

Modelo cognitivo del Valor y vector propio: Conexión con los sistemas de ecuaciones lineales y transformación lineal como matriz

Natalia Stefania Garzón Laguado

Trabajo de Grado para Optar el Título de Magister en Educación Matemática

Directora

Solange Roa Fuentes

Doctora en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2026

Dedicatoria

A mi mami, que desde el cielo sigue siendo mi luz y mi inspiración.

A mi papi, por creer en mí, sostenerme y acompañarme siempre.

*Y a mi esposo, por su amor, apoyo y motivación constante, sin los cuales este
proceso no habría sido posible.*

*Este trabajo es para ustedes, porque fueron el motor que me impulsó a llegar hasta
aquí.*

Tabla de Contenido

	Pág.
Introducción	10
1. Antecedentes	14
1.1. Representación del valor y vector propio	14
1.2. Dificultades relacionadas con lo algorítmico.....	21
1.3. Análisis de libros de texto.....	23
1.4 Análisis cognitivos del valor y vector propio	26
2. Planteamiento del Problema	32
3. Teoría APOE: Constructos teóricos y metodológicos	39
3.1. Estructuras y Mecanismo mentales.....	40
3.2. Ciclo de Investigación.....	43
4. Método de la investigación	45
4.1. Análisis Teórico	45
4.1.1 La importancia del concepto del valor y vector propio en la ingeniería.....	46
4.1.2 Descomposiciones genéticas previas del concepto de valor y vector propio	54
4.1.3 Modelo cognitivo del valor y vector propio en relación con los sistemas de ecuaciones lineales y la transformación lineal como matriz	62
5. Diseño e implementación de instrumentos	67
5.1 Población y contexto.....	68
5.2 La dinámica del curso	73
5.3 Instrumentos y tareas.	74
5.3.1 Prueba diagnóstica	75
5.3.2 Taller	82
5.3.3 Entrevista	88
6. Recolección y análisis de datos.....	94
6.1 Datos obtenidos de la Prueba Diagnóstica.....	94
6.2 Datos obtenidos del taller.....	98
6.3 Datos obtenidos de las entrevistas	110
7. Conclusiones	129
7.1 Descomposición genética refinada del concepto de valor y vector propio.....	129
7.2 Recomendaciones didácticas	131
7.3 Sugerencias para futuras investigaciones.....	132

Referencias Bibliográficas 134
Apéndice I..... 137

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1 Contenidos del curso de álgebra lineal	36
Tabla 2 La concepción de vector de E^9	96

Lista de Figuras







	Pág.
Figura 1. E7 generando una recta a partir de un vector	17
Figura 2. Gestos asociados con la descripción de vectores propios.	20
Figura 3. Descomposición genética del concepto de valor, vector y espacio propio.	27
Figura 4.  hipotética de los conceptos previos para la construcción de valor y vector propio en 	29
Figura 5.  hipotética de los conceptos de valor y vector propio en 	30
Tabla 1 Contenidos del curso de álgebra lineal	36
Figura 6. Estructuras y mecanismos mentales.	39
Figura 7. Ciclo de investigación de la Teoría APOE.....	43
Figura 9 Desarrollo algebraico del concepto de valor y vector propio.....	54
Figura 10 Descomposición genética del concepto de valor, vector y espacio propio.	55
Figura 11.  conceptos previos para la construcción de valor y vector propio en 	58
Figura 12 $[[DG]]_1$ hipotética de los conceptos previos	59
Figura 15 Ruta de enseñanza para el curso de algebra lineal	69
Figura 16. Diagonal del cuadrado.....	77
Figura 17. Representaciones de vectores	78
Figura 18. Sistema de ecuaciones lineales.....	82
Figura 19. Efecto de una transformación lineal	91
Figura 20 Efecto de una transformación lineal.....	91

Tabla 2 La concepción de vector de E9 96

Figura 21. Producción de los estudiantes del grupo 1 100

Figura 22 Producción de los estudiantes del grupo 2, tarea 5..... 105

Figura 23 Producción de los estudiantes del grupo 3, tarea 1..... 107

Figura 24. Producción de los estudiantes del grupo 3, tarea 2..... 109

Figura 25. Producción del estudiante 1, tarea 1 111

Figura 26 Producción del estudiante 1, tarea 2 113

Figura 27. Producción del estudiante 1, tarea 2 117

Figura 28. Producción del estudiante 1, tarea 3.1 118

Figura 29 Producción del estudiante 1, tarea 3.2 120

Figura 30 Producción del estudiante 2, tarea 1 121

Figura 31 Producción del Estudiante 2, Tarea 2 124

Figura 32 Producción del Estudiante 2, Tarea 3 127

Resumen

Título: Modelo cognitivo del Valor y vector propio: Conexión con los sistemas de ecuaciones lineales y transformación lineal como matriz *

Autor: Natalia Stefania Garzón Laguado **

Palabras Clave: álgebra lineal, valor propio, vector propio, teoría APOE, modelo cognitivo, sistemas de ecuaciones lineales, transformaciones lineales.

Descripción: La enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal en el nivel universitario continúan representando un desafío, especialmente en la comprensión conceptual de nociones abstractas como el valor y el vector propio. Diversos estudios han evidenciado que estas dificultades se relacionan con la desconexión entre representaciones algebraicas y geométricas, el énfasis en procedimientos algorítmicos y la débil articulación entre conceptos fundamentales del curso. En este contexto, la presente investigación tiene como propósito diseñar y validar un modelo cognitivo del concepto de valor y vector propio, sustentado en las relaciones que estudiantes universitarios de primer año pueden establecer con los sistemas de ecuaciones lineales y la transformación lineal representada por una matriz.

El estudio se fundamenta en la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) y se desarrolla siguiendo su ciclo de investigación, el cual incluye el análisis teórico, el diseño e implementación de la enseñanza y el análisis de datos. A partir de investigaciones previas, se construye una descomposición genética hipotética del concepto de valor y vector propio, integrando estructuras cognitivas asociadas a sistemas de ecuaciones lineales, matrices y transformaciones lineales. Esta descomposición orienta el diseño de instrumentos didácticos implementados en un curso básico de álgebra lineal.

La recolección de datos se realiza mediante una prueba diagnóstica, un taller y entrevistas. El análisis de las producciones de los estudiantes permite contrastar la descomposición genética hipotética con evidencias empíricas, lo que conduce a una descomposición genética refinada del concepto de valor y vector propio, así como a la formulación de recomendaciones didácticas para favorecer una comprensión conceptual integrada en la enseñanza universitaria del álgebra lineal.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Solange Roa Fuentes. Doctora en ciencias con especialidad en matemática educativa.

Abstract

Title: Cognitive model of eigenvalues and eigenvectors: Connections with systems of linear equations and linear transformations as matrices*

Author: Natalia Stefania Garzon Laguado**

Key Words: linear algebra, eigenvalues, eigenvectors, APOS theory, cognitive model, systems of linear equations, linear transformations.

Description: The teaching and learning of linear algebra at the university level continues to pose significant challenges, particularly regarding the conceptual understanding of abstract notions such as eigenvalues and eigenvectors. Previous research has shown that these difficulties are associated with the disconnection between algebraic and geometric representations, an overemphasis on algorithmic procedures, and weak articulation among fundamental concepts of the course. In this context, the purpose of this study is to design and validate a cognitive model of the concept of eigenvalues and eigenvectors, grounded in the relationships that first-year university students can establish with systems of linear equations and linear transformations represented by matrices.

This research is framed within APOS theory (Action, Process, Object, and Schema) and follows its research cycle, which includes theoretical analysis, instructional design and implementation, and data analysis. Based on previous studies, a hypothetical genetic decomposition of the concept of eigenvalues and eigenvectors is constructed by integrating cognitive structures related to systems of linear equations, matrices, and linear transformations. This decomposition guides the design of instructional instruments implemented in a basic linear algebra course.

Data are collected through a diagnostic test, a workshop, and semi-structured interviews. The analysis of students' productions allows for the comparison of empirical evidence with the proposed hypothetical genetic decomposition. As a result, a refined genetic decomposition of the concept of eigenvalues and eigenvectors is obtained, along with didactic recommendations aimed at promoting a gradual, integrated, and meaningful conceptual understanding of this concept in undergraduate linear algebra courses.

* Degree Thesis

**Faculty of Sciences. School of Mathematics. Advisor: Solange Roa Fuentes, Ph.D. in Science with a specialization in Mathematics Education.

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de álgebra lineal han sido y siguen siendo de interés para la comunidad de educadores matemáticos, ya que esta asignatura está incluida en la mayoría de los programas universitarios que se enfocan en ciencia o la tecnología (Campos, 2017). Esta asignatura se considera básica y está incluida en al menos un curso, durante los dos primeros años universitarios. Sin embargo, Hillel (2000), menciona que la enseñanza del álgebra lineal en el nivel universitario suele ser una experiencia frustrante para profesores y estudiantes. Más de dos décadas después, las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal persisten. Estas se atribuyen a varios factores, entre los que destacan: la naturaleza abstracta de los conceptos, la desconexión entre representaciones algebraicas, geométricas y matriciales, la falta de vínculos con contextos reales y, sobre todo, los enfoques de enseñanza centrados en la manipulación simbólica sin promover la comprensión conceptual (Dorier, 2000; Hillel, 2000; Trigueros & Oktaç, 2005; Stewart & Thomas, 2010).

Diversas investigaciones muestran que los cursos de álgebra lineal con frecuencia se caracterizan por la presentación de elementos abstractos y teóricos. Este acercamiento generalmente es aceptado y controlado por los profesores, pero resulta un mundo desconocido para los estudiantes, ya que no genera la reflexión sobre los conceptos y sus aplicaciones al resolver problemas (Dorier, 2000; Trigueros & Oktaç, 2005). En 1997, Ed Dubinsky afirmó que era necesario hacer investigaciones para determinar las construcciones mentales específicas que un estudiante puede y debe lograr para comprender los conceptos básicos del álgebra lineal. Desde entonces, se han propuesto diversos modelos cognitivos desde la educación matemática, específicamente desde la teoría APOE, que buscan fomentar dicha comprensión. Entre los conceptos abordados se destacan: el vector (Oktaç & Trigueros, 2004, CITAR A YULIETH), los

sistemas de ecuaciones lineales (Manzanero, 2007; Arnawa, Yerizon & Nita, 2019; Tatira, 2023), la dependencia e independencia lineal (Alves et al., 2020; Celik, 2020), los valores y vectores propios (Betancur, 2020; Parraguez González et al., 2022), la transformación lineal (González Rojas & Roa-Fuentes, 2017; Roa-Fuentes & Oktaç, 2012; Celik, 2020) y el espacio vectorial (Trigueros & Oktaç, 2005; Trigueros et al., 2024).

La mayoría de estas investigaciones inicia con la definición de las estructuras previas necesarias para la construcción del nuevo concepto, que dan paso a la construcción de una descomposición genética hipotética del concepto que luego es refinado por evidencias empíricas. En esta investigación en particular, se busca integrar resultados de investigaciones previas sobre conceptos fuertemente relacionados con la comprensión del concepto de valor y vector propio. Específicamente, se pretende articular descomposiciones genéticas validadas de los sistemas de ecuaciones lineales y de la transformación lineal representada por una matriz, con el modelo cognitivo de valor y vector propio.

Esta decisión se sustenta en que dichos conceptos forman parte de los conocimientos previos esenciales y, por tanto, desempeñan un papel fundamental en el desarrollo de estructuras cognitivas necesarias para comprender la relación Av , como lo señalan Betancur (2020), Salgado y Trigueros (2015), y Parraguez González et al. (2022). Estas investigaciones evidencian que los estudiantes enfrentan dificultades para coordinar representaciones algebraicas y geométricas, y para establecer la conexión entre una matriz, su acción sobre un vector y la idea de dirección invariante. Además, estudios como Stewart et al. (2018) destacan que conceptos como sistemas de ecuaciones, transformaciones lineales y valor y vector propio son conceptos fundamentales en un primer curso de álgebra lineal. En consecuencia, esta investigación propone que la construcción del concepto de valor y vector propio se promueva de manera gradual,

integrada y fundamentada desde el inicio del curso de álgebra lineal, mediante tareas que articulen estos conceptos base con la nueva noción en desarrollo.

Por tanto, el propósito de esta investigación es diseñar y validar un modelo cognitivo del concepto de valor y vector propio sustentado en las relaciones que un estudiante universitario de primer año puede establecer con los sistemas de ecuaciones lineales y la transformación lineal como matriz.

El método de esta investigación se sustenta en el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE (Arnon et al., 2014) conformado por tres componentes: i. Análisis teórico, ii. Diseño e implementación de la enseñanza y iii. Análisis y recolección de datos. Las componentes ii. y iii. se implementan tomando como elemento fundamental el ciclo ACE, que se adapta y usa para el desarrollo del curso básico de álgebra lineal que se define como la población de esta investigación.

Este documento está dividido en cinco capítulos, a continuación se describe de forma breve el contenido y propósito de cada uno.

El primer capítulo muestra un panorama de investigación centrado en el estudio didáctico del valor y vector propio. Se han identificado cuatro categorías de estudio de este concepto desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas, estas son: representación del valor y vector propio, dificultades relacionadas con lo algorítmico, análisis de libros de texto y análisis cognitivos del concepto de valor y vector propio. A cada una de estas categorías se les dedica una sección de este capítulo.

En el segundo capítulo se presenta el planteamiento del problema de investigación junto con la pregunta y el objetivo principal de la misma.

El marco teórico de este estudio se describe en el capítulo tres. Se presentan los constructos teóricos y metodológicos de la Teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Los mecanismos y estructuras mentales que se presentan en un modelo cognitivo denominado: descomposición genética; así como las componentes del Ciclo de Investigación.

El cuarto capítulo corresponde al método de la investigación, en el cual se desarrolla el Análisis teórico. Allí se presenta la descomposición genética hipotética del concepto de valor y vector propio, estableciendo sus relaciones con los sistemas de ecuaciones lineales, las matrices y las transformaciones lineales.

El quinto capítulo describe el diseño e implementación de los instrumentos, así como el contexto en el que se llevó a cabo el estudio. En este se detallan la población participante, la dinámica del curso y los instrumentos diseñados, los cuales se construyeron en coherencia con la descomposición genética hipotética.

En el sexto capítulo se presenta la recolección y análisis de datos, donde se exponen y discuten las producciones de los estudiantes a partir de las tres fuentes de información: la prueba diagnóstica, el taller y las entrevistas. En este capítulo se contrastan las evidencias empíricas con la descomposición genética planteada en el análisis teórico, con el fin de identificar las estructuras mentales evidenciadas en los participantes.

Finalmente, el séptimo capítulo contiene las conclusiones de la investigación, donde se presenta la descomposición genética refinada del concepto de valor y vector propio, así como una serie de recomendaciones didácticas y sugerencias para futuras investigaciones orientadas al fortalecimiento de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal en el contexto universitario.

1. Antecedentes

En los últimos años los problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal han sido de gran interés para las investigaciones en Educación Matemática. El Álgebra Lineal requiere de diversos conceptos abstractos, que para ser construidos y generalizados es necesario que los individuos establezcan ciertas conexiones entre ellos (Dorier y Sierpinska, 2001). Estos autores señalan que es de gran importancia para el aprendizaje del Álgebra Lineal entender la naturaleza unificadora y generalizadora, lo cual implica considerar los conceptos desde varios aspectos, entendidos como diferentes perspectivas o formas de abordarlos, como por ejemplo; algebraica, geométrica, matricial, computacional, entre otras. Así como, interpretar un resultado en diversos contextos.

En este capítulo se presenta un panorama de investigaciones que involucran el estudio didáctico del valor y vector propio en un periodo de tiempo de 10 años. Sin embargo, también se tienen en cuenta investigaciones que a lo largo de la historia han sido de gran importancia en el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de la teoría propia. En este proceso se han identificado categorías de estudio del concepto de valor y vector propio desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas, estas son: representación del valor y vector propio, dificultades relacionadas con lo algorítmico, análisis de libros de texto y análisis cognitivos del concepto de valor y vector propio.

1.1. Representación del valor y vector propio

Diversos estudios convergen al señalar la importancia de integrar representaciones geométricas en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de valor y vector propio. Un aporte significativo en esta línea es el estudio de Karakok (2019), quien explora cómo estudiantes de

física logran transferir su comprensión de dicho concepto a contextos complejos, como la mecánica cuántica. Basándose en los modos de pensamiento propuestos por Sierpiska (2000), la autora muestra que ciertas tareas, cuidadosamente diseñadas, pueden ayudar a los estudiantes a ir más allá de un enfoque procedimental, promoviendo una comprensión que integra aspectos tanto geométricos como estructurales. Uno de los aspectos que más se resalta del trabajo de Karakok es la atención que presta a los procesos de razonamiento, en lugar de limitarse a los resultados finales del aprendizaje. Este enfoque reconoce que las experiencias en el aula influyen directamente en la forma en que los estudiantes se vinculan con las ideas matemáticas. En ese camino, las representaciones geométricas de los vectores propios emergen como una herramienta significativa. No solo ayudan a comprender mejor los conceptos, sino que invitan a pensar de forma más conectada. Los testimonios del estudio muestran que, cuando los estudiantes pueden visualizar lo que antes solo manipulaban algebraicamente, el concepto ya no se siente tan lejano ni tan abstracto.

Más allá del análisis técnico, el estudio de Karakok (2019) invita a reflexionar sobre la relación que el estudiante construye con aquello que intenta comprender. Cuando un concepto como el de vector propio deja de ser solo una operación y se vuelve algo que el estudiante puede visualizar y darle un significado, cambia no solo su forma de pensar, sino también su vínculo con la matemática. Karakok (2019) subraya el poder de las representaciones geométricas como mediadoras en la comprensión; por otro lado, valida la necesidad de diseñar tareas que estimulen la evolución del pensamiento hacia una comprensión más profunda y conectada de los conceptos.

Mientras Karakok documenta cómo estas representaciones apoyan la comprensión estructural y la transferencia de significado, esta investigación se propone modelar los mecanismos mentales que hacen posible esa comprensión en coherencia con la teoría APOE.

Por otra parte, el estudio de Parraguez et al. (2020) aporta significativamente al campo al desarrollar dos modelos que describen rutas cognitivas para el aprendizaje del valor y vector propio desde una perspectiva geométrica, enmarcada en la teoría APOE. Esta aproximación busca promover la transición de los estudiantes desde la educación secundaria hacia niveles universitarios, fomentando la construcción de conceptos matemáticos más abstractos a través de la visualización concreta de estos elementos en \mathbb{R}^2 . Los modelos presentados por estos investigadores ayudan a ilustrar cómo los estudiantes progresan en su comprensión y en el manejo de conceptos avanzados de álgebra lineal.

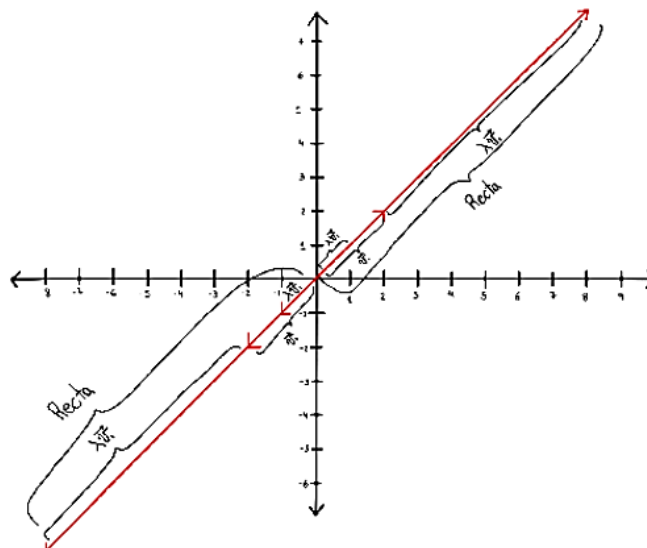
El primer modelo presentado por Parraguez et al. (2020) enfatiza en la importancia de la rotación de vectores en \mathbb{R}^2 : vectores $v \in \mathbb{R}^2$ que giran 180° alrededor del origen. Esta noción en principio geométrica, permite fomentar una concepción Proceso que permite a los estudiantes estructurar el inverso aditivo de un vector $(-v)$ y el Proceso del múltiplo escalar $(-1 \cdot v)$ como un paso crucial para comenzar a explorar los conceptos de valor y vector propio en \mathbb{R}^2 , con estudiantes universitarios de primer año.

El segundo modelo profundiza en la transformación lineal como Proceso, analizando el efecto geométrico que ciertas matrices ejercen sobre vectores en \mathbb{R}^2 . Una de las representaciones que se resalta en este estudio se ilustra en la Figura 1, donde un estudiante visualiza cómo el múltiplo escalar de un vector genera una recta. En esta construcción, el escalar λ asigna distintos valores reales al vector v , generando vectores alineados que forman una recta que pasa por el

origen y se extiende en ambos sentidos, en la dirección de \vec{v} . Esta representación permite a los estudiantes establecer una relación entre la operación producto por escalar y la idea de dirección invariante, central para comprender los valores propios como aquellos escalares que no alteran la dirección del vector asociado.

Figura 1.

E7 generando una recta a partir de un vector



Nota. Imagen tomada de Parraguez et al. (2020) (p. 21).

En conjunto, estos modelos no solo ayudan a ver cómo los estudiantes pueden empezar a construir ideas propias sobre los valores y vectores propios, sino que también muestran el poder que tiene lo visual, en especial lo geométrico, para apoyar una comprensión más profunda. Por eso, este estudio se conecta directamente con el objetivo de esta tesis y nos permite ir entendiendo cómo los estudiantes van construyendo sus ideas, paso a paso, desde Acciones concretas hasta formas de pensar más sólidas.

Dos estudios recientes muestran cómo las representaciones geométricas, apoyadas en el uso de software de geometría dinámica, pueden hacer una gran diferencia en cómo los estudiantes universitarios entienden los conceptos de valor y vector propio. Por ejemplo, en el estudio de Gol Tabaghi (2014), se observa cómo el uso de Geometer's Sketchpad ayudó a los estudiantes a tener un primer acercamiento significativo a la ecuación propia. Uno de los hallazgos más interesantes fue el llamado "arrastre intencional", los estudiantes movían los vectores en la pantalla para explorar visualmente cuándo un vector y su imagen bajo una transformación quedaban alineados. Esta interacción les permite reconocer, de manera intuitiva y visual, cuándo se daba la condición propia.

Más allá de la manipulación gráfica, el estudio muestra que esta forma de trabajo favorece un tipo de pensamiento más integrado, que la autora denomina "dinámico-sintético-geométrico". Esta forma de razonar, inspirada en los modos de pensamiento propuestos por Sierpinska, combina la exploración visual con una comprensión más conceptual. En otras palabras, el software no solo facilita ver lo que ocurre, sino también pensar de una manera más conectada, más dinámica y más cercana a una comprensión profunda de los conceptos matemáticos.

Por otro lado, el estudio de Caglayan (2015) se enfoca en entender cómo estudiantes universitarios abordan y comprenden los conceptos de valor y vector propio, utilizando el software Geometer's Sketchpad. Esta investigación forma parte de un proyecto más amplio que busca conectar ideas de geometría, de cálculo y álgebra lineal de una forma más integrada y visual. Para ello, se diseñaron actividades abiertas que invitaban a los estudiantes a explorar distintas transformaciones lineales aplicadas a vectores, analizar cómo estas actuaban y buscar patrones o regularidades, tanto desde lo geométrico como desde lo algebraico.

Uno de los aportes más significativos del estudio fue identificar que los estudiantes usaban distintos tipos de razonamiento o maneras de pensar al enfrentarse a los problemas. Algunos se apoyaban mucho en lo visual y geométrico (lo que se llama pensamiento sintético-geométrico), otros preferían hacer cálculos numéricos paso a paso (analítico-aritmético), y algunos lograban reconocer estructuras más generales dentro del álgebra lineal, como propiedades de las matrices (analítico-estructural) (Caglayan, 2015).

Pero lo más interesante, según señala Caglayan (2015), fue observar cómo los estudiantes se movían entre estas formas de pensar. Por ejemplo, podían comenzar explorando visualmente qué hacía una matriz sobre un vector y , a partir de ahí, buscar el valor propio que justificara ese comportamiento. Este ir y venir entre lo visual y lo algebraico reflejaba una evolución en su comprensión, que se hacía más amplia y conectada con el tiempo.

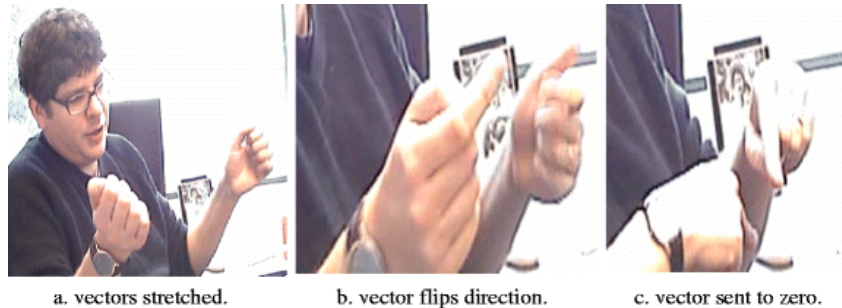
El estudio deja claro que trabajar con herramientas dinámicas como Sketchpad, y con tareas bien pensadas, no solo facilita que los estudiantes entiendan mejor los conceptos desde el inicio, sino que también impulsa el desarrollo de ideas más profundas (Caglayan, 2015). Este trabajo aporta a esta investigación ya que destaca la importancia de proponer tareas que permitan articular lo visual y lo simbólico, y acompañar a los estudiantes en ese tránsito entre distintas formas de razonamiento.

Un enfoque interesante y poco convencional sobre la representación de vectores propios lo proponen Sinclair y Gol Tabaghi (2010), quienes exploran cómo los gestos pueden desempeñar un papel importante en la comprensión y comunicación de este concepto matemático. Su estudio se centró en observar a un grupo de matemáticos mientras hablaban sobre vectores propios, analizando cómo acompañaban sus explicaciones verbales con movimientos corporales. Inspirados por los trabajos de Lakoff y Núñez (2000), quienes discuten

cómo los conceptos abstractos en matemáticas se comprenden a través de metáforas corporales, estos autores buscaron profundizar en cómo el cuerpo también participa en la conceptualización matemática.

Figura 2.

Gestos asociados con la descripción de vectores propios.



Nota. Imagen tomada de Sinclair y Gol Tabaghi (2010, p.9)

Durante las entrevistas, los participantes utilizaron gestos espontáneos para ilustrar lo que ocurría con un vector cuando era transformado por una matriz. Como se muestra en la Figura 2, los gestos representaban situaciones como estirar un vector, cambiar su dirección o colapsarlo hacia el origen. Estas acciones eran acompañadas de verbos como "estirar", "encoger", "voltear" o "enviar a cero", lo cual sugiere que los participantes no solo hablaban del vector como un objeto abstracto, sino como algo que se transforma activamente en el espacio.

Esta forma de expresión revela que, para estos matemáticos que participaron en el estudio de Sinclair y Gol Tabaghi (2010), los vectores propios no son simplemente soluciones a una ecuación, sino además, representan entidades dinámicas cuya transformación puede visualizarse, imaginarse e incluso corporizarse físicamente mediante gestos. Desde esta perspectiva, el cuerpo

y en particular los movimientos de las manos funciona como una herramienta para pensar matemáticamente.

Una de las contribuciones más importantes del estudio, Sinclair y Gol Tabaghi (2010), es que pone en evidencia cómo los gestos pueden complementar el lenguaje formal y enriquecer tanto la enseñanza como el aprendizaje de conceptos abstractos. Reconocer el gesto como una forma válida de representación matemática abre la puerta a incluir lo corporal en el aula, no solo como un medio para facilitar la comunicación, sino también como una herramienta que contribuye activamente a la construcción de significado.

En conjunto, los antecedentes revisados en esta categoría muestran que la comprensión de los valores y vectores propios no puede limitarse a procedimientos algebraicos o representaciones formales. Las representaciones visuales, dinámicas o corporales juegan un papel clave en cómo los estudiantes y expertos construyen sentido alrededor de estos conceptos. El uso de software de geometría dinámica, por ejemplo, permite explorar transformaciones de manera visual e interactiva, lo que facilita el tránsito entre formas intuitivas y estructuradas de pensamiento. A su vez, la incorporación del cuerpo a través de los gestos muestra que la comprensión matemática también se apoya en cómo las personas perciben y experimentan las ideas con su cuerpo y sus sentidos. Los estudios presentados coinciden en destacar que la comprensión del valor y vector propios se potencia cuando se integran distintas formas de representación, ofreciendo múltiples caminos hacia la comprensión.

1.2. Dificultades relacionadas con lo algorítmico

En esta segunda categoría, se presenta una investigación basada en la teoría de los tres mundos del conocimiento matemático propuesta por Tall (2004). En particular, Thomas y

Stewart (2011) analizan bajo dicho enfoque, el pensamiento de los estudiantes al desarrollar la ecuación propia $Ax = \lambda x$. Según los autores, los estudiantes abordaron el concepto desde tres perspectivas: encarnada, geométrica y simbólica. Esta clasificación permite evidenciar cómo se integran distintas formas de representación en la comprensión del concepto. Thomas y Stewart (2011) identificaron que algunos estudiantes empleaban ideas encarnadas como la dirección y longitud de los vectores, para explicar que un vector propio es aquel cuya dirección no cambia cuando se le aplica una transformación lineal. Otros estudiantes operaban principalmente en el mundo simbólico, recurriendo a procedimientos algebraicos para resolver problemas sin hacer referencia a significados geométricos o visuales.

