

FUENTES OVOIDALES EN LA TEORÍA GRAVITACIONAL DE EINSTEIN

JUAN ANDRÉS GUARÍN ROJAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2025

FUENTES OVOIDALES EN LA TEORÍA GRAVITACIONAL DE EINSTEIN

JUAN ANDRÉS GUARÍN ROJAS

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE
FÍSICO

DIRECTOR

ANTONIO CALIXTO GUTIÉRREZ PIÑEREZ
Doctor EN CIENCIAS NATURALES, FÍSICA

CODIRECTOR

RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARIS
Doctor EN CIENCIAS NATURALES, FÍSICA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

2025

*A todos aquellos que me han inculcado la
pasión por la física y las matemáticas.*

AGRADECIMIENTOS

Cuando veo las estrellas recuerdo mi propia mortalidad; pero también recuerdo que hay sentimientos que me trascienden. Mientras haya seres humanos, habrá alguno, entre ellos, que sienta la misma admiración que yo siento al ver las estrellas. La curiosidad y el deseo de comprender el universo está en nuestra misma naturaleza humana. Al seguir nuestra pasión por la ciencia, hacemos parte de algo más grande que nos trasciende. De un sentimiento que impulsa como un motor a la sociedad. Este gusto por la física y la ciencia ha sido alimentado por muchas personas a las que quiero agradecer en este inciso. Agradezco al profesor Daniel Moreno Caicedo por inculcarme la disciplina y ayudarme a desarrollar mis habilidades matemáticas. Agradezco a los profesores que he tenido en mi trayectoria universitaria. En especial al profesor Calixto por mostrarme lo bello que es describir la física en términos de principios fundamentales y relaciones matemáticas precisas y al profesor Rafael Torres por acogerme como estudiante y por inundarme de ideas estimulantes en diversos problemas de la física.

Durante mi carrera muchas personas me dieron además su apoyo personal y su compañía. Primeramente agradezco a mis padres y a mi hermano, por confiar en mí y brindarme su apoyo incondicional. Agradezco a mis amigos de física, en especial a Juan Diego, por ser como un hermano en nuestro viaje por el aprendizaje, a Tatiana, por ser una cálida amiga, a Andres Ferreira, por nuestras discusiones de física, a Sthefania, por ser una persona que siempre te recibe con una sonrisa, y a Juan Camilo, por nuestras largas y entretenidas charlas durante el almuerzo. A mis amigos de física de otras cohortes, a Nicolás y Angie, por su apoyo constante, a Lisbeth Nathalia, por su compañía, y a Brayan, Sofia, Nicolás y Santiago, por contagiarme de su entusiasmo y alegría por el conocimiento. A mis estudiantes de tutorías, que también me han contagiado de su alegría y pasión por el saber. En general, a mis compañeros del ACEIF, con quienes he compartido largas jornadas de estudio.

De no ser por algunos divulgadores de ciencia tampoco estaría aquí. Recuerdo en

especial un documental de Michio Kaku sobre la posibilidad física de viajar en el tiempo. En él se hablaba sobre la maleabilidad del tiempo en la relatividad especial y en la relatividad general. Estas ideas introdujeron en mí una semilla de curiosidad científica cuando era muy pequeño, años antes de entrar al Bachillerato. Tiempo después, esta semilla daría fruto haciéndome querer estudiar física para llegar a comprender, al fin, por qué el tiempo es maleable.

Finalmente, agradezco al Ministerio de Educación Nacional de Colombia y demás entidades que hacen posible el programa de Generación E, el cual me brindó apoyo financiero durante mi carrera.

CONTENIDO

	pág.
PROLEGÓMENOS	15
PARTE I: LA GEOMETRÍA DEL ÓVALO DE DESCARTES	24
1. EL ÓVALO DE DESCARTES	25
1.1. Superficies ópticas rigurosamente estigmáticas	25
1.2. Definición del óvalo de Descartes	29
1.3. Parametrizaciones del óvalo de Descartes	32
1.3.1. Parametrización del óvalo en términos de una coordenada angular	32
1.3.2. Parametrización del óvalo en términos de una coordenada radial	34
1.4. Posiciones relativas de los vértices del óvalo de Descartes	36
1.5. El óvalo de Descartes como una curva de tres focos	37
1.6. Condición de existencia del óvalo de Descartes	41
2. LA FAMILIA DE CURVAS ORTOGONALES A LA FAMILIA DE ÓVALOS CONFOCALES	45
2.1. Construcción de la familia de curvas ortogonales	45
2.2. Parametrizaciones de la sinécdola	49
2.2.1. Parametrización de la sinécdola en términos del parámetro t definido por $t = \operatorname{arcsenh}(x/y)$	49
2.2.2. Parametrización de la sinécdola en términos de una coordenada angular	50
2.3. Casos particulares de sinécdolas	55
2.4. La asíntota de la sinécdola	57
2.5. Intersecciones entre el óvalo de Descartes y la sinécdola	58
3. EL SISTEMA DE COORDENADAS OVOIDALES	61
3.1. Construcción de las coordenadas ovaladas	61

3.2. Construcción de las coordenadas ovoidales	64
3.3. El elemento de línea en coordenadas ovoidales	66
3.4. Operadores diferenciales en coordenadas ovoidales	67
3.5. La ecuación de Laplace en coordenadas ovoidales	69
PARTE II: SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN	72
4. ESPACIOTIEMPOS ESTACIONARIOS Y OVOIDALMENTE SIMÉTRICOS	73
4.1. El método de Krasinski	73
4.2. El ansatz métrico estacionario y ovoidalmente simétrico	75
4.3. Simetrías en Relatividad General	78
4.3.1. Vectores de Killing e isometrías	78
4.3.2. Constantes de movimiento y otros invariantes	80
4.4. Vectores de Killing del ansatz métrico estático y ovoidal	81
5. FLUIDOS ANISÓTROPAS ESTÁTICOS	85
5.1. Fluidos en Relatividad General	85
5.2. Soluciones de fluido de las ecuaciones de campo de Einstein a partir del ansatz métrico estático y ovoidal	88
5.3. Imposición de las condiciones de energía a la familia de soluciones encontrada	93
CONCLUSIONES GENERALES	99
BIBLIOGRAFÍA	104
ANEXOS	111
A. ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LOS ÓVALOS DE DESCARTES	112
A.1. Limite superior e inferior del radio en la parametrización radial del óvalo de Descartes	112
A.2. Caracolas de Pascal como un caso particular de los óvalos de Descartes	116

B. ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LAS SINÉCDOLAS	120
B.1. Condición para que la función $y(t)$, asociada a la parametrización de la sinécdoła en la variable $t = \operatorname{arcsenh}(x/y)$, tome valores positivos	120
B.2. Grado algebraico de la ecuación s para $a \in \mathbb{Q}$	121
B.3. Teorema de existencia de soluciones positivas de la ecuación s	124
B.4. Soluciones de la ecuación s para $a = 1$ y $a = 1/3$	127
B.4.1. Soluciones en el caso $a = 1$	127
B.4.2. Soluciones en el caso $a = \frac{1}{3}$	129
C. RELACIONES ASOCIADAS A LAS DERIVADAS DE Λ Y Υ	135
C.1. Relaciones entre las segundas y terceras derivadas de Λ y Υ	135
C.2. Derivadas de Λ y Υ en función de sí mismas	137
D. ANSATZ MÉTRICO ESTACIONARIO Y OVOIDALMENTE SIMÉTRICO	140
E. SOLUCIÓN MÁS GENERAL DE LA ECUACIÓN DE KILLING PARA EL ANSATZ MÉTRICO ESTÁTICO Y OVOIDAL	144
F. TENSOR DE RICCI Y TENSOR DE RIEMANN	155
G. CONDICIONES DE ENERGÍA EN RELATIVIDAD GENERAL	159
G.1. Condición de energía débil	159
G.2. Condición de energía fuerte	160
G.3. Condición de energía dominante	161

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. La luz va de A a A' por cualquiera de los rayos de luz mostrados en la figura. En esta misma se muestra un corte transversal del elipsoide prolato, S , mediante un plano que pasa por sus focos A y A' .	27
Figura 2. Una superficie S separa dos medios homogéneos con índices de refracción n y n' . Al ser homogéneos, la luz sigue una trayectoria recta en cada uno.	28
Figura 3. Óvalos de Descartes con $ a < 1$. El punto rojo denota al foco F con coordenadas $(0, 0)$. Se ha usado $\tau = 1$ y se han usado valores de u uniformemente espaciados de paso 0.25. Se han coloreado de distinta forma a algunos óvalos para observar cómo cambian al fijar el valor de u y variar el de a .	31
Figura 4. Óvalos de Descartes con $ a > 1$. El punto rojo denota al foco F' con coordenadas $(\tau, 0)$, con $\tau = 1$. Se han usado valores uniformemente espaciados de u de paso 0.7. Se han coloreado en rojo y verde a algunos óvalos para observar cómo cambian al variar el valor de a .	31
Figura 5. Sistema de coordenadas usado para escribir la ecuación cartesiana del óvalo de Descartes (3) y definiciones de ángulos, distancias y puntos. La cantidad τ se toma positiva cuando F' está a la derecha de F y negativa en caso contrario.	33
Figura 6. Óvalos parametrizados con el ángulo $\theta \in (-\pi, \pi]$ de las coordenadas polares. Las curvas se grafican a partir de la ecuación (7) con $a = 0.4$, $u = 2.5$ y $\tau = 2.4$. La curva $r = r_+(\theta)$ da lugar al óvalo $r + ar' = u$, mientras que la otra da lugar al óvalo $r - ar' = u$.	35
Figura 7. Definiciones de las vértices del óvalo de Descartes. Sus posiciones relativas se definen como δ y η . Se toma δ como positivo si V_1 está a la derecha de F , y negativo si lo contrario. Lo mismo para η .	36

- Figura 8. El óvalo de Descartes con sus tres focos F , F' y F'' . Con estos y con un punto conocido M sobre la curva es posible encontrar los valores de a y u para reconstruir la curva. 38
- Figura 9. Gráficas de los conos \mathcal{A} y \mathcal{B} en el caso $|a| < 1$. A la izquierda se tiene $a = 1/2$ y $u = 0.85$, mientras que a la derecha se tiene $a = -1/2$ y $u = -0.3$. Por la forma de los conos, puede haber intersección siempre que el intercepto en z del cono \mathcal{B} este por encima o sobre el vértice del cono \mathcal{A} . 43
- Figura 10. Gráficas de los conos \mathcal{A} y \mathcal{B} en el caso $|a| > 1$. A la izquierda se tiene $a = 2$ y $u = 1.6$, mientras que a la derecha se tiene $a = -2$ y $u = 0.5$. La condición de intersección entre los conos dependerá solamente de la posición del vértice del cono \mathcal{B} . 44
- Figura 11. Familia de óvalos de Descartes de la forma $f(x, y) = \text{cte}$ y el campo vectorial ∇f . Se ha elegido $a = 1/2$ y $\tau = 1$. El óvalo con un pico es un fragmento de una caracola de Pascal y se obtiene al tomar $u = 1/2$. 46
- Figura 12. Gráficas de sinécdolas para $a = 1/2$, $\tau = 1$ y varios valores de v . Se ve que estas sinécdolas guardan cierta similitud con fragmentos de hipérbolas confocales. 48
- Figura 13. Curvas coordenadas del sistema de coordenadas ovaladas, correspondientes a óvalos que comparten dos focos y a sinécdolas. Se ha tomado $a = 1/2$ y $\tau = 1$. El óvalo con un pico, dado en esta gráfica por la ecuación $u = 1$, es también el ciclo interior de una caracola de Pascal (cf. apéndice A). A su vez, la sinécdola graficada con un trazo discontinuo permite notar que hay dos puntos de intersección entre cada óvalo con esta sinécdola 63

Figura 14. Superficies coordenadas del sistema de coordenadas ovoidales. Ellas corresponden de ovoides de Descartes, sinecdoloides y semi-planos paralelos al eje z . Aquí se consideró $a = \frac{1}{2}$, $\tau = 1$, $u = 0.95$, $\phi = -0.22$, y los valores $v = 1.6$ y $v = -1.6$, usados para graficar el sinecdoloide completo. Se ve que el sinecdoloide se asemeja al hiperboloide de doble hoja.

65

Figura 15. En cada región coloreada del plano ua se ilustra cual de los dos radios de la ecuación (187) que cumplen ser no negativos y ser consistentes con la ecuación (4) es mayor que el otro. La región en color blanco representa las regiones donde no se cumple la condición de existencia del óvalo (cf. cuadro 1).

