lambda_\Sigma} - \left( \frac{dr_\Sigma}{dt} \right)^2 e^{-\nu_\Sigma} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{dr_\Sigma}{dt}, 1, 0, 0 \right) \quad (2.34)$$

Las componentes del tensor de energía-impulso para el interior se presentaron en (2.16) y para el exterior en (2.24). De esta manera se obtiene:

$$\left. \begin{aligned}
 (T_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu)_\Sigma^{(+)} &= [P_r]_\Sigma \\
 (T_{\mu\nu}\eta^\mu v^\nu)_\Sigma^{(+)} &= \left[ qe^{\lambda/2}\sqrt{1-\omega^2} \right]_\Sigma \left( e^{\lambda\Sigma} - \left( \frac{dr_\Sigma}{dt} \right)^2 e^{-\nu\Sigma} \right)^{-\frac{1}{2}} \\
 (T_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu)_\Sigma^{(-)} &= \left[ \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dM}{dU} \beta^2 \right]_\Sigma \\
 (T_{\mu\nu}\eta^\mu v^\nu)_\Sigma^{(-)} &= \left[ \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dM}{dU} \beta^2 \right]_\Sigma
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 [P_r]_\Sigma &= \left[ \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dM}{dU} \beta^2 \right]_\Sigma \\
 [q]_\Sigma &= \left[ \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dM}{dU} \beta^2 \right]_\Sigma
 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Por tanto, la segunda condición de acoplamiento es:

$$[P_r]_\Sigma = [\hat{q}]_\Sigma. \quad (2.36)$$

La presión en la dirección radial únicamente se anula sobre la superficie si la distribución de materia deja de disipar energía ( $q_\Sigma = 0$ ), lo que implica que la radiación desaparece y el espacio-tiempo exterior corresponde al espacio tiempo de Schwarzschild.

## 2.2 Aproximación de colapso lento

Se dice que una distribución de materia evoluciona (o colapsa) lentamente, si ésta cambia muy poco en una escala de tiempo muy grande comparada con el tiempo en el cual el sistema responde a un perturbación de equilibrio hidrostático, es decir, comparada con la escala de tiempo hidrostático. Entonces, la configuración de materia se encuentra muy cerca del equilibrio a pesar de que las variables físicas y métricas dependen explícitamente del tiempo: su evolución se considera como una serie sucesiva de estados de equilibrio estático.

En términos astrofísicos, la mayor parte de los efectos observables ocurren en períodos de tiempo que respetan esta suposición: para el Sol la escala de tiempo hidrostático es del orden de los 27 minutos, para una gigante roja ( $M \approx M_\odot$ ,  $R \approx 100R_\odot$ ) de aproximadamente 18 días y para una estrella blanca ( $M \approx M_\odot$ ,  $R \approx R_\odot/50$ ) de solo 4.5 segundos [41]. En general, la escala de tiempo hidrostático para una estrella de masa  $M$  y radio  $R$  es aproximadamente del orden de:

$$\tau_{hyd} \approx \left( \frac{R^3}{GM} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.37)$$

La suposición de colapso lento implica que la velocidad radial del fluido  $\omega$ , medida por el observador minkowskiano, es siempre mucho menor que la velocidad de la luz ( $\omega \ll 1$ ), de forma tal que, términos de segundo orden en la velocidad o superiores son despreciables ( $O(\omega^2) \approx 0$ ) [32]. Por tanto, tomando la ecuación (2.18) y reemplazando en ella (2.16) se obtiene:

$$\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\lambda}\dot{\nu} = 4\pi r e^\nu \left[ P'_r + (\rho + P_r)\nu' - \frac{2(P_\perp - P_r)}{r} \right] \quad (2.38)$$

Observando (2.38), la expresión derecha igualada a cero coincide con la ecuación de equilibrio hidrostático generalizada para un fluido anisótropo [10]: las fuerzas hidrodinámicas (primer y tercer términos) y las fuerzas gravitacionales (segundo término) se compensan. Como para garantizar el colapso lento, se debe exigir que la distribución de materia evolucione a través de una serie de estados de equilibrio hidrostático, esto puede ser traducido a exigir que:

$$\ddot{\lambda} \approx \dot{\lambda}^2 \approx \dot{\lambda}\dot{\nu} \approx \ddot{\nu} \approx 0. \quad (2.39)$$

En la aproximación de colapso lento, las ecuaciones de campo de Einstein (2.3)-(2.6) toman la siguiente forma:

$$8\pi\rho = \frac{1}{r^2} - e^{-2\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right), \quad (2.40)$$

$$8\pi P_r = -\frac{1}{r^2} + e^{-2\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} \right), \quad (2.41)$$

$$8\pi P_{\perp} = e^{-2\lambda} \left( \nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right), \quad (2.42)$$

$$-\dot{\lambda} = 4\pi r(q + (\rho + P_r)\omega)e^{\nu+\lambda}. \quad (2.43)$$

De (2.43) se puede concluir que:

$$q \sim \omega. \quad (2.44)$$

Además, con esta misma expresión también se tiene que  $\dot{\lambda} \approx O(\omega)$  y  $\dot{\omega} \approx O(\ddot{\lambda}, \dot{\lambda}\omega, \nu\omega) \approx 0$ , lo que implica que los términos lineales en la aceleración se desprecian [35].

En conclusión, la evolución lenta puede entenderse como una secuencia de modelos estáticos, descritos (2.40)-(2.42) y unidos por (2.43), que constituye la única ecuación de campo diferente al caso estático.

### 2.3 Ecuación de estado no local

Muchas situaciones de interés físico demandan un enfoque no local que considere la influencia del estado de regiones significativamente grandes del material sobre el comportamiento en un punto determinado de la misma. Algunos ejemplos clásicos de este tipo de situaciones son: el análisis de daños y fracturas de materiales viscoplásticos, los fenómenos de la tensión superficial en líquidos, la fractura y dispersión de ondas elásticas en sólidos, el flujo sanguíneo, la dinámica de suspensiones coloidales y el diseño de redes neuronales.

Las ideas básicas sobre una teoría Mecánica de Medios Continuos no locales fueron introducidas en los años 50 (ver [52] y referencias incluidas) y estuvieron basadas en el hecho de considerar la función de esfuerzos (*stress*) promedios en un cierto volumen representativo del medio material centrado en un punto. Desde entonces son muchas las aplicaciones donde los efectos no locales parecen dominar el comportamiento macroscópico de la materia.

Para estudiar escenarios de colapso gravitacional lento de configuraciones de materia ultra-densas, simétricamente esféricas, anisótropas y radiantes, se propone introducir una ecuación de estado no local. Siguiendo los trabajos previos en [29] y en [27], ésta se postula, para el caso dinámico, de la forma:

$$[T_0^0 + 3T_1^1 + r(T_0^0 + T_1^1)'] (1 - \omega^2) = 0. \quad (2.45)$$

La anterior ecuación puede ser resuelta ya sea para la componente  $T_0^0$  o para la componente  $T_1^1$  del tensor momento-energía:

$$T_1^1 = -T_0^0 + \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 T_0^0 d\bar{r} - \frac{\chi(t)}{r^3} \quad ; \quad T_0^0 = -T_1^1 - \frac{2}{r} \int_0^r T_1^1 d\bar{r} + \frac{\zeta(t)}{r}; \quad (2.46)$$

donde  $\chi(t)$  y  $\zeta(t)$  son funciones arbitrarias de integración. En ambos casos se identifica claramente una relación no local entre las componentes del tensor energía-momento: para un determinado instante de tiempo, una de las componentes ( $T_0^0$  o  $T_1^1$ ) no solo depende localmente de la otra componente sino también de su funcional a lo largo del resto de la configuración. Lo anterior se puede ver mejor, si se reescribe la ecuación (2.46) para la componente  $T_1^1$ , como:

$$T_1^1 = -\frac{1}{3}T_0^0 - \frac{2}{3}\sigma_{T_0^0} - \frac{\chi(t)}{r^3}, \quad \text{donde} \quad \langle T_0^0 \rangle = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_0^r 4\pi \bar{r}^2 T_0^0 d\bar{r} \quad (2.47)$$

y  $\sigma_{T_0^0} = T_0^0 - \langle T_0^0 \rangle$  representa el concepto de la desviación estándar estadística. En (2.47) los términos no locales son representados por los promedios de las funciones  $T_0^0$  sobre el volumen encerrado por el radio  $r$ . Además, si en un punto particular dentro de la distribución, el valor de la función  $T_0^0$  está muy cerca de su valor promedio  $\langle T_0^0 \rangle$ , la anterior relación se convierte en:

$$T_1^1 \approx -\frac{1}{3}T_0^0 - \frac{\chi(t)}{r^3}. \quad (2.48)$$

Reemplazando las componentes del tensor momento-energía en (2.45) se obtiene:

$$P_r = \rho - \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r} \left[ \frac{\rho + 2q\omega + P_r \omega^2}{1 - \omega^2} \right] d\bar{r} \Rightarrow \rho - 3P_r + r(\rho' - P_r')(1 - \omega^2) - 4\omega q - (3\rho - P_r)\omega^2 = 0. \quad (2.49)$$

Al evaluar (2.49) en  $r = 0$ , resulta que en el centro de la distribución de materia, la ecuación de estado no local se comporta similar a un ambiente de radiación pura:

$$\rho_c(t) = 3P_r(t). \quad (2.50)$$

Por otro lado, al tomar el límite estático en la ecuación (2.49) se obtiene:

$$P_r(r) = \rho(r) - \frac{2}{r^3} \int_0^r \bar{r}^2 \rho(\bar{r}) d\bar{r} = \mathcal{P}(r) + 2\sigma_{\mathcal{P}(r)} + \frac{\xi}{r^3}, \quad (2.51)$$

donde

$$\mathcal{P}(r) = \frac{1}{3}\rho(r) \quad y \quad \sigma_{\mathcal{P}(r)} = \frac{1}{3}\rho(r) - \frac{1}{3}\langle \rho(r) \rangle.$$

En este límite, el término de la integral no local representa una densidad promedio sobre un volumen encerrado. A medida que el valor de la contribución no local se encuentre muy cerca

del valor de la densidad local, la ecuación de estado del material tiende a ser similar al típico escenario de radiación dominante (o materia caliente ultrarelativista)

Utilizando las ecuaciones de campo de Einstein, la ecuación (2.45) puede ser reescrita en términos del tensor de Einstein:

$$G_0^0 + 3G_1^1 + r(G_0^0 + G_1^1)' = 0 \quad (2.52)$$

Introduciendo el elemento métrico (2.1) en (2.52):

$$2(\lambda' - \nu') + r(2\lambda'\nu' - 2(\lambda')^2 + \lambda'' - \nu'') = 0 \quad (2.53)$$

Reorganizando los términos de la anterior ecuación e integrado se tiene:

$$\int \lambda' dr - \frac{1}{2} \int \frac{(\lambda' - \nu')'}{\lambda' - \nu'} dr = \int \frac{1}{r} dr \quad \Rightarrow \quad \nu = \lambda - \alpha(t) \int \frac{e^{-2\lambda}}{r^2} dr + k(t) \quad (2.54)$$

La relación (2.54) puede simplificarse para finalmente obtener una ligadura entre las funciones métricas  $\lambda$  y  $\nu$ :

$$\nu = \lambda + k(t) . \quad (2.55)$$

A través de las funciones de acoplamiento (2.30) y (2.31), la función de integración  $k(t)$  se relaciona con el potencial gravitacional en la superficie de la configuración:

$$e^{2\nu_\Sigma} = e^{2\lambda_\Sigma + 2k(t)} = e^{2k(t)} \left(1 - \frac{2M}{R_\Sigma}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad e^{k(t)} = 1 - \frac{2M}{R_\Sigma} . \quad (2.56)$$

Introduciendo la relación (2.55) en las expresiones (2.43)-(2.42), las ecuaciones de campo de Einstein se reducen a:

$$4\pi\rho = \frac{m'}{r^2} , \quad (2.57)$$

$$-4\pi P_r = \frac{2m - rm'}{r^3} , \quad (2.58)$$

$$8\pi P_\perp = \frac{m''}{r} + \frac{2(m'r - m)}{r^3} \left[ \frac{m'r - m}{r - 2m} - 1 \right] , \quad (2.59)$$

$$-\frac{\dot{m}}{r} = 4\pi r e^k (\omega\rho + \omega P_r + q) . \quad (2.60)$$

Las anteriores ecuaciones describen la evolución en la aproximación de colapso lento de una distribución de materia simétricamente esférica, anisótropa, con una ecuación de estado no local y que disipa energía a través de un flujo radial de calor. Junto con las condiciones de acoplamiento constituyen el sistema de ecuaciones que se intentará solucionar en lo que sigue del trabajo.

## 2.4 Condiciones de aceptabilidad física

Para resolver el conjunto de ecuaciones de Einstein que describen el colapso gravitacional para una configuración de materia acotada, se hace necesario introducir información adicional sobre la naturaleza del medio, que permita realizar simplificaciones sobre el problema. En particular, para este caso se ha realizado la aproximación de colapso lento y se ha introducido una ecuación de estado no local. Por lo mismo, es imperioso establecer un conjunto mínimo de condiciones de aceptabilidad sobre las soluciones para determinar si éstas describen situaciones físicamente viables. Este conjunto de condiciones se puede resumir de la siguiente manera:

1. La densidad debe ser positiva y su gradiente debe ser negativo dentro de la distribución de materia:

$$\rho > 0 \quad y \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} < 0 \quad (2.61)$$

2. La presión radial y tangencial deben ser positivas y el gradiente de la presión radial debe ser negativo.

$$P_r > 0 \quad ; \quad \frac{\partial P_r}{\partial r} < 0 \quad y \quad P_{\perp} > 0 \quad (2.62)$$

Adicionalmente, para que un fluido sea físicamente razonable se deben satisfacer las condiciones de energía fuerte y/o las condiciones de energía dominante:

**Condición de energía débil (Weak energy condition [WEC])** : La densidad de energía de cualquier distribución de materia medida por un observador arbitrario no puede ser negativa.

$$\rho_w = T_{\alpha\beta} w^{\alpha} w^{\beta} \geq 0 \quad (2.63)$$

siendo  $w^{\alpha}$  un cuadri-vector tipo tiempo arbitrario, que representa la cuadri-velocidad de un observador arbitrario en el espacio-tiempo.

Siguiendo a Gónzales en [24], esta condición se traduce a:

$$\rho \geq 2q \quad ; \quad \rho + p_r \geq 2q \quad ; \quad \rho + p_{\perp} \geq 2q \quad (2.64)$$

**Condición de energía fuerte (Strong energy condition [SEC])** : Para cualquier observador arbitrario, se debe cumplir:

$$R_{\alpha\beta} w^{\alpha} w^{\beta} = 2T_{\alpha\beta} w^{\alpha} w^{\beta} - \frac{T}{2} g_{\alpha\beta} w^{\alpha} w^{\beta} = \rho_w + \frac{T}{2} \geq 0 \quad (2.65)$$

donde  $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$  es la traza del tensor momento energía. En términos de la funciones de estado, esta condición impone que:

$$\rho + p_r + 2p_{\perp} \geq 4q \quad ; \quad \rho + p_r \geq 2q \quad ; \quad \rho + p_{\perp} \geq 2q \quad (2.66)$$

**Condición de energía dominante** (*Dominant energy condition [DEC]*) : El vector densidad de flujo de energía medido por un observador debe ser un vector temporal o nulo orientado hacia el futuro.

$$s^0 > 0 \quad (2.67)$$

$$s^\alpha s_\alpha \leq 0 \quad (2.68)$$

Por tanto:

$$\rho > q \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \rho^2 &\geq q^2 + q(\rho + p_r + 2p_\perp) \\ \rho^2 &\geq p_r^2 + q^2 + 2(\rho + p_r + 2p_\perp)q \\ \rho^2 &\geq p_\perp^2 + q^2 + 2q(\rho + p_r + 2p_\perp) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Entonces, para que un escenario de colapso disipativo sea físicamente plausible se deben satisfacer las relaciones (2.64), (2.66), (2.69) y (2.70). Nótese que estas condiciones son independientes de la ecuación de estado no local.

### 3. Colapso lento y adiabático de configuraciones esféricas, anisótropas y no locales

---

¿SON FÍSICAMENTE PLAUSIBLE LOS ESCENARIOS DE COLAPSO GRAVITACIONAL LENTO Y ADIABÁTICO QUE SE GENERAN PARA CONFIGURACIONES NO LOCALES?

Desde el punto de vista matemático, suponer una relación no local entre las funciones de estado de la forma (2.49) es equivalente a obtener una relación de ligadura entre las funciones métricas  $\lambda$  y  $\nu$ . Lo anterior, junto con la suposición de evolución lenta, tiene como implicación directa una simplificación notable del sistema de ecuaciones de Einstein que describen el colapso gravitacional disipativo de un objeto compacto.

Ahora, desde el punto de vista físico, se hace importante explorar bajo qué condiciones la Ecuación de Estado no Local genera escenarios de colapso lento físicamente plausibles. En la primera parte de este capítulo se resolverá el sistema de ecuaciones de Einstein (2.57)-(2.60) para el caso adiabático. El sistema de ecuaciones se determina totalmente al tomar del caso estático la dependencia radial del perfil de densidad. Para finalizar, se realizará una discusión alrededor de las condiciones de aceptabilidad física de los modelos desarrollados. Con ello se evaluará la plausibilidad del caso más sencillo de colapso lento.

#### 3.1 Solución de las Ecuaciones de Campo de Einstein: perfiles de densidad

Las ecuaciones de campo, que describen el colapso lento y adiabático ( $q(r, t) = 0$ ) de configuraciones de materia esféricamente simétricas y anisótropas con una ecuación de estado no local son:

$$\rho = \frac{m'}{4\pi r^2}, \quad (3.1)$$

$$P_r = -\frac{2m - rm'}{4\pi r^3}, \quad (3.2)$$

$$P_{\perp} = -\frac{m''}{8\pi r} - \frac{(m'r - m)}{4\pi r^3} \left( \frac{m'r - m}{r - 2m} - 1 \right), \quad (3.3)$$

$$\omega = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\dot{m}e^{-k(t)}}{\rho + P_r}. \quad (3.4)$$

Éste es un sistema no lineal de cuatro ecuaciones en derivadas parciales con cinco incógnitas ( $\rho(r, t)$ ,  $P_r(r, t)$ ,  $P_{\perp}(r, t)$ ,  $m(r, t)$  y  $\omega(r, t)$ ). Es evidente la necesidad de incluir información adicional para poder integrarlo. Particularmente para esta situación se van a generalizar al

caso dinámico varios perfiles de densidad  $\rho(r, t)$  que corresponden a soluciones estáticas conocidas para las ecuaciones de campo de Einstein. La generalización se realiza conservando la dependencia radial del perfil de densidad y dando una dependencia temporal a las constantes de integración. Esta forma de generar soluciones a partir de la introducción de una función conocida ha sido ampliamente utilizada en los últimos años, incluso, existe toda una colección de técnicas para generar soluciones basados en perfiles de densidad newtonianos [43].

Los perfiles de densidad seleccionados y su generalización dinámica son:

**MODELO DE H.B. BUCHDAHL:** el siguiente perfil de densidad fue trabajado por Buchdahl en [11]. También fue redescubierto por M.C.Durgapal y R.Bannerji en [17], donde encuentran que la máxima masa para una estrella de neutrones en equilibrio debe ser de aproximadamente  $4,56M_{\odot}$ . El correspondiente perfil de densidad puede ser escrito para el caso dinámico de la forma:

$$\rho = \frac{3C}{16\pi} \frac{3 + Cr^2}{(1 + Cr^2)^2} \quad \longrightarrow \quad \rho(r, t) = \eta(t) \frac{3 + C(t)r^2}{(1 + C(t)r^2)^2}. \quad (3.5)$$

**MODELO DE B.W. STEWART:** el perfil de densidad propuesto por B.W.Stewart en [60] corresponde a la solución exacta de las ecuaciones de Einstein para una configuración de materia anisótropa y esféricamente simétrica en un espacio-tiempo conformemente plano. Este perfil de densidad fue derivado a través de la elección de una forma particular para la distribución de masa,  $m = \frac{r}{2} \left(1 - e^{(-Kr^2)}\right)$ . Al generalizar al caso dinámico este perfil de densidad, se obtiene la siguiente relación:

$$\rho = \frac{(e^{2Kr} - 1)(e^{4Kr} + 8Kre^{2Kr} - 1)}{8\pi r^2 (e^{2Kr} + 1)^3} \quad \longrightarrow \quad \rho(r, t) = \frac{(e^{2K(t)r} - 1)(e^{4K(t)r} + 8K(t)re^{2K(t)r} - 1)}{8\pi r^2 (e^{2K(t)r} + 1)^3}. \quad (3.6)$$

**MODELO DE P.S FLORIDES:** este perfil de densidad fue presentado inicialmente por P.S. Florides en [20] como una solución a las ecuaciones de Einstein para una configuración estática y esféricamente simétrica. También corresponde a una familia de soluciones encontradas por Stewart [60] y, recientemente, por M.K Gokhroo y A.L.Mehra en [22] a partir del estudio realizado de configuraciones esféricas y anisótropas con una densidad de energía variable. La propuesta que se presenta para extenderlo al caso dinámico es:

$$\rho = \frac{\sigma}{8\pi} \left(1 - K \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \longrightarrow \quad \rho(r, t) = \eta(t) \left(1 - K(t) \frac{r^2}{R(t)^2}\right). \quad (3.7)$$

donde  $R$  representa el radio de la configuración.

**MODELO TOLMAN IV:** Tolman desarrolló ocho soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein para fluidos esféricos y estáticos en [63]. La cuarta solución presentada (Tolman IV) se deriva de suponer  $\frac{e^{\nu} \nu'}{2r} = cte$ . Ésta ha sido aplicada en varios escenarios físicos y conlleva, en alguno aspectos, a resultados similares a los obtenidos con la ecuación de estado para un gas de Fermi en casos de densidades centrales intermedias. Además, Tolman IV ha sido físicamente relevante y deriva en expresiones matemáticas

simples para las variables físicas y para las variables métricas. Generalizando para el caso dinámico este perfil de densidad, se obtiene la siguiente relación:

$$\rho = C \left( \frac{3 + 2x - K(3 + 7x + 6x^2)}{(1 + 2x)^2} \right) \longrightarrow \rho(r, t) = \frac{C(t)}{8\pi} \left( \frac{3 + 2x - K(t)(3 + 7x + 6x^2)}{(1 + 2x)^2} \right). \quad (3.8)$$

donde  $x = Cr$ . Esta solución exacta de las ecuaciones de Einstein también constituye el caso particular para  $n = 1$ , de la familia más general de soluciones caracterizada por la relación  $e^\nu \propto (1 + x)^n$  con  $x = Cr$ , estudiada profundamente por M.C Durpagal en [16].

**MODELO DE M. WYMAN:** el perfil de densidad de este modelo fue propuesto por M. Wyman en [67] como una generalización de la VI solución estática y esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo de Einstein presentada por R.C. Tolman en [63]. Este autor completa los grados de libertad para el sistema de ecuaciones de Einstein introduciendo la relación para la función métrica de la forma  $e^\nu = (Ar^{1-n} - Cr^{1+n})^2$  con  $n = 1$ . A su vez el perfil de densidad obtenido corresponde a un caso particular ( $n = 2$ ) de la familia general de soluciones presentadas en [16]. Generalizando este perfil de densidad al caso dinámico se tiene:

$$\rho = -\frac{K(3 + 5Cr^2)}{8\pi(1 + 3Cr^2)^{\frac{5}{3}}} \longrightarrow \rho(r, t) = -\frac{K(t)(3 + 5C(t)r^2)}{8\pi(1 + 3C(t)r^2)^{\frac{5}{3}}}. \quad (3.9)$$

### 3.2 Modelando configuraciones no locales colapsando lenta y adiabáticamente

Para explorar la capacidad de la ecuación de estado no local de generar escenarios de colapso gravitacional lento físicamente viables, se empezará por modelar el caso más simple en que la configuración de materia no disipa energía.

Al introducir la dependencia radial del perfil de densidad  $\rho(r, t)$ , a través de la ecuación de (3.1) se obtiene la función de masa  $m(r, t)$ , y con las demás ecuaciones de campo se determinan los perfiles de presión radial,  $P_r(r, t)$ , y presión tangencial,  $P_\perp(r, t)$ , así como la velocidad del elemento de fluido,  $\omega(r, t)$ . En el cuadro 3.1 (página 39) se presentan los anteriores perfiles de densidad, junto con las variables físicas que se derivan de cada caso ( $m$ ,  $P_r$  y  $P_\perp$ ). Estas expresiones son independientes de la suposición de colapso adiabático o no adiabático.

De cada modelo se desprenden funciones de integración,  $C_1(t)$  y  $C_2(t)$ , que determinan la evolución temporal del sistema. Éstas se encuentran a partir de las condiciones de acoplamiento con el espacio-tiempo exterior a la configuración de materia, que para el caso adiabático se reducen a:

$$P_r(R(t), t) = 0 \quad ; \quad m(R(t), t) = M \quad (3.10)$$

Lo anterior es consistente para un espacio-tiempo exterior descrito por la métrica exterior de Schwarzschild. En el anexo 7 se presentan la forma explícita de las funciones de integración

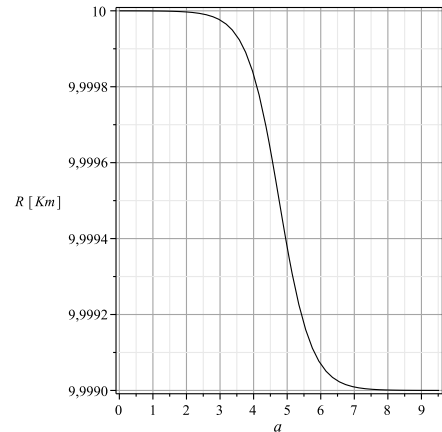
que se desprenden de cada modelo, así como de las funciones de estado respectivas (función de masa, densidad, presión radial y tangencial y velocidad del fluido).

Para expresar explícitamente todas las variables físicas y métricas en función de las coordenadas temporales y radiales, se introduce la evolución del radio externo de la configuración de la siguiente forma:

$$R(a) = R_0 \left( 1 + \frac{\alpha}{e^{a-a_0} + 1} \right), \text{ con } a \equiv \frac{t}{M(0)} \quad (3.11)$$

el parámetro  $\alpha$  corresponde a la magnitud del cambio del radio, tal que  $|\alpha| \ll 1$ ; y  $R_0$  representa el radio inicial de la configuración.

En la figura 3.1 se presenta la evolución de la función  $R(a)$ : la configuración se contrae lentamente en el intervalo de tiempo considerado. Es importante decir, que la dinámica del sistema de las configuraciones adiabáticas no es sensible a la forma funcional que obedece la evolución de la frontera.