Una de las principales dificultades detectadas por Thomas y Stewart (2011), fue la comprensión de la transición entre la ecuación matricial $Ax = \lambda x$ y su forma equivalente $(A - \lambda I)x = 0$ utilizada para encontrar los valores y vectores propios. Algunos estudiantes no comprendían “el papel de la matriz identidad (I) en esta equivalencia” (Thomas & Stewart, 2011, p. 2066), lo que obstaculizaba el desarrollo de un razonamiento algebraico completo.

En las conclusiones, Thomas y Stewart (2011) enfatizan que muchos estudiantes tienden a abordar el tema de forma simbólica, centrándose en los procedimientos sin comprender a profundidad los significados conceptuales implicados. Esto influye en la aplicación limitada de las definiciones formales, así como en la incapacidad de vincular representaciones geométricas con la estructura algebraica de los conceptos. Por lo cual la investigación propone que fomentar el pensamiento encarnado como razonar con base en imágenes mentales de movimiento o

dirección puede complementar los enfoques procedimentales y fortalecer la comprensión de los estudiantes.

En conjunto, los hallazgos de Thomas y Stewart (2011) permiten visibilizar que las dificultades en torno a la comprensión de los valores y vectores propios no solo están asociadas a errores en la ejecución de procedimientos, sino también a una débil articulación entre los distintos significados involucrados en la ecuación propia. El predominio del pensamiento simbólico observado en los estudiantes sugiere que muchos de ellos operan desde niveles de razonamiento centrados en acciones o procedimientos, sin lograr una comprensión más estructurada del concepto. Este análisis resulta particularmente relevante para esta investigación, ya que resalta la necesidad de diseñar propuestas que favorezcan el tránsito entre distintos modos de pensamiento y fomenten conexiones significativas entre representaciones geométricas, simbólicas y algebraicas, como base para una comprensión más profunda y flexible de los conceptos (Thomas & Stewart, 2011).

1.3. Análisis de libros de texto

Los libros de texto son herramientas fundamentales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ya que muchas veces constituyen la principal fuente de contenidos, ejemplos y actividades tanto para docentes como para estudiantes. En el caso particular del valor y vector propio, el modo en que este concepto es introducido, desarrollado y representado en los textos escolares puede influir directamente en el tipo de comprensión que los estudiantes construyen (Barrantes, López & Fernández, 2015). Por esta razón, resulta relevante considerar cómo han sido analizados en investigaciones previas, con el fin de comprender qué enfoques, representaciones y tipos de tareas se han privilegiado en la enseñanza de este concepto.

En este sentido, se retoman estudios que han examinado libros de texto desde marcos teóricos específicos, como el de Campos (2017), su estudio se centra en el análisis del libro *Elementary Linear Algebra* de Howard Anton (2010). El objetivo de Campos fue identificar si dicho recurso seguía implícitamente una descomposición genética en la presentación del concepto de valor y vector propio. A pesar de que la teoría APOE no proporciona lineamientos metodológicos para el análisis de textos, el autor propuso criterios para estudiar la estructura general del libro, la presentación de definiciones, los ejemplos y ejercicios propuestos, así como el perfil del lector modelo. Como resultado, identificó elementos que podrían ser considerados para el diseño de una descomposición genética para los conceptos valor y vector propios.

Desde esta perspectiva, los hallazgos de Campos (2017) resultan relevantes al evidenciar cómo un enfoque en el que predomina lo algorítmico, como el libro de texto de Anton (2010), puede restringir la formación de estructuras mentales en los estudiantes, dado que se centra más en procedimientos que en la construcción de significados. Esta limitación cobra especial importancia en investigaciones interesadas en promover comprensiones conceptuales sólidas, por ejemplo las que proponen descomposiciones genéticas (Arnon et al., 2014), ya que sugiere la necesidad de replantear la forma en que se introducen y conectan los conceptos de valor y vector propio. Así, el trabajo de Campos (2017) ofrece una base crítica que orienta el análisis de propuestas didácticas que busquen articular procedimientos, significados y estructuras cognitivas más robustas.

Por otro lado, Betancur Sánchez, Roa Fuentes y Ballesteros (2021) proponen un modelo teórico que describe las estructuras previas que necesita un estudiante para comprender el concepto de valor y vector propio. Este modelo se construye a partir del análisis de libros de texto, destacando cómo los textos presentan los conceptos, definen problemas y estructuran

ejercicios y ejemplos que promueven ciertas construcciones mentales. Para este análisis, los autores utilizaron algunos de los criterios propuestos por Campos (2017).

En el análisis comparativo de los libros seleccionados, Betancur Sánchez et al. (2021) identifican similitudes y diferencias en la presentación de los conceptos, dando atención a las estrategias pedagógicas, las fortalezas y debilidades de cada texto, y las posibles implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal. Los autores logran señalar diferencias importantes en la secuencia de presentación de los temas, en la definición del concepto de valor y vector propio, y en los enfoques usados para motivar su estudio. Asimismo, se analizan distintas estrategias para desarrollar ejemplos y ejercicios, con énfasis en la representación geométrica, la diagonalización de operadores lineales y la relación entre matrices y transformaciones lineales.

La clasificación de los ejemplos y ejercicios según las estructuras mentales de la teoría APOE revela la diversidad de enfoques pedagógicos empleados. Se identifican secuencias que transitan desde niveles de Acción hacia Proceso y Objeto, lo que sugiere una progresión cognitiva que puede favorecer una comprensión más sólida por parte de los estudiantes Betancur Sánchez et al. (2021).

Al comparar los estudios descritos, sobre el análisis de libros de texto, interesa destacar un asunto importante para esta investigación. Mientras que Betancur Sánchez et al. (2021) orientan el análisis de libros como insumo para el diseño de una descomposición genética preliminar, Campos (2017) se enfoca en evidenciar la existencia implícita de dicha descomposición en un texto específico. Estas investigaciones aportan herramientas valiosas para evaluar el uso de libros de texto en la enseñanza del concepto de valor y vector propio, lo cual será fundamental en esta investigación para tomar decisiones fundamentadas sobre los recursos a

utilizar en el diseño de tareas y en la selección de materiales didácticos pertinentes para un curso introductorio de álgebra lineal.

1.4 Análisis cognitivos del valor y vector propio

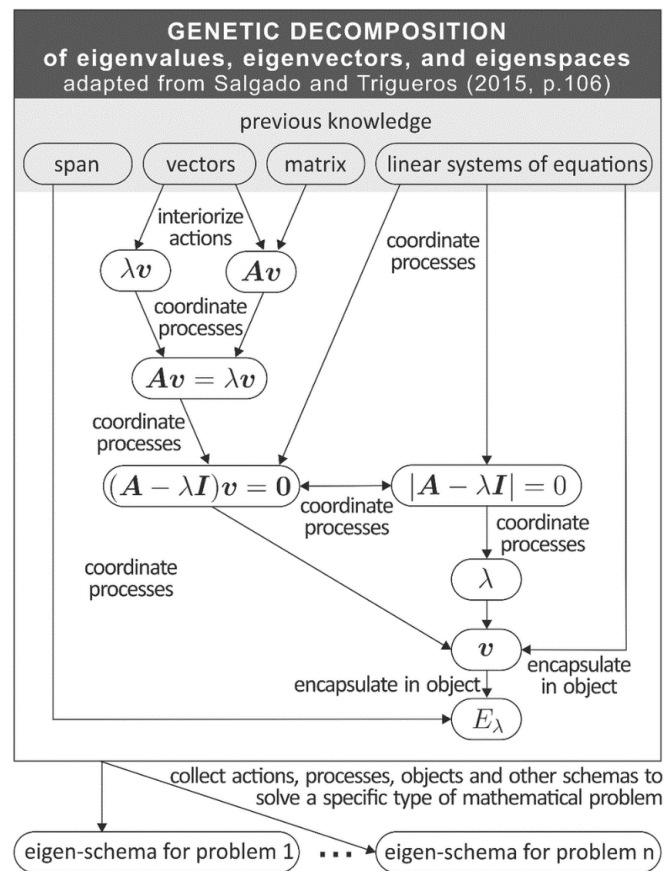
Los modelos cognitivos previos sobre el valor y vector propio desempeñan un papel fundamental en esta investigación, ya que revelan las estructuras y mecanismos mentales que algunos estudiantes han empleado para comprender dicho concepto. Analizar estos modelos es esencial para identificar tanto los obstáculos como los aciertos documentados en estudios anteriores. Esta revisión no solo enriquece el marco teórico de referencia, sino que también proporciona elementos clave para el diseño y justificación del modelo cognitivo que más adelante se propone.

En el marco de la teoría APOE, se han desarrollado investigaciones significativas centradas en la construcción del concepto de valor y vector propio. Entre ellas, se destacan los trabajos de Salgado y Trigueros (2015), Parraguez et al. (2020) y Betancur (2020), quienes han presentado y discutido descomposiciones genéticas que permiten comprender los procesos mentales implicados en el aprendizaje de estos conceptos.

Por un lado, Salgado y Trigueros (2015) diseñaron una descomposición genética que integra la teoría APOE con la teoría de Modelos y Modelado, a partir del análisis de una situación de modelado económico centrada en el problema de empleo-desempleo. Este enfoque propició que los estudiantes se involucraran activamente en el proceso de aprendizaje, permitiéndoles explorar la ecuación propia desde una situación contextualizada. Uno de los principales hallazgos fue que, aunque los estudiantes mostraron dificultades para reconocer la naturaleza del espacio propio y su dimensión, cerca del 40 % logró establecer conexiones entre

conceptos antes de la intervención docente. Esto facilitó la transición hacia la formalización matemática de forma más significativa. Salgado y Trigueros (2015, p. 106) presentan como resultado de su investigación, una descomposición genética del concepto de valor y vector propio representada en la Figura 3.

Figura 3.
Descomposición genética del concepto de valor, vector y espacio propio.



Nota. La Figura 3 es tomada de Salgado y Trigueros (2015, p. 106).

La descomposición genética que proponen (ver Figura 4) parte de conocimientos previos como sistemas de ecuaciones lineales, matrices, vectores y espacios generados. Inicialmente, se considera que los estudiantes realizan acciones elementales sobre matrices y vectores (por

ejemplo, \boxed{Av} y $\boxed{E^{10}}$) que luego se interiorizan en procesos. Estas interiorizaciones permiten establecer relaciones entre el vector original y su imagen bajo la transformación, promoviendo una comprensión de la dirección y el escalamiento característico de los vectores propios.

La comparación entre \boxed{Av} y $\boxed{\lambda v}$ lleva a los estudiantes a plantear la ecuación característica $\boxed{(A - \lambda I)v = 0}$, la cual se coordina con el conocimiento previo sobre sistemas homogéneos. Esto permite encapsular tanto el valor propio como el vector propio en objetos mentales más complejos, que se integran en esquemas que permiten resolver problemas relacionados con valores y vectores propios. El espacio propio, a su vez, es concebido como el núcleo de la matriz $\boxed{A - \lambda I}$, lo que requiere coordinar conocimientos algebraicos y geométricos.

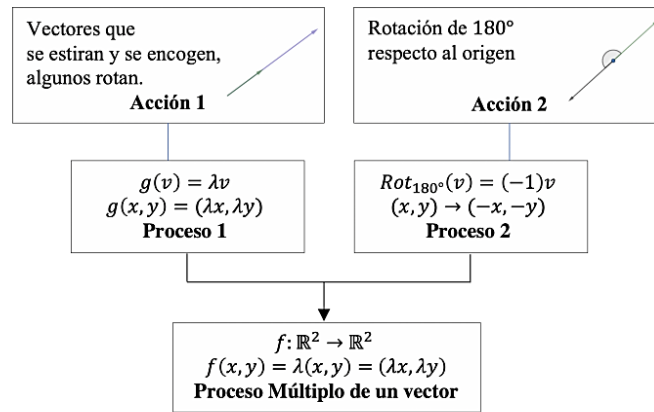
Una característica destacada de esta descomposición es que no plantea un recorrido lineal único, sino que permite diversas coordinaciones entre procesos previos que converge en la construcción de nuevos objetos. Este mecanismo de encapsulación flexible de conceptos a partir de múltiples coordinaciones constituye uno de los principales aportes del estudio, ya que refleja la complejidad y riqueza cognitiva que implica comprender los conceptos de valor, vector y espacio propio. Este enfoque, centrado en la coordinación de procesos previamente estructurados, es retomado en esta investigación como base para el diseño del modelo cognitivo que articula la comprensión de estos conceptos con matrices, transformaciones lineales y sistemas de ecuaciones.

Por otro lado, Parraguez et al. (2020) proponen dos modelos cognitivos que representan una ruta de construcción conceptual, también basada en la teoría APOE, pero orientada a la transición desde la enseñanza secundaria hacia la universidad. Estos modelos describen la

evolución del pensamiento matemático en torno al valor y vector propio en \mathbb{R}^2 , enfatizando el desarrollo de una comprensión geométrica. En el primer modelo, se resalta la rotación de 180° respecto al origen como proceso clave para entender el inverso aditivo de un vector y la noción de múltiplo escalar. Estas construcciones iniciales son fundamentales para que los estudiantes universitarios puedan dar sentido a la ecuación propia.

Figura 4.

DG_0 hipotética de los conceptos previos para la construcción de valor y vector propio en \mathbb{R}^2



DG_0
 \mathbb{R}^2

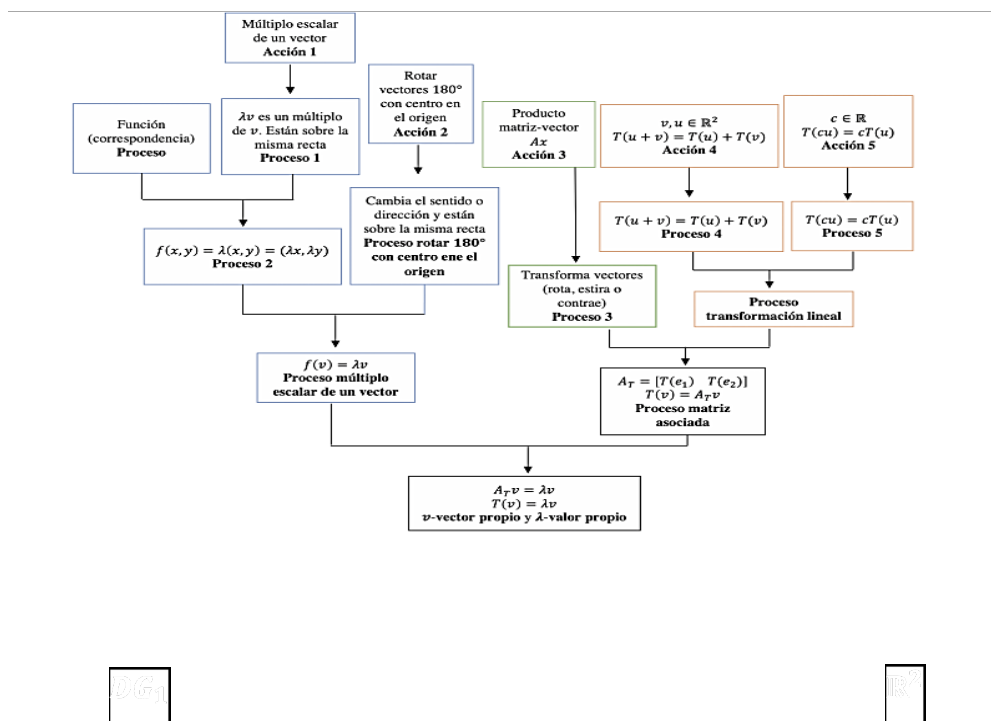
Nota. Imagen tomada de Parraguez et al., (2020) (p. 11).

La figura 4 muestra una descomposición genética refinada de los conceptos previos para la construcción de valor y vector propio en \mathbb{R}^2 en donde Parraguez et al. (2022) examinan los conocimientos previos necesarios para abordar los conceptos de valor y vector propio en \mathbb{R}^2 en la educación secundaria. Destacan la rotación de 180° respecto al origen y la multiplicación por un escalar de vectores como fundamentales para este propósito.

En el segundo modelo, se destaca la importancia de la transformación lineal como acción, y el efecto geométrico que ciertas matrices tienen sobre los vectores del plano. Así, el vector propio se comprende como aquel cuya dirección se conserva bajo la transformación, mientras que el valor propio se interpreta como el escalar asociado a dicha conservación. Estos modelos ofrecen una ruta de desarrollo cognitivo gradual, destacando los mecanismos mentales y estructuras conceptuales que subyacen al aprendizaje del tema.

Figura 5.

DG_1 hipotética de los conceptos de valor y vector propio en \mathbb{R}^2



Nota. Imagen tomada de Parraguez et al. (2020, p.11).

La figura 5. muestra una descomposición genética refinada de los conceptos previos para la construcción de valor y vector propio en \mathbb{R}^2 . Explora cómo estudiantes universitarios de

primer año pueden construir el concepto de valor y vector propio en \mathbb{R}^2 desde una perspectiva geométrica. Se destaca la importancia de acciones específicas relacionadas con la transformación lineal y el producto matriz-vector. La interiorización de estas acciones es fundamental para que los estudiantes puedan caracterizar las transformaciones lineales y reconocer la diferencia entre transformaciones lineales y no lineales. Como la interiorización de transformaciones lineales y el producto matriz-vector, para comprender cómo estas acciones afectan a los vectores en términos de rotación, estiramiento o compresión. Se muestra cómo ciertos valores en las matrices determinan efectos geométricos específicos al multiplicar vectores. Además, se establece la relación entre el proceso de multiplicación escalar y las propiedades de las transformaciones lineales, permitiendo la identificación de valores y vectores propios.

A diferencia de la propuesta de Salgado y Trigueros (2015), los modelos de Parraguez et al. (2020) se centran en representar la progresión de ideas en distintos niveles educativos y subrayan la importancia de una base geométrica desde etapas tempranas. No obstante, ambas investigaciones comparten la idea de que los conceptos de valor y vector propio deben construirse a partir de la coordinación de procesos previos y que su comprensión se beneficia al integrar aspectos algebraicos y geométricos.

Estos antecedentes, con sus respectivas descomposiciones genéticas, permiten identificar mecanismos fundamentales como la encapsulación y la coordinación de procesos previos, los cuales serán retomados y adaptados en el modelo cognitivo propuesto en este estudio, en donde se busca articular estas ideas con las nociones de sistemas de ecuaciones, matrices y transformaciones lineales.

2. Planteamiento del Problema

Como se mostró en el capítulo anterior, las dificultades relacionadas con la comprensión de los conceptos del álgebra lineal son un tema de interés para diversos investigadores en Educación Matemática (Dorier, 2000; Oktaç y Trigueros, 2010; Thomas y Stewart, 2011; Stewart et al., 2018). El Cálculo y el Álgebra Lineal son las principales áreas de las matemáticas que se incluyen en los planes curriculares de estudiantes universitarios de ingeniería y ciencias.

Es posible divisar desde la última década del siglo XX cuáles son los conceptos y el tipo de problemas que deben incluirse particularmente, en un curso inicial de álgebra lineal. En 1993 integrantes de Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG, por sus siglas en inglés), se ocuparon de algunas inquietudes relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal; como resultado presentaron algunas recomendaciones para el diseño y desarrollo de un primer curso de álgebra lineal (Carlson et al., 1993). Las recomendaciones del LACSG se basaron principalmente en hacer énfasis en las interpretaciones geométricas, establecieron que la incorporación del pensamiento geométrico en la enseñanza del primer curso de álgebra lineal tiene una contribución significativa para promover la comprensión de los estudiantes (Dorier, 2000; Harel, 1989a, 1989b, 1990). En 2022, integrantes de LACSG realizan una nueva investigación actualizando estas recomendaciones.

Las nuevas recomendaciones abordan la importancia del álgebra lineal en la educación universitaria, destacando su relevancia en diversas disciplinas como Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas, así como su papel fundamental en la resolución de problemas del mundo real, centrándose en las necesidades de la industria para establecer los conceptos fundamentales en un primer y segundo curso del álgebra lineal. Stewart et al. (2022).destacan que la comprensión abstracta y conceptual es necesaria para el futuro éxito de los estudiantes en

álgebra lineal. Argumentan que la comprensión abstracta permite que los estudiantes generalicen conceptos y logren aplicarlos en una variedad de contextos; mientras que la comprensión conceptual les proporciona una base sólida para entender los fundamentos teóricos y estructurales de esos conceptos. Al equilibrar ambas formas de comprensión, los estudiantes pueden desarrollar habilidades matemáticas más sólidas y estar mejor preparados para enfrentar desafíos tanto en el ámbito académico como en el profesional (Stewart et al., 2022).

Dada la problemática que se aborda en esta investigación, interesa destacar las recomendaciones para un primer curso de álgebra lineal. Para iniciar Stewart et al. (2022) proponen una lista de temas esenciales que incluyen los siguiente conceptos: sistemas de ecuaciones lineales, propiedades de \mathbb{R}^n , álgebra de matrices, transformaciones lineales, matrices invertibles, valores y vectores propios, determinante de una matriz, productos internos, matrices simétricas y diagonalización ortogonal, entre otros. De la misma manera que Stewart et al. Se considera que estos temas forman la base fundamental para una comprensión sólida del álgebra lineal y su aplicación en diversas áreas. Además, Stewart et al. (2022) sugieren que los estudiantes de matemáticas y otros campos relacionados, tomen al menos dos cursos de álgebra lineal para profundizar en su comprensión y habilidades analíticas.

Con base en Stewart et al., (2022), resulta crucial reconocer la utilidad y relevancia de abordar la problemática curricular de un primer curso de álgebra lineal a nivel universitario. La comprensión abstracta y conceptual, resaltada en la investigación, emerge como un elemento fundamental para el éxito académico y profesional de los estudiantes en este campo. Al incorporar estos aspectos en el diseño curricular del curso, es posible fomentar un aprendizaje más profundo y significativo, preparando a los estudiantes para enfrentar los desafíos matemáticos de manera más efectiva. Además, la consideración de las recomendaciones de la

investigación puede contribuir a mejorar la calidad y pertinencia del programa académico, asegurando que los estudiantes construyan conocimientos y desarrollen habilidades que fomenten su éxito profesional.

La presentación tradicional de los conceptos del álgebra lineal no fomenta la conexión entre los múltiples conceptos estudiados previamente que permita guiar al estudiante en la construcción de un concepto unificador (Dorier, 2000). El aprendizaje del álgebra lineal se basa principalmente en la memorización y aplicación de algoritmos algebraicos que no permiten la reflexión del estudiante (Campos, 2017). Por ejemplo, en el caso del valor y vector propio Thomas y Stewart (2011) profundiza en cómo los estudiantes comprenden los conceptos de valores y vectores propios en álgebra lineal. Revelan que los estudiantes a menudo tienen dificultades con la definición de estos conceptos, prefiriendo enfoques procedimentales en lugar de conceptuales. Aunque reconocen la importancia de las definiciones formales, les resulta complicado comprenderlas y aplicarlas en situaciones simples. Por ejemplo, resalta la necesidad

de explicar claramente cómo se deriva la segunda ecuación $(A - I)x = 0$ a partir de la primera $Ax = x$. Muchos estudiantes no perciben este proceso como algo sencillo. Los

diferentes pasos en la primera ecuación pueden confundir a los estudiantes sobre a qué se refiere el término " I ", y la enseñanza puede desplazar el enfoque hacia " I " en lugar de " A ". Parece que los estudiantes carecen de una comprensión clara de cómo se obtiene la segunda ecuación a partir de la primera, lo que sugiere la necesidad de una explicación más detallada en la

enseñanza. Es crucial que los estudiantes entiendan que la " I " utilizada en el proceso es una

matriz $\begin{matrix} n \times n \\ \square \end{matrix}$, y que es el vector $\begin{matrix} x \\ \square \end{matrix}$ lo que se multiplica por esta identidad. Estos hallazgos indican que los conceptos se introducen en clase a través de definiciones matemáticas formales sin proporcionar una motivación clara, lo que lleva a los estudiantes a quedarse con la representación algebraica y matricial del concepto, en lugar de desarrollar una comprensión más profunda.

La Universidad Industrial de Santander no es ajena a esta problemática, pues hasta el primer semestre de 2023 el Plan de asignatura de álgebra lineal ofrecía a los profesores cuatro posibles organizaciones para desarrollar un curso de álgebra lineal I, una organización: Clásica, Categórica, Moderna y Matricial. Estas organizaciones surgen de la evolución de un curso planteado en la segunda mitad del siglo XX llamado “Álgebra superior” obligatorio para todos los estudiantes de Ciencias e Ingeniería; este curso tenía como objetivo apoyar el desarrollo de los cursos de cálculo. Se estudiaban principalmente conceptos como: vectores, álgebra de matrices, inducción, teorema del binomio y números complejos. Entrando al siglo XXI el curso se enfocó hacia el estudio del álgebra lineal y recibe el nombre de “Álgebra lineal I”. El objetivo de este nuevo curso es formar al estudiante en el estudio de fenómenos lineales en varias variables con herramientas algebraicas; los contenidos se centran en: Geometría vectorial en $\begin{matrix} \mathbb{R}^n \\ \square \end{matrix}$, sistemas de ecuaciones lineales y álgebra de matrices. Intentando homogenizar los contenidos del curso surgen los enfoques ya mencionados principalmente con los libros guía y los contenidos que se muestran a continuación:

Tabla 1:
Contenidos del curso de álgebra lineal

Clásico Apostol Vol I y Grossman (2008)	Categorico Sabogal e Isaacs (2004)	Moderno Poole (2011)	Matricial Anton (2001)
Preliminares	Los Escalares	Vectores	Sistemas de ecuaciones lineales y matrices
\mathbb{R}^n como espacio vectorial y espacio euclidiano	\mathbb{R}^n como espacio vectorial	Sistemas de ecuaciones lineales	La función determinante
Matrices y sistemas de ecuaciones lineales.	Transformacion es lineales y Matrices	Matrices	Introducción a los vectores (geométricos)
Determinantes	\mathbb{R}^n como espacio euclídeo	Vectores y valores propios	Espacios vectoriales
Determinantes			

Los enfoques mencionados se pueden ver a detalle en el Anexo 1. muestran que cada uno tiene contenidos diversos que se apoyan en diferentes libros de texto. Esto muestra que el desarrollo de un curso dependerá en gran medida del enfoque que tome cada profesor.

Con todo lo anterior surge, una pregunta sobre ¿Qué aprendizaje logra un estudiante que aprueba un curso de álgebra lineal I en la Universidad Industrial de Santander? La respuesta a esta pregunta debería ser clara, coherente y de interés para los profesores que desarrollan el curso y aquellos que coordinan los diferentes programas en los que están inscritos los estudiantes.

Actualmente, la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander atiende un promedio de 1009 estudiantes de ingeniería, matemáticas y física en el curso de álgebra lineal I y 255 estudiantes de ingeniería eléctrica, electrónica y de matemáticas en un curso de álgebra lineal II. Sin tener evidencias del aprendizaje en un primer curso de álgebra lineal o por lo menos un consolidado sobre los conceptos estudiados ¿qué conceptos previos

asumen los profesores que necesita un estudiante para desarrollar un segundo curso de álgebra lineal?

Para dar respuesta a las preguntas que surgen de esta problemática, sugerimos definir un concepto central como guía en el desarrollo de un curso de álgebra lineal I. Nos referimos a un concepto central, como aquel concepto que para su construcción necesita conectarse con otros conceptos fundamentales de la disciplina; además, un concepto central debe permitirle a los estudiantes acercarse a la naturaleza abstracta y unificadora, en este caso del álgebra lineal (Dorier et al., 2000). Por ejemplo, para un curso de Cálculo I resulta evidente que el concepto central es el de Derivada, ya que sirve como vínculo esencial entre varios conceptos matemáticos y aplicaciones prácticas. Permite analizar cambios instantáneos y tasas de variación en funciones, así como explorar propiedades como máximos y mínimos. Además, es fundamental para comprender la relación entre diferenciación e integración y su aplicación se extiende a campos como la física, la ingeniería y la economía.

Las aplicaciones del álgebra lineal siguen creciendo en diferentes campos, han tomado un papel protagónico en la motivación, el aprendizaje y la comprensión del funcionamiento de las ideas en álgebra lineal. Las decisiones sobre qué y cómo enseñar matemáticas pueden tener en cuenta en cómo se utilizan actualmente las ideas en la vida profesional. La educación debe responder a las necesidades de la nueva generación de profesionales capacitados en análisis de datos, aprendizaje automático e inteligencia artificial (Stewart et al., 2022).

Por ejemplo, la importancia que tiene el cálculo de los valores propios y de los vectores propios de una matriz simétrica se centra en las múltiples aplicaciones a la ingeniería. Entre las que cabe destacar, el problema de la diagonalización de una matriz, el cálculo de los momentos

de inercia y de los ejes principales de inercia de un sólido rígido, o de las frecuencias propias de oscilación de un sistema oscilante, entre otras (Cuéllar, 2022; Isanta, 2014).

Teniendo en cuenta los aspectos desarrollados en este capítulo identificamos que el concepto de valor y vector propio funciona como un buen concepto central en un primer curso de álgebra lineal; pues este concepto puede desarrollar más intereses en los estudiantes por su aplicabilidad en problemas actuales. Además, el concepto de valor y vector propio en su construcción involucra conceptos como vector, matriz, determinante, sistemas de ecuaciones lineales, entre otros, que son considerados como conceptos fundamentales en un curso de álgebra lineal (Stewart et al., 2022). Cuando tenemos un concepto central, este nos permite establecer relaciones entre otros conceptos, de tal manera que es posible tomar decisiones respecto al diseño y desarrollo de un curso, en este caso, de un curso básico de álgebra lineal.