115

LISTA DE TABLAS

	pág.
<p>Tabla 1. Condición sobre el valor de u para que el óvalo de Descartes dado por la ecuación (3) exista, es decir, para que la curva sea no vacía. Aquí, $\min(1, a)$ es el mínimo entre 1 y a.</p>	44
<p>Tabla 2. En este cuadro se presenta las condiciones para que la ecuación (4) se cumpla idénticamente al reemplazar $r = \bar{r}_k$ y para que $\bar{r}_k \geq 0$, con $k = 1, 2, 3, 4$. Estas condiciones toman en cuenta que u debe satisfacer la condición de existencia del óvalo del cuadro 1. La columna marcada con "Obs." contiene una observación adicional sobre los radios \bar{r}_k en el intervalo respectivo. Para el caso $a < 1$ con $a \neq 0$, la observación en paréntesis es para el caso $a < 0$, y la otra, para el caso $a > 0$. Por último, el símbolo $\neg\exists u$ indica que no existe ningún u que cumpla las condiciones impuestas.</p>	115
<p>Tabla 3. Condición sobre el valor de t para que la función $y(t)$ definida por la ecuación (40) sea positiva. Las expresiones \mathbb{R}_+ y \mathbb{R}_- representan respectivamente a los reales positivos y a los reales negativos. Se excluyen los casos en que $a = -1$ y $v\tau < 0$, porque en ellos no existe condición para t</p>	121
<p>Tabla 4. Signos de algunas cantidades relacionadas con los extremos relativos de P. En este cuadro $\text{sign}(Z_+) = -\text{sign}\left(\frac{\tau+u}{\tau-3u}\right)$, $\text{sign}(P(Z_+)) = -\text{sign}(\tau - 3u)$ y $\text{sign}(P(0)) = \text{sign}(\tau + 3u)$, donde $\text{sign}(x) = x/ x$. Por la condición de existencia del óvalo para $a = 1/3$ se considera $u > \tau /3$ (cf. cuadro 1).</p>	133

RESUMEN

TÍTULO: FUENTES OVOIDALES EN LA TEORÍA GRAVITACIONAL DE EINSTEIN¹

AUTOR: JUAN ANDRÉS GUARÍN ROJAS².

PALABRAS CLAVE: OVOIDES DE DESCARTES, SINÉCDOLAS, COORDENADAS OVOIDALES, ANSATZ MÉTRICO OVOIDAL, SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN

DESCRIPCIÓN: Los ovoides de Descartes son importantes en la construcción de sistemas ópticos libres de aberración esférica y con propiedades interesantes como aplanetismo y estigmatismo acromático. Los ovoides además pueden verse como una generalización natural de la esfera y del elipsoide prolato. Por esta razón, en este trabajo se plantea la pregunta: ¿pueden los ovoides de Descartes llegar a ser igual de importantes en relatividad general que en óptica? Para responder esta pregunta, en este trabajo se estudian fuentes con forma ovoidal. Primero se calculan las curvas ortogonales a una familia de óvalos confocales, a las que se denomina sinécdolas. Con las superficies de revolución de estas curvas, se construyen unas coordenadas ortogonales ovoidales. Estas coordenadas pueden usarse para construir un ansatz métrico estacionario y ovoidalmente simétrico a partir de un procedimiento inspirado en el trabajo de Krasiński. Con este ansatz se encuentran soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein de tipo fluido estático con presiones anisótropas. El resultado principal de este trabajo es precisamente la introducción de unas coordenadas ovoidales y de un ansatz métrico ovoidal, que sirven como marco de trabajo para el estudio de fuentes ovoidales en relatividad general.

¹ Trabajo de Grado

² Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Antonio Calixto Gutiérrez Piñeres (Director), Rafael Ángel Torres Amaris (Codirector).

ABSTRACT

TITLE: OVOID SOURCES IN THE EINSTEIN'S THEORY OF GRAVITY³.

AUTHOR: JUAN ANDRÉS GUARÍN ROJAS ⁴.

KEYWORDS: DESCARTES OVOIDS, SYNECDOLAS, OVOID COORDINATES, OVOID METRIC ANSATZ, EXACT SOLUTIONS TO THE EINSTEIN FIELD EQUATIONS

DESCRIPTION: Descartes ovoids are important in the construction of optical systems free of spherical aberration and with interesting properties such as aplanatism and achromatic stigmatism. Ovoids can also be seen as a natural generalization of spheres and the prolate ellipsoids. For this reason, in this work it is questioned: can Descartes' ovoids become of equal importance in general relativity as in optics? To answer this question, in this work ovoid sources are studied. First, curves orthogonal to a family of confocal ovals, called synecdolas, are calculated. With the surfaces of revolution of these curves, ovoid orthogonal coordinates are constructed. These coordinates can be used to obtain a stationary ovoid metric ansatz by a procedure inspired in the work of Krasiński. With this ansatz, exact solutions to the Einstein field equations of static fluid type with anisotropic pressures are found. The main result of this work is precisely the introduction of ovoid coordinates and an ovoid metric ansatz, which serve as a framework for the study of ovoid sources in general relativity.

³ Bachelor Thesis.

⁴ Faculty of sciences, School of Physics, Antonio Calixto Gutiérrez Piñeres (Director), Rafael Ángel Torres Amaris (Codirector).

PROLEGÓMENOS

Naturaleza e importancia del problema

Los ovoides de Descartes aparecen de manera natural en óptica como superficies rigurosamente estigmáticas⁵. Es decir, superficies ópticas capaces de dirigir de manera exacta todos los rayos de luz provenientes de un punto hacia otro, ya sea por reflexión o refracción de la luz. Esta propiedad hace que los ovoides sean útiles para construir sistemas ópticos libres de aberración esférica⁶ y con propiedades interesantes como aplanatismo⁷ y estigmatismo acromático⁸. Los óvalos de Descartes, cuya superficie de revolución son los ovoides, también aparecen en el estudio de la polarización de la luz. Específicamente, la caracola de Pascal, un caso particular de óvalo, aparece al estudiar el cambio en la polarización de un haz de luz al pasar por una lámina de cuarto de onda⁹. Así, los ovoides de Descartes son de gran utilidad en óptica.

Desde el punto de vista matemático, los óvalos de Descartes son curvas cuárticas que tienen como caso particular a las cónicas y a las caracolas de Pascal. En si-

⁵ R. DESCARTES: “La Géométrie”. En: 1637. Cap. Explication de quatre nouveaux genres d’ovales qui servent à l’optique, págs. 352-357; A. SILVA-LORA y R. TORRES: *Explicit Cartesian oval as a superconic surface for stigmatic imaging optical systems with real or virtual source or image*. En: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 476.2235 (2020), pág. 20190894. DOI: 10.1098/rspa.2019.0894; J. P. C. SOUTHALL: *Aplanatic (or Cartesian) optical surfaces*. En: *Journal of the Franklin Institute* 193.5 (1922), págs. 609-626.

⁶ A. SILVA-LORA y R. TORRES: *Superconical aplanatic ovoid singlet lenses*. En: *J. Opt. Soc. Am. A* 37.7 (2020), págs. 1155-1165. DOI: 10.1364/JOSAA.392795.

⁷ A. SILVA-LORA y R. TORRES: *Aplanatism in stigmatic optical systems*. En: *Optics Letters* 45.23 (2020), págs. 6390-6393; A. SILVA-LORA y R. TORRES: *Rigorously aplanatic Descartes ovoids*. En: *J. Opt. Soc. Am. A* 38.8 (2021), págs. 1160-1169. DOI: 10.1364/JOSAA.422809.

⁸ A. SILVA-LORA y R. TORRES: *Achromatic stigmatism: achromatic Cartesian ovoid*. En: *J. Opt. Soc. Am. A* 39.9 (2022), págs. 1524-1532. DOI: 10.1364/JOSAA.460993.

⁹ K. SALAZAR-ARIZA y R. TORRES: *Trajectories on the Poincaré sphere of polarization states of a beam passing through a rotating linear retarder*. En: *Journal of the Optical Society of America A* 35.1 (2017), págs. 65-72.

militud con las cónicas, los óvalos de Descartes también tienen focos, pero en este caso tienen tres¹⁰. Asimismo, los óvalos tienen una ecuación cartesiana que generaliza la ecuación de Schwarzschild para las cónicas¹¹. Se encuentra además que los óvalos son un caso particular de una familia de curvas, llamadas supercónicas¹², que generalizan a las cónicas. Por consiguiente, todo lo anterior hace ver a los óvalos de Descartes como una generalización natural de las cónicas, en particular de la circunferencia y la elipse.

La idea fundamental de este trabajo es que los ovoides de Descartes pueden llegar a ser igual de importantes en relatividad general que en óptica. En concreto, que el uso de objetos ovoidales da lugar a modelos físicamente interesantes. Un hecho que soporta esta idea es que los ovoides pueden tener una forma parecida a un huevo o a la superficie de revolución de un cardioide. Por lo tanto, un objeto ovoidal debe tener un cuadrupolo de masa distinto de cero. Este tipo de objetos son interesantes porque, al ser perturbados, emiten ondas gravitacionales¹³. Por otra parte, al requerir la creación de unas coordenadas ovoidales, el uso de ovoides en relatividad general es importante en sí mismo porque abre la posibilidad de encontrar nuevas soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein.

¹⁰ M. CHASLES: "Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie: particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie". En: Mém. couronnés, Acad. des sci. et belles lett. de Bruxelles. M. Hayez, 1837. Cap. Note XXI: Sur les ovals de Descartes, ou lignes aplanétiques. Págs. 350-353; B. WILLIAMSON: "An Elementary Treatise on the Differential Calculus: Containing the Theory of Plane Curves, with Numerous Examples". En: Longmans, Green, 1912. Cap. XX On the Cartesian Oval, págs. 375-384.

¹¹ SILVA-LORA, A. y TORRES, R. 2020c.

¹² SILVA-LORA, A. y TORRES, R. 2020b; A. W. GREYNOLDS: "Superconic and subconic surface descriptions in optical design". En: *International Optical Design Conference*. Optica Publishing Group, 2002, IMA1. DOI: 10.1364/IODC.2002.IMA1; S. CHO: *Explicit superconic curves*. En: *J. Opt. Soc. Am. A* 33.9 (2016), págs. 1822-1830. DOI: 10.1364/JOSAA.33.001822.

¹³ C. W. MISNER, K. S. THORNE y J. A. WHEELER: *Gravitation*. Princeton University Press, 2017.

Estado general del tema

El tema de este trabajo consiste en modelar objetos con forma ovoidal en relatividad general. Para lograr esto, la teoría requiere que se considere por separado una solución interior y otra exterior. Estas dos soluciones deben pegarse a lo largo de una hipersuperficie tipo tiempo Σ . En la literatura, se presentan varios tipos de pegado, como el de Darmois¹⁴ y el C^3 -*matching*¹⁵. El primero se basa en hacer coincidir la métrica inducida y la curvatura extrínseca en Σ , mientras que el otro se basa en hacer coincidir los valores propios del tensor de Riemann en Σ . Estos métodos se han probado con distinto éxito para pegar soluciones de tipo fluido perfecto esféricamente simétrico con la solución de Schwarzschild¹⁶.

El área de estudio de las soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein es muy rico y variado. Hasta la fecha se han encontrado una gran cantidad de soluciones exactas, entre las que se encuentran: soluciones de fluido esféricamente simétrico¹⁷, soluciones de fluido axialmente simétrico y estacionario con rotación

¹⁴ G. DARMOIS: *Memorial des sciences mathématique: fascicule XXV: les equations de la gravitation einsteinienne*. Gauthier-Villars Paris, 1927; G. DARMOIS: *Les équations de la gravitation einsteinienne*. 25. 1927.

¹⁵ A. C. GUTIÉRREZ-PIÑERES y H. QUEVEDO: C^3 matching for asymptotically flat spacetimes. En: *Classical and Quantum Gravity* 36.13 (2019), pág. 135003.

¹⁶ A. C. GUTIÉRREZ-PIÑERES y H. QUEVEDO: *Darmois matching and C^3 matching*. En: *Classical and Quantum Gravity* 39.3 (2022), pág. 035015; A. C. GUTIÉRREZ-PIÑERES y H. QUEVEDO: *C^3 Matching Conditions for Anisotropic Fluids*. En: *International Journal of Theoretical Physics* 63.9 (2024), pág. 218.

¹⁷ K. SCHWARZSCHILD: *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie*. En: *Sitzungsberichte der königlich preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1916), págs. 424-434; R. C. TOLMAN: *Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid*. En: *Physical Review* 55.4 (1939), pág. 364; H. A. BUCHDAHL: *Reciprocal static solutions of the equations of the gravitational field*. En: *Australian Journal of Physics* 9.1 (1956), págs. 13-18; M. CHAISL y S. D. MAHARAJ: *Compact anisotropic spheres with prescribed energy density*. En: *General relativity and gravitation* 37 (2005), págs. 1177-1189.

rígida¹⁸, y con rotación diferencial¹⁹, soluciones de vacío²⁰ y soluciones asociados a objetos con cuadrupolos de masa²¹. No obstante, se puede recalcar que no todas estas soluciones son útiles para modelar problemas físicos realistas.

Para hallar soluciones exactas, se parte típicamente de un ansatz métrico. La forma específica de este ansatz dependerá del tipo de objeto que se desee modelar. En la literatura, son bien conocidos los ansatz que se deben usar para modelar objetos esféricamente simétricos y objetos axialmente simétricos y estacionarios²².