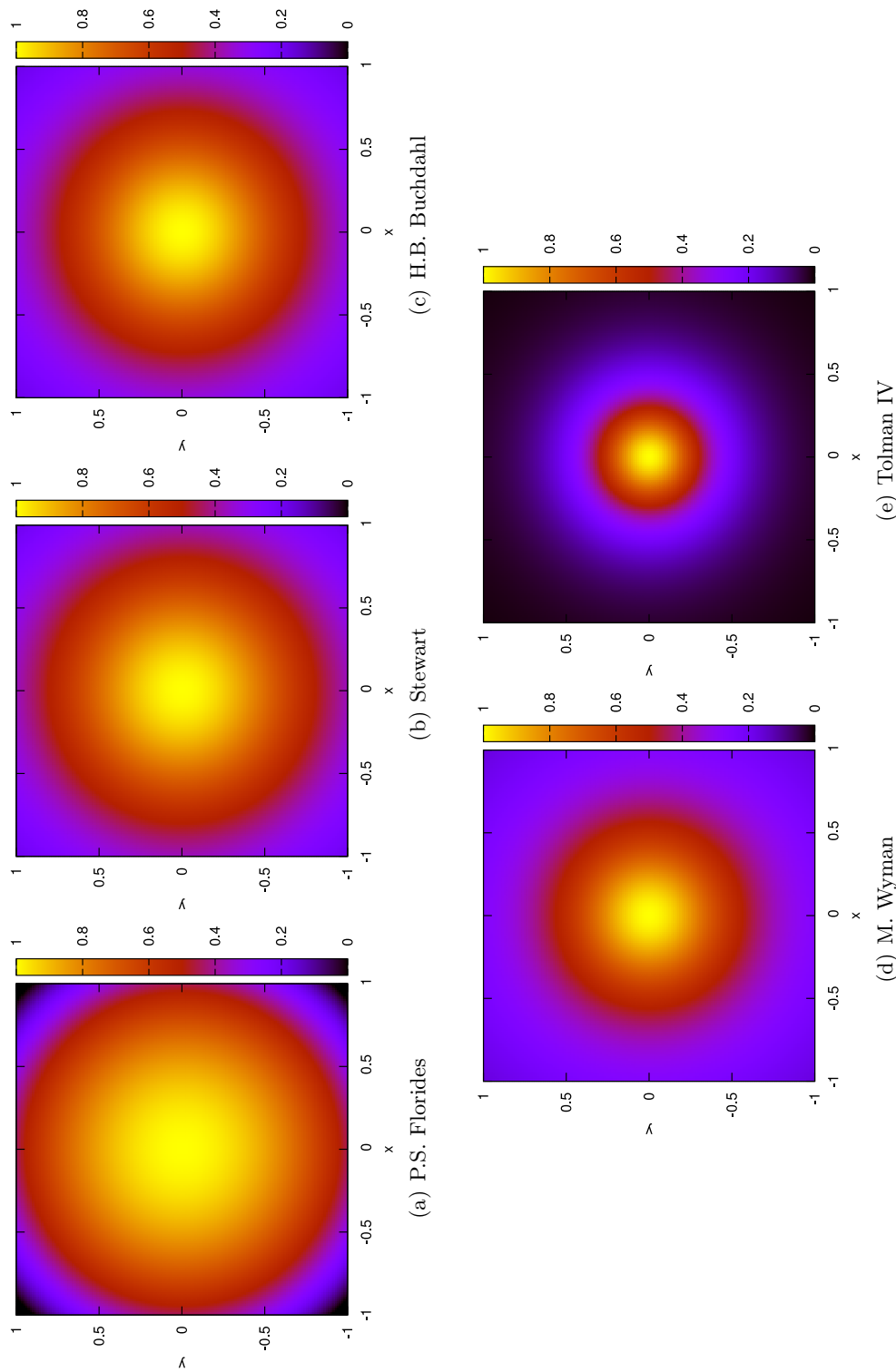


**Figura 3.1:** Evolución del radio externo de la configuración supuesta para el caso adiabático

Todos los escenarios de colapso gravitacional corresponden a objetos autogravitantes de radios iniciales de  $10$  [Km] y masa de  $2,031M_{\odot}$  para los modelos de Stewart, Wyman y Buchdahl,  $2,369M_{\odot}$  para el modelo de Florides y  $1,422M_{\odot}$  para el modelo de Tolman IV. La elección para la masa total de la configuración obedece al cumplimiento de las condiciones de aceptabilidad física. La diferencia entre las masas, en un futuro, puede ser un factor discriminador entre los perfiles de densidad que describen la configuración de materia. La masa de las estrellas de neutrones constituye un observable importante que caracteriza estos objetos.

Los perfiles de densidad que se desprenden de cada modelo se representan en la figura 3.2. Para los modelos de Florides, Buchdahl y Stewart, la densidad varía muy poco alcanzando un valor en la superficie del objeto de aproximadamente  $0,5\rho_c$  en el primer caso y de  $0,4\rho_c$  para los dos restantes. En contraste, para el modelo de Tolman IV la densidad cae rápidamente desde el interior de la configuración, hasta casi anularse en la superficie. El modelo de Wyman presenta un comportamiento intermedio en comparación a las situaciones anteriores, alcanzando asintóticamente una densidad superficial de 0,2 veces la densidad central.

La evolución de las demás funciones de estado que caracteriza la dinámica de la configuración de materia se presentan en la figura 3.3. La figura 3.3(a) corresponde a los perfiles de la presión en la dirección radial en función de la variable normalizada  $x = \frac{r}{R(t)}$ . Para todos los casos, la presión cae hasta anularse en la superficie como lo exigen las condiciones de acoplamiento. Particularmente, en el modelo de Florides se puede observar que la presión en la dirección radial cae de forma lenta y homogénea a diferencia de los modelos de Tolman IV y Wyman en los que las variaciones más altas se producen en el interior de la configuración.



**Figura 3.2:** Perfiles de densidad en función de la variable normalizada  $x = \frac{r}{R(t)}$  correspondientes al colapso lento adiabático y no local. Para el modelo de Florides la densidad varía muy poco alcanzando un valor en la superficie del objeto de aproximadamente  $0,5\rho_c$ . En contraste, para el modelo de Tolman IV la densidad cae rápidamente en el interior de la configuración hasta casi anularse en la superficie. Los demás modelos presenta un comportamiento intermedio a los dos anteriores.

De igual forma, en la figura 3.3(b) se presenta los perfiles para la presión en la dirección tangencial en función de la razón  $r/R(t)$ . Para el modelo de Florides la presión tangencial en las capas interiores es mayor que su correspondiente valor central. En el modelo de Buchdahl y Toman IV, la presión en la dirección tangencial disminuye en el interior del objeto autogravitante, y en las capas exteriores aumenta. Se presenta un punto mínimo en aproximadamente  $r = 0,7R(t)$  y en  $r = 0,4R(t)$  respectivamente para cada modelo. Para el modelo de Wyman la presión en la dirección tangencial alcanza un valor asintótico en las capas exteriores de  $0,1P_{tc}$ . Finalmente para Stewart, la presión  $P_t$  presentan un máximo central y disminuye a medida que se alcanza la superficie.

El último término en la ecuación de equilibrio hidrostático,  $\Delta = \frac{2}{r}(P_{\perp} - P_r)$ , representa la “fuerza” debido a la anisotropía local:

$$\begin{aligned} \rightarrow \Delta > 0 &\Leftrightarrow P_{\perp} > P_r \Rightarrow \text{la fuerza es dirigida hacia afuera.} \\ \rightarrow \Delta < 0 &\Leftrightarrow P_{\perp} < P_r \Rightarrow \text{la fuerza es dirigida hacia dentro.} \end{aligned}$$

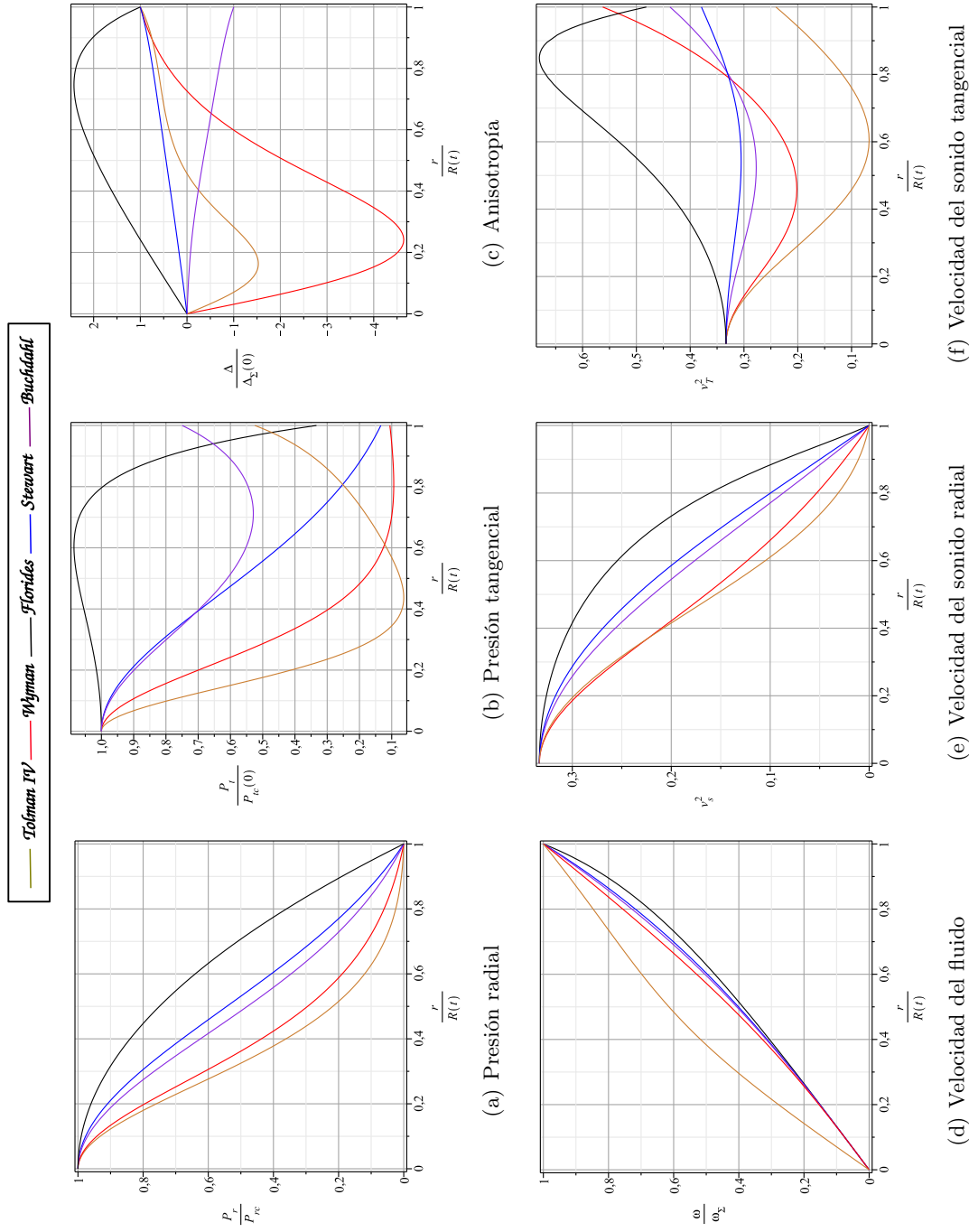
En la figura 3.3(c) se presentan los perfiles de la anisotropía  $\Delta$ , para cada modelo. Para los modelos de Wyman y Tolman IV se observa un cambio de signo: en estos modelos se manifiestan núcleos duros ( $P_r > P_{\perp}$ ) y mantos exteriores suaves ( $P_{\perp} > P_r$ ). Por otro lado, para el modelo de Buchdahl, la presión en la dirección radial es siempre mayor que la presión en la dirección tangencial. Situación contraria a la presentada en los modelos de Stewart y Florides.

El perfil para la velocidad del fluido se presenta en la figura 3.3(d). Para todos modelos se observa que el colapso es aproximadamente homólogo. En otras palabras esto se traduce a que la velocidad aumenta a medida que el elemento de fluido está a mayor distancia del centro.

También en las figuras 3.3(e) y 3.3(f) se presenta el perfil de la velocidad del sonido en dirección radial y en dirección tangencial, respectivamente. Estas cantidades se define de la siguiente forma [19]:

$$v_s^2 = \frac{dP_r}{d\rho} = \frac{P'_r e^{k\omega} + \dot{P}_r}{\rho' e^{k\omega} + \dot{\rho}_r} \quad ; \quad v_s^2|_t = \frac{dP_{\perp}}{d\rho} = \frac{P'_{\perp} e^{k\omega} + \dot{P}_{\perp}}{\rho' e^{k\omega} + \dot{\rho}_r} \quad (3.12)$$

Para todos los perfiles de densidad, de acuerdo al principio de causalidad, la velocidad del sonido es siempre menor que la unidad. Como consecuencia de la ecuación de estado no local, el valor central, para las dos componentes de la velocidad es de aproximadamente 0,33; a partir de este punto la velocidad del sonido radial desciende hasta anularse en la superficie de la configuración. La menor concavidad corresponde al perfil de densidad de Tolman IV y la mayor concavidad al perfil de densidad de Florides. Por otro lado, la velocidad del sonido tangencial disminuye en las capas interiores de la configuración y aumenta en la capas exteriores, lo cual es consistente con algunos modelos de estrellas de neutrones que suponen una corteza más rígida que el interior. Este comportamiento se invierte para el perfil de densidad de Florides.



**Figura 3.3:** Evolución de las funciones de estado que describen el colapso lento, no local y adiabático para diferentes configuraciones de materia caracterizadas por los perfiles de densidad de Florides, Stewart, Buchdahl, Wyman y Tolman IV. El comportamiento de todas las variables satisface las condiciones de aceptabilidad física

CONDICIONES DE ENERGÍA: para terminar, es imperioso comprobar la plausibilidad física de los escenarios de colapso gravitacional que se han expuesto y con ello evaluar la capacidad de la ecuación de estado no local de generar escenarios de colapso gravitacional compatibles con los fenómenos observados.

A partir de la figuras 3.2 y 3.3 se puede comprobar fácilmente que todos los modelos considerados satisfacen las condiciones de aceptabilidad física expuestos en (2.61) y en (2.62):

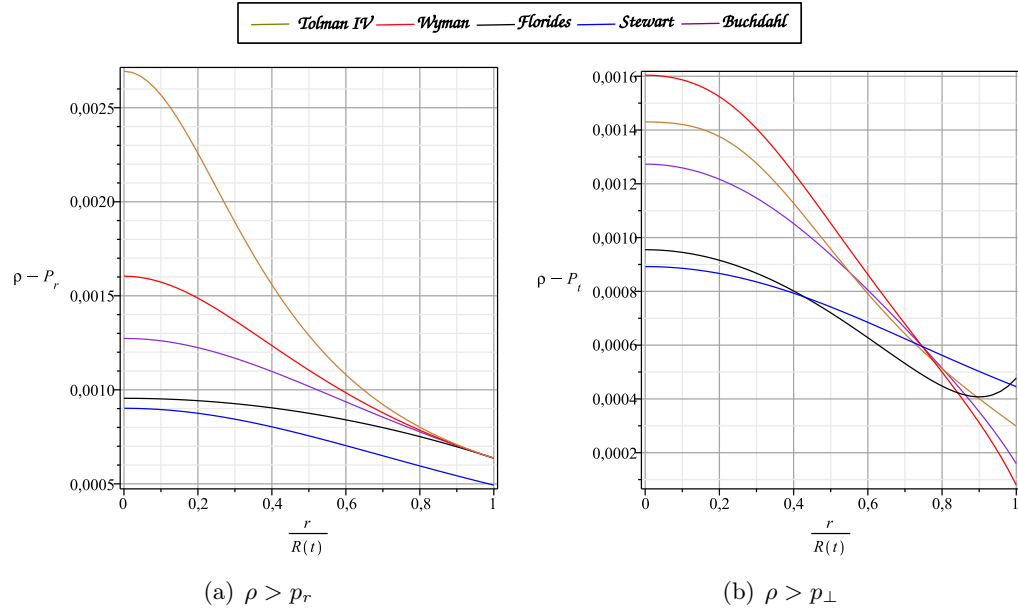
$$\rho > 0 \quad , \quad P_r \geq 0 \quad , \quad P_\perp > 0 \quad , \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P_r}{\partial r} < 0 . \quad (3.13)$$

Además, en la figuras 3.3(e) y 3.3(f) se presenta la velocidad del sonido radial y tangencial para los diferentes modelos estudiados, comprobando que éstas son siempre menor que la unidad.

Para evaluar la aceptabilidad física de los diferentes escenarios simulados, también se ha requerido que las soluciones cumplan con las condiciones de energía [42]:

$$\begin{aligned} [\text{DEC}] \quad & \rho + P_r + 2P_\perp \geq 0 \quad ; \quad \rho \geq P_\perp \quad ; \quad \rho \geq P_r \\ [\text{WEC}] \quad & \rho \geq 0 \quad ; \quad \rho + P_r \geq 0 \\ [\text{SEC}] \quad & \rho + P_\perp \geq 0 \quad ; \quad \rho + P_r \geq 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Es fácil comprobar que si se cumplen las anteriores condiciones de aceptabilidad, las condiciones de energía fuerte y débil también se cumplen. Por tanto, sólo queda comprobar la condición de energía dominante. En la figura 3.4 se observa que la densidad de energía es siempre mayor que los respectivos valores de la presión radial y tangencial en cada región de la configuración.



**Figura 3.4:** Caso adiabático: condición de energía dominante

En conclusión, todos los escenarios que se han descrito de colapso lento adiabático para una configuración que cumple una relación no local entre sus variables física son físicamente plausibles.

Modelo	Densidad ( $\rho(r, t)$ )	Función masa ( $m(r, t)$ )	Presión radial ( $P_r(r, t)$ )	Presión tangencial ( $P_\perp(r, t)$ )
Modelo de B. Stewart <sup>a</sup>	$\eta(t) \frac{(e^z - 1)(e^{2z} + 8ze^z - 1)}{8\pi r^2(e^z + 1)^3}$	$\eta(t) \frac{r}{2} \left( \frac{e^z - 1}{e^z + 1} \right)^2$	$\eta(t) \frac{(1 - e^z)(e^{2z} - 8ze^z - 1)}{8\pi r^2(1 + e^z)^3}$	$\eta(t) K(t)^2 \frac{(\eta(t) - 1)(e^{2z} - 1)^2(1 + e^{4z}) + 8e^{4z}}{\pi e^{-2z}(\eta(t)(e^{2z} - 1)^2 - (e^{2z} + 1)^2)(e^{2z} + 1)^4}$
Modelo de P. Florides <sup>b</sup>	$\eta(t) \left[ 1 - K(t) \left( \frac{r}{R(t)} \right)^2 \right]$	$\eta(t) \pi r^3 \left[ \frac{4}{3} - \frac{4K(t)}{5} \left( \frac{r}{R(t)} \right)^2 \right]$	$\frac{\eta(t)}{15} \left[ 5 - K(t) \left( \frac{3r}{R(t)} \right)^2 \right]$	$\eta(t) \frac{5(25 - 54K(t) \left( \frac{r}{R(t)} \right)^2) + 8\pi\eta(t)r^2\Xi}{15(15 + 8\pi\eta(t) \left( \frac{r}{R(t)} \right)^2 (4K(t)r^2 - 5R(t)^2))}$
Modelo de H. Buchdahl <sup>c</sup>	$\eta(t) \frac{3 + y}{(1 + y)^2}$	$\frac{4\pi\eta(t)r^3}{1 + y}$	$\eta(t) \frac{1 - y}{(1 + y)^2}$	$\eta(t) \frac{1 - 2y - 3y^3 + 8\pi\eta(t)r^2(1 + 3y)}{(1 + y - 8r^2\eta(t))(1 + y^3)}$
Modelo Tolman IV <sup>c, d</sup>	$\frac{3 + 2y - K(t)(3 + 7y + 6y^2)}{C(t)^{-1}(1 + 2y)^2}$	$-\frac{y^3(K(t)(1 + y) - 1)}{2C(t)^{1/2}(1 + 2y)}$	$\frac{C(t)(1 - 2y - K(t)(1 + y + 2y^2))}{8\pi(1 + 2y)^2}$	$C(t) \frac{1 - 6y^2 - 3y + K(t)\Delta + K(t)^2\Omega}{8\pi(1 + y)(1 + K(t)y) + (1 + 2y)^3}$
Modelo de M. Wyman <sup>c</sup>	$-\frac{K(t)(3 + 5y)}{(1 + 3y)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{K(t)y^3}{2C(t)^{\frac{3}{2}}(1 + 3y)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{K(t)(y - 1)}{8\pi(1 + 3y)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{K(t)C(t)(1 + 3y)^{\frac{3}{2}}(y^2 + 4y - 1) + K(t)^2y(3y^2 + 8y + 1)}{8\pi(1 + 3y)^{\frac{3}{2}} [K(t)y + C(t)(1 + 3y)^{\frac{3}{2}}]}$

**Cuadro 3.1:** Modelos no locales: dependencia radial de las variables físicas que se derivan a través de las ecuaciones de campo de Einstein, al suponer perfiles de densidad  $\rho(r, t)$  particulares.

$${}^a z = K(t)r$$

$${}^b \Xi = (18K(t)^2 \left( \frac{r}{R(t)} \right)^4 - 15K(t) \left( \frac{r}{R(t)} \right)^2 + 25)$$

$${}^c y = C(t)r^2$$

$${}^d \Omega = 10y^3 + 6y^4 + 4y^5 + 7y^2 + y; \Delta = -19y^2 - 24y^3 - 4y - 1 - 4y^4$$



## 4. Colapso lento con ecuación de estado no local: caso no adiabático

---

¿CUÁL ES EL CAMBIO EN LA DINÁMICA DE LAS CONFIGURACIONES NO LOCALES CUANDO SE INCORPORA UN FLUJO DE RADIACIÓN ?

Con el fin de continuar explorando la capacidad de la Ecuación de Estado No Local para describir escenarios de colapso gravitacional lento físicamente viables, este capítulo se dedica al estudio de la evolución de configuraciones de materia anisótropas y no locales, que disipan energía a través de un flujo radial de radiación .

Se trabajará nuevamente con los cinco perfiles de densidad presentados en el capítulo anterior. Así, las ecuaciones de campo de Einstein son solucionadas para un flujo de calor particular acoplado en la superficie con un perfil de luminosidad particular. Bajo estas condiciones se encuentran efectos térmicos interesantes que se manifiestan a través de cambios de signos en la velocidad radial con las que se mueven el fluido. Es decir, la distribución de materia puede evolucionar de forma tal que las capas externas escapan de la atracción gravitacional y las capas internas son atraídas (*“thermal peeling”*), o las capas internas de la configuración se expanden mientras que las capas externas colapsan. El objetivo principal de este capítulo será establecer la influencia de la Ecuación de Estado No Local en la aparición de estos fenómenos térmicos.

### 4.1 Solución de la ecuaciones de campo de Einstein

En el capítulo I se derivaron las ecuaciones de campo de Einstein que describen el escenario, en el cual una configuración de materia colapsa lentamente disipando energía (ecuaciones (2.57)-(2.60)). Es importante recordar que la configuración de materia se supuso esféricamente simétrica, limitada por una frontera, con anisotropía en las presiones y una relación no local entre sus funciones de estado. Si se introduce la dependencia radial de un perfil de densidad, las ecuaciones (2.57),(2.58) y (2.59) determinan la función de masa ,  $m(r, t)$ , la presión en la dirección radial,  $P_r(r, t)$ , y la presión en la dirección tangencial,  $P_{\perp}(r, t)$ . Los perfiles de densidad utilizados corresponden a una extensión dinámica de perfiles estáticos conocidas para las ecuaciones de campo de Einstein. Sus expresiones se presentaron en el cuadro (3.1) y son independientes de la presencia o no de flujo de calor.

El principal problema en este punto, consiste en hallar las expresiones explícitas para las funciones de integración y con ello determinar la dinámica de la distribución de materia. Para esto, y en lo que sigue, se explorarán las consecuencias que resultan de trabajar en la frontera

de la configuración dentro del régimen del colapso lento.

Evaluando la ecuación (2.60) en la superficie, se tiene:

$$\left. \frac{\partial m(r, t)}{\partial t} \right|_{r=R(t)} = 4\pi R(t)^2 (\dot{R}(t) \rho_{\Sigma}(t) + q_{\Sigma}(t) e^k). \quad (4.1)$$

En la relación anterior se han considerando las restricciones de la aproximación de colapso lento

$$q \sim O(\omega) \Rightarrow P_r(R(t), t) \sim O(\omega), \quad (4.2)$$

y la definición para la velocidad del elemento del fluido evaluada en la frontera:

$$\omega_{\Sigma} = \dot{R}(t) e^{-k}. \quad (4.3)$$

Para simplificar (4.1), se puede escribir la función de masa  $m(r, t)$  como una expansión en series de Taylor entorno a  $r = R(t)$ :

$$m(r, t) = m(R(t), t) + \left. \frac{\partial m(r, t)}{\partial r} \right|_{\Sigma} (r - R(t)) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 m(r, t)}{\partial r^2} \right|_{\Sigma} (r - R(t))^2 + \dots; \quad (4.4)$$

Derivando parcialmente (4.4) con respecto a la coordenada temporal y evaluando en  $r = R(t)$ , teniendo en cuenta las condiciones de acoplamiento, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m(r, t)}{\partial t} &= \frac{\partial m(R(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \left. \frac{\partial m(r, t)}{\partial r} \right|_{\Sigma} \right) (r - R(t)) - \left. \frac{\partial m(r, t)}{\partial r} \right|_{\Sigma} \frac{dR(t)}{dt} + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \left. \frac{\partial^2 m(r, t)}{\partial r^2} \right|_{\Sigma} \right) (r - R(t))^2 - 2 \left. \frac{\partial^2 m(r, t)}{\partial r^2} \right|_{\Sigma} (r - R(t)) \frac{dR(t)}{dt} + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

↓

$$\left. \frac{\partial m(r, t)}{\partial t} \right|_{\Sigma} = \dot{M}(t) - m'|_{\Sigma} \dot{R}(t). \quad (4.6)$$

Tanto la variación en el tiempo de la masa total como el cambio del radio de la configuración (movimiento de la materia) contribuyen al cambio en el tiempo de la función de masa en la superficie. Este resultado es totalmente general, ya que, solo se ha hecho uso de la condiciones de acoplamiento con el espacio-tiempo exterior.