Esto nos lleva a plantearnos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué mecanismos, estructuras mentales y relaciones entre los conceptos fundamentales del álgebra lineal debe construir un estudiante universitario de primer año para comprender el concepto de valor y vector propio?

Para dar cuenta de las posibles respuestas a la pregunta anterior, se proponen el siguiente objetivo general de la investigación

Objetivo general:

Diseñar y validar un modelo cognitivo del concepto de valor y vector propio sustentado en las relaciones que un estudiante universitario de primer año puede establecer con los sistemas de ecuaciones lineales y transformación lineal como matriz.

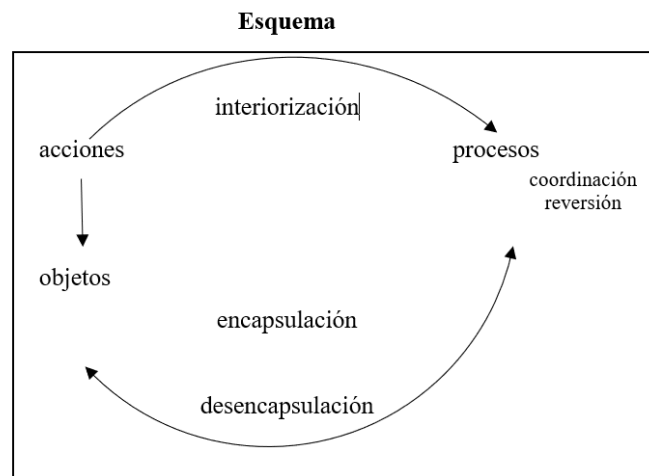
A continuación, se presentan los elementos teóricos y metodológicos que son usados en esta investigación para abordar el objetivo planteado.

3. Teoría APOE: Constructos teóricos y metodológicos

La teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es una teoría de la Educación Matemática desarrollada en sus inicios por Ed Dubinsky y el grupo de investigación Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC por sus siglas en inglés) a partir de la epistemología de Piaget sobre cómo se pasa de un estado de conocimiento a otro. Esta es una teoría cognitiva que permite describir cómo aprende los conceptos matemáticos un individuo y aporta aspectos clave para su enseñanza. Para esto define constructos teóricos principalmente identificados como mecanismos y estructuras mentales que organiza y relaciona en modelos cognitivos denominados como descomposiciones genéticas.

Figura 6.

Estructuras y mecanismos mentales



Nota. Imagen tomada de Arnon et al. (2014, p.18)

La Figura 6. muestra las estructuras mentales y la manera como se relacionan a través de mecanismos que propician su construcción. En la siguiente sección se explica con detalle cada estructura, así como la manera como puede ser lograda a través de uno o más mecanismos.

3.1. Estructuras y Mecanismo mentales

Esta sección parte de la explicación de las Acciones como las estructuras mentales más básicas dentro de la teoría APOE. Aunque son iniciales, cumplen un papel fundamental en la construcción de conceptos o nociones matemáticas. En la Figura 6 se presenta un modelo que ejemplifica cómo puede comenzar la construcción de un nuevo concepto matemático. Dado que la teoría APOE se fundamenta en el enfoque constructivista de Piaget, se asume la existencia previa de estructuras mentales representadas como Objetos que el individuo ya ha interiorizado. A partir de estas estructuras, la persona puede iniciar la aplicación de Acciones, las cuales constituyen transformaciones explícitas sobre los objetos y pueden conducir, a través de mecanismos de interiorización y encapsulamiento, a la construcción de un nuevo Objeto matemático (Dubinsky & McDonald, 2001; Arnon et al., 2014).

Una Acción es una transformación o un conjunto de transformaciones que pueden ser aplicadas sobre un Objeto construido previamente. Las Acciones son percibidas por el individuo como algo externo. Esta estructura se caracteriza generalmente por realizarse paso a paso en un orden específico; en diferentes investigaciones las Acciones se han relacionado con la aplicación de algoritmos o procedimientos. Una Acción puede consistir en una simple respuesta o en una secuencia de respuestas frente a una instrucción directa.

Por ejemplo, un individuo que evidencia una concepción Acción del concepto de valor y vector propio de una transformación lineal necesita conocer tanto al vector como a la transformación lineal de forma explícita, para poder evaluar directamente el vector en la

transformación lineal y determinar si la imagen obtenida es, o no, un múltiplo de dicho vector; en caso afirmativo puede nombrar al vector como un vector propio de la transformación lineal.

La teoría APOE propone que la evolución de las Acciones surge a partir de la reflexión que el individuo genera gracias a su experiencia, como resultado de aplicarlas repetidamente al resolver situaciones que involucran el concepto en construcción.

Las transformaciones que se aplican gracias a un estímulo externo se interiorizan en un Proceso; la interiorización es el mecanismo que permite la reflexión del individuo sobre aquello que realiza. Tal como menciona Dubinsky (1996):

Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. En contraste con una acción, el individuo percibe el proceso como algo interno, y bajo su control, en lugar de algo que se hace como respuesta a señales externas (Dubinsky, 1997, p. 96).

La estructura Proceso es el resultado de la interiorización de una Acción. A diferencia de la Acción, el individuo ya no necesita ejecutar los pasos de forma explícita y secuencial; en cambio, puede anticipar los resultados, analizar su validez y, si lo considera conveniente, omitir o reordenar los pasos involucrados (Dubinsky & McDonald, 2001). Esta capacidad de reflexión previa es un indicador clave del paso de la Acción al Proceso.

Asimismo, la teoría explica que un Proceso también puede surgir de la coordinación de dos o más procesos ya interiorizados. El mecanismo de coordinación permite poner dos o más Procesos juntos y estructurarlos en un único Proceso (Arnon et al., 2014). Tal mecanismo ha sido utilizado en investigaciones previas para analizar la construcción de distintos conceptos matemáticos, tales como la transformación lineal (Parraguez, 2015), la composición de funciones

(Serrano, 2019) y los valores y vectores propios (Betancur Sánchez et al., 2022; Salgado & Trigueros, 2014).

Tomando nuevamente como ejemplo al concepto de valor y vector propio, una concepción Proceso consiste en la habilidad del individuo de pensar en el vector propio de una transformación lineal $T: V \rightarrow V$, como un vector v , del espacio vectorial, que satisface la condición $T(v) = \lambda v$, sin necesidad de verificar paso a paso dicha igualdad. En este nivel de comprensión, el énfasis no está en calcular manualmente los valores o vectores propios, sino en reconocer el papel funcional que cumple la relación $T(v) = \lambda v$ en el sistema algebraico. Así, el estudiante puede reflexionar sobre el significado estructural de esta ecuación, por ejemplo, al pensar en la dirección del vector o su invariancia bajo la transformación. Este tipo de concepción permite coordinar el razonamiento algebraico con interpretaciones geométricas del fenómeno (Betancur et al., 2022; Salgado & Trigueros, 2014).

El mecanismo de coordinación es fundamental para la evolución de las estructuras mentales asociadas a un concepto matemático, ya que permite integrar múltiples Procesos en una única estructura coherente. Esta integración posibilita su encapsulación y, por lo tanto, su evolución en un Objeto. Por ejemplo, en la construcción del concepto de función compuesta, se requiere coordinar los procesos de evaluación de dos funciones diferentes para generar un nuevo proceso funcional unificado (Serrano, 2019).

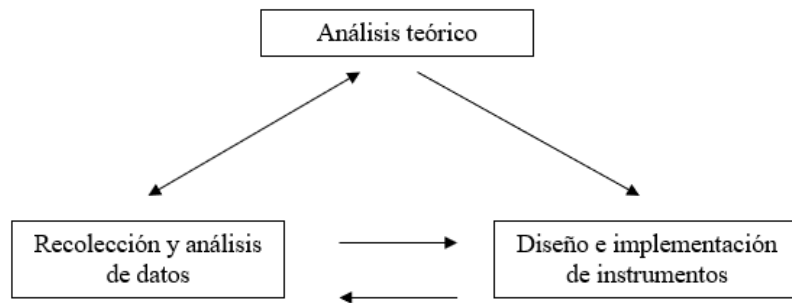
Un Proceso evoluciona en un Objeto gracias al mecanismo de encapsulación; este mecanismo permite el paso de una estructura dinámica a una estática (Arnon et al., 2014). De tal manera que el foco de atención del individuo está en determinar el tipo de nuevas Acciones que son posibles aplicar sobre él para generar Objetos de la misma naturaleza. Otra manera de promover la encapsulación se relaciona con estructurar el concepto como un elemento de un

conjunto con estructura. Por ejemplo, al alcanzar una concepción Objeto del vector propio, el individuo puede operar sobre él de diversas maneras: comparar vectores propios asociados a un mismo valor propio y determinar si uno es combinación lineal del otro; aplicar iterativamente la transformación lineal sobre el vector propio para observar patrones; o considerarlo como un elemento del subespacio propio sobre el cual actúa la transformación. Estas operaciones reflejan un nivel avanzado de comprensión en el que el vector propio es tratado como una entidad con propiedades que se pueden explorar, más allá de su simple definición algebraica (Betancur et al., 2022; Roa-Fuentes & Oktaç, 2010).

3.2. Ciclo de Investigación

La teoría APOE propone un ciclo de investigación que fundamenta el diseño, la implementación y validación de descomposiciones genéticas (Figura 8). Este ciclo está compuesto por tres componentes que se describen a continuación.

Figura 7.
Ciclo de investigación de la Teoría APOE



Nota. Imagen tomada de Arnon et al., 2014 (p. 94)

La investigación parte de un Análisis Teórico del concepto matemático bajo consideración con miras a establecer una descomposición genética preliminar del concepto. Descomposición genética es una descripción de los mecanismos y construcciones mentales que un individuo puede hacer para construir su comprensión de un concepto matemático (Dubinsky, 1997); este modelo cognitivo es señalado como el corazón de la teoría APOE (Arnon et al., 2014)

Como indican las flechas en la Figura 8, las tres componentes del ciclo de investigación se relacionan entre sí. De modo tal, que el Análisis Teórico sirve de impulso en el Diseño y la implementación de la enseñanza a través de actividades que tiene como propósito fomentar la comprensión de las matemáticas involucradas. Las actividades y los ejercicios propuestos en la segunda fase son diseñados para ayudar a los estudiantes en la construcción de Acciones, interiorizarlas en Procesos, encapsular Procesos en Objetos, y coordinar dos o más Procesos para construir nuevos Procesos. La implementación de la enseñanza ofrece un escenario oportuno para La recopilación y el análisis de datos, que se realiza a través de los lentes de la Teoría APOE (Arnon et al. 2014). La implementación de la enseñanza ofrece un escenario idóneo para la recolección y el análisis de datos, llevados a cabo desde los marcos interpretativos que ofrece la teoría APOE. En esta etapa, el análisis se centra en responder dos preguntas clave: (1) ¿realizaron los estudiantes las construcciones mentales previstas por el análisis teórico? y (2) ¿se logró el aprendizaje significativo del contenido matemático?

En caso de que la respuesta a la primera pregunta sea negativa, se debe revisar el diseño de las actividades (fase dos). Si, en cambio, la primera pregunta tiene una respuesta positiva pero la segunda resulta negativa, entonces debe reconsiderarse el análisis teórico inicial (fase uno). En ambos casos, el ciclo se repite hasta que ambas preguntas obtienen respuestas afirmativas y el

docente-investigador considere que los estudiantes han alcanzado una comprensión adecuada de los conceptos matemáticos. En otras palabras, el ciclo continúa hasta que exista una coherencia entre la evidencia empírica y las construcciones mentales esperadas teóricamente (Arnon et al., 2014). Como parte final de la investigación se proponen sugerencias pedagógicas para la implementación y direcciones para investigación futura (Dubinsky, 1997)

4. Método de la investigación

El método en esta investigación toma como referente las componentes del Ciclo de APOE, cada componente es diseñada y desarrollada para dar cumplimiento al objetivo de investigación.

4.1. Análisis Teórico

En esta componente se explora el concepto de valor y vector propio. Para desarrollarla, se utilizan diferentes recursos, como el análisis de libros de texto y las descomposiciones genéticas previas, en donde se destaquen las relaciones que se logren establecer con otros conceptos fundamentales del álgebra lineal. El objetivo final será presentar un modelo (descomposición genética) que describa las construcciones previas, así como las estructuras y mecanismos mentales implicados en el aprendizaje del concepto (Arnon et al., 2014).

Una vez completada la descomposición, se destacan algunas relaciones entre los conceptos fundamentales que contribuyen a la construcción del concepto de valor y vector propio.

Esta componente parte de un análisis sobre el concepto de valor y vector propio y su importancia en la ingeniería y cómo este echo resulta ser un insumo importante para el desarrollo

de un curso de álgebra lineal. Además, se presentan otras descomposiciones genéticas sobre el concepto de valor y vector propio para destacar las relaciones que se logran establecer con otros conceptos fundamentales del álgebra lineal. Con base en lo anterior se diseña un modelo de clase que busca la construcción del valor y vector propio como eje central de un curso de álgebra lineal para estudiantes universitarios de primer año.

4.1.1 La importancia del concepto del valor y vector propio en la ingeniería.

Historia del concepto de valor y vector propio

La evolución histórica del concepto de valor y vector propio constituye un relato de progreso matemático y evolución terminológica, abarcando siglos de exploración y descubrimiento. Desde sus raíces en el siglo XVIII (inspirados por problemas mecánicos) hasta su refinamiento en el siglo XIX-XX (formalización del concepto), este concepto ha experimentado diversas transformaciones y ha sido moldeado por una amplia gama de disciplinas matemáticas (como la física, la ingeniería, la economía, la inteligencia artificial, entre otras).

Los primeros indicios del estudio de los valores y vectores propios se remontan al siglo XVIII, cuando figuras como D'Alembert y Lagrange comenzaron a abordar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, especialmente aquellas relacionadas con problemas físicos como el de la cuerda vibrante. D'Alembert, en particular, se destacó en este campo durante el siglo XVIII, abordando el desafío de la cuerda vibrante, un tema que atrajo una atención considerable y contribuyó significativamente al desarrollo del análisis matemático en esa época (Martínez, 2006).

En su "Tratado de Dinámica" de 1743, D'Alembert planteó el problema de determinar las oscilaciones de una cuerda sujeta por uno de sus extremos y cargada con dos masas. Para

resolver este problema, formuló un sistema de ecuaciones diferenciales que condujo a una

ecuación diferencial general de la forma $\frac{d^2u}{dt^2} + \lambda u = 0$, donde λ es un valor propio del operador

definido por $\frac{d^2}{dt^2}$. Aunque su enfoque solo determinó el primer valor propio, se considera un antecedente notable de la teoría, este trabajo contribuyó al nacimiento de la teoría espectral como una disciplina matemática autónoma, desligada de consideraciones puramente mecánicas (Martínez, 2006).

El surgimiento de la teoría de matrices en los siglos XVIII y XIX proporcionó un marco formal para el estudio de los valores y vectores propios. Matemáticos como Euler y Joseph Fourier comenzaron a investigar problemas relacionados con valores y vectores propios dentro del contexto de ecuaciones diferenciales lineales y sistemas de ecuaciones algebraicas lineales. A pesar de estos avances, la terminología y la comprensión formal de estos conceptos aún estaban en proceso de desarrollo y consolidación (Hawkins, 1975).

Por otro lado, Lagrange, en su "Memoria sobre la Solución de Diferentes Problemas de Cálculo Integral", propone un método general para determinar el movimiento de sistemas de cuerpos oscilantes alrededor de sus puntos de equilibrio. Lagrange formula un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen estas oscilaciones y las integra utilizando un método que implica la introducción de constantes indeterminadas. Luego, mediante un proceso de eliminación algebraica, Lagrange reduce el problema a la resolución de dos sistemas de

ecuaciones de la forma $AX = \rho^2 X$ y $A^T Y = \rho^2 Y$, donde A es una matriz que representa la naturaleza del problema y ρ^2 son los valores propios asociados. Lagrange demuestra que ambos

sistemas tienen los mismos valores propios y que sus vectores propios son ortogonales entre sí (los vectores propios son siempre linealmente independiente pero cuando la matriz es simétrica, los vectores propios siempre son ortogonales) (Martínez, 2006). Lagrange mostró que, independientemente de si las raíces de esta ecuación eran reales o complejas, las soluciones siempre eran reales (esto es porque la matriz es simétrica). Sin embargo, la naturaleza de las raíces era relevante para el comportamiento de las soluciones. Luego, Lagrange estaba más interesado en la naturaleza del problema físico que en establecer un problema puramente matemático (Hawkins, 1975).

Este enfoque de Lagrange es notablemente avanzado y representa un método moderno para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. Aunque su enfoque es principalmente mecánico, Lagrange contribuye significativamente al avance de la teoría espectral, influyendo en futuros trabajos, como los de Cauchy (Martínez, 2006).

Laplace, al leer el trabajo de Lagrange, tomó una posición diferente sobre la cuestión de la naturaleza de los valores propios. Mientras que Lagrange adoptó una postura más orientada hacia el problema físico, Laplace abordó la cuestión desde una perspectiva más matemática y consideró que era importante determinar si las raíces podían ser imaginarias y en qué número podrían ocurrir. Sin embargo, Laplace no trabajó en esta cuestión de inmediato y pasaron varios años antes de que volviera a ella (Hawkins, 1975). Estos trabajos tanto de Lagrange como de Laplace, motivados por la teoría física ejercieron una gran influencia en el trabajo de Cauchy (Martínez, 2006).

Así, Cauchy al igual que Lagrange, reconoció que el polinomio característico es un determinante, y empleó determinantes en su demostración de que los valores propios de una

matriz simétrica real de $n \times n$ son reales, extendiendo así el enfoque de Lagrange al lenguaje de los determinantes y a n variables (Martínez, 2006).

El término "valor propio" comenzó a aparecer en la literatura matemática hacia el siglo XIX. Cauchy, en su trabajo sobre determinantes simétricos en 1829, introdujo el término "équation caractéristique", que se traduce como "ecuación característica". Cauchy reconoció que las soluciones de esta ecuación tenían propiedades importantes que se relacionaban con problemas en la mecánica celeste, pero la terminología moderna aún no había sido formalizada.

Finalmente, la teoría de Sturm-Liouville, presentada por Charles Sturm y Joseph Liouville entre 1836 y 1837, constituyó un avance significativo en el análisis matemático al introducir una nueva rama centrada en la ecuación diferencial lineal de segundo orden. Esta ecuación, junto con sus condiciones de frontera, dio lugar a tres problemas principales: el estudio de los valores propios, el comportamiento cualitativo de las funciones propias (o eigenfunciones), y la expansión de funciones arbitrarias en términos de estas funciones propias (Martínez, 2006).

Sturm y Liouville adoptaron un enfoque novedoso al considerar las propiedades de las soluciones directamente desde la ecuación diferencial, sin necesidad de encontrar expresiones analíticas explícitas. Este cambio de perspectiva representó una nueva concepción en la teoría de ecuaciones diferenciales, orientada hacia la investigación de propiedades cualitativas de las soluciones en lugar de solo su determinación analítica (Martínez, 2006).

En particular, Sturm se centró en el estudio del comportamiento cualitativo de las soluciones, mostrando cómo variaban con parámetros específicos y examinando propiedades como ceros, cambios de signo y extremos. Sus investigaciones condujeron a la identificación de

una familia continua de soluciones, cada una asociada con un valor propio real distinto, y establecieron importantes teoremas sobre las propiedades de estas soluciones, sentando así las bases de la teoría espectral.

A pesar de los avances significativos realizados por Sturm y Liouville en la segunda mitad del siglo XIX, su teoría tardó en ser aceptada debido a la naturaleza cualitativa de sus resultados, que no generaban un interés generalizado debido a la falta de teoremas de existencia concretos.

Entre 1836 y 1900, se produjeron avances importantes en otros ámbitos de la teoría espectral, lo que permitió a la comunidad matemática madurar y apreciar finalmente el trabajo de Sturm y Liouville. La memoria de Cauchy de 1829 fue crucial en este desarrollo, ya que motivó avances significativos en la teoría espectral de matrices hacia 1870, impulsados por matemáticos como Cayley, Hermite, Sylvester, Frobenius y Weierstrass.

El establecimiento definitivo de la Teoría Espectral ocurrió a principios del siglo XX, cuando Hilbert definió el objeto de estudio de esta, el espectro. Aunque el término "Teoría Espectral" no se popularizó hasta alrededor de 1930, el desarrollo de esta teoría a lo largo del siglo XIX y principios del XX es un tema relevante en la historia de las matemáticas.

La consolidación y estandarización de la terminología moderna se produjo a principios del siglo XX, con el trabajo de David Hilbert y sus contemporáneos. Hilbert introdujo los términos "Eigenwert" (valor propio) y "Eigenfunktion" (función propia) en su investigación sobre ecuaciones integrales en 1904. Estos términos, de origen alemán, pronto se adoptaron en la comunidad matemática internacional y se convirtieron en la base para la terminología moderna de valores y vectores propios.

El desarrollo de la teoría de matrices en la década de 1920 y la mecánica cuántica en la década de 1930 impulsó aún más el uso generalizado de la terminología "eigen". Figuras prominentes como Hilbert, Sylvester y otros matemáticos contribuyeron a la estandarización y difusión de estos términos en la literatura matemática del siglo XX.

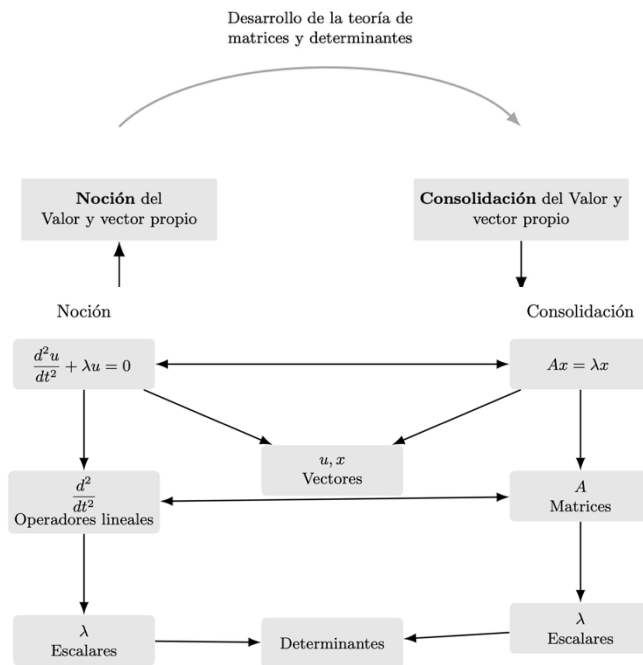
En el siglo XX, el estudio de los valores y vectores propios se convirtió en una parte integral del álgebra lineal y encontró aplicaciones en diversos campos, como física, ingeniería, ciencias de la computación y economía, entre otros. Matemáticos como David Hilbert, Émile Borel, John von Neumann y Hermann Weyl realizaron importantes contribuciones a la teoría de los valores y vectores propios en este período (Martínez, 2006).

Hoy en día, los valores y vectores propios son conceptos fundamentales en el álgebra lineal y se estudian en profundidad en cursos de matemáticas y disciplinas relacionadas. Se utilizan en una amplia gama de aplicaciones, como el análisis de sistemas dinámicos, la compresión de imágenes, el análisis de redes y la resolución de ecuaciones diferenciales, entre otros (Meyer, 2000).

Este estudio histórico-epistemológico sobre los valores y vectores propios en el álgebra lineal revela conexiones con varios conceptos fundamentales de la disciplina. En primer lugar, la formalización de estos conceptos en el siglo XIX implicó un análisis detallado de matrices y determinantes, lo que resalta su relación con la estructura algebraica de las matrices. Además, los valores y vectores propios tienen aplicaciones importantes en el análisis de sistemas de ecuaciones lineales, donde proporcionan información valiosa sobre las soluciones particulares de estos sistemas. Estos conceptos también están intrínsecamente relacionados con la teoría de espacios vectoriales, donde la noción de espacio propio se conecta con la idea de subespacios vectoriales y transformaciones lineales. En este sentido, los valores y vectores propios son

esenciales para comprender las transformaciones lineales y sus propiedades. Además, su estudio también se relaciona con otros campos matemáticos, como el cálculo vectorial y el álgebra abstracta, lo que demuestra su importancia y versatilidad en la disciplina más amplia del álgebra lineal.

Figura 8.
Desarrollo histórico del concepto de valor y vector propio.



Históricamente, las nociones de valores y vectores propios surgieron en el siglo XVIII, particularmente en el contexto de problemas físicos como el de la cuerda vibrante. En estos

problemas, se trabajaban ecuaciones diferenciales de la forma $\frac{d^2u}{dt^2} + \lambda u = 0,$ donde $\frac{d^2}{dt^2}$ es un

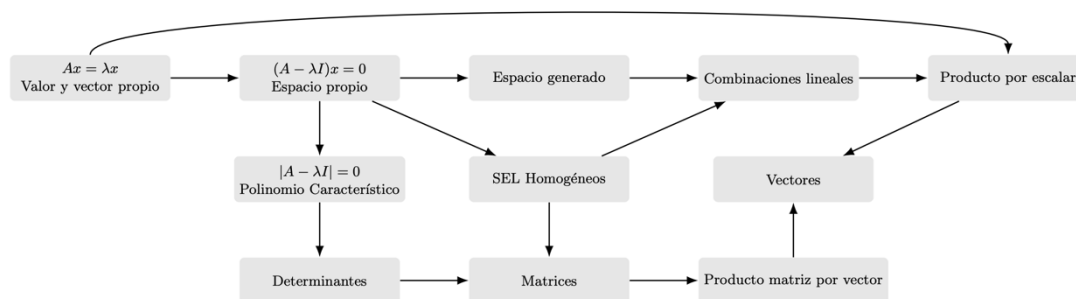
operador lineal, para ese entonces el objetivo principal era determinar los valores de $\lambda,$ que en el lenguaje moderno conocemos como valores propios. Durante el siglo XVIII, el enfoque no estaba en estudiar las propiedades de estos valores propios, sino simplemente en determinarlos. Fue con el desarrollo de la teoría de matrices que surgió un verdadero interés en el estudio y la consolidación de este concepto y sus propiedades.

A través de la Figura 8, se pueden establecer ciertas relaciones entre los conceptos que contribuyeron a la consolidación del concepto de valores y vectores propios. Por un lado, están los escalares, comenzando con los números reales y extendiéndose posteriormente al campo de los números complejos. En la búsqueda de estos escalares, se estableció la relación con el determinante pues finalmente encontrar dichos escalares se reducía a solucionar una ecuación que se establecía por medio de un escalar, que ahora asociamos con el concepto de polinomio característico. Por otro lado, el desarrollo del concepto de matrices jugó un papel crucial en la consolidación del concepto de valores y vectores propios, ya que fue después de su desarrollo que estos conceptos se establecieron firmemente y que actualmente relacionamos fácilmente con las transformaciones lineales.

Por otro lado, podemos asociar al desarrollo algebraico del concepto de valor y vector propio, el concepto de sistema de ecuaciones lineales, matriz, determinante y polinomio característico.

Figura 9.

Desarrollo algebraico del concepto de valor y vector propio.



En la Figura 9. se muestra que algebraicamente el concepto de valor y vector propio involucra varios conceptos importantes del álgebra lineal (Stewart et al., 2022).

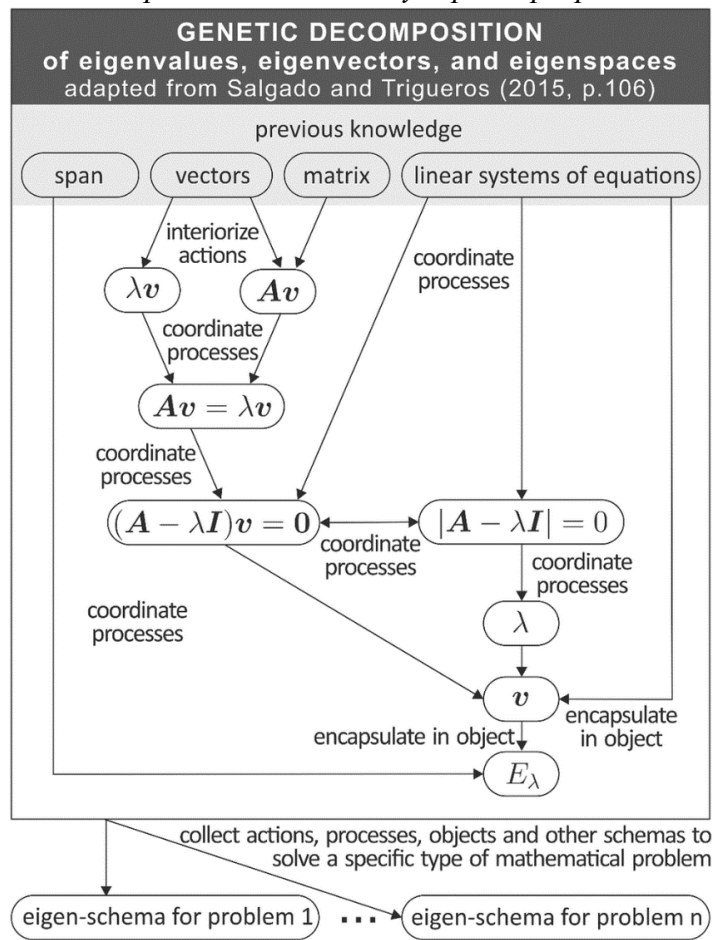
4.1.2 Descomposiciones genéticas previas del concepto de valor y vector propio

Otro insumo importante para nuestra descomposición genética hipotética son las descomposiciones genéticas previas del concepto. En este caso, consideramos tres de estas, Salgado y Trigueros (2015), Parraguez et al. (2020) y Betancur (2020).