Lo más cercano que hay en la literatura al estudio de objetos ovoidales es el estudio

-
- ¹⁸ H. D. WAHLQUIST: *Interior solution for a finite rotating body of perfect fluid*. En: *Physical Review* 172.5 (1968), pág. 1291; D. KRAMER: *A new solution for a rotating perfect fluid in general relativity*. En: *Classical and Quantum Gravity* 1.1 (1984), pág. L3; J. M. M. SENOVILLA: *Stationary and axisymmetric perfect-fluid solutions to Einstein's equations*. En: *Rotating Objects and Relativistic Physics: Proceedings of the El Escorial Summer School on Gravitation and General Relativity 1992: Rotating Objects and Other Topics Held at El Escorial, Spain, 24–28 August 1992*. 2005, págs. 73-88.
- ¹⁹ F. J. CHINEA y L. M. GONZÁLEZ-ROMERO: *Interior gravitational field of a stationary, axially symmetric perfect fluid in irrotational motion*. En: *Classical and Quantum Gravity* 7.5 (1990), pág. L99; J. M. M. SENOVILLA: *New family of stationary and axisymmetric perfect-fluid solutions*. En: *Classical and Quantum Gravity* 9.11 (1992), pág. L167; A. GARCÍA: *A new stationary axisymmetric perfect fluid type D solution with differential rotation*. En: *Classical and Quantum Gravity* 11.3 (1994), pág. L45.
- ²⁰ K. SCHWARZSCHILD: *Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie*. En: *Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften* (1916), págs. 189-196; R. P. KERR: *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*. En: *Physical review letters* 11.5 (1963), pág. 237; E. NEWMAN, L. TAMBURINO y T. UNTI: *Empty-space generalization of the Schwarzschild metric*. En: *Journal of Mathematical Physics* 4.7 (1963), págs. 915-923.
- ²¹ G. EREZ y N. ROSEN: *The gravitational field of a particle possessing a multipole moment*. En: *Bull. Research Council Israel* Vol: Sect. F.8 (1959); J. L. HERNÁNDEZ-PASTORA y J. MARTÍN: *Monopole-quadrupole static axisymmetric solutions of Einstein field equations*. En: *General Relativity and Gravitation* 26.9 (1994), págs. 877-907; H. QUEVEDO: *Exterior and interior metrics with quadrupole moment*. En: *General Relativity and Gravitation* 43.4 (2011), págs. 1141-1152.
- ²² H. STEPHANI et al.: *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. 2.^a ed. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003.

de objetos elipsoidales oblatos²³. En particular, Krasiński²⁴ hace un gran avance al proponer un ansatz métrico estacionario y con simetría elipsoidal oblata, que tiene a la métrica de Kerr como caso particular. Posteriormente, varios autores se interesan por encontrar soluciones exactas a partir de este ansatz métrico elipsoidal oblato. Racz²⁵ encuentra soluciones de vacío que coinciden con la solución de Kerr-NUT, mientras que Zsigrai²⁶ encuentra soluciones de tipo fluido perfecto rotante, además de una solución de vacío con constante cosmológica.

Se puede decir que el método de Krasiński es intuitivo porque con él no se caracteriza de manera invariante el ansatz métrico resultante. Este hecho podría implicar, en el peor de los casos, que el ansatz métrico de Krasiński es igual a otro ansatz ya conocido, pero en otras coordenadas. De ahí la necesidad de caracterizar invariante los ansatz métricos derivados de un método parecido al de Krasiński.

Existen varias maneras de caracterizar invariante una métrica en relatividad general. Una primer manera es mediante vectores de Killing, que aparecen, por ejemplo, en espaciotiempos con simetría esférica²⁷. Estos vectores además están asociados a un grupo de isometrías²⁸. Otra manera de caracterizar una métrica es

²³ A. KRASIŃSKI: *Ellipsoidal space-times, sources for the Kerr metric*. En: *Annals of Physics* 112.1 (1978), págs. 22-40. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(78\)90079-9](https://doi.org/10.1016/0003-4916(78)90079-9); I. RACZ: *Note on stationary-axisymmetric vacuum spacetimes with inside ellipsoidal symmetry*. En: *Classical and Quantum Gravity* 9.8 (1992), pág. L93. DOI: 10.1088/0264-9381/9/8/004; J. ZSIGRAI: *Ellipsoidal shapes in general relativity: general definitions and an application*. En: *Classical and Quantum Gravity* 20.13 (2003), pág. 2855. DOI: 10.1088/0264-9381/20/13/330.

²⁴ KRASIŃSKI, A. 1978.

²⁵ RACZ, I. 1992.

²⁶ ZSIGRAI, J. 2003.

²⁷ STEPHANI, H. et al. 2003.

²⁸ R. M. WALD: *General Relativity*. University of Chicago Press, 2010.

mediante colineaciones de Ricci²⁹, que se han encontrado en métricas conocidas como la de Robertson-Walker³⁰, la de Synge³¹ y las de Bianchi³². En³³ se hace un estudio detallado de estas y de otras colineaciones. Otros invariantes que pueden ser útiles son los tensores de Killing. Estos se han encontrado, por ejemplo, en la métrica de Kerr³⁴.

En estrecha relación con lo anterior están los sistemas de coordenadas, dado que por cada simetría deberían haber unas coordenadas que se adapten mejor a ella. Esto hace importante el estudio de sistemas de coordenadas. En³⁵ se hace una revisión de 40 sistemas de coordenadas ortogonales. Algunos de estos hacen uso de curvas cuárticas como cardioides, óvalos de Cassini y cicloides, además de superficies cuárticas como toroides. Sin embargo, ninguno de ellos hace uso de óvalos de Descartes.

Por ende, surge la necesidad de considerar métodos de construcción de sistemas de coordenadas ortogonales. En³⁶, Moon y Spencer presentan dos metodologías

²⁹ G. H. KATZIN, J. LEVINE y W. R. DAVIS: *Curvature Collineations: A Fundamental Symmetry Property of the Space-Times of General Relativity Defined by the Vanishing Lie Derivative of the Riemann Curvature Tensor*. En: *Journal of Mathematical Physics* 10.4 (1969), págs. 617-629. DOI: 10.1063/1.1664886.

³⁰ *The Robertson-Walker metric and the symmetries belong to the family of contracted Ricci collineations*. En: *General Relativity and Gravitation* 8.9 (1977), págs. 731-736.

³¹ K. P. SINGH y D. N. SHARMA: *Ricci and Maxwell collineations in a null electromagnetic field*. En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 8.12 (1975), pág. 1875.

³² I. YAVUZ y U. CAMCI: *Ricci collineations of the Bianchi type II, VIII, and IX space-times*. En: *General Relativity and Gravitation* 28.6 (1996), págs. 691-700; U. CAMCI et al.: *Ricci collineations of the Bianchi types I and III, and Kantowski-Sachs spacetimes*. En: *International Journal of Modern Physics D* 10.05 (2001), págs. 751-765. DOI: 10.1142/S0218271801001219.

³³ G. H. KATZIN y J. LEVINE: "Applications of Lie derivatives to symmetries, geodesic mappings, and first integrals in Riemannian spaces". En: *Colloquium Mathematicum*. Vol. 1. 26. 1972, págs. 21-38.

³⁴ WALD, R. M. 2010.

³⁵ P. H. MOON y D. E. SPENCER: *Field Theory Handbook: Including Coordinate Systems, Differential Equations, and Their Solutions*. John T. Zupal, 1988.

³⁶ *Ibíd.*

principales. La primera consiste en tomar dos familias de curvas que se intersecan ortogonalmente. Las nuevas coordenadas q_1 y q_2 se definen de modo que los elementos de estas familias sean curvas q_i -constante. A partir de q_1 y q_2 se deducen unas coordenadas rotacionales o cilíndricas. Este método fue usado particularmente por Lamé³⁷ y Darboux³⁸ para construir sistemas de coordenadas a partir de óvalos de Cassini y cicloides. La segunda metodología consiste en considerar un mapeo conforme, ya sea en el plano o en el espacio. A partir de este, se infieren las relaciones entre las coordenadas cartesianas y las nuevas coordenadas. Estos mapeos pueden ser inversiones respecto a un círculo, como en³⁹, o transformaciones conformes en el plano complejo, como en⁴⁰.

Propósito y organización del trabajo

El propósito de este trabajo es modelar fuentes ovoidales en relatividad general mediante soluciones exactas. Para conseguir esto, se construyen unas coordenadas ortogonales ovoidales y se construye un ansatz métrico con simetría ovoidal. Estos dos resultados principales se disponen en dos partes distintas. En la parte I se estudia lo necesario para construir las coordenadas ovoidales. Así, en esta parte se estudian los óvalos de Descartes, las sinécdolas y las coordenadas ovoidales. En la

³⁷ G. LAMÉ: *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*. Mallet-Bachelier, 1859.

³⁸ G. DARBOUX: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, 2e édit.* En: *Hermann, Paris* (1899).

³⁹ G. DARBOUX: "Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes". En: Gauthier-Villars, 1910. Cap. Recherche des systèmes isothermes et d'autres systèmes qui se présentent dans la théorie de la chaleur, pág. 277; D. M. WRINCH: *CIX. Some problems concerned with inverted prolate spheroids*. En: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 14.95 (1932), págs. 1061-1070; E. WEBER: "Electromagnetic Fields. Theory and applications". En: vol. 1. Wiley, 1950. Cap. Three-dimensional analytic solutions, págs. 503-509.

⁴⁰ P. MOON y D. E. SPENCER: *Cylindrical and rotational coordinate systems*. En: *Journal of the Franklin Institute* 252.4 (1951), págs. 327-344; P. MOON y D. E. SPENCER: *Some coordinate systems associated with elliptic functions*. En: *Journal of the Franklin Institute* 255.6 (1953), págs. 531-543.

parte II, por su lado, se estudia el uso de estas coordenadas para modelar objetos ovoidales en relatividad general. Para esto, en esta parte se construye un ansatz métrico ovoidal y, a partir de él, se encuentran soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein de tipo fluido anisótropo.

Así, en el capítulo 1 se hace una revisión sobre algunas propiedades interesantes de los ovoides de Descartes. Entre estos, se encuentra un procedimiento algebraico para encontrar la posición del tercer foco, una demostración de la condición de existencia del óvalo de Descartes y una caracterización de la parametrización del óvalo en términos de una coordenada radial r . Los resultados de este capítulo son conocidos en parte o totalmente en la literatura.

En el capítulo 2, se introducen las nuevas curvas denominadas sinécdolas. Éstas se encuentran como la solución de una ecuación diferencial ordinaria reducible a exacta. Para caracterizar estas curvas, se encuentran sus ecuaciones paramétricas y unos casos particulares donde su ecuación cartesiana se puede reescribir como una ecuación algebraica. Se encuentra además la ecuación de la asíntota que tienen las sinécdolas.

Luego, en el capítulo 3 se crea el sistema de coordenadas ovoidales y su versión bidimensional, el sistema de coordenadas ovaladas. Se encuentran las relaciones que describen a las coordenadas cartesianas en términos de las ovoidales. Luego, se calcula el elemento de línea en las nuevas coordenadas y, con este, se explora la posibilidad de resolver la ecuación de Laplace en coordenadas ovoidales mediante el método de separación de variables.

Posteriormente, en el capítulo 4, se propone un ansatz métrico estacionario y ovoidalmente simétrico con base en el método de Krasiński⁴¹. Esto se hace a partir de la métrica sobre una familia de ovoides confocales. Con este ansatz ovoidal, se encuentra además la solución más general de la ecuación de Killing.

Por último, en el capítulo 5, se encuentran soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein de tipo fluido estático y anisótropo. Se buscan las condiciones

⁴¹ KRASIŃSKI, A. 1978.

sobre las funciones y constantes libres para que las soluciones cumplan la condición de energía débil y la condición de energía fuerte. Como parte final, se presentan las conclusiones principales del trabajo.

PARTE I:

LA GEOMETRÍA DEL ÓVALO DE DESCARTES

1. EL ÓVALO DE DESCARTES

En este capítulo se hace una descripción detallada del óvalo de Descartes. Esto incluye una serie de resultados interesantes como su conexión con la óptica, la existencia de un tercer foco y su construcción a partir de la intersección entre dos conos de ejes paralelos, entre otros. Primero, en la sección 1.1 se presentan a los ovoides de Descartes como superficies ópticas rigurosamente estigmáticas. En la sección 1.2 se presenta la definición del óvalo de Descartes, así como su ecuación en unas coordenadas cartesianas. Luego, en la sección 1.3 se describen dos parametrizaciones del óvalo, una con respecto a un ángulo y otra con respecto a una coordenada radial. Con estas parametrizaciones, es posible determinar la posición relativa de los vértices respecto a uno de los focos. Esto se hace en la sección 1.4. Después de esto, en la sección 1.5, se presenta un método algebraico para determinar la posición del tercer foco del óvalo de Descartes. Este método algebraico es similar al presentado por Johnson⁴² y difiere de los métodos geométricos presentados por Chasles⁴³ y Williamson⁴⁴. Por último, en la sección 1.6 se presenta la condición sobre el valor de u para que el óvalo exista.

1.1. Superficies ópticas rigurosamente estigmáticas

En *La Géométrie*, Descartes se interesa por estudiar unos óvalos con unas propiedades útiles para la óptica⁴⁵. Estos óvalos que llevan su nombre permiten resolver un problema de la óptica geométrica que se conoce hoy en día como el problema del estigmatismo riguroso. Éste consiste en encontrar la superficie óptica que sea

⁴² J. M. WOOLSEY: *Bipolar Equations-Cartesian Ovals*. En: *The Analyst* (1875), págs. 106-115.

⁴³ CHASLES, M. 1837.

⁴⁴ WILLIAMSON, B. 1912.