Reemplazando las ecuaciones (4.6) y (2.57) en (4.1), finalmente se obtiene:

$$-\dot{M}(t) = 4\pi R(t)^2 e^k q|_{\Sigma} + O(\omega^2). \quad (4.7)$$

La tasa de cambio de la masa total de la configuración es proporcional al flujo radial de calor a través de la superficie de la estrella, el potencial gravitacional de la superficie y el cuadrado del radio de la configuración. La relación (4.7) es consecuencia de la aproximación de colapso lento, independiente del comportamiento no local de la configuración. Teniendo en cuenta que en la superficie se cumple  $q(R(t), t) = P_r(R(t), t)$ , la relación (4.7) puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$m'|_{\Sigma} = \frac{2M(t) - R(t) \dot{M}(t) e^{-k}}{R(t)}. \quad (4.8)$$

Con la condición de acoplamiento,  $m(R(t), t) = M(t)$  y la ecuación (4.8) se puede obtener las expresiones para las constantes de integración, propias de cada perfil de densidad. Éstas quedan escritas en función de la masa total  $M(t)$ , el radio  $R(t)$  de la configuración y de sus respectivas tasas de cambio en el tiempo  $\dot{M}(t)$  y  $\dot{R}(t)$ . En el anexo 7 se presentan explícitamente la dependencia radial y temporal de las diferentes variables físicas ( $\rho$ ,  $P_r$ ,  $P_\perp$  y  $\omega$ ) para los perfiles de densidad de Florides, Stewart, Buchdahl, Wyman y Tolman IV.

El sistema de ecuaciones para el caso disipativo se define completamente al introducir la dependencia con respecto a las coordenadas radial y temporal del flujo de calor  $q(r, t)$ . De esta manera, a partir de la expresión (4.7) se puede deducir la evolución temporal del radio externo de la configuración:

$$R(t) = M(t) \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\dot{M}(t)}{\pi q_\Sigma M(t)^2}} \right). \quad (4.9)$$

Este resultado no depende de la elección particular del perfil de densidad para describir la configuración de materia. El sistema de ecuaciones se define totalmente, al introducir la dependencia en el tiempo de la luminosidad medida por un observador en la superficie de la configuración,  $\dot{M}(t)$ .

## 4.2 Modelando: resultados y conclusiones

En esta sección se presentan la forma explícita para la luminosidad  $\dot{M}(t)$ , y el flujo de calor  $q(r, t)$ . En cada caso, se explorarán las restricciones sobre estas variables, que surgen de suponer la aproximación de evolución lenta e introducir la ecuación de estado no local.

PERFIL DE FLUJO DE CALOR: la forma funcional que se introduce para el flujo de calor debe ser compatible con la aproximación de colapso lento. Por lo tanto, se debe cumplir que:

$$q \sim \omega \ll 1 \quad \text{y} \quad \dot{q} \sim \omega^2 \quad (4.10)$$

Se puede obtener más información sobre  $q$  a partir de las ecuaciones de campo de Einstein. Al evaluar el límite cuando  $r = 0$  de la velocidad del fluido  $\omega$ , se obtiene:

$$\omega = -\frac{\dot{m}e^{-k} - 4\pi r^2 q}{4\pi r^2(\rho + P_r)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{r \rightarrow 0} \omega = -\frac{1}{2} \left( \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\dot{m}e^{-k}}{4\pi r^2} - \lim_{r \rightarrow 0} q \right) \left( \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\rho + P_r} \right). \quad (4.11)$$

Teniendo en cuenta que las funciones  $\rho$  y  $P_r$  tienen valores centrales definidos y por la condiciones de aceptabilidad física, ambas son funciones definidas positivas, entonces:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\rho + P_r} = \frac{1}{\rho_c(t) + P_{r_c}(t)}. \quad (4.12)$$

Como la función de masa se anula en el centro de la distribución para todo tiempo  $t$ , de aquí se deduce:

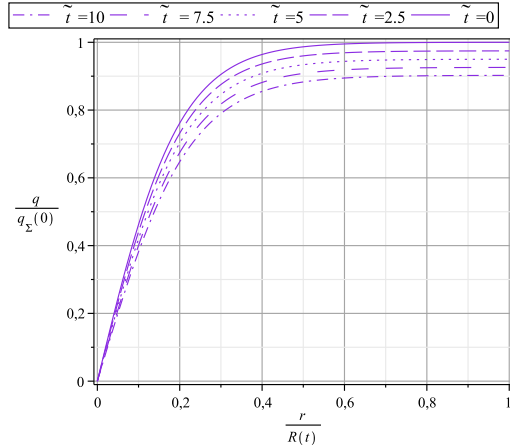
$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\dot{m}}{4\pi r^2} e^{-k} = \frac{0}{0} \quad \Rightarrow \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\dot{m}}{4\pi r^2} e^{-k} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\dot{m}''}{8\pi} e^{-k} = 0. \quad (4.13)$$

De lo anterior, finalmente se puede concluir:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \omega = \left( \frac{1}{\rho|_c + P_r|_c} \right) \lim_{r \rightarrow 0} q . \quad (4.14)$$

Como para todo tiempo  $t$ ,  $\omega(0, t) = 0$ , se debe exigir entonces :

$$\lim_{r \rightarrow 0} q = 0 \quad (4.15)$$



**Figura 4.1:** Flujo de calor para diferentes tiempos  $\tilde{t}$

interiores y se vuelve constante a medida que se alcanza la frontera de la configuración (lo que es consecuente con (4.15)).

Cabe señalar que el flujo de calor expresado en (4.16) corresponde a un perfil particular con el cual se presentan cambios de signo en la velocidad con la que se mueve el fluido para configuraciones no locales. Herrera y *et al* estudiaron en [33] el colapso lento de distribuciones de fluidos simétricamente esféricas y disipativas. Ellos demostraron que dependiendo de la distribución de calor, diferentes signos en la velocidad del fluido pueden aparecer, dando lugar a la división de la configuración de materia. Recientemente, el descascaramiento térmico ha sido considerado en el contexto conocido como “*separating shells*”, el cual relaciona la existencia de una capa que separa la expansión hacia una región exterior de una región interior que colapsa [46, 50].

**PERFILES DE LUMINOSIDAD:** para este trabajo se supondrán dos formas particulares para el perfil de luminosidad:

**Caso I: Luminosidad de la estrella constante:** se supondrá que la configuración de materia emite energía a una razón constante:

$$\frac{dM(t)}{dt} = -\frac{M_{eject}}{t_f} \quad \text{con } M_{eject} = cte > 0 \quad (4.17)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, para todos los escenarios de colapso gravitacional, que se estudiará, la dependencia radial y temporal del flujo de calor,  $q(r, t)$ , se supondrá de la siguiente forma:

$$q = \bar{q}(\tilde{t}) \left[ \frac{1}{2} - \left( \exp \left( \frac{rg(\tilde{t})}{R(\tilde{t})} \right) + 1 \right)^{-1} \right] ; \quad (4.16)$$

en donde

$$\bar{q}(\tilde{t}) = 10^{-4} e^{-2\tilde{t}/195} \quad \text{y} \quad g(\tilde{t}) = 10 e^{-2\tilde{t}/195} .$$

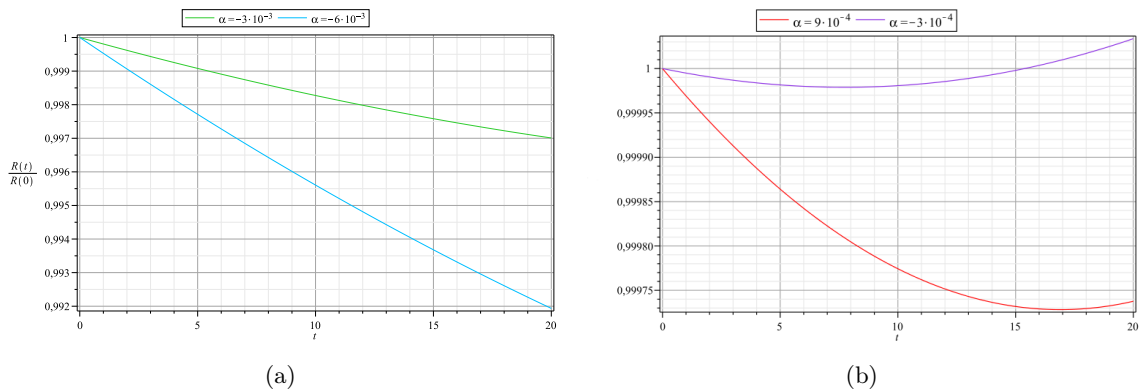
En la figura 4.1 se presenta el perfil de flujo de calor a lo largo de la configuración, para diferentes valores de la variable  $\tilde{t} \equiv \frac{t}{M(0)}$ . En general se observa que éste se anula en el centro de la configuración, presenta un aumento en la capas

en donde  $M_{ejec}$  corresponde a la cantidad de masa emitida y  $t_f$  al tiempo considerado para el colapso. El objetivo principal del caso I será estudiar el efecto que produce la magnitud de la luminosidad de la estrella sobre el colapso gravitacional. En el cuadro 4.1 se resume los valores de  $M_{ejec}$  considerados para los diferentes perfiles de densidad. También se presentan los cambios en la masa total y el radio de la configuración de forma tal que  $t_f = 20$ . Es importante señalar que si la masa emitida es del orden de  $10^{-3} M_{\odot}$  para el perfil de densidad de Tolman IV, se obtiene presiones radiales negativas y gradiente en la presión radial positivos. Esto claramente no cumplen con las condiciones que se han establecido para que el sistema sea físicamente aceptable.

La figura 4.2 muestra la evolución temporal del radio total de la configuración, para cada uno de los valores de  $M_{ejec}$  presentes en el cuadro 4.1. Nótese que para las luminosidades más bajas, la frontera de la configuración sufre un rebote (esto ocurre en  $t = 7,7414$  si  $M_{ejec} = 0,0041 M_{\odot}$  y en  $t = 16,9052$  si  $M_{ejec} = 0,0122 M_{\odot}$ ). Por otro lado, luminosidades más altas derivan en una configuración que colapsa todo el tiempo (ver figura 4.2).

Caso I [ $M(0) = 1,401 M_{\odot}$ ]						
Perfiles de densidad	$M_{ejec_1} M_{\odot}$	$R(0) [Km]$	$\Delta R [Km]$	$M_{ejec_2} M_{\odot}$	$R(0) [Km]$	$\Delta R [Km]$
Buc-Ste-Flo	0,00406	4,3453	0,000141			
M.Wyman	0,01219	4,4611	0,00117	0,0406	5,1233	-0,001552
Tolman IV	0,0824	5,7895	-0,04557			

**Cuadro 4.1:** Parámetros que caracterizan la evolución de la masa total y radio de la estrella cuando emite energía con una razón constante. Se considerarán diferentes cantidades para  $M_{ejec}$  con el fin de estudiar el efecto que produce la cantidad de masa emitida por la distribución durante el colapso gravitacional ( $\Delta A = A(t = t_f) - A(t = 0)$ )



**Figura 4.2:** Caso I: Evolución del radio para una estrella que obedece la ecuación de estado no local y emite energía a una razón constante. A cada curva le corresponde un valor diferente de  $\alpha \equiv \frac{M_{ejec}}{t_f}$ . Nótese que para los valores más pequeños de  $\alpha$  la frontera de la configuración rebota.

**Caso II: Pulso de Gauss para la luminosidad:** como perfil de luminosidad se supondrá un pulso de gauss centrado es  $t = t_m$ :

$$\frac{dM(t)}{dt} = - \left( \frac{8\pi M_{ejec}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_m}{\sigma}\right)^2} ; \text{ con } M_{ejec} > 0 \quad (4.18)$$

donde  $\sigma$  corresponde a la desviación estándar para un pulso de radiación gaussiano, y  $t_m$  corresponde al tiempo en que la luminosidad es máxima.

Al considerar diferentes valores para la masa inicial de la configuración de materia y diferentes fases para la luminosidad, se busca determinar cómo afectan estos parámetros la dinámica del sistema autogravitante.

En el cuadro 4.2 se presenta los diferentes conjuntos de valores que caracterizan la evolución de la masa total y radio de la configuración. La evolución de radio de la configuración se puede ver en las figuras 4.3(a), 4.3(b) y 4.3(c). Sólo se obtienen configuraciones que se expanden cuando  $M(0) = 1,422 M_\odot$ ,  $t_m = 25$  y  $M_{ejec} = 0,0056 M_\odot$  o  $M_{ejec} = 0,02 M_\odot$ . Para el resto de casos la configuración colapsa todo el tiempo.

Caso II ( $\sigma = 200$ )								
$M(0) = 1,43 M_\odot, t_m = 25$			$M(0) = 1,43 M_\odot, t_m = 5$			$M(0) = 1,69 M_\odot, t_m = 25$		
$M_{ejec} M_\odot$	$R(0) [Km]$	$\Delta R [Km]$	$M_{ejec} M_\odot$	$R(0) [Km]$	$\Delta R [Km]$	$M_{ejec} [Km]$	$R(0) [Km]$	$\Delta R [Km]$
0,00539	4,3453	0,000955	0,005409	4,3464	0,000533	0,00539	5,1233	-0,00154
0,0202	4,7036	-0,001003	0,0202	4,7070	0,00581	0,0202	5,4358	-0,00828
0,0405	5,1256	-0,00989	0,0405	5,1304	0,01817	0,0405	5,8148	-0,0213

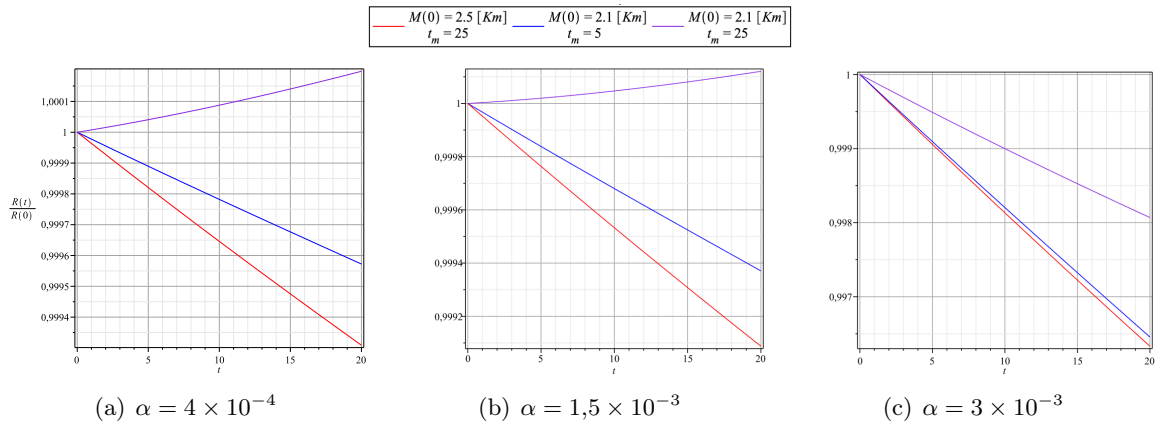
**Cuadro 4.2:** Parámetros que caracterizan la evolución de la masa total y radio externo de la distribución de materia cuando emite energía en forma de un pulso de Gauss. Se han considerado tres modelos en los que se ha variado la masa inicial de la configuración y la fase de la luminosidad. Con esto se busca determinar cómo afectan estos parámetros la dinámica del sistema.

CONCLUSIONES:

Para los casos considerados se han supuestos configuraciones de masas iniciales entre  $1,35 - 1,69 M_\odot$ , que desprenden durante el colapso gravitacional una cantidad del masa de hasta  $10^{-1} M_\odot$ . Los radios de estas configuraciones oscilan en el intervalo de  $[4,3 - 5,8] [Km]$  y su razón de cambio están en el orden de  $10^{-2} [Km]$ .

Con el fin de identificar los diferentes fenómenos térmicos que se manifiestan cuando la configuración de materia responde a una ecuación de estado no local, a continuación se realiza una caracterización de la velocidad  $\omega$  con la que se mueve el fluido.

**Caso I (luminosidad contante):** En la figura 4.4 se presenta el perfil de la velocidad radial del fluido,  $\omega(r, t_0)$ , en función de la variable normalizada  $x = r/R(t)$  y del valor absoluto de la luminosidad (figura 4.4(a)). Se puede observar que para los perfiles de densidad de Buchdahl,



**Figura 4.3:** Caso II: Evolución en el tiempo del radio de una estrella que obedece la EENL y emite radiación en forma de un pulso de Gauss  $\left(\alpha \equiv \frac{8\pi M_{ejec}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$ .

Florides, Stewart y Wyman, valores grandes para la luminosidad corresponden a una velocidad  $\omega$  negativa a lo largo de toda la configuración de materia. A medida que se reduce la cantidad de energía que la estrella radia, existe un valor crítico, a partir del cual se manifiesta el “*thermal peeling*” las capas interiores colapsan y las capas externas se expande.

A partir de la definición utilizada para  $\omega$  en (4.3), es fácil concluir que el descascaramiento debe ser compatible con una configuración en expansión, es decir, se debe cumplir que  $\dot{R}(t) > 0$ . Por tanto, con este criterio es posible calcular el valor crítico para la luminosidad en el cual desaparece el descascaramiento térmico. Éste corresponde a :

$$\alpha_c \equiv \frac{M_{ejec}}{t_f} = 1,124 \times 10^{-3}$$

Entonces, se puede asegurar que si  $\alpha > \alpha_c$  no se manifestará el descascaramiento. Sin embargo, que  $\dot{R}(t) > 0$  es una condición necesaria pero no suficiente para la aparición del fenómeno térmico. El valor de  $\alpha_c$  depende únicamente de la forma en la que evoluciona la frontera del objeto autogravitante durante el colapso y por tanto no depende del perfil de densidad introducido inicialmente.

Por otro lado, el perfil de densidad de Tolman IV responde de una forma diferente a la ecuación de estado no local. En este caso, si la luminosidad es pequeña, las capas interiores de la configuración se expanden mientras que las capas exteriores colapsan. A partir de cierto valor crítico para la luminosidad la configuración colapsa completamente:

$$\alpha_{TIV} \equiv \frac{M_{ejec}}{t_f} = 5,2 \times 10^{-3}$$

Al contrario del caso anterior, este valor está íntimamente relacionado con el perfil de densidad del modelo considerando. Para este perfil de densidad, es interesante notar que el orden de magnitud en que la estrella debe radiar energía para que la frontera se expanda deriva en configuraciones que no cumplen con las condiciones de aceptabilidad física.

En las figuras 4.4(b)-4.4(f) se presenta el perfil  $\omega$  para diferentes valores de la coordenada temporal  $t$  y para dos valores específicos de luminosidad,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  (ver cuadro 4.2). En general se observa, que las capas que colapsan ( $\omega < 0$ ) se desaceleran a medida que avanza el colapso. Por el contrario, las capas que se expanden ( $\omega > 0$ ) tienden a aumentar su velocidad. Finalmente, en el cuadro 4.3 se ha consignado el valor de  $x = r/R(t)$  para el cual la velocidad  $\omega$  cambia de signo.

P. de densidad	$t = 0$	$t = 5$	$t = 10$	$t = 15$	$t = 20$	P. de densidad	$t = 0$	$t = 5$	$t = 10$	$t = 15$	$t = 20$
	$x$ para $M_{ejec} = 0,00406 M_{\odot}$					<b>Wyman</b>	$x$ para $M_{ejec} = 0,01219 M_{\odot}$				
<b>Buchdahl</b>	-	-	0,970	0,902	0,779		-	-	-	-	0,781
<b>Florides</b>	-	-	0,970	0,898	0,746		$x$ para $M_{ejec} = 0,0824 M_{\odot}$				
<b>Stewart</b>	-	-	0,971	0,908	0,8398	<b>Tolman IV</b>	0,484	0,514	0,545	0,613	0,652

**Cuadro 4.3:** Valores de  $x = r/R(t)$  en los que la velocidad de fluido  $\omega$  se anula en el caso en que la velocidad de la configuración es constante. Para el modelo de Tolman IV la velocidad en la capas interiores de la configuración es positiva y en las capas exteriores es negativas. En los demás modelos sucede lo contrario.

**Caso II (pulso de gauss para la luminosidad):** En la figura 4.5(a) se presenta el perfil de de la velocidad del fluido  $\omega$ , en función de la variable normalizada  $x = r/R(t)$  y en función de la masa inicial de la configuración de materia  $M(0)$ . La figura 4.6(a) corresponde al perfil de  $\omega$  en función de  $x$  y la fase del pulso de luminosidad  $t_m$ . En la gráficas se observa que para los perfiles de densidad de Florides, Buchdahl, Wyman y Stewart, existen valores críticos para la masa inicial de la configuración y la fase de la luminosidad a partir de los cuales se empieza a manifestar el “*peeling térmico*”.

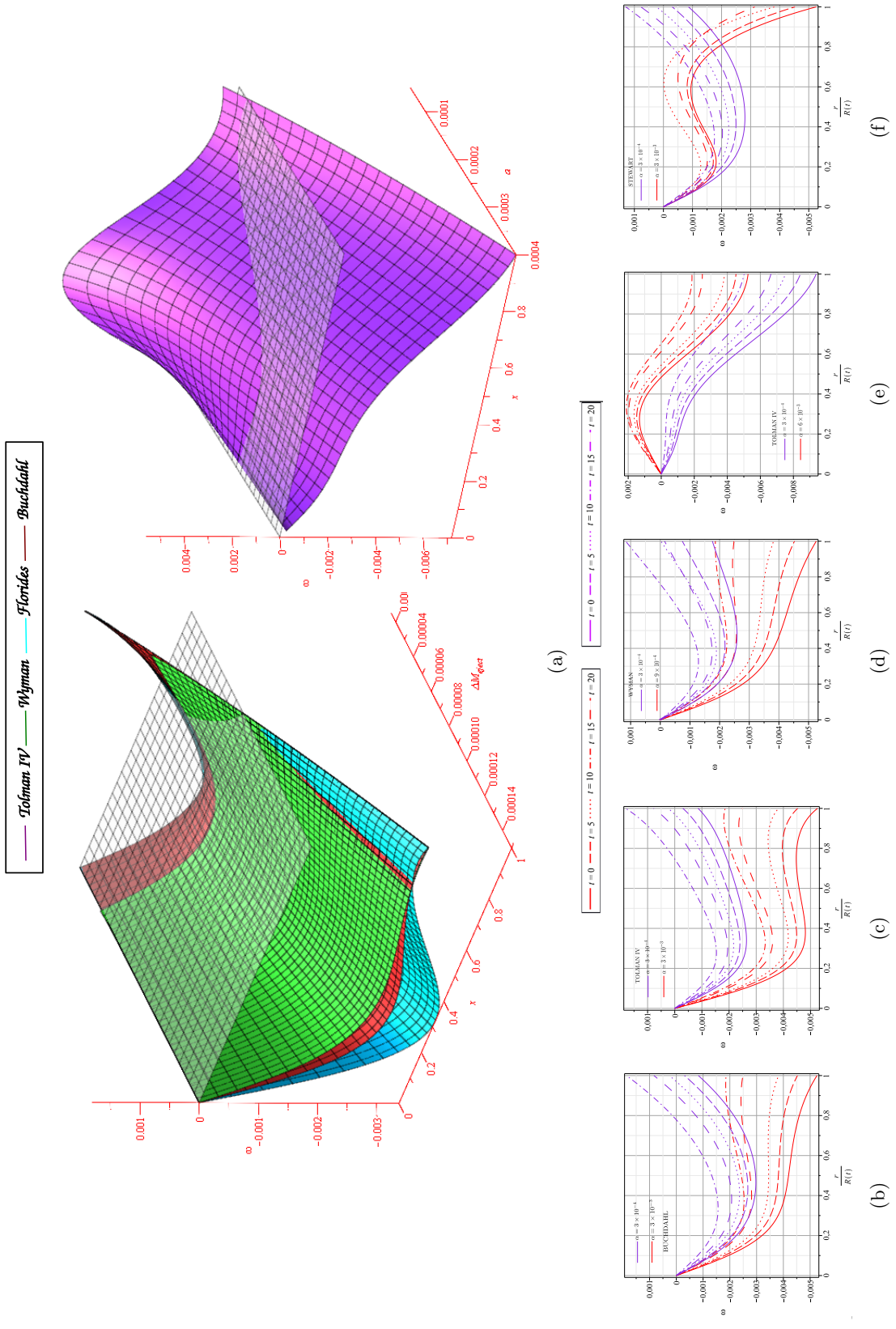
A través de la definición de  $\omega$  dada en (4.3), se puede encontrar el conjunto de valores críticos  $[M_{ejec}, M_c(0), t_{m_c}, \sigma_c]$ , al establecer que  $\dot{R}(t) = 0$ . Así, estos están determinados por la siguiente relación:

$$\frac{0,3 \times 10^{-9} M_c^2 - \Xi(2,83 - 6,91 M_c + 0,14 t_{m_c}) + \Upsilon(0,39 \Xi + 7,91 \sigma_c^2 \Upsilon)}{(47,88 M_c^2 + 7620,9 \Xi)^{1/2}} = 3 \times 10^{-11} M_c^2 - \Xi \quad (4.19)$$

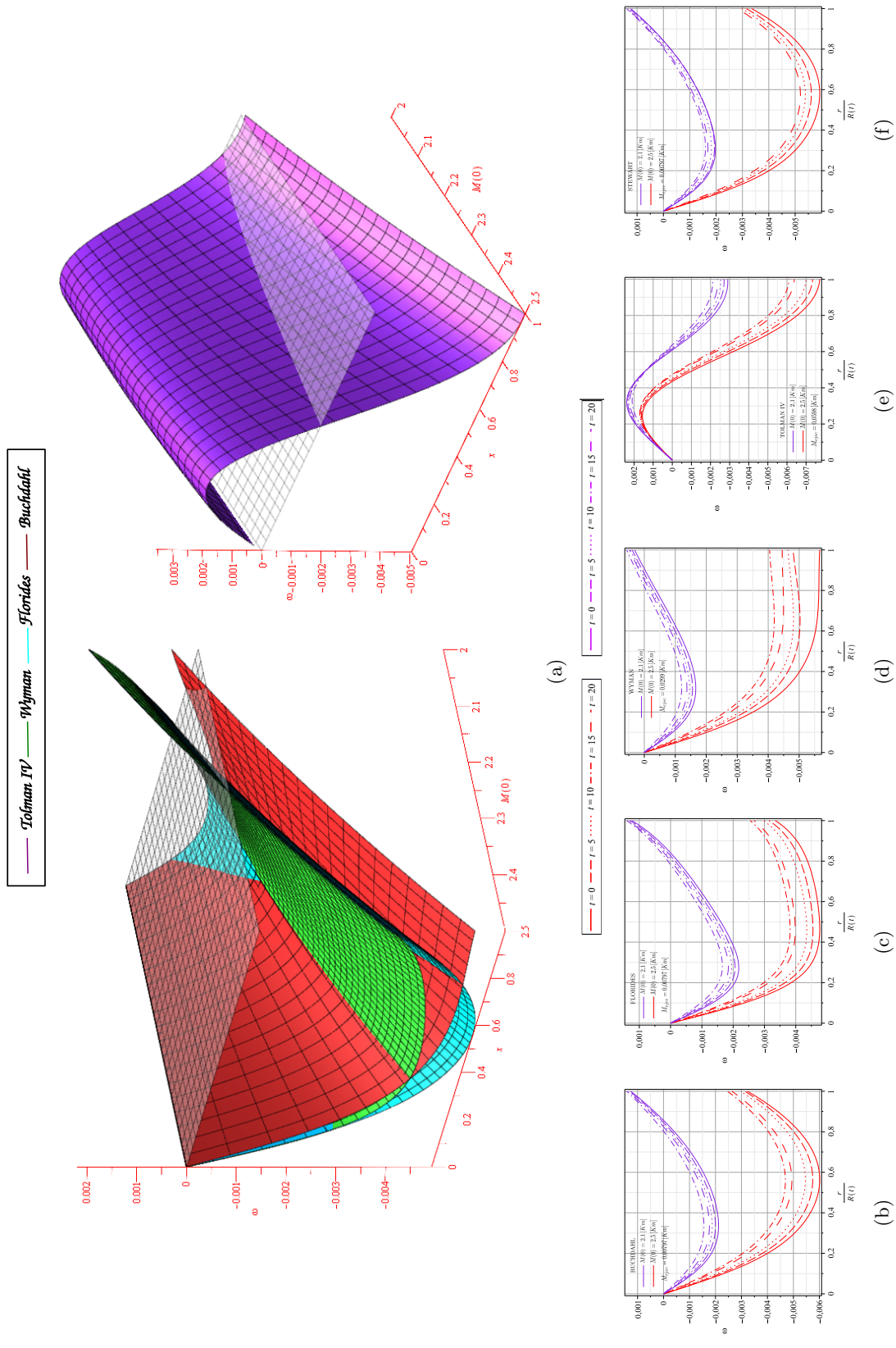
$$\text{donde } \Xi = \frac{8\pi M_{ejec} \sigma_c}{\sigma_c \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t_{m_c}^2}{2\sigma_c^2}\right) \text{ y } \Upsilon = \frac{8\pi M_{ejec} \sigma_c}{\sigma_c \sqrt{2\pi}} \operatorname{erf}\left(\frac{0,003535 t_{m_c}^2}{\sigma_c^2}\right).$$

En la figura 4.7 se puede observar las superficies que forman los valores críticos para diferentes valores de  $\sigma$ . Nótese que a medida que el valor de  $\sigma$  aumenta el área de la superficie disminuye. De esta manera para cada valor de  $\alpha$  y  $\sigma$ , se puede asegurar que si  $M(0) > M_c(0)$  o  $t_m > t_{m_c}$  no se manifestará el descascaramiento.

