### EQUILIBRIO EN SISTEMAS BINARIOS QUE INCLUYEN UN OBJETO EXTREMO EN EL CASO ESTACIONARIO DE VACÍO

JORGE ARMANDO RUEDA HERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA DE FÍSICA 2005

### EQUILIBRIO EN SISTEMAS BINARIOS QUE INCLUYEN UN OBJETO EXTREMO EN EL CASO ESTACIONARIO DE VACÍO

JORGE ARMANDO RUEDA HERNÁNDEZ

Trabajo de Grado para optar el título de Físico

Director JOSÉ DAVID SANABRIA GÓMEZ Doctor en Ciencias en la especialidad de Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA DE FÍSICA 2005

A mi familia A Yurany A mis profesores y amigos

# AGRADECIMIENTOS

La realización del presente trabajo no hubiera sido posible sin todas las personas que me han prestado su apoyo.

Primeramente expreso los más profundos agradecimientos a toda mi familia, la cual me ha apoyado siempre. Agradezco especialmente a:

*Mis padres Orlando Rueda y Luz María Hernández.* Su apoyo no es basado simplemente en mi economía, pues siempre me han regalado sus consejos cuando los he necesitado.

*Mis hermanos Pablo Andrés y Sara Milena.* Son el complemento del apoyo de mis padres. Agradezco a mi hermano por todos sus consejos sobre todos los aspectos de forma de este trabajo.

*Mi novia Yurany.* Ella me ha acompañado durante casi toda la vida. Es un gran apoyo y siempre está presente cuando necesito escapar un poco de mis obligaciones académicas. Aprovecho la oportunidad para pedirle disculpas por todo el tiempo que no puedo dedicarle debido al estudio y sobre todo en el desarrollo de este trabajo.

Agradezco a todos los profesores de la Escuela de Física de la Universidad Industrial de Santander; pues ellos me han inculcado un gran aprecio por la Ciencia y especialmente por la Física. De manera especial expreso un agradecimiento a :

Dr. José David Sanabria Gómez, director del trabajo. Sus innumerables consejos guiaron por el buen camino ésta investigación; todas las discusiones sobre el tema siempre fueron muy productivas. Los resultados de este trabajo los comparto con él de manera muy especial.

Dr. Guillermo González, director del Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG) de la Universidad Industrial de Santander. Siempre está dispuesto a despejar hasta las más complejas dudas. Sus conocimientos son un gran apoyo no sólo para mí, sino para todos los estudiantes y hasta para sus colegas.

Dr. Vladimir Manko, investigador del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN en México D.F., México. Él me brindó todo el apoyo que uno puede necesitar de un gran investigador. A pesar de ser uno de los investigadores más reconocidos mundialmente en el ámbito de la Relatividad General, siempre dedicó el tiempo justo a mis consultas.

Agradezco a todos los integrantes del GIRG : Gustavo Ramírez, Framsol López, Paolo

Ospina, Jerson Reina, Javier Ramos, César Valenzuela, Fabio Lora, Alexander Argüello, Yamir Castañeda, Freddy Dubeibe, Diego Cristancho, Antonio Gutierrez, Gonzalo García, José Luis González, y en forma especial a:

*Leonardo Pachón.* Posee una muy buena visión de la física. Las continuas discusiones con él sobre este trabajo fueron de gran importancia en el desarrollo del mismo.

Agradezco a todos los compañeros código 2000 de la Escuela de Física, pues siempre me han hecho sentir muy especial, los aprecio mucho a todos.

Agradezco en forma general a todas las personas que de una u otra forma contribuyeron tanto a mi formación profesional en el área de la Física como en mi formación como persona.

Pido disculpas a todos los que se me escaparon de esta lista de agradecimientos y deben estar en ella; todos saben que no gozo de una buena memoria.

# **TÍTULO :** EQUILIBRIO EN SISTEMAS BINARIOS QUE INCLUYEN UN OBJETO EXTREMO EN EL CASO ESTACIONARIO DE VACÍO \*.

AUTOR : RUEDA HERNÁNDEZ, Jorge Armando \*\*.

**PALABRAS CLAVES :** Objeto extremo, Sistemas Binarios, Sistema Binario extremosubextremo, Sistema Binario extremo-hiperextremo, Ecuaciones de Equilibrio.

**DESCRIPCIÓN**: El problema del equilibrio de Sistemas Binarios (SB) en Relatividad General para espacio-tiempos estacionarios axialmente simétricos ha sido estudiado por muchos autores desde la aparición de la famosa solución doble Kerr de Kramer y Neugebauer en 1980. Un SB admite un estado de equilibrio si satisface dos ecuaciones denominadas ecuaciones de equilibrio. En este trabajo se estudian los estados de equilibrio de dos tipos de SB : el formado por un objeto extremo y uno subextremo (ES), y el formado por un objeto extremo y uno hiperextremo (EH).

Se definen los tipos de objetos subextremo, extremo, hiperextremo, y se describen los dos tipos de SB que se estudian en el trabajo. Se construye una solución exacta de las ecuaciones de Einstein en el vacío que representa el campo gravitacional que produce un SB que incluye un objeto extremo. La solución es estacionaria axialmente simétrica y es construida por medio del método integral de Sibgatullin. Se estudia el significado físico de las ecuaciones de equilibrio describiendo la procedencia de cada una de ellas. Se resuelven las ecuaciones de equilibrio para los SB ES y EH en forma separada. La condición de planitud asintótica de la métrica se exige imponiendo que el parámetro NUT de la solución sea nulo. Por último, se escriben las conclusiones del trabajo y los aportes más importantes del mismo.

Los SB ES y EH son los únicos cuyos estados de equilibrio eran desconocidos hasta el momento. En el presente trabajo se resuelve el sistema de ecuaciones de equilibrio tanto en el caso ES como en el EH incluyendo la condición de planitud asintótica de la métrica para objetos con masas de Komar positivas en el caso ES.

<sup>\*</sup>Trabajo de Grado

<sup>\*\*</sup> Facultad de Ciencias, Escuela de Física, José David Sanabria Gómez (Director)

# **TITLE :** EQUILIBRIUM IN BINARY SYSTEMS THAT INCLUDE AN EXTREME OBJECT IN THE STATIONARY CASE OF VACUUM $^*$ .

AUTHOR : RUEDA HERNÁNDEZ, Jorge Armando \*\*.

**KEY WORDS :** Extreme object, Binary Systems, Binary System extreme-subextreme, Binary System extreme-hyperextreme, Equilibrium Equations.

**DESCRIPTION :** The problem of equilibrium of Binary Systems (BS) in General Relativity for stationary axisymmetric space-times has been studied by several authors since appearance of famous double Kerr solution of Kramer and Neugebauer in 1980. A BS admits an equilibrium state if it satisfies two equations denominated equilibrium equations. In this work it is studied the equilibrium states of two classes of BS : those constituted for an extreme object and other subextreme object (ES), and those constituted for an extreme and other hyperextreme object (EH).

It is defined classes of subextreme, extreme, hyperextreme objects, and it is described the two classes of BS which are studied in this work. It is constructed an exact solution of Einstein vacuum equations representing the gravitational field produced by a BS involving an extreme object. The solution is stationary axisymmetric and constructed by Sibgatullin's integral method. It is studied the physical meaning of equilibrium equations describing origin of each one. It is solved the equilibrium equations for BS ES and EH separately. The asymptotic flatness condition of metric is demanded imposing that NUT parameter of solution vanish. Finally, it is wrote the conclusions and the most important contributions of work.

The ES and EH are only BS whose equilibrium states were unknown until now. In this work are solved the equilibrium equations system in ES and EH cases including the asymptotic flatness condition of metric for objects with positive Komar masses in ES case.

<sup>\*</sup>Work of Degree

<sup>\*\*</sup> Facultad de Ciencias, Escuela de Física, José David Sanabria Gómez (Director)

# NOTACIÓN

En el trabajo se emplea el sistema de unidades naturales, en el cual c = G = 1, donde c es la velocidad de la luz en el vacío y G es la constante de gravitación universal. A continuación se dará una lista con las notaciones especiales empleadas en el desarrollo del trabajo.

• Dos índices repetidos en una misma ecuación denotan una suma implícita, es decir,

$$\sum_{j} A_{j}^{ij} = A_{j}^{ij}$$

- Índices latinos tales como  $i,\,j,\,k$ toman valores de la forma 1,2,3, es decir

$$\sum_{i} A^{i} = A^{1} + A^{2} + A^{3} \,.$$

• Índices griegos tales como  $\alpha$ ,  $\beta$  toman valores de la forma 0,1,2,3, es decir

$$\sum_{\alpha} A^{\alpha} = A^0 + A^1 + A^2 + A^3 \,.$$

•  $A^i$  es un vector contravariante y  $A_j$  covariante, donde se cumple

$$A_{\alpha} = g_{\alpha\beta} A^{\beta} \,,$$

siendo  $g_{\alpha\beta}$  el tensor métrico.

- El símbolo  $\oint$  denota integral de valor principal.
- Derivación parcial se denota con una coma, es decir,

$$\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = A^{\alpha},_{\beta} .$$

• Derivada covariante se denota con punto y coma, es decir,

$$A^{\alpha}_{;\beta} = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\beta} A^{\lambda} ,$$
$$A_{\alpha;\beta} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} A_{\lambda} .$$

# ÍNDICE GENERAL

N	ΟΤΑ	CIÓN		v
IN	ITRO	DUC	CIÓN	1
1.	SIS	ГЕМА	S BINARIOS	4
	1.1.	SINGU	ULARIDADES DEL ESPACIO-TIEMPO	4
	1.2.	CLAS	IFICACIÓN DE LOS OBJETOS	7
2.	CO	NSTR	UCCIÓN DE LA SOLUCIÓN	10
	2.1.	EL M	ÉTODO DE SIBGATULLIN	11
	2.2.	EL PC	OTENCIAL DE ERNST	14
		2.2.1.	Potencial de Ernst sobre el eje de simetría	14
		2.2.2.	La Ecuación de Sibgatullin	15
		2.2.3.	Cálculo de la función $\mu_1(\sigma)$	16
		2.2.4.	Potencial de Ernst en el plano complejo	17
	2.3.	FUNC	ZIONES MÉTRICAS	19
		2.3.1.	Función $f$	19
		2.3.2.	Función $\omega$	19
		2.3.3.	Función $\gamma$	22

	3.1.	CONE	DICIÓN DE EXISTENCIA DEL EJE DE SIMETRÍA	24
		3.1.1.	Simetrías Discretas	24
		3.1.2.	Simetrías Continuas	25
	3.2.	CONE	DICIÓN DE PLANITUD ELEMENTAL	26
		3.2.1.	Fuerza entre objetos de un Sistema Binario	29
4.	EST	FADOS	S DE EQUILIBRIO	32
				-
	4.1.	CASO	EXTREMO-SUBEXTREMO	32
	4.2.	CASO	EXTREMO-HIPEREXTREMO	38
C	ONC	LUSIC	DNES	41
A	POR	TES		42
RI	EFEI	RENC	IAS	43

# ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Objeto de Kerr extremo, subextremo, e hiperextremo	8
1.2.	Objeto extremo, subextremo, e hiperextremo	8
1.3.	Sistemas Binarios extremo-subextremo y extremo-hiperextremo	9
2.1.	SB extremo-subextremo y extremo-hiperextremo	15
4.1.	Regiones del eje de simetría para SB extremo-subextremo	32
4.2.	Regiones del eje de simetría para SB extremo-hiperextremo	38

# ÍNDICE DE TABLAS

1.1.	Objetos de Kerr según la relación entre sus parámetros físicos	7
4.1.	Parámetros de SB extremo-subextremo en equilibrio	35
4.2.	Características físicas de SB extremo-subextremo en equilibrio	37
4.3.	Parámetros que equilibran un SB E-S con parámetro NUT nulo	38
4.4.	Características físicas de SB E-S en equilibrio con parámetro NUT nulo	38
4.5.	Parámetros de SB extremo-hiperextremo en equilibrio	39
4.6.	Parámetros físicos de SB extremo-hiperextremo en equilibrio	40

# INTRODUCCIÓN

Diversas teorías sobre gravitación han sido postuladas a través de la historia de la física; sin embargo, la de mayor aceptación entre la comunidad científica en la actualidad es la teoría de la Relatividad General de Einstein (RG). Dicha aceptación se basa principalmente en el éxito que ha tenido en la explicación de ciertos fenómenos que otras teorías son incapaces de explicar, incluso la teoría de gravitación newtoniana. La precesión del perihelio del planeta Mercurio, la deflexión de la luz al pasar cerca del sol, el corrimiento hacia el rojo gravitacional, entre otros, fueron fenómenos claves que lanzaron RG a la cima de las teorías de gravitación, ya que los cálculos obtenidos mediante RG concuerdan con una increíble aproximación con los datos experimentales.

RG está basada en consideraciones geométricas asociadas a una relación entre la fuerza de gravedad y el espacio-tiempo. La idea principal de RG es que la gravitación es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, y que ésta curvatura está determinada por las diferentes formas de materia-energía. Dichas ideas fueron condensadas por Einstein en sus famosas ecuaciones de campo gravitacional

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta},\tag{1}$$

donde  $G_{\alpha\beta}$  es el tensor de Einstein,  $R_{\alpha\beta}$  es el tensor de Ricci,  $g_{\alpha\beta}$  el tensor métrico, R es el escalar de curvatura y  $T_{\alpha\beta}$  es el tensor de momentum-energía.

El lado izquierdo de la ecuación (1) contiene información acerca de la curvatura del espaciotiempo (información geométrica), y el lado derecho la información física del mismo; tales como los campos diferentes del gravitacional que se encuentran presentes y características de la materia como presión, densidad, entre otras. Por ello, Albert Einstein resume la teoría de la Relatividad General en su famosa frase : "La Geometría le dice a la materia como moverse, y la materia le dice a la geometría como curvarse".