⁴⁵ DESCARTES, R. 1637.

capaz de dirigir todos los rayos de luz de un punto a otro de manera exacta, ya sea por medio de reflexión o refracción⁴⁶.

Como se dijo antes, la solución de este problema consiste en usar ovoides de Descartes. Para llegar a esta conclusión se puede partir del principio de Fermat⁴⁷

Principio de Fermat. *La trayectoria que sigue un rayo de luz para ir de un punto a otro es una curva que extrema la longitud de camino óptico.*

La longitud de camino óptico se define como la funcional $L(\gamma) := \int_{\gamma} n ds$, siendo $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva, ds el diferencial de longitud de dicha curva y $n = n(\mathbf{r})$ un campo escalar igual al índice de refracción del medio en cada punto del espacio. Un extremal de L se define como una curva γ_0 tal que la variación $\delta L(\gamma_0)$ es cero⁴⁸. Formalmente, esto implica que $L(\gamma_0 + h) - L(\gamma_0) = 0 + \mathcal{O}(h^2)$, para una variación h pequeña. Dado que $L(\gamma)/c$ es el tiempo que le toma al rayo de luz en recorrer γ , este principio se interpreta como que la luz sigue una trayectoria que extrema el tiempo.

Dados dos puntos fijos, el principio de Fermat nos ayuda a conocer el camino que toma un rayo de luz para ir de un punto al otro. Para hacerlo solo hace falta calcular los extremales de L . Este cálculo depende completamente de la naturaleza del medio circundante a los puntos. Por ejemplo, en un medio homogéneo, con $n(\mathbf{r})$ constante, la luz recorre la trayectoria con menor distancia geométrica, es decir, la línea recta.

Un hecho interesante ocurre cuando todas las trayectorias posibles para ir de un punto a otro tienen igual longitud de camino óptico, $L(\gamma) = \text{cte}$. En dicho caso, todas estas trayectorias son extremales de L de manera trivial, $\delta L(\gamma) = 0$. Esto da lugar

⁴⁶ SILVA-LORA, A. y TORRES, R. 2020b; SILVA-LORA, A. y TORRES, R. 2020c.

⁴⁷ D. GOODMAN: "Handbook of Optics: Volume I - Geometrical and Physical Optics, Polarized Light, Components and Instruments". En: ed. por Michael BASS. 3rd ed. McGraw-Hill Professional, 210. Cap. 1. General Principles of Geometric Optics.

⁴⁸ V. I. ARNOLD, A. WEINSTEIN y K. VOGTMANN: *Mathematical Methods Of Classical Mechanics*. 2nd. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1989.

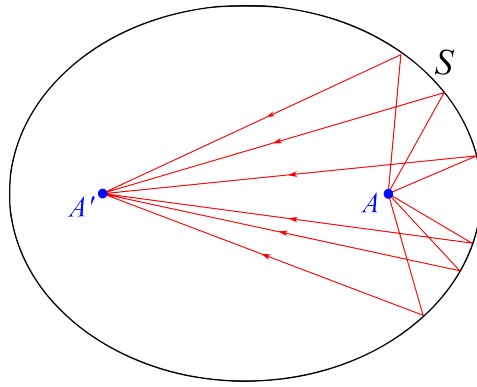


Figura 1. La luz va de A a A' por cualquiera de los rayos de luz mostrados en la figura. En esta misma se muestra un corte transversal del elipsoide prolato, S , mediante un plano que pasa por sus focos A y A' .

a preguntarse ¿entonces, cuál trayectoria sigue la luz? La respuesta es que la luz puede seguir cualquiera de ellas. Considere por ejemplo el caso de la reflexión de la luz en una superficie elipsoidal prolata (cf. figura 1).

De este modo, imponer la condición $L(\gamma) = \text{cte}$ para todas las trayectorias posibles de A a A' a través de una superficie S es condición suficiente para que todos los rayos de luz que nacen de A sean dirigidos a A' mediante la reflexión o refracción en S . Con esto en cuenta, es posible resolver el problema del estigmatismo riguroso. Para lo cual, considere dos medios con índices de refracción constantes n y n' separados por una superficie óptica refractiva S (cf. figura 2). Considere además un punto I en S y dos puntos A y A' , uno a cada lado de S . Llamando $r = \overline{AI}$ y $r' = \overline{IA'}$ a las distancias al punto I , se tiene que la longitud de camino óptico del rayo de luz que va de A a A' pasando por I es $L_{AA'} = nr + n'r'$. Así, la condición de que todos los rayos que vayan de A a A' sean extremales de L es que

$$nr + n'r' = c, \tag{1}$$

siendo c una constante. De este modo, al ser extremales, todos los rayos de luz que nacen de A son dirigidos a A' al refractarse en S . El lugar geométrico de puntos

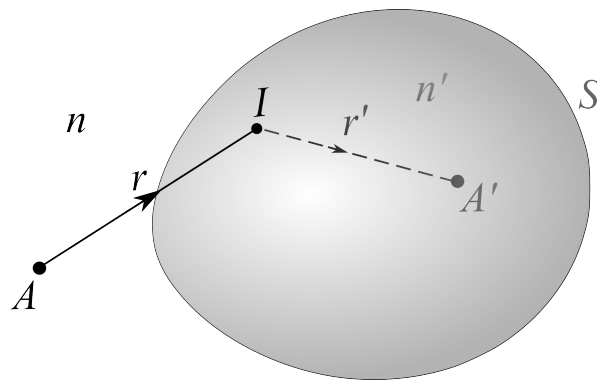


Figura 2. Una superficie S separa dos medios homogéneos con índices de refracción n y n' . Al ser homogéneos, la luz sigue una trayectoria recta en cada uno.

definido por la ecuación (1) es la superficie conocida como ovoide de Descartes⁴⁹. En años recientes se ha visto la utilidad de los ovoides de Descartes para resolver otros problemas en la óptica geométrica. En⁵⁰, Silva-Lora y Torres usan una serie de superficies ovoidales, que separan medios con diferentes índices de refracción, para obtener un sistema óptico aplanético. Estos sistemas son interesantes porque en ellos la condición de estigmatismo riguroso no solo se cumple para un punto A , si no que, también se cumple para puntos en un plano perpendicular al eje óptico que pasa por A . Esto permite formar imágenes extendidas (no puntuales) para objetos sobre dicho plano. Por su parte, en⁵¹, estos mismos autores usan superficies ovoidales para construir un sistema sin aberraciones cromáticas, es decir, donde los rayos de luz son dirigidos de un punto a otro independientemente de su longitud de onda. Como es sabido, el índice de refracción depende de la longitud de onda. Por lo que, en general, una superficie ovoidal solo dirige de manera exacta los rayos de luz de cierta longitud de onda. Silva-Lora y Torres mostraron que es posible corregir esto usando una serie de superficies ovoidales. Por último, se han hecho intentos de

⁴⁹ WILLIAMSON, B. 1912; DESCARTES, R. 1637; SILVA-LORA, A. y TORRES, R. 2020b; SILVA-LORA, A. y TORRES, R. 2020c.

⁵⁰ SILVA-LORA, A. y TORRES, R. 2020a; SILVA-LORA, A. y TORRES, R. 2021.

⁵¹ SILVA-LORA, A. y TORRES, R. 2022.

generalizar las superficies ovoidales a superficies supercónicas⁵², en las cuales los ovoides de Descartes y las superficies cónicas son casos particulares. Esto quiere decir que incluso se ha planteado la posibilidad de ir más allá de los ovoides de Descartes para construir sistemas ópticos formadores de imágenes.

1.2. Definición del óvalo de Descartes

Tomando como inspiración la ecuación (1), se define al ovoide de Descartes como el lugar geométrico de puntos en el espacio que satisface la ecuación⁵³

$$br + ar' = u,$$

siendo a , b y u constantes, y siendo r y r' las distancias de un punto sobre el ovoide a dos puntos fijos F y F' , llamados focos, respectivamente. Sin pérdida de generalidad, se pueden redefinir las constantes y escribir la ecuación del ovoide como

$$r + ar' = u, \tag{2}$$

siendo a y u constantes.

Si se denomina a $r + ar'$ como una suma ponderada de r y r' , entonces el ovoide de Descartes puede definirse como el lugar geométrico de puntos tales que la suma ponderada de sus distancias a dos puntos fijos es constante. En el caso en que la constante de ponderación a es cero, el ovoide se convierte en una esfera de radio u centrada en F . Al elegir $a = 1$ y $a = -1$ se obtienen elipsoides prolatos y mantos de hiperboloides de doble hoja de revolución, respectivamente. Adicionalmente, cuando se restringe el lugar geométrico a estar sobre un plano que contiene los focos, se obtiene la curva llamada óvalo de Descartes. Por construcción, las superficies de

⁵² GREYNOLDS, A. W. 2002; CHO, S. 2016.

⁵³ WILLIAMSON, B. 1912; A. QUETELET: "Correspondance mathématique et physique". En: vol. 5. M. Hayez, Imprimeur de L'Académie Royale, 1829. Cap. Sur les lignes dirimantes à deux foyers conjugués, págs. 109-116.

revolución de estas curvas son ovoides de Descartes.

Considere ahora un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el foco F y con el eje x igual a la recta que une los focos. Si se restringen las distancias de la ecuación (2) a estar sobre el plano xy , se obtiene

$$\sqrt{x^2 + y^2} + a\sqrt{(x - \tau)^2 + y^2} = u, \quad (3)$$

que es una ecuación del óvalo y donde $\tau \in \mathbb{R}$ es la posición relativa entre los focos. En las figuras 3 y 4 se grafican algunos óvalos y fragmentos de óvalos a partir de esta ecuación. Para lo cual, se fijan unos valores de a y τ y se varia el valor de u .

De la figura 3 se observa que el foco F siempre está al interior del óvalo sin importar el valor de u . Se observa además que, al fijar el valor de a , el tamaño del óvalo aumenta al aumentar el valor de u . En los casos $a = -2/3$ y $a = -1/3$, el óvalo empieza como una figura redondeada y, al aumentar el valor de u , se deforma en una curva parecida a un cardiode. Aunque no se logra apreciar bien, al aumentar aún más el valor de u , el óvalo vuelve a redondearse y se convierte en un círculo en el caso límite en que $u \rightarrow \infty$. En los casos $a = 1/3$ y $a = 2/3$ ocurre algo parecido. Al inicio, el óvalo es redondeado, luego se convierte en una curva parecida al ciclo interior de una caracola de Pascal y, al final, se redondea nuevamente hasta convertirse en un círculo en el límite $u \rightarrow \infty$. Asimismo, se observa que al aumentar el valor de a , con u fijo, el óvalo se deforma y se reduce en tamaño. En esta figura se observan también unos óvalos con un pico, donde la curva no es suave. Más adelante, se verá que este óvalo es el ciclo interior o exterior de una caracola de Pascal y que su pico siempre se forma sobre uno de los focos.

Por su lado, en la figura 4, se observan características similares. En este caso, es el foco F' el que siempre está al interior del óvalo, sin importar el valor de u . Al igual que antes, el óvalo aumenta su tamaño al aumentar el valor de u , pero solo en los casos $a = 2$ y $a = 3$. En los otros casos, donde $a = -1.3$ y $a = -1.5$, el óvalo aumenta de tamaño al reducir el valor de u . Por su parte, al aumentar su tamaño, el óvalo cambia su forma de manera similar que antes. En los casos donde $a > 0$,

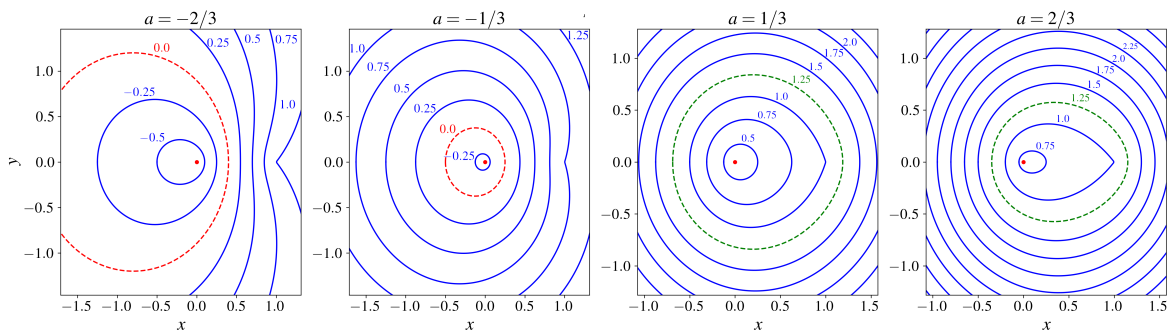


Figura 3. Óvalos de Descartes con $|a| < 1$. El punto rojo denota al foco F con coordenadas $(0, 0)$. Se ha usado $\tau = 1$ y se han usado valores de u uniformemente espaciados de paso 0.25. Se han coloreado de distinta forma a algunos óvalos para observar cómo cambian al fijar el valor de u y variar el de a .

el óvalo inicia como una curva redondeada, luego se convierte en el ciclo interior de una caracola de Pascal y, luego, se redondea nuevamente hasta transformarse en círculo en el límite $u \rightarrow \infty$. Asimismo, en los casos donde $a < 0$, el óvalo inicia como una curva redondeada, pasa a ser una curva tipo cardiode y, al final, se redondea nuevamente hasta convertirse en un círculo en el límite $u \rightarrow -\infty$. Por su parte, al fijar el valor de u , el óvalo reduce su tamaño al aumentar el valor de $|a|$. Por último, al igual que antes, los óvalos con un pico corresponden a un fragmento de una caracola de Pascal, con el pico formándose precisamente en el foco F .