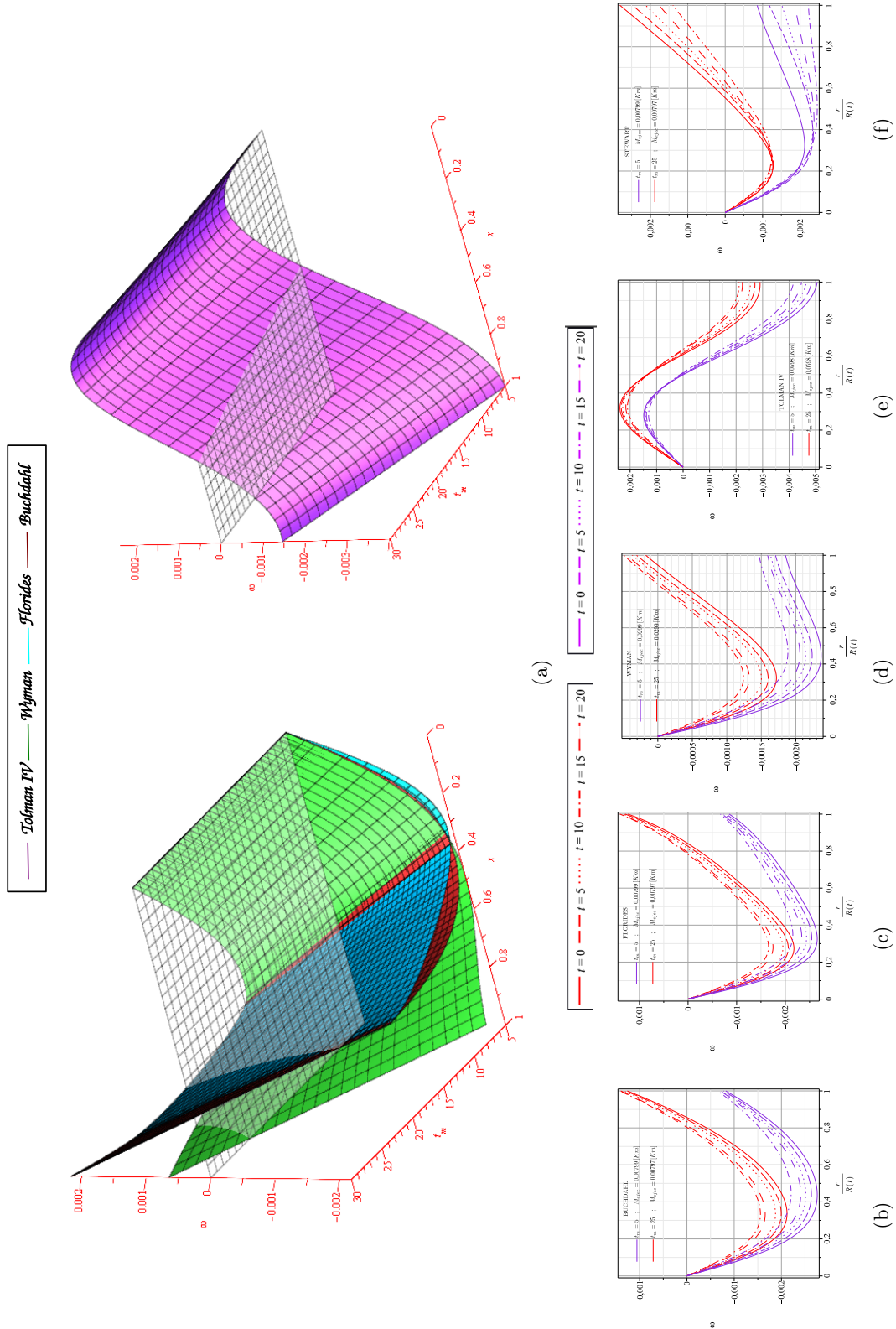
Nuevamente, para el perfil de densidad de Tolman IV, en general, el flujo de calor (4.16) provoca que la distribución de materia evolucione de forma tal que, las capas interiores se expandan y las capas exteriores colapsen. Cambios en la masa inicial de la configuración y variaciones en la fase de la luminosidad producen que se desplace el punto donde ocurre el cambio de signo para la velocidad del fluido y la velocidad máxima que el fluido alcanza.



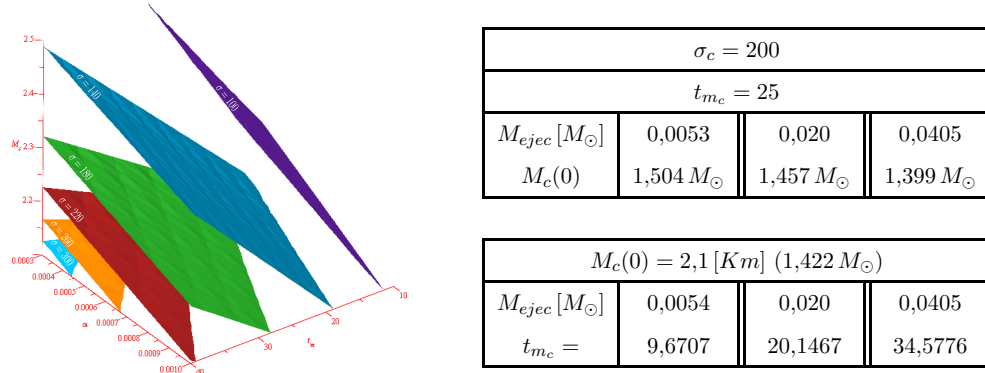
**Figura 4.4:** Caso I. Caracterización del comportamiento de la velocidad del fluido  $\omega$  para una configuración que obedece la ecuación de estado no local y emite radiación a una razón constante. En (a) se presenta  $\omega(r, 0)$  en función de  $x = r/R(t)$  y de  $M_{ejec}$  y de  $M_{ejec}$ . Las configuraciones de materias no exhiben descascaramiento térmico cuando el valor de la masa radiada supera el valor crítico  $2,248 \times 10^{-4} M_{\odot}$ . En (b)-(f) se presenta el perfil  $\omega$  para diferentes valores de la coordenada temporal  $t$  y para dos valores de  $\alpha \equiv M_{ejec}/t_j$ . Las capas que colapsan ( $\omega < 0$ ) se desaceleran, mientras que las capas que se expanden ( $\omega > 0$ ) tienden a acelerar.



**Figura 4.5:** Caso II.A. Caracterización del comportamiento de la velocidad del fluido  $\omega$  para una configuración que obedece la EENL y emite en forma de un pulso gaussiano. En (a) se presenta el perfil de la velocidad radial del fluido,  $\omega(r, t_0)$ , en función de  $x = r/R(t)$  y de la masa inicial de la configuración  $M(0)$ . Para cada valor de masa radiada, existe una masa inicial crítica para la configuración a partir de la cual el descaramiento térmico desaparece. En (b)-(f) se presenta el perfil  $\omega$  para diferentes valores de la coordenada temporal  $t$ .



**Figura 4.6:** Caso II.B. Caracterización del comportamiento de la velocidad radial del fluido  $\omega$  para una configuración que obedece la EENL y emite en forma de un pulso gaussiano. En (a) se presenta el perfil de la velocidad radial del fluido para distintos modelos,  $\omega(r, t_0)$ , en función de  $x = r/R(t)$  y del tiempo de ignición  $t_m$ . Para cada valor de masa radiada, existe un tiempo de ignición crítico a partir del cual se empieza a manifestar el descaramiento térmico. En (b)-(f) se presenta el perfil  $\omega$  para diferentes valores de la coordenada temporal  $t$ .



**Figura 4.7:** Valores críticos  $[\alpha_c \equiv \frac{8\pi M_{ejec}}{\sigma\sqrt{2\pi}}, M_c(0), t_{m_c}, \sigma_c]$  asociados al *thermal peeling* suponiendo un perfil de luminosidad gaussiano. Para cada valor  $\sigma$ , se puede asegurar que si  $M(0) > M_c(0)$  o  $t_m > t_{m_c}$  o  $M_{ejec} < M_{ejec_c}$  no se manifestará el descascaramiento.

De igual manera, en las figuras 4.5(b)-4.5(f) y en 4.6(b)-4.6(b), se presentan las evoluciones de la velocidad,  $\omega$ , para diferentes tiempos. Para los perfiles de densidad de Buchdahl, Florides, Wyman y Stewart, la velocidad disminuye en las regiones donde el fluido colapsa, mientras que las capas que escapan de la atracción gravitacional se desaceleran. Las zonas interiores, por lo general, alcanzan una mayor velocidad que el resto de la configuración. En el caso del perfil de densidad de Tolman IV, el fluido tiende a desacelerar a medida que avanza el colapso gravitacional.

Finalmente, en el cuadro 4.4 se presentan los valores de  $x = r/R(t)$  en los cuales la velocidad del elemento del fluido cambia de signo. Estos valores corresponden al caso particular en que  $M_c(0) = 1,42 M_\odot$ ,  $\sigma = 200$  y  $t_m = 25$ . En general, se observa que el descascaramiento abarca más capas con el tiempo.

P. de densidad	$t = 0$	$t = 5$	$t = 10$	$t = 15$	$t = 20$		P. de densidad	$t = 0$	$t = 5$	$t = 10$	$t = 15$	$t = 20$
<b>Buchdahl</b>	$x$ para $M_{ejec} = 0,00539 M_\odot$						<b>Wyman</b>	$x$ para $M_{ejec} = 0,0202 M_\odot$				
<b>Florides</b>	0,857	0,846	0,834	0,821	0,803			0,907	0,883	0,864	0,851	0,819
<b>Stewart</b>	0,849	0,840	0,831	0,813	0,806		<b>Tolman IV</b>	$x$ para $M_{ejec} = 0,0405 M_\odot$				
								0,609	0,615	0,622	0,627	0,637

**Cuadro 4.4:** Valores de  $x = r/R(t)$  para lo que  $\omega$  cambia de signo al suponer un pulso de gaussiano para la luminosidad. Para el modelo de Tolman IV la velocidad en las capas interiores de la configuración es positiva y en las capas exteriores es negativa. En los demás modelos sucede lo contrario.

Es importante resaltar que los anteriores resultados son válidos si el flujo de calor es de la forma de la ecuación (4.16), la estrella evoluciona lentamente y sus funciones físicas cumplen un ecuación de estado no local. Además, es interesante notar que los puntos donde se inicia el descascaramiento se sitúan siempre en zonas de la configuración donde el flujo de calor es constante. Las zonas donde el fluido alcanza las mayores velocidades, tampoco corresponden a zonas donde se presenta mayor flujo de radiación.

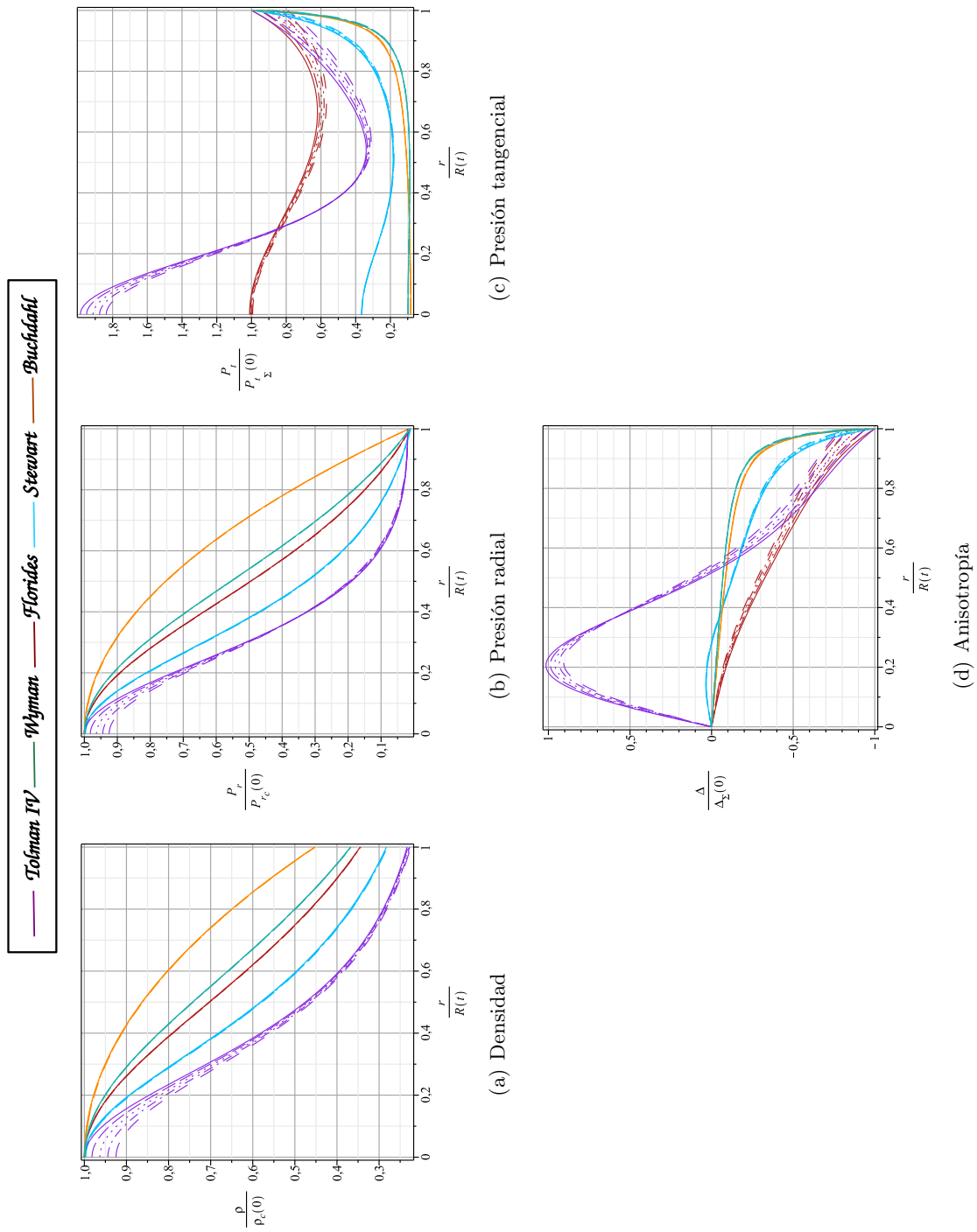
En conclusión se ha encontrado que las configuraciones de materia no locales exhiben descascaramiento térmico cuando la mayor parte de la energía radiada viene de las capas externas de la distribución. La energía térmica generada en estas capas es transformada en energía cinética, lo que permite el desprendimiento de la configuración. Este fenómeno es muy sensible tanto a la forma con la que la estrella emite energía como a las condiciones iniciales de las misma.

Para cada uno de los casos estudiados, en la figura 4.8 se presentan la evolución de las funciones de estado  $\rho$ ,  $P_r$ ,  $P_t$  y  $\Delta$  para todos los perfiles de densidad. No se ha particularizado la luminosidad de la configuración, ya que no se presentan cambios significativos en la evolución de las funciones de estado. En general se observa que estas variables pueden representar objetos autogravitantes físicamente razonables:

$$\rho > 0 \quad ; \quad P_r > 0 \quad ; \quad P_{\perp} > 0 \quad ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} < 0 \quad ; \quad \frac{\partial P_r}{\partial r} < 0$$

La evaluación de las demás condiciones de energía se presentan en el Apéndice 7. Nótese que el perfil a lo largo de la configuración para todas las variables es aproximadamente constante en el tiempo, lo que es consistente con el régimen de evolución lenta.

Es importante resaltar que en Tolman IV, la mayor concentración de energía se presenta en el centro de la distribución de materia (ver figura 4.8(a)) y la presión radial cae con mayor velocidad en las capas interiores (ver figura 4.8(b)). Además, los modelos de Tolman IV y Wyman presentan núcleos suaves y mantos exteriores duros (ver figura 4.8(d)). Este efecto se presentan con mayor intensidad para Tolman IV. Estos hechos, se pueden pensar como una posible razón de los resultados tan particulares obtenidos para este perfil de densidad: una configuración que se expande en el interior y se contraer en la superficie.



**Figura 4.8:** Comportamiento de las funciones de estado que caracterizan la evolución lenta de la configuración de materia que obedece una EENL. Nótese que las condiciones de aceptabilidad física se satisfacen en todos los casos. Para Toman IV se observa que se manifiesta un cambio de signo para la anisotropía del sistema.

## 5. ¿Qué aporta la ecuación de estado no local?

¿CUÁL ES LA CONTRIBUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ESTADO NO LOCAL AL COLAPSO GRAVITACIONAL LENTO ADIABÁTICO Y NO ADIABÁTICO?

Hasta aquí se ha demostrado que configuraciones de materia no locales pueden ser candidatos factibles para la materia que forma los objetos estelares compactos. Así, se han generado escenarios de colapso gravitacional lento para configuraciones radiantes de este tipo de materiales y se ha demostrado su plausibilidad física. Ahora, se hace importante explorar qué es lo que realmente aporta la ecuación de estado no local a la evolución del sistema.

El objetivo en este capítulo será determinar con mayor detalle cómo contribuye la ecuación de estado no local a la evolución del sistema autogravitante en los diferentes escenarios de colapso gravitacional lento. Así, se compararán los modelos no locales anisótropos, ya desarrollados, con su posibles contrapartes locales. Para este último caso, las ecuaciones de campo de Einstein serán solucionadas al introducir una relación que describe el comportamiento de la anisotropía del sistema. Se han generado modelos adiabáticos y no adiabáticos, tomando como principal punto de comparación la evolución del perfil de velocidad con la que se mueve el fluido.

### 5.1 Ecuaciones de Einstein sin la ecuación de estado no local

Las ecuaciones de campo de Einstein que describen el colapso gravitacional de una configuración de materia esféricamente simétrica, anisótropa y que disipa energía a través de un flujo radial de calor, en la aproximación de colapso lento, son:

$$8\pi\rho = \frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) = \frac{2m'}{r^2}, \quad (5.1)$$

$$8\pi P_r = \frac{1}{r^2} + e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) = \frac{2m}{r^3} + \frac{\nu'}{r} \left( \frac{2m}{r^2} - \frac{1}{r} \right), \quad (5.2)$$

$$8\pi P_{\perp} = \frac{e^{-\lambda}}{4} \left( 2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right), \quad (5.3)$$

$$\omega = -\frac{1}{8\pi(\rho + P_r)} \left( \frac{\dot{\lambda}}{r} e^{(-\nu-\lambda)/2} + \hat{q} \right) = \frac{1}{\rho + P_r} \left( \frac{\dot{m}e^{\nu/2}}{4\pi r \sqrt{r(r-2m)}} - q \right). \quad (5.4)$$

Las condiciones de acoplamiento entre el espacio tiempo interior y exterior de la distribución de materia son:

$$m(R(t), t) = M(t) \quad ; \quad e^{\nu}|_{\Sigma} = 1 - \frac{2M(t)}{R(t)} \quad ; \quad P_r(R(t), t) = q(R(t), t). \quad (5.5)$$

Debido al desconocimiento físico que existe en torno del comportamiento de la presión tangencial, se encuentran diferentes clases de ansatz para introducir la anisotropía en la configuración de materia. Este tipo de propuestas usualmente se eligen a partir de criterios heurísticos para simplificar el problema. La razón de esto es lo poco intuitiva que es la forma de la presión tangencial durante el colapso.

Así, siguiendo el enfoque empleado en [13], se propone la siguiente relación para la anisotropía del sistema:

$$P_{\perp} - P_r = C f(P_r, r) (\rho + P_r) r^n, \quad (5.6)$$

donde  $C$  es un parámetro que mide la anisotropía; la función  $f$  y el número  $n$  son especificados para cada modelo, buscando siempre que el sistema sea integrable. Con (5.6), la ecuación de equilibrio hidrostático es:

$$\frac{dP_r}{dr} = -(\rho + P_r) \frac{\nu'}{2} + 2C f(P_r, r) (\rho + P_r) r^{n-1}. \quad (5.7)$$

De (5.2) se obtiene:

$$\frac{\nu'}{2} = \frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)}. \quad (5.8)$$

Es importante notar que la ecuación (5.7) puede ser integrable si la dependencia radial de  $\rho$  se conoce y  $f(P_r, r)$  se especifica. Si se supone que la función  $f(P_r, r)$  de la siguiente forma:

$$f(P_r, r) r^{n-1} = \frac{\nu'}{2} \quad (5.9)$$

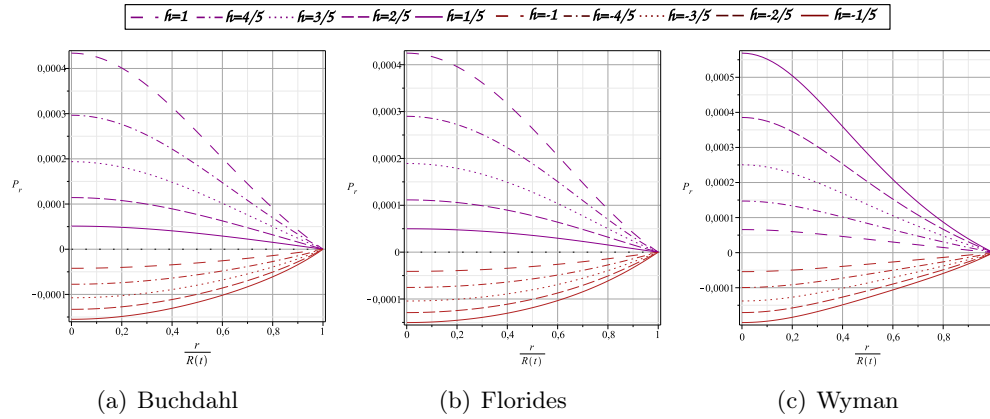
↓

$$\frac{dP_r}{dr} = -h(\rho + P_r) \frac{\nu'}{2} = -h \left( \frac{m'}{4\pi r^2} + P_r \right) \frac{m + 4\pi r^3 P_r}{r(r - 2m)}; \quad (5.10)$$

donde  $h = 1 - 2C$ . Para  $h = 0$  el gradiente de la presión radial se anula, por lo cual la presión radial es constante a lo largo de toda la configuración e igual al flujo de calor que atraviesa la superficie, debido a la condición de acoplamiento ( $P_r|_{\Sigma} = q|_{\Sigma}$ ). Para  $h = 1$  se recupera el caso isótropo.

## 5.2 Modelando sin la ecuación de estado no local

Al introducir el perfil de densidad, a través de (5.1) se obtiene la función de masa,  $m(r, t)$  y con (5.10), se determina la presión en la dirección radial,  $P_r(r, t)$ . La función métrica  $\nu(r, t)$ , es hallada a través de (5.8), lo que permite obtener la velocidad del fluido,  $\omega(r, t)$ , vía la ecuación (5.3). La presión en la dirección tangencial, puede ser determinada ya sea a través de la relación introducida para la anisotropía o a través de las ecuaciones de Einstein. Todas las funciones de integración que van surgiendo son determinadas a través de las ecuaciones de acoplamiento presentadas en (5.5). En el Apéndice 7 se presenta explícitamente la ecuación (5.10) para los perfiles de Buchdahl, Florides y Wyman. En todos los casos, valores negativos para la constante  $h$ , resultan en presiones negativas, lo que no cumple las condiciones de aceptabilidad física (ver figura 5.1).



**Figura 5.1:** Perfil de la presión radial en función de la variable normalizada  $x = r/R(t)$ , para diferentes grado de anisotropía en el colapso lento adiabático. Si  $h < 0$  se obtiene valores negativos para  $P_r$ .