El tensor de momentum-energía es la suma del tensor de momentum-energía de materia  $T_M^{\alpha\beta}$  y el tensor de momentum-energía electromagnético  $T_{EM}^{\alpha\beta}$ , esto es

$$T^{\alpha\beta} = T_M^{\alpha\beta} + T_{EM}^{\alpha\beta} \,. \tag{2}$$

Si en el espacio-tiempo exterior al sistema no hay presencia de materia, entonces  $T_M^{\alpha\beta}=0,$  y

si no hay presencia de campos electromagnéticos, entonces  $T_{EM}^{\alpha\beta} = 0$ . Una solución exterior en la cual no hay presencia de materia ni de campos electromagnéticos es denominada una solución de vacío. Una solución de vacío es una solución del sistema

$$R_{\alpha\beta} = 0. \tag{3}$$

La comprensión de RG ha sido determinada desde su postulación en el año de 1915, por el descubrimiento e interpretación de las soluciones exactas de las ecuaciones de campo (1). Las ecuaciones de campo son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden acopladas no lineales en  $g_{\alpha\beta}$ . Calcular una solución del sistema (1), es encontrar cuál es el tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$ . Calcular una solución exacta (analítica) de las ecuaciones de Einstein es un trabajo extremadamente complicado debido a que el sistema de ecuaciones es fuertemente no lineal. Por ésta razón, en los primeros años de investigación en RG sólo fueron calculadas un pequeño número de soluciones exactas, las cuales representaban soluciones a problemas físicos bastante ideales; pues se tenían que imponer simetrías al espacio-tiempo para aminorar las dificultades matemáticas. Un ejemplo de ello es la primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein calculada. Dicha solución, estática esféricamente simétrica y de vacío, fue publicada en 1916 por Karl Schwarzschild y es conocida por el nombre de su autor.

De esta manera, la solución de Schwarzschild es una solución del sistema (3) bajo la imposición de simetría esférica al espacio-tiempo. El problema de solucionar ecuaciones de Einstein en el vacío o no, es comúnmente relacionado con el problema en gravitación newtoniana de resolver la ecuación de Poisson o la ecuación de Laplace; las ecuaciones de Einstein (1) serían el análogo de la ecuación de Poisson y las ecuaciones de Einstein en el vacío (3) serían el análogo de la ecuación de Laplace. De esta manera, se entiende un poco mejor la teoría.

Otro tipo de espacio-tiempo es el estacionario con simetría axial. La primera solución de éste tipo fue encontrada por Roy Kerr en el año de 1963, lo que evidencia la complejidad del problema; ya que tuvieron que transcurrir casi ¡50 años! para pasar de una simetría esférica a una simetría axial. La solución de Kerr es también una solución de vacío y representa el campo gravitacional producido por un objeto masivo rotante. Una solución con simetría axial como la solución de Kerr, puede representar alguna realidad física; por ejemplo, podría representar el campo gravitacional producido por un agujero negro rotante, o en general, el campo producido por los llamados objetos compactos con rotación.

Debido a la posible realidad física que podría representar éste tipo de soluciones, la gran mayoría de las investigaciones se volcaron hacia la construcción de soluciones exactas estacionarias axialmente simétricas. Pero en este momento ya era bien conocida la complejidad del problema, así que el objetivo primordial, era encontrar métodos matemáticas que permitieran calcular soluciones de las ecuaciones 3 para dicha simetría. El trabajo tuvo éxito, de allí nacieron los conocidos métodos modernos de generación de soluciones, los cuales son importantes no sólo en RG sino en teoría de ecuaciones diferenciales no lineales. Pero el problema no termina allí, en calcular una solución exacta, bien se dijo al principio que la comprensión ha estado determinada por el descubrimiento e interpretación de las soluciones exactas, así que la primera parte estaba resuelta por lo menos momentáneamente. Respecto a la interpretación de las soluciones exactas, este es un problema de nunca acabar, el resultado de estas máquinas productoras de soluciones, fue en su gran mayoría producir soluciones cuya interpretación física es imposible; es decir, soluciones que no representan ninguna realidad física conocida o por lo menos imaginable.

Aunque la gran mayoría de las soluciones exactas producidas no admitían una interpretación física clara, algunas de ellas sí lo permitían. Éste trabajo se encuentra enmarcado en un tipo especial de soluciones exactas, las cuales son interpretadas como el campo gravitacional producido por un sistema formado por dos objetos masivos. Dichos sistemas son llamados *Sistemas Binarios* (SB).

Los objetos constituyentes de un SB deben atraerse mutuamente debido a la interacción gravitacional; sin embargo, todas las soluciones construidas de SB son estacionarias; así que los objetos no giran uno alrededor del otro, ni cae uno sobre el otro, ya que esto representaría claramente una situación no estacionaria. Debido a lo anterior, se debe pensar que existe algo que mantiene los dos objetos apartados, es decir, en *equilibrio*. Estudios sobre equilibrio en SB han demostrado que la interacción gravitacional puede ser balanceada por otro tipo de interacciones como la electromagnética o la llamada repulsión spin-spin debido a los momentos angulares de los objetos, fenómeno cuyo análogo clásico no existe. Por lo tanto, el estudio de equilibrio en SB es motivado en gran parte por el descubrimiento de nuevos fenómenos naturales hasta el momento inexplorados. Sin embargo, no todos los SB se encuentran equilibrados en forma natural; es decir, en algunos casos no es posible encontrar interacción alguna que contrarreste la interacción gravitacional. En éste caso, los objetos se mantienen apartados por la aparición de singularidades entre los objetos. La búsqueda de estados de equilibrio natural de un SB está determinada por la solución de un par de ecuaciones llamadas condiciones de balance o ecuaciones de equilibrio, sobre las cuales se hablará más adelante. Si es posible encontrar una solución simultánea de las ecuaciones de balance, entonces el sistema estará equilibrado en forma natural, ya que la solución de las ecuaciones provee relaciones entre los parámetros físicos de los objetos que permiten que la atracción gravitacional mutua entre los objetos sea balanceada por alguna otra interacción.

El presente trabajo se encuentra en el contexto de las soluciones exactas en RG. En el capítulo 1, "Sistemas Binarios", se realiza una revisión muy general de las singularidades espacio-temporales más conocidas y luego se explica qué tipo de SB se van a estudiar, haciendo principal énfasis en qué tipos de objetos son los constituyentes de los mismos. En el capítulo 2, "Construcción de la Solución", se reproduce el cálculo de una solución exacta de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Dicha solución es estacionaria axialmente simétrica, y es calculada para SB cuyas especificaciones se encuentran dadas previamente en el capítulo 1. En el capítulo 3, "Ecuaciones de Equilibrio", se realiza una breve descripción de la procedencia de las ecuaciones de equilibrio, y se realiza un análisis de las mismas para aclarar su interpretación física. En el capítulo 4, "Estados de Equilibrio", las ecuaciones de equilibrio serán escritas en forma explícita para cada SB propuesto en el caso estacionario de vacío y se muestran soluciones de las mismas. Por último, se escribirán las conclusiones y los aportes del trabajo.

# 1

## SISTEMAS BINARIOS

Los Sistemas Binarios, como su nombre lo indica, se encuentran formados por dos objetos cuyas características físicas pueden ser variadas. Por ejemplo, un SB puede estar constituido por objetos con masa y momento angular, mientras que otro SB puede estar formado por objetos con masa y carga eléctrica, y así se pueden encontrar diferentes tipos de SB.

El estudio de los Sistemas Binarios en RG es particularmente interesante debido al descubrimiento de nuevos fenómenos físicos sin análogos newtonianos como la ya mencionada interacción spin-spin, y por la complejidad de los cálculos matemáticos que éstos implican.

Tanto la clasificación de los tipos de objetos existentes como los estados de equilibrio de un SB se encuentran íntimamente relacionados con las singularidades que puede tener un espacio-tiempo, por lo tanto, primero se estudiará brevemente el concepto de singularidad.

## 1.1 SINGULARIDADES DEL ESPACIO-TIEMPO

Cuando los coeficientes métricos(componentes del tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$ ) de algún elemento de línea se hacen infinito en algún punto del espacio-tiempo, se dice que existe una singularidad o que dicho punto es singular. Pero el análisis de la métrica no debe ser el único criterio para determinar la existencia de singularidades, pues los coeficientes métricos son cantidades dependientes de las coordenadas, dando como resultado "singularidades de coordenadas", ocasionadas por un mal comportamiento del sistema de coordenadas elegido; es decir, son aparentes. Ejemplo de ello, es el conocido caso de la métrica de Schwarzschild, la cual posee una singularidad de coordenadas en r = 2M(M es la masa del objeto). Las singularidades de coordenadas son removibles; esto es, haciendo un cambio de coordenadas de Eddington-Finkelstein no presenta singularidad en r = 2M, con lo que se confirma que dicha singularidad es de coordenadas. Pero en la métrica de Schwarzschild aparece una singularidad en r = 0 que no es posible remover bajo ningún cambio de coordenadas, a éste tipo de singularidades se les llaman comunmente singularidades intrínsecas del espacio-tiempo.

Se podría pensar, que tratar de remover singularidades haciendo cambios de coordenadas

es una tarea que podría llegar a ser infinita, ya que nunca se podría estar seguro si algún cambio de coordenadas que no se ha hecho podría remover la singularidad, por lo tanto surge una inquietud : ¿cómo saber si una singularidad es intrínseca?. La respuesta no es sencilla y existen libros enteros dedicados al estudio de la naturaleza de las singularidades en RG. No es un objetivo realizar un estudio riguroso sobre las singularidades, así que simplemente se dará un criterio para saber cuando una singularidad es candidata a ser intrínseca.

Existe una singularidad cuando la curvatura del espacio-tiempo se hace infinita. La curvatura del espacio-tiempo se mide con el tensor de Riemann o tensor de curvatura; por lo tanto, existe una singularidad en un punto del espacio-tiempo cuando el tensor de Riemann se hace infinito en él. El tensor de Riemann está dado por la expresión

$$R^{\alpha}_{\ \beta\gamma\delta} = \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\delta}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma} , \qquad (1.1)$$

donde  $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$  es llamada conexión afín y se encuentra dada por los símbolos de Christoffel de segunda especie

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}\right) \,. \tag{1.2}$$

Como se puede ver, las componentes del tensor de Riemann dependen de las coordenadas debido a que el tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  depende de las coordenadas, entonces, se puede tener el mismo problema que con el tensor métrico; es decir, singularidades de coordenadas. Sin embargo, con el tensor de curvatura se pueden construir varias cantidades escalares, las cuales, por definición, son independientes del sistema de coordenadas. Entonces, el criterio para postular singularidades como candidatas a ser intrínsecas, es que alguno de dichos escalares se explote a infinito. Ejemplos de cantidades escalares construidas a partir del tensor de curvatura de Riemann son :  $g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$  y  $R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ .

El criterio anterior nos dice posibles candidatos a singularidades intrínsecas, pero no lo asegura. Por lo general, es bastante complicado analizar si un punto es o no singular, pero en la mayoría de los casos es suficiente con calcular las cantidades escalares a partir del tensor de Riemann.

Para tener una mejor idea de lo anterior, se analizarán las singularidades de la solución de Kerr.

La solución de Kerr, al igual que las soluciones de nuestro interés, es estacionaria y tiene simetría axial. El elemento de línea más simple que representa un espacio-tiempo con estas propiedades es el de Papapetrou :

$$ds^{2} = -f(dt - \omega d\phi)^{2} + f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^{2} + dz^{2}) + \rho^{2}d\phi^{2}], \qquad (1.3)$$

donde  $(\rho, z, \phi, t)$  son las coordenadas de Weyl y f,  $\omega$  y  $\gamma$  son las funciones métricas, cuya

dependencia es sólo de  $\rho$  y z debido a las simetrías axial y temporal que posee la métrica.

Sin embargo, la métrica de Kerr no es escrita comunmente en la forma de Papapetrou (1.3), pues haciendo un cambio a un tipo de coordenadas llamadas coordenadas de Boyer-Lindquist, el análisis de las singularidades de la solución se hace bastante sencillo.

Un objeto de Kerr está caracterizado por su masa m y su momento angular por unidad de masa a. La solución de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist tiene la forma

$$ds^{2} = -\frac{\Delta}{\rho^{2}}(dt - a \sin^{2}\theta d\phi)^{2} + \frac{\sin^{2}\theta}{\rho^{2}}[(r^{2} + a^{2})d\phi - adt]^{2} + \frac{\rho^{2}}{\Delta}dr^{2} + \rho^{2}d\theta^{2}, \qquad (1.4)$$

donde  $\Delta = (r - m)^2 - (m^2 - a^2)$  y  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ .

Un análisis de la métrica (1.4), muestra que existen singularidades en  $\rho = 0$  y en  $\Delta = 0$  [5]. El cálculo de los escalares construidos por medio del tensor de curvatura muestra que de las dos singularidades anteriores sólo una es intrínseca. El escalar  $R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  es bien comportado en  $\Delta = 0$ , pero en  $\rho = 0$  explota a infinito, por lo tanto,  $\rho = 0$  es una singularidad intrínseca de (1.4).

La singularidad en  $\Delta = 0$  sólo es posible si  $m^2 \ge a^2$ , ya que si  $m^2 < a^2$  la función  $\Delta$  nunca se anulará. Entonces, la singularidad se presenta en

$$r = r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}, \qquad m^2 < a^2.$$
 (1.5)

Por lo tanto, para  $m^2 \ge a^2$  existen dos horizontes de eventos dados por (1.5).

La singularidad en  $\rho=0$  se encuentra en

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0, \qquad (1.6)$$

entonces, cambiando las coordenadas de Boyer-Lindquist por coordenadas tipo cartesianas

$$x = r \sin \theta \cos \phi + a \sin \theta \sin \phi, \qquad (1.7)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi - a \sin \theta \cos \phi, \qquad (1.8)$$

$$z = r\cos\theta, \tag{1.9}$$

la ecuación (1.6) se convierte en

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad z = 0, \tag{1.10}$$

entonces, la singularidad es un anillo de radio a en el plano ecuatorial z = 0.

La singularidad de anillo siempre está presente, pero los horizontes de eventos únicamente aparecen para  $m^2 \ge a^2$ , es decir, si el momento angular por unidad de masa del objeto no supera la masa del objeto, entonces, la singularidad de anillo se encuentra cubierta por los horizontes dados por (1.5). En el caso contrario,  $m^2 < a^2$ , los horizontes desaparecen y se dice que la singularidad de anillo es desnuda (no hay horizontes que la cubran).

Ahora, es posible una mejor comprensión de la clasificación de los objetos constituyentes de los sistemas binarios.

## 1.2 CLASIFICACIÓN DE LOS OBJETOS

Los objetos que conforman un SB se pueden clasificar en tres tipos: objetos subextremos, extremos e hiperextremos. La clasificación de un objeto es dada por relaciones entre sus parámetros físicos y está relacionada con el tipo de singularidades que produce.

Las anteriores relaciones entre la masa y el momento angular por unidad de masa de los objetos de Kerr clasifican los objetos como subextremos, extremos o hiperextremos dependiendo si  $m^2 > a^2$ ,  $m^2 = a^2$  o  $m^2 < a^2$  respectivamente. Es decir, objetos subextremos y extremos dan lugar a singularidades con horizonte y objetos hiperextremos originan singularidades desnudas.