Por un lado, Salgado y Trigueros (2015) diseñaron una descomposición genética de los conceptos de valor, vector y espacio propio. Para esto, analizan el pensamiento de los estudiantes con respecto a una situación de modelado económico. Salgado y Trigueros (2015, p. 106) presentan como resultado de su investigación, una descomposición genética del concepto de valor y vector propio representada en la Figura 10.

Figura 10.

Descomposición genética del concepto de valor, vector y espacio propio.



Nota. La Figura 10. es tomada de Salgado y Trigueros (2015, p. 106).

Inicialmente, Salgado y Trigueros (2015) establecen que los estudiantes deben considerar las matrices y vectores como objetos concretos sobre los cuales pueden realizar operaciones. Deben ver la solución de un sistema de ecuaciones lineales como un proceso para encontrar e interpretar el conjunto solución. Además, necesitan comprender conjuntos, conjuntos solución, el núcleo de una matriz y conjuntos generadores de un espacio vectorial también como procesos. Esto les permite coordinar estos procesos para construir nuevos procesos relacionados con vectores propios y espacios propios. Los estudiantes aprenden a realizar acciones sobre matrices

y vectores para entender el producto de estos (\boxed{Av} y \boxed{v}), lo que les permite interiorizar estas acciones como un proceso que transforma un vector en otro nuevo, manteniendo ciertas propiedades como la dirección, relacionada con un escalar.

A medida que avanzan, los estudiantes necesitan comparar los vectores resultantes y considerar las condiciones necesarias para que sean iguales ($\boxed{Av = v}$), lo que les ayuda a encapsular la ecuación resultante y nombrar el escalar y el vector en ella como valor propio y vector propio, respectivamente. Esta comprensión se interioriza aún más hasta llegar a no necesitar realizar cada acción de manera explícita para determinar los valores propios y vectores propios que satisfacen la ecuación. Además, los estudiantes aprenden a revertir este proceso para verificar si un escalar es un valor propio y encontrar el vector propio correspondiente. La coordinación de este proceso algebraico con el reconocimiento de las propiedades geométricas de los vectores propios facilita una comprensión más integrada y geométrica.

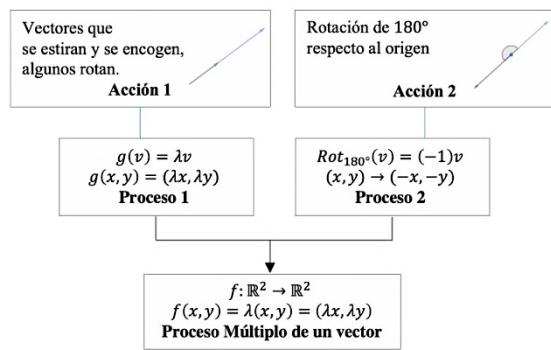
Finalmente, los estudiantes coordinan estos procesos con la solución de un sistema homogéneo de ecuaciones y con el proceso de espacio nulo de una matriz para identificar el conjunto solución de un sistema homogéneo como el espacio nulo de la matriz correspondiente al sistema. Al coordinar estos procesos, los estudiantes son capaces de reconocer el espacio generado por cada valor y vector propio asociado como un espacio propio, definido como el espacio generado correspondiente a un valor propio dado de una matriz. Este enfoque holístico permite a los estudiantes desarrollar un esquema de valores propios que les ayuda a reconocer y aplicar estos conceptos en diversas situaciones problemáticas, demostrando así una comprensión profunda y funcional de estos elementos clave del álgebra lineal.

Por otro lado, Parraguez et al. (2020) proponen dos modelos cognitivos que representan una ruta cognitiva basada en la teoría APOE, desde la enseñanza secundaria hasta la universitaria. Estos modelos describen la construcción de los conceptos de valor y vector propio en \mathbb{R}^2 y ofrecen una perspectiva geométrica para su comprensión. En el primer modelo, se destaca la importancia de la rotación de 180° respecto al origen como un Proceso que permite entender el inverso aditivo de un vector y el Proceso de múltiplo escalar. Estas construcciones son fundamentales para iniciar la comprensión de los valores y vectores propios en estudiantes universitarios de primer año. En el segundo modelo, se enfatiza la importancia de la transformación lineal y el efecto geométrico que ciertas matrices tienen sobre los vectores en \mathbb{R}^2 .

Estos modelos cognitivos refinados ofrecen una visión clara de cómo los estudiantes desarrollan sus conocimientos desde la secundaria hasta la universidad, proporcionando una ruta cognitiva para la comprensión gradual de estos conceptos. Los resultados de esta investigación muestran las construcciones y mecanismos mentales que subyacen al aprendizaje de los valores y vectores propios en \mathbb{R}^2 , destacando la importancia de la perspectiva geométrica y el uso de estructuras cognitivas como la teoría APOE.

Figura 11.

DG_0 hipotética de los conceptos previos para la construcción de valor y vector propio en \mathbb{R}^2



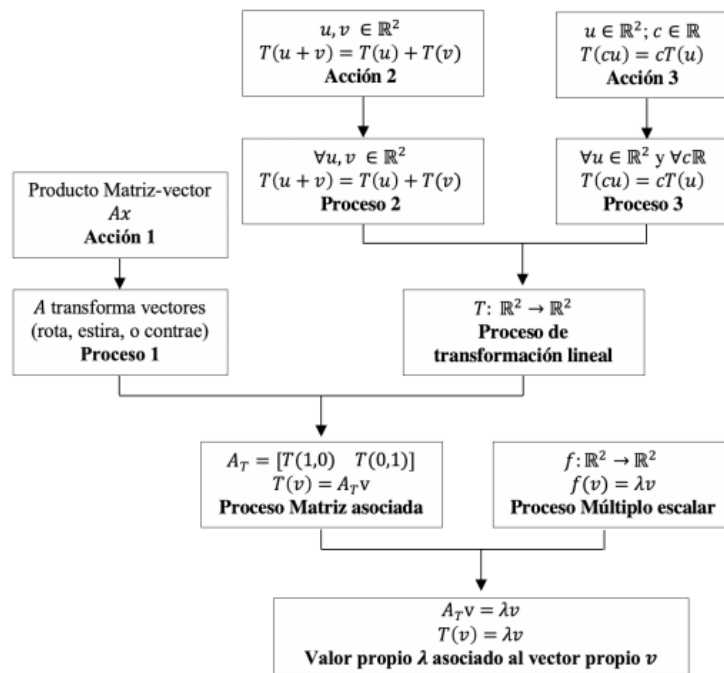


Nota. Imagen tomada de Parraguez et al., (2020) (p. 11).

La figura 11. muestra una descomposición genética refinada de los conceptos previos para la construcción de valor y vector propio en \mathbb{R}^2 en donde Parraguez et al. (2022) examinan los conocimientos previos necesarios para abordar los conceptos de valor y vector propio en \mathbb{R}^2 en la educación secundaria. Destacan la rotación de 180° respecto al origen y la multiplicación por un escalar de vectores como fundamentales para este propósito. En su modelo DGR0, identifican dos procesos clave: la búsqueda de múltiplos escalares de vectores específicos y la interiorización de la rotación de un vector en 180° . Estos procesos conducen a la comprensión de la relación entre el escalar y el efecto geométrico en los vectores. Además, establecen una correspondencia entre diferentes valores de escalar y las transformaciones resultantes en los vectores. Esta coordinación entre los procesos facilita la comprensión de las transformaciones específicas asociadas con diferentes valores escalares, como la rotación, la contracción y la elongación. En última instancia, estos conocimientos previos permiten a los estudiantes estructurar la ponderación por un escalar como un parámetro que define una recta que contiene al vector original y pasa por el origen en el plano \mathbb{R}^2 .

Figura 12.

DG_1 hipotética de los conceptos previos para la construcción de valor y vector propio en \mathbb{R}^2



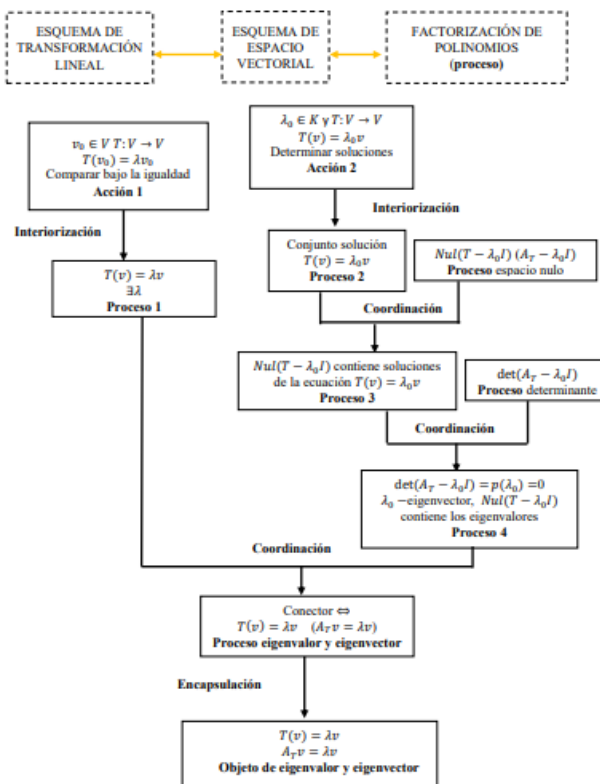
Nota. Imagen tomada de Parraguez et al., (2020) (p. 11).

La figura 12. muestra una descomposición genética refinada en donde Parraguez et al. (2022) explican cómo los estudiantes universitarios de primer año pueden comprender los conceptos de valor y vector propio en \mathbb{R}^2 desde una perspectiva geométrica, basada en los conceptos previos mencionados en DG_0 . La construcción comienza con las Acciones 1, 2 y 3, relacionadas con la transformación lineal y el producto matriz-vector, permitiendo a los estudiantes reconocer cómo estas transformaciones rotan, estiran o comprimen vectores. La interiorización de estas acciones ayuda a distinguir entre transformaciones lineales, como rotaciones, y no lineales, como desplazamientos. Utilizando la matriz $A = [T(1,0)T(0,1)]$, los estudiantes pueden vincular cada transformación lineal con una matriz específica, por ejemplo, la

matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ que rota un vector 90° en sentido horario. Además, el Proceso de múltiplo escalar permite identificar vectores y sus transformaciones como colineales, facilitando la identificación de valores y vectores propios de una transformación lineal o de la matriz asociada en \mathbb{R}^2 .

Figura 13.

DG_1 hipotética de los conceptos previos para la construcción de valor y vector propio en \mathbb{R}^2



DG_1

Nota. Imagen tomada de Betancur (2020) (p. 188).

Finalmente, La figura 6 tras analizar datos empíricos y reflexionar sobre la descomposición genética hipotética Betancur (2020), confirma que la interacción entre los esquemas de transformación lineal y espacio vectorial es esencial. La comparación entre $T(v)$ y λv se realiza mediante la coordinación de procesos de múltiplo escalar y transformación lineal. Esta coordinación permite a los estudiantes comprender que el vector cero no es un eigenvector y que, si un vector es un eigenvector, tiene un único eigenvalor. La acción de determinar soluciones de la ecuación $T(v) = \lambda v$ se interioriza en un proceso que reconoce al vector cero como una solución, y que existen infinitas soluciones para un eigenvalor λ si el conjunto de soluciones de $T(v) = \lambda v$ es infinito. Este proceso se coordina con el proceso de espacio nulo, llevando al entendimiento del eigenespacio. Además, la coordinación con el proceso de determinante permite caracterizar los eigenvalores de un operador lineal o matriz asociada, justificando la existencia de eigenparejas. Reflexionar sobre el proceso de eigenvalor y eigenvector ayuda a reconocer todos los eigenvalores y eigenvectores de un operador lineal, comprendiendo su diagonalización y la relación entre matrices cuadradas y operadores lineales. La caracterización de un operador mediante sus eigenvalores y eigenvectores requiere una estructura objeto de transformación lineal.

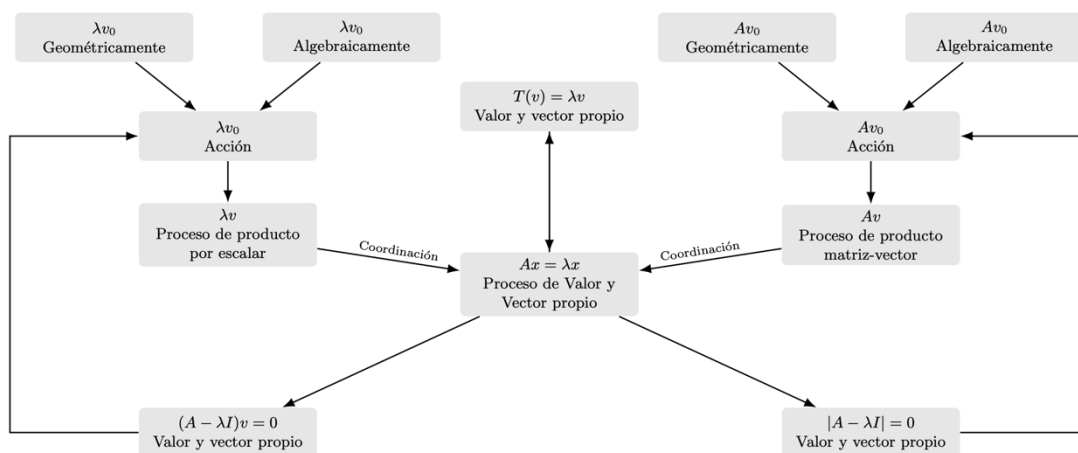
Como resultado de esta fase, teniendo como insumo el desarrollo epistemológico del concepto de valor y vector propio, investigaciones que ayuden a posicionar este concepto como central en álgebra lineal y las descomposiciones genéticas de este concepto presentadas hasta ahora, diseñaremos una descomposición genética preliminar. En dicho modelo cognitivo,

buscaremos evidenciar al valor y vector propio como concepto central para el diseño y desarrollo de un curso de álgebra lineal.

4.1.3 Modelo cognitivo del valor y vector propio en relación con los sistemas de ecuaciones lineales y la transformación lineal como matriz

Figura 14.

DG hipotética para la construcción de valor y vector propio



Concepciones previas: El propósito principal de este estudio es describir las estructuras y los mecanismos mentales implicados en la construcción de una concepción Proceso del concepto de valor y vector propio. Según Salgado y Trigueros (2015), para comprender plenamente este concepto, es crucial que los estudiantes posean ciertos conocimientos previos. Estos conocimientos incluyen una concepción Objeto de los conceptos de matriz y vector como entidades sobre las cuales se pueden realizar Acciones.

Adicionalmente se requiere que los estudiantes desarrollen una concepción Proceso de solución de sistemas de ecuaciones lineales, ya que esto les permitirá encontrar e interpretar el conjunto solución. Además, se requiere una concepción Procesos de los conceptos conjunto,

espacio nulo de una matriz y conjunto generado. Estos conceptos son fundamentales en esta construcción, ya que estos Procesos son Coordinados para generar nuevos Procesos y conexiones entre los conceptos relacionados. En este sentido, comprender el Proceso de transformación lineal resulta clave (Betancur, 2020), ya que permite al estudiante Coordinarlo con el Proceso de matriz y establecer una asociación entre la matriz correspondiente y la transformación lineal en cuestión.

Por su parte, Parraguez et al. (2022) identifican que, para que los estudiantes de secundaria comiencen a comprender los conceptos de valores y vectores propios en \mathbb{R}^2 , deben tener conocimientos previos sobre la rotación de 180° alrededor del origen, la multiplicación de vectores por escalares y los efectos geométricos de estas operaciones en \mathbb{R}^2 . Estructuras que, para nuestro caso se pueden desarrollar al inicio del curso de álgebra lineal.

Modelo cognitivo hipotético del valor y vector propio

Acciones y Procesos sobre vectores: La construcción comienza con Acciones sobre el vector, consistentes en multiplicarlo por distintos escalares λv . En esta etapa, se parte de ejemplos concretos: si $v = [1, 3]$ y $\lambda = 2$, entonces $\lambda v = [2, 6]$. Esta Acción geoméricamente estira el vector manteniendo su dirección. Si el escalar es negativo, por ejemplo $\lambda = -1$, entonces $-v = [-1, -3]$, lo cual invierte la dirección del vector.

Estas Acciones evolucionan a una estructura Proceso cuando el estudiante deja de operar sobre vectores particulares y comienza a generalizar las características del producto escalar:


- Si $\lambda > 1$ → el vector se estira.
- Si $-1 < \lambda < 1$ → el vector se encoge.
- Si $\lambda < 0$ → el vector cambia de dirección.

Esto permite visualizar el producto escalar como una transformación sistemática en \mathbb{R}^2 y posteriormente generalizarlo a \mathbb{R}^n .

Acciones y Procesos sobre matrices: En paralelo, se desarrollan Acciones sobre la matriz mediante el producto matriz-vector Av . Se enfatiza el producto matriz-vector Av como una transformación lineal que la matriz A ejerce sobre el vector v . Es decir, no se busca únicamente que el estudiante calcule Av , sino que comprenda el efecto que la matriz tiene al transformar el vector, modificando su dirección, magnitud o ambas, dependiendo de las características de A . Por ejemplo, dada una matriz A de tamaño 3×2 :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ y un vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, se realiza el producto Av mediante productos

punto:

- Fila 1: $[2, 3] \cdot [1, 2] = 8$
 - Fila 2: 
 - Fila 3: $[0, 4] \cdot [1, 2] = 8$
- $Av = [8, 1, 8]^t$

Esta Acción se interioriza como un Proceso cuando el estudiante comprende que se puede

aplicar a cualquier vector $v \in \mathbb{R}^2$ y que la matriz A transforma dicho vector en otro vector en

\mathbb{R}^3 . Esta comprensión se consolida cuando se reflexiona sobre el producto como una transformación lineal definida por la matriz.

Además, el estudiante puede anticipar en qué espacio está definido el vector resultado observando las dimensiones de A y v . En el ejemplo anterior, A es 3×2 y v es 2×1 ,

por tanto $Av \in \mathbb{R}^3$.

En este marco, lo central no es solo calcular Av , sino comprender qué hace la matriz A al actuar sobre cualquier vector v . Es decir, se busca analizar el producto Av como el resultado de aplicar una transformación lineal al vector v , esto busca que los estudiantes piensen en A no solo como un arreglo de números reales, sino como una representación matricial de una función

lineal, esto es $T(v) = Av$.

Esta perspectiva facilita la transición a la pregunta: ¿Existen vectores que, al ser transformados por A , conserven su dirección? lo cual da paso a la idea de vector propio y fortalece la conexión con la siguiente fase de la descomposición genética, donde se coordina esta

transformación con el sistema $(A - \lambda I)v = 0$.

Coordinación entre procesos: $Av = \lambda v$. Al comparar los Procesos de λv y Av , el estudiante puede realizar una Acción cognitiva de comparación: ¿existen vectores v tales que

$Av = \lambda v$? Esta comparación se transforma en un nuevo Proceso coordinado entre el producto escalar y el producto matriz-vector. Se pueden proponer tareas como:

Dada $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$, encontrar todos los vectores $v \neq 0$ que satisfacen $Av = 5v$. A partir

de estas situaciones, el estudiante puede reflexionar: ¿Qué condiciones debe cumplir λ para que

existan vectores $v \neq 0$ que satisfagan $Av = \lambda v$? ¿Cuántos vectores cumplen esa igualdad?

¿Qué tipo de sistema representa esa ecuación? Estas reflexiones llevan a una nueva

coordinación entre El Proceso $Av = \lambda v$, el Proceso de solución de sistemas homogéneos de la

forma $(A - \lambda I)v = 0$. Este nuevo proceso permite interpretar la búsqueda de valores y vectores propios como la solución no trivial de un sistema homogéneo. Aquí se integran y coordinan estructuras cognitivas previas asociadas con la resolución de sistemas lineales, la comprensión de subespacios y el análisis del espacio nulo de una matriz.

Encapsulación del concepto de valor y vector propio: La ecuación $Av = \lambda v$ puede ser finalmente encapsulada como una nueva entidad matemática, el estudiante construye

una concepción Objeto de lo que significa un valor propio (λ) y un vector propio ($v \neq 0$) de una

matriz A . Este objeto encapsulado se convierte en parte del conocimiento del estudiante, sobre el cual pueden realizarse nuevas Acciones como: determinar los valores propios de una matriz, determinar los vectores propios asociados a cada valor, interpretar geoméricamente la acción de

A sobre sus vectores propios. Además, se introduce un elemento esencial: la comprensión de

que el vector cero no puede ser considerado un vector propio, aun cuando satisface formalmente

$$Av = \lambda v$$

. Esta exclusión conceptual, como propone Betancur (2020), es crítica para estabilizar la estructura del concepto.

$$T(v) = Av$$

Coordinación con la transformación lineal

multiplicación Av puede coordinarse con el Proceso de aplicación de una transformación lineal

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$T(v) = Av$$

, a través de la ecuación

ecuación $Av = \lambda v$ como $T(v) = \lambda v$, es decir, como el caso en que una transformación lineal actúa sobre un vector sin alterar su dirección, solo su magnitud.

Esta coordinación permite articular las perspectivas algebraica y geométrica del concepto de valor y vector propio, fortaleciendo su comprensión y ampliando la variedad de significados que el estudiante puede atribuir al concepto.

5. Diseño e implementación de instrumentos

Este capítulo analiza el contexto específico en el que se desarrolla la investigación, destacando las características, selección y validación de los instrumentos utilizados, así como el diseño de las tareas basadas en los fundamentos teóricos expuestos en las secciones anteriores. Se describe detalladamente el procedimiento seguido en las distintas fases de implementación, desde la planificación inicial hasta la recolección de datos, además, se justifica

metodológicamente cada etapa. Este análisis clarifica cómo las decisiones adoptadas durante la investigación impactaron y dieron forma a los resultados finales.

5.1 Población y contexto

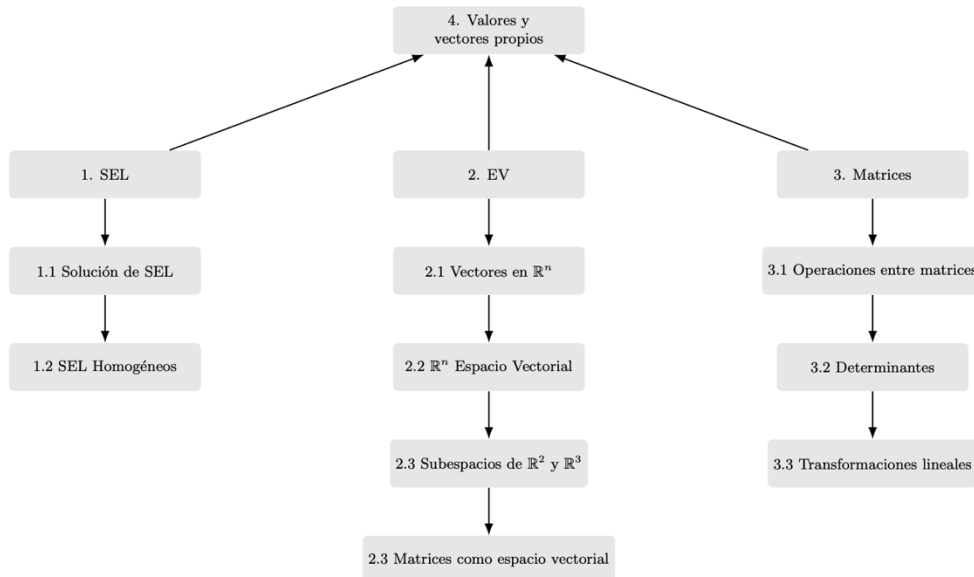
Esta investigación se realiza en la Universidad Industrial de Santander (UIS) con un grupo de estudiantes de ingeniería química de primer año que están matriculados en un curso de álgebra lineal I por primera vez que se desarrolla durante 16 semanas con una intensidad de cuatro horas semanales. El grupo está conformado por 35 estudiantes, con edades comprendidas entre 16 y 20 años, quienes reciben la orientación y supervisión directa del docente investigador a lo largo del estudio y del desarrollo del semestre académico.

Como se detalla en el capítulo 2, el docente de álgebra lineal I tiene la opción de seleccionar entre cuatro enfoques distintos para la enseñanza del curso. En este caso, se opta por el enfoque moderno para el plan de asignatura, basado en la estructura del plan y las recomendaciones de la coordinación de álgebra lineal de la universidad; todo esto adaptado a las necesidades de la investigación, cuyas decisiones se toman con base en la descomposición genética hipotética. El texto de Poole (2011) se elige como guía principal del curso por sus aplicaciones actuales y relevantes.

El plan de estudios original (ver Anexo 1) plantea el desarrollo de conceptos de manera aislada, lo que limita la interiorización de Acciones, la encapsulación de Objetos y la conexión entre conceptos. Por esta razón, a partir de la Descomposición Genética Hipotética generamos una ruta de enseñanza, que presentamos en la figura 15; esta parte de los SEL y finaliza en el concepto de valores y vectores propios.

Figura 15.

Ruta de enseñanza para el curso de algebra lineal



Como mencionamos anteriormente, esta ruta de enseñanza busca promover la construcción de algunas estructuras fundamentales para comprender el concepto de valor y vector propio. Entre estas estructuras se incluyen los conceptos de matriz y vector como Objeto, los sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución el concepto de espacio nulo el conjunto generado y la transformación lineal como Proceso. Con este objetivo en mente, se toman decisiones respecto al curso, eligiendo tres ejes principales: el primero abarca los sistemas de ecuaciones lineales; el segundo se centra en los espacios vectoriales; y el tercero se relaciona con las matrices. De esta forma, al finalizar estos tres ejes, se espera desembocar en el concepto de valor y vector propio, foco de estudio en esta investigación. Con lo anterior se busca interconectar estos tres conceptos de manera coherente, evitando saltos abruptos entre los ejes, para esto establecimos la ruta de enseñanza de la siguiente forma:

Comenzamos con el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, ya que los estudiantes están familiarizados con este concepto desde su experiencia en el bachillerato; por ejemplo, pueden graficar puntos y rectas en el plano cartesiano, como lo señala el MEN (2016). Relacionamos este eje con el siguiente, que trata sobre los espacios vectoriales, a través de la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Nos enfocamos en resolver un sistema de ecuaciones de $m \times n$, utilizando una $n - \text{upla}$ para empezar a estructurar el conjunto de soluciones de ecuaciones lineales como \mathbb{R}^n , reconociéndolo como un espacio vectorial que cumple los axiomas correspondientes. Además, al explorar más a fondo las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales, nos encontramos con un caso particular: el sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Esto permite identificar subespacios vectoriales de \mathbb{R}^n , específicamente en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , como rectas y planos que pasan por el origen desde un punto de vista geométrico.

De manera análoga al cumplimiento de los axiomas para \mathbb{R}^n como espacio vectorial, aplicamos este enfoque a un nuevo conjunto: el conjunto de matrices de tamaño $m \times n$. Establecimos que este conjunto también es un espacio vectorial. Considerando las matrices como vectores, es decir, como elementos de un espacio vectorial, exploramos sus operaciones: suma multiplicación por un escalar y el producto entre matrices. En particular, nos centramos en el producto entre una matriz de tamaño $m \times n$ y otra matriz de tamaño $n \times 1$, siendo esto análogo al producto entre una matriz y un vector. Analizamos esto geoméricamente, observando que en

\mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , podemos visualizar las transformaciones que una matriz realiza sobre un vector. Esto nos llevó a conceptualizar la matriz como un ente que transforma al vector, sentando las bases para establecer la analogía entre matrices y transformaciones lineales.

De lo anterior decidimos que el contenido del curso seguido por los estudiantes en esta investigación fuera replanteado de la siguiente forma:

1. Sistemas de ecuaciones lineales.

Terminología y notación de conjuntos.

Definición y notación de SEL.

Conjunto solución de una ecuación lineal.

Interpretación geométrica de los SEL y el conjunto solución en \mathbb{R}^2 y E^{1200}

Matriz de coeficientes y matriz aumentada.

Eliminación Gaussiana

Teorema del rango

Eliminación de Gauss-Jordan

Sistemas homogéneos

Aplicaciones.

2. \mathbb{R}^n como espacio euclídeo y vectorial.

Definición del conjunto \mathbb{R}^n

Operaciones entre vectores

Combinaciones lineales

Producto punto

\mathbb{R}^n como espacio vectorial.

Subespacios.

Subespacio generado por un conjunto de vectores.

Dependencia e independencia lineal.

Bases y dimensión.

3. Matrices

Operaciones entre matrices

$M_{m \times n}$ como espacio vectorial

Espacio nulo de una matriz.

Espacio renglón y espacio columna de una matriz.

Rango de una matriz.

Inversas de matrices cuadradas.

Determinantes.

Propiedades de los determinantes.

Regla de Cramer.