A continuación se discuten los resultado obtenidos para el caso adiabático y radiante, comparándolos, respectivamente, con sus contrapartes no locales:

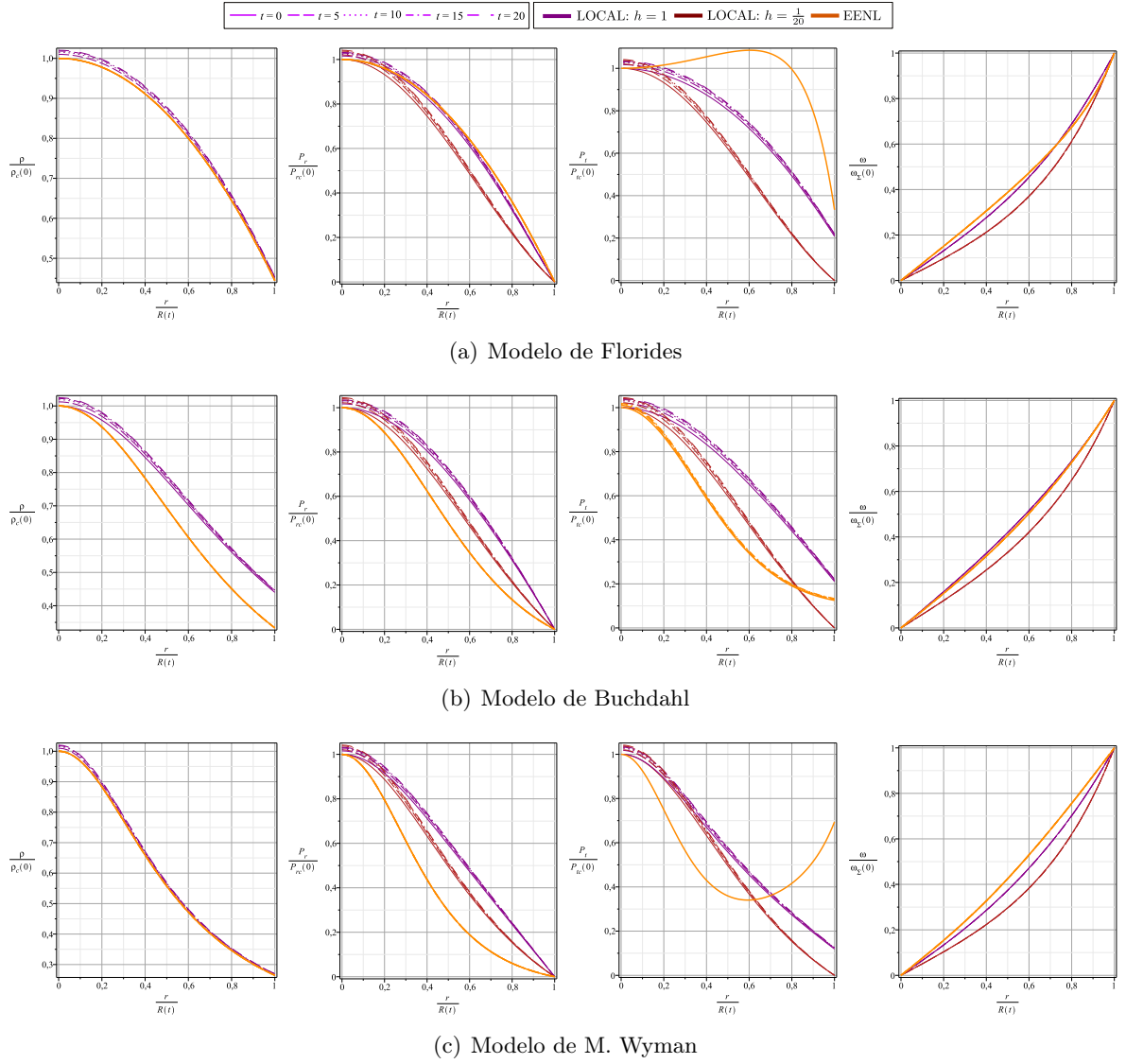
**CASO ADIABÁTICO:** en la figura 5.2 se presenta los perfiles de las variables físicas ( $\rho$ ,  $P_r$ ,  $P_\perp$  y  $\omega$ ) que caracterizan la evolución adiabática de la configuración de materia. La evolución de la frontera de la configuración se supuso de la forma (3.1). Se trabajaron con dos valores diferentes para  $h$ :  $h = 1$  que representa el caso isótropo ( $P_r = P_\perp$ ), y  $h = 1/20$  que corresponde un caso anisótropo. En [27] fue demostrado que, en el caso estático, la ecuación de estado no local genera soluciones isótropas que no satisfacen las condiciones de aceptabilidad física. En general, con base en la figura 5.2, se puede concluir que la ecuación de estado no local reduce significativamente la tasa de cambio en el tiempo de las variables físicas. Nótese que la densidad de la configuración se incrementa con el tiempo, para los modelos locales. En todos los modelos, existe una gran coincidencia para el perfil de la velocidad del fluido entre los casos no locales y locales anisótropos ( $h = 1/20$ ). Para el caso isótropo ( $h = 1$ ), la velocidad del fluido se aleja de la contracción homóloga. En Buchdahl y Wyman, el gradiente de la densidad de energía y presión radial ( $\frac{\partial \rho}{\partial r}$  y  $\frac{\partial P_r}{\partial r}$ ) resulta ser más pronunciado para las funciones no locales que para sus contrapartes locales. En el modelo de Florides, se observa una gran coincidencia entre los perfiles de estas variables.

En el cuadro 5.1 se presenta una comparación de los valores centrales para la densidad de energía y la presión radial, y el valor superficial de la presión tangencial entre los modelos locales y no locales. En general, los valores centrales de estas cantidades son aumentados por la ecuación de estado no local.

**CASO RADIANTE:** para esta situación, retomando en parte los casos estudiados en el capítulo anterior, se supondrá perfiles de luminosidad de la siguiente forma:

**Caso I:** Luminosidad constante:

$$\dot{M}_c(t) = -\frac{M_{ejec}}{t_f} \quad (5.11)$$



**Figura 5.2:** Comparación entre el comportamiento local y no local de las variables físicas que describen la evolución lenta y adiabática de configuraciones compactas. La ecuación de estado no local reduce significativamente la tasa de cambio en el tiempo de las variables físicas.

### Caso II: Pulso de Gauss para la luminosidad

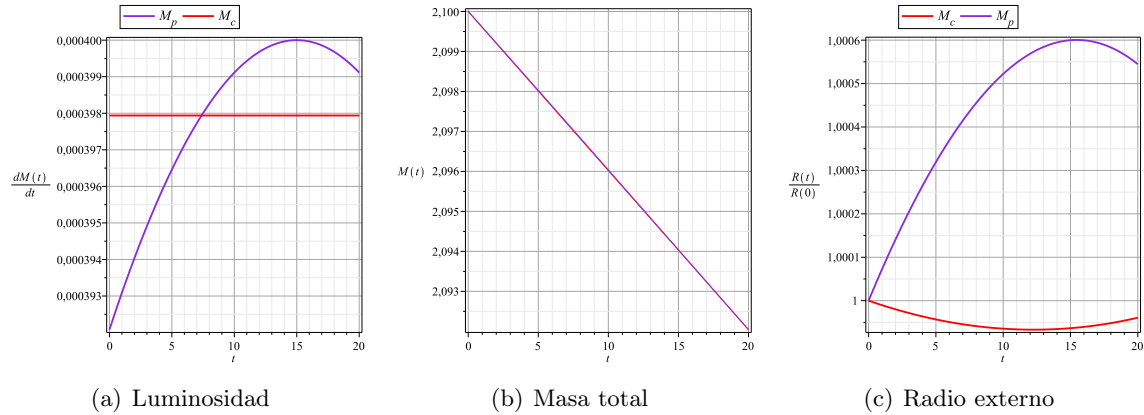
$$\dot{M}_p(t) = -\frac{8\pi M_{ejec}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_m}{\sigma}\right)^2} \quad (5.12)$$

Para ambos casos, en la figura 5.3 se esquematiza el perfil de luminosidad y la evolución tanto de la masa total como del radio externo de la configuración. Es importante resaltar que, la evolución de la frontera de la configuración está determinada por la relación (4.7). El valor de los parámetros utilizados son:

$$M(0) = 1,458 M_\odot \quad ; \quad M_{ejec} = 0,0055 M_\odot \quad ; \quad \sigma = 75 \quad ; \quad t_m = 15 \quad ; \quad t_f = 20$$

	Buchdahl			Florides			Wyman		
	$h = \frac{1}{20}$	$h = 1$	EENL	$h = \frac{1}{20}$	$h = 1$	EENL	$h = \frac{1}{20}$	$h = 1$	EENL
$\rho_c(0) \times 10^{-3}$	1,193		1,432	1,074		1,4323	1,805		1,432
$P_{r_c}(0) \times 10^{-3}$	0,01188	0,4339	0,4774	0,01154	0,4247	0,4775	0,01519	0,5689	0,4774
$P_{\Sigma}(0) \times 10^{-4}$	0,03743	0	1,683	0,034019	0	1,591	0,03402	0	1,591

**Cuadro 5.1:** Caso adiabático: comparación entre los modelos que obedecen una EENL y los modelos que obedecen una ecuación para la anisotropía de los valores centrales de la densidad de energía ( $\rho_c$ ) y presión radial ( $P_{r_c}$ ) y el valor superficial de la presión tangencial ( $P_{\Sigma}$ ). Par el caso isótropo la presión tangencial se anula en la superficie debido a las condiciones de acoplamiento con el espacio tiempo exterior.



**Figura 5.3:** Caso radiante: perfil de luminosidad y evolución de la masa total y el radio externo de la configuración. Cuando la estrella emite con razón constante, ésta colapsa inicialmente, su frontera sufre un rebote en  $t = 12,055$  y empieza a expandirse. Éste efecto se invierte cuando la luminosidad toma forma de un pulso gaussiano.

En la figura 5.4 se presenta la velocidad del elemento de fluido,  $\omega$ , en función de  $x = r/R(t)$ . El caso I corresponde a las figuras 5.4(a)-5.4(c). En éstas se muestra un incremento en el descascaramiento a medida que avanza el colapso gravitacional. Contrario a lo que sucede cuando se supone un pulso de Gauss para la luminosidad como se observa en las figuras 5.4(d)-5.4(f). El descascaramiento térmico se manifiesta en las mismas situaciones en las que se presentaba con la ecuación de estado no local. La contribución de la EENL es aumentar el número de capas que poco a poco escapan de la atracción gravitacional de la estrella. En general, valores pequeños para  $h$ , producen que la velocidad del elemento de fluido alcance mayores magnitudes, en comparación con las magnitudes alcanzadas para mayores valores de  $h$ .

La derivada convectiva de la función de masa mide la variación temporal de la masa para un elemento de fluido. Ésta está definida por:

$$\frac{Dm}{Dt} \equiv \dot{m} + m' \frac{dr}{dt} \quad (5.13)$$

Utilizando las ecuaciones de campo de Einstein, se puede escribir, en general:

$$\omega = -\frac{1}{4\pi r^2 P_r} \left( e^{\lambda-\nu} \frac{Dm}{Dt} + 4\pi r^2 q \right) \quad (5.14)$$

y específicamente, para el caso no local:

$$\omega = -\frac{1}{4\pi r^2 P_r} \left( e^{k(t)} \frac{Dm}{Dt} + 4\pi r^2 q \right) \quad (5.15)$$

Es claro que, incluso en el caso más simple de evolución lenta, la velocidad del fluido es una combinación de transporte de masa (convección) y flujo de radiación.

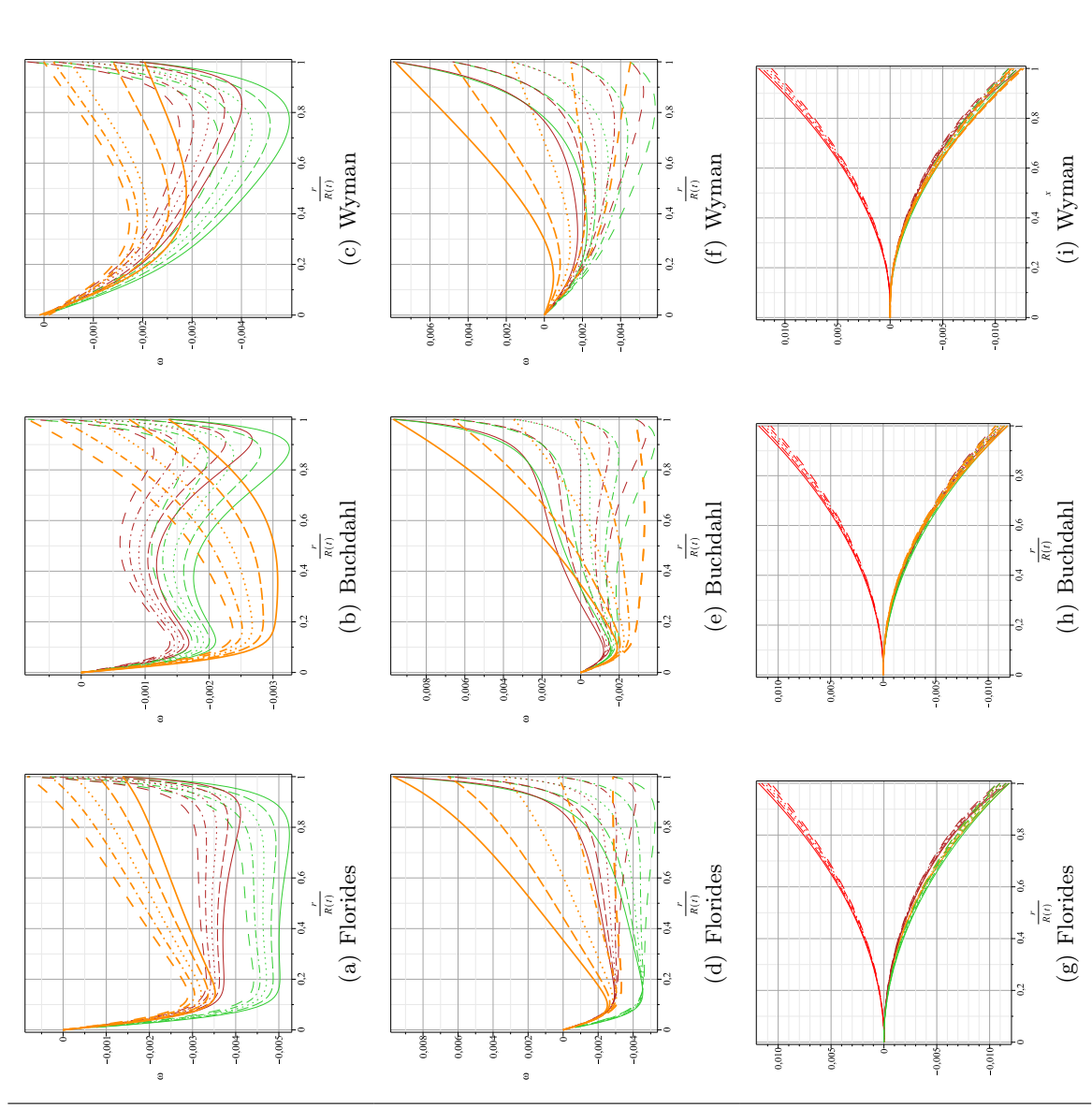
En las figuras 5.4(g)-5.4(i) se presenta el perfil del término  $e^{\lambda-\nu} \frac{Dm}{Dt}$  para las configuraciones locales y  $e^{k(t)} \frac{Dm}{Dt}$  para las configuraciones no locales. A partir de aquí se puede concluir que el descascaramiento es un fenómeno puramente térmico. Nótese que las capas que son expelidas corresponden a las regiones menos densas de la configuración, en las que se presenta el mayor transporte de materia. Sin embargo, la materia es transportada en sentido contrario al flujo de radiación.

En la figura 5.5 se presenta la evolución de las funciones físicas que caracterizan la configuración de materia durante el colapso gravitacional, para los modelos de Buchdahl, Florides y Wyman. Nuevamente, el gradiente de la presión radial es más pronunciado para los casos no locales. En cuanto a la presión tangencial, se observa que para el menor valor de  $h$ , en las capas interiores de la configuración de materia la presión es decreciente, mientras en las capas exteriores es creciente. Entre más cercano es el valor de  $h$  es igual a 1, la presión tangencial se acerca a la presión radial (caso isótropo).

En el cuadro 5.2 se presenta una comparación para los valores de la densidad central, presión radial central y la presión tangencial en la superficie. En general se observa que la ecuación de estado no local tiende a disminuir los valores centrales de la densidad de energía y a aumentar la presión tangencial superficial y la presión radial central.

$\times 10^{-3}$	$\dot{M}_c(t)$									$\dot{M}_p(t)$													
	EENL			Buchdahl			Florides			Wyman			EENL			Buchdahl			Florides			Wyman	
$\rho_c(0)$	11,92	17,17	9,09	9,16	8,63	10,84	11,94	17,21	9,10	9,18	8,59	9,38											
$P_{r_c}(0)$	3,97	3,65	0,419	3,02	1,01	0,05	3,61	3,47	0,27	3,98	3,69	0,417	3,03	3,11	3,16	3,12	2,34	0,22					
$P_{\perp\Sigma}(0)$	35,26	0,89	2,67	27,86	1,41	4,35	2,39	0,43	0,04	40,61	0,04	2,71	28,35	1,02	0,05	6,44	1,23	0,66					

**Cuadro 5.2:** Caso no adiabático: comparación entre los modelos que obedecen una EENL y los modelos que obedecen una ecuación para la anisotropía de los valores centrales de la densidad de energía ( $\rho_c$ ) y presión radial ( $P_{r_c}$ ) y el valor superficial de la presión tangencial ( $P_{\perp\Sigma}$ ) con  $h_1 = 0,2$  y  $h_2 = 0,033$



**Luminosidad contante**

$$\dot{M}(t) = \frac{M_e j_{ec}}{t_f}$$



**Pulso de luminosidad**

$$\dot{M}(t) = \frac{8\pi M_e j_{ec}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_m}{\sigma}\right)^2}$$

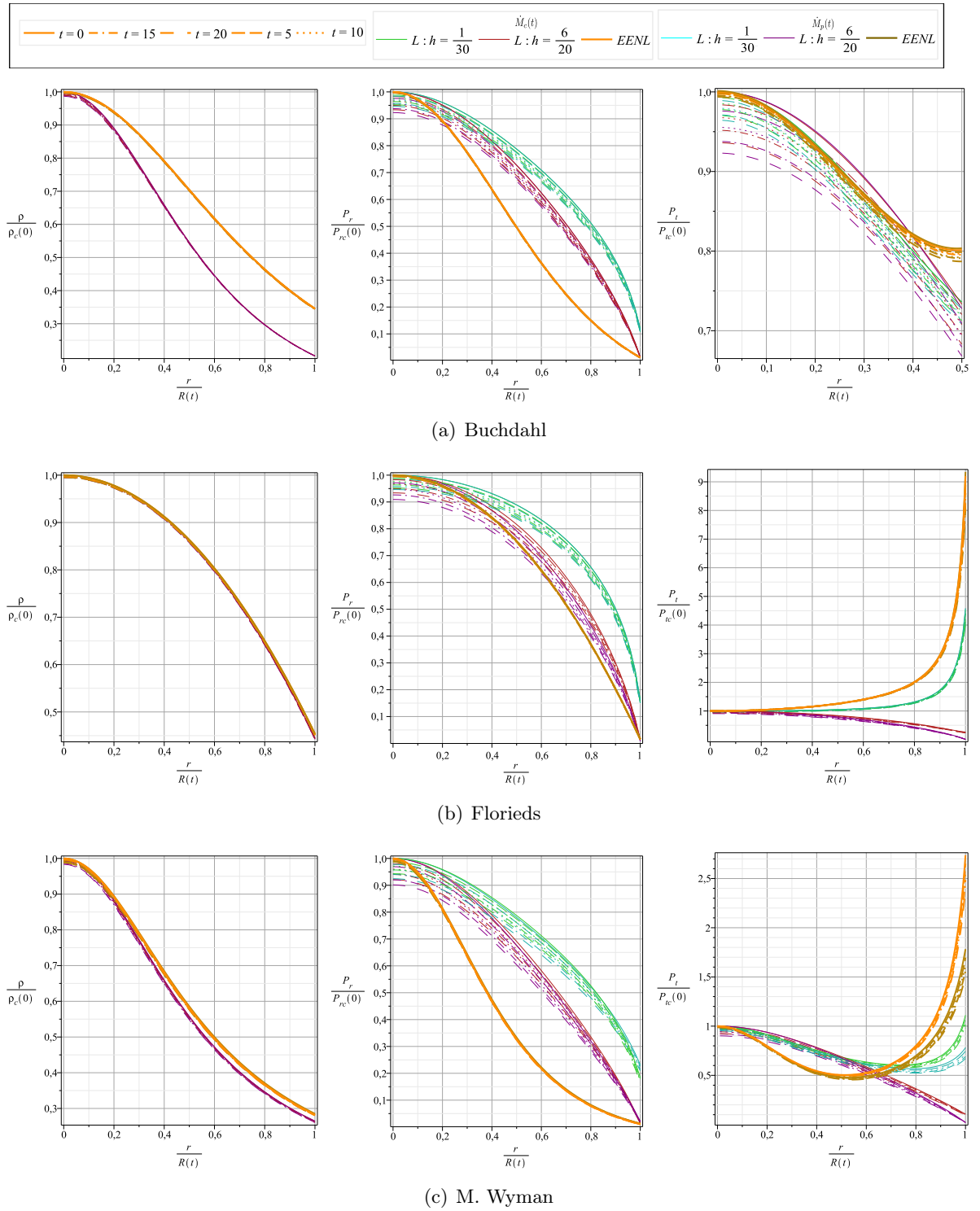


**Transporte de masa convectiva**

$$\frac{Dm}{Dt} \equiv \dot{m} + m' \frac{dr}{dt}$$



**Figura 5.4:** Comportamiento de la velocidad del fluido,  $\omega$ , para una configuración de materia que obedece una ecuación para la anisotropía y comparación con su contraparte no local. El descaramiento térmico se manifiesta en las mismas situaciones en las que se presentaba con la ecuación de estado no local. La contribución de la EENL es aumentar el número de capas que escapan de la atracción gravitacional de la estrella.



**Figura 5.5:** Comparación entre el comportamiento local y no local de las variables físicas que describen la evolución lenta de configuraciones compactas.

## 6. Conducción térmica en sistemas con ecuación de estado no local

---

¿CÓMO ES LA EVOLUCIÓN DEL PERFIL DE TEMPERATURA PARA CONFIGURACIONES NO LOCALES? ¿CÓMO VARÍAN LOS PERFILES DE TEMPERATURA PARA EL CASO LOCAL Y NO LOCAL?

Una de las fuertes iniciativas de estudiar la evolución térmica de las estrellas es la premisa que, a través de la confrontación de la observación con la teoría, se puede conocer más acerca de la naturaleza de la materia en el interior estelar y los procesos que toman lugar durante el colapso gravitacional. Por ejemplo, la determinación de la temperatura superficial de una estrella de neutrones puede en principio dar información sobre la materia hadrónica en el interior y la estructura de la estrella de neutrones [59].

A continuación se realizará un estudio del comportamiento térmico durante el colapso gravitacional de configuraciones no locales y locales a través de las conocidas teorías de segundo orden de disipación relativistas. También se determinará cuál es la contribución de la ecuación de estado no local sobre la evolución térmica del sistema.

### 6.1 Antecedentes

Para realizar una breve descripción histórica alrededor de las teorías disipativas en Relatividad General se va a tomar en parte lo hecho en [48]. En el contexto no relativista, la ley de disipación de Maxwell-Fourier corresponde a la teoría estándar para la propagación del calor, usada en la mayoría de aplicaciones prácticas. Esta ley supone que el flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura. De esta forma, asumiendo la validez de la primera y segunda ley de la termodinámica, se llega a una ecuación en derivadas parciales parabólica que describe el transporte de calor.

$$\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \nabla^2 T \quad \text{donde} \quad \chi \equiv \frac{\kappa}{\rho c_p}; \quad (6.1)$$

donde  $\kappa$  representa la conductividad térmica,  $c_p$  el calor específico a presión constante,  $\rho$  la densidad y  $\chi$  la difusividad. El carácter parabólico de la ley de Fourier, implica que el flujo de calor empieza simultáneamente con la aparición del gradiente de temperatura, es decir, la perturbación térmica se propaga con una velocidad infinita.

Sin embargo, es bien conocido, que una vez aparece el gradiente de temperatura, es necesario un cierto tiempo (tiempo de relajación,  $\tau$ ), fuertemente ligado a la naturaleza del material,

para el establecimiento del flujo de calor. Una forma de introducir los tiempos de relajación a la teoría de disipación fue realizado por Cattaneo [12] e independientemente por Vernotte [65]. Ellos dedujeron, a través de la teoría cinética de los gases, una ecuación para el flujo de calor que conduce a una ecuación diferencial hiperbólica para la temperatura y tiene en cuenta el tiempo característico que un material toma para reaccionar a un estímulo térmico:

$$\tau \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} T \quad \Rightarrow \quad \chi \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (6.2)$$

La anterior expresión corresponde a las ecuaciones del telégrafo para la propagación de las perturbaciones térmicas con un límite finito sobre la velocidad que esta pueden alcanzar:

$$v = \sqrt{\frac{\chi}{\tau}}. \quad (6.3)$$

Al escribir (6.2) en su forma integral:

$$\vec{q} = -\frac{\kappa}{\tau} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{t-t'}{\tau}\right] \cdot \vec{\nabla} T(\vec{x}, t') dt'. \quad (6.4)$$

se puede deducir una expresión más general, de la cual esta constituye un caso particular:

$$\vec{q} = -\frac{\kappa}{\tau} \int_{-\infty}^t Q(t-t') \vec{\nabla} T(\vec{x}, t') dt'; \quad (6.5)$$

donde  $Q$  describe la memoria térmica del material, mediante la asignación de diferentes pesos a los gradientes de temperatura en diferentes momentos del pasado. De esta forma, diferentes clases de sistemas disipativos son descritas por diferentes kernels. La ley de Fourier ( $Q = \kappa \delta(t-t')$ ) corresponde a la completa ausencia de memoria. Por el contrario, para el caso de una memoria infinita ( $Q = cte$ ) se obtiene la ecuación de onda usual, sin atenuación. En algún lugar en el medio se encuentra la ecuación de Cattaneo-Vernotte, para la cual todos los gradientes de temperatura contribuyen a  $\vec{q}$ , pero su relevancia disminuye a medida que se mueve hacia el pasado [34].

El primer intento de realizar una extensión relativista a la ecuación de calor fue introducido por Eckart [18], en 1940. Su teoría se enmarca en el conjunto de teorías relativistas de disipación de primer orden y conlleva a la versión relativista de la ley de Fourier:

$$q^\alpha = -\kappa P^{\alpha\beta} [T_{;\beta} + T \dot{u}_\beta];. \quad (6.6)$$

Sin embargo, la teoría de Eckart, y una variación de ésta realizada por Landau y Lifshitz [44], en 1950, al igual que su contraparte newtoniana, violan el principio de causalidad, es decir, predice la propagación de la perturbación térmica con una velocidad infinita. Además, la ecuación de transporte, derivada de las teorías de primer orden, conlleva a efectos indeseables como estados inestables de equilibrio. En (6.6) aparece un término extra que no está en el tratamiento no relativista: el término de la aceleración.