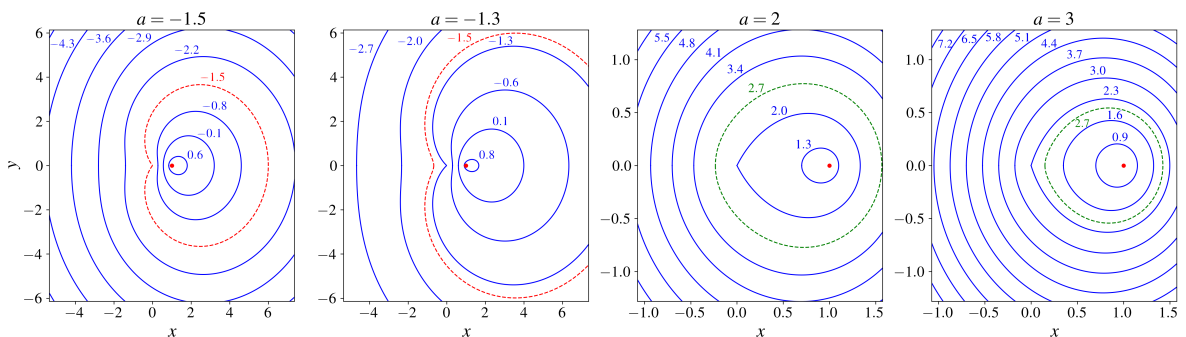


Figura 4. Óvalos de Descartes con $|a| > 1$. El punto rojo denota al foco F' con coordenadas $(\tau, 0)$, con $\tau = 1$. Se han usado valores uniformemente espaciados de u de paso 0.7. Se han coloreado en rojo y verde a algunos óvalos para observar cómo cambian al variar el valor de a .

Los óvalos de estas figuras cumplen también dos propiedades interesantes. Al variar el valor de u y fijar los valores de a y τ , se obtienen óvalos que no se intersecan

entre sí y que cubren todo el plano xy . Esto quiere decir que, por cada punto de este plano, pasa un y solo un óvalo de Descartes. Este hecho hace que estas familias de óvalos sean útiles para construir un sistema de coordenadas. Así, más adelante, en el capítulo 3, estos óvalos serán tomados como curvas coordenadas. Para lo cual, a y τ se fijarán como constantes y u se tomará como una de las nuevas coordenadas ovaladas.

1.3. Parametrizaciones del óvalo de Descartes

Las ecuaciones paramétricas de una curva son de utilidad para encontrar propiedades de esta y para graficarla con precisión en un programa computacional. En la literatura hay varios trabajos donde se parametriza el óvalo de Descartes respecto al ángulo θ de las coordenadas polares⁵⁴. En⁵⁵ esta parametrización se encuentra a partir de la ecuación cuártica del óvalo de Descartes, mientras que en⁵⁶ se hace a partir de la ecuación bipolar del óvalo. En esta sección se ilustrará esta parametrización respecto a θ a partir de la ecuación bipolar del óvalo (2), así como una parametrización adicional respecto a una coordenada radial.

1.3.1. Parametrización del óvalo en términos de una coordenada angular La ecuación del óvalo de Descartes (3) escrita en un sistema de coordenadas polares es

$$r + a\sqrt{r^2 + \tau^2 - 2r\tau \cos \theta} = u, \quad (4)$$

donde el eje x está sobre el eje focal de la curva (cf. figura 5) y donde τ es la coordenada x del foco F' . Esta ecuación constituye una ligadura entre las coordenadas polares, permitiendo expresar una en términos de la otra. Para encontrar la depen-

⁵⁴ SILVA-LORA, A. y TORRES, R. 2020b; SOUTHALL, J. P. C. 1922; R. T. FAROUKI: *The Cartesian ovals*. En: *The Mathematical Intelligencer* 44.4 (2022), págs. 343-353.

⁵⁵ SILVA-LORA, A. y TORRES, R. 2020b.

⁵⁶ SOUTHALL, J. P. C. 1922; FAROUKI, R. T. 2022.

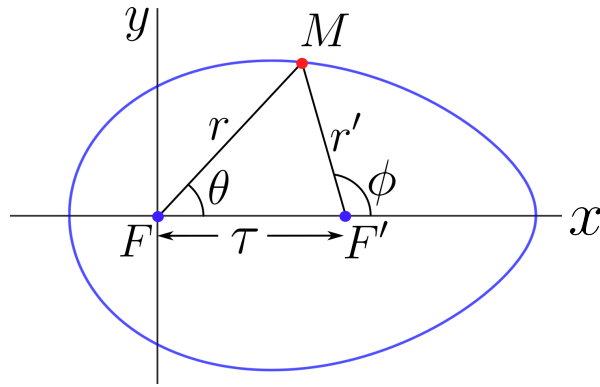


Figura 5. Sistema de coordenadas usado para escribir la ecuación cartesiana del óvalo de Descartes (3) y definiciones de ángulos, distancias y puntos. La cantidad τ se toma positiva cuando F' está a la derecha de F y negativa en caso contrario.

dencia funcional de r con respecto a θ se reescribe la ecuación (4) como

$$a\sqrt{r^2 + \tau^2 - 2r\tau \cos \theta} = u - r. \quad (5)$$

Elevando al cuadrado y reorganizando términos se obtiene

$$(a^2 - 1)r^2 + 2(u - a^2\tau \cos \theta)r - u^2 + a^2\tau^2 = 0, \quad (6)$$

que es una ecuación cuadrática para r cuyas soluciones son

$$r_{\pm} = \frac{a^2\tau \cos \theta - u \pm a\sqrt{u^2 + \tau^2 - 2u\tau \cos \theta - a^2\tau^2 \sin^2 \theta}}{a^2 - 1}. \quad (7)$$

Las ecuaciones paramétricas se obtienen al reemplazar esta expresión de r en las ecuaciones $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$.

Al graficar, se encuentra que para ambos signos de la ecuación (7) se obtiene un óvalo de Descartes (cf. figura 6). En el caso $|a| < 1$, al graficar para varios valores de u , se encuentra que la curva $r = r_+(\theta)$ corresponde al óvalo $r + ar' = u$ siempre y cuando u satisfaga la condición de existencia del óvalo de Descartes, que se verá más adelante en la sección 1.6 (cf. cuadro 1). Por su lado, la curva $r = r_-(\theta)$ representa al óvalo $r - ar' = u$ o al óvalo $r + ar' = -u$ al imponer que u satisface la condición de existencia del óvalo de Descartes. En general, para cualesquiera valo-

res de u , a y τ , con $|a| < 1$, se encuentra que tanto $r_+(\theta)$ como $r_-(\theta)$ corresponden a alguno de los óvalos dados por la ecuación $r \pm ar' = \pm u$.

La parametrización dada por la ecuación (7) es bastante útil cuando el foco F está al interior del óvalo, pues, en este caso, por cada ángulo θ hay un solo valor r . Como se mencionó antes, F siempre está al interior del óvalo cuando $|a| < 1$, pues en este caso el óvalo converge al punto F al disminuir el valor de u . En caso contrario, se encontraba que era F' el foco que siempre estaba al interior del óvalo.

Así, en el caso $|a| > 1$ se podría considerar el ángulo ϕ formado en el foco F' en lugar de θ (cf. figura 5). Para lo cual se debería usar además r' en lugar de r . En caso tal, se tendrían las ecuaciones paramétricas $x = \tau + r' \cos \phi$ y $y = r' \sin \phi$, y la ecuación para r'

$$(a^2 - 1)r'^2 - 2(\tau \cos \phi + au)r' - \tau^2 + u^2 = 0, \quad (8)$$

cuya solución es

$$r'_\pm = \frac{\tau \cos \phi + au \pm \sqrt{u^2 + a^2\tau^2 + 2au\tau \cos \phi - \tau^2 \sin^2 \phi}}{a^2 - 1}. \quad (9)$$

De manera similar que antes, al graficar, se observa que la solución $r' = r'_-(\phi)$ da lugar al óvalo $r + ar' = u$ si $a > 0$, mientras que la solución $r' = r'_+(\phi)$ da lugar al óvalo $r + ar' = u$ si $a < 0$. Lo anterior ocurre siempre y cuando u satisfaga la condición de existencia del óvalo de Descartes presente en el cuadro 1. En general, para cualesquiera valores de u , a y τ , con $|a| > 1$, se tiene que tanto $r'_+(\phi)$ como $r'_-(\phi)$ corresponden a uno de los óvalos dados por la ecuación $r \pm ar' = \pm u$.

1.3.2. Parametrización del óvalo en términos de una coordenada radial Dado el inconveniente que resulta en la parametrización angular cuando $|a|$ pasa de ser menor que uno a mayor que uno, es conveniente averiguar si existe una parametrización alternativa a la dada por las ecuaciones (7) y (9). La idea es que, si en lugar de despejar a r , se despeja $\cos \theta$ de la ecuación (6), entonces se obtienen unas ecuaciones paramétricas $x = x(r)$ y $y = y(r)$. Una ventaja inmediata de hacer esto

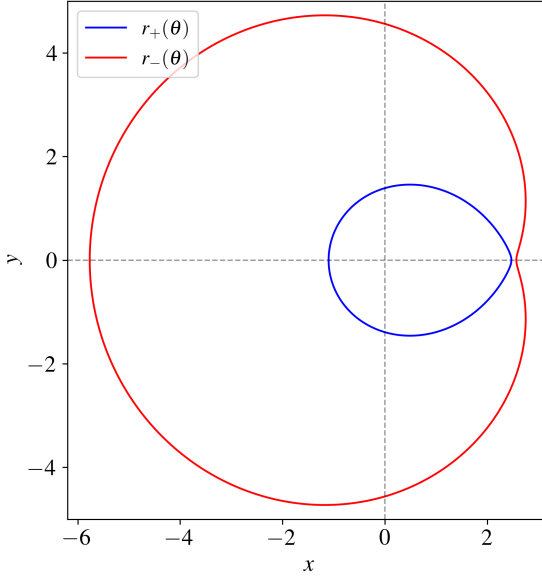


Figura 6. Óvalos parametrizados con el ángulo $\theta \in (-\pi, \pi]$ de las coordenadas polares. Las curvas se grafican a partir de la ecuación (7) con $a = 0.4$, $u = 2.5$ y $\tau = 2.4$. La curva $r = r_+(\theta)$ da lugar al óvalo $r + ar' = u$, mientras que la otra da lugar al óvalo $r - ar' = u$.

es que la solución para $\cos \theta$ sí es única, en lugar de la de r , que son dos.

Así, al despejar $\cos \theta$ de la ecuación (6) se obtiene

$$\cos \theta = \frac{a^2(r^2 + \tau^2) - (r - u)^2}{2a^2\tau r}. \quad (10)$$

De la cual se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x(r) = \frac{a^2(r^2 + \tau^2) - (r - u)^2}{2a^2\tau}, \quad (11)$$

$$y(r) = \pm \sqrt{r^2 - \frac{(a^2(r^2 + \tau^2) - (r - u)^2)^2}{4a^4\tau^2}}, \quad (12)$$

donde en esta última ecuación se toma el signo $+$ para la parte superior de la curva (en $y > 0$) y el signo $-$ para la parte inferior (en $y < 0$).

Al graficar se encuentra que esta parametrización no presenta problemas para ningún valor de a , u o τ con $a \neq 0$. Siempre es posible encontrar un intervalo de r en donde se obtiene toda la gráfica del óvalo de Descartes. Si se considera que u satisface la condición de existencia del óvalo de Descartes (cf. cuadro 1), se encuentra que

dicho intervalo de r va acorde con

$$r \in \begin{cases} \left[\frac{u - a|\tau|}{a \operatorname{sign}(a(u - a|\tau|)) + 1}, \frac{a|\tau| + u}{a + 1} \right], & \text{si } |a| > 1; \\ \left[\frac{a|\tau| + u \operatorname{sign}(u - |\tau|)}{a + \operatorname{sign}(u - |\tau|)}, \frac{-a|\tau| + u}{a + 1} \right], & \text{si } -1 < a < 0; \\ \left[\frac{-a|\tau| + u}{a + 1}, \frac{a|\tau| + u \operatorname{sign}(u - |\tau|)}{a + \operatorname{sign}(u - |\tau|)} \right], & \text{si } 0 < a < 1; \\ \left[\frac{-|\tau| + u}{2}, \frac{|\tau| + u}{2} \right], & \text{si } a = 1; \\ \left[\frac{|\tau| + u}{2}, \infty \right), & \text{si } a = -1. \end{cases} \quad (13)$$

donde $\operatorname{sign}(x) = x/|x|$ es la función signo. Para más detalles vaya al apéndice A.

1.4. Posiciones relativas de los vértices del óvalo de Descartes

Considere a δ y η como las coordenadas en x de los vértices V_1 y V_2 del óvalo de Descartes, respectivamente (cf. figura 7). Por definición V_2 va a la derecha de V_1 . Para hallar estas posiciones es posible usar las ecuaciones (7) y (9) que parametrizan al óvalo.