Transformaciones lineales en \mathbb{R}^n

4. Valores y vectores propios de una matriz.

Definición

Espacios propios

Interpretación geométrica del valor y vector propio

5.2 La dinámica del curso

El curso de álgebra lineal I, se desarrolló a través de 32 sesiones de dos horas cada una, bajo la dirección de un docente investigador. El diseño del curso se basó en la descomposición genética del concepto de valor y vector propio, con el objetivo de que, al finalizar, los estudiantes alcanzaran al menos una comprensión a nivel Proceso de estos conceptos y logaran establecer su relación con otros conceptos clave como los vectores, los sistemas de ecuaciones lineales (SEL), y las transformaciones lineales como matrices.

En la primera sesión, se aplica una prueba diagnóstica para evaluar los conocimientos previos de los estudiantes. Se les pide que formen grupos de tres integrantes, los cuales debían mantener durante todo el semestre. Como se menciona en la sección 5.1, el desarrollo del curso se organiza en torno a tres ejes principales: sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y matrices, culminando en el estudio de valores y vectores propios. Para guiar la enseñanza de estos conceptos, se estudian descomposiciones genéticas existentes, específicamente: para SEL, la propuesta de Oliveros (2022); para espacios vectoriales, la de Parraguez y Oktaç (2012); y para matrices, la de Parraguez y colaboradores (2013).

Las clases se estructuraron en dos sesiones semanales, cada una de 120 minutos, reservando 30 minutos de trabajo grupal durante la segunda sesión de cada semana. En estos espacios, los estudiantes, en los grupos establecidos, trabajaban en ejercicios diseñados para construir estructuras conceptuales relacionadas con los temas en estudio. GeoGebra fue una herramienta clave durante todo el curso, que permitió la representación geométrica de SEL y sus conjuntos solución en sistemas con dos y tres variables, así como la representación geométrica

de vectores en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 (suma de vectores, multiplicación por escalar, vectores paralelos, conjunto generado, entre otros). Además, a través de dicho software fue posible analizar cómo una matriz transforma vectores definidos en dichos espacios.

Durante el curso se aplicaron cuatro exámenes, uno por cada eje temático, todos realizados de manera individual y en formato tradicional. Además, se llevó a cabo un taller para establecer los conocimientos estructurados por los estudiantes; este instrumentó permitió seleccionar a los participantes de la entrevista posterior, destinada a profundizar en las estructuras cognitivas construidas. Toda esta información permitió refinar la descomposición genética preliminar del concepto de valor y vector propio.

5.3 Instrumentos y tareas.

En la investigación se emplearon tres instrumentos: una prueba diagnóstica, un taller y una entrevista. La prueba diagnóstica tiene como objetivo identificar los conocimientos previos de los estudiantes al inicio del curso, específicamente en relación con los conjuntos y su notación, los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) tanto desde una perspectiva algebraica como geométrica, y las transformaciones lineales, en este caso, una transformación de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 vista como una función.

El taller se llevó a cabo al comienzo del eje de matrices, con el propósito de determinar si, para ese momento, los estudiantes habían construido algunos de los conceptos previos mencionados en la descomposición genética hipotética (DGH). La entrevista, buscó evidenciar las estructuras cognitivas relacionadas con los valores y vectores propios que los estudiantes habían logrado desarrollar. A continuación, se describen en detalle los instrumentos empleados y los objetivos específicos de cada uno.

5.3.1 Prueba diagnóstica

Este instrumento fue creado con el objetivo de evaluar al grupo de estudiantes y establecer su nivel de conocimientos previos en conceptos como ecuaciones lineales, conjuntos, la representación de puntos en el plano cartesiano, funciones, multiplicación por escalar y las diversas maneras de representar un vector.

La implementación se llevó a cabo el primer día de clase del curso de Álgebra Lineal I, con la participación de 35 estudiantes que matricularon la asignatura por primera vez. La prueba se estructuró en dos fases: i) trabajo individual y ii) trabajo grupal.

En la fase individual, los estudiantes tuvieron 40 minutos para resolver las primeras cuatro tareas, diseñadas para evaluar su comprensión inicial de conceptos fundamentales de álgebra lineal. Esta etapa permitió obtener una visión clara de las habilidades y conocimientos previos de cada estudiante de manera independiente. Posteriormente, se les solicitó formar grupos de 2 o 3 integrantes para abordar las tres tareas restantes durante otros 40 minutos. Esta fase grupal no solo fomentó la colaboración y discusión entre los estudiantes, sino que también permitió observar cómo interactuaban y compartían sus ideas para resolver problemas más complejos.

La recolección de datos se llevó a cabo a través de las hojas de trabajo en las que los estudiantes registraron sus respuestas y detallaron sus procedimientos de razonamiento, tanto en la fase individual como en la grupal. Estas hojas fueron fundamentales para identificar a aquellos estudiantes que ya presentaban algunas de las concepciones y estructuras cognitivas que se buscaban analizar. Esta información permitió focalizar la atención en ciertos estudiantes, considerándolos como posibles casos de estudio para un análisis más profundo.

A continuación, se ofrece una descripción detallada de cada una de las tareas incluidas en la Prueba Diagnóstica, junto con un análisis de las posibles respuestas de los estudiantes y una discusión sobre las soluciones esperadas (análisis normativo). Este análisis permite caracterizar de mejor manera las concepciones de los estudiantes, así como determinar cómo estas se alinean o contrastan con los elementos previos establecidos en la DGH.

Tarea 1. Sean a, b, c y d números reales. En cada caso explique ampliamente su respuesta:

i. ¿Es posible encontrar números reales que cumplan con $a + b = c$ y $a + c = b$?

ii. Si sabemos que $a + b = c$ y $a + d = c$, ¿qué puede decir de b y d ? (Can, 2022).

El objetivo de esta tarea es evaluar las concepciones que los estudiantes pueden evidenciar sobre el concepto de igualdad antes de iniciar el curso de Álgebra Lineal, dado que en la descomposición genética del concepto de valor y vector propio requiere de una construcción de igualdad como Objeto para poder coordinar los Procesos de producto por escalar y multiplicación de matriz vector.

En el ítem i), un estudiante puede resolver el problema aplicando Acciones como asignar valores específicos a, b y c , y luego explicar las condiciones que estas variables deben cumplir en las dos expresiones dadas. Este proceso fomenta la interiorización del concepto de igualdad a través de la repetición y reflexión sobre estas Acciones, lo que es un paso inicial en la construcción del concepto.

En el ítem ii), se invita al estudiante a reflexionar sobre el rol que juega c en ambas expresiones, lo que puede llevarlo a analizar la relación entre estas expresiones de manera más

abstracta. Este análisis promueve el desarrollo de un Proceso de igualdad, en el que a, b y c son

concebidos como números reales cualesquiera. A partir de esta reflexión, un estudiante podría

deducir que la expresión $a + b = a + d$ es equivalente, lo que le permitiría concluir que $b = d$.

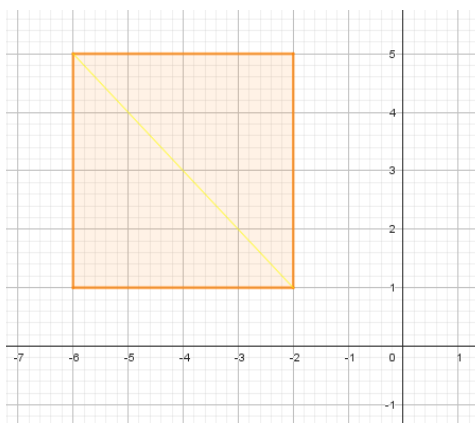
Este razonamiento muestra cómo el estudiante puede encapsular un Proceso, avanzando hacia la construcción del Objeto de igualdad.

La tarea está diseñada no solo para identificar las concepciones iniciales de los estudiantes sobre la igualdad, sino también para guiarlos a través de un proceso de reflexión que facilite la transición desde Acciones concretas hacia una comprensión más abstracta y robusta de la igualdad, lo cual es esencial para la posterior construcción del concepto de valor y vector propio.

Tarea 2. ¿Cuál es el valor de la diagonal del cuadrado de la Figura 16? Explique su procedimiento (Paz, 2020).

Figura 16.

Diagonal del cuadrado



Nota. Tomada de Investigación de diseño en la enseñanza del concepto de vector: una aproximación para el diseño de tareas (p. 220), por Paz, 2020, Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Esta tarea se centra en la ubicación de puntos en el plano cartesiano como pares ordenados y en el cálculo de la distancia entre dos puntos, presentando a los estudiantes un cuadrado ubicado en el segundo cuadrante del plano. El cuadrado está situado de manera que uno de sus ejes contiene números negativos, y está trasladado 2 unidades a la izquierda y 1 unidad hacia arriba del origen.

El objetivo principal de esta tarea es observar las estrategias de resolución que emplean los estudiantes. Al analizar la ubicación de los puntos en el plano cartesiano y las medidas de los lados del cuadrado, los estudiantes deben aplicar su comprensión de la geometría y el teorema de Pitágoras. Este teorema les permite concluir que la diagonal del cuadrado, que actúa como la hipotenusa de los triángulos rectángulos formados dentro del cuadrado, tiene una longitud de





$$\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ unidades.}$$

Además, la tarea también se conecta con la construcción del concepto de valor y vector propio. Al trabajar con puntos en el plano cartesiano y al calcular distancias y diagonales, los estudiantes están desarrollando habilidades fundamentales para comprender cómo los vectores pueden ser representados en \mathbb{R}^2 y cómo se relacionan entre sí. La comprensión de las relaciones geométricas y algebraicas en este contexto es esencial para avanzar hacia la idea de vectores propios, donde las transformaciones lineales actúan sobre vectores en un espacio vectorial y las propiedades de estas transformaciones se exploran a través de valores y vectores propios.

Tarea 3. Observe el objeto presentado en cada ítem de la Figura 17.

Figura 17.

Representaciones de vectores

a) 	b) 	c) $\begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ -6x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$	d) 
e) (3,3)	f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$	g) 	h) $V = \mathbb{R}^n$

Nota. Tomada de *Investigación de diseño en la enseñanza del concepto de vector: una aproximación para el diseño de tareas* (p.221), por Paz S., 2020, Tesis de maestría, Centro de

Esta tarea se diseñó para explorar las concepciones que los estudiantes tienen sobre el concepto de vector, lo cual es fundamental para su desarrollo en Álgebra Lineal, especialmente en la construcción de los conceptos de valor y vector propio.

En el ítem i), se presenta a los estudiantes una imagen que incluye diversos objetos: a) un rectángulo, b) un punto, c) un vector que resulta de la suma de tres vectores en \mathbb{R}^3 con componentes que involucran variables, d) una flecha, e) una pareja ordenada de números reales, f) una cuádrupla de números reales, g) un segmento, y h) \mathbb{R}^n . Basándose en su experiencia previa, especialmente en el bachillerato, los estudiantes tienden a identificar los objetos d) y g) como vectores, debido a que estas representaciones suelen ser las más familiares y concretas para ellos.

Esta tarea busca determinar si los estudiantes se limitan a una concepción más visual y concreta del vector (como flechas o segmentos) o si pueden reconocer representaciones más abstractas y algebraicas, como la cuádrupla de números reales o los vectores en \mathbb{R}^n . Identificar las concepciones de los estudiantes en este punto es crucial, ya que la transición de una concepción concreta a una más abstracta y algebraica del vector es esencial para entender valores y vectores propios en espacios vectoriales.

El ítem ii) les pide a los estudiantes que definan qué entienden por "vector". Esta parte de la tarea es clave para profundizar en la comprensión que los estudiantes han desarrollado sobre el concepto. Una definición que refleja una concepción Objeto del vector implica que el estudiante no solo comprende al vector como un ente geométrico, sino también como un elemento de un espacio vectorial con propiedades algebraicas específicas. Esta concepción Objeto es fundamental para la construcción de los conceptos de valor y vector propio, ya que permite a los estudiantes ver los vectores no solo como flechas en un espacio, sino como elementos que interactúan de manera compleja dentro de un sistema de ecuaciones lineales y transformaciones lineales.

La concepción Objeto del vector es crucial en la comprensión de cómo los vectores se comportan bajo transformaciones lineales y cómo se relacionan con los valores propios y vectores propios. Cuando los estudiantes alcanzan esta concepción, pueden empezar a ver cómo un vector puede ser escalado o transformado mientras conserva ciertas propiedades clave, lo que es esencial para entender cómo funcionan los valores y vectores propios en la práctica.

Tarea 4. Considere la siguiente definición:

Un conjunto es una colección objetos. Cuando un conjunto se define dando la lista completa de todos sus miembros decimos que el conjunto está definido por extensión. En muchos casos no es posible o no es fácil dar la lista completa de todos los elementos de un conjunto y en su lugar se da una propiedad que satisfacen única y exclusivamente los elementos del conjunto (por comprensión) (Uzcátegui, 2019, p.49-50).

Por ejemplo:

Por extensión: $A = \{\dots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$.

Por comprensión: $A = \{2n: n \in \mathbb{Z}\}$.

i. Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, escriba los siguientes conjuntos por extensión:

a) $\{x \in \mathbb{N}: 3 \leq x < 9\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z}: x = n^2 - n^3 \text{ para algún } n \in \{1,2,3,4\}\}$

ii. Escriba los siguientes conjuntos por comprensión:

a) $\{1,3,5,7,9,11, \dots\}$

b) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right\}$ (Uzcátegui, 2019).

Esta tarea está diseñada para analizar las concepciones que los estudiantes tienen sobre el concepto de conjunto, así como su habilidad para utilizar la notación de conjuntos y comprender la relación de pertenencia. La tarea se estructura en dos partes, cada una enfocada en un aspecto diferente del concepto de conjunto: la representación por extensión y por comprensión.

El ítem i) presenta dos conjuntos definidos por comprensión y pide a los estudiantes que los describan por extensión. Por ejemplo, un conjunto que se describe por una propiedad que todos sus elementos cumplen, como $A = \{x \in \mathbb{N}: 3 \leq x < 9\}$, debe ser transformado en una lista explícita de sus elementos, es decir, $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Este proceso requiere que los estudiantes identifiquen cada miembro del conjunto basándose en la propiedad dada, lo que implica una comprensión básica pero fundamental de cómo funcionan los conjuntos.

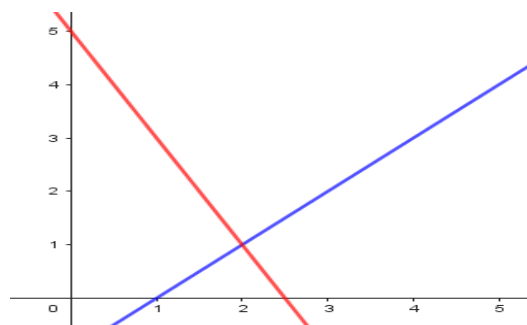
Según Can (2022), los estudiantes con una concepción de Acción sobre el concepto de conjunto son capaces de evaluar si un elemento pertenece a un conjunto específico verificando si cumple con una determinada condición de pertenencia. Este enfoque inicial es crucial para la posterior construcción del concepto de vector en Álgebra Lineal, donde la pertenencia a un conjunto (como un subespacio vectorial) es una idea central.

En el ítem ii), se les presenta a los estudiantes conjuntos definidos por extensión, como $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$, y se les pide que los describan por comprensión. Aquí, el estudiante debe identificar la propiedad que todos los elementos del conjunto comparten y expresarla de manera generalizada. Por ejemplo, el conjunto anterior podría describirse como $B = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ es impar}\}$. Este ejercicio fomenta el desarrollo de una concepción Proceso del concepto de conjunto, donde el estudiante no solo identifica elementos individuales, sino que también comprende y manipula las propiedades que los definen colectivamente.

Esta concepción Proceso es particularmente importante para la construcción de los conceptos de valores y vectores propios. En estos temas avanzados de Álgebra Lineal, los estudiantes deben manejar conjuntos de soluciones que cumplen con ciertas propiedades (como ser valores o vectores propios de una matriz o similarmente de una transformación lineal) y comprender cómo estos conjuntos se estructuran y se relacionan dentro del espacio vectorial.

Tarea 5. Represente el sistema de ecuaciones lineales de la Figura 18 y su solución de forma algebraica.

Figura 18.
Sistemas de ecuaciones lineales



Esta tarea fue diseñada con el objetivo de evaluar los conocimientos de los estudiantes en varios conceptos fundamentales de la geometría y el álgebra, tales como la ubicación de puntos en el plano cartesiano, la determinación de la ecuación de una recta, la intersección de dos rectas, y las estrategias empleadas para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Estos conceptos son esenciales, ya que, en la descomposición genética del concepto de valor y vector propio, se requiere como estructura previa el Proceso de solución de un sistema de ecuaciones lineales.

En la primera parte de la tarea, se espera que los estudiantes identifiquen que las rectas dadas se interceptan en el punto (2,1), lo que significa que el sistema de ecuaciones lineales asociado tiene una solución única, representada por el conjunto $\{(2,1)\}$.

Para abordar el sistema de forma algebraica, los estudiantes deben determinar las ecuaciones de las rectas utilizando puntos específicos ubicados sobre ellas. Por ejemplo, una recta que pasa por los puntos (0,5) y (2,1) tiene una pendiente de -2, lo que lleva a la ecuación $y = -2x + 5$. De manera similar, otra recta que pasa por los puntos (1,0) y (2,1) tiene una pendiente de 1, con la ecuación resultante $y = x - 1$. El sistema de ecuaciones lineales que se deriva de estas dos rectas es, por lo tanto:

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = x - 1. \end{cases}$$

El proceso de resolver este sistema algebraico no solo solidifica la comprensión del estudiante sobre la relación entre las representaciones gráficas y algebraicas, sino que también es un paso crucial en la construcción de la estructura necesaria para el entendimiento de valores y vectores propios. La capacidad para resolver sistemas de ecuaciones lineales es una habilidad clave, ya que los valores y vectores propios a menudo se determinan como soluciones a sistemas lineales asociados a matrices.

5.3.2 Taller

Este instrumento fue diseñado para evidenciar las estructuras de Acción y Proceso relacionadas con el concepto de valor y vector propio, enfocándose en su conexión con los

sistemas de ecuaciones lineales, la combinación lineal y la interpretación de la matriz como una transformación lineal.

La implementación se llevó a cabo durante dos horas de clase en el curso de Álgebra Lineal I, con la participación de 30 estudiantes organizados en los grupos establecidos al inicio del curso. Esta dinámica grupal permitió observar el trabajo colaborativo y fomentar la discusión entre los estudiantes. A lo largo de la sesión, se identificaron algunos estudiantes por su participación y su interés en comprender los conceptos, lo que facilitó la selección de aquellos que participarían en entrevistas posteriores.

A continuación, se presenta la descripción de las tareas, junto con los posibles enfoques y razonamientos que los estudiantes pueden desarrollar, analizados en términos de las estructuras Acción y Proceso que subyacen a su comprensión de los conceptos de valor y vector propio.

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ y $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Tarea 1. Sea $x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, encuentre Ax para cada caso e interprete

este resultado geoméricamente.

Esta tarea fue diseñada para evidenciar una concepción Acción desde una perspectiva geométrica del valor y vector propio, particularmente en cómo una matriz actúa como un transformador de vectores en el espacio. Esta matriz tiene valores propios 0 y 5 y vectores propios $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ respectivamente. Un estudiante puede abordar cada caso particular, como x_1, x_2, x_3 , calcular el producto de la matriz con el vector correspondiente e interpretar el resultado geoméricamente.

Por ejemplo, para el vector x_1 , al realizar la operación algebraica Ax_1 , el estudiante puede observar que la matriz A transforma x_1 en el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ evidenciando una transformación que anula x_1 . Del mismo modo, al operar con x_2 , se puede ver que la matriz A transforma este vector

en $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, y finalmente, el estudiante podría notar que la misma matriz también transforma x_3 en $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Este procedimiento permite al estudiante reconocer patrones en la acción de la matriz sobre diferentes vectores, lo que sienta las bases para la comprensión de valores y vectores propios. Específicamente, al observar cómo ciertos vectores son transformados en la misma dirección o anulados, el estudiante puede empezar a interiorizar la idea de que la matriz no solo modifica la magnitud o dirección de un vector, sino que puede también alinearlos o reducirlos a un punto, lo cual es crucial en la construcción de los conceptos de valor y vector propio.

Este enfoque hace hincapié en cómo las operaciones específicas con vectores y matrices preparan al estudiante para entender los conceptos fundamentales de valores y vectores propios en un contexto geométrico.

Tarea 2. Describa la transformación que causa A a x para un x cualquiera en \mathbb{R}^2 y si es posible, de una expresión algebraica.

Esta segunda tarea está diseñada para promover en el estudiante el mecanismo de interiorización de las Acciones realizadas en la tarea 1, promoviendo una transición hacia una concepción Proceso de valor y vector propio, relacionado con el Proceso de transformación lineal. A partir de la interiorización de los casos particulares analizados previamente, el estudiante puede comenzar a predecir si la matriz está aplicando una transformación específica a todos los vectores del espacio \mathbb{R}^2 , y más aún, deducir una expresión algebraica que describa esta transformación.

Por ejemplo, al considerar un nuevo caso particular como $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y observar que la matriz lo transforma en $\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$, un múltiplo escala r de los vectores trabajados en la tarea 1, el estudiante puede inferir un patrón: la matriz está transformando los vectores de \mathbb{R}^2 en múltiplos escalares del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Esta observación lleva a una reflexión geométrica más profunda, donde el

estudiante puede visualizar que la matriz A transforma todos los vectores en vectores que se alinean sobre una misma recta. Esta recta puede interpretarse como el espacio generado por el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, o alternativamente, como una recta que pasa por el origen con un vector director $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Para llegar a esta conclusión, el estudiante debe haber logrado una estructura Proceso de matriz que incluya la comprensión de la matriz como una transformación lineal, el Proceso de espacio generado, el Proceso de producto escalar y la noción de subespacios en \mathbb{R}^2 . Si un estudiante logra estructurar esta interpretación geométrica, podemos afirmar que el estudiante está desarrollado una concepción Proceso de valor y vector propio, comprendiendo no solo la transformación algebraica, sino también su manifestación geométrica en el espacio vectorial.

Tarea 3. Encuentre los vectores que satisfacen que $Ax = 5x$. ¿Cuántos vectores cumplen la condición anterior? Escriba el conjunto solución y represéntelo geoméricamente ¿Qué puede decir del conjunto solución encontrado? ¿Tiene alguna estructura?

Esta tarea fue diseñada para evidenciar la concepción Proceso del valor y vector propio en relación con los sistemas de ecuaciones lineales. En primer lugar, un estudiante reflexionará sobre la naturaleza de los objetos involucrados en la ecuación $Ax = 5x$. Al hacerlo, debe reconocer que ambos lados de la ecuación involucran objetos de la misma dimensión. Por un lado, la matriz A de tamaño 2×2 se multiplica por un vector, que también puede verse como una matriz de tamaño 2×1 , resultando en una matriz de tamaño 2×1 . Por otro lado, el producto de un escalar con un vector da como resultado un vector de la misma dimensión, o análogamente, una matriz de tamaño 2×1 . Reflexionar sobre las dimensiones de los objetos en ambos lados de la ecuación permite al estudiante comprender la igualdad a pesar de las diferencias en la naturaleza de los objetos involucrados.

Al intentar resolver la ecuación $Ax = 5x$, el estudiante puede comenzar tomando casos particulares para x , lo que implica el establecimiento de Acciones relacionadas con vectores, así como un Proceso de matriz y producto escalar al realizar las operaciones respectivas. Sin embargo, dada la naturaleza del problema y el hecho de que infinitos vectores pueden satisfacer esta condición, este enfoque no es suficiente para resolver el ejercicio por completo.

Un enfoque más avanzado consiste en reformular la ecuación como $Ax - 5x = 0$, lo que lleva al estudiante a manipular la ecuación como un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Aquí, se requiere una concepción Objeto de sistemas de ecuaciones lineales para manipular esta operación. Finalmente, una concepción Proceso de sistemas de ecuaciones lineales permitirá al estudiante resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 6x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5x_1 \\ 5x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3x_1 + x_2 \\ 6x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

Además, el estudiante con una concepción Proceso de sistemas de ecuaciones lineales en su interpretación geométrica puede visualizar la solución de $Ax - 5x = 0$ como la intersección de dos rectas:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Geoméricamente, la solución de este sistema de ecuaciones lineales homogéneo se interpreta como la intersección de las rectas $-3x_1 + x_2 = 0$ y $6x_1 - 2x_2 = 0$. Si el estudiante tiene una concepción Proceso de subespacios en \mathbb{R}^2 , puede reflexionar sobre los vectores directores de estas rectas, concluyendo que son paralelos y que, además, ambas rectas pasan por el origen. Esto debería llevarlo a deducir que las rectas se superponen, lo que implica que la solución de este sistema es precisamente los vectores que están sobre la recta $-3x_1 + x_2 = 0$.

Tarea 4. Considere $u = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Muestre que cualquier vector $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ en \mathbb{R}^2 se puede escribir como combinación lineal de u y v .

Esta tarea tiene como objetivo evidenciar una concepción Proceso de base en \mathbb{R}^2 . El estudiante es invitado a concebir cualquier vector x en \mathbb{R}^2 como una combinación lineal de dos vectores u y v . Para lograr esto, es crucial que el estudiante reflexione sobre varios conceptos clave, empezando por la independencia lineal de los vectores u y v . Esta reflexión es esencial, ya que la independencia lineal garantiza que u y v no sean colineales.

Además, el estudiante debe considerar la dimensión de \mathbb{R}^2 que es 2, lo que significa que cualquier conjunto de dos vectores linealmente independientes en este espacio constituye una base. Con una concepción Proceso de base, el estudiante no solo reconoce estos vectores como generadores de todo el espacio \mathbb{R}^2 , sino que también puede establecer formalmente que u y v forman una base de \mathbb{R}^2 . Esto le permite escribir cualquier vector x en \mathbb{R}^2 como una combinación lineal de u y v , es decir, $x = au + bv$, donde a y b son escalares.

Tarea 5. Considere x un vector del conjunto solución encontrado anterior. Encuentre $A^{107}x$ y justifique su respuesta.

Esta tarea tiene como objetivo evidenciar una concepción Proceso de valor y vector propio, en relación con la comprensión del Objeto de matriz. Al abordar esta tarea, el estudiante debe reflexionar sobre las propiedades de los valores y vectores propios en el contexto de las potencias de una matriz.

Si el vector x cumple con la relación $Ax = 5x$, esto indica que x es un vector propio de la matriz A asociado al valor propio $\lambda = 5$. Un estudiante con una concepción Proceso de estos conceptos puede aplicar esta relación para analizar $A^{107}x$.

El estudiante podría descomponer la expresión de la siguiente manera:

$$A^{107}x = A^{106}(Ax) = A^{106}5x = 5A^{105}(Ax) = 5^2A^{104}(Ax) = \dots = 5^{107}x$$

Este razonamiento permite concluir que $A^{107}x = 5^{107}x$, lo cual es consistente con la propiedad fundamental de los vectores propios: al multiplicar un vector propio por la matriz repetidamente, el resultado es el vector propio escalado por la potencia correspondiente del valor propio.

La tarea no solo busca que el estudiante aplique mecánicamente la relación entre matriz y vector propio, pues el estudiante todavía no la conoce, sino que reflexione sobre la estructura y comportamiento de las matrices elevadas a potencias altas. Esto implica una comprensión profunda del proceso de multiplicación de matrices y de cómo los valores propios afectan a los vectores en su espacio propio a través de iteraciones. Con una concepción Proceso de estos conceptos, el estudiante puede generalizar este razonamiento a otros contextos y matrices.

5.3.3 Entrevista

Este instrumento fue diseñado con el propósito de analizar las concepciones Acción y Proceso de los estudiantes en relación con los conceptos de valor y vector propio, específicamente en el contexto de las transformaciones lineales y matrices.

La implementación del instrumento se llevó a cabo en una sesión individual de 2 horas, con la participación de tres estudiantes del curso de Álgebra Lineal I. Estos estudiantes ya habían trabajado con instrumentos previos, lo que permitió una continuidad en el análisis de sus concepciones. Las entrevistas constaban de tres preguntas clave, diseñadas para explorar en profundidad las estructuras cognitivas y los mecanismos mentales que los estudiantes utilizan al abordar estos conceptos.

A continuación, se presenta una descripción detallada de la intención detrás de cada una de las tareas incluidas en el instrumento. Esta descripción no solo expone los objetivos de las tareas, sino que también analiza los posibles planteamientos y razonamientos que los estudiantes pueden desarrollar en respuesta a las mismas. Se considera cómo los estudiantes podrían manifestar diferentes niveles de comprensión, desde una concepción Acción, donde aplican procedimientos de manera más mecánica, hasta una concepción Proceso, donde demuestran una comprensión más profunda y generalizada de los conceptos involucrados.

Tarea 1. Considere la transformación lineal T de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que rota un vector del plano 90 grados en contra de las manecillas del reloj y luego multiplica el vector resultante por 2. Si A es la matriz asociada a la transformación T , encuentre los valores propios y los espacios propios de A e interprételo geoméricamente.

Esta pregunta fue diseñada para evaluar si el estudiante posee una concepción Proceso del valor y vector propio tanto en su interpretación geométrica como algebraica. Por un lado, se espera que el estudiante pueda analizar casos particulares de vectores en \mathbb{R}^2 y observar los efectos de la transformación sobre ellos. Al reflexionar sobre estos efectos, un estudiante con una sólida comprensión geométrica de la transformación lineal y una concepción Proceso del valor y vector propio debería llegar a la conclusión de que la transformación no tiene valores propios reales. Esto se debe a que, si existieran valores propios reales, la transformación de un vector propio resultaría en un vector escalado o en una rotación de 180 grados, lo cual no corresponde con el comportamiento observado en la transformación aplicada a todos los vectores en \mathbb{R}^2 .