Para resolver las inconsistencias de las teorías de primer orden de la disipación se desarrollaron teorías de tipo causal (también llamadas hiperbólicas). Su idea central es extender el espacio

de variables de las teorías convencionales, incorporando en éste cantidades disipativas (flujo de calor, corriente de partículas, deformación, etc) del fenómeno que se está considerando [3]. De esta manera, Israel-Stewart [39] desarrollaron un enfoque, el cual se enmarcan en lo que se conoce como "*the transient relativistic dissipation*" o las teorías de segundo orden de la disipación relativista. La ecuación fundamental que relaciona la temperatura con la propagación del calor se escribe como:

$$\tau \frac{Dq^\alpha}{Ds} + q^\alpha = \kappa P^{\alpha\beta} (T_{,\beta} - Ta_\alpha) + \tau u^\alpha q_\beta a^\beta - \frac{1}{2} \kappa T^2 \left( \frac{\tau}{\kappa T^2} u^\beta \right)_{;\beta} q^\alpha \quad (6.7)$$

donde,  $\kappa, \tau, q^\beta$  y  $a^\beta$  representan la conductividad térmica, el tiempo de relajación térmico, el flujo de calor y las componentes de la quadri-acceleración respectivamente.  $P^{\alpha\beta}$  es el proyector sobre la hipersuperficie ortogonal de la quadri-velocidad  $u^\beta$ , y está definido como  $g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta$ . El precio a pagar para obtener una teoría estable y causal fue la introducción de un mayor número de variables y parámetros.

La ecuación (6.7), en la aproximación lineal en  $T$ , se reduce a la generalización relativista de la ecuación de Cattaneo [12]:

$$\tau \frac{Dq^\alpha}{Ds} + q^\alpha = \kappa P^{\alpha\beta} (T_{,\beta} - Ta_\alpha) + \tau u^\alpha q_\beta a^\beta \quad (6.8)$$

Con mucha frecuencia, en el análisis del colapso gravitacional los tiempos de relajación son ignorados ya que usualmente estos son muy pequeños comparados con la escala de tiempo característica para la evolución del sistema (por ejemplo para las interacciones fonón-fonón o fonón-electrón, los tiempos de relajación son, a temperatura ambiente, del orden de  $O(10^{-11} [s])$  y  $O(10^{-13} [s])$ , respectivamente [56]). Sin embargo, ignorar la relajación puede llegar a convertirse en una serie de dificultades y en algunas ocasiones conlleva a una mala aproximación. En regiones estelares muy densas y degeneradas, como las estrellas de neutrones, la conductividad térmica está dominada por electrones, en cuyo caso los tiempos de relajación podrían llegar a ser aproximadamente de  $10^2 s$  en temperaturas del orden de  $\sim 10^6 K$  [31]. Por tanto, los fenómenos previos a la relajación son determinantes y no pueden ser excluidos en la descripción de los procesos astrofísicos.

## 6.2 Teorías termodinámicas de segundo orden en la aproximación de colapso lento: ecuación de Israel-Stewart y ecuación de Cattaneo-Vernotte

Esta sección tiene como objetivo calcular la componentes de (6.7) en coordenadas curvilineas. Las componentes de la quadri-velocidad,  $u^\alpha$  y flujo de calor,  $q^\alpha$ , se calculon en (2.17). Así, la derivada covariante para el quadri-vector flujo de calor es:

$$\frac{Dq^0}{Ds} = q^0_{;\alpha} u^\alpha = \frac{e^{-2\nu} q}{(1-\omega^2)^{0,5}} \left[ \frac{\dot{\omega}}{1-\omega^2} + \omega \dot{\lambda} + e^{\lambda-\nu} \left( \nu' + \frac{\omega \omega'}{1-\omega^2} \right) \right] + \frac{\dot{q} e^{-2\nu} \omega + q' e^{-\lambda-\nu} \omega^2}{1-\omega^2} \quad (6.9)$$

$$\frac{Dq^1}{Ds} = q^1_{;\alpha} u^\alpha = \frac{e^{-2\lambda} q \omega}{(1-\omega^2)^{0,5}} \left[ \nu' + \frac{\omega \omega'}{1-\omega^2} + e^{\lambda-\nu} \left( \frac{\dot{\omega}}{1-\omega^2} + \omega \dot{\lambda} \right) \right] + \frac{\dot{q} e^{-2\lambda} \omega + q' e^{-\lambda-\nu} \omega^2}{1-\omega^2} \quad (6.10)$$

la divergencia para la cuadrivelocidad es:

$$u^{\alpha}_{;\alpha} = \frac{1}{(1-\omega^2)^{1/2}} \left[ e^{\lambda-\nu} \left( \frac{\dot{\omega}\omega}{1-\omega^2} + \dot{\lambda} \right) + \omega\lambda' + \frac{\omega'}{1-\omega^2} + \frac{2\omega}{r} \right] \quad (6.11)$$

y las componentes de la quadri-aceleración diferentes de cero son:

$$a_0 = \frac{\omega}{1-\omega^2} \left[ \left( \frac{\dot{\omega}}{1-\omega^2} + \omega\dot{\lambda} \right) + e^{\nu-\lambda} \left( \nu' + \frac{\omega\omega'}{1-\omega^2} \right) \right] \quad (6.12)$$

$$a_1 = -\frac{1}{1-\omega^2} \left[ \left( \frac{\omega\omega'}{1-\omega^2} + \nu' \right) + e^{\lambda-\nu} \left( \omega\dot{\lambda} + \frac{\dot{\omega}}{1-\omega^2} \right) \right] = -\frac{a_0 e^{\lambda-\nu}}{\omega} \quad (6.13)$$

De esta manera, con las anteriores expresiones y debido a la simetría del problema, la ecuación (6.7) sólo tiene una componente independiente, que resulta ser:

$$qe^{\lambda} \left( 1 - \frac{\tau}{2} u^{\beta}_{;\beta} \right) (1-\omega^2)^{1/2} + \tau \left( e^{\nu-\lambda} \dot{q} + \omega q' \right) + \kappa (\omega \dot{T} e^{\nu-\lambda} + T') = \quad (6.14)$$

$$-\kappa T \left[ e^{\nu-\lambda} \left( \frac{\dot{\omega}}{1-\omega^2} + \omega\dot{\lambda} \right) + \left( \nu' + \frac{\omega\omega'}{1-\omega^2} \right) \right] - \frac{\tau}{2} q \left( \frac{e^{\nu-\lambda} \dot{T} + \omega T'}{T} \right)$$

En la misma línea de ideas, la única componente independiente para la ecuación de Cattaneo (6.8) es:

$$qe^{\lambda} (1-\omega^2)^{1/2} + \tau \left( e^{\nu-\lambda} \dot{q} + \omega q' \right) + \kappa (\omega \dot{T} e^{\nu-\lambda} + T') = -\kappa T \left[ e^{\nu-\lambda} \left( \frac{\dot{\omega}}{1-\omega^2} + \omega\dot{\lambda} \right) + \left( \nu' + \frac{\omega\omega'}{1-\omega^2} \right) \right] \quad (6.15)$$

En este trabajo, se supondrá que el sistema evoluciona lentamente a través de una secuencia de estado los cuales están cerca del equilibrio termodinámico y térmicamente ajustado- el llamado *complete equilibrium* [41, p.66]. La evolución lenta puede ser justificada en término de los tiempos característicos: si la escala de tiempo hidrostático  $\tau_{hyd} \sim \sqrt{r^3/m}$  es más corta que la escala de tiempo de Kelvin-Helmholtz  $\tau_{KH} \sim m^2/2rl$ , entonces los términos inerciales en la ecuación de movimiento  $T^{\mu}_{r;\mu} = 0$  pueden ser ignorados. Esta condición se logra para valores pequeños de luminosidad  $l$ , y consecuentemente también para valores pequeños del flujo de radiación  $q$  dentro de la configuración. Además, el sistema está térmicamente ajustado si éste cambia sus propiedades considerablemente solo dentro de la escala de tiempo característica  $\tau_{cha}$ , la cual es mucho mayor que la escala de tiempo de Kelvin-Helmholtz  $\tau_{KH} \sim m^2/2rl$ .

Ahora, en la aproximación de colapso lento, la ecuación de Israel-Stewart y la ecuación de Cattaneo se reducen a:

$$q(r, t) = -\kappa \left( T'(r, t) + T(r, t)\nu' \right) e^{-\lambda} \quad (6.16)$$

y para configuraciones no locales se tiene:

$$q(r, t) = -\kappa \left( T'(r, t) + T(r, t)\lambda' \right) e^{-\lambda} \quad (6.17)$$

Las ecuaciones (6.16) y (6.17) describen la evolución térmica de la distribución de materia. Es interesante notar que la aproximación de evolución lenta implica tiempos de relajación

despreciables. Esto es natural, ya que el sistema evoluciona a través de estados de equilibrio, despreciando los tiempos requeridos para establecer el equilibrio.

Para un modelo físicamente razonable, se supondrá que la conductividad térmica  $\kappa$  está dada por la forma de transporte radiativo [49]:

$$\kappa = \delta T^3 \tau_c \quad \text{con} \quad \tau_c = \zeta T^{-\xi} \quad (6.18)$$

donde las cantidades  $\delta > 0$ ,  $\xi \geq 0$  y  $\zeta > 0$  son constantes. La forma de  $\tau_c$  se ha supuesto siguiendo a Governder et. al [23] y denota el tiempo medio de colisión entre partículas sin masa y partículas masivas. Éste es decreciente a medida que la temperatura aumenta, excepto para el caso especial en que  $\xi = 0$ .

Las ecuaciones (6.16) y 6.17) con la conductividad térmica igual a (6.18) pueden ser resueltas formalmente para la temperatura, realizando la sustitución  $\Theta(r, t) = T(r, t)e^\nu$  y  $\Theta(r, t) = T(r, t)e^\lambda$ , respectivamente:

$$\int \Theta^{3-\xi} \partial \Theta = \int -\frac{q}{\delta \zeta} e^{\lambda+(5-\xi)\nu} \partial r \quad \Rightarrow \quad T = e^{-\nu} \left( -\int_0^{R(t)} \frac{(4-\xi)q e^{\lambda+(5-\xi)\nu}}{\delta \zeta} \partial r + u(t) \right)^{\frac{1}{4-\xi}} \quad (6.19)$$

$$\int \Theta^{3-\xi} \partial \Theta = \int -\frac{q}{\delta \zeta} e^{(5-\xi)\lambda} \partial r \quad \Rightarrow \quad T = e^{-\lambda} \left( -\int_0^{R(t)} \frac{(4-\xi)q e^{(5-\xi)\lambda}}{\delta \zeta} \partial r + \tilde{u}(t) \right)^{\frac{1}{4-\xi}} \quad (6.20)$$

Si se supone que la frontera de la distribución de materia emite como un cuerpo negro, entonces, las funciones de integración  $u(t)$  y  $\tilde{u}(t)$  quedan determinadas a través de la ley de Stephan-Boltzman: la energía radiada a través de la frontera por unidad de área y por unidad de tiempo es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura superficial:

$$c^2 \frac{dM(t)}{dt} = -4\pi R(t)^2 \kappa_B T^4 \quad \longrightarrow \quad \frac{dM(t)}{dt} = -4\pi (0,467 \times 10^{-53}) R(t)^2 T_\Sigma^4 \quad (6.21)$$

Para una combinación de radiación y materia, la constante  $\delta$  esta dada por [66]:

$$\delta = \frac{4}{3} b \quad (6.22)$$

Si se considera que la energía es trasportada desde el núcleo estelar por neutrinos,  $b$  toma el valor de  $7a/8$ , siendo  $a \simeq 6,252 \times 10^{-64} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$  la constante de radiación . Un análisis detallado en [49] para el caso en el cual los neutrinos son generados por emisión térmica, demuestra que una buena aproximación para  $\tau_c$  es:

$$\tau_c \sim \mathcal{A} \frac{1}{\rho \sqrt{y_e}} T^{-3/2} \quad (6.23)$$

donde  $\rho$  representa la densidad de energía,  $\mathcal{A} = 10^9 \text{ K}^{3/2} \text{ m}^{-1}$  y  $y_e$  representa la fracción de electrones ( $n_e = n_n y_e$ ) y se encuentra entre el rango restrictivo  $0,2 \leq y_e \leq 0,3$ . Reemplazando (6.22) y (6.23) en (6.18) y llevando a unidades generalizadas:

$$\kappa = (1,9634 \times 10^{-36}) T^{3/2} \quad (6.24)$$

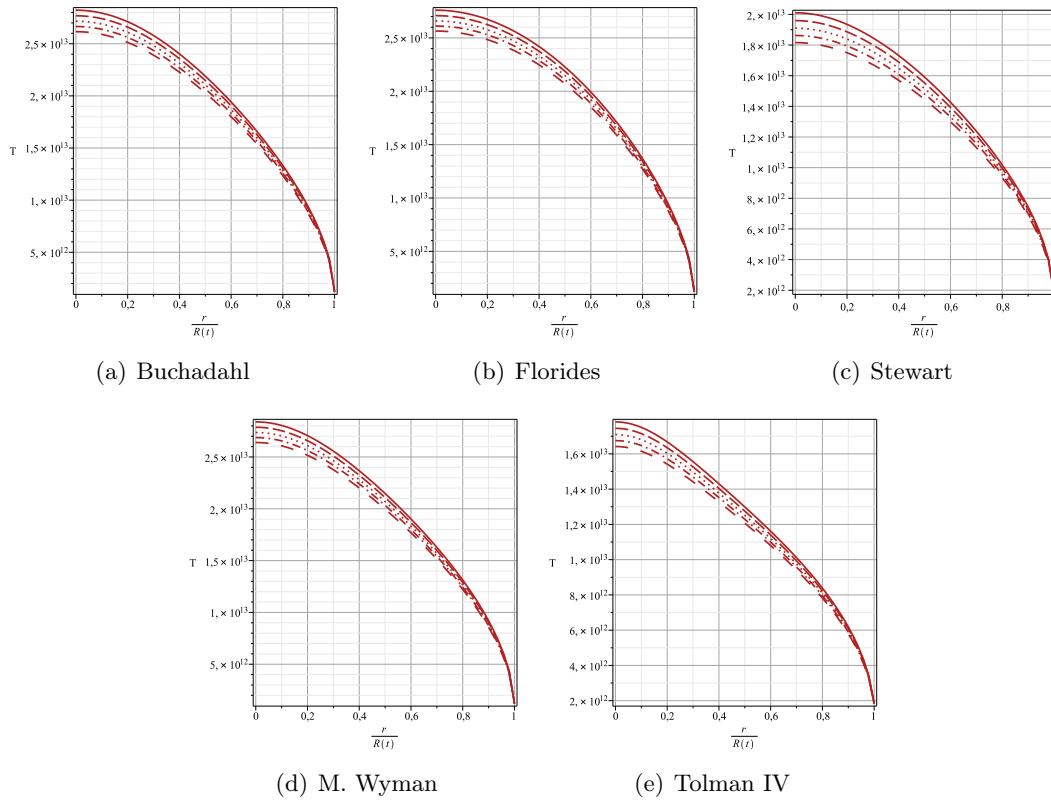
### 6.3 Discusión de resultados: evolución de la distribución de temperatura durante el colapso gravitacional lento:

CONFIGURACIONES DE MATERIA ANISÓTROPAS Y NO LOCALES: para todos los modelos de densidad, los perfiles de la temperatura a lo largo de la configuración, calculados a través de (6.16), se presenta en la figura 6.1. La luminosidad de la estrella se ha supuesto como un pulso de Gauss:

$$\dot{M}(t) = -\alpha e^{\left(\frac{t-t_m}{\sigma}\right)^2} \quad (6.25)$$

en donde  $\alpha = 4 \times 10^{-4}$ ,  $t_m = 25$ ,  $\sigma = 200$  y  $M(0) = 1,4 M_{\odot}$ .

Para todos los modelos, la zona más caliente de la configuración corresponde al centro de la configuración. También se observa cómo la temperatura de la superficie varía muy poco con el tiempo, lo cual es compatible con la suposición de evolución lenta. El perfil de densidad de Tolman IV corresponde al modelo más frío, entre todos los estudiando, aunque, para todos los casos, la temperatura tiene un orden de  $10^{13}$  [K].



**Figura 6.1:** Perfil de temperatura para configuraciones no locales calculado a partir de la integración de la ecuación de Cattaneo. El perfil de densidad de Tolman IV corresponde al modelo más frío.

¿QUÉ APORTA LA ECUACIÓN DE ESTADO NO LOCAL?

Para modelar configuraciones locales en la aproximación de colapso lento se ha supuesto una

relación particular para la anisotropía :

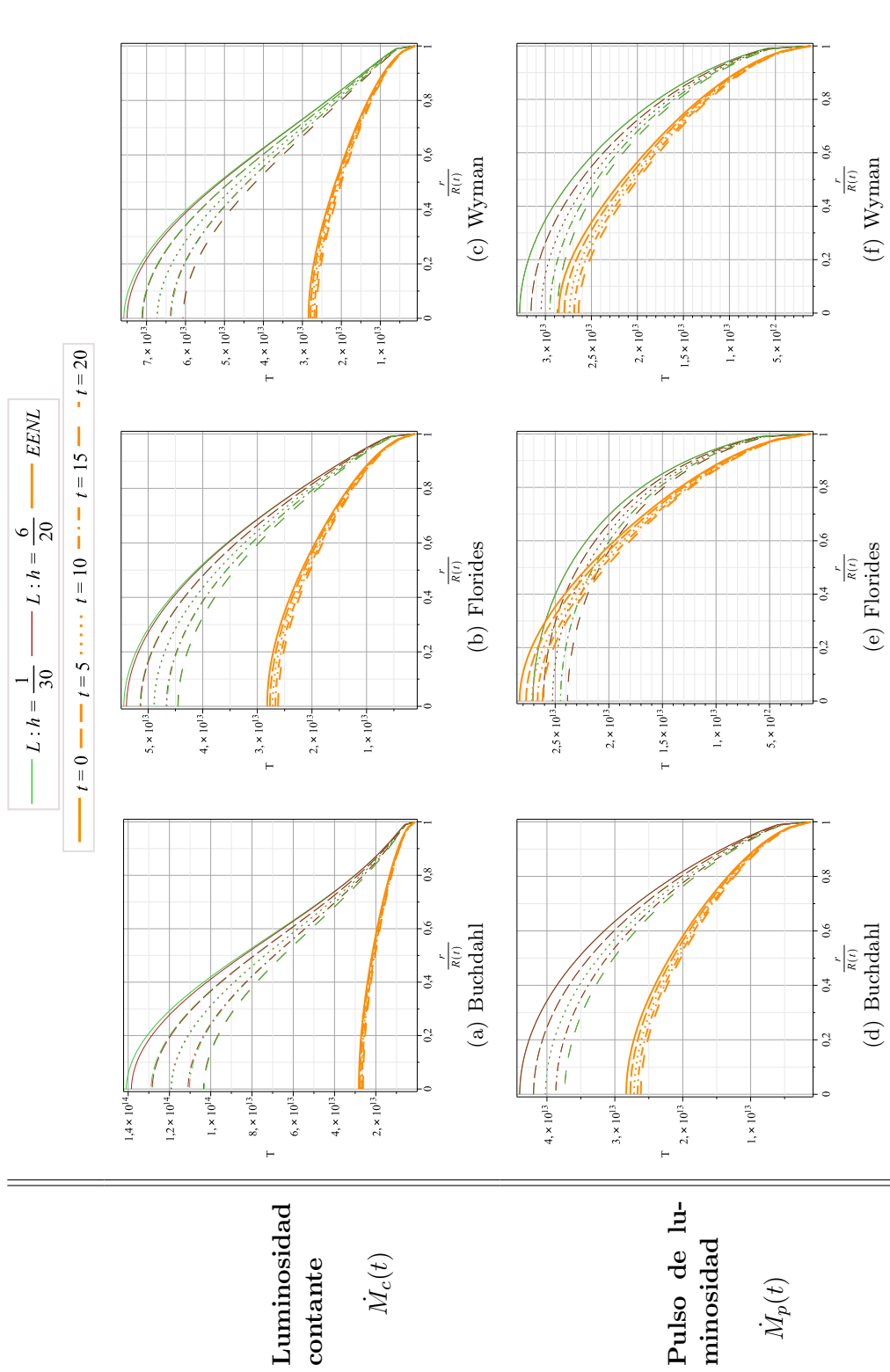
$$\frac{dP_r}{dr} = -(\rho + P_r)\frac{\nu'}{2} + (1 - h)f(P_r, r)(\rho + P_r)r^{n-1} \quad \text{con} \quad f(P_r, r)r^{n-1} = \frac{\nu'}{2} \quad (6.26)$$

donde  $h$  es una constante, directamente relacionada con el grado de anisotropía del sistema. Así, la ecuación de equilibrio hidrostático queda de forma tal que, a través de la introducción de un perfil densidad, ésta puede ser integrada y obtener la forma funcional de la presión en la dirección radial.

A continuación se presenta la distribución de temperatura para las configuraciones locales y no locales estudiadas en el capítulo IV. Las figuras 6.2(a), 6.2(b) y 6.2(c) corresponde al caso en que la luminosidad de la configuración de materia es constante ( $\dot{M}_c(t)$ ), y las figuras 6.2(d), 6.2(e) y 6.2(f) cuando la luminosidad de la estrella corresponde a un pulso de gauss ( $\dot{M}_p(t)$ ). Nótese que la temperatura superficial, debido a la ley de Stefan-Boltzman, debe ser igual en configuraciones locales y no locales. Esto se debe a que la evolución de la masa total y el radio de la configuración es igual para ambos casos.

Al suponer una luminosidad constante, se puede concluir que introducir una relación no local entre las funciones de estado produce una disminución en la temperatura interior de la distribución de materia. Ésta disminución es, en algunos casos, de hasta un orden de magnitud y puede ser relacionada con la aparición del descaramiento térmico. Además, entre menor es el valor de la constante  $h$ , mayor es la temperatura interior de la configuración. Sin embargo, diferentes grados de anisotropía no cambian significativamente el perfil de temperatura a lo largo de la configuración. La relación entre la anisotropía y la temperatura debe ser mejor explorada.

Por otro lado al suponer un pulso para la luminosidad, la introducción de la ecuación de estado no local disminuye la temperatura interior de la distribución de materia, lo cual puede relacionarse con la desaparición del descaramiento térmico. Como se mostró en [31], el descaramiento depende de la diferencia de temperatura entre el centro y la superficie de la configuración. Sin embargo, este comportamiento dependen del perfil de densidad, ya que lo anterior no es cierto para Florides. En este perfil, el interior de la configuración de los modelos no locales es más caliente, sin embargo, en las capas externas las mayores temperaturas corresponden al modelo local.



**Figura 6.2:** Comparación de la distribución de temperaturas durante el colapso gravitacional lento de configuraciones locales y no locales

## 7. Conclusiones

---

A pesar del modelamiento detallado de la microfísica del enfriamiento de estrellas de neutrones (por ejemplo, los procesos de transporte y emisión de neutrinos y la superfluides de las partículas constituyentes), existe un consenso acerca de los “ingredientes” claves necesarios para modelar la evolución de estos objetos: Relatividad General, mecanismos de disipación y una ecuación de estado para la materia. Por otro lado, parece útil considerar modelos no estáticos relativamente simples, con las anteriores consideraciones, y analizar algunas características esenciales de las situaciones realistas que posiblemente las soluciones puramente numéricas pueden ocultar.

Siguiendo esta línea de ideas, el presente trabajo se centró en la introducción de una ecuación de estado no local, para describir, dentro del formalismo de la Relatividad General, el colapso gravitacional de distribuciones de materias esféricas, anisótropos y disipativas. La principal característica de este tipo de ecuaciones de estado es la manifestación de un comportamiento colectivo entre las variables de estado ( $\rho$ ,  $P_r$ ,  $q$  y  $\omega$ ) que se evidencia a través de un funcional dentro de un determinado volumen:

$$P_r = \rho - \frac{2}{r^3} \int_0^r \left[ \frac{\rho + 2q\omega + P_r\omega^2}{1 - \omega^2} \right] d\bar{r}$$

La primera implicación de suponer la anterior ecuación de estado no local es la obtención, vía las ecuaciones de campo de Einstein, de una relación de ligadura entre las funciones métricas:

$$\nu(r, t) = \lambda(r, t) + k(t)$$

donde la función  $k(t)$  está relacionada con el potencial gravitacional en la superficie. Es evidente la simplificación matemática al problema de colapso gravitacional que se logra con la ecuación de estado no local.

En este trabajo se supusieron, exclusivamente, escenarios de colapso gravitacional lento. Está aproximación no es muy restrictiva, ya que la mayoría de procesos relevantes que ocurren en el interior de las estrellas toman lugar en una escala de tiempo que es usualmente mucho más larga que la escala de tiempo hidrostática.

Se ha demostrado, a través del estudio de las condiciones de energía y de aceptabilidad física, que es posible obtener escenarios de colapso gravitacional lento y adiabático, físicamente viables para un fluido que obedece una ecuación de estado no local. Para este caso, el sistema de ecuaciones de campo de Einstein se define al introducir la dependencia radial del perfil de densidad. Se desarrollaron cinco modelos que corresponde a las soluciones de Stewart [60], Florides [20], Buchdahl [11], Tolman IV [63] y Wyman [67].

Cuando se permite a un cuerpo en equilibrio hidrostático contraerse adiabáticamente, su densidad aumentará. Si la nueva presión es justo la requerida para contrarrestar el incremento de las fuerzas gravitacionales la estrella permanecerá en equilibrio. Si la presión es menor que la requerida, la estrella no podrá mantenerse en contra de la gravedad y colapsará; si por el contrario ésta es mayor, entonces la estrella regresará a su estado original o liberará el exceso de presión enfriándose. Como la nueva presión y densidad de una sección del material se relacionan con sus correspondientes valores anteriores, éste es un problema que está íntimamente relacionado con la liberación de energía y con las funciones termodinámicas del material [9]. Desarrollar un criterio de estabilidad para los anteriores modelos adiabáticos es un problema que se deja abierto para trabajos posteriores.

Para el caso en que el sistema autogravitante es disipativo, la aproximación de colapso lento establece una relación entre la tasa de cambio de la masa total de la configuración, el flujo de calor a través de la superficie, el potencial gravitacional de la superficie y el radio externo de la configuración:

$$-\dot{M}(t) = 4\pi R(t)^2 \left(1 - \frac{2M(t)}{R(t)}\right) q|_{\Sigma}$$

Es claro que la evolución de la frontera de la configuración queda determinada en función de la luminosidad de la configuración y el flujo de calor a través de la superficie.