En el plano complejo de Weyl, los objetos de Kerr toman una forma particular que se encuentra relacionada con los parámetros  $\alpha_{\pm} = \pm \sqrt{m^2 - a^2}$ .

TIPO DE OBJETO DE KERR	<b>RELACIÓN ENTRE</b> $\alpha_+$ Y $\alpha$
Subextremo	$\alpha_+ = -\alpha, \in \mathbb{R}$
Extremo	$\alpha_+ = \alpha = 0, \in \mathbb{R}$
Hiperextremo	$\alpha_+ = \overline{\alpha}, \in \mathbb{C}$

Tabla 1.1: Objetos de Kerr según la relación entre sus parámetros físicos.

Entonces, un objeto subextremo se ve como una barra vertical sobre el eje z (dos raíces reales diferentes), uno extremo se ve como un punto sobre el eje z (dos raíces reales iguales), y uno hiperextremo se ve como una barra horizontal paralela al eje  $\rho$  (dos raíces complejas conjugadas).

Una representación de los tipos de objetos de Kerr es la siguiente:



Figura 1.1: Objeto de Kerr extremo, subextremo, e hiperextremo.

Sin embargo, los objetos constituyentes de un Sistema Binario pueden ser subextremos, extremos o hiperextremos sin necesidad de generar singularidades con horizonte o desnudas. En realidad, los horizontes de eventos surgen únicamente si se presentan las condiciones adecuadas, por ejemplo si la masa del objeto es suficientemente grande comparada con su radio.

Si no fuese de esta forma, estos objetos no podrían representar estrellas de neutrones, o en general cualquier otro objeto compacto diferente a los agujeros negros.

Los parámetros físicos que caracterizan un objeto, siempre se encuentran relacionados de tal forma que establecen una forma del objeto en el plano complejo de Weyl  $(z, i\rho)$ , así que los objetos siempre adquieren cualquiera de las siguientes formas:



Figura 1.2: Objeto extremo, subextremo, e hiperextremo.

En general, la clasificación de los objetos se encuentra asociada a como se ven éstos en el plano de Weyl  $(z, i\rho)$ . Puntos son objetos extremos, barras verticales son subextremos y barras horizontales son objetos hiperextremos.

Por lo tanto, existen las siguientes configuraciones de Sistemas Binarios :

- Extremo-Extremo
- Subextremo-Subextremo
- Hiperextremo-Hiperextremo
- Subextremo-Hiperextremo
- Extremo-Subextremo
- Extremo-Hiperextremo

En el presente trabajo se estudiarán los SB extremo-subextremo y extremo-hiperextremo; una representación de ellos es la siguiente:



EXTREMO - SUBEXTREMO EXTREMO - HIPEREXTREMO

Figura 1.3: Sistemas Binarios extremo-subextremo y extremo-hiperextremo.

Los primeros cuatro Sistemas Binarios de la lista han sido objeto de numerosos estudios, mientras que los conformados por combinaciones entre extremo y subextremo o hiperextremo son prácticamente inexplorados. Debido a esto se eligieron los Sistemas Binarios mostrados en la figura 1.3.

 $\mathbf{2}$ 

# CONSTRUCCIÓN DE LA SOLUCIÓN

Los casi 50 años que separan la solución de Schwarzschild y de Kerr, representan la complejidad del cálculo de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein. La situación cambió luego de la aparición del formalismo de Ernst [7]; trabajo que puso al descubierto las simetrías internas de las ecuaciones de Einstein. Mediante la inclusión de un potencial complejo  $\mathcal{E}$ , llamado potencial de Ernst, las ecuaciones de Einstein en el vacío para la métrica (1.3) se pueden reformular de la forma

$$(\operatorname{Re}\mathcal{E})\nabla^2\mathcal{E} = (\nabla\mathcal{E})^2, \qquad (2.1a)$$

$$\omega_{,\rho} = -\rho f^{-2} \operatorname{Im}(\mathcal{E}_{,z}), \qquad \omega_{,z} = \rho f^{-2} \operatorname{Im}(\mathcal{E}_{,\rho}), \qquad (2.1b)$$

$$\gamma_{,\rho} = \frac{\rho\left(\mathcal{E}_{,\rho} \,\mathcal{E}_{,\rho}^* - \mathcal{E}_{,z} \,\mathcal{E}_{,z}^*\right)}{4(\operatorname{Re}\mathcal{E})^2} \,, \qquad \gamma_{,z} = \frac{\rho\operatorname{Re}\left(\mathcal{E}_{,\rho} \,\mathcal{E}_{,z}^*\right)}{2(\operatorname{Re}\mathcal{E})^2} \,. \tag{2.1c}$$

La primera de ecuación es llamada la ecuación de Ernst. La forma elegante y simétrica de la ecuación de Ernst hizo reaccionar a los investigadores, que a partir de ese momento, direccionaron sus trabajos a escudriñar las simetrías internas de las ecuaciones de Einstein; lo cual consiste en construir nuevas soluciones a partir de soluciones conocidas llamadas soluciones semillas.

El descubrimiento de Geroch de un grupo de simetrías internas con un número infinito de parámetros fue el punto de partida de las técnicas modernas de generación de soluciones. El desarrollo fue hecho independientemente por muchos investigadores, los cuales emplearon diferentes métodos : método de teoría de grupos, técnica de dispersión inversa, transformaciones de Bäcklund y método de ecuaciones integrales. La equivalencia matemática entre diferentes técnicas de generación de soluciones fue demostrada posteriormente por Kramer. Estas técnicas posibilitan la generación de soluciones con un número de parámetros arbitrarios que se pueden utilizar para construir nuevas soluciones. Entre los resultados destacados de las técnicas modernas aparecen la solución solitónica de vacío de Belinskii-Zakharov [1], la familia HKX (Hoenselaers-Kinnersley-Xanthopoulos) de espacio-tiempos estacionarios y por supuesto la famosa solución doble Kerr de Kramer y Neugebauer [13].

Uno de los grandes logros de los métodos modernos de generación de soluciones, son las soluciones de sistemas binarios con objetos de diversas características físicas tales como masa,

11

momento angular, carga eléctrica y momento dipolar magnético; esto gracias a la aparición de los denominados métodos solitónicos. Las técnicas solitónicas utilizan ecuaciones integrales que permiten transformar el problema de integrar un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales a resolver sistemas de ecuaciones algebraicas lineales. Sin embargo, la mayoría de los métodos de generación nombrados hasta el momento poseen limitaciones en el caso de electrovacío, ya que únicamente permiten construir soluciones que representan campos producidos por objetos hiperextremos, es decir, no es posible la construcción de soluciones que contengan agujeros negros. El método de Belinskii-Zakharov, el cual hace parte de los llamados métodos solitónicos, permite encontrar soluciones de sistemas binarios únicamente con combinaciones de objetos subextremos e hiperextremos.

Lo anterior dificulta la construcción de soluciones en las que se incluyen diferentes tipos de objetos. Los anteriores problemas fueron solucionados con la aparición del método de generación de soluciones de Sibgatullin, el cual permite construir soluciones con objetos hiperextremos y agujeros negros simultáneamente sin ningún problema tanto en el caso de vacío como en el de electrovacío. El método de Sibgatullin también pertenece a las técnicas solitónicas de generación. El método de Sibgatullin provee las ecuaciones necesarias para calcular el potencial de Ernst y, a partir de él, las funciones métricas.

Se construirá una solución exacta estacionaria axialmente simétrica de vacío que representa el campo gravitacional producido por un SB con objeto extremo utilizando el método integral de Sibgatullin.

## 2.1 EL MÉTODO DE SIBGATULLIN

Está visto que para construir una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío se debe encontrar solución al sistema de ecuaciones (2.1); debido a que éste sistema es totalmente equivalente a (3) en el caso de espacio-tiempos estacionarios con simetría axial.

El método de Sibgatullin permite calcular las funciones métricas f,  $\omega$  y  $\gamma$  de una forma sistemática, la cual consiste en calcular primeramente el potencial de Ernst  $\mathcal{E}$  para luego emplearlo en el cálculo de las funciones métricas mediante ecuaciones que el método provee.

Utilizando el procedimiento de continuación analítica de Riemann-Hilbert, se construye el potencial de Ernst sobre todo el plano complejo  $(z, i\rho)$  a partir de su comportamiento sobre el eje de simetría :  $e(z) \equiv \mathcal{E}(\rho = 0, z)$ .

El potencial de Ernst sobre el plano complejo se obtiene por medio de la fórmula integral

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma)e(\xi)}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \, d\sigma \,, \tag{2.2}$$

con la función desconocida  $\mu_1(\sigma)$  que debe satisfacer las condiciones

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} \, d\sigma = \pi \,, \tag{2.3a}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_1(\sigma)[e(\xi) + \tilde{e}(\eta)]}{(\xi - \eta)\sqrt{1 - \sigma^2}} \, d\sigma = 0.$$
(2.3b)

En las ecuaciones anteriores se ha utilizado :  $\xi = z + i\rho\sigma$ ,  $\eta = z + i\rho\tau$ , y  $\sigma, \tau \in [-1, 1]$ . La función  $e(\xi)$  es una continuación analítica local de las función e(z) sobre el plano complejo  $(\rho, z)$ . Por convención se emplea  $\tilde{e}(\eta) \equiv [e(\eta^*)]^*$ .

Una importante relación entre los parámetros de la solución está dada por la ecuación de Sibgatullin

$$e(z) + \tilde{e}(z) = 0. \tag{2.4}$$

Las raíces de la ecuación (2.4) se pueden escoger de tal forma que se obtengan soluciones con objetos subextremos, extremos o hiperextremos. Si se tienen dos raíces reales distintas, este par de raíces se ubicarán sobre el eje real z formando una barra vertical que se interpreta como un objeto subextremo. Si se tiene una raíz real de multiplicidad dos, es decir, dos raíces iguales, no habrá distancia entre una raíz y la otra produciendo un punto que es interpretado como un objeto extremo. Por último, si se tienen dos raíces pares de complejas conjugadas, dichas raíces se ubicarán paralelamente al eje imaginario  $\rho$  formando una barra horizontal que es interpretada como un objeto hiperextremo.

Para calcular las funciones métricas  $f \neq \omega$  se emplean las ecuaciones

$$f = \operatorname{Re}(\mathcal{E}), \qquad (2.5)$$

$$f\omega = \frac{1}{2}(H_{12} + H_{21}^*) - iz, \qquad (2.6)$$

donde  $H_{12}$  y  $H_{21}$  están definidos por las fórmulas integrales

$$H_{12} = \frac{2i}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\xi \mu_1(\sigma)}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \, d\sigma \,, \qquad (2.7a)$$

$$H_{21} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2(\sigma)e(\xi)}{\sqrt{1-\sigma^2}} \, d\sigma \,.$$
 (2.7b)

En las ecuaciones (2.7) aparece una función  $\mu_2$ , que de forma similar a la función  $\mu_1$ , se encuentra sujeta a unas condiciones que están dadas por las siguientes ecuaciones integrales:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2(\sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}} \, d\sigma = 0 \,. \tag{2.8a}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\mu_2(\sigma)[e(\xi) + \tilde{e}(\eta)]}{(\xi - \eta)\sqrt{1 - \sigma^2}} \, d\sigma = -2i\pi \,. \tag{2.8b}$$

Con el procedimiento anterior, se calculan las funciones métricas  $f y \omega$ , pero no la función  $\gamma$ . Formalmente, la función  $\gamma$  se debe calcular integrando las dos últimas ecuaciones del sistema (2.1); sin embargo, integrar dicho sistema es un trabajo muy complicado. Debido a lo anterior, se idean formas de calcularla sin necesidad de integración directa.

Una solución que represente el campo gravitacional producido por un sistema aislado debe ser asintóticamente plana; es decir, la curvatura que dicho campo gravitacional produce al espacio-tiempo a distancias infinitas debe ser nula. Por lo tanto, todas las componentes del tensor de curvatura de Riemann (1.1) deben anularse en el infinito. Un espacio-tiempo plano es representado por la métrica de Minkowski, que en coordenadas de Weyl es igual a

$$ds^{2} = -dt^{2} + d\rho^{2} + \rho^{2}d\phi^{2} + dz^{2}.$$
(2.9)

Entonces, si se desea encontrar una solución que represente el campo gravitacional producido por un sistema binario aislado, la métrica (1.3) debe convertirse en la métrica de Minkowski (2.9) en el infinito. Esta exigencia es utilizada por el método de Sibgatullin para la construcción de la función métrica  $\gamma$ .

Si se comparan las métricas (1.3) y (2.9) se encuentra que la condición de planitud asintótica está dada por las ecuaciones

$$\lim_{\substack{\rho \to 0 \\ z \to \infty}} f = \lim_{\substack{\rho \to 0 \\ z \to \infty}} f^{-1} e^{2\gamma} = 1, \qquad (2.10a)$$

$$\lim_{\substack{\rho \to 0 \\ z \to \infty}} \omega = 0.$$
 (2.10b)

Entonces, la función  $\gamma$  se calculará mediante la condición de planitud

$$\lim_{\substack{\rho \to 0 \\ z \to \infty}} e^{2\gamma} = \lim_{\substack{\rho \to 0 \\ z \to \infty}} f \,. \tag{2.11}$$

Luego de calcular la función métrica  $\gamma$  se da por concluida la construcción de la solución, pues ya se habrán calculado todas las componentes del tensor métrico.

Como se puede ver, el método de Sibgatullin provee todas las ecuaciones necesarias para calcular una solución exacta estacionaria axialmente simétrica. El método de Sibgatullin construye la solución a partir de un potencial de Ernst sobre el eje de simetría (eje z). La elección del potencial no es tan arbitraria como parece, pues la experiencia con soluciones ya conocidas revela la forma más adecuada de elegirlo. En forma general, el potencial se elige como una función racional, debido a que una elección de esta forma minimiza los problemas matemáticos en la solución de las ecuaciones integrales vistas anteriormente. Además, la ecuación de Sibgatullin (2.4) depende estrictamente de la elección del potencial de Ernst, ya que este determinará cuántas raíces tendrá la ecuación. Por lo tanto, determinará qué tipo de solución se intenta construir, ya que cada par de raíces representa un objeto.