Por otro lado, un estudiante que también posee una concepción Proceso de transformación lineal y de base en \mathbb{R}^2 podría abordar la tarea considerando una base específica en \mathbb{R}^2 , como la base canónica $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Al comprender cómo la transformación afecta a estos vectores base, el estudiante puede deducir la matriz asociada a la transformación. Dado que la transformación rota un vector 90 grados en sentido antihorario y luego lo multiplica por 2, se sigue que $T(e_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $T(e_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, lo que lleva a la matriz de transformación

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si el estudiante tiene una concepción Proceso del valor y vector propio, al aplicar la ecuación característica $Ax = \lambda x$, debe comprender que para encontrar los valores propios de A , es necesario resolver el determinante $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$. Como esta ecuación da lugar a un polinomio irreducible con raíces imaginarias, el estudiante debe concluir que los

valores propios de la matriz son imaginarios, y, en consecuencia, los vectores propios asociados también son imaginarios.

Tarea 2. Supongamos que E es una matriz 2×2 con vectores propios $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ correspondientes a los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ respectivamente. Encontrar $E^{10}x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}^2$

Esta tarea tiene como objetivo evidenciar una concepción Proceso de valor y vector propio, relacionada con los conceptos de matriz y base en \mathbb{R}^2 . Al abordar esta tarea, el estudiante debe reflexionar sobre las propiedades de los valores y vectores propios en el contexto de las potencias de una matriz.

Para resolver este problema, el estudiante debe reconocer que cualquier vector $x \in \mathbb{R}^2$ se puede expresar como una combinación lineal de los vectores propios v_1 y v_2 , es decir, $x = av_1 + bv_2$, donde a y b son escalares. Aquí, es crucial que el estudiante comprenda que los vectores v_1 y v_2 forman una base de \mathbb{R}^2 porque son linealmente independientes.

Si el estudiante tiene una concepción Proceso del concepto de base en \mathbb{R}^2 , puede calcular $E^{10}x$ como sigue:

$$E^{10}x = E^{10}(av_1 + bv_2) = aE^{10}v_1 + bE^{10}v_2$$

En este punto, un estudiante con una concepción Proceso del valor y vector propio sabrá que:

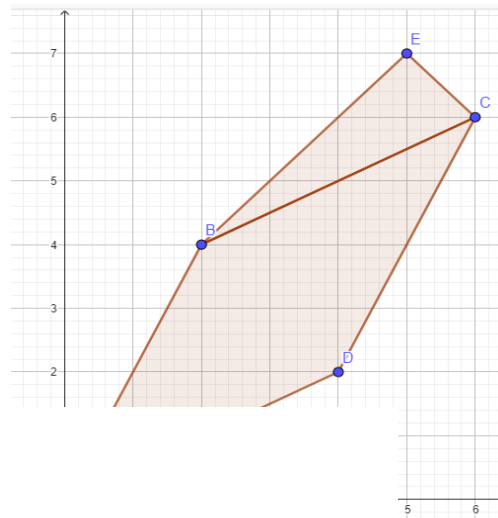
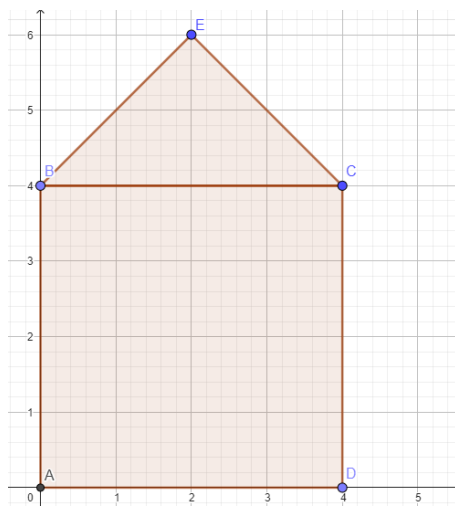
$$Ev_1 = v_1 \text{ y } Ev_2 = 2v_2$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 aE^{10}v_1 + bE^{10}v_2 &= aE^9(Ev_1) + bE^9(Ev_2) = aE^9(v_1) + bE^9(2v_2) = \dots = av_1 + 2^{10}bv_2 \\
 &= a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2^{10}b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ a + 2^{10}b \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Tarea 3. Suponga que la Figura B es la imagen de la Figura A y conteste las siguientes preguntas:

Figura 19.
Efecto de una transformación lineal



¿Existe una transformación lineal que genere tal efecto?

Si su respuesta es afirmativa encuentre dicha función y explique el proceso que realizó para hallarla.

Encuentre y represente geométrica y algebraicamente los valores y vectores propios de la transformación dentro de la figura.

Esta pregunta fue diseñada para evaluar si el estudiante posee una concepción Proceso del valor y vector propio en el contexto del concepto de transformación lineal. Esta evaluación abarca tanto la comprensión geométrica como algebraica de cómo una transformación lineal actúa sobre vectores en \mathbb{R}^2 .

Por un lado, un estudiante con una sólida comprensión de la transformación lineal puede reflexionar sobre sus propiedades fundamentales, como el hecho de que $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y que la transformación mantiene la linealidad del espacio, es decir, no introduce curvaturas. Estas observaciones permiten al estudiante concluir que la transformación es efectivamente lineal.

Además, el estudiante puede considerar casos particulares de vectores en \mathbb{R}^2 y analizar cómo actúan bajo la transformación. Por ejemplo, al observar cómo la transformación T afecta a los vectores dados en la imagen 19, el estudiante puede inferir la forma en que T actúa sobre cualquier vector en el espacio, lo que le permite construir la matriz asociada a la transformación.

Un estudiante con una concepción Proceso del concepto de base en \mathbb{R}^2 puede avanzar más allá al identificar cómo la transformación actúa sobre los vectores de una base, como la base canónica $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Al analizar la transformación de estos vectores, el estudiante puede establecer la matriz asociada a T . Considere los vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ y cómo se transforman según la imagen 19:

$$T(v_1) = T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 4T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$T(v_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = 4T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De este modo, la matriz asociada a la transformación T es:

$$A = [T(e_1) \quad T(e_2)] = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Con esta representación matricial, el estudiante puede aplicar la matriz a cualquier vector en \mathbb{R}^2 y verificar que efectivamente describe la transformación lineal.

Una vez que se tiene la matriz, el estudiante puede proceder a encontrar los valores propios y los vectores propios de A usando la ecuación característica ($\det(A - \lambda I) = 0$):

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -2\lambda + \lambda^2 + \frac{3}{4} = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, los valores propios de A son $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Para encontrar los vectores propios correspondientes, el estudiante debe resolver el sistema $((A - \lambda I)x = 0)$ para cada valor propio. Para dar solución esta ecuación, el estudiante también debe tener una concepción Proceso de sistemas de ecuaciones lineales, no sólo para dar el conjunto solución, sino también para interpretar su solución geoméricamente.

Primero, para $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ se forma la matriz $A - \lambda_1 I$ y se le encuentra el espacio nulo de dicha matriz, esto es equivalente a resolver el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & | & 0 \\ 1/2 & -1/2 & | & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{-1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Luego, el espacio propio asociado a $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ es $E_1 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ lo que geoméricamente se puede interpretar como todos los vectores que están sobre la recta $y = x$.

Ahora, para $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, se sigue un proceso similar. Se forma la matriz $A - \lambda_2 I$ y se encuentra el espacio nulo resolviendo el sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & | & 0 \\ 1/2 & 1/2 & | & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

De modo que el espacio propio asociado a $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ es $E_2 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$, que geoméricamente se interpreta como los vectores situados sobre la recta $y = -x$.

Este proceso no solo permite encontrar los vectores propios, sino también entender cómo la transformación matriz actúa geoméricamente sobre el espacio.

6. Recolección y análisis de datos

En este capítulo se realiza el análisis de los datos obtenidos a través de la implementación de la Prueba Diagnóstica, el taller y la Entrevista, con el propósito de identificar las construcciones mentales que los estudiantes han desarrollado en relación con los conceptos de valor y vector propio. Este análisis no solo permite detectar dichas construcciones, sino también evaluar la viabilidad de la descomposición genética hipotética de estos conceptos. En caso de ser necesario, se propone un refinamiento a la descomposición genética.

6.1 Datos obtenidos de la Prueba Diagnóstica

La prueba diagnóstica la presentaron un total de 29 estudiantes (E1, E2, ..., E29), a continuación se presenta un análisis general de sus respuestas; éste permitió organizar los resultados en tres grandes grupos. Con base en esto se da paso a un análisis más preciso de tres estudiantes que representan las categorías evidenciadas en relación con los procedimientos realizados en cada tarea.

En la Tarea 1, 9 de los estudiantes entrevistados no logran contestar las preguntas de manera precisa, solo realizan manipulaciones algebraicas, por ejemplo E1 escribe:

$$\begin{array}{|l} a + b = c \quad a + c = b \\ \hline b = c - a \quad c = a - b \end{array}$$

Sin llegar a ningún tipo de conclusión o reflexión sobre lo escrito.

Por otra parte, 9 de los estudiantes plantean casos particulares para dar respuesta a la pregunta i. de la Tarea 1. Por ejemplo E11 escribe:

$a + b = c$	$a + c = b$
$(-3) + (-8) = -11$	$(-3) + (-11) = -14x$
$(-3) + 5 = 2$	$-3 + 2 = 5x$
$(4) + (-2) = 2$	$4 + 2 = -2x$

E11: “No es posible encontrar números reales ya que la letra c quedaría con un valor más grande que a y b en la primera operación. Por lo tanto, al momento de hacer la segunda operación el valor de b no sería el mismo al que tenía antes debido a que las sumas son diferentes.”

La exploración de E11 sobre los casos particulares, es accidental, no está acompañada de algún tipo de reflexión, por tanto su conclusión no es correcta.

El resto de los estudiantes del grupo, 11, reflexionan sobre las preguntas de la tarea de manera más precisa. Por ejemplo, E20 escribe:

- i. a , b y c pueden ser positivos, negativos o cero. Toca demostrar que se cumpla la propiedad para al menos uno de los casos posibles o que no se cumpla para ninguno. Puedo ver que $a = 0, b = 0$, y $c = 0$ cumple la propiedad ya que $0 \in \mathbb{R}$ y $a + b = c$ y $a + c = b$. Ya que no se especifica que sean números diferentes.
- ii. Si $a + b = c$ y $a + d = c$ esto quiere decir que $b = d$.

En la Tarea 2, 21 de los estudiantes calculan correctamente la longitud de la diagonal,

$$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

concluyendo que mide $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Esto en casi todos los casos es el resultado de observar la figura presentada y contar el número de unidades que determinan el lado del cuadrado para luego aplicar el teorema de Pitágoras. El resto realiza cálculos numéricos basados en la figura pero

llegando a respuestas incorrectas. Por ejemplo E9 concluye que la diagonal del cuadrado es $\sqrt{25}$ partiendo de un “triángulo isóceles rectángulo cuyos catetos miden 5”.

En el caso de la Tarea 3, a continuación se presentan las respuestas de algunos estudiantes que se destacan por su concepción de vector. Por ejemplo, como se muestra en la Tabla 2 el estudiante E9.

Tabla 2
La concepción de vector de E9

	a.	b.	c	d.	e.	g.	h
	No	N	S	Es	Si	N	S
9	es un vector, no tiene magnitud dirección ni orientación.	o es un vector, tiene magnitud dirección ni orientación.	i es un vector, ya que son polinomios de grado 1.	una de las representaciones de un vector. Pero no lo es, porque no tiene dirección, magnitud y orientación.	es un vector ya que es una coordenada.	.C. o es un vector, tiene magnitud dirección ni orientación.	í es un vector ya que es un polinomio.

La concepción de E9 se relaciona con el vector en solo en su relación con la representación geométrica, donde puede establecer la dirección, magnitud y sentido del vector.

En general todos los estudiantes argumentan que los objetos que aparecen en los apartados d. y e. son vectores; el primero porque “es un vector” y el segundo porque “pertenece a

un espacio vectorial”. Sin embargo en el caso del vector columna en \mathbb{R}^4 que aparece en el ítem f. no es considerado un vector. Se puede deducir de las respuestas de los estudiantes una concepción de vector estrechamente relacionada con su representación como “flecha” o en relación con vectores de coordenadas organizados de manera horizontal.

En la Tarea 4, los estudiantes deben presentar los conjuntos dados por extensión o por comprensión según el caso, en ellos se incluyen diferentes maneras de presentar los elementos de un conjunto. En general, los estudiantes pueden escribir con mayor éxito un conjunto conformado por la lista de elementos que lo conforman. Determinar la cualidad de los elementos de los conjuntos presentados en ii. resulta complejo para los estudiantes, por ejemplo E28 frente al reto de escribir el conjunto $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}\right\}$ por comprensión, escribe:

$\left\{x \in \mathbb{N}: x \leq 1\right\} \wedge \left\{\frac{1}{2^x}\right\}$. En contraste con E19 quien escribe:

$\left\{x \in A: x = 1/a \text{ donde } a \text{ es un par natural}\right\}$. Estas dificultades relacionadas como se ha reportado en otras investigaciones con el uso de cuantificadores, existenciales, así como con las condiciones de pertenencia y contención de conjuntos. Además, con identificar la regularidad, así como definir lo que se mantiene constante. Esto sin duda es un obstáculo a la hora de abordar conceptos básicos del álgebra lineal. Solo 5 de los 29 estudiantes que participaron en esta prueba lograron responder con éxito la tarea.

Finalmente la Tarea 5 se relaciona de manera directa con la representación de los sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución. Como ya se ha señalado este tema se empieza a desarrollar desde la Secundaria según la documentación del Ministerio de Educación Nacional. Sin embargo, 16 del total de estudiantes que desarrollaron la prueba diagnóstica, no

abordaron la tarea, incluso 10 de ellos escriben que no saben qué deben hacer. Solo E8 logra resolver la tarea de manera exitosa determinando las pendientes de las rectas y calculando sus

ecuaciones esto es: $y = -2x + 5$ y $y = x - 1$. Al resolver el sistema encuentra que: “El conjunto

solución de ambas ecuaciones es $x = 2$ y $y = 1$, es decir, el punto $(2,1)$ ”. Llama la atención que

dos de los estudiantes que abordan la tarea, no establecen relación alguna entre la representación gráfica que aparece en la prueba y la algebraica que se solicita. Este es el caso de E9 quien por algunas manipulaciones algebraicas concluye que: “Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales, por ende la pendiente de la recta 2 es igual a la recta de la pendiente 1”. Los demás estudiantes que trabajaron la tarea logran determinar las ecuaciones de las rectas, sin embargo no pueden pensar sobre el conjunto solución, no es claro para ellos a qué se hace referencia.

6.2 Datos obtenidos del taller

En esta sección se estudian los datos recolectados de las hojas de trabajo de tres grupos de estudiantes; el análisis está centrado en las producciones de los equipos. El taller fue implementado durante la octava semana del curso de Álgebra Lineal I. Como se mencionó antes en este documento, este instrumento fue diseñado para evidenciar las estructuras Acción y Proceso relacionadas con el concepto de valor y vector propio, haciendo énfasis en su conexión con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, la combinación lineal y la interpretación de la transformación lineal como matriz.

Para el desarrollo de la actividad, los estudiantes fueron organizados en grupos de 3 y 4 estudiantes. Esta modalidad de trabajo en pequeños grupos tuvo como finalidad promover la discusión colectiva, la contrastación de estrategias y la explicitación de concepciones tanto

algebraicas como geométricas en torno a las tareas propuestas. En particular, la elección de los tres grupos analizados se sustentó en criterios intencionales, pues durante la implementación se destacaron por su participación activa, la generación de preguntas pertinentes y discusiones que evidenciaron formas de articulación conceptual. Además, el investigador, en su rol de profesor, ya había identificado previamente en estos estudiantes una actitud de participación destacada, lo que garantizó la riqueza del material empírico para el análisis.

Con el fin de registrar la implementación, se emplearon dos recursos principales de recolección de información. En primer lugar, se dispuso una cámara fija que registró en video el desarrollo global de la sesión, permitiendo observar interacciones generales, dinámicas de trabajo y la gestión del aula. En segundo lugar, se utilizó una grabadora de audio flotante, que se desplazaba entre los distintos grupos con el objetivo de documentar de manera más detallada las preguntas, discusiones y dificultades específicas que los estudiantes manifestaron durante la resolución de las tareas. De esta forma, la implementación del taller proporcionó material empírico relevante para el análisis posterior.

Análisis del grupo 1.

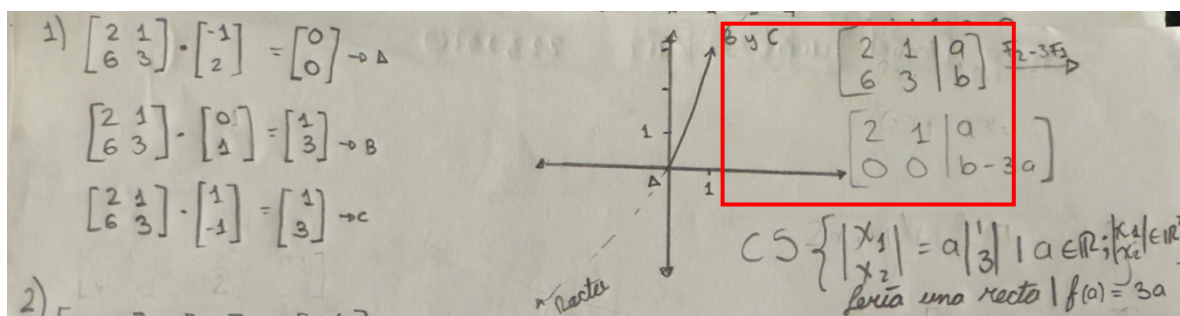
La tarea 1 busca evidenciar la estructura Acción, desde una perspectiva geométrica del concepto de valor y vector propio, en relación con el Proceso de transformación lineal representada mediante una matriz. En términos de la teoría APOE, la Acción se manifiesta cuando el estudiante ejecuta el producto de la matriz por un vector dado, siguiendo procedimientos algorítmicos sin necesidad de interiorización (Dubinsky et al., 1994).

En el análisis de los procedimientos y razonamiento realizados por los estudiantes del grupo 1, se observa que no solo realizaron correctamente las operaciones algebraicas

correspondientes a determinar la imagen de $\begin{bmatrix} x \\ \end{bmatrix}$ bajo $\begin{bmatrix} A \\ \end{bmatrix}$, esto es determinar $\begin{bmatrix} Ax \\ \end{bmatrix}$, para los $\begin{bmatrix} x \\ \end{bmatrix}$ dados; sino que además representan los vectores resultantes en el plano cartesiano; como puede verse en la Figura 20. Esto es una evidencia de una concepción Acción de valor y vector propio en relación con su representación numérica y geométrica.

Figura 20.

Producción de los estudiantes del grupo 1 en la tarea 1.



En la Figura 20, como se destaca en el recuadro rojo, uno de los estudiantes planteó además de la representación gráfica de los vectores el sistema de ecuaciones lineales ampliado, como aparece a continuación:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ 6 & 3 & b \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & b-3a \end{array} \right)$$

lo que dio lugar a considerar el conjunto solución como:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}; \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

En este punto, aunque en el análisis a priori se esperaba que los estudiantes trabajaran con casos particulares y asociaran su representación geométrica, el grupo abrió un camino no

previsto, la coordinación del Proceso $\begin{bmatrix} Ax \\ \end{bmatrix}$ (donde A transforma vectores) con el Proceso de

resolución de sistemas de ecuaciones lineales y la identificación de su conjunto solución. Los estudiantes no solo describieron dicho conjunto de manera algebraicamente correcta, sino que además, lo interpretaron como una recta en el plano, representándola tanto como un conjunto de

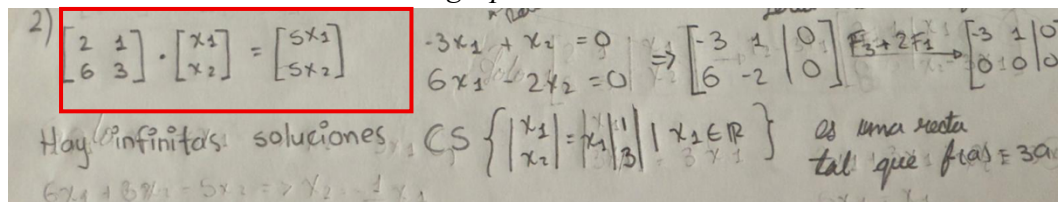
puntos como mediante la función $f(a) = 3a$.

Este resultado muestra una transición significativa entre diferentes formas de representación del conjunto solución y evidencia un acercamiento a la noción de subespacio en \mathbb{R}^2 . Así, la producción del grupo 1 pone de manifiesto cómo una tarea diseñada para promover estructuras Acción en torno a Ax puede también favorecer la emergencia de Procesos más avanzados, que vinculan: sistemas de ecuaciones lineales, transformaciones lineales y la construcción implícita de subespacios vectoriales.

La Tarea 2 fue diseñada para promover una concepción Proceso del valor y vector propio en relación con los sistemas de ecuaciones lineales, buscando que el estudiante reconociera que la igualdad $Ax = 5x$ involucra vectores de la misma dimensión en \mathbb{R}^2 .

Figura 21.

Producción de los estudiantes del grupo 1 en la tarea 2.



En el caso del grupo 1, como se muestra en la Figura 21, los estudiantes reformularon la condición como un sistema de ecuaciones homogéneo, escribiendo $Ax = 5x$ como:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 \\ 5x_2 \end{bmatrix}$$

Expresión equivalente con $(A - 5I)x = 0$. Al desarrollar este planteamiento, obtuvieron el sistema:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

y al resolverlo identificaron que las soluciones corresponden al conjunto $\left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$. Este resultado fue interpretado geoméricamente como una recta que pasa por el origen con pendiente

3, lo que indica que todos los vectores no nulos sobre esa recta son “estirados” por A en un factor de 5, manteniendo su dirección. Lo interesante de esta producción es que, además de evidenciar la coordinación de procesos entre el producto matricial, la multiplicación escalar y la resolución de un sistema lineal, se observa una transición hacia la concepción de Objeto. Esto dado que el conjunto solución es comprendido como un subespacio unidimensional de \mathbb{R}^2 , invariante bajo la transformación lineal definida por A . De este modo, la tarea 2 no solo permitió evidenciar estructuras Proceso asociadas al concepto de valor y vector propio, sino que también abrió paso a la comprensión de estructuras más avanzadas, como la caracterización de subespacios asociados a un valor propio.

Análisis del grupo 2.

La Tarea 1 fue diseñada para promover una concepción Acción del concepto de valor y vector propio, en relación con su representación geométrica a partir de la transformación lineal

definida por una matriz. En términos de la teoría APOE, la Acción se manifiesta cuando el estudiante ejecuta el producto matricial Ax para vectores particulares x , siguiendo procedimientos algorítmicos (Dubinsky et al., 1994).

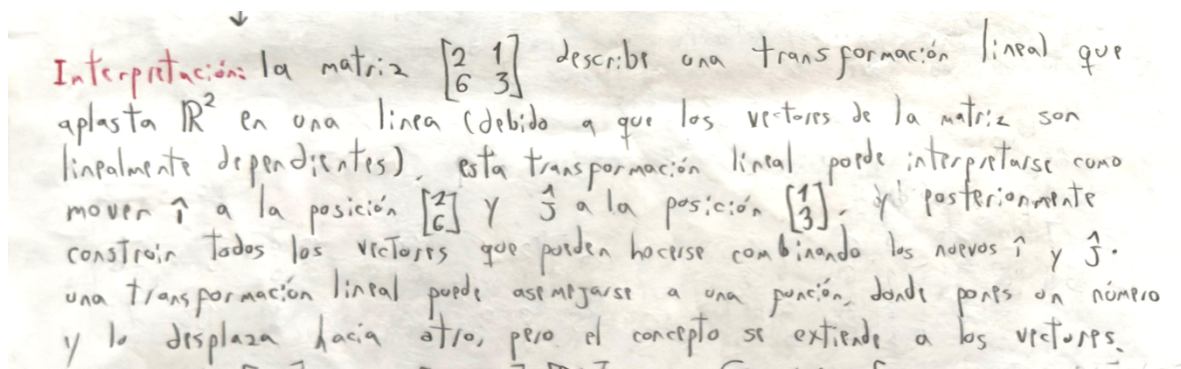
En el caso del grupo 2, los estudiantes efectivamente realizaron los cálculos algebraicos necesarios para determinar la imagen de cada vector bajo la transformación, y posteriormente representaron geoméricamente los resultados. Esto constituye evidencia clara de una concepción Acción del valor y vector propio en relación con la transformación lineal. Sin embargo, lo interesante de este grupo es que trascendieron el procedimiento algorítmico inicial para reflexionar acerca del efecto general que la matriz A ejerce sobre \mathbb{R}^2 . Como se observa en la

Figura 21, los estudiantes concluyeron que A actúa como una transformación lineal que “aplasta” todo el plano en la recta $y = 3x$. Esta conclusión muestra una transición hacia una concepción

Proceso del valor y vector propio en relación con la transformación lineal; en tanto la transformación lineal es comprendida no solo como una operación puntual sobre vectores, sino como un ente transformador que describe el comportamiento de todo el espacio.

Figura 21.

Producción de los estudiantes del grupo 2, tarea 1.



[La matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ describe una transformación lineal que aplasta \mathbb{R}^2 en una línea (debido

a que los vectores de la matriz son linealmente dependientes). Esta transformación lineal puede interpretarse como mover I a la posición $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ y J a la posición $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y posteriormente construir todos los vectores que pueden hacerse combinando los nuevos I y J. Una transformación lineal puede asemejarse a una función donde pones un número y lo desplaza hacia otro, pero el concepto se extiende a los vectores].

Además, el grupo incorporó un elemento no anticipado en el análisis a priori: el uso del concepto de dependencia lineal. Los estudiantes argumentaron que el colapso del plano sobre una recta se debía a que los vectores columna de la matriz eran linealmente dependientes. Esta reflexión, aunque no prevista, fue fundamental para que el grupo lograra interpretar el efecto geométrico de la transformación lineal como una compresión del espacio en un subespacio unidimensional.

De manera adicional, emergió en su razonamiento el concepto de base en \mathbb{R}^2 como una concepción Proceso. En la Figura 21, se observa que los estudiantes justificaron el comportamiento de la transformación analizando las imágenes de los vectores canónicos e_1 y e_2 .

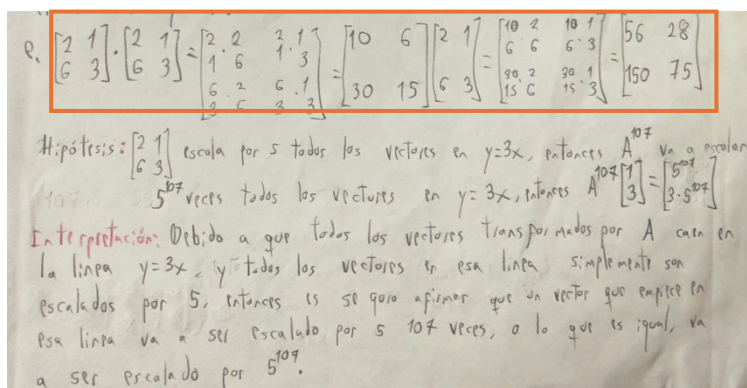
Al notar que dichas imágenes son vectores paralelos, concluyeron que cualquier combinación lineal de ellos produciría vectores situados sobre la recta $y = 3x$. Esto evidencia una coordinación de procesos: por un lado, la aplicación de la transformación lineal a vectores particulares y, por otro, la reflexión sobre cómo dicha acción se relaciona con la estructura del espacio vectorial.

El trabajo del grupo 2 evidencia la emergencia de estructuras Acción en torno al cálculo de Ax , y muestra una evolución hacia concepciones Proceso que vinculan la transformación lineal, la dependencia lineal, la noción de base y la interpretación geométrica de subespacios en \mathbb{R}^2 .

En el desarrollo del taller se generó una conversación entre los grupos 1 y 2 en torno a la última tarea, la cual planteaba: “Considere un vector x tal que cumple $Ax = 5x$ y determine $A^{107}x$ ”. Esta tarea fue diseñada con el propósito de evidenciar una concepción Proceso del valor y vector propio, en conexión con la comprensión del Objeto matriz. En la Figura 22, se puede evidencia que los estudiantes trascienden la Acción de calcular potencias de matrices de manera algorítmica y reflexionan sobre las propiedades de los vectores x que cumplen que $Ax = 5x$ en el contexto de A^n .

Figura 22.

Producción de los estudiantes del grupo 2, tarea 5.



En este marco, la conversación entre Daniel y Santiago resulta ilustrativa. Inicialmente, ambos identifican que el resultado se vincula con el problema anterior, pero luego Santiago

introduce la idea de que la expresión se relaciona con todos los vectores de \mathbb{R}^2 , mientras que

Daniel acota que la solución está restringida al conjunto de vectores de la forma $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, es decir, a

los vectores de la recta $y = 3x$.

Daniel: Sería el mismo del anterior. [Refiriéndose al conjunto de vectores que cumplen que $Ax = 5x$]

Santiago: Por 5 a la...

Daniel: Sí, por eso mismo.