Así, se ha encontrado que las configuraciones no locales manifiestan cambios de signos en la velocidad del fluido cuando la mayor parte de la energía radiada viene de las últimas capas de la configuración (ver figura 4.1). En los modelos de Florides, Stewart, Wyman y Buchdahl, se manifiesta descascaramiento térmico bajo circunstancias muy particulares que no están relacionadas solo con el flujo de calor, sino también con las condiciones iniciales de la configuración. Se determinó que existen parámetros críticos, como la cantidad de masa que emite la configuración de materia durante el colapso o la masa inicial de la misma, a partir de los cuales los fenómenos térmicos dejan de manifestarse. En el modelo de Tolman IV se encontró que bajo ciertas circunstancias, la distribución de materia evoluciona de forma tal que las capas interiores se expanden, mientras que las capas externas colapsan. Estas características particulares se han relacionado con el hecho de que, para este modelo, la mayor parte de la densidad de energía se concentra en el centro de la configuración, anulándose prácticamente en la frontera. Además, es el único caso en el cual se manifiesta un cambio de signo de la anisotropía del sistema.

Con el fin de trazar la contribución de la ecuación de estado no local a la dinámica del sistema, se desarrollaron modelos anisótropos locales, al introducir una expresión que relaciona las presiones en la dirección radial y tangencial:

$$P_{\perp} - P_r = C(\rho + P_r) \frac{\nu'}{r}$$

Para este caso, se trabajaron con los perfiles de densidad de Buchdahl, Florides y Wyman. Tanto para los modelos no locales como para sus contrapartes locales, el “*thermal peeling*” se manifiesta bajo las mismas condiciones. Sin embargo, la manifestación del fenómeno térmico es muy sensible a la forma de la luminosidad. Se demostró que los cambios de signos que aparecen durante el colapso son resultado de la competencia entre la convección de masa y el

flujo de calor a través de la materia. A la vez se ha concluido que los casos obtenidos de descascaramiento obedecen a un efecto puramente térmico, más que a un efecto del transporte de masa en la configuración. La energía térmica generada en las capas externas de la distribución es transformada en la energía cinética de las capas que escapan de la atracción gravitacional. Esta transferencia de energía parece ser más efectiva en los modelos no locales, en lo cuales se presenta el descascaramiento de forma más violenta que sus contrapartes locales.

Finalmente se estudio el comportamiento térmico de las configuraciones de materia durante el colapso, a través de las teorías de disipación de segundo orden: la ecuación de Israel-Stewart y su aproximación lineal, la ecuación de Cattaneo. Se ha determinado que en el régimen de evolución lenta las dos descripciones son equivalentes. En cuanto a la contribución de la ecuación de estado no local a la evolución de térmica, se puede decir que cuando el descascaramiento aumenta, las configuraciones no locales presentan distribuciones de temperatura más bajas que los modelos locales correspondiente. Esto podría indicar que los fluidos no locales son más eficientes transformando la energía térmica en energía cinética.

Más allá de la simplificación matemática que se obtiene al suponer una ecuación de estado no local para el colapso lento disipativo, se ha demostrado que este tipo de ecuaciones constituyen una descripción físicamente aceptable para seguir la evolución de objetos compactos aislados.

El presente trabajo de investigación constituye parte de la beca-pasantía del programa de Colciencias “Jóvenes Investigadores e Inovadores”. Algunos de los resultados obtenidos durante su elaboración han sido presentados en los siguientes eventos:

- Laura M. Becerra y Luis A. Núñez. *Colapso lento de configuraciones simétricamente esféricas, no-locales y anisótropas en Relatividad General*. Presentado en el III Congreso Colombiano de Astronomía y Astrofísica. Bucaramanga, Colombia, Noviembre 5 de 2012
- Laura M. Becerra, Hector Hernández y Luis A. Núñez. *Thermal evolution of a radiating anisotropic spherical configuration with non-local equation of state*. Presentando en The 20th International Conference on General Relativity and Gravitation (GR20) and the 10th Amaldi Conference on Gravitational Waves (Amaldi10). Warsaw, Poland. Julio 7-13 de 2013
- Laura M. Becerra y Luis A. Núñez. *Comportamiento térmico durante el colapso gravitacional lento de configuraciones de materia esféricas, anisótropas y no locales*. Presentado en Compact Object Summer Fest. Bucaramanga, Colombia, Agosto 21-23 de 2013
- Laura M. Becerra y Luis A. Núñez. *Contribución de la ecuación de estado no local sobre el colapso gravitacional lento de configuraciones esféricamente simétricas, anisótropas y radiantes*. Será presentado en el XXV Congreso Nacional de Física. Armenia. Colombia. Agosto 25-29 de 2013.
- Laura M. Becerra, Hector Hernández y Luis A. Núñez. *Thermal slow evolution of compact objects*. Artículo en preparación. *pre-print*: <http://arxiv.org/abs/1308.3077>

# Bibliografía

---

- [1] H. Abreu, H. Hernández, and L.A. Núñez. Cracking of self-gravitating compact objects with a non local equation of state. *Journal of Physics: Conference Series*, 66:012038, 2007.
- [2] G. Alastair, C. Walker, and V. Canuto. *Neutron star:general review*. Solvay Conference on Astrophysics and Gravitation, 1973.
- [3] A. Anile, D. Pavon, and V. Romano. The case for hyperbolic theories of dissipation in relativistic fluids. *ArXiv e-prints: astro-ph/9810014*, 1998.
- [4] I. Arraut, D. Batic, and M. Nowakowski. A noncommutative model for a mini black hole. *Classical and Quantum Gravity*, 26(24):245006, 2009.
- [5] W. Barreto. Exploding radiating viscous spheres in general relativity. *Astrophys. Space Sci*, 201:191, 1993.
- [6] W. Barreto and S Rojas. An equation of state for radiating dissipative spheres in general relativity. *Astrophys. Space Sci*, 193:201, 1992.
- [7] G. Baym, C. Pethick, and P. Sutherland. The ground state of matter at high densities: equation of state and stellar models. *Astrophys. J.*, 170:299, 1971.
- [8] H. Bondi. The contraction of gravitating spheres. *Proc. R. Soc. London*, A281:39, 1964.
- [9] H Bondi. On datta's spherically symmetric systems in general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, 2:321, 1971.
- [10] R. L. Bowers and E.P.T. Liang. Anisotropic Spheres in General Relativity. *Astrophys. J.*, 188:657, 1974.
- [11] H. A. Buchdahl. General relativistic fluid spheres. *Phys. Rev*, 116:1027, 1959.
- [12] C. Cattaneo. Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant la paradoxe d'une propagation instantanée. *Comp. Rend. Acad. Sci Paris*, 247:431, 1958.
- [13] M. Consenza, L. Herrera, M. Esculpi, and L. Witten. Some models of anisotropic spheres in general relativity. *J.Math.Phys*, 22(1):118, 1980.
- [14] G. Darmonis. *Momorial des Sciences Mathématiques (Gauthier-Villars, Paris)*, 1927.
- [15] M. Demianski. *Relativistic Astrophysics*, volume 110 of *International Series in Natural Philosophy*. Oxford, England: Pergamon Press, 1985.
- [16] M.C. Durgapal. A class of new exact solutions in general relativity. *J. Phys. A. Math Gen*, 15:2637, 1982.

- [17] M.C. Durgapal and R. Bannerji. New analytical stellar model in general relativity. *Phys. Rev. D*, 27:328, 1983.
- [18] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes. iii. relativistic theory of the simple fluid. *Phys. Rev.*, 58:919–924, 1940.
- [19] R. I. Epstein. Acoustic properties of neutron stars. *Astrophys. J.*, 333:880–894, 1988.
- [20] P.S. Florides. A new interior schwarzschild solution. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 337:529–535, 1974.
- [21] N. K. Glendenning. *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity*. Springer, 2000.
- [22] M.K. Gokhroo and A.L. Mehra. Anisotropic spheres with variable energy density in general relativity. *Gen. Rel. Grav*, 26:75–84, 1994.
- [23] S.D. Govender, M. Maharaj and R. Maartens. A causal model of radiating stellar collapse. *Class. Quantum Grav.*, 15:323–330, 1998.
- [24] G. A. González. Energy Conditions for General Relativistic Fluids . *Comunicación privada*, 2013.
- [25] H. Heiselberg and V. Pandharipande. Recent progress in neutron star theory. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 50:481–524, 2000.
- [26] H Hernández. *Ecuaciones de Estado no Locales en Relatividad General*. Tesis de doctorado en física fundamental, Fac. Ciencias, Univesidad de Los Andes Mérida, 2009.
- [27] H. Hernández and L. A. Núñez. Nonlocal equation of state in anisotropic static fluid spheres in general relativity. *Can. J. Phys.*, 82:29 – 51, 2004.
- [28] H. Hernández and L. A. Núñez. Plausible families of compact objects with a non local equation of state. *Can. J. Phys.*, 91:328–336, 2013.
- [29] H. Hernández, L. A. Núñez, and U. Percoco. Non-local equation of state in general relativistic radiating spheres. *Class. Quantum Grav*, 16(3):871 – 896, 1998.
- [30] W.C. Hernandez and C.W. Misner. Observer time as a coordinate in relativistic spherical hydrodynamics. *Astrophys. J.*, 143:452, 1998.
- [31] L. Herrera. Campos gravitacionales en la materia: La otra cara de la moneda. In H. Rago y A. Melfo, editor, *II Escuela Venezolana de Relatividad, Campos y Astrofísica.*, pages 81–183, Mérida, Venezuela, 1996. FUNDACITE MERIDA.
- [32] L. Herrera and A. Di Prisco. Two effects in slowly evolving dissipative self-gravitating spheres. *Phys. Rev. D*, 55(4):2044–2050, 1997.
- [33] L. Herrera, A. Di Prisco, J. Hernández-Pastora, Martín, and J. Martínez. Thermal conduction in systems out of hydrostatic equilibrium. *Class. Quantum Grav.*, 14:2239, 1997.

- [34] L Herrera and D Pavón. Why hyperbolic theories of dissipation cannot be ignored: Comment on a paper by kostädt and liu. *Phys. Rev. D*, 64:088503, 2001.
- [35] L. Herrera and N. O. Santos. Local anisotropy in self-gravitating systems. *Physics Reports*, 286(2):53–130, 1997.
- [36] D. Horvat, S. Ilijic, and A. Marunovic. Radial pulsations and stability of anisotropic stars with a quasi-local equation of state. *Classical and Quantum Gravity*, 28(2):025009, 2011.
- [37] D. Horvat, S. Ilijic, and A. Marunovic. Radial stability analysis of the continuous pressure gravastar. *Classical and Quantum Gravity*, 28(19):195008, 2011.
- [38] W Israel. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuevo Cimento*, 44B:1–14, 1966.
- [39] W. Israel and J. M. Stewart. Transient relativistic thermodynamics and kinety theory. *Ann. Phys.*, 118:341–372, 1979.
- [40] M. Kater. The cooling of neutron stars. Master en física teórica, Utrecht University, 2011.
- [41] R. Kippenhahn and A. Weigert. *Stellar Structure*. Springer: Berlin, 1990.
- [42] C.A. Kolassis, N.O. Santos, and D. Tsoubelis. Energy conditions for an imperfect fluid. *Class. Quantum Grav*, 5:1329–1338, 1988.
- [43] K Lake. Generating static spherically symmetric anisotropic solutions of einstein’s equations from isotropic newtonian solutions. *Phys. Rev. D*, 80:064039, 2009.
- [44] L. Landau and E. Lifshitz. *Fluids Mechanics*. Pergamon, Oxford, 1959.
- [45] J.M. Lattimer. Supernova theory and the neutrinos from sn1987a. *Nucl. Phys. A*, 478:199–217, 1988.
- [46] M. Le Delliou, J. P. Mimoso, F. C. Mena, M. Fontanini, D. C. Guariento, and E. Abdalla. Separating expansion and collapse in general fluid models with heat flux. *ArXiv e-prints:gr-qc/1305.3475*, 2013.
- [47] A. Lichnerowicz. *Theories relativistes de la gravitation et lélectromagnetisme*. Paris, 1958.
- [48] C. Lopez. Covariant thermodynamics and relativity. *ArXiv e-prints: astro-ph/1107.1005*, 2011.
- [49] J. Martínez. Transport processes in the gravitational collapse of an anisotropic fluid. *Phys. Rev. D*, 53:6921, 1996.
- [50] J. P. Mimoso, M. Le Delliou, and F. C. Mena. Local conditions separating expansion from collapse in spherically symmetric models with anisotropic pressures. *ArXiv e-prints: gr-qc 1302.6186*, 2013.
- [51] A. Muñoz and L. A. Núñez. Soluciones conformemente planas con ecuación de estado no local. *Sup. Rev. Mex. de Física*, S52:112, 2006.

- [52] M.N.L. Narasimhan. *Principles of Continuum Mechanics*. John Willey, New York, NY, USA, 1993.
- [53] S. O'Brien and J.L Synge. Jump conditions at discontinuities in general relativity. *Dublin Inst. Adv. Stud.*, A 9, 1952.
- [54] J. R. Oppenheimer and H. Snyder. On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.*, 56:455–459, 1939.
- [55] D. Page, U. Geppert, and F. Weber. The cooling of compact stars. *Nucl. Phys A*, 777:497–530, 2006.
- [56] R.E. Peierls. *Quantum Theory of Solids*. Oxford University Press, 1955.
- [57] D. G. Ravenhall and C. J. Pethick. Neutron star moments of inertia. *Astrophys. J.*, 424:846–851, 1994.
- [58] R. F. Sawyer. Condensed phase in neutron-star matter. *Phys. Rev. Lett.*, 29:382–385, 1972.
- [59] S. Shapiro and S. Teukolsky. *Black holes, white dwarfs and neutron stars: the physics of compact objects*. Wiley-VCH, 1983.
- [60] B.W. Stewart. Conformally flat, anisotropic spheres in general relativity. *J. Phys. A: Math. Gen*, 15(3):2419–2427, 1982.
- [61] I-S. Suh and GM. Mathews. Nuclear equations of state and internal structure of magnetars. In *Proceeding of the 5th Huntsville Gamma Ray Burst Symposium*, Alabama, USA, 1999.
- [62] Padmanabhan T. *Gravitation: foundations and frontiers*. Cambridge University Press, 2010.
- [63] R.C Tolman. Static Solution of Einstein's Field Equation for Spheres of Fluid. *Phys. Rev.*, 55:364, 1939.
- [64] P.C Vaydia. An analytical solution for gravitational collapse with radiation. *Astrophys. J*, 144:943, 1966.
- [65] M.P. Verotte. Les paradoxes de la theorie continue de l'équation de la chaleur. *Comp. Rend. Acad. Sci Paris*, 246:3154–3155, 1958.
- [66] S. Weinberg. Entropy generation and the survival of proto-galaxies in a expanding universe. *Astrophys. J.*, 168:175–194, 1971.
- [67] M. Wyman. New analytical stellar model in general relativity. *Phys. Rev.*, 75:1930, 1949.
- [68] D.G. Yakovlev and C.J. Pethick. Neutron star cooling. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 42:169–210, 2004.

# Anexos

# Condiciones de acoplamiento

---

Considerando una superficie esférica, descrita por un espacio-tiempo tridimensional tipo tiempo  $\Sigma$ . Esta superficie divide el espacio-tiempo en dos variedades cuadrimensionales diferentes,  $\vartheta^-$  y  $\vartheta^+$ , cada una de las cuales contienen a  $\Sigma$  como su frontera

Siendo  $g_{ij}$  la métrica intrínseca de  $\Sigma$ :

$$ds_{\Sigma}^2 = g_{ij}d\xi^i d\xi^j = -d\tau^2 + R^2(\tau)(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2), \quad (1)$$

con  $\xi^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  las coordenadas intrínsecas a  $\Sigma$ . Y siendo  $g_{\alpha\beta}^{\pm}$  la métrica en  $\vartheta^{\pm}$

$$ds_{\pm}^2 = g_{\alpha\beta}^{\pm} d\kappa_{\pm}^{\alpha} d\kappa_{\pm}^{\beta}, \quad (2)$$

con  $\kappa_{\pm}^{\alpha}$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  las coordenadas en  $\vartheta^{\pm}$ .

Las condiciones de acoplamiento de Darmois establecen:

- La primera forma fundamental, o curvatura intrínseca, de ambas métricas es continua a través  $\Sigma$ :

$$(ds_{-}^2)_{\Sigma} = (ds_{+}^2)_{\Sigma} = ds_{\Sigma}^2. \quad (3)$$

- La segunda forma fundamental, o curvatura extrínseca, de ambas métricas es continua a través  $\Sigma$ :

$$K_{ij}^{(-)} = K_{ij}^{(+)}; \quad (4)$$

donde

$$K_{ij}^{(\pm)} = -\eta_c^{(\pm)} \left[ \frac{\partial^2 x^c}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \Gamma_{ab}^c \frac{\partial x^a}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^b}{\partial \xi^j} \right]$$

donde  $\eta_c^{(\pm)}$  representa las componentes normales a  $\Sigma$  y  $\Gamma_{ab}^c$  representa los símbolos de Christopher.

# Colapso lento y adiabático con ecuación de estado no local

---

El método que se ha aplicado para solucionar las ecuaciones de Einstein, correspondientes al colapso lento de una configuración de material anisótropa y no local, ha sido tomar varios perfiles de densidad que constituyen soluciones estáticas de las ecuaciones de Einstein y generalizar los mismos al caso dinámico.

A continuación se presenta de forma explícita tanto las funciones de integración que se derivan de cada perfil de densidad, así como las funciones de estado que caracterizan el colapso lento adiabático del objeto autogravitante. En general, para todos los modelos, los valores centrales de todas las variables son proporcionales a  $\frac{M}{R(t)}$ , es decir, estarán determinados.

$$\text{Modelo de Stewart } \left[ \rho(r, t) = \frac{\eta(t)(e^{2K(t)r} - 1)(e^{4K(t)r} + 8K(t)re^{2K(t)r} - 1)}{8\pi r^2 (e^{2K(t)r} + 1)^3} \right]$$

Para este modelo, al introducir las condiciones de acoplamiento se encuentra que:

$$m(R(t), t) = M \quad \Rightarrow \quad \eta(t) = \frac{2M}{R(t)} \left[ \frac{1 + e^{2K(t)R(t)}}{1 - e^{2K(t)R(t)}} \right]^2 \quad (5)$$

$$P_r(R(t), t) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{4K(t)R(t)} - 8K(t)R(t)e^{2K(t)R(t)} - 1 = 0 \quad (6)$$

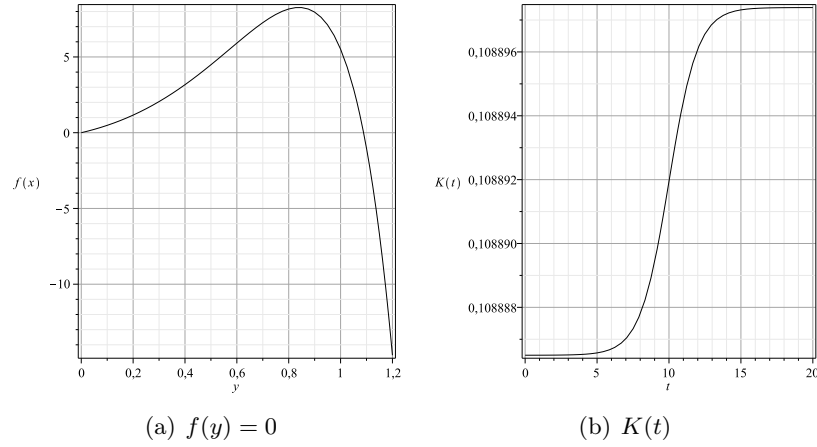
La ecuación (6) constituye una ecuación trascendental para la función  $K(t)$ , la cual puede ser resuelta numéricamente, si se realiza el cambio de variables  $y = K(t)R(t)$ :

$$e^{4y} - 8ye^{2y} - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad f(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0,1088659492 \quad (7)$$

En la figura 1(a) se presenta la función  $f(y)$ . De lo anterior se puede concluir:

$$y = K(t)R(t) \quad \Rightarrow \quad K(t) = \frac{0,1089}{R(t)} \quad (8)$$

En la figura 1(b) se ha gráficado la función de integración  $K(t)$ , considerando que el radio de la configuración tiene la forma funcional dada en (3.11).



**Figura 1:** Perfil de densidad de Stewart:

Las funciones física que describen el colapso lento, para este caso, son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho(x)}{\rho_c(t)} &= \frac{e^{6yx} + 1 - e^{4yx}(1 - 8yx) - e^{2yx}(1 + 8yx)}{3y^2x(e^{4yx} + 1)^3} \\ \frac{P_r(x)}{P_{rc}(t)} &= \frac{e^{6yx} + 1 - e^{4yx}(1 + 8yx) - e^{2yx}(1 - 8yx)}{y^2x(1 - e^{2yx})^3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \rho_c(t) &= \frac{3K(t)^2 M}{4\pi R(t)} \left( \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} \right)^2 \\ P_{rc}(t) &= \frac{K(t)^2 M}{4\pi R(t)} \left( \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} \right)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

end donde  $x = \frac{x}{R(t)}$ .

La velocidad del fluido  $\omega(r, t)$  está determinada por:

$$\left. \begin{aligned} \omega(r, t) &= \frac{-e^{-2yx} + 8yx + e^{2yx} dR(t)}{16ye^k} \frac{dR(t)}{dt} \\ \omega(R(t), t) &= \frac{-e^{-2y} + 8y + e^{2y} dR(t)}{16ye^k} \frac{dR(t)}{dt} \end{aligned} \right\} \frac{\omega}{\omega_\Sigma} = \frac{-e^{-2yx} + 8yx + e^{2yx}}{-e^{-2y} + 8y + e^{2y}} \quad (10)$$

**Modelo de Buchdahl**  $\left[ \rho = \eta(t) \frac{3+C(t)r^2}{(1+C(t)r^2)^2} \right]$

A partir de la condiciones de acoplamiento se obtiene:

$$m(R(t), t) = M \quad \Rightarrow \quad \eta(t) = \frac{M (1 + C(t)R(t)^2)}{4\pi R(t)^3} \quad ; \quad P_r(R(t), t) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(t) = \frac{1}{R(t)^2} \quad (11)$$

Así, las variables físicas que describen la configuración de materia  $\rho$ ,  $P_r$  y  $P_t$  para este modelo son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho(x)}{\rho_c} &= \frac{1}{3} \left[ \frac{3+x^2}{(1+x^2)^2} \right] \\ \frac{P_r(x)}{P_{rc}} &= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\ \frac{P_t(x)}{P_{tc}} &= \frac{1}{2\pi 4z(t)x^2(x^4+3x^3+3x^2+1)-x^8-4x^6-6x^4-4x^2-1} \frac{M(3x^2+1)(x^2-1+4z(t)x^2)}{1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \rho_c(t) &= \frac{3}{2\pi} \frac{M}{R(t)^3} \\ P_{rc}(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R(t)^3} \\ P_{tc}(t) &= P_{rc}(t) \end{aligned} \quad (12)$$

en donde  $x = \frac{r}{R(t)}$  y  $z(t) = \frac{M}{R(t)}$ .

Por último la velocidad de fluido esta determinada por:

$$\left. \begin{aligned} \omega(r, t) &= -\frac{re^{-k}}{4R(t)} \left[ 3 + \left( \frac{r}{R(t)} \right)^2 \right] \frac{dR(t)}{dt} \\ \omega(R(t), t) &= e^{-k} \frac{dR(t)}{dt} \end{aligned} \right\} \frac{\omega}{\omega_\Sigma} = \frac{r}{4R(t)} \left[ 3 + \left( \frac{r}{R(t)} \right)^2 \right] = \frac{x(3+x^2)}{4} \quad (13)$$

$$\text{Modelo de Wyman} \left[ \rho(r, t) = \frac{K(t)(3+5C(t)r^2)}{(1+3C(t)r^2)^{5/3}} \right]$$

De las condiciones de acoplamiento se puede obtener expresiones para  $C(t)$  y  $K(t)$  en función del radio exterior de la esfera  $R(t)$ :

$$P_r(R(t), t) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(t) = \frac{1}{R(t)^2} \quad (14)$$

$$m(R(t), t) = M \quad \Rightarrow \quad -\frac{R(t)^3 C(t) K(t)}{2(1+3C(t)R(t)^2)} = M \quad \Rightarrow \quad K(t) = -\frac{4^{\frac{2}{3}} 2M}{R(t)} \quad (15)$$

Con lo anterior, la densidad ( $\rho$ ), la presión en la dirección radial ( $P_r$ ) y la presión en la dirección tangencial ( $P_t$ ) para este modelo tienen las siguiente expresiones matemáticas:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho(x)}{\rho_c} &= -\frac{1}{3} \left[ \frac{3 + 5x^2}{(1 + 3x^2)^{\frac{5}{3}}} \right] \\ \frac{P_r(x)}{P_{rc}} &= \frac{1 - x^2}{(1 + 3x^2)^{\frac{5}{3}}} \\ \frac{P_t(x)}{P_{tc}} &= \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \frac{(2 + 6x^2)^{\frac{2}{3}}(1 - 4x^2 - x^4) + 8z(t)x^2(1 + 8x^2 + 3x^3)}{(1 + 3x^2)^{\frac{8}{3}} \left( (1 + 3x^2)^{\frac{2}{3}} + 4x^2z(t)2^{\frac{1}{3}} \right)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \rho_c(t) &= \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}\pi} \frac{M}{R(t)^3} \\ P_{rc}(t) &= \frac{1}{4^{\frac{1}{3}}\pi} \frac{M}{R(t)^3} \\ P_{tc}(t) &= P_{rc} \end{aligned} \quad (16)$$

y la velocidad del elemento de línea tiene la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} \omega(r, t) &= \frac{-r}{4e^k} \left[ \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} + \dot{K}(t) \left( \frac{1 + 3C(t)r^2}{K(t)(1 + C(t)r^2)} \right) \right] \\ \omega(R(t), t) &= -\frac{R(t)e^{-k}}{4} \left[ \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} + \frac{2\dot{K}(t)}{K(t)} \right] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \omega &= \frac{r(3R(t)^2 + 5r^2)}{4R(t)(R(t)^2 + 2r^2)} = \frac{x(3 + 5x^2)}{4(1 + 2x^2)} \\ \omega_{\Sigma} &= \frac{r(3R(t)^2 + 5r^2)}{4R(t)(R(t)^2 + 2r^2)} = \frac{x(3 + 5x^2)}{4(1 + 2x^2)} \end{aligned} \quad (17)$$

**Modelo de Florides**  $\left[ \rho(r, t) = \eta(t) \left( 1 - \frac{K(t)r^2}{R(t)^2} \right) \right]$

Para este modelo, las condiciones de acoplamiento se traducen a las siguientes ligaduras para las funciones de integración  $K(t)$  y  $\eta(t)$

$$P_r(R(t), t) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{9}{5} \quad ; \quad m(R(t), t) = M \quad \Rightarrow \quad \eta(t) = \frac{9M}{8\pi R(t)^3} \quad (18)$$

Con lo anterior y a partir de las relaciones presetas en la segunda fila de la tabla (3.1), la densidad  $\rho$ , la presión en la dirección radial  $P_r$  y la presión en la dirección tangencial  $P_t$  para este modelo tienen las siguiente expresiones matemáticas, en las que las variables  $\rho_c, P_{rc}$  y  $P_{tc}$  corresponde a sus respectivos valores centrales:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho(x)}{\rho_c} &= 1 - \frac{5x^2}{9} \\ \frac{P_r(x)}{P_{rc}} &= 1 - x^2 \\ \frac{P_t(x)}{P_{tc}} &= \frac{3(1 - 2x^2) + z(t)x^2(2x^4 - 3x^2 + 9)}{3 + 3z(t)(x^2 - 3)x^2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \rho_c(t) &= \frac{9}{8\pi} \frac{M}{R(t)^3} \\ P_{rc}(t) &= \frac{3}{8\pi} \frac{M}{R(t)^3} \\ P_{tc}(t) &= P_{rc} \end{aligned} \quad (19)$$

en donde,  $x = \frac{r}{R(t)}$  y  $z = \frac{M}{R(t)}$ .