## 2.2 EL POTENCIAL DE ERNST

La construcción del potencial de Ernst  $\mathcal{E}$  sobre todo el plano complejo  $(\rho, z)$  incluye una serie de pasos descritos en la sección anterior. Entre los pasos descritos se encuentran :

- Elección del potencial de Ernst sobre el eje de simetría.
- Elección apropiada de la ecuación de Sibgatullin.
- Cálculo de la función  $\mu_1(\sigma)$ .
- Cálculo del potencial mediante la ecuación (2.2).

A continuación, se seguirán uno a uno los pasos anteriores; los cuales culminarán con la expresión final para el potencial de Ernst  $\mathcal{E}$  sobre todo el plano complejo.

#### 2.2.1. Potencial de Ernst sobre el eje de simetría

Se desea construir una solución para un SB, por lo tanto, la ecuación de Sibgatullin tiene que poseer cuatro raíces. De lo anterior es claro que la ecuación (2.4) tiene que ser una ecuación polinomial de grado cuatro.

Así, un potencial sobre el eje de simetría apropiado que obliga a la ecuación de Sibgatullin (2.4) a tener cuatro raíces y a su vez es una función racional es :

$$e(z) = 1 + \sum_{j=1}^{2} \frac{e_j}{z - \beta_j},$$
(2.12)

donde  $e_j$ y $\beta_j$ son parámetros complejos arbitrarios.

Con esta elección del potencial sobre el eje de simetría, la ecuación de Sibgatullin (2.4) tendrá obviamente cuatro raíces. Sin embargo, aún se debe escribir en forma adecuada para lograr el objetivo de tener un SB que contengan un objeto extremo.

### 2.2.2. La Ecuación de Sibgatullin

Se ha dicho anteriormente que para obtener un objeto extremo, la ecuación de Sibgatullin debe tener una raíz real de multiplicidad dos, para obtener objetos subextremos la ecuación debe tener dos raíces reales distintas y para obtener objetos hiperextremos la ecuación debe poseer dos raíces pares de complejas conjugadas. Por lo tanto, una elección apropiada para la ecuación de Sibgatullin, que permite tener SB con un objeto extremo es la siguiente :

$$e(z) + \tilde{e}(z) = \frac{2(z - \alpha_1)^2 (z - \alpha_2)(z - \alpha_3)}{\prod_{j=1}^2 (z - \beta_j)(z - \beta_j^*)} = 0.$$
(2.13)

La raíz  $\alpha_1$  de multiplicidad dos representa el objeto extremo del SB, mientras que las raíces  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  pueden ser reales o pares de complejas conjugadas según se quiera un sistema extremo-subextremo o extremo-hiperextremo.

La ecuación de Sibgatullin relaciona los parámetros de la solución; es decir, proporciona una relación entre los parámetros  $e_j$ ,  $\beta_j$  y las raíces  $\alpha_j$ . Reemplazando el potencial (2.12) en la ecuación (2.13) y tomando el límite cuando  $z \to \beta_j$  resulta :

$$e_{j} = \frac{2(\beta_{j} - \alpha_{1})^{2}(\beta_{j} - \alpha_{2})(\beta_{j} - \alpha_{3})}{\prod_{k=l=1}^{2} (\beta_{j} - \beta_{k})(\beta_{j} - \beta_{l}^{*})}, \qquad j \neq k.$$
(2.14)

Una representación gráfica de los sistemas dados por la ecuación de Sibgatullin (2.13) es la siguiente :



Figura 2.1: SB extremo-subextremo y extremo-hiperextremo

Luego de proponer el potencial de Ernst sobre el eje de simetría se debe construir sobre todo el plano complejo, para ello se emplea la ecuación (2.2), en donde aparece la función  $\mu_1$  que se calculará a continuación.

### **2.2.3.** Cálculo de la función $\mu_1(\sigma)$

Es bien sabido que elegir las funciones involucradas en los integrandos como una funciones racionales aminora las dificultades matemáticas en los métodos integrales de generación, por esta razón, la función  $\mu_1(\sigma)$  se elegirá de la siguiente manera :

$$\mu_1(\sigma) = A_0 + \sum_{n=1}^3 \frac{A_n}{\xi - \alpha_n} + \frac{A_4}{(\xi - \alpha_1)^2},$$
(2.15)

donde la forma del último sumando se debe a la exigencia del objeto extremo en el sistema.

Al sustituir la función  $\mu_1(\sigma)$  dada por (2.15) en las condiciones (2.3), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones que deben satisfacer los coeficientes  $A_m$ :

$$A_0 + \sum_{n=1}^3 \frac{A_n}{r_n} + \frac{P_1^{(1)}}{r_1^2} A_4 = 1, \qquad (2.16a)$$

$$A_0 + \sum_{n=1}^{3} \frac{A_n}{\beta_j - \alpha_n} + \frac{A_4}{(\beta_j - \alpha_1)^2} = 0, \qquad j = 1, 2,$$
(2.16b)

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{e_j^*}{r_n(\alpha_n - \beta_j^*)} A_n + A_4 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{e_j^*}{(\alpha_1 - \beta_j^*)r_1} \right] = 0, \qquad j = 1, 2,$$
(2.16c)

donde  $P_1^n \equiv P_1(x_n) = x_n$  representa el polinomio de Legendre de orden 1 con

$$x_n = \frac{z - \alpha_n}{r_n}, \qquad r_n = \sqrt{\rho^2 + (z - \alpha_n)^2}, \qquad n = 1, 2, 3.$$
 (2.17)

Empleando la redefinición de los coeficientes  $A_0, \ldots, A_4$ 

$$A'_0 = A_0, \qquad A'_n = \frac{A_n}{r_n}, \qquad A'_4 = \frac{A_4}{r_1^2}, \qquad n = 1, 2, 3,$$
 (2.18)

es posible reescribir el sistema (2.16) de la forma

$$A'_{0} + \sum_{n=1}^{3} A'_{n} + A'_{4} P_{1}^{(1)} = 1, \qquad (2.19a)$$

$$-A'_{0} + \sum_{n=1}^{3} \frac{r_{n}}{\alpha_{n} - \beta_{j}} A'_{n} - \frac{r_{1}^{2}}{(\alpha_{1} - \beta_{j})^{2}} A'_{4} = 0, \qquad j = 1, 2, \qquad (2.19b)$$

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{e_j^*}{(\alpha_n - \beta_j^*)} A'_n + A'_4 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{e_j^*}{(\alpha_1 - \beta_j^*)r_1} \right] r_1^2 = 0, \qquad j = 1, 2.$$
(2.19c)

Por el momento, se supondrá que de una u otra forma se han calculado los coeficientes  $A'_m$ , entonces, se puede proceder al calculo del potencial de Ernst  $\mathcal{E}$  sobre todo el plano complejo.

#### 2.2.4. Potencial de Ernst en el plano complejo

El potencial de Ernst  $\mathcal{E}(\rho, z)$  se encuentra por medio de la ecuación (2.2). Al reemplazar la función  $\mu_1$  dada por (2.15) y el potencial sobre el eje de simetría (2.12) en la ecuación (2.2) se obtiene

$$\mathcal{E} = A_0 - \left[\sum_{n=1}^3 \frac{A_n}{r_n} + \frac{P_1^{(1)}}{r_1^2} A_4\right] \,.$$

Al emplear el sistema de ecuaciones (2.16), y luego la redefinición de coeficientes (2.18), el potencial de Ernst anterior toma la forma

$$\mathcal{E} = 2A'_0 - 1. \tag{2.20}$$

Según la expresión anterior, no es necesario calcular todos los coeficientes de la función  $\mu_1(\sigma)$  para conocer el potencial de Ernst. Entonces, sólo se calculará el valor del coeficiente  $A'_0$ .

Un método que permite calcular las incógnitas de un sistema de ecuaciones sin realizar operaciones entre ellas es la regla de Cramer. Empleando la regla de Cramer es posible calcular el coeficiente  $A'_0$  sin necesidad de calcular ningún otro coeficiente.

El sistema (2.19) escrito matricialmente posee la forma :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & P_{1}^{(1)} \\ -1 & \frac{r_{1}}{\alpha_{1}-\beta_{1}} & \frac{r_{2}}{\alpha_{2}-\beta_{1}} & \frac{r_{3}}{\alpha_{3}-\beta_{1}} & -\frac{r_{1}^{2}}{(\alpha_{1}-\beta_{1})^{2}} \\ -1 & \frac{r_{1}}{\alpha_{1}-\beta_{2}} & \frac{r_{2}}{\alpha_{2}-\beta_{2}} & \frac{r_{3}}{\alpha_{3}-\beta_{2}} & -\frac{r_{1}^{2}}{(\alpha_{1}-\beta_{2})^{2}} \\ 0 & \frac{e_{1}^{*}}{\alpha_{1}-\beta_{1}^{*}} & \frac{e_{1}^{*}}{\alpha_{2}-\beta_{1}^{*}} & \frac{e_{1}^{*}}{\alpha_{3}-\beta_{1}^{*}} & \frac{\partial}{\partial\alpha_{1}} \begin{bmatrix} \frac{e_{1}^{*}}{(\alpha_{1}-\beta_{1})r_{1}} \\ \frac{e_{2}^{*}}{(\alpha_{1}-\beta_{2})r_{1}} \end{bmatrix} r_{1}^{2} \\ 0 & \frac{e_{2}^{*}}{\alpha_{1}-\beta_{2}^{*}} & \frac{e_{2}^{*}}{\alpha_{2}-\beta_{2}^{*}} & \frac{e_{2}^{*}}{\alpha_{3}-\beta_{2}^{*}} & \frac{\partial}{\partial\alpha_{1}} \begin{bmatrix} \frac{e_{1}^{*}}{(\alpha_{1}-\beta_{1}^{*})r_{1}} \\ \frac{e_{2}^{*}}{(\alpha_{1}-\beta_{2}^{*})r_{1}} \end{bmatrix} r_{1}^{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_{0} \\ A'_{1} \\ A'_{2} \\ A'_{3} \\ A'_{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$
(2.21)

Definiendo el determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & P_1^{(1)} \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_1} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_1} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_1)^2} \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_2} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_2} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_2)^2} \\ 0 & \frac{e_1^*}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_2 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_3 - \beta_1^*} & \frac{\partial}{\partial\alpha_1} \begin{bmatrix} \frac{e_1^*}{(\alpha_1 - \beta_1)r_1} \\ \frac{e_2^*}{(\alpha_1 - \beta_2)r_1} \end{bmatrix} r_1^2 \\ 0 & \frac{e_2^*}{\alpha_1 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_2 - \beta_2^*} & \frac{\partial}{\alpha_3 - \beta_2^*} & \frac{\partial}{\partial\alpha_1} \begin{bmatrix} \frac{e_2^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*)r_1} \\ \frac{e_2^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*)r_1} \end{bmatrix} r_1^2 \end{vmatrix},$$
(2.22)

el valor del coeficiente  $A^\prime{}_0$  es

$$A'_0 = \frac{\Lambda}{D},\tag{2.23}$$

donde  $\Lambda$  es el determinante

$$\Lambda = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & P_1^{(1)} \\ 0 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_1} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_1} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_1)^2} \\ 0 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_2} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_2} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_2)^2} \\ 0 & \frac{e_1^*}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_2 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_3 - \beta_1^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \begin{bmatrix} \frac{e_1^*}{(\alpha_1 - \beta_1^*)r_1} \\ \frac{e_1^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*)r_1} \end{bmatrix} r_1^2 \\ 0 & \frac{e_2^*}{\alpha_1 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_2 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_3 - \beta_2^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \begin{bmatrix} \frac{e_1^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*)r_1} \\ \frac{e_2^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*)r_1} \end{bmatrix} r_1^2 \end{vmatrix}.$$
(2.24)

Reemplazando (2.23) en (2.20) se obtiene un potencial de Ernst de la forma

$$\mathcal{E} = \frac{2\Lambda - D}{D} \,. \tag{2.25}$$

El determinante  ${\cal D}$  puede ser escrito en la forma

$$D = \Lambda - \Gamma, \qquad (2.26)$$

donde se ha definido un nuevo determinante  $\Gamma$  dado por :

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & P_1^{(1)} \\ 1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_1} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_1} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_1)^2} \\ 1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_2} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_2} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_2)^2} \\ 0 & \frac{e_1^*}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_2 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_3 - \beta_1^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \begin{bmatrix} \frac{e_1^*}{(\alpha_1 - \beta_1^*)r_1} \\ \frac{e_2^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*)r_1} \end{bmatrix} r_1^2 \\ 0 & \frac{e_2^*}{\alpha_1 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_2 - \beta_2^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \begin{bmatrix} \frac{e_2^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*)r_1} \end{bmatrix} r_1^2 \\ \frac{e_2^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*)r_1} \end{bmatrix} r_1^2$$

$$(2.27)$$

Reemplazando (2.26) en (2.25) se obtiene finalmente el potencial de Ernst

$$\mathcal{E} = \frac{\Lambda + \Gamma}{\Lambda - \Gamma} \,. \tag{2.28}$$

En el procedimiento para calcular el potencial de Ernst sobre todo el plano complejo se ha visto como mediante el método de Sibgatullin, se transforma el problema de resolver ecuaciones diferenciales no lineales en resolver ecuaciones algebraicas lineales; lográndose así, obtener una solución para el potencial de Ernst en un número reducido de pasos y cuya expresión matemática posee gran elegancia.

El final del cálculo del potencial de Ernst marca el comienzo de la última parte de la construcción de la solución exacta. El método de Sibgatullin provee las ecuaciones necesarias mediante las cuales, a partir del potencial de Ernst sobre todo el plano complejo, permiten calcular las funciones métricas o componentes del tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$ .

## 2.3 FUNCIONES MÉTRICAS

#### 2.3.1. Función f

Para calcular la función métrica f se debe emplear la ecuación (2.5). Reemplazando el potencial de Ernst dado por (2.28) en (2.5) se obtiene finalmente

$$f = \frac{\Lambda \Lambda^* - \Gamma \Gamma^*}{(\Lambda - \Gamma)(\Lambda^* - \Gamma^*)}.$$
(2.29)

#### 2.3.2. Función $\omega$

El cálculo de la función  $\omega$  implica conocer los potenciales auxiliares  $H_{12}$  y  $H_{21}$  dados por las ecuaciones (2.7).