Santiago: Él dice que esto es verdad para todos los vectores en \mathbb{R}^2 . [Santiago se refiere a

Daniel]

Daniel: No no no, nada más para el conjunto este. [Daniel se refiere al conjunto de vectores que cumplen que $Ax = 5x$]

Daniel: O sea, lo que yo interpreto es que el conjunto solución es este. Es decir, $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ donde x_1 es la variable libre. Luego usted nos da esto... y ahí es donde me pierdo.

Santiago: O sea, para este conjunto solución siempre se va a escalar por 5^{107} , pero solo para este conjunto solución.

Inv: Santiago y por qué escribiste esto? [Santiago escribió; Hipótesis: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ escala por

5 todos los vectores en $y = 3x$.]

Santiago: Porque yo puse hipótesis. O sea, es un análisis más que operacional...

Inv: Entonces ¿escala por 5 a todos los vectores?

Santiago: Todos los vectores que están en la recta.

A partir de esta precisión, Santiago reconoce que el escalamiento por 5^{107} solo aplica a los vectores de ese subespacio. Más adelante, al ser interrogado por el investigador. Santiago

explicita que su razonamiento no fue meramente operacional, sino que respondió a una “hipótesis” o análisis más general, lo cual constituye un indicio de concepción Proceso al considerar el comportamiento de toda la recta de vectores propios y no de casos aislados.

La conversación entre Daniel y Santiago refleja cómo los estudiantes transitan desde una concepción Acción de Ax , centrada en la resolución puntual de Ax , hacia una concepción Proceso de $A^{107}x$, en la que reconocen que $A^{107}x$ implica un escalamiento por 5^{107} de todos los vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 5$. Este razonamiento muestra indicios de encapsulación de la matriz como Objeto, al comprender su efecto de manera estructural sobre el subespacio generado por la recta $y = 3x$.

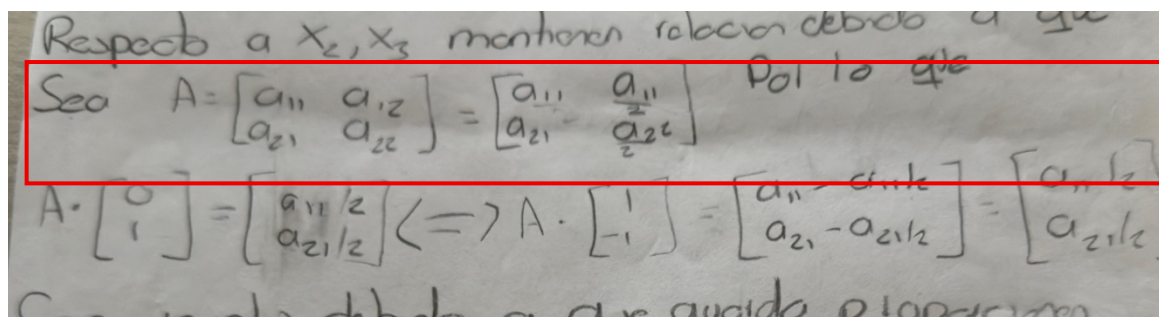
Análisis del grupo 3.

Al igual que los grupos anteriores, este grupo logró evidenciar una concepción Acción del concepto de valor y vector propio en relación con la transformación lineal. Los estudiantes aplicaron el producto matricial Ax y, de manera particular, intentaron interpretar los resultados a partir de las columnas de la matriz (Figura 23). Sin embargo, esta reflexión se limitó a los vectores específicos propuestos en la tarea, sin llegar a generalizar la relación para cualquier vector $x \in \mathbb{R}^2$.

Figura

23.

Producción de los estudiantes del grupo 3, tarea 1



En este caso, cobra especial relevancia la Tarea 2, diseñada para promover una concepción Proceso del valor y vector propio en relación con los sistemas de ecuaciones lineales. En la Figura 24, se evidencia como los estudiantes identificaron que resolver la

ecuación $Ax = 5x$ es equivalente a reescribirla en términos de coordenadas como

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 \\ 5x_2 \end{bmatrix}.$$

Este procedimiento evidencia que los estudiantes comenzaron a reflexionar sobre la naturaleza de los objetos en cada lado de la igualdad, comprendiendo que se trataba de vectores y que podían ser comparados componente a componente:

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 6x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 \\ 5x_2 \end{bmatrix}$$

En este punto se observa un tránsito hacia una concepción Proceso, ya que los estudiantes no se limitaron a la aplicación mecánica del producto matricial, sino que reconocieron la equivalencia con un sistema de ecuaciones lineales, el cual puede manipularse y resolverse dentro de su dominio de conocimiento.

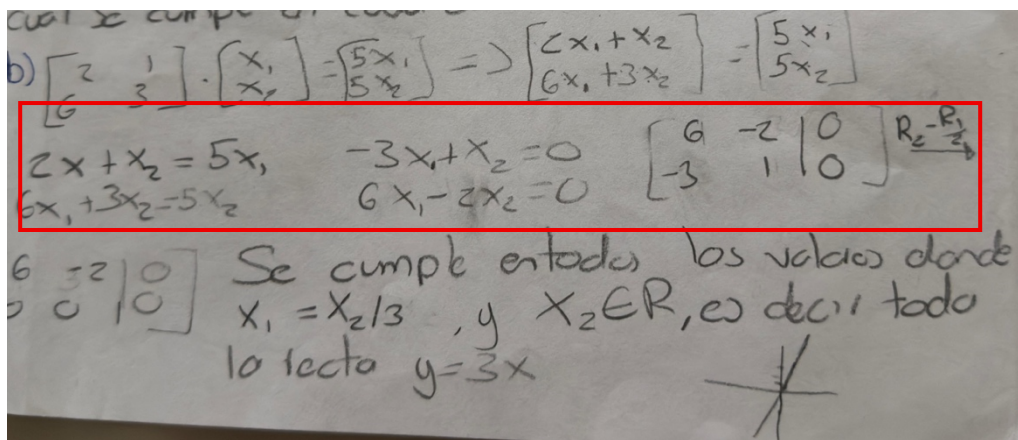
Finalmente, esta comprensión les permitió establecer el sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5x_1 \\ 6x_1 + 3x_2 = 5x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

A partir de aquí, los estudiantes concluyeron que la relación $Ax = 5x$ se cumple para todos los vectores de la forma (x, y) con $x = y/3$, donde $y \in \mathbb{R}$. Es decir, identificaron correctamente que todos los vectores situados sobre la recta $y = 3x$ son vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 5$.

Figura 24.

Producción de los estudiantes del grupo 3, tarea 2



De esta manera, el grupo logró reformular el problema en términos de un sistema homogéneo, lo cual constituye evidencia de una concepción Proceso del sistema de ecuaciones lineales asociado a la definición de valor y vector propio.

6.3 Datos obtenidos de las entrevistas

Las entrevistas se realizaron de manera individual a dos estudiantes durante la última semana del curso de Álgebra Lineal I. Su selección respondió a criterios intencionales: cada participante pertenecía a los grupos previamente analizados en el taller y, además, se había destacado por su participación activa y reflexiva a lo largo del curso. Este diseño permitió dar continuidad al análisis y, al mismo tiempo, profundizar en los procesos de construcción conceptual de manera individual.

El propósito de este instrumento fue indagar en las concepciones Acción y Proceso sobre los conceptos de valor y vector propio, en el marco de las transformaciones lineales y las matrices. A diferencia del taller, las entrevistas permitieron explorar de manera individual los razonamientos de los estudiantes, profundizando en sus concepciones. Para el registro de la implementación, se utilizó como recurso principal una cámara fija que permitió documentar en video el desarrollo completo de cada entrevista. Este material se constituyó en la base para la transcripción y posterior análisis de las producciones verbales de los estudiantes, lo cual permitió examinar con mayor precisión sus argumentaciones y la evolución de sus concepciones.

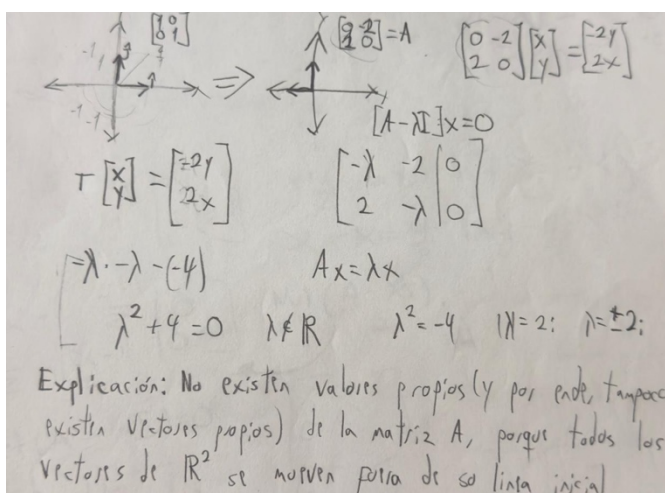
Estudiante 1, tarea 1.

El razonamiento de Santiago evidencia una progresión en sus construcciones mentales sobre el concepto de valor y vector propio, transitando desde acciones hacia la construcción de una concepción Objeto del valor y vector propio. A lo largo de la tarea, el estudiante articula aspectos algebraicos y geométricos de la transformación lineal representada por la matriz.

Como se observa en la Figura 25, Santiago inicia su análisis utilizando la base canónica de \mathbb{R}^2 para explorar geoméricamente el efecto de la matriz sobre los vectores, identificando cómo cada uno se transforma. En este nivel de Acción, aplica procedimientos de multiplicación matriz-vector y registra los resultados en términos gráficos (Ver Figura 25).

Figura 25.

Producción del estudiante 1, tarea 1



Se destaca que su razonamiento evoluciona cuando comienza a establecer correspondencias entre el producto $A\vec{v}$ y el comportamiento global de la transformación lineal.

Esta coordinación de procesos entre la representación algebraica y la interpretación geométrica le permite reconocer la estructura de la matriz como una rotación de 90°, lo cual trasciende la manipulación algorítmica y se orienta hacia la comprensión Proceso de la transformación lineal.

La entrevista refuerza cuando el investigador le pregunta cómo definiría la transformación, Santiago responde: “A ver, ... lo roto 90 grados”, mostrando una clara conexión entre el cálculo y la interpretación geométrica. Más adelante, al justificar el procedimiento

algebraico, indica: “Así es la definición de valores propios: $Ax = \lambda x$, o sea, $(A - \lambda I)x = 0$ ”,

evidencia del mecanismo de interiorización que le permite estructurar un Proceso como estructura mental consolidada. Además, al reconocer que los valores propios son complejos ($\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = -2i$), amplía su razonamiento más allá del campo real y asocia esta

propiedad algebraica con la rotación en el plano, afirmando: “No existen vectores que al ser transformados se mantengan sobre la misma recta original”. Estas verbalizaciones confirman que el estudiante no solo ejecuta procedimientos, sino que comprende la relación $Av = \lambda v$ como

un Objeto encapsulado que expresa una propiedad general de la transformación lineal.

Estudiante 1, tarea 2.

El razonamiento de Santiago en la tarea 2 evidencia una concepción Objeto del concepto de valor y vector propio asociados a la matriz, que le permite articular los procesos algebraicos y geométricos implicados en el cálculo de potencias de matrices y su efecto sobre cualquier vector del plano. El estudiante inicia recordando que los vectores propios de la matriz E definen direcciones invariantes bajo la transformación lineal, y a partir de ello plantea la descomposición

del vector x como combinación lineal de los vectores propios v_1 y v_2 .

De esta forma, representa $x = c_1 v_1 + c_2 v_2$ y aplica la transformación E^{10} sobre ambos términos, reconociendo que cada vector propio conserva su dirección y solo es afectado por su correspondiente valor propio elevado a la potencia indicada.

En su desarrollo (ver Figura 26), Santiago escribe:

$$E^{10}x = E^{10}(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1E^{10}v_1 + c_2E^{10}v_2 = c_1\lambda_1^{10}v_1 + c_2\lambda_2^{10}v_2,$$

mostrando una coordinación entre el Proceso de aplicación reiterada de la transformación y el significado del valor propio como múltiplo por escalar. Este razonamiento evidencia que el estudiante no se limita a manipular casos particulares, sino que generaliza el comportamiento de la matriz sobre cualquier vector del plano. Además, reconoce que la acción de E^{10} sobre x depende de las direcciones propias definidas por v_1 y v_2 , lo cual le permite interpretar geoméricamente que la transformación amplifica o mantiene la magnitud de los componentes de x según el valor propio asociado.

Figura 26.

Producción del estudiante 1, tarea 2

$x \in E_M$
 $B \in E_N$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = E \left[c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= E^{10} c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + E^{10} c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E^{10} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2^{10} c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Durante la entrevista, el diálogo con el investigador permite apreciar la evolución del razonamiento de Santiago, quien, a través de la discusión guiada, reconstruye la relación entre los vectores propios, los espacios propios y la base del plano:

E1: Entonces voy a ubicar el vector v_1 sobre esta recta diagonal y el vector v_2 sobre esta recta vertical.

INV: ¿Por qué estás dibujando una recta en vez del vector?

E1: Porque estos vectores propios también pueden ser la base de todos los vectores.

INV: Cuando tú los escribes en términos de una recta, ¿qué es lo que realmente estás dibujando?

¿Cómo se llama el conjunto de todos los vectores propios asociados a cada uno de esos λ ?

E1: ¿El generado de los vectores?

INV: Sí, ¿cómo se llama ese conjunto? El que llamábamos E_λ .

E1: Ah... el espacio propio.

INV: Así es. Entonces esa recta que estás dibujando ahí representa el espacio propio.

E1: Listo. Entonces... E^{10} para cualquier $x \in \mathbb{R}^2$. A ver, cuando multiplico una matriz por sí

misma, lo que estoy haciendo es aplicar dos veces la transformación, ¿no? Puedo ver entonces que $E^{10}x$ es aplicar diez veces la transformación al vector x . Cada vez que aplico la

transformación obtengo un nuevo vector en \mathbb{R}^2 , igual que cuando multiplico la matriz por el

vector. Entonces, sea $\alpha \in E_{\lambda_1}$, como $\lambda_1 = 1$, al aplicar la transformación al vector α se obtiene el

mismo α , por tanto $E^{10}\alpha = \alpha$. Ahora tomo un $\beta \in E_{\lambda_2}$; como $\lambda_2 = 2$, cada vez que aplico la

transformación al vector β lo va multiplicando por 2 y por eso $E^{10}\beta = 2^{10}\beta$.

INV: Sí, bien.

E1: Y para el resto de los vectores diría que no les puede pasar lo mismo.

INV: Bueno, ahora mira los vectores v_1 y v_2 , ¿qué relación tienen esos vectores?

E1: ¿Cómo así?, no entiendo la pregunta.

INV: Bueno, mira entonces las rectas que dibujaste, ¿qué representan v_1 y v_2 en cada una de las rectas?

E1: Pues es un vector dentro de la recta, ¿no?

INV: Sí, y ¿qué papel juega ese vector dentro de la recta? Por ejemplo, si yo quisiera hablar de la ecuación vectorial de la recta.

E1: Pues sería el vector director.

INV: Exacto. Ahora mira que esas dos rectas se intersecan, ¿cierto? ¿Qué pasaría si dos rectas no se intersecan?

E1: Serían paralelas.

INV: Así es, ¿y qué pasa con los vectores directores cuando las rectas son paralelas?

E1: Son múltiplos.

INV: Exacto, serían múltiplos escalares. Entonces, ¿qué pasa con los vectores v_1 y v_2 si las rectas que dibujaste no son paralelas?
 E1: Pues no son múltiplos.
 INV: ¿Y qué quiere decir que esos dos vectores en \mathbb{R}^2 no sean múltiplos?
 E1: Que son linealmente independientes, o sea que generan \mathbb{R}^2 .
 INV: Exacto. Sabiendo esto, si tomas un vector cualquiera en \mathbb{R}^2 , ¿cómo lo puedes escribir?
 E1: Como combinación lineal de esos dos vectores, v_1 y v_2 .
 INV: Sí, ya lo tienes.
 E1: Ahh ya, entonces lo puedo escribir así y ahora sí puedo aplicar la transformación.
 INV: Listo, muy bien. ¿Algún comentario sobre este ejercicio?
 E1: Ehh... yo lo entendí así.
 INV: Entonces, ¿qué sería importante cuando queremos encontrar vectores propios?
 E1: De pronto saber cómo están relacionados con los otros vectores.
 INV: Sí, a veces puede servir para hacer cálculos más fáciles, porque por ejemplo en este ejercicio, encontrar E^{10} de una matriz 2×2 no es tan sencillo, pues sí se puede pero requiere hacer muchas cuentas, ¿y si fuera E^{1200} ? Así sea una matriz pequeña, los cálculos son muy largos, hasta para un computador. Entonces verlos así hace mucho más fácil las operaciones.

El diálogo muestra cómo el estudiante reconstruye la noción de espacio propio y la relación de independencia lineal entre los vectores v_1 y v_2 , identificando que estos constituyen una base de \mathbb{R}^2 . Este reconocimiento es clave, pues a partir de él logra justificar algebraica y geoméricamente la descomposición de cualquier vector del plano como combinación lineal de los vectores propios y, en consecuencia, generalizar el efecto de E^{10} sobre todo $x \in \mathbb{R}^2$.

En términos de la teoría APOE, el razonamiento de Santiago evidencia una coordinación entre los procesos de producto matriz-vector, independencia lineal, descomposición en base propia y potenciación de matrices, que culmina en una encapsulación de la

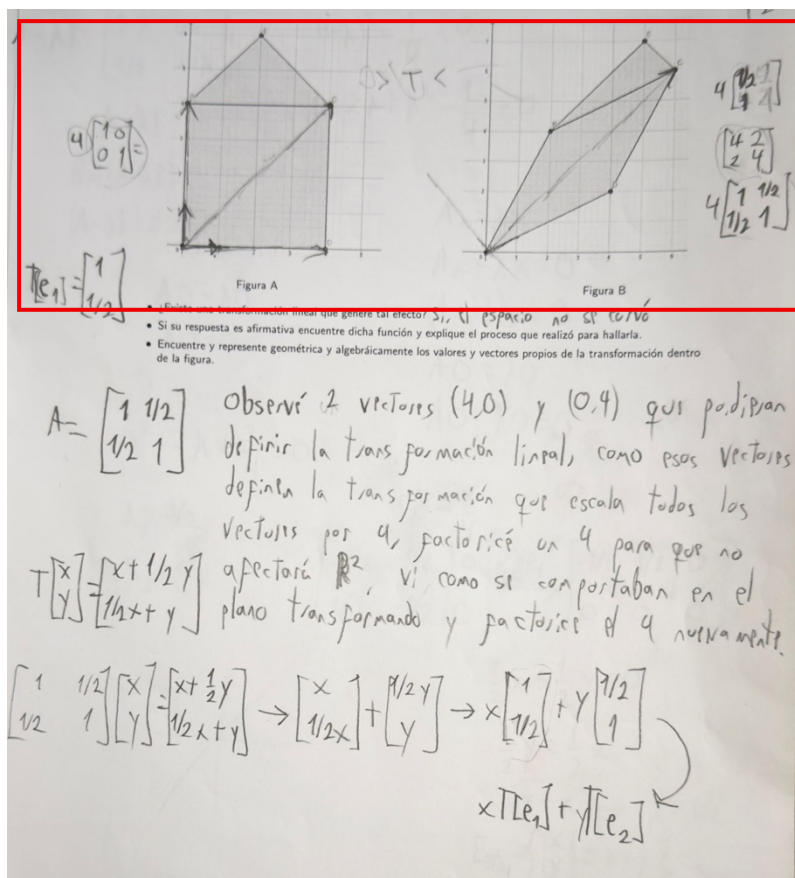
ecuación $Av = \lambda v$ como entidad matemática general. Esta comprensión le permite integrar las perspectivas algebraica y geométrica del concepto, consolidando una concepción Objeto del valor y vector propio como parte de un esquema que articula la matriz, la transformación lineal y el espacio propio.

Estudiante 1, tarea 3.

El razonamiento de Santiago en la Tarea 3 evidencia una concepción Objeto del concepto de valor y vector propio asociado a la transformación lineal, en la que logra integrar de manera coherente los aspectos algebraicos y geométricos de la transformación lineal. Desde el inicio de la actividad, el estudiante observa las Figuras A y B (ver Figura 27) e identifica visualmente el efecto que produce la matriz sobre el plano, señalando que existen vectores, en este caso, $(4,0)$ y $(0,4)$ que pueden definir la transformación lineal. En su explicación escrita (ver Figura 27), Santiago describe que la transformación “escala todos los vectores por factores distintos” y analiza cómo los vectores del plano se comportan tras ser transformados, evidenciando un pensamiento geométrico que conecta la acción de la matriz con los efectos sobre las direcciones invariantes.

Figura 27.

Producción del estudiante 1, tarea 2



Posteriormente, al formalizar la transformación, el estudiante construye la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

y desarrolla el procedimiento algebraico para determinar los valores propios (ver Figura

28). A partir del cálculo del polinomio característico, obtiene $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Durante este proceso, el estudiante no se limita a ejecutar el algoritmo de resolución

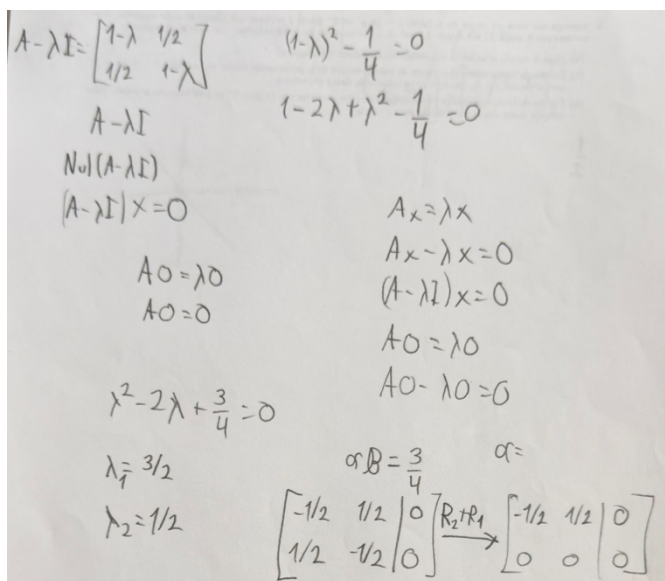
de $\det(A - \lambda I) = 0$, sino que establece conexiones entre el cálculo algebraico y la

interpretación geométrica del valor propio. Esto se evidencia cuando, al explicar sus

procedimientos, señala que “cada valor propio indica cuánto se estira o se encoge un vector cuando se aplica la transformación”, mostrando que interpreta el valor propio como un factor de escala que modifica la magnitud de los vectores en las direcciones invariantes del plano. Esta evidencia indica que el estudiante ha interiorizado el proceso algebraico de determinación de valores propios, dotándolo de significado geométrico, lo que constituye un avance hacia una concepción Proceso del valor propio y vector propio.

Figura 28.

Producción del estudiante 1, tarea 3.1



A continuación, Santiago identifica correctamente que los subespacios propios (ver

Figura 29) están formados por los vectores paralelos a las rectas $y = x$ y $y = -x$,

correspondientes a $E_{3/2}$ y $E_{1/2}$, respectivamente. Esta representación indica que el estudiante no

solo reconoce los vectores propios como soluciones del sistema $(A - \lambda I)v = 0$, sino que

también visualiza el espacio propio como una dirección invariante del plano. En este punto, su razonamiento combina de manera explícita los registros algebraico y geométrico, mostrando que comprende la relación entre la matriz, sus valores propios y la estructura del espacio vectorial transformado.

Las Figuras 28 y 29 evidencia que el estudiante ha alcanzado una concepción Objeto del valor y vector propio. La ecuación $Av = \lambda v$ es tratada por él como una entidad matemática general, que puede operar sobre distintos vectores y revelar propiedades estructurales de la transformación lineal. Su razonamiento muestra coordinación entre procesos previos (producto matriz–vector, interpretación geométrica, solución de sistemas homogéneos) y una encapsulación conceptual que le permite interpretar la transformación como un operador que conserva direcciones específicas.

Figura 29.

Producción del estudiante 1, tarea 3.2

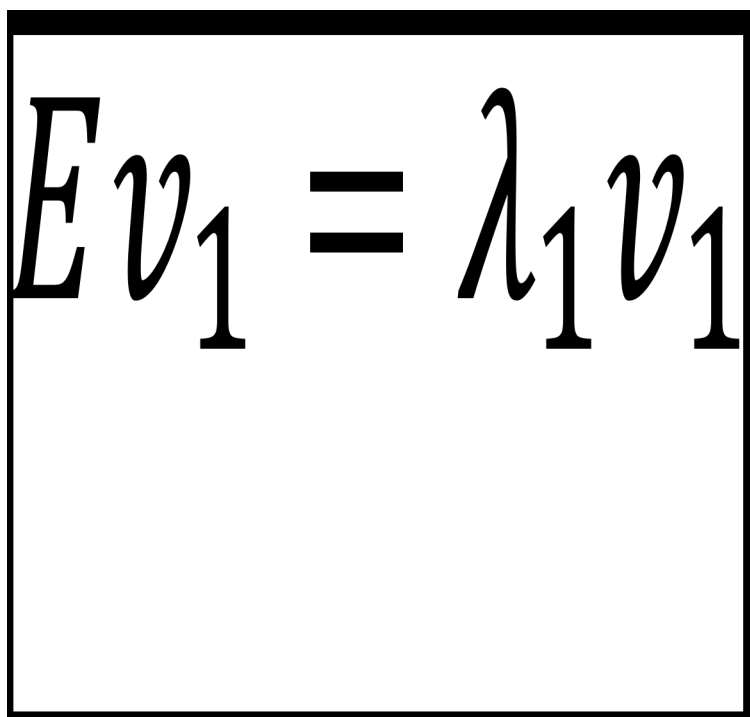
$|A - \lambda I| = 0$
 $(1 - \lambda)^2 - 1/4 = 0$
 $|\lambda - \alpha| = 1/2$
 $3/2 = \alpha_1$
 $1/2 = \alpha_2$
 $E_{\alpha} = \text{Nul}(A - \alpha I)$
 $\text{Nul} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$
 $x = -y$
 $E_{\alpha_1} \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$
 $E_{\alpha_2} \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$
 Vector $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$
 $\alpha = 3/2$

El razonamiento del Estudiante 2 evidencia un tránsito desde la Acción hacia una concepción Proceso del concepto de valor y vector propio, mediado por la comprensión algorítmica de la ecuación $Av = \lambda v$ y su interpretación geométrica. Como se observa en la Figura 30, el estudiante identifica correctamente la matriz de la transformación lineal como aquella que rota los vectores 90° y posteriormente los escala por 2. Esta identificación muestra una articulación entre el conocimiento previo leído (matriz que rota un vector θ grados) y la representación matricial de una rotación, lo cual constituye una acción sustentada en un modelo de referencia. Posteriormente, el estudiante establece la ecuación característica $E v_1 = \lambda_1 v_1$, y aunque inicialmente no recuerda el motivo de igualar el determinante a 0, logra reconstruir el

procedimiento con la guía del investigador, vinculando el cálculo con la condición de existencia de soluciones no triviales para sistemas homogéneos.

Figura 30.

Producción del estudiante 2, tarea 1



$$E v_1 = \lambda_1 v_1$$

El siguiente fragmento de la entrevista ilustra cómo el diálogo entre estudiante e investigadora promueve el paso de una concepción Acción hacia una concepción Proceso de valor y vector propio:

INV: ¿Qué hiciste para encontrar la transformación?

E2: Había leído en el libro que esta (la matriz A) es la matriz para la transformación que rota un vector θ grados. Dice además que se multiplica el vector resultante por 2, así que para el caso de $\theta = 90^\circ$ esta sería la matriz de la transformación T.

INV: Listo. Ahora, ¿cómo encuentras los valores propios y vectores propios?

E2: Son los vectores que al multiplicarse con la matriz resultan ser un múltiplo escalar del mismo vector.

INV: Sí. Entonces ¿cómo calculas los valores propios? ¿Cuál ecuación usas?

E2: De $Ax = \lambda x$ si paso a restar me queda $(A - \lambda I)x = 0$.

INV: Bien. ¿Y aquí por qué hiciste este determinante igual a 0?

E2: No recuerdo.

INV: Mira que esta ecuación matricial está igualada a 0, por lo que determina un sistema...

E2: Homogéneo.

INV: ¿Cuántas soluciones puede tener un sistema homogéneo?

E2: Una o infinitas.

INV: Cuando es única, ¿cuál es la solución?

E2: La trivial.

INV: Exacto, el vector nulo. ¿Y el vector nulo puede ser un vector propio?

E2: No, porque sería $x=0$ y no tendría sentido.

INV: Listo, ahora si no es la trivial entonces habría infinitas soluciones, ¿Qué puedes decir de la matriz?

E2: Tendría una variable libre.

INV: Sí, entonces ¿qué pasa con la última fila de la matriz en su forma escalonada?

E2: Va a ser una fila de ceros.

INV: Entonces ¿qué va a pasar con el determinante?

E2: Va a ser 0.

INV: Así es, por eso es que para calcular los valores propios λ debemos igualar el determinante de la matriz $A - \lambda I$ a 0.

E2: Ahh listo.

INV: Vale, entonces llegaste a la ecuación $\lambda^2 + 4 = 0$.

E2: Sí, quiere decir que no hay valores reales de λ .

INV: ¿Cómo puedes interpretar eso geoméricamente con respecto a la transformación?