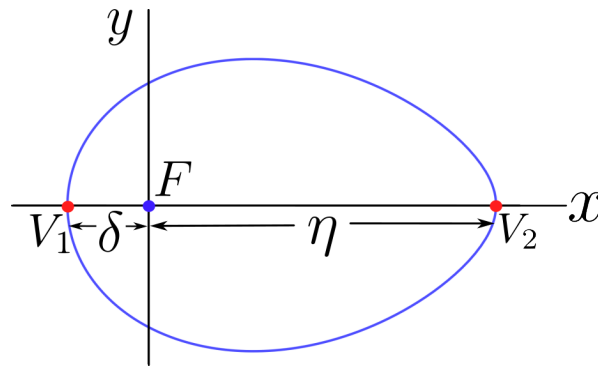


Figura 7. Definiciones de las vértices del óvalo de Descartes. Sus posiciones relativas se definen como δ y η . Se toma δ como positivo si V_1 está a la derecha de F , y negativo si lo contrario. Lo mismo para η .

En el caso $|a| < 1$ se debe usar $r = r_+(\theta)$, dado que esta ecuación es la que da

lugar al óvalo $r + ar' = u$. Al considerar $\eta = r_+(0)$ y $\delta = r_+(\pi) \cos \pi$ se obtiene

$$\eta = \frac{u - a^2\tau - a|\tau - u|}{1 - a^2}, \quad (14)$$

$$\delta = -\frac{u + a^2\tau - a|\tau + u|}{1 - a^2}. \quad (15)$$

Por su parte, en el caso $|a| > 1$ se debe usar $r' = r'_-(\phi)$ cuando $a > 0$ y $r' = r'_+(\phi)$ cuando $a < 0$. En este caso se considera $\eta = \tau + r'(0)$ y $\delta = \tau + r'(\pi) \cos \pi$. Así, al realizar los cálculos se encuentra qu

$$\eta = \frac{a(u + a\tau) - |u + a\tau| \operatorname{sign}(a)}{a^2 - 1}, \quad (16)$$

$$\delta = \frac{-a(u - a\tau) + |u - a\tau| \operatorname{sign}(a)}{a^2 - 1}, \quad (17)$$

donde la función $\operatorname{sign}(x)$ se define igual que antes como $x/|x|$. Como el origen del sistema de coordenadas está en el foco F , las ecuaciones (14)–(17) nos dan las posiciones relativas de los focos respecto a F .

1.5. El óvalo de Descartes como una curva de tres focos

Chasles, M.⁵⁷ es el primero en encontrar que el óvalo de Descartes puede describirse como lugar geométrico con respecto a un tercer foco. Es decir, que al tomar el óvalo como lugar geométricos de puntos cuya distancia ponderada a dos focos es constante, es posible encontrar un tercer punto para el cual la suma de distancias ponderadas también es constante. Si consideramos que r'' es la distancia de un punto del óvalo a un tercer foco F'' , como en la figura 8, entonces un óvalo dado por $r + ar' = u$ también puede describirse mediante ecuaciones de la forma $r' + \alpha r'' = \beta$ y $r + \lambda r'' = \sigma$, con α , β , λ y σ constantes que dependen de a , u y τ . Así, un mis-

⁵⁷ CHASLES, M. 1837.

mo óvalo puede describirse mediante tres ecuaciones bipolares. En⁵⁸ y⁵⁹ se hacen uso de construcciones geométricas para demostrar la existencia de este tercer foco. Aquí se hace un procedimiento algebraico que recupera lo presentado en⁶⁰.

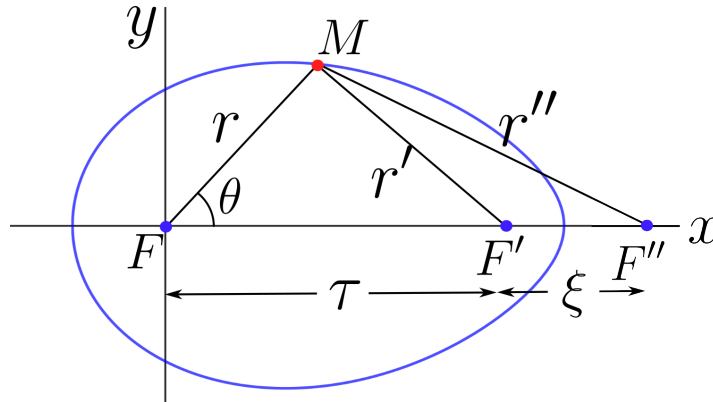


Figura 8. El óvalo de Descartes con sus tres focos F , F' y F'' . Con estos y con un punto conocido M sobre la curva es posible encontrar los valores de a y u para reconstruir la curva.

Para empezar, se reescribe la ecuación polar del óvalo de Descartes (4) como

$$a^2 (r^2 + \tau^2 - 2r\tau \cos \theta) = (u - r)^2. \quad (18)$$

Ahora, considere el punto F'' con coordenadas $(\tau + \xi, 0)$, donde $\xi \in \mathbb{R}$ (cf. figura 8).

A partir de la ley del coseno se tiene que

$$r'' = \sqrt{r^2 + (\xi + \tau)^2 - 2r(\xi + \tau) \cos \theta}. \quad (19)$$

De esta ecuación se despeja $\cos \theta$ y se reemplaza en en la ecuación (18). Con ello, se obtiene

$$a^2 \frac{r''^2 + \tau^2 + (r^2 + \tau^2) \frac{\xi}{\tau} - (\xi + \tau)^2}{1 + \frac{\xi}{\tau}} = (u - r)^2. \quad (20)$$

⁵⁸ WILLIAMSON, B. 1912.

⁵⁹ CHASLES, M. 1837.

⁶⁰ WOOLSEY, J. M. 1875.

Ahora, al pasar los términos con r al lado derecho y al completar el binomio al cuadrado, la ecuación anterior queda como

$$a^2 \frac{r'^2 + \tau^2 + \xi\tau - (\xi + \tau)^2}{1 + \frac{\xi}{\tau}} = u^2 + \left(1 - \frac{a^2\xi}{\tau + \xi}\right) \left(r - \frac{u}{1 - \frac{a^2\xi}{\tau + \xi}}\right)^2 - \frac{u^2}{1 - \frac{a^2\xi}{\tau + \xi}}. \quad (21)$$

Al dejar en el lado izquierdo a este binomio cuadrado y al término que contiene r'^2 se tiene

$$\frac{a^2 r'^2}{1 + \frac{\xi}{\tau}} - \left(1 - \frac{a^2\xi}{\tau + \xi}\right) \left(r - \frac{u}{1 - \frac{a^2\xi}{\tau + \xi}}\right)^2 = u^2 - \frac{u^2}{1 - \frac{a^2\xi}{\tau + \xi}} - \frac{\tau^2 + \xi\tau - (\xi + \tau)^2}{1 + \frac{\xi}{\tau}} a^2. \quad (22)$$

De esta ecuación se observa que, en general, la dependencia funcional de r'' con r es de la forma $r'' = \sqrt{\alpha + \beta^2(r - \gamma)^2}$, con α , β y γ constantes. Con lo cual, un punto arbitrario F'' no da lugar a una ecuación análoga a la del óvalo de Descartes. Solo para unas posiciones específicas de F'' se debería obtener $\alpha = 0$ y, por ende, una dependencia lineal de la forma $r'' = \pm\beta(r - \gamma)$. Así, al imponer

$$u^2 - \frac{u^2}{1 - \frac{a^2\xi}{\tau + \xi}} - \frac{\tau^2 + \xi\tau - (\xi + \tau)^2}{1 + \frac{\xi}{\tau}} a^2 = 0, \quad (23)$$

se encuentran dos soluciones para ξ que son

$$\xi = 0, \quad (24a)$$

$$\xi = \frac{u^2 - \tau^2}{(1 - a^2)\tau}. \quad (24b)$$

La primera de ellas corresponde al caso trivial en que $F'' = F'$ y $r'' = r'$. De hecho, al evaluarla en la ecuación (22), se obtiene $a^2 r'^2 = (u - r)^2$, que es consistente con la ecuación (18). Por su lado, al evaluar la segunda solución en la ecuación (22) se llega a

$$\frac{(1 - a^2)\tau^2}{u^2 - a^2\tau^2} a^2 r'^2 - \frac{u^2(1 - a^2)}{u^2 - a^2\tau^2} \left(r - \frac{u^2 - a^2\tau^2}{u(1 - a^2)}\right)^2 = 0, \quad (25)$$

de la que se desprenden dos ecuaciones, que quedan como

$$ar'' \pm \frac{u}{\tau}r = \pm(\tau + \xi), \quad (26)$$

donde ξ está dado por la ecuación (24b) y $\tau + \xi = \frac{u^2 - a^2\tau^2}{\tau(1 - a^2)}$ es la posición en x del tercer foco. A su vez, al reemplazar $r = u - ar'$ en la ecuación (26) se obtiene

$$r'' \mp \frac{u}{\tau}r' = \pm a\xi. \quad (27)$$

Con lo cual, las ecuaciones (26) y (27) son las ecuaciones adicionales del óvalo de Descartes que se estaban buscando. Estos resultados son consistentes con los presentados en⁶¹.

A partir de la ecuación (24b) se puede extraer además una conclusión interesante. Al despejar u de esta ecuación como

$$u = \pm\sqrt{\xi\tau(1 - a^2) + \tau^2}, \quad (28)$$

y al reemplazarla en la ecuación (2), se obtiene

$$r + ar' = \pm\sqrt{\xi\tau(1 - a^2) + \tau^2}. \quad (29)$$

Con lo cual, el óvalo de Descartes queda determinado completamente por las posiciones relativas de sus focos, τ y ξ , más un parámetro extra, a , que puede encontrarse al conocer un punto sobre el óvalo. Así, a diferencia de la elipse, que requiere de dos focos y de un punto sobre la curva para construirse, el óvalo de Descartes requiere de tres focos y de un punto sobre la curva. Esto da un argumento adicional para denominar a F'' como un tercer foco.

Por su parte, al graficar los óvalos dados por la ecuación (26) se observa que el signo que debe tomarse en esta ecuación es igual al signo de $\tau(1 - a^2)$. De este

⁶¹ WOOLSEY, J. M. 1875.

modo, las ecuaciones equivalentes a la ecuación (2) son

$$\text{sign}(\tau(1 - a^2)) ar'' + \frac{u}{\tau}r = (\tau + \xi), \quad (30)$$

$$\text{sign}(\tau(1 - a^2)) r'' - \frac{u}{\tau}r' = a\xi, \quad (31)$$

donde $\text{sign}(x) = x/|x|$ es la función signo.

De estas ecuaciones se observa que en el caso $u = 0$ se obtiene una circunferencia de centro F'' y radio $-a|\tau|/|1 - a^2|$. Cuando $a > 0$ ésta curva no está definida. Por su lado, para $a = 0$ se obtiene una circunferencia centrada en F y de radio u . Asimismo, se puede demostrar que en los casos $u = \pm\tau$ y $u = \pm a\tau$ se obtienen caracolas de Pascal, o fragmentos de ella, cf. apéndice A. Es curioso notar que en estos casos además se obtiene $\xi = 0$ o $\xi + \tau = 0$. Es decir, la caracola de Pascal se encuentra al hacer coincidir dos de los tres focos del óvalo de Descartes. En el apéndice A se profundizan estos resultados y se llega a la ecuación canónica de las caracolas de Pascal.

1.6. Condición de existencia del óvalo de Descartes

Al definir al óvalo de Descartes como en la ecuación (2), uno se da cuenta de que u se parece a un radio, pues su valor determina el tamaño del óvalo de Descartes. Así, en el caso $a > 0$, el tamaño del óvalo aumenta al aumentar el valor de u (cf. figuras 3 y 4). En este sentido, uno se pregunta ¿qué rango de valores debe tomar este “radio” para que la curva esté definida? En esta sección se verá que incluso u puede tomar valores negativos cuando $a < 0$. A continuación se usará una construcción del óvalo de Descartes basada en el trabajo de Quetelet⁶², con la cual se encontrará la condición de existencia del óvalo. Los resultados de esta sección recuperan parcialmente lo presentado en⁶³, dado que, en el caso $a < -1$, la condición

⁶² QUETELET, A. 1829.

⁶³ R. FERRÉOL: *Cartesian Oval*. [Sitio web]. Consulta: 1 de agosto de 2025. Disponible en: <https://mathcurve.com/courbes2d.gb/descartes/descartes.shtml>.

presentada por este autor es incorrecta.

Para empezar, considere un par de conos con ejes paralelos definidos por las ecuaciones

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (32)$$

$$z = u - a\sqrt{(x - \tau)^2 + y^2}, \quad (33)$$

los cuales serán llamados como cono \mathcal{A} y cono \mathcal{B} , respectivamente. La intersección de estos conos, proyectada sobre el plano xy , es un óvalo de Descartes. Los óvalos generados de este modo son iguales a los óvalos dados por la ecuación (3), con los mismos parámetros a , τ y u . En consecuencia, la condición de existencia del óvalo de Descartes es igual a la condición de que los conos \mathcal{A} y \mathcal{B} se intersequen entre sí.