Al reemplazar la función  $\mu_1$  dada por (2.15) en (2.7), el potencial  $H_{12}$  adquiere la forma

$$H_{12} = 2i\left\{z + \sum_{n=1}^{3} \frac{g(\alpha_n)}{r_n} A_n + A_4 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{g(\alpha_1)}{r_1}\right]\right\},$$
(2.30)

donde  $g(\alpha_n)$  se encuentra definido por la expresión

$$g(\alpha_n) \equiv r_n - (z - \alpha_n). \tag{2.31}$$

El potencial  $H_{12}$  escrito en función de los coeficientes  $A'_n$  dados por (2.18) es

$$H_{12} = 2i \left\{ z + \sum_{n=1}^{3} g(\alpha_n) A'_n + A'_4 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{g(\alpha_1)}{r_1} \right] r_1^2 \right\}.$$
 (2.32)

Siguiendo un proceso similar al que se hizo para calcular el potencial de Ernst  $\mathcal{E}$ , el potencial  $H_{12}$  escrito mediante determinantes es de la forma

$$H_{12} = 2i\left(z + \frac{\Psi}{\Lambda - \Gamma}\right), \qquad (2.33)$$

donde $\Psi$ está dado por

$$\Psi = \begin{vmatrix} 0 & g(\alpha_1) & g(\alpha_2) & g(\alpha_3) & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{g(\alpha_1)}{r_1} \right] r_1^2 \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_1} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_1} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_1)^2} \\ -1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_2} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_2} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_2)^2} \\ 0 & \frac{e_1^*}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_2 - \beta_1^*} & \frac{\partial}{\alpha_3 - \beta_1^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{e_1^*}{(\alpha_1 - \beta_1^*)r_1} \right] r_1^2 \\ 0 & \frac{e_2^*}{\alpha_1 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_2 - \beta_2^*} & \frac{\partial}{\alpha_3 - \beta_2^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[ \frac{e_2^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*)r_1} \right] r_1^2 \end{vmatrix},$$
(2.34)

con los determinantes  $\Lambda$  y  $\Gamma$  definidos anteriormente.

Para conocer el potencial  $H_{21}$  se debe calcular la función  $\mu_2$ , la cual se elige bajo el mismo criterio que la función  $\mu_1$ . Entonces, se elige de la siguiente manera :

$$\mu_2(\sigma) = -i\,\xi + B_0 + \sum_{n=1}^3 \frac{B_n}{\xi - \alpha_n} + \frac{B_4}{(\xi - \alpha_1)^2} \,. \tag{2.35}$$

Reemplazando (2.35) en (2.8) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones que deben satisfacer los coeficientes  $B_m$ :

$$B_0 + \sum_{n=1}^3 \frac{B_n}{r_n} + \frac{P_1^{(1)}}{r_1^2} B_4 = i z , \qquad (2.36a)$$

$$-i\beta_j + B_0 + \sum_{n=1}^3 \frac{B_n}{\beta_j - \alpha_n} + \frac{B_4}{(\beta_j - \alpha_1)^2} = 0, \qquad j = 1, 2, \qquad (2.36b)$$

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{e_{j}^{*}}{r_{n}(\alpha_{n} - \beta_{j}^{*})} B_{n} + B_{4} \frac{\partial}{\partial \alpha_{1}} \left[ \frac{e_{j}^{*}}{(\alpha_{1} - \beta_{j}^{*})r_{1}} \right] = i e_{j}^{*}, \qquad j = 1, 2.$$
(2.36c)

Empleando la redefinición de los coeficientes  $B_0, \ldots, B_4$ 

$$B'_{0} = B_{0}, \qquad B'_{n} = \frac{B_{n}}{r_{n}}, \qquad B'_{4} = \frac{B_{4}}{r_{1}^{2}}, \qquad n = 1, 2, 3,$$
 (2.37)

es posible reescribir el sistema (2.36) de la forma

$$B'_{0} + \sum_{n=1}^{3} B'_{n} + B'_{4} P_{1}^{(1)} = i z , \qquad (2.38a)$$

$$-B'_{0} + \sum_{n=1}^{3} \frac{r_{n}}{\alpha_{n} - \beta_{j}} B'_{n} - \frac{r_{1}^{2}}{(\alpha_{1} - \beta_{j})^{2}} B'_{4} = 0, \qquad j = 1, 2,$$
(2.38b)

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{e_{j}^{*}}{(\alpha_{n} - \beta_{j}^{*})} B'_{n} + B'_{4} \frac{\partial}{\partial \alpha_{1}} \left[ \frac{e_{j}^{*}}{(\alpha_{1} - \beta_{j}^{*})r_{1}} \right] r_{1}^{2} = 0, \qquad j = 1, 2.$$
(2.38c)

Al reemplazar la función  $\mu_2$  dada por (2.35) en (2.8), y empleando las ecuaciones (2.36), el potencial  $H_{21}$  toma la forma

$$H_{21} = 2B_0 - i \left[ 2z + \sum_{j=1}^{2} (e_j + e_j^*) \right].$$
(2.39)

El potencial  $H_{21}$ , escrito en función de los coeficientes  $B'_n$  dados por (2.37) es

$$H_{21} = 2B'_0 - i \left[ 2z + \sum_{j=1}^2 (e_j + e_j^*) \right].$$
 (2.40)

Para calcular el valor del coeficiente  $B'_0$ , se sigue un proceso similar al empleado en el cálculo del potencial de Ernst.

El sistema de ecuaciones (2.38) escrito en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & P_{1}^{(1)} \\ -1 & \frac{r_{1}}{\alpha_{1}-\beta_{1}} & \frac{r_{2}}{\alpha_{2}-\beta_{1}} & \frac{r_{3}}{\alpha_{3}-\beta_{1}} & -\frac{r_{1}^{2}}{(\alpha_{1}-\beta_{1})^{2}} \\ -1 & \frac{r_{1}}{\alpha_{1}-\beta_{2}} & \frac{r_{2}}{\alpha_{2}-\beta_{2}} & \frac{r_{3}}{\alpha_{3}-\beta_{2}} & -\frac{r_{1}^{2}}{(\alpha_{1}-\beta_{2})^{2}} \\ 0 & \frac{e_{1}^{*}}{\alpha_{1}-\beta_{1}^{*}} & \frac{e_{1}^{*}}{\alpha_{2}-\beta_{1}^{*}} & \frac{e_{1}^{*}}{\alpha_{3}-\beta_{1}^{*}} & \frac{\partial}{\partial\alpha_{1}} \begin{bmatrix} \frac{e_{1}^{*}}{(\alpha_{1}-\beta_{1})r_{1}} \\ \frac{e_{2}^{*}}{(\alpha_{1}-\beta_{2}^{*})r_{1}} \end{bmatrix} r_{1}^{2} \\ 0 & \frac{e_{2}^{*}}{\alpha_{1}-\beta_{2}^{*}} & \frac{e_{2}^{*}}{\alpha_{2}-\beta_{2}^{*}} & \frac{e_{2}^{*}}{\alpha_{3}-\beta_{2}^{*}} & \frac{\partial}{\partial\alpha_{1}} \begin{bmatrix} \frac{e_{1}^{*}}{(\alpha_{1}-\beta_{2}^{*})r_{1}} \\ \frac{e_{2}^{*}}{(\alpha_{1}-\beta_{2}^{*})r_{1}} \end{bmatrix} r_{1}^{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B'_{0} \\ B'_{1} \\ B'_{2} \\ B'_{3} \\ B'_{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz \\ -i\beta_{1} \\ -i\beta_{2} \\ ie_{1}^{*} \\ ie_{2}^{*} \end{pmatrix}.$$
(2.41)

Entonces, el coeficiente  $B'_0$  es

$$B'_0 = i \frac{\Upsilon}{D}, \qquad (2.42)$$

donde D está dado por (2.22) y  $\Upsilon$  es igual a

$$\Upsilon = \begin{vmatrix} z & 1 & 1 & 1 & P_1^{(1)} \\ -\beta_1 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_1} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_1} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_1} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_1)^2} \\ -\beta_2 & \frac{r_1}{\alpha_1 - \beta_2} & \frac{r_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \frac{r_3}{\alpha_3 - \beta_2} & -\frac{r_1^2}{(\alpha_1 - \beta_2)^2} \\ e_1^* & \frac{e_1^*}{\alpha_1 - \beta_1^*} & \frac{e_1^*}{\alpha_2 - \beta_1^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \begin{bmatrix} \frac{e_1^*}{(\alpha_1 - \beta_1^*)r_1} \\ \frac{e_2^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*)} & \frac{e_2^*}{\alpha_2 - \beta_2^*} & \frac{e_2^*}{\alpha_3 - \beta_2^*} & \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \begin{bmatrix} \frac{e_2^*}{(\alpha_1 - \beta_2^*)r_1} \end{bmatrix} r_1^2 \end{vmatrix}.$$
(2.43)

Sustituyendo (2.42) en (2.40), se encuentra finalmente la expresión para el potencial  $H_{21}$ :

$$H_{21} = 2i\frac{\Upsilon}{\Lambda - \Gamma} - i\left[2z + \sum_{j=1}^{2} (e_j + e_j^*)\right].$$
 (2.44)

Reemplazando (2.33) y (2.44) en (2.6) se obtiene la expresión para la función métrica  $\omega$ :

$$\omega = \frac{\operatorname{Im}[\Psi(\Lambda^* - \Gamma^*) - \Upsilon^*(\Lambda - \Gamma))]}{\Lambda \Lambda^* - \Gamma \Gamma^*}.$$
(2.45)

### **2.3.3.** Función $\gamma$

La función  $\gamma$  se calculará empleando la condición de planitud (2.11), en la cual se encuentra involucrada la función métrica f calculada anteriormente.

Por simplicidad, el numerador de la función  $e^{2\gamma}$  es tomado igual al de la función f, garantizando que estos se cancelen en el producto  $f^{-1}e^{2\gamma}$  en la condición de planitud. El denominador debe ser una función que depende de  $\rho$  y z. Entonces, la función  $e^{2\gamma}$  se propone de la siguiente manera :

$$e^{2\gamma} = \frac{\Lambda \Lambda^* - \Gamma \Gamma^*}{g(\rho, z)} \,. \tag{2.46}$$

Luego de aplicar los límites respectivos implicados en la ecuación (2.11) a la función propuesta, se encuentra la siguiente expresión para la función métrica :

$$e^{2\gamma} = \frac{\Lambda \Lambda^* - \Gamma \Gamma^*}{r_1^4 r_2 r_3 K_0 K_0^*}, \qquad (2.47)$$

donde se ha definido el determinante  $K_0$ 

$$K_{0} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_{1}-\beta_{1}} & \frac{1}{\alpha_{2}-\beta_{1}} & \frac{1}{\alpha_{3}-\beta_{1}} & -\frac{1}{(\alpha_{1}-\beta_{1})^{2}} \\ \frac{1}{\alpha_{1}-\beta_{2}} & \frac{1}{\alpha_{2}-\beta_{2}} & \frac{1}{\alpha_{3}-\beta_{2}} & -\frac{1}{(\alpha_{1}-\beta_{2})^{2}} \\ \frac{e_{1}^{*}}{\alpha_{1}-\beta_{1}^{*}} & \frac{e_{1}^{*}}{\alpha_{2}-\beta_{1}^{*}} & \frac{e_{1}^{*}}{\alpha_{3}-\beta_{1}^{*}} & -\frac{e_{1}^{*}}{(\alpha_{1}-\beta_{1}^{*})^{2}} \\ \frac{e_{2}^{*}}{\alpha_{1}-\beta_{2}^{*}} & \frac{e_{2}^{*}}{\alpha_{2}-\beta_{2}^{*}} & \frac{e_{2}^{*}}{\alpha_{3}-\beta_{2}^{*}} & -\frac{e_{2}^{*}}{(\alpha_{1}-\beta_{2}^{*})^{2}} \end{vmatrix}.$$
(2.48)

Debido al procedimiento empleado para la construcción de la función  $\gamma$ , es necesario comprobar que la solución que se ha calculado es en realidad una solución de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío (3). Para ello, se reemplazó la función métrica  $\gamma$  (2.47) y el potencial de Ernst (2.28) en el sistema de ecuaciones (2.1); de donde se obtuvo una satisfacción plena del sistema por parte de la función  $\gamma$  y el potencial de Ernst. Para comprobar la validez de las funciones métricas f y  $\omega$ , se empleó el sistema de ecuaciones alternativo

$$\gamma_{,\rho} = \frac{1}{4} \left\{ \rho f^{-2} \left[ (f_{,\rho})^2 - (f_{,z})^2 \right] - \rho^{-1} f^2 \left[ (\omega_{,\rho})^2 - (\omega_{,z})^2 \right] \right\} , \qquad (2.49)$$

$$\gamma_{,z} = \frac{1}{2} \left( \rho f^{-2} f_{,\rho} f_{,z} - \rho^{-1} f^2 \omega_{,\rho} \omega_{,z} \right) .$$
(2.50)

Al comprobar que las expresiones encontradas para las funciones métricas f,  $\omega$ , y  $\gamma$ , son solución de las ecuaciones de campo (3), se da por culminada la construcción de la solución exacta que representa el campo gravitacional producido por un SB que contiene un objeto extremo.

## 3

## ECUACIONES DE EQUILIBRIO

El problema de equilibrio constituye una parte del análisis de las soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein en Relatividad General. En este capítulo, se realizará una breve descripción de la procedencia de las ecuaciones de equilibrio.

## 3.1 CONDICIÓN DE EXISTENCIA DEL EJE DE SIMETRÍA

La primera condición de equilibrio está asociada a las simetrías que posee un espacio-tiempo estacionario con simetría axial. Un espacio-tiempo con estas características posee simetrías tanto discretas como continuas. A continuación se describirán cada una de ellas.

### 3.1.1. Simetrías Discretas

El elemento de línea de Papapetrou

$$ds^{2} = -f(dt - \omega d\phi)^{2} + f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^{2} + dz^{2}) + \rho^{2}d\phi^{2}], \qquad (3.1)$$

permanece invariante bajo la transformación

$$(t,\phi) \to (-t,-\phi)\,,$$

es decir, es invariante ante la reflexión simultánea de las coordenadas  $t \ge \phi$ .

La existencia de dicha simetría discreta es la responsable de pensar que dichos campos son producidos por fuentes rotantes; ya que ir hacia atrás en el tiempo girando en dirección negativa es equivalente a avanzar en el tiempo y girar positivamente, hecho que ayudó en gran medida a la comprensión de los espacio-tiempos estacionarios con simetría axial. Sin embargo, es más importante aún el estudio de las simetrías continuas de la métrica, ya que sin ellas no es posible determinar si el espacio-tiempo es estático, estacionario, esféricamente simétrico, axialmente simétrico, entre otras características relevantes.