E2: Significa que no tiene espacio propio, es decir, geoméricamente no existe ningún vector que se mantenga sobre la misma recta después de aplicarle la transformación ya que va a rotar 90° .

En este intercambio, el estudiante evidencia una interiorización del Proceso de valor y

vector propio, reconociendo el significado de la condición $\det(A - \lambda I) = 0$ como un criterio de existencia de soluciones no triviales; además, asocia la ausencia de valores propios reales con la imposibilidad geométrica de conservar direcciones invariantes bajo una rotación. Esta correspondencia entre la estructura algebraica y la interpretación geométrica revela una coordinación de procesos evidenciando una concepción Proceso de este concepto, en la que el

estudiante no se limita a la manipulación de símbolos, sino que empieza a reconocer las implicaciones de los procedimientos que realiza.

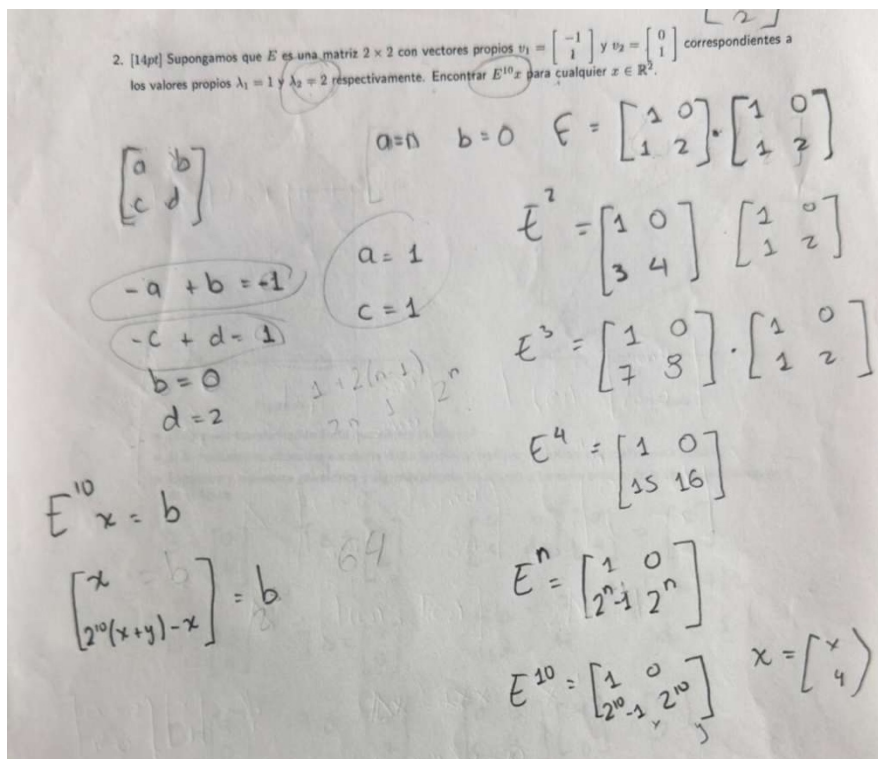
Estudiante 2, tarea 2.

El razonamiento del Estudiante 2 en la Tarea 2 muestra un avance significativo hacia una concepción Objeto del concepto de valor y vector propio. En coherencia con la teoría APOE, el estudiante coordina procesos previamente construidos, como el producto matriz–vector, la descomposición en términos de vectores propios y el comportamiento de las potencias de una matriz, para representar la transformación de manera general y simbólica.

En la Figura 31, el estudiante inicia definiendo la matriz $E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e introduce las condiciones $Ev_1 = \lambda_1 v_1$ y $Ev_2 = \lambda_2 v_2$, haciendo explícita la relación entre los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ y sus vectores propios asociados. A partir de estas igualdades, deduce las ecuaciones que permiten determinar los valores de a, b, c, d , hasta obtener la matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Figura 31.

Producción del Estudiante 2, Tarea 2



Este procedimiento evidencia una concepción Proceso del valor y vector propio, en el cual el estudiante no aplica de manera mecánica un algoritmo, sino que utiliza la relación $Ev = \lambda v$ para construir la matriz a partir de sus propiedades.

En la entrevista, el diálogo con el investigador muestra cómo el estudiante organiza y justifica cada paso de su razonamiento, revelando un nivel de autonomía en la aplicación de los procesos algebraicos:

INV: Explicame lo que hiciste.
 E2: Básicamente dibujé una matriz E 2×2 con las variables a, b, c, d . Como ya nos dan los valores y vectores propios de E , lo que hice fue multiplicar $Ev_1 = \lambda_1 v_1$ y me quedaron estas dos ecuaciones: $-a + b = -1$ y $-c + d = 1$. Luego hice lo mismo con $Ev_2 = \lambda_2 v_2$ llegando a que $b = 0$ y $d = 2$, reemplazo en las dos primeras ecuaciones y me queda $a = 1$ y $c = 1$. Ya

sabiendo cuál es la matriz E , voy multiplicando por ella misma hasta encontrar un patrón. Me doy cuenta que para la matriz E^n la primera fila siempre es $(1,0)$ y la segunda $(2^{n-1}, 2^n)$, entonces E^{10} sería reemplazar $n = 10$ y ya.

INV: Sí está bien, pero el ejercicio te pide encontrar $E^{10}x$.

E2: Ahh sí, entonces escribo $x = (x, y)$ y lo multiplico con la matriz E^{10} , me quedaría así:

$$E^{10}x = \begin{bmatrix} x \\ 2^{10}(x + y) - x \end{bmatrix}$$

Este fragmento revela una interiorización del Proceso de multiplicación de matrices: el estudiante ya no necesita realizar cada multiplicación, sino que reconoce el patrón general y lo expresa simbólicamente. Este reconocimiento muestra una coordinación entre los procesos algebraicos y la estructura funcional de la matriz, en la que el estudiante generaliza para

cualquier n (las potencias de 2 en la segunda fila). Su razonamiento no se limita a la manipulación algorítmica, sino que expresa una concepción Proceso de la transformación,

donde E^{10} se concibe como una entidad que actúa sobre el espacio, escalando los componentes de los vectores según su valor propio.

No obstante, se observa que E2 no recurre a los conceptos de independencia lineal ni de base en \mathbb{R}^2 , a pesar de que dichos conceptos le habrían permitido abordar el problema de forma más eficiente, sin necesidad de determinar explícitamente la matriz E . Esta omisión sugiere que, aunque el estudiante domina los procedimientos algebraicos, aún no articula plenamente estas nociones como estructuras cognitivas integradas al Esquema del valor y vector propio.

Estudiante 2, tarea 3.

El razonamiento del Estudiante 2 al abordar la Tarea 3 muestra su capacidad para movilizar estructuras previamente construidas relacionadas con los conceptos: producto matriz-vector, sistemas lineales y representación geométrica de los espacios propios, para analizar el comportamiento de una transformación lineal a partir de su efecto sobre figuras en el plano.

En la Figura 32, el estudiante parte de la observación geométrica del problema, reconociendo que la Figura B es la imagen de la Figura A bajo una transformación lineal.

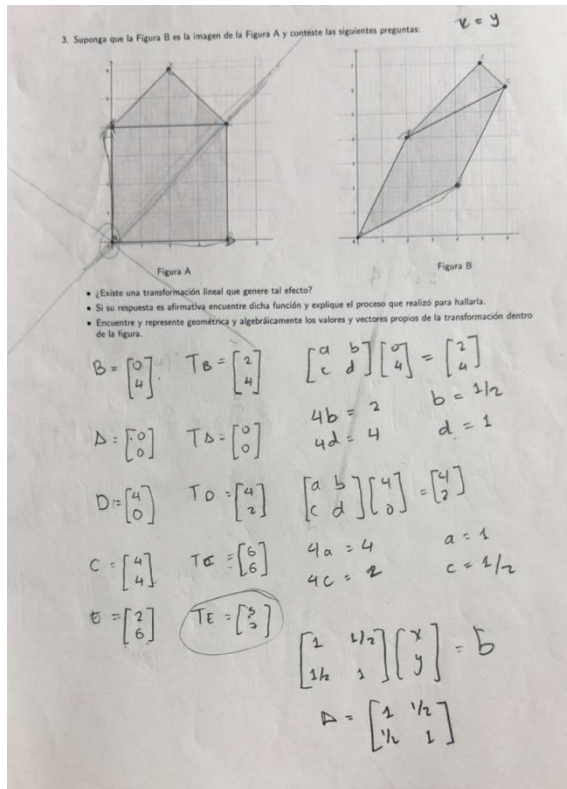
Identifica que la transformación lleva el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ al vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ al vector $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, y a partir de ello plantea el sistema de ecuaciones correspondiente a $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.

De manera ordenada, deduce los valores de los coeficientes de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, justificando su obtención mediante relaciones directas entre las coordenadas de los vectores originales y sus imágenes. Este procedimiento refleja una concepción Proceso del concepto de transformación lineal, en la que el estudiante no se limita a aplicar fórmulas, sino que relaciona las condiciones geométricas con las propiedades algebraicas de la matriz.

Figura

Producción del Estudiante 2, Tarea 3

32.



En la entrevista, el diálogo con el investigador muestra una comprensión cada vez más estructurada del vínculo entre la transformación, su matriz y los vectores propios:

INV: La primera pregunta, ¿crees que existe una transformación lineal que envíe esta casita a esta otra casita?

E2: Sí, porque pude encontrar la matriz. Primero observo que la transformación envía el vector

(0,4) al vector (2,4) y el vector (4,0) al vector (4,2)... entonces llego a que $-c + d = 1$.

INV: ¿Cómo puedes verificar que esa transformación funciona para todos los vectores de la casita?

E2: Lo voy a hacer con el vector (2,6)... eso me da (5,7), sí lo verifica.

INV: Ahora encuentra los valores y vectores propios de A.

E2: Los valores propios son $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$. El espacio nulo para el primero es $y = -x$ y para el segundo $y = x$.

INV: Dibuja esos espacios.

E2: Serían estas dos rectas... solo la recta $y = x$ pasa por la casita, que corresponde al valor propio $\frac{3}{2}$. Por ejemplo, el vector (4,4) lo envía al (6,6).

Este fragmento evidencia que el estudiante interpreta los valores y vectores propios dentro del contexto geométrico de la figura. Reconoce que la recta $y = x$ representa el conjunto de vectores que conservan su dirección tras la transformación (espacio propio asociado a E), y que la transformación escala los vectores de esa recta por el factor $\frac{3}{2}$. Este razonamiento muestra una coordinación de Procesos entre la resolución algebraica de $(A - \lambda I)x = 0$ y la interpretación geométrica del espacio propio.

Asimismo, el estudiante identifica el otro valor propio $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, asociado a la recta $y = -x$, aunque no profundiza en su interpretación geométrica dentro de la figura. Su atención se centra en el espacio propio que atraviesa la “casita”, lo que sugiere que la representación visual es significativa para la noción de dirección invariante.

El estudiante, aunque coordina la construcción algebraica de la matriz, la identificación de sus valores propios y la interpretación geométrica de sus efectos sobre los vectores, logrando integrar múltiples representaciones del valor y vector propio, no explicita el papel de los vectores propios como base del espacio, lo que limita la consolidación de una concepción Objeto del valor y vector propio.

7. Conclusiones

En este capítulo se discuten los resultados obtenidos de esta investigación con base en el marco teórico, el proceso metodológico y el análisis sustentado por la teoría APOE (Arnon et al., 2014).

En este capítulo se presentan las conclusiones derivadas de esta investigación fundamentada en la teoría APOE (Arnon et al., 2014). A partir de la pregunta de investigación: ¿Qué mecanismos, estructuras mentales y relaciones entre los conceptos fundamentales del álgebra lineal debe construir un estudiante universitario de primer año para comprender el concepto de valor y vector propio? Este capítulo integra las reflexiones teóricas y los hallazgos empíricos que permitieron refinar la descomposición genética hipotética del concepto de valor y vector propio. Finalmente, se presentan las implicaciones didácticas del modelo y las proyecciones de esta investigación hacia futuras líneas de estudio.

7.1 Descomposición genética refinada del concepto de valor y vector propio

El análisis de los datos obtenidos durante la implementación del taller muestra que las producciones de los estudiantes sustentan gran parte de la descomposición genética hipotética planteada en el análisis teórico. Además, las evidencias empíricas permitieron refinar y enriquecer la descomposición mediante la identificación de estructuras y mecanismos mentales no anticipados en la fase teórica, producto de la constante interacción entre las tres componentes del Ciclo de Investigación de la teoría APOE: análisis teórico, diseño e implementación de la enseñanza, y análisis y recolección de datos.

La estructura Acción del valor y vector propio, permite que los estudiantes realicen operaciones explícitas sobre vectores y matrices, tales como la multiplicación de un vector por un escalar (λv) y el producto matriz-vector (Av) . Estas acciones iniciales se caracterizaron por un manejo algorítmico con ejemplos concretos, lo cual permitió reconocer la Acción geométrica de la multiplicación por escalares (estiramiento, encogimiento o cambio de dirección del vector) y el efecto que causa la matriz sobre el vector. Sin embargo, la generalización de estas acciones hacia una concepción Proceso del producto matriz-vector constituyó el primer desafío observado.

El paso de la Acción a Proceso, gracias al mecanismo de interiorización, se evidenció cuando los estudiantes comenzaron a interpretar el producto Av como una transformación lineal que actúa sobre todo vector del espacio; lo que implicó una concepción más general entre las operaciones matriciales y las representaciones geométricas. Este paso fue esencial para formular la pregunta que da origen al concepto de vector propio: *¿Existen vectores cuya dirección no cambia al aplicarles una transformación lineal?*

La coordinación entre los Procesos λv y $v=10$, expresada en la ecuación $Av = \lambda v$, permitió que los estudiantes establecieran una relación entre el efecto de la matriz sobre el vector y el escalamiento definido por el valor propio. Este momento representa un avance significativo hacia la interiorización de las relaciones entre los procesos algebraicos y geométricos del concepto, lo cual se consolidó mediante el reconocimiento de que la ecuación $Av = \lambda v$ puede reescribirse como $(A - \lambda I)v = 0$, integrando así la comprensión del sistema homogéneo con la noción de dirección invariante.

El mecanismo de encapsulación se observó cuando los estudiantes comenzaron a tratar la expresión $Av = \lambda v$ como un objeto matemático en sí mismo, capaz de operar sobre diferentes vectores y matrices. En este punto, E^n o A^n se conciben como entidades estructuradas que representan el comportamiento iterativo de una transformación lineal. Esta estructura le permite al estudiante reconocer patrones, generalizar y formular expresiones simbólicas sin necesidad de realizar los cálculos de manera reiterada, mostrando una concepción Objeto del concepto de valor y vector propio.

Finalmente, la articulación con la transformación lineal $T(v) = Av$ permitió integrar las representaciones algebraica, geométrica y funcional del concepto, fortaleciendo la comprensión de los valores y vectores propios como entidades que describen direcciones invariantes bajo una transformación lineal.

7.2 Recomendaciones didácticas

El desarrollo de esta investigación reafirma la utilidad del Ciclo de Investigación de la teoría APOE como herramienta metodológica para guiar el diseño, la implementación y el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje en álgebra lineal. La secuencia de tareas elaboradas para este estudio permitió identificar que la construcción del concepto de valor y vector propio requiere una articulación progresiva con conceptos previos como: sistema de ecuaciones lineales, matriz, espacio nulo y transformación lineal.

En este sentido, se recomienda que los cursos iniciales de Álgebra Lineal promuevan actividades que:

- Fomenten la comprensión del producto matriz-vector como representación de una transformación lineal y no solo como un procedimiento algorítmico.
- Articulen el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales con la búsqueda de direcciones invariantes, favoreciendo la transición natural hacia la ecuación $(A - \lambda I)v = 0$.
- Introduzcan gradualmente la noción de vector propio desde representaciones geométricas (en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3) para luego avanzar hacia su formalización algebraica.
- Estimulen el reconocimiento de patrones en las potencias de matrices y en el comportamiento iterativo de las transformaciones, permitiendo la generalización y encapsulación del concepto.

Además, la organización curricular de un curso de Álgebra Lineal I podría beneficiarse de considerar el valor y vector propio como concepto central, desde el cual se articulen los demás contenidos fundamentales. Esto posibilitaría una enseñanza más integrada, en la que los estudiantes comprendan la naturaleza estructural del álgebra lineal y la relación entre sus principales objetos matemáticos. En este contexto, el modelo cognitivo validado en esta investigación puede servir como una guía para el diseño de secuencias didácticas coherentes con la evolución de las construcciones mentales de los estudiantes.

7.3 Sugerencias para futuras investigaciones

Esta investigación constituye uno de los acercamientos al estudio del concepto de valor y vector propio en estudiantes universitarios de primer año, desde la perspectiva cognitiva de la teoría APOE. A partir de los resultados obtenidos, se identifican diversas líneas de trabajo que pueden ser exploradas en investigaciones futuras, entre ellas:

- Analizar cómo evoluciona la comprensión del concepto de valor y vector propio cuando se amplía el contexto a espacios vectoriales distintos de \mathbb{R}^n , por ejemplo, espacios de polinomios o de transformaciones lineales.
- Diseñar secuencias de enseñanza que integren herramientas tecnológicas o visuales (como software de geometría dinámica) para fortalecer la conexión entre las representaciones algebraicas y geométricas.
- Profundizar en la coordinación entre los esquemas de sistemas de ecuaciones lineales, transformación lineal y diagonalización, con el fin de determinar cómo estas construcciones contribuyen a la consolidación del esquema del valor y vector propio.
- Explorar las implicaciones curriculares del modelo cognitivo validado en esta investigación, evaluando su aplicabilidad en diferentes instituciones y contextos educativos.

Referencias Bibliográficas

- Anton, H. (2010). *Elementary linear algebra* (10th ed.). Wiley.
- Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory a framework for research and curriculum education. New York: Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- Betancur, A., Roa-Fuentes, S., y Parraguez, M. (2022). Construcciones mentales asociadas a los eigenvalores y los eigenvectores refinación de un modelo cognitivo. *AIEM – Avances de investigación en educación matemática*, 22, 23 – 46. <https://doi.org/10.35763/aiem22.4005>
- Betancur, A., Roa-Fuentes, S., y Ballesteros, S. (2021). Una descomposición genética preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector: el análisis de libros de texto como sustrato en la construcción de modelos cognitivos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 24(3), 245-276. <https://doi.org/10.12802/relime.21.2431>
- Caglayan, G. (2015). Making sense of eigenvalue–eigenvector relationships: Math majors’ linear algebra – Geometry connections in a dynamic environment, *The Journal of Mathematical Behavior*, 40, 131-153. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.08.003>
- Campos, V. (2017). Los conceptos valor propio y vector propio en un texto de álgebra lineal: una mirada desde la teoría APOE. *Instituto Politecnico Nacional, Ciudad de México*.
- Del Valle, J. (2011). Álgebra lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias. *Mc Graw-Hill*.
- Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., & Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, 24(1), 41-46.
- Naranjo Cuélla, J. (2022) *Técnica de caracterización de fallas en tiempo real basada en los valores y vectores propios de la matriz asociada a las elipses generadas por la transformada de Clarke de voltajes trifásicos*. Universidad de los Andes.
- Isanta, L. A. (1984). Clasificación de regiones climáticas por medio de los vectores propios cronológicos de la variación intra-anual de la precipitación. *Revista Tiempo y Clima*, 3(4).
- Dorier, J. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, (pp. 1–81). Grenoble, Francia: Kluwer Academics Publishers.
- Dorier, J. L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 255-273). Springer, Dordrecht.
- Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. *MAA Notes*, 85-106.
- Euler, L. (1765). "De motu corporum rigidorum." *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 10, 3-24.
- García, M. M. y Llinares, S. (1994). Algunos referentes para analizar tareas matemáticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (18), 13-25.

- Gol, S. (2012). Dynamic geometric representation of eigenvector. En S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle y M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th annual conference on research in undergraduate mathematics education* (pp. 53 –58). Portland: Rume.
- Gol Tabaghi, S., Sinclair, N. Using Dynamic Geometry Software to Explore Eigenvectors: The Emergence of Dynamic-Synthetic-Geometric Thinking. *Tech Know Learn* **18**, 149–164 (2013). <https://doi.org/10.1007/s10758-013-9206-0>
- Harel, G. (1989a). Learning and teaching linear algebra: Difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes, *Focus on Learning Problems in Mathematics* **11**, 139-148.
- Harel, G. (1989b). Applying the principle of multiple embodiments in teaching linear algebra: Aspects of familiarity and mode of representation, *School Science and Mathematics* **89**, 49-57.
- Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach high school students basic notions in linear algebra, *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology* **21**, 387-392.
- Hawkins, T. (1975). Cauchy and the spectral theory of matrices. *Historia Mathematica*, **2**(1), 1–29. [https://doi.org/10.1016/0315-0860\(75\)90032-4](https://doi.org/10.1016/0315-0860(75)90032-4)
- Hoffman, K., Kunze, R., & Finsterbusch, H. E. (1973). *Álgebra lineal*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear Algebra*. (pp. 191–207). Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers.
- Karakok, G. (2019). Making connections among representations of eigenvector: what sort of a beast is it? *ZDM*, **51**(7), 1141-1152. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01061-9>
- Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from* (Vol. 6). New York: Basic Books.
- Martínez, C. (2006). Sobre el surgimiento del concepto de Valor Propio: una historia selecta sobre los orígenes de la Teoría Espectral. *Miscelánea Matemática*, **43**, 53-73.
- Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, **13** (4), 373-385.
- Parraguez, M., Roa-Fuentes, S., Jimenez, R., y Betancur, A. (2022). Estructuras y mecanismos mentales que desde una perspectiva geométrica modelan y articulan el aprendizaje de valor y vector propio en \mathbb{R}^2 . *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, **25**(1), 63 – 92. <https://doi.org/10.12802/relime.22.2513>
- Parraguez González, F. A., Roa-Fuentes, L. L., Manzanero, A. L., & Oktaç, A. (2022). *Estructuras y mecanismos mentales que desde una perspectiva geométrica modelan y articulan el aprendizaje de valor y vector propio en \mathbb{R}^2* . *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, **25**(3), 269–306. <https://doi.org/10.12802/relime.22.2533>
- Poole, D. (2011). *Álgebra lineal una introducción moderna*. México: Cengage Learning.
- Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, **39**, 100-120. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005>

- Sierpiska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. a (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209–246). Grenoble, Francia: Kluwer Academics Publishers.
- Sinclair, N., Gol Tabaghi, S. (2010). Drawing space: mathematicians' kinetic conceptions of eigenvectors. *Educ Stud Math* 74, 223–240. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9235-8>
- Stewart, S., Axler, S., Beezer, R., Boman, E., Catral, M., Harel, G., ... & Wawro, M. (2022). The Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG 2.0) Recommendations. *Notices of the American Mathematical Society*, 69(5). <https://dx.doi.org/10.1090/noti2479>
- Stewart, S., Andrews-Larson, C., Berman, A., & Zandieh, M. (Eds.). (2018). *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6>
- Tatira, L. (2023). Undergraduate students' conceptualization of elementary row operations in solving systems of linear equations. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(11), Article em2367. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13679>
- Thomas, M. & Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: embodied, symbolic, and formal thinking. *Mathematics Education Research Group of Australasia*. 23, 275 - 296. <https://doi.org/10.1007/s13394-011-0016-1>
- Trigueros, M., Can Cabrera, L., & Sánchez Aguilar, M. (2024). *Mental constructions for the learning of the concept of vector space*. *ZDM – Mathematics Education*, 56, Article 16. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01640-5>
- Trigueros, M. & Oktaç, A. (2019). Task Design in APOS Theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 43-55. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.256>

Apéndice I

Clásica

Se estudia el álgebra vectorial y matricial, como preámbulo para generalizar a las estructuras de espacio vectorial.

1. Preliminares.

- a) Principio de Inducción Matemática. Aplicaciones.
- b) Sucesiones recursivas, coeficientes binomiales y el teorema del binomio.
- c) El campo de los Números complejos: representación geométrica, potencias y raíces complejas.
- d) Teorema Fundamental del álgebra.

2. \mathbb{R}^n como Espacio vectorial y como Espacio Euclidiano

- a) Vectores geométricos. Vectores y coordenadas.
- b) Suma de vectores, producto de un vector por un escalar, producto escalar de vectores, producto vectorial y proyecciones.
- c) Rectas y planos en el espacio. Subespacios de \mathbb{R}^n
- d) Dependencia e independencia lineal, generado lineal, bases.

3. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

Sistemas de ecuaciones lineales.

Solución general de un sistema de ecuaciones lineales.

Álgebra de matrices.

Operaciones elementales entre filas.

Matrices equivalentes por filas. Matrices escalonadas reducidas por filas.

Matrices invertibles. Matrices elementales.

Algoritmo para encontrar la inversa de una matriz cuadrada.

4. Determinantes

- a) Ampliación del concepto de volumen.
- b) Cálculo de determinantes por diagonalización.
- c) Fórmula del producto y sus consecuencias.
- d) Fórmulas de expansión para calcular determinantes.
- e) Determinante de la transpuesta.
- f) Regla de Cramer.

Catórica

Está implícita la distinción entre objetos y morfismos de las categorías que se estudian: Los espacios vectoriales, y los espacios euclidianos. La operatoria entre matrices aparece de manera natural como las operaciones correspondientes a operaciones naturales entre transformaciones lineales. Está basada en el libro de los profesores Sonia Sabogal y Rafael Isaacs.

1. Los Escalares.

- a) Números naturales. Principio de Inducción.
- b) El campo de los Números complejos: representación geométrica, potencias y raíces Complejas.
- c) Campos finitos.

2. \mathbb{R}^n como Espacio vectorial.

- a) Solución general de un sistema de ecuaciones lineales. Metodo de Gauss.
- b) El espacio de las n-plas. Operaciones.
- c) Subespacios vectoriales. Independencia lineal, generado y bases.
- d) Rectas, planos subespacios afines en \mathbb{R}^n .

3. Transformaciones lineales y Matrices.

Transformaciones lineales de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m .

Representación de transformaciones por matrices.

Álgebra de matrices vs álgebra de transformaciones.

Matrices invertibles. Algoritmo para encontrar la inversa de una matriz cuadrada.

Núcleo e imagen. Relación con la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

4. \mathbb{R}^n como espacio vectorial euclídeo.

- a) Producto punto. Otros productos internos en \mathbb{R}^n .
- b) Norma de un vector. Distancia entre puntos.
- c) Desigualdad de Cauchy-Shwarz.
- d) Coseno entre vectores. Proyección.
- e) Producto cruz, producto punto.

5. Determinantes.

- a) Ampliación del concepto de volumen.
- b) Cálculo de determinantes por diagonalización.
- c) Fórmula del producto y sus consecuencias.
- d) Fórmulas de expansión para calcular determinantes.
- e) Determinante de la transpuesta.
- f) Regla de Cramer.

Moderna

A partir del texto de Poole, texto que contiene aplicaciones muy sugestivas y actuales.

1. Vectores.
 - a) Introducción: el juego de la pista de carreras.
 - b) Geometría y álgebra de vectores.
 - c) Longitud y ángulo: el producto punto.
 - d) Rectas y Planos.
 - e) Aplicaciones.

2. Sistemas de ecuaciones lineales.
 - a) Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales.
 - b) Métodos directos para resolver sistemas lineales.
 - c) Conjuntos generadores e independencia lineal.
 - d) Métodos iterativos para resolver sistemas lineales
 - e) Aplicaciones.

3. Matrices.
 - a) Operaciones con matrices.
 - b) Álgebra matricial.
 - c) La inversa de una matriz.
 - d) Subespacios, bases, dimensión y rango.
 - e) Introducción a las transformaciones lineales.
 - f) Aplicaciones.

4. Vectores y valores propios.
 - a) Introducción a valores y vectores propios.
 - b) Determinantes.
 - c) Valores y vectores propios de matrices $n \times n$.
 - d) Semejanza y diagonalización.
 - e) Aplicaciones.
 - f) Métodos iterativos para calcular eigenvalores

Matricial

Basada en el libro de Howard Anton capítulos 1,2,3,4.

1. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices.
 - a) Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales.
 - b) Eliminación gaussiana.
 - c) Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales.
 - d) Matrices y operaciones matriciales.
 - e) Reglas de la aritmética matricial.

- f) Matrices elementales y un método para hallar la inversa.
 - g) Resultados adicionales acerca de los sistemas de ecuaciones y la inversibilidad.
2. La función determinante.
- a) Evaluación de los determinantes por reducción en los renglones.
 - b) Propiedades de la función determinante.
 - c) Desarrollo por cofactores; regla de Cramer.
 - d) Vectores en los espacios bidimensional y tridimensional.
3. Introducción a los vectores (geométricos).
- a) Normas de un vector; aritmética vectorial.
 - b) Producto escalar (punto); proyecciones.
 - c) Producto vectorial (cruz).
 - d) Rectas y planos en el espacio tridimensional.
4. Espacios vectoriales
- a) Espacio euclidiano n dimensional.
 - b) Espacios vectoriales generales.
 - c) Subespacios. d) Independencia lineal.
 - d) Base y dimensión.
 - e) Espacio de renglones y columnas de una matriz; rango; aplicaciones para hallar bases.
 - f) Espacios de productos interiores.
 - g) Longitud y ángulo en los espacios de productos interiores.
 - h) Bases ortonormales; proceso de Gram-Schmidt.
 - i) j) Coordenadas; cambio de base.