Para analizar dicha intersección, se debe considerar el efecto que tienen los valores de u y a en la posición y forma del cono \mathcal{B} . En primer lugar, el vértice de este cono tiene como coordenadas xyz a $(\tau, 0, u)$. Con lo cual, u determina la posición en z del vértice del cono \mathcal{B} . En segundo lugar, se puede mostrar que el ángulo de apertura del cono \mathcal{B} es $\varphi = 2 \arctan(1/|a|)$, mientras que el del cono \mathcal{A} es $\pi/2$. En el caso $a = 1$, se tiene $\varphi = \pi/2$. Con lo cual, el cono \mathcal{B} tiene mayor apertura que el cono \mathcal{A} cuando $|a| < 1$, y lo contrario cuando $|a| > 1$. Asimismo, el signo de a determina la orientación del cono \mathcal{B} . Así, cuando $a > 0$, el cono \mathcal{B} abre hacia abajo y, cuando $a < 0$, abre hacia arriba. En el caso $a = 0$, el cono \mathcal{B} se degenera en un plano dado por la ecuación $z = u$. Las distintas clases de conos se observan en las figuras 9 y 10.

En el caso $|a| < 1$, se observa que la condición de intersección entre los conos es que el intercepto en z del cono \mathcal{B} esté por encima o sobre el vértice del cono \mathcal{A} (cf. figura 9). Es decir, se necesita que $u - a|\tau| \geq 0$. Por su parte, en el caso $a > 1$, la condición de intersección es que el vértice del cono \mathcal{B} esté por encima o sobre la superficie del cono \mathcal{A} (cf. figura 10). Por ende, se necesita que $u \geq |\tau|$. Ahora, en el caso $a < -1$, se necesita por el contrario que el vértice del cono \mathcal{B} esté por debajo o sobre la superficie del cono \mathcal{A} (cf. figura 10), lo cual implica $u \leq |\tau|$.

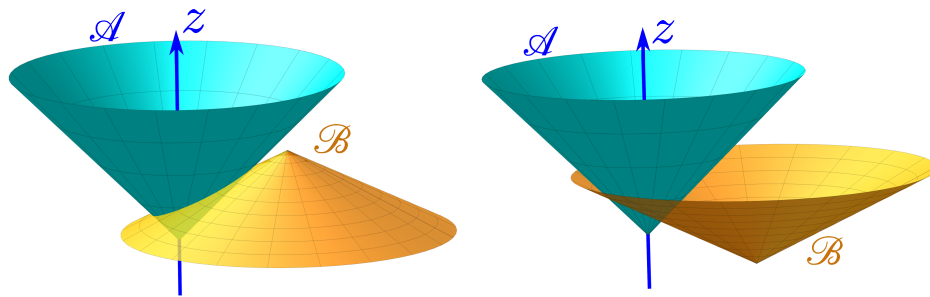


Figura 9. Gráficas de los conos \mathcal{A} y \mathcal{B} en el caso $|a| < 1$. A la izquierda se tiene $a = 1/2$ y $u = 0.85$, mientras que a la derecha se tiene $a = -1/2$ y $u = -0.3$. Por la forma de los conos, puede haber intersección siempre que el intercepto en z del cono \mathcal{B} este por encima o sobre el vértice del cono \mathcal{A} .

Ahora se analizan los casos límites en que $a = 0, \pm 1$. Primero, en el caso $a = 0$, el cono \mathcal{B} se degenera en el plano $z = u$. Por lo tanto, su condición de intersección con el cono \mathcal{A} es que dicho plano esté por encima del vértice del cono \mathcal{A} , es decir, que $u \geq 0$. Como el óvalo se convierte en un círculo de radio u para $a = 0$, lo anterior equivale a decir que el radio de dicho círculo debe ser no negativo. En el caso $a = 1$, el cono \mathcal{B} tiene la misma apertura del cono \mathcal{A} y abre hacia abajo. En este caso, al considerar que el vértice del cono \mathcal{B} esté encima del cono \mathcal{A} , entonces su intercepto en z también está encima del cono \mathcal{A} . Así, se cumplen simultáneamente las condiciones de los casos $0 < a < 1$ y $a > 1$, que en este caso se convierten en una sola que es $u \geq |\tau|$. Por último, en el caso $a = -1$, el cono \mathcal{B} también tiene la misma apertura del cono \mathcal{A} , pero en este caso abre hacia arriba. Dado que los dos conos abren hacia arriba, se necesita que el vértice del cono \mathcal{B} esté por debajo o sobre la superficie del cono \mathcal{A} y, además, que su intercepto en z este encima o sobre el vértice del cono \mathcal{A} . Esto es, se necesita $-|\tau| \leq u \leq |\tau|$.

Los resultados anteriores se resumen en el cuadro 1. En particular, la condición de que $u \geq \min(1, a)|\tau|$ para $a > -1$ es equivalente a lo reportado en⁶⁴. Como observación final, se observa que para algunos valores de u uno de los vértices de los conos pertenece a la curva de intersección. En tales casos, el óvalo de Descartes correspondiente luce como si tuviera un pico en uno de sus extremos (cf. figura 3).

⁶⁴ FERRÉOL, R. s.f.

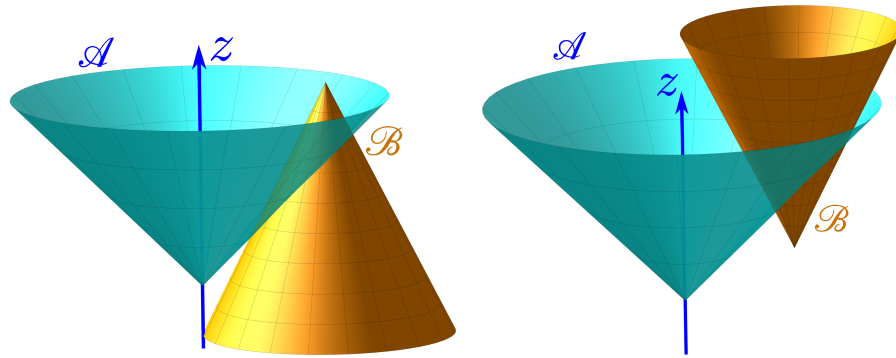


Figura 10. Gráficas de los conos \mathcal{A} y \mathcal{B} en el caso $|a| > 1$. A la izquierda se tiene $a = 2$ y $u = 1.6$, mientras que a la derecha se tiene $a = -2$ y $u = 0.5$. La condición de intersección entre los conos dependerá solamente de la posición del vértice del cono \mathcal{B} .

A partir de la figura 9 se determina que, en el caso $|a| < 1$, aparece un pico cuando el vértice del cono \mathcal{B} interseca a la superficie del cono \mathcal{A} , es decir, cuando $u = |\tau|$. Por su lado, en el caso $|a| > 1$, hay un pico cuando el intercepto en z del cono \mathcal{B} está sobre el vértice del cono \mathcal{A} (cf. figura 10). Con lo cual, se necesita $u - a|\tau| = 0$. Como se ha mencionado antes, en estos casos el óvalo es igual un fragmento de una caracola de Pascal.

Tabla 1. Condición sobre el valor de u para que el óvalo de Descartes dado por la ecuación (3) exista, es decir, para que la curva sea no vacía. Aquí, $\min(1, a)$ es el mínimo entre 1 y a .

Caso	Condición de existencia
$a > -1$	$u \geq \min(1, a) \tau $
$a < -1$	$u \leq \tau $
$a = -1$	$- \tau \leq u \leq \tau $

2. LA FAMILIA DE CURVAS ORTOGONALES A LA FAMILIA DE ÓVALOS CONFOCALES

En este capítulo se introducen una nueva clase de curvas, que se denominarán como *sinécdolas*. Estas curvas juegan un papel muy portante en este trabajo, dado que con ellas es posible complementar a los óvalos de Descartes para construir un sistema de coordenadas ortogonales ovoidales. Asimismo, al ser un nuevo tipo de curvas, es posible que estas sean útiles en otros trabajos.

Para construir estas curvas, en la sección 2.1, se considera a una familia de óvalos de Descartes confocales que comparten los mismos valores de a y τ , pero que tienen distintos valores de u (cf. ecuación (3)). Al plantear esta familia de óvalos como las curvas de nivel de una función f , es posible obtener a las sinécdolas al encontrar las curvas cuyos vectores tangentes sean proporcionales a ∇f . En las secciones restantes de este capítulo se caracterizan estas nuevas curvas.

Así, en la sección 2.2, se describen dos formas de parametrizar la sinécdolas, que serán de gran utilidad para el siguiente capítulo. Luego, en la sección 2.3 se encuentran algunos valores particulares de a para los cuales las sinécdolas se pueden describir mediante una ecuación algebraica en x y y . En particular se encuentra que, en el caso $a = 1$, la sinécdola se convierte en un fragmento de una hipérbola y, en el caso $a = -1$, se convierte en un fragmento de una elipse. En la sección 2.4 se encuentra que la sinécdola posee una asíntota, excepto en el caso donde se convierte en elipse, y se encuentra la ecuación que describe a esta asíntota. Por último, en la sección 2.5 se calculan las intersecciones entre el óvalo de Descartes y la sinécdola.

2.1. Construcción de la familia de curvas ortogonales

Para empezar, considere la ecuación cartesiana del óvalo de Descartes

$$\sqrt{x^2 + y^2} + a\sqrt{(x - \tau)^2 + y^2} = u, \quad (34)$$

cf. ecuación (3). La familia de óvalos de Descartes que es de interés se encuentra al dejar los valores de a y τ como constantes y al variar el de u (cf. figura 11). Esta familia puede verse también como las curvas de nivel de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + a\sqrt{(x - \tau)^2 + y^2}$. Así, las curvas ortogonales a estas curvas de nivel tienen vectores tangentes proporcionales a ∇f , pues el gradiente de una función es ortogonal a las curvas de nivel de esta función.

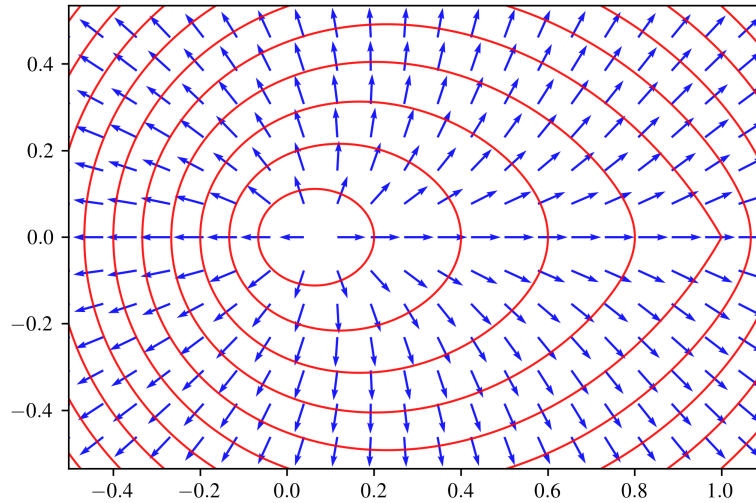


Figura 11. Familia de óvalos de Descartes de la forma $f(x, y) = \text{cte}$ y el campo vectorial ∇f . Se ha elegido $a = 1/2$ y $\tau = 1$. El óvalo con un pico es un fragmento de una caracola de Pascal y se obtiene al tomar $u = 1/2$.

Luego, para hallar estas curvas ortogonales, suponga que estas están parametrizadas por una ecuación de la forma $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, siendo t el parámetro de la curva. Los vectores tangentes de esta curva deben ir en la misma dirección de ∇f , es decir, $d\mathbf{r}/dt = \alpha \nabla f$, siendo $\alpha = \alpha(x, y)$ un factor de proporcionalidad. En componentes cartesianas, esta condición se descompone en las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (35a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (35b)$$

El factor α solo modifica la rapidez con la cual se recorre la curva, pero no cambia el hecho de que esta tenga vectores tangentes proporcionales a ∇f . Con lo cual, este factor se puede elegir a conveniencia. Así, al considerar $\alpha = 1/\frac{\partial f}{\partial x}$, de la ecuación

(35a) se obtiene que $t = x + c$, con c una constante. Por ende, la ecuación (35b) pasa a ser

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_y}{f_x}, \quad (36)$$

donde los subíndices en f indican derivada parcial.

Un cálculo rápido muestra que esta no es una ecuación diferencial exacta. Sin embargo, es posible resolverla usando un factor integrante w . Para ver esto, reescriba la ecuación (36) como $f_y dx - f_x dy = 0$. Así, la condición sobre w para obtener una ecuación exacta es

$$w_y f_y + w_x f_x + w(f_{xx} + f_{yy}) = 0. \quad (37)$$

Al considerar la expresión de $f(x, y)$, se encuentra que $f_{xx} + f_{yy} = f_y/y$. Así, al imponer $w = w(y)$, la ecuación (37) se convierte en $dw/dy + w/y = 0$, cuya solución general es $w = C/y$, con C una constante.

Para resolver la ecuación diferencial (36) resulta más conveniente tomar $w = 1/|y|$, el cual también es solución de la ecuación (37). Así, al tomar este factor integrante, se encuentra que la solución implícita de la ecuación (36) es

$$g(x, y) := \operatorname{arcsenh} \left(\frac{x}{y} \right) + a \operatorname{arcsenh} \left(\frac{x - \tau}{y} \right) = v, \quad (38)$$

siendo v una constante. Si hubiéramos elegido el factor integrante $w = 1/y$, en lugar de $w = 1/|y|$, se hubiera obtenido la complicada solución implícita $g(x, y)|y|/y = v$. Las curvas descritas por la ecuación (38) son las curvas ortogonales que se estaban buscando.