#### 3.1.2. Simetrías Continuas

Una transformación  $\Phi_*$  es una simetría de un tensor T, si éste es invariante bajo su aplicación; esto es [3]:

$$\Phi_* T = T \, .$$

Las simetrías de nuestro interés son las que posee el tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$ ; esto es, una simetría del tipo

$$\Phi_* \, g_{lphaeta} = g_{lphaeta}$$
 .

Una simetría como la anterior es llamada una isometría. Las isometrías son generadas por campos vectoriales llamados campos vectoriales de Killing, los cuales satisfacen la ecuación

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0, \qquad (3.2)$$

donde  $\xi_{\mu}$  es el vector de Killing. La ecuación (3.2) es llamada ecuación de Killing, y su solución describe las simetrías continuas que admite un tensor métrico.

Si un espacio-tiempo posee un vector de Killing, entonces es posible encontrar un sistema de coordenadas en el cual la métrica es independiente de una de las coordenadas. Esto quiere decir que la métrica de Papapetrou posee dos vectores de Killing; uno asociado a la coordenada temporal t, y otro a la coordenada azimutal  $\phi$ .

La existencia del vector de Killing temporal  $\xi^t$  le da el carácter de estacionario a la métrica, y el vector azimutal  $\xi^{\phi}$  representa la existencia de un un eje definido invariantemente. En otras palabras, la métrica permanece invariante bajo rotaciones alrededor de un eje, que en nuestro caso es el eje z. Entonces, las curvas integrales de  $\xi^{\phi}$  son círculos centrados en el eje z.

El vector  $\xi^{\phi}$  debe anularse en puntos situados sobre el eje z, de otra forma, tal eje no sería el eje de simetría. La anterior condición de anulación del vector  $\xi^{\phi}$  sobre el eje z conlleva a la primera ecuación de equilibrio para el sistema.

Es bien sabido que los vectores de Killing  $\xi^t$  y  $\xi^{\phi}$  pueden escribirse de la forma (1, 0, 0, 0, )y (0, 0, 0, 1) [6] si la base del espacio-tiempo es representada por  $(e_t, e_{\rho}, e_z, e_{\phi})$ . La magnitud de  $\xi^{\phi}$  está dada por  $|\xi^{\phi}|^2 = \xi^{\phi}\xi_{\phi}$ , la cual da como resultado

$$|\xi^{\phi}|^2 = f^{-1}\rho^2 - f\omega^2.$$
(3.3)

El eje z se escribe matemáticamente  $\rho = 0$ , entonces, la magnitud de  $\xi^{\phi}$  sobre el eje z es

$$\lim_{\rho \to 0} |\xi^{\phi}|^2 = -\lim_{\rho \to 0} (f\omega^2) \,, \qquad \lim_{\rho \to 0} f \neq 0 \,.$$

Por lo tanto, el vector de Killing se anula en puntos sobre el eje z si se cumple la condición

$$\lim_{\rho \to 0} \omega(\rho, z) = 0, \qquad \lim_{\rho \to 0} f \neq 0.$$
(3.4)

El límite de la función f debe ser diferente de cero, de otra forma, aparece una singularidad spbre el eje de simetría debido a la presencia de la función  $f^{-1}$  en el tensor métrico.

La ecuación anterior es una de las llamadas ecuaciones de equilibrio del sistema y es denominada comúnmente condición de existencia de un eje de simetría.

## 3.2 CONDICIÓN DE PLANITUD ELEMENTAL

El modelo matemático adoptado por la Relatividad General para el espacio-tiempo son las variedades diferenciables. Sin ser muy formal, una variedad diferenciable es un espacio que localmente se comporta como  $\mathbb{R}^n$ ; esto es, como un espacio plano. En el caso de RG, el espacio es de dimensión 4 y es denominado espacio-tiempo, el cual es caracterizado por variedades pseudo-riemannianas; es decir, por tensores métricos lorentzianos, cuya signatura es (+,-,-,-) o (-,+,+,+,+). En el presente trabajo se emplea la última signatura, donde el signo menos se atribuye a la coordenada temporal.

El espacio-tiempo plano es denominado espacio de Minkowski, y su métrica en coordenadas de Weyl es

$$ds_M^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2.$$
(3.5)

La condición de planitud elemental dice que un espacio-tiempo debe comportarse localmente como el espacio de Minkowski. Por lo tanto, en una pequeña vecindad (infinitesimal) de un evento  $(t, \rho, z, \phi)$  el espacio debe ser plano.

El elemento de línea de Papaetrou (3.1) puede escribirse de la forma

$$ds^{2} = f^{-1}e^{2\gamma} \left[ -f^{2}e^{-2\gamma}(dt - \omega d\phi)^{2} + d\rho^{2} + dz^{2} + e^{-2\gamma}\rho^{2}d\phi^{2} \right].$$
(3.6)

Si se define el elemento de línea

$$d\sigma^{2} = -f^{2}e^{-2\gamma}(dt - \omega d\phi)^{2} + d\rho^{2} + dz^{2} + e^{-2\gamma}\rho^{2}d\phi^{2}, \qquad (3.7)$$

el elemento de línea (3.6) puede escribirse en la forma

$$ds^2 = f^{-1} e^{2\gamma} d\sigma^2 \,. \tag{3.8}$$

En términos del tensor métrico, la ecuación anterior es

$$g_{\alpha\beta} = f^{-1} e^{2\gamma} \tilde{g}_{\alpha\beta} \,, \tag{3.9}$$

y se dice que las métricas son conformes.

El cálculo se realizará empleando el tensor métrico  $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ , es decir, con el elemento de línea  $d\sigma^2$  dado por (3.7).

Si se toman  $(t, \rho, z)$  constantes, el elemento de línea de Minkowski (3.5) queda de la forma

$$ds_M^2 = \rho^2 d\phi^2 \,, \tag{3.10}$$

los cuales son círculos de radio  $\rho$  centrados en el eje z.

Si se quiere que el espacio-tiempo dado por la métrica (3.7) se comporte de manera minkowskiana, entonces, las curvas definidas por la definición de  $(t, \rho, z)$  como constantes en (3.7) deben ser círculos de radio  $\rho$ .

Al fijar  $(t, \rho, z)$  como constantes, el elemento de línea (3.7) toma la forma

$$d\sigma^2 = e^{-2\gamma} (\rho^2 - f^2 \omega^2) d\phi^2 \,. \tag{3.11}$$

Si se toma el límite cuando  $\rho \to 0$  en la anterior ecuación, queda definida la pequeña vecindad en la cual deben aparecer los círculos de radio  $\rho$ . Entonces, los círculos quedarán definidos si se cumple

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{0}^{2\pi} e^{-\gamma} \sqrt{(\rho^2 - f^2 \omega^2)} d\phi = 2\pi\rho.$$
(3.12)

Si se cumplen las condiciones

$$\lim_{\rho \to 0} f(\rho, z) \neq 0, \qquad \lim_{\rho \to 0} \omega(\rho, z) = 0, \qquad (3.13)$$

la condición para que se formen círculos infinitesimales alrededor del eje z es

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{0}^{2\pi} e^{-\gamma} \rho d\phi = 2\pi\rho \,, \tag{3.14}$$

de donde se obtiene la condición

$$\lim_{\rho \to 0} e^{-\gamma(\rho, z)} = 1, \quad \text{o} \quad \lim_{\rho \to 0} \gamma(\rho, z) = 0.$$
(3.15)

Entonces, la condición de planitud elemental queda determinada por las condiciones

$$\lim_{\rho \to 0} f(\rho, z) \neq 0, \qquad \lim_{\rho \to 0} \omega(\rho, z) = 0, \qquad \lim_{\rho \to 0} e^{-\gamma(\rho, z)} = 1.$$
(3.16)

Si se cumplen las anteriores condiciones, la métrica (3.8) es llamada conformalmente plana localmente a la métrica (3.7), ya que se puede escribir localmente de la forma

$$ds^2 = \lim_{\rho \to 0} f^{-1} ds_M^2$$
, con  $t, \rho, z$  constantes,

es decir,

$$ds^2 = \lim_{\rho \to 0} f^{-1} \rho^2 d\phi^2$$

Como  $f^{-1}$  tiene un valor constante en la ecuación anterior; esto debido a su independencia de la coordenada  $\phi$ , entonces, es posible definir una nueva coordenada  $\rho' = f^{-1/2}\rho$  sin que se pierda el sentido de la misma. De esta manera, la métrica quedaría expresada localmente de la forma

$$ds^2 = \rho'^2 d\phi^2$$
, con  $\rho'$  infinitesimal, (3.17)

de donde se concluye que la condición de planitud elemental se satisface completamente.

Por lo tanto, las condiciones para que la métrica tenga un buen comportamiento sobre el eje de simetría son

$$\lim_{\rho \to 0} \omega(\rho, z) = 0, \qquad \lim_{\rho \to 0} e^{-\gamma(\rho, z)} = 1.$$
(3.18)

Las dos ecuaciones anteriores son denominadas ecuaciones de equilibrio del sistema o condiciones de regularidad del eje de simetría.

El significado físico del par de ecuaciones de equilibrio es particularmente interesante en el problema de varios objetos; ya que las ecuaciones (3.18) se pueden obtener exigiendo que no exista fuerza resultante entre los objetos, de aquí el nombre de ecuaciones de equilibrio.

A continuación, se describirá el proceso para calcular la fuerza entre los objetos a lo largo del eje z, para ello, es necesario conocer un poco más el tensor de momentum-energía y se empleará nuevamente la métrica conforme (3.7).

### 3.2.1. Fuerza entre objetos de un Sistema Binario

En la subsecuente descripción del tensor de momentum-energía se supondrá presencia de materia y ausencia de campos electromagnéticos, es decir

$$T^{lphaeta} = T^{lphaeta}_M$$
 .

Cada componente del tensor de momentum-energía posee un significado físico como se muestra a continuación [20]:

 $\begin{array}{lll} T^{00} = & \mbox{Densidad de energía} \\ T^{0i} = & \mbox{Componente } i \mbox{ de flujo de energía} \\ T^{ij} = & \mbox{Componente } i, j \mbox{ de la fuerza por unidad de área con vector normal } e_j. \end{array}$ 

Para llegar a la expresión para la fuerza entre los objetos del SB, se debe suponer que el espacio que los separa no es vacío, es decir, con un tensor de momentum-energía

$$T^{\alpha\beta} = \frac{G^{\alpha\beta}}{8\pi} \neq 0.$$
(3.19)

La porción de eje que une los objetos se modela como un cilindro cuyo radio  $\rho$  tiende a cero. Una tapa del cilindro estará dado por (t, z) constantes en la métrica (3.7), es decir, por la métrica

$$d\sigma^{2} = d\rho^{2} + e^{-2\gamma} (\rho^{2} - f^{2} \omega^{2}) d\phi^{2}, \qquad (3.20)$$

cuyo determinante es  $\tilde{g} = e^{-2\gamma} (\rho^2 - f^2 \omega^2).$ 

Por lo tanto, es posible interpretar la fuerza resultante a lo largo del eje z entre dos objetos como la fuerza que actúa perpendicularmente a las tapas del cilindro, es decir, es el resultado de la integral [12]

$$F = \lim_{\rho \to 0} \int_{0}^{\rho} \int_{0}^{2\pi} T^{zz} \sqrt{\tilde{g}} d\rho d\phi, \qquad z \text{ entre los objetos.}$$
(3.21)

Reemplazando (3.19) y (3.20) en (3.21) se obtiene

$$F = \frac{1}{4} \left( \lim_{\rho \to 0} \int_{0}^{\rho} G^{zz} e^{-\gamma} \sqrt{\rho^2 - f^2 \omega^2} d\rho \right) .$$
 (3.22)

La componente  $G^{zz}$  del tensor de Einstein es

$$G^{zz} = \frac{1}{4} f^{-2} [(f_{,\rho})^2 - (f_{,z})^2] - \frac{\gamma_{,\rho}}{\rho}.$$
(3.23)

Al reemplazar (3.23) en (3.22), realizando el proceso de integración, y suponiendo que se cumple la condición de existencia del eje z como eje de simetría dada por (3.4), se obtiene finalmente la expresión para la fuerza resultante entre los dos objetos [12] :

$$F = \frac{1}{4} \lim_{\rho \to 0} \left[ e^{-\gamma(\rho, z)} - 1 \right] \,. \tag{3.24}$$

Los objetos se encontrarán en equilibrio si la fuerza resultante entre ellos es nula; es decir, cuando se cumplen las condiciones

$$\lim_{\rho \to 0} e^{-\gamma(\rho, z)} = 1, \qquad \lim_{\rho \to 0} \omega(\rho, z) = 0.$$

Si las condiciones anteriores no se cumplen, en el espacio entre los objetos aparece una singularidad llamada "strut" estabilizante, el cual se caracteriza por un valor constante no nulo de la función  $\gamma$  en esa región. La explicación es sencilla; si la solución es estática (o estacionaria), los objetos no pueden tener movimiento de rotación uno respecto del otro, o caer uno sobre el otro por atracción gravitacional, ya que esto representa claramente una situación dinámica no contemplada; entonces, los objetos deben permanecer apartados. La función del strut es mantener los objetos apartados (a la misma distancia) en caso de que no se encuentren balanceados naturalmente; es decir, si la fuerza resultante entre ellos no es nula.

Si la fuerza entre los dos objetos no es nula, la solución no se puede interpretar como un SB, ya que existe un tensor de momentum-energía no nulo entre los objetos.

Si las ecuaciones de equilibrio se cumplen (fuerza resultante nula), entonces debe existir alguna interacción repulsiva entre los objetos; la cual se encarga de contrarrestar la atracción gravitacional de los mismos. Dicha interacción es denominada fuerza de repulsión spin-spin, y su presencia se atribuye a los momentos angulares de los objetos, lo cual constituye un fenómeno exclusivo de la Relatividad General; es decir, sin análogo clásico.

Como se puede ver, la condición de planitud elemental contiene la condición de existencia del eje de simetría. Por lo tanto, no tiene ningún sentido satisfacer la condición (3.15) sin satisfacer primeramente la condición de existencia del eje de simetría (3.4).

Si no es posible anular la función  $\gamma$  sobre el eje de simetría, por lo menos se debe intentar anular la función  $\omega$ , ya que esto garantiza que el strut no tenga masa.

Debido a las razones anteriores, la condición de planitud elemental, junto con la condición de existencia del eje de simetría, son denominadas Ecuaciones de Equilibrio.