Es fácil comprobar que si la razón  $z(t) > \frac{3}{8}$ , la presión en la dirección tangencial toma valores negativos en la capas exteriores de la estrella. Cabe resaltar que, ya que para los demás modelos esta clase de restricciones no se presentan, ésta es una característica particular del modelo de Florides, .

De la misma forma la velocidad del elemento de fluido es:

$$\left. \begin{aligned} \omega(r, t) &= \frac{dR(t) r e^{-k} (-5r^2 + 9R(t)^2)}{dt R(t) (3R(t)^2 - 2r^2)} \\ \omega(R(t), t) &= e^{-k} \frac{dR(t)}{dt} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \omega &= \frac{r(9R(t)^2 - 5r^2)}{R(t)(3R(t)^2 - 2r^2)} = \frac{x(9 - 5x^2)}{3 - 2x^2} \\ \omega_\Sigma &= \frac{r(9R(t)^2 - 5r^2)}{R(t)(3R(t)^2 - 2r^2)} = \frac{x(9 - 5x^2)}{3 - 2x^2} \end{aligned} \quad (20)$$

**Modelo de Tolman IV**  $\left[ \rho(r, t) = C(t) \left( \frac{2+3C(t)r^2-K(t)(3+7C(t)r^2+6C(t)^2r^4)}{(1+C(t)r^2)^2} \right) \right]$

A partir de las condiciones de acoplamiento ( $m(R(t), t) = M$  y  $P_r(R(t), t) = 0$ ) se pueden encontrar las siguientes relaciones:

$$M = \frac{C(t)^2 R(t)^5}{1 + C(t)R(t)^2 + 2C(t)^2 R(t)^4} \quad \text{y} \quad K(t) = \frac{1 - 2C(t)R(t)^2}{1 + C(t)R(t)^2 + 2C(t)^2 R(t)^4} \quad (21)$$

La densidad de energía y la presión en la dirección radial son:

$$\rho = \frac{2z(t)(3 + 7x + 6x^2)(1 + 2X) - X[x(5 + 6x) - X(3 + 2x)]}{8\pi R(t)^2(1 + X)(1 + 2x^2)^2} \quad (22)$$

$$P_r = \frac{(2x^2 + x + 1)(2z(t)(1 + 2X) - X) - (1 + X)X(2x - 1)}{8\pi R(t)^2(1 + 2x)^2(1 + X)} \quad (23)$$

en donde  $x = C(t)r^2$ ,  $X = C(t)R(t)^2$  y  $z(t) = M/R(t)$  De las ecuaciones de campo se encuentra la velocidad  $\omega$

$$\omega(r, t) = -\frac{r e^{-k/2}}{4} \left[ \frac{1}{C(t)} \left( \frac{dC(t)}{dt} \right) + \frac{dK(t)}{dt} \left( \frac{1 + 3C(t)r^2 + 2C(t)^2 r^4}{K(t)(2C(t)r^2 + 2C(t)^2 r^4 + 1) - 1} \right) \right] \quad (24)$$

Esta última expresión se puede describir como:

$$\frac{\omega}{\omega_\Sigma} = \frac{4X^2(X^2 - xX + 4x^2) + 4X(2X^2 + 5xX + 5x^2) + X(23X^2 + 23xX - 10x^2) - 2(5x + 9X)}{(X + 2)(-2x(1 - 2X)(1 + x) + X(2X + 3))} \sqrt{\frac{x}{X}} \quad (25)$$

en donde  $X = X(t)R(t)^2$ .

# Colapso lento no adiabático con ecuación de estado no local

A continuación se presenta de forma explícita tanto las funciones de integración que se derivan de cada perfil de densidad, así como las funciones de estado que caracterizan el colapso lento del objeto autogravitante no local.

**Modelo de Buchdahl**  $\left[ \rho = \eta(t) \frac{3+C(t)r^2}{(1+C(t)r^2)^2} \right]$

Con la primera condición de acoplamiento ( $m(R(t), t) = M(t)$ ) y la ecuación (4.8) se obtiene las funciones  $\eta(t)$  y  $C(t)$  :

$$C(t) = \frac{M(t)e^{k(t)} + \dot{M}(t)R(t)}{R(t)^2 \left( M(t)e^{k(t)} - \dot{M}(t)R(t) \right)} \quad ; \quad \eta(t) = \frac{8}{3} \left[ -\frac{M(t)^2 e^{k(t)}}{R(t)^3 \left( \dot{M}(t)R(t) - M(t)e^{k(t)} \right)} \right] \quad (26)$$

Con las expresiones de  $C(t)$  y  $\eta(t)$  se puede determinar explícitamente la densidad,  $\rho(r, t)$ , la presión en la dirección radial,  $P_r(r, t)$  y la presión en la dirección tangencial,  $P_\perp(r, t)$ :

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= -\frac{M(t)^2 e^{k(t)}}{2\pi R(t)^3} \left[ \frac{\dot{M}(t)R(t)(3-x^2) - \phi(t)M(t)(3+x^2)}{\left( e^{k(t)/2}M(t)(1+x^2) - \dot{M}(t)R(t)(1-x^2) \right)^2} \right], \\ P_r(x, t) &= \frac{M(t)^2 e^{k(t)}}{2\pi R(t)^3} \left[ \frac{\dot{M}(t)R(t)(1+x^2) + M(t)e^{k(t)/2}(x^2-1)}{\left( \dot{M}(t)R(t)(1-x^2) - (1+x^2)e^{k(t)/2}M(t) \right)^2} \right], \\ P_\perp(x, t) &= M(1+X) \left[ \frac{3X(2M - XRe^{k(t)})x^4 + R + 2x^2M - 2X(R-M)x^2}{4\pi R^3(1+Xx^2)^3(x^2Re^{k(t)} + R - 2x^2M)} \right]; \end{aligned} \quad (27)$$

en donde  $x = r/R(t)$  y  $X = C(t)R(t)^2$ . Es fácilmente comprobable que en el centro de la distribución se cumple:

$$\rho_c(t) = \frac{P_{rc}(t)}{3}. \quad (28)$$

Además la velocidad del elemento de fluido es:

$$\omega(r, t) = \frac{R(t)^3}{M(t)} \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{\dot{\eta}(t)(1+C(t)r^2) - \dot{C}(t)\eta(t)r^2}{(1+C(t)R(t)^2)e^{k(t)}} \right) - \frac{q(r, t)}{\pi} \left( \frac{1+C(t)r^2}{1+C(t)R(t)^2} \right) \right]. \quad (29)$$

**Modelo de Florides**  $\left[ \rho(r, t) = \eta(t) \left( 1 - \frac{K(t)r^2}{R(t)^2} \right) \right]$

De las condiciones de acoplamiento se obtiene:

$$K(t) = \frac{5}{3} \left[ \frac{M(t)e^{k(t)} + \dot{M}(t)R(t)}{3M(t)e^{k(t)} + \dot{M}(t)R(t)} \right] \quad ; \quad \eta(t) = \frac{3}{8} \left[ \frac{3M(t) + \dot{M}(t)R(t)^2 e^{-k(t)}}{\pi R(t)^3} \right], \quad (30)$$

lo cual lleva a las siguientes expresiones para las diferentes funciones de estado que caracterizan el colapso gravitacional de la estrella:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \frac{1}{8\pi R(t)^3} \left[ \frac{\dot{M}(t)R(t)(3 - 5x^2)}{e^{k(t)}} + M(t)(9 - 5x^2) \right], \\ P_r(x, t) &= \frac{1}{8\pi R(t)^3} \left[ \frac{\dot{M}(t)R(t)(1 - 3x^2)}{e^{k(t)}} + 3M(t)(x^2 - 1) \right], \\ P_\perp(x, t) &= \frac{M}{4\pi R^3} \left[ \frac{R(18Kx^2 - 5)(3K - 5) + 2Mx^2(25 + 3K(6xK - 5)x^2)}{(3K - 5)(R(3K - 5) - 2x^2M(3x^2K + 5))} \right]; \end{aligned} \quad (31)$$

en donde  $x = r/R(t)$ . A partir de las anteriores expresiones, se puede comprobar que los valores centrales de la densidad y la presión en la dirección radial están relacionados como:

$$\rho_c(t) = 3P_{r_c}(t). \quad (32)$$

Finalmente la velocidad del elemento de fluido es:

$$\omega = \frac{3K - 5}{6K - 5} \left( \frac{\pi r \eta K}{15e^{k(t)}} \left[ \left( 6\frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{\eta}}{\eta} - 3\frac{\dot{K}}{K} \right) \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{5\dot{\eta}}{\eta K} \right] - \frac{q(r, t)}{\pi} \right) \frac{R^3}{M} \quad (33)$$

**Modelo de Wyman**  $\left[ \rho(r, t) = \frac{K(t)(3+5C(t)r^2)}{(1+3C(t)r^2)^{5/3}} \right]$

Realizando el procedimiento arriba señalado, se obtuvo la forma explícita para las funciones de integración:

$$C(t) = \frac{M(t)e^{k(t)} + \dot{M}(t)R(t)^2}{R(t)^2 \left( M(t)e^{k(t)} - 3\dot{M}(t)R(t)^2 \right)} \quad ; \quad K(t) = \frac{2M(t)}{R(t)^3} \left( \frac{-4M(t)e^{k(t)}}{3\dot{M}(t)R(t)^2 - M(t)e^{k(t)}} \right)^{2/3}. \quad (34)$$

Con las anteriores expresiones se puede escribir:

$$\begin{aligned}
\rho(x, t) &= \frac{M(t)^{5/3}(2e^{2k(t)})^{1/3}}{2\pi R(t)^3} \left[ \frac{\dot{M}(t)R(t)(9-5x^2) - M(t)e^{k(t)}(3-5x^2)}{(3\dot{M}(t)R(t)(1-x^2) - M(t)e^{k(t)}(1+3x^2))^{5/3}} \right], \\
P_r(x, t) &= \frac{M(t)^{5/3}(2e^{k(t)})^{1/3}}{2\pi R(t)^3} \left[ \frac{M(t)e^{k(t)}(-1-x^2) + \dot{M}(t)R(t)(3+x^2)}{\left(M(t)e^{k(t)}(-1-3x^2) - 3\dot{M}(t)R(t)(1-x^2)\right)^{5/3}} \right], \\
P_{\perp}(x, t) &= \frac{(1+3z)^{2/3}(z^2+4z-1) - \frac{r^2 M(t)^2}{R(t)^3} (2-16z-6zr) (1+3C(t)R(t)^2)^{2/3}}{R(t)^3 \pi (1+8z)^{8/3} \left(1+3z - \frac{r^2 M(t)}{R(t)^3} (1+3C(t)R(t)^2)^{2/3}\right)};
\end{aligned} \tag{35}$$

en donde  $x = r/R(t)$  y  $z = C(t)r^2$ . La velocidad del elemento de fluido es:

$$\omega = \frac{1+3C(t)R(t)^2}{1+C(t)r^2} \left[ \frac{R(t)^3 r}{8M(t)^2} \left( \frac{\dot{K}(t)(1+3C(t)r^2) - 2r^2 K(t)\dot{C}(t)}{(1+3C(t)r^2)^{5/3}} \right) e^{k(t)} - \frac{q(r, t)}{\pi} \right] \tag{36}$$

**Modelo de Tolman IV**  $\left[ \rho(r, t) = C(t) \left( \frac{2+3C(t)r^2 - K(t)(3+7C(t)r^2+6C(t)^2r^4)}{(1+C(t)r^2)^2} \right) \right]$

A partir de las condiciones de acoplamiento con el espacio-tiempo exterior se obtuvo:

$$C(t) = \frac{z(z-1) + 3\dot{M}(t) - \Xi}{2R(t)^2 (2\dot{M}(t) + 4z - 4z^2 - 1)} \quad ; \quad K(t) = \frac{-2z - 4zy^2 + y}{y^2(y^2 + 1)} \tag{37}$$

donde  $z = \frac{M(t)}{R(t)}$ ,  $y = C(t)R(t)^2$  y  $\Xi = \sqrt{-28z^4 + \dot{M}(t)(20z^2 - 18z + 1) + 44z^3 - 23x^2 + 4z + \dot{M}(t)^2}$ ,

con lo cual se puede escribir:

$$\begin{aligned}
\rho(r, t) &= \frac{R(t)(3y + 2xy - 6x^2 - 5x)y + 2M(t)(6x^2 + 7x + 3)(1 + 2y)}{8\pi R(t)^3(1 + y)(1 + 2x)^2}, \\
P_r(x, t) &= \frac{2M(t)(1 + 2y)(1 + 2x^2 + x) + R(t)(y - 3x - 2x^2 - 2xy)y}{8\pi R(t)^3(1 + y)(1 + 2x)^2}.
\end{aligned} \tag{38}$$

donde  $x = C(t)r^2$ . Los valores centrales de la presión en la dirección radial y la densidad se relacionan por:

$$P_{x_c}(t) = \frac{\rho_c(t)}{3} \tag{39}$$

y la velocidad del elemento de fluido es:

$$\omega = 4\pi R^3 \left[ \frac{r((\dot{C}K + \dot{K}C)(1 + 2x + 2x^2) - \dot{C} + \dot{K}xC)e^{-k(t)} + 2(1 + 2x)^2 q(r, t)}{4M(1 + 2x^2 + 2x) + 4R(y - 2x - 2x^2)/(1 + y)} \right]. \tag{40}$$

**Modelo de Stewart**  $\left[ \rho(r, t) = \eta(t) \left( \frac{(e^{2K(t)r} - 1)(e^{4K(t)r} + 8K(t)r e^{2K(t)r} - 1)}{8\pi r^2 (e^{2K(t)r} + 1)^3} \right) \right]$ .

A partir de la primera condición de acoplamiento se obtiene:

$$K(t) = \frac{1}{2R(t)} \ln \left( \frac{2M(t) + R(t)\eta(t) - 2\sqrt{2M(t)\eta(t)R(t)}}{2M(t) + \eta(t)R(t)} \right) \quad (41)$$

La función de integración  $\eta(t)$  esta determinada por la relación (4.8):

$$\begin{aligned} \left( 1 - \sqrt{\frac{2M(t)}{R(t)\eta(t)}} \right)^{-3} & \left[ \frac{4M(t)}{R(t)^2\eta(t)^2} - \sqrt{\frac{2M(t)}{R(t)\eta(t)}} \left( 1 + \frac{2M(t)}{R(t)\eta(t)} \right) \right] - 4\frac{M(t)}{R(t)} \\ & \ln \left( \frac{\sqrt{2M(t)} - \sqrt{R(t)\eta(t)}}{\sqrt{2M(t)} + \sqrt{R(t)\eta(t)}} \right) \left( \sqrt{\frac{2M(t)}{R(t)\eta(t)}} + 1 \right) = -2\dot{M}(t) \left( 1 - \frac{2M(t)}{R(t)} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (42)$$

## Condiciones de Energía: Colapso lento no adiabático (no local)

---

En esta sección se comprobará las condiciones de energía para los modelos desarrollados de colapso lento radiante, con el fin de evaluar la capacidad de la ecuación de estado no local de generar escenarios de colapso gravitacional plausibles.

Para el caso en el que la configuración de materia disipa energía, la condiciones de energía, en la aproximación de colapso lento son:

$$\begin{aligned}
 \rho &\geq 2q && [WEC, DEC] \\
 \rho + P_r &\geq 2q && [WEC, SEC] \\
 \rho + P_\perp &\geq 2q && [WEC, SEC] \\
 \rho + P_r + 2P_\perp &\geq 4q && [SEC] \\
 \rho^2 &\geq 2q(\rho + P_r + 2P_\perp) && [DEC] \\
 \rho^2 &\geq P_r^2 + 2q(\rho + P_r + 2P_\perp) && [DEC] \\
 \rho^2 &\geq P_\perp^2 + 2q(\rho + P_r + 2P_\perp) && [DEC]
 \end{aligned} \tag{43}$$

Si la primera condición se cumple, la segunda, tercera y cuarta condición también son satisfechas, ya que se ha exigido que  $\rho > 0$ ,  $P_r > 0$  y  $P_\perp > 0$ . Por lo mismo, si se cumple la séptima o la octava condición, la sexta relación también es satisfecha.

De esta forma en las figuras 2(a)-2(e) se presenta la relación  $\rho - 4q$  a lo largo de toda la configuraciones para los diferentes perfiles de luminosidad trabajados en el capítulo 3. Para todos los casos se cumple que  $\rho > 4q$ , y por tanto las condiciones de energía débil y fuerte son satisfechas.

En las figuras 2(k)-2(ñ) se gráfica la función  $\Xi = \rho^2 - P_r^2 - 2q(\rho + P_r + 2P_\perp)$ . En todos los casos se tiene que  $\Xi > 0$ , por lo que se puede deducir que  $\rho^2 \geq 2q(\rho + P_r + 2P_\perp)$  a lo largo de toda la configuración. Finalmente en las figuras ??-?? se presenta el perfil de la función  $\zeta = \rho^2 - P_\perp^2 - 2q(\rho + P_r + 2P_\perp)$ . Para los modelos de Tolman IV, Wyman y Florides se cumple que  $\zeta > 0$  en todos los casos trabajados. Sin embargo, en los modelos de Buchdahl y Stewart se observa que en las capas exteriores se tiene que  $\rho^2 \leq P_\perp^2 + 2q(\rho + P_r + 2P_\perp)$ .

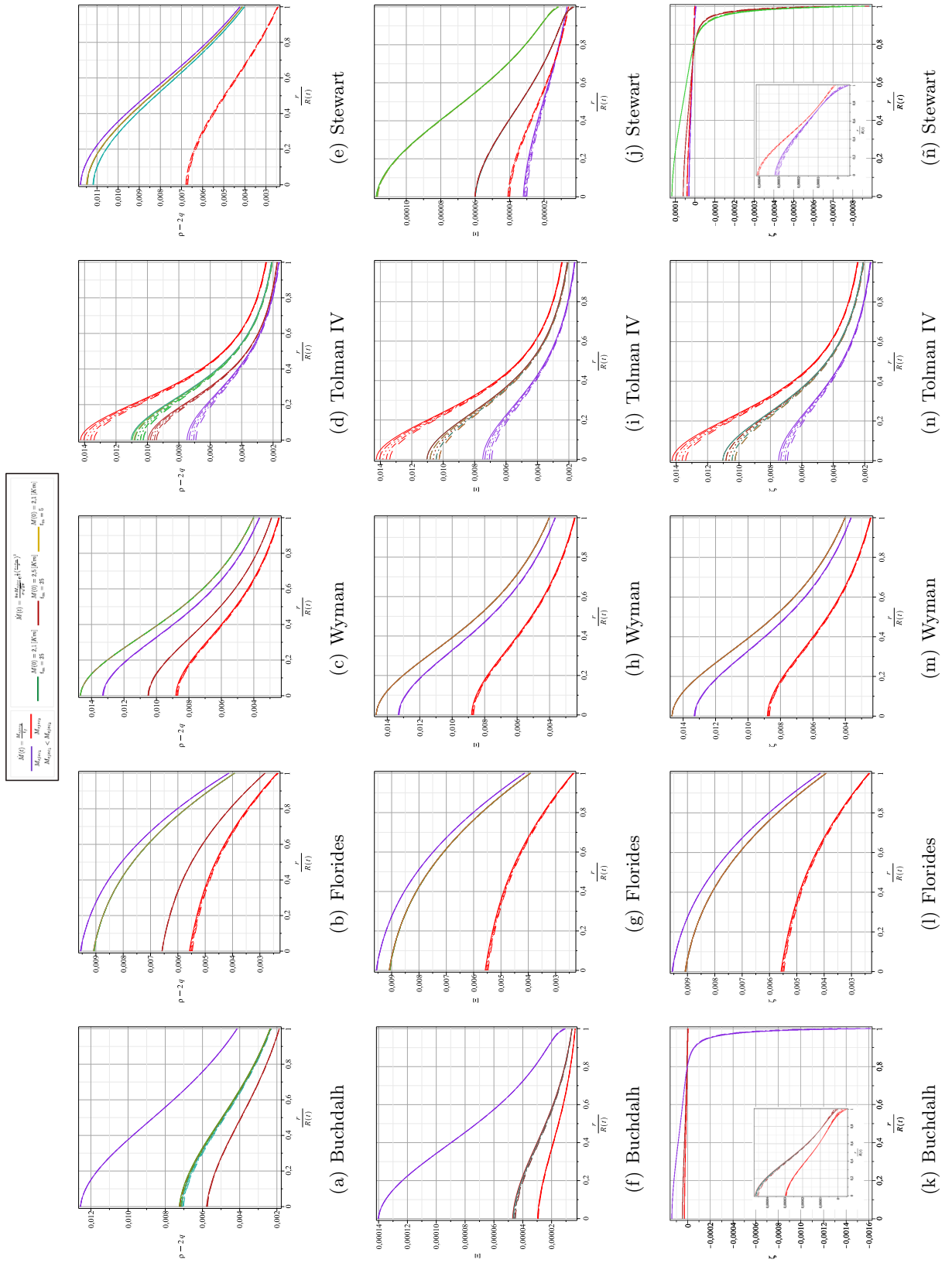


Figura 2: Condiciones de energía para los diferentes escenarios de colapso lento de configuraciones no locales

# Colapso lento radiante con ecuación para la anisotropía

---

## Perfil de densidad de Buchdahl

La extensión al caso dinámico para el perfil de densidad de Buchdahl es:

$$\rho = \frac{3\eta(t)}{16\pi} \frac{3 + \eta(t)r^2}{(1 + \eta(t)r^2)^2} \Rightarrow m(r, t) = \frac{3}{4} \frac{\eta(t)r^3}{1 + \eta(t)r^2}. \quad (44)$$

De forma tal que a través de la condiciones de acoplamiento se obtiene:

$$m(R(t), t) = M(t) \Rightarrow \eta(t) = \frac{4M(t)}{R(t)^2(4M(t) - 3R(t))}. \quad (45)$$

La presión radial se determina a través de (5.10), la cual para este modelo queda de la forma:

$$\frac{1}{hzx} \frac{d\hat{P}_r}{dx} = \frac{3 - 4z + 4zx^2}{-3 + 4z + 2zx^2} \left( \frac{9 - 12z + 4zx^2}{(3 - 4z + 4zx^2)^2} + \frac{3\hat{P}_r}{3 - 4z} \right) \left( 3\hat{P}_r + \frac{3 - 4z}{3 - 4z + 4zx^2} \right); \quad (46)$$

donde para adimensionalizar se ha utilizado las siguientes relaciones:

$$\hat{P}_r = \frac{P_r}{\rho_c} = \frac{16\pi P_r}{9\eta(t)}, \quad x = \frac{r}{R(t)} \quad y \quad z = \frac{M(t)}{R(t)}. \quad (47)$$

## Perfil densidad de Florides

El perfil de densidad de Florides, para el caso no estático, es:

$$\rho = \eta(t) \left( 1 - \frac{5r^2}{9R(t)^2} \right) \Rightarrow m(r, t) = -\frac{4\pi r^3 \eta(t)}{9} \left( 3 - \frac{r^2}{R(t)^2} \right), \quad (48)$$

y a través de la condición de acoplamiento la función  $\eta(t)$  es de la forma:

$$\eta(t) = \frac{9M(t)}{8\pi R(t)^3}. \quad (49)$$

La ecuación diferencial que determina la presión en la dirección radial, para este modelo queda de la forma:

$$\frac{\partial \hat{P}_r}{\partial x} = \frac{hzx}{18} \frac{(9 - 5x^2 + 9\hat{P}_r) (9\hat{P}_r + (-x^2 + 3))}{R(t)(-1 + zx^2(-x^2 + 3))}; \quad (50)$$

en donde se ha normalizado las variables a través de las siguientes sustituciones:

$$\hat{P}_r = \frac{P_r}{\eta(t)}, \quad x = \frac{r}{R(t)} \quad y \quad z = \frac{M(t)}{R(t)}. \quad (51)$$

### Perfil de densidad de M. Wyman

El perfil de densidad de Wyman, en este caso es:

$$\rho = -\frac{\eta(t)}{R(t)^2} \left( \frac{3 + 5\frac{r^2}{R(t)^2}}{\left(1 + 3\frac{r^2}{R(t)^2}\right)^{\frac{5}{3}}} \right) \Rightarrow m(r, t) = \frac{4\pi\eta(t)r^3}{R(t)^2 \left(1 + 3\frac{r^2}{R(t)^2}\right)^{\frac{2}{3}}}. \quad (52)$$

A través de las condiciones de acoplamiento, la función  $\eta(t)$  queda determinada como:

$$\eta(t) = \frac{M(t)}{2^{\frac{2}{3}}\pi R(t)}. \quad (53)$$

Así, la presión radial queda determinada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial \hat{P}_r}{\partial x} = \frac{4z(t)R(t)h}{2^{\frac{2}{3}}} \frac{\left( \frac{3 + 5x^2}{(1 + 3x^2)^{5/3}} + \hat{P}_r \right) \left( \hat{P}_r x + \frac{x}{(1 + 3x^2)^{2/3}} \right)}{\left( -1 + \frac{2^{\frac{7}{3}}z(t)x^2}{(1 + 3x^2)^{2/3}} \right)}; \quad (54)$$

en donde para adimensionalizar se han utilizado las siguientes sustituciones:

$$\hat{P}_r = \frac{P_r R(t)^2}{\eta(t)}, \quad x = \frac{r}{R(t)} \quad y \quad z(t) = \frac{M(t)}{R(t)}. \quad (55)$$