## 4

## ESTADOS DE EQUILIBRIO

En este capítulo se escribirán explícitamente las ecuaciones de equilibrio (3.4) y (3.15); para ello, se escribirán las funciones métricas sobre el eje de simetría. Los casos extremosubextremo y extremo-hiperextremo se estudiarán por aparte. Se describirán algunos estados de equilibrio para SB extremos-subextremos y extremos-hiperextremos en términos de las masas y los momentos angulares de los objetos constituyentes del SB; los cuales son solución de las ecuaciones de equilibrio.

### 4.1 CASO EXTREMO-SUBEXTREMO

Debido a la disposición de los objetos, el eje de simetría se divide en las siguientes cuatro regiones :



Figura 4.1: Regiones del eje de simetría para SB extremo-subextremo

Las ecuaciones de equilibrio (3.4) y (3.15) deben cumplirse en las regiones I, II, y IV, pero no en la región III; debido a que allí se encuentra el horizonte del objeto subextremo. El método de Sibgatullin asegura que la función  $\omega$  se anule en la región I, y por su construcción, la función  $\gamma$  también se anula allí. Esto quiere decir que las ecuaciones de equilibrio se satisfacen idénticamente en la región I. Las ecuaciones de equilibrio se resolverán en la región II; ya que ésta es la zona entre los dos objetos, y por ende, la relacionada con la fuerza entre ellos.

Al reemplazar (2.45) y (2.47) en (3.4) y (3.15) respectivamente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\operatorname{Im}[\Upsilon_{\mathrm{II}}^*(\Lambda_{\mathrm{II}} - \Gamma_{\mathrm{II}}) - \Psi_{\mathrm{II}}(\Lambda_{\mathrm{II}}^* - \Gamma_{\mathrm{II}}^*)] = 0, \qquad (4.1)$$

$$\frac{\Lambda_{\rm II}\,\Lambda_{\rm II}^* - \Gamma_{\rm II}\,\Gamma_{\rm II}^*}{r_1^4\,r_2\,r_3\,K_0\,K_0^*} = 1\,,\tag{4.2}$$

donde  $U_{\text{II}} = \lim_{\rho \to 0} U(\rho, z)$ , con  $\alpha_2, \alpha_3 < z < \alpha_1$ .

El lado izquierdo de la ecuación (4.1) es un polinomio de grado 7 en z, y el de la ecuación (4.2) es de grado 6 en z. Rigurosamente, se deberían igualar los 8 coeficientes de la primera ecuación y los 7 de la segunda a cero, y resolver el sistema resultante, el cual sería de 15 ecuaciones, y por lo tanto se necesitarían ¡15 incógnitas! para resolverlo. Las funciones métricas contienen 7 parámetros libres únicamente :  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\operatorname{Re}(\beta_1)$ ,  $\operatorname{Im}(\beta_1)$ ,  $\operatorname{Re}(\beta_2)$ , e  $\operatorname{Im}(\beta_2)$ . Entonces, se tienen más ecuaciones que incógnitas. Por tal razón, se empleará una técnica diferente para resolver el sistema de ecuaciones.

La función  $e^{2\gamma}$  es igual a 1 en la región I (por construcción), tal valor es el que debe tener en la región II para cumplir la ecuación de equilibrio (3.15). La función  $e^{2\gamma}$  en la región II se puede escribir de la forma

$$e_{\rm II}^{2\gamma} = e_{\rm I}^{2\gamma} + \Delta_{\rm I \to II} \,,$$

donde  $\Delta_{I \to II}$  es el cambio en la función  $e^{2\gamma}$  al pasar de la región I a la región II.

Si se consigue  $\Delta_{I \to II} = 0$ , la función  $e_{II}^{2\gamma}$  tendrá el mismo valor que en la región I; es decir, será igual a 1, y entonces, se cumple la condición de planitud elemental. El procedimiento se aplica únicamente a la potencia más alta en z del numerador de la función  $e^{2\gamma}$ .

La potencia más alta en el numerador es proporcionada por el determinante  $\Lambda$ , ya que éste es de orden 3, mientras que  $\Gamma$  es de orden 2. Por lo tanto, solamente se analizará el cambio en el coeficiente más alto de  $\Lambda$ .

Al pasar de la región I a la región II se obtienen los siguientes cambios

$$r_1 = z - \alpha_1 \quad \rightarrow \quad -r_1 = z - \alpha_1, r_2 = z - \alpha_2 \quad \rightarrow \quad r_2 = z - \alpha_2, r_3 = z - \alpha_3 \quad \rightarrow \quad r_3 = z - \alpha_3.$$

$$(4.3)$$

La expansión de  $\Lambda$  en la región I resulta de la forma

$$\Lambda_{\rm I} = A_{\rm I} z^3 + \dots , \qquad (4.4)$$

donde  $A_{\rm I}$ se encuentra dado por

$$A_{\rm I} = \mathbf{S} + \mathbf{T} \,, \tag{4.5}$$

con  ${\bf S}$ y  ${\bf T}$  dados por

$$\mathbf{S} = \mathcal{B}_{32}\mathcal{C}_1 + \mathcal{A}_{23}\mathcal{D}_1 \,, \tag{4.6}$$

$$\mathbf{T} = \mathcal{B}_{13}\mathcal{C}_2 + \mathcal{B}_{21}\mathcal{C}_3 + \mathcal{A}_{12}\mathcal{D}_3 + \mathcal{A}_{31}\mathcal{D}_2, \qquad (4.7)$$

donde  $\mathcal{A}_{ij}, \mathcal{B}_{ij}, \mathcal{C}_i, \mathrm{y} \mathcal{D}_i$  son

$$\mathcal{A}_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_i - \beta_1} & \frac{1}{\alpha_j - \beta_1} \\ \frac{1}{\alpha_i - \beta_2} & \frac{1}{\alpha_j - \beta_2} \end{vmatrix}, \mathcal{B}_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_i - \beta_1^*} & \frac{1}{\alpha_j - \beta_1^*} \\ \frac{1}{\alpha_i - \beta_2^*} & \frac{1}{\alpha_j - \beta_2^*} \end{vmatrix}, \mathcal{C}_i = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_i - \beta_1} & \frac{1}{(\alpha_i - \beta_1)^2} \\ \frac{1}{(\alpha_i - \beta_2)^2} & \frac{1}{(\alpha_i - \beta_2)^2} \end{vmatrix}, \mathcal{D}_i = \begin{vmatrix} \frac{1}{(\alpha_i - \beta_1^*)^2} & \frac{1}{\alpha_i - \beta_1^*} \\ \frac{1}{(\alpha_i - \beta_2^*)^2} & \frac{1}{\alpha_i - \beta_2^*} \end{vmatrix}$$

La expansión de  $\Lambda_{\rm II}$  resulta de la forma

$$\Lambda_{\rm II} = A_{\rm II} z^3 + \dots , \qquad (4.8)$$

donde  $A_{\rm II}$ se encuentra dado por

$$A_{\rm II} = -\mathbf{S} + \mathbf{T} \,. \tag{4.9}$$

Comparando las ecuaciones (4.5) y (4.9), se concluye

$$A_{\rm II} = A_{\rm I} - 2\,\mathbf{S}\,,\tag{4.10}$$

pero  $\mathbf{S} = \operatorname{Re}(\mathcal{B}_{32}\mathcal{C}_1)$  en el caso  $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ , entonces, el valor de  $\Delta_{I \to II}$  es

$$\Delta_{\mathrm{I}\to\mathrm{II}} = -2\operatorname{Re}(\mathcal{B}_{32}\mathcal{C}_1).$$
(4.11)

De esta manera, la primera ecuación de equilibrio estará dada por la ecuación

$$\operatorname{Re}(\mathcal{B}_{32}\mathcal{C}_1) = 0. \tag{4.12}$$

Para la segunda ecuación de equilibrio se puede realizar un proceso similar, sin embargo, la ecuación que resulta del procedimiento es demasiado complicada de resolver, entonces se procede en forma diferente. La ecuación de equilibrio (4.1) se tomará solamente para la potencia más alta del numerador. El determinante  $\Upsilon_{II}$  es de orden 4 en z y  $\Psi_{II}$  es de orden 3. De lo anterior se deduce que el coeficiente de la potencia más alta es

$$\lim_{z\to\infty} (z^{-7}\,\Upsilon_{\rm II}\,\Lambda_{\rm II})\,,$$

y la ecuación que representa la condición de existencia de un eje de simetría es

$$\lim_{z \to \infty} \left[ z^{-7} \operatorname{Im}(\Upsilon_{\mathrm{II}}^* \Lambda_{\mathrm{II}}^*) \right] = 0.$$
(4.13)

Anteriormente se ha dicho que el sistema de ecuaciones depende de 7 parámetros libres, pero para resolver el sistema de ecuaciones (4.12)-(4.13), solo se necesitan 2 incógnitas; entonces, la forma de resolver el sistema es suponer arbitrariamente el valor de 5 de los parámetros, y encontrar el valor de los dos restantes que resuelven el problema de equilibrio.

Se obtuvieron diferentes combinaciones de parámetros que resuelven el sistema (4.12)-(4.13), sin embargo, es necesario corroborar que dichos conjuntos de parámetros en realidad anulan las funciones  $\gamma$  y  $\omega$  en la región II. Los valores de los parámetros se reemplazaron en el sistema de ecuaciones (4.1)-(4.2) y se comprobó que los parámetros satisfacen las ecuaciones. Algunos ejemplos de conjuntos de parámetros aparecen en la siguiente tabla:

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\operatorname{Re}(\beta_1)$	$\operatorname{Im}(\beta_1)$	$\operatorname{Re}(\beta_2)$	$\operatorname{Im}(\beta_2)$
3.4	-0.4	-1.3	0.3	1.734	-1.769	1.2
2.7	-0.6	-1.2	0.8	1.199	-2.513	1.1
2.1	-0.2	-1.2	1.670	0.4	-1.3	0.027
2.2	-0.5	-1.4	0.621	-0.9	-0.6	1.501
2.8	-0.7	-1.13	0.861	-1.4	-1.1	1.406

Tabla 4.1: Parámetros de SB extremo-subextremo en equilibrio

Al encontrar el valor de los 7 parámetros que conforman un estado de equilibrio del SB, inmediatamente quedan determinados los valores de las funciones métricas en todas las regiones del espacio; es decir, se obtiene una solución particular de SB. Entonces, es posible hallar las características físicas de los objetos; esto es, su masa y momento angular.

La masa y el momento angular del objeto subextremo se calculan por medio de las fórmulas de Tomimatsu [22]

$$M_s = -\frac{1}{4}\omega_{\text{III}} \int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \lim_{\rho \to 0} (\Omega_{,z}) dz , \qquad (4.14)$$

$$J_s = -\frac{1}{8} \omega_{\text{III}} \int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \lim_{\rho \to 0} (2 + \omega_{\text{III}}\Omega_{,z}) dz , \qquad (4.15)$$

donde  $\Omega = \text{Im}(\mathcal{E})$  y  $\omega_{\text{III}}$  es el valor constante de la función métrica  $\omega$  sobre el horizonte del objeto (región III).

La masa y el momento angular del objeto extremo son

$$M_e = M_T - M_s \,, \tag{4.16}$$

$$J_e = J_T - J_s \,, \tag{4.17}$$

donde  $M_T$  y  $J_T$  son la masa y el momento angular total del SB.

Los valores de la masa y el momento angular total se calculan con los momentos multipolares relativistas de Geroch-Hansen [9, 10], que con ayuda del procedimiento desarrollado por Fodor *et al* [8], en el cual se emplea el potencial e(z) definido en (2.12), proveen las siguientes expresiones para la masa y el momento angular total del SB :

$$M_T = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(e_1 + e_2), \qquad (4.18)$$

$$J_T = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{Im}(e_1 b_1^* + e_2 b_2^*) + 2 \sum_{i=1}^2 \operatorname{Re}(\beta_i) \operatorname{Im}(e_i) + 4M_T J_0 \right], \qquad (4.19)$$

donde los  $e_i$  se calculan mediante la expresión (2.14) y  $J_0$  denota el monopolo de momento angular o parámetro NUT, el cual está dado por la expresión

$$J_0 = \text{NUT} = -\frac{1}{2} \text{Im}(e_1 + e_2).$$
(4.20)

Los conjuntos de parámetros mostrados en la tabla 4.1 producen SB equilibrados con las siguientes características:

$J_T$	$M_s$	$M_e$	$J_s$	$J_e$
			0.010	10,100
18.878	0.164	3.855	-0.610	19.488
22.860	0.067	3.446	-0.394	23.254
8.132	0.000	0.952	-0.062	8.195 19.157
12.381 13.057	0.0800	1.118 2 108	-0.224	-12.107 13.897
	$\begin{array}{c} J_T \\ 18.878 \\ 22.860 \\ 8.132 \\ 12.381 \\ 13.957 \end{array}$	$\begin{array}{c cccc} J_T & M_s \\ \hline 18.878 & 0.164 \\ 22.860 & 0.067 \\ 8.132 & 0.066 \\ 12.381 & 0.0856 \\ 13.957 & 0.016 \\ \end{array}$	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$

Tabla 4.2: Características físicas de SB extremo-subextremo en equilibrio

Las masas están dadas en segundos y los momentos angulares en segundos al cuadrado.

Los valores físicos de la primera fila de la tabla 4.2, corresponden al conjunto de parámetros dado por la primera fila de la tabla 4.1, y así sucesivamente.

Los sistemas anteriores pueden ser interpretados como Sistemas Binarios constituidos por un objeto extremo y uno subextremo debido a que no existen singularidades entre ellos.

Sin embargo, estos conjuntos de parámetros no hacen nulo el parámetro NUT dado por (4.21). Es bien sabido en el ámbito de las soluciones exactas, que si una solución posee un parámetro NUT diferente de cero, entonces no es asintóticamente plana, es decir, las condiciones dadas por (2.10) no se se cumplen en los límites  $z \to \infty$  y  $z \to -\infty$ .

Por construcción, las funciones métricas cumplen la condición de planitud asintótica en el límite  $z \to \infty$ , pero no el límite  $z \to -\infty$ . Si se garantiza la anulación del parámetro NUT, las funciones métricas cumplirán las condiciones en los dos límites para que la métrica sea asintóticamente plana.

Entonces, se planteó resolver un sistema de ecuaciones diferente, en el cual aparece la ecuación adicional

$$Im(e_1 + e_2) = 0, (4.21)$$

que garantiza la planitud asintótica de la solución.

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones consta ahora de las ecuaciones (4.12), (4.13), y (4.21). Para resolver el sistema se necesitan ahora tres incógnitas, entonces, se asignaron arbitrariamente los valores de 4 de los 7 parámetros libres, y el valor de los tres restantes son la solución del sistema de ecuaciones.

La forma de buscar la solución del sistema de tres ecuaciones fue la misma que con el primer sistema; se intercambiaron continuamente los 4 parámetros arbitrarios y se intentaba solucionar el sistema. Se encontraron diferentes Sistemas Binarios en equilibrio con parámetro NUT igual a cero, un ejemplo es dado por el siguiente conjunto de parámetros:

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\operatorname{Re}(\beta_1)$	$\operatorname{Im}(\beta_1)$	$\operatorname{Re}(\beta_2)$	$\operatorname{Im}(\beta_2)$
2.4	-0.3	-1.1	0.3	6.061	-3.661	2.100

Tabla 4.3: Parámetros que equilibran un SB E-S con parámetro NUT nulo

Las características físicas dadas por el conjunto de parámetros anteriores son

$M_T$	$J_T$	$M_s$	$M_e$	$J_s$	$J_e$
5.061	20.418	0.110	4.952	-0.878	21.296

Tabla 4.4: Características físicas de SB E-S en equilibrio con parámetro NUT nulo

Los parámetros de la tabla 4.3 se reemplazaron en las funciones métricas para evaluarlas en los infinitos, y así comprobar la validez de la anulación del parámetro NUT como condición para la planitud asintótica. Tanto en el límite  $z \to \infty$  como en el límite  $z \to -\infty$  se cumplió  $f = 1, e^{2\gamma} = 1, y \omega = 0$ , confirmando así la planitud asintótica de la solución.

### 4.2 CASO EXTREMO-HIPEREXTREMO

El eje de simetría se divide en las siguientes tres regiones :



Figura 4.2: Regiones del eje de simetría para SB extremo-hiperextremo

Las regiones se dividen de igual forma que en el caso extremo-subextremo (E-S). Las funciones métricas  $\omega$  y  $\gamma$  se anulan nuevamente en la región I y la región de interés es nuevamente la región II (entre los objetos).

Los criterios empleados para deducir las ecuaciones de equilibrio son los mismos que en caso E-S. En el caso  $\alpha_2 = \alpha_3^*$ , se tiene  $\mathbf{S} = \text{Im}(\mathcal{B}_{32}\mathcal{C}_1)$ , entonces las ecuaciones de equilibrio son

$$\operatorname{Im}(\mathcal{B}_{32}\mathcal{C}_1) = 0, \qquad (4.22)$$

$$\lim_{z \to \infty} \left[ z^{-7} \operatorname{Im}(\Upsilon_{\mathrm{II}}^* \Lambda_{\mathrm{II}}^*) \right] = 0.$$
(4.23)

La solución del sistema de ecuaciones (4.22)-(4.23) se abordó en forma similar al caso anterior, y se comprobaron las soluciones de la misma forma. Ejemplos de conjuntos de parámetros que resuelven el problema de equilibrio para un SB E-H son

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\operatorname{Re}(\beta_1)$	$\operatorname{Im}(\beta_1)$	$\operatorname{Re}(\beta_2)$	$\operatorname{Im}(\beta_2)$
1.6	0.3i	-0.3i	0.216	1.3	0	0.333
1.9	-0.4i	0.4i	0	0.591	0.202	1.3
2.1	-0.5i	0.5i	0.366	1.7	0	0.514
3.2	0.6i	-0.6i	0.009	0.7	0.3	2.636
3.2	-1.2i	1.2i	-0.018	1.3	0.8	2.238

Tabla 4.5: Parámetros de SB extremo-hiperextremo en equilibrio

Con los valores de los parámetros de la tabla 4.5 se procede a calcular las masas y los momentos angulares de los objetos.

Para calcular la masa y el momento angular de un objeto hiperextremo se emplean nuevamente las fórmulas de Tomimatsu [22], pero en este caso, las fórmulas son un poco más complicadas que en el caso de objeto extremo, sin embargo, las siguientes fórmulas son generales, es decir, la masa y el momento angular de un objeto subextremo también se pueden calcular con las siguientes fórmulas :

$$M_{h} = \frac{1}{4} \left\{ \int_{z_{d}}^{z_{u}} \lim_{\rho \to \rho_{0}} [\rho(\ln f), \rho - \omega\Omega, z] dz + \int_{0}^{\rho_{0}} \lim_{z \to z_{u}} [\rho(\ln f), z - \omega\Omega, \rho] d\rho \right\}$$
(4.24)

$$- \int_{0}^{\rho_0} \lim_{z \to z_d} [\rho(\ln f)_{,z} - \omega \Omega_{,\rho}] d\rho \bigg\} , \qquad (4.25)$$

$$J_h = -\frac{1}{8} \left\{ \int_{z_d}^{z_u} \lim_{\rho \to \rho_0} [2\omega - 2\rho\omega(\ln f), \rho + (\rho^2 f^{-2} + \omega^2)\Omega, z] dz \right\}$$
(4.26)

$$- \int_{0}^{\rho_{0}} \lim_{z \to z_{u}} [2\rho\omega(\ln f)_{,z} + (\rho^{2}f^{-2} + \omega^{2})\Omega_{,\rho}]d\rho \qquad (4.27)$$

+ 
$$\int_{0}^{\rho_{0}} \lim_{z \to z_{d}} [2\rho\omega(\ln f)_{,z} + (\rho^{2}f^{-2} + \omega^{2})\Omega_{,\rho}]d\rho \bigg\} , \qquad (4.28)$$

donde  $\rho_0 = |\text{Im}(\alpha_2)| + \delta\rho$ ,  $z_d = \text{Re}(\alpha_2) - \delta z$ ,  $z_u = \text{Re}(\alpha_2) + \delta z$ , y  $\delta a$  es un pequeño valor numérico positivo de la coordenada a.

La masa y el momento angular del objeto extremo se calculan a partir de los valores de la masa y el momento angular total del sistema mediante las fórmulas

$$M_e = M_T - M_h \,, \tag{4.29}$$

$$J_e = J_T - J_h \,, \tag{4.30}$$

donde  $M_T$  y  $J_T$  son la masa y el momento angular total del SB.

Las características físicas dadas por los parámetros de la tabla 4.5 se encuentran en la siguiente tabla :

$M_T$	$J_T$	$M_h$	$M_e$	$J_h$	$J_e$
1.383	1.794	0.023	1.360	0.031	1.763
1.698	2.220	0.088	1.610	0.237	1.983
1.734	2.944	0.010	1.724	0.020	2.924
2.891	7.673	0.066	2.825	0.178	7.495
2.418	5.175	0.052	2.366	0.127	5.048

Tabla 4.6: Parámetros físicos de SB extremo-hiperextremo en equilibrio

Los sistemas anteriores pueden interpretarse como Sistemas Binarios constituidos por un objeto extremo y uno hiperextremo debido a que no existen singularidades entre ellos.

Al igual que en el caso extremo-subextremo, se intento resolver el sistema de ecuaciones que incluyera la anulación del parámetro NUT, pero en este caso no se encontró solución físicamente importante para este problema, esto es, con masas positivas.

## CONCLUSIONES

- El método de Sibgatullin permite construir en forma satisfactoria soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein para Sistemas Binarios que incluyen un objeto extremo.
- Las ecuaciones de equilibrio de un Sistema Binario se encuentran dadas por requerimientos de buen comportamiento impuestos a la geometría del espacio-tiempo, más específicamente, por condiciones de regularidad al eje de simetría del campo.
- La condición de planitud elemental

$$\lim_{\rho \to 0} e^{-\gamma} = 1 \,, \qquad \lim_{\rho \to 0} \omega = 0 \,,$$

puede ser interpretada como una condición para que la fuerza resultante entre los constituyentes del Sistema Binario sea nula, lo cual le da el carácter de ecuación de equilibrio.

- Un Sistema Binario extremo-subextremo puede encontrarse en equilibrio debido a la fuerza de repulsión spin-spin dada por los momentos angulares de los constituyentes.
- Existen estados de equilibrio para Sistemas Binarios extremo-subextremo incluyendo la condición de planitud asintótica para la métrica.
- Un Sistema Binario extremo-hiperextremo puede encontrarse en equilibrio debido a la fuerza de repulsión spin-spin dada por los momentos angulares de los constituyentes.
- Los Sistemas Binarios extremo-subextremo en equilibrio encontrados cumplen las relaciones

$$M_e > M_s \,, \qquad |J_e| > |J_s| \,,$$

donde  $M_e$ ,  $J_e$ ,  $M_s$ ,  $J_s$  son la masa y el momento angular del objeto extremo y subextremo respectivamente.

• Los Sistemas Binarios extremo-hiperextremo en equilibrio encontrados cumplen las relaciones

$$M_e > M_h , \qquad |J_e| > |J_h| ,$$

donde  $M_e$ ,  $J_e$ ,  $M_h$ ,  $J_h$  son la masa y el momento angular del objeto extremo e hiperextremo respectivamente.

# APORTES

El problema de equilibrio en Relatividad General ha sido estudiado desde hace varios años para sistemas de varios cuerpos. Para sistemas binarios, el problema había sido resuelto hasta el momento en el caso extremo-extremo, subextremo-subextremo, hiperextremohiperextremo, y subextremo-hiperextremo.

Sin embargo, los estados de equilibrio de los sistemas extremo-subextremo y extremohiperextremo han sido poco estudiados. La construcción de una solución exacta que representa el campo gravitacional producido por estos sistemas solo es posible por medio del método de Sibgatullin [14]. Debido a esto se aumentan las dificultades para estudiar dichos sistemas binarios, pues es bien sabido que las personas que conocen el funcionamiento del método de Sibgatullin son muy pocas; esto en comparación con técnicas como transformaciones HKX o transformaciones de Bäcklund.

El problema de la búsqueda de estados de equilibrio para estos dos tipos de SB, fue objeto de estudio en el artículo "Extended multi-soliton solutions of the Einstein field equations. II. Two comments on the existence of equilibrium states" [19]. En ese trabajo no se tuvo éxito en la búsqueda de equilibrios para sistemas extremo-subextremo y extremo-hiperextremo en el caso de electrovacío y tampoco en el de vacío.

Hasta este momento se creía en la llamada conjetura de Bonnor, la cual dice que el equilibrio en el caso de objeto extremo solo ees posible en el caso de dos objetos extremos; sin embargo, el resultado obtenido en el presente trabajo demuestra claramente lo contrario.

Se ha encontrado un resultado contundente en cuanto a la posibilidad de encontrar estados de equilibrio para los dos tipos extremo-subextremo y extremo-hiperextremo en el caso de vacío, incluyendo planitud asintótica en el primero de los dos SB.

El resultado obtenido en el presente trabajo cierra el problema de los estados de equilibrio para Sistemas Binarios en Relatividad General para el caso de vacío, pues se ha logrado encontrar equilibrio para los únicos dos sistemas cuyos estados de equilibrio eran desconocidos.

En un futuro próximo se estudiarán los estados de equilibrio en el caso de electrovacío para los sistemas extremo-subextremo y extremo-hiperextremo, pues es claro que tal caso no se tuvo en cuenta en este trabajo.

## REFERENCIAS

- Belinskii V. A. y Zakharov V. E. "Integration of the Einstein equations by the inverse scattering problem technique and the calculation of the exact soliton solution", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 77 3 (1978)
- [2] Bonnor W. B. "The equilibrium of a charged test particle in the field of a spherical charged mass in general relativity", *Class. Quantum Grav.* **10** 2077 (1993)
- [3] Carroll S. "Lecture Notes on general relativity" www.arxiv.org gr-qc 9712019 (1997)
- [4] Dietz W. y Hoenselaers C. "Two mass solution of Einstein's vacuum equations : The Double Kerr solution", Ann. Phys.(NY) 165 319 (1985)
- [5] D'Inverno R "Introducing Einstein's Relativity" Ed. Clarendon Press (2002)
- [6] De Felice F "Relativity on curved manifolds" Ed. Cambridge University Press 1995
- [7] Ernst F. J. "New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. I", *Phys. Rev.* 167 1175 (1968)
   Ernst F. J." New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. II", *Phys. Rev.* 168 1415 (1968)
- [8] Fodor G., Hoenselaers C. y Perjés Z. "Multipole moments of axisymmetric systems in relativity", J. Math. Phys. 30 2252 (1989)
- [9] Geroch R. "Multipole momens. II. Curved spaces", J. Math. Phys. 11 2580 (1970)
- [10] Hansen R. O. "Multipole moments of stationary space-times", Prog. Theor. Phys. 15 46 (1974)
- [11] Hoenselaers C. "Remarks on the double-Kerr solution", Prog. Theor. Phys. 72 761 (1984)
- [12] Israel W. "Line sources in general relativity", *Phys. Rev.* D **15** 935 (1977)
- [13] Kramer D y Neugebauer G. "The superposition of two Kerr solutions", *Phys. Lett.* A 75 259 (1980)
- [14] Manko V. S. y Sibgatullin N. R. "Construction of exact solutions of the Einstein-Maxwell equations corresponding to a given behavior of the Ernst potentials on the symmetry axis", *Class. Quantum Grav.* **10** 1383 (1993)

- [15] Manko O.V., Manko V. S. y Sanabria-Gómez J. D. "Charged, magnetized Tomimatsu-Sato  $\delta = 2$  solution", *Prog. Theor. Phys.* **100** 671 (1998)
- [16] Manko V. S. y Ruiz E. "Extended multi-soliton solutions of the Einstein field equations", Class. Quantum Grav. 15 2007 (1998)
- [17] Manko V. S. y Ruiz E. "Exact solution of the double-Kerr equilibrium problem", Class. Quantum Grav. 18 L11-L15 (2001)
- [18] Manko V. S. y Ruiz E. "Comment on: "The double-Kerr solution" by W. B. Bonnor and B. R. Steadman", Class. Quantum Grav. 22 635 (2005)
- [19] Manko V. S., Ruiz E., Sanabria-Gómez J.D. "Extended multi-soliton solutions of the Einstein field equations. II. Two comments on the existence of equilibrium states", *Class. Quantum Grav.* 17 3881 (2000)
- [20] Misner Ch, Thorne K y Wheeler J *Gravitation* Ed. W.H. Freeman and Company (1973)
- [21] Perry G. P. y Cooperstock F. I. 'Electrostatic equilibrium of two spherical charged masses in general relativity", *Class. Quantum Grav.* 14 1329 (1997)
- [22] Tomimatsu A. "On a gravitaional mass and angular momentum of two black holes in equilibrium", Prog. Theor. Phys. 70 385 (1983)