Hasta donde el autor de este trabajo y sus directores conocen, estas curvas no han sido reportadas antes en la literatura. Por este motivo, se tomó la libertad de acuñar el término *sinécdolas* para referirse a estas curvas. Este término viene de la figura literaria sinécdoque. La idea de esto es extender una similitud que ocurre entre los nombres de las cónicas y las figuras literarias. Esta similitud aparece entre las palabras: circunferencia y circunloquio, elipse y elipsis, hipérbola e hipérbole, y en entre parábola (como cónica) y parábola (como figura literaria). Así mismo,

por su cierta similitud con la hipérbola, se buscó acuñar un término que tuviera la misma terminación -ola. Por consistencia, la superficie de revolución de la sinécdola se denomina como *sinecdoloide*, en analogía con hiperboloide. A su vez, por su relación con las figuras literarias, las curvas cónicas, junto con la sinécdola, podrían llamarse como “curvas literarias”.

En la figura 12 se grafican varias sinécdolas para distintos valores de v y unos valores fijos de a y τ . De esta, se ve que la sinécdola se compone de dos ramificaciones que se extienden al infinito y que parecieran interconectarse en un punto. Cuando $|a| < 1$, este punto es $(0, 0)$ y, cuando $|a| > 1$, este punto es $(\tau, 0)$. Este punto además no hace parte de la gráfica de la sinécdola como tal, dado que en él la ecuación (38) se vuelve indefinida. Se observa también que la sinécdola parece converger de manera asintótica a una recta. Más adelante, se hará demostrará que esto es cierto y se calculará la ecuación de esta recta. Asimismo, se observa que al hacer $v \rightarrow \infty$ o $v \rightarrow -\infty$, la sinécdola se acerca progresivamente al eje x hasta converger en él. Aunque no se observa muy bien, la subfamilia de sinécdolas presentes en esta figura, con a y τ constantes, cubre todas las regiones del plano xy .

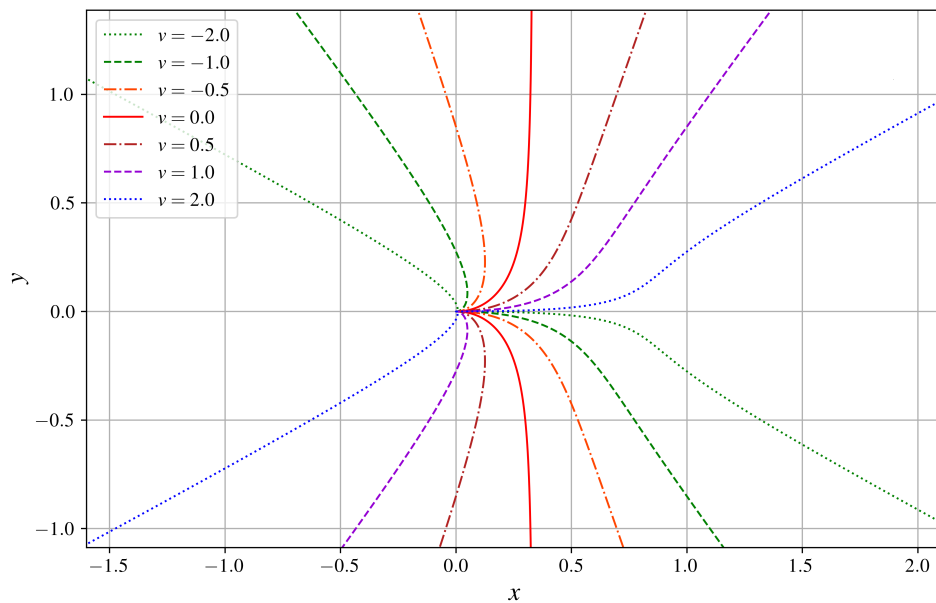


Figura 12. Gráficas de sinécdolas para $a = 1/2$, $\tau = 1$ y varios valores de v . Se ve que estas sinécdolas guardan cierta similitud con fragmentos de hipérbolas confocales.

2.2. Parametrizaciones de la sinécdola

En esta sección se describirán dos parametrizaciones de la sinécdola, una con respecto al parámetro $t = \operatorname{arcsenh}(x/y)$ y otra con respecto a la variable θ de las coordenadas polares. La primera de ellas parecerá muy extraña al inicio, pero con el avance de la lectura, se volverá más natural. Como se verá luego, esta parametrización será de gran ayuda para encontrar la ecuación de la asíntota de la sinécdola y será de vital importancia para construir el sistema de coordenadas ovoidales. Por su parte, la segunda parametrización resultará mucho más familiar, porque en ella la sinécdola se describe mediante una ecuación de la forma $r = r(\theta)$, siendo r el radio de las coordenadas polares. A partir del análisis de esta parametrización, será posible encontrar los rangos de valores que deben tomar θ y t para trazar la curva.

2.2.1. Parametrización de la sinécdola en términos del parámetro t definido por

$t = \operatorname{arcsenh}(x/y)$ En este caso, considere reescribir la ecuación (38) como

$$\operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{y}\right) + a \operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{y} - \frac{\tau}{y}\right) = v. \quad (39)$$

Así, al substituir $x = y \operatorname{senh} t$ en esta ecuación, es posible despejar y como

$$y = \frac{\tau}{\operatorname{senh} t - \operatorname{senh}\left(\frac{v-t}{a}\right)}, \quad (40)$$

y de la relación $x = y \operatorname{senh} t$ se obtiene

$$x = \frac{\tau \operatorname{senh} t}{\operatorname{senh} t - \operatorname{senh}\left(\frac{v-t}{a}\right)}. \quad (41)$$

Estas dos últimas ecuaciones se interpretan como las ecuaciones paramétricas de la sinécdola en el parámetro t . Por definición, este parámetro toma valores reales. Al graficar, se encuentra que, para obtener la gráfica de la curva, t debe tomar todos los valores reales excepto $t = \frac{v}{a+1}$, que es donde los denominadores de las ecuaciones (40) y (41) se hacen cero. En la siguiente sección será posible demostrar

esto formalmente al estudiar la parametrización de la sinécdola en la coordenada polar θ .

Asimismo, de lo anterior se deduce que los puntos de la forma (x, y) , con x y y dados por las ecuaciones (40) y (41), son los puntos de intersección de la sinécdola con una recta dada por la ecuación $x = \sinh(t)y$. Al variar el valor de t desde $-\infty$ a ∞ , esta recta gira en sentido horario alrededor del origen desde la recta dada por la ecuación $y = 0$ hasta volver a la recta dada por esta misma ecuación. Con lo cual, la parametrización en t inicia con puntos cercanos al punto de interconexión entre las dos ramas de la sinécdola (cf. figura 12) y, luego, al aumentar el valor de t , se recorre una de estas ramas. Al seguir aumentando el valor de t , hasta $+\infty$, se empieza a recorrer la otra rama de la sinécdola, desde el infinito, hasta volver a puntos cercanos al punto de interconexión.

Alternativamente, para evitar el salto que se produce al pasar de una rama a la otra, se puede considerar el cambio de parámetro dado por la ecuación $t = \frac{1}{\omega} + \frac{v}{1+a}$, con $\omega \in \mathbb{R}$. Al substituir esta expresión en las ecuaciones (40) y (41), se obtienen las nuevas ecuaciones paramétricas respecto a ω . En esta parametrización, la recta dada por la ecuación $x = \sinh(t)y$ inicia siendo igual a la recta dada por la ecuación $x = \sinh\left(\frac{v}{a+1}\right)y$ y luego gira en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del origen hasta regresar a la misma recta inicial. Más adelante, se verá que esta recta inicial, con la que se empieza y acaba el giro, es paralela a la asíntota de la sinécdola. Con lo cual, se obtiene que la sinécdola se recorre de un extremo al otro al variar ω de $-\infty$ a ∞ . Para dar un ejemplo, en el caso de la sinécdola con $v = 2.0$ de la figura 12, la curva se recorre de izquierda a derecha desde puntos en el infinito. En este recorrido, la curva da un salto en el punto de interconexión, cuando pasa de una rama a la otra, pues dicho punto no hace parte de la sinécdola como tal.

2.2.2. Parametrización de la sinécdola en términos de una coordenada angular

En este caso, se parte de reemplazar $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$ en la ecuación (38).

De esto, se obtiene

$$\operatorname{arcsenh}(\cot \theta) + a \operatorname{arcsenh}\left(\cot \theta - \frac{\tau}{r \operatorname{sen} \theta}\right) = v. \quad (42)$$

De la cual, es fácil despejar a r como

$$r = \frac{\tau \operatorname{csc} \theta}{\cot \theta - \operatorname{senh}\left(\frac{1}{a}[v - \operatorname{arcsenh}(\cot \theta)]\right)}. \quad (43)$$

A partir de esta ecuación es posible graficar la sinécdoła en términos de θ . Note que también se hubiese podido tomar las ecuaciones (41) y (40), y luego reemplazar $t = \operatorname{arcsenh}(\cot \theta)$ para hallar las ecuaciones paramétricas respecto a θ .

El parámetro θ debe tomar un intervalo de valores en donde $r(\theta)$, definido por la ecuación (43), sea mayor o igual que cero. Como es sabido, una función puede cambiar de signo solo en los puntos donde se hace cero o infinito. Para empezar, note que el denominador de $r(\theta)$ se hace cero cuando

$$\cot \theta = \operatorname{senh}\left(\frac{v - \operatorname{arcsenh}(\cot \theta)}{a}\right). \quad (44)$$

Al aplicar la función arcoseno hiperbólico a ambos lados, se obtiene una ecuación lineal para $\operatorname{arcsenh}(\cot \theta)$, cuya solución da como resultado

$$\theta = \operatorname{arccot}\left(\operatorname{senh}\left(\frac{v}{a+1}\right)\right) + n\pi \equiv \theta_n, \quad (45)$$

siendo n un entero. Para no obtener una indeterminación de la forma $0/0$ al evaluar $\theta = \theta_n$ en la ecuación (43), se debe comprobar el valor de $\operatorname{csc} \theta_n$. Para esto, note que, de la identidad $\operatorname{csc}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$, se obtiene que $|\operatorname{csc} \theta_n| = \operatorname{cosh}\left(\frac{v}{a+1}\right) \geq 1$. Así, $\operatorname{csc} \theta_n$ nunca se hace cero y entonces se obtiene que $r(\theta_n) = \pm\infty$.

Por otra parte, al reescribir la ecuación (43) como

$$r = \frac{\tau}{\cos \theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{senh}\left(\frac{1}{a}[v - \operatorname{arcsenh}(\cot \theta)]\right)}, \quad (46)$$

es fácil darse cuenta que las raíces de $r(\theta)$ podrían ocurrir solo cuando $\cot \theta = \pm\infty$,

es decir, cuando $\theta = n\pi$, con n entero. Como $\operatorname{sen} n\pi = 0$, al evaluar $\theta = n\pi$ en la ecuación (46), aparece una indeterminación de la forma $0 \cdot \infty$. Por ende, para conocer el comportamiento de r en este punto, se debe estudiar el límite de $r(\theta)$ cuando $\theta \rightarrow n\pi$. Pero, como la función $r(\theta)$ satisface la relación $r(\theta + \pi) = -r(\theta)$, entonces basta con calcular el límite cuando $\theta \rightarrow 0$.

Primero considere $\theta \rightarrow 0^+$. En este caso, $\cot \theta \rightarrow +\infty$. Para valores grandes de x , tendiendo a $+\infty$, la función $\operatorname{arcsenh}(x)$ tiende a $\ln(2x)$. Así, es posible escribir que

$$L := \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \operatorname{senh} \left(\frac{v - \operatorname{arcsenh}(\cot \theta)}{a} \right) = - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \operatorname{senh} \left(\frac{\ln(2 \cot \theta) - v}{a} \right), \quad (47)$$

Luego, para valores grandes de x , tendiendo a $+\infty$, la función $\operatorname{senh}(x)$ tiende a $\frac{1}{2}e^x$. Con lo cual, la ecuación (47) pasa a ser

$$L = - \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sign}(a)}{2} e^{-\frac{v}{|a|}} (2 \cot \theta)^{\frac{1}{|a|}}, \quad (48)$$

donde el uso de $\operatorname{sign}(a) = |a|/a$ viene del hecho de que $\operatorname{senh}(x)$ tiende a $\frac{1}{2}e^x$ cuando $x \rightarrow \infty$, pero tiende a $-\frac{1}{2}e^{-x}$ cuando $x \rightarrow -\infty$. Reemplazando la ecuación (48) en $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} r$, se obtiene

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} r = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\tau}{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cdot \frac{\operatorname{sign}(a)}{2} e^{-\frac{v}{|a|}} (2 \cot \theta)^{\frac{1}{|a|}}}. \quad (49)$$

Tomando $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos \theta = 1$ y simplificando, se encuentra

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} r = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\tau}{1 + \operatorname{sign}(a) e^{-\frac{v}{|a|}} (\operatorname{sen} \theta / 2)^{1 - \frac{1}{|a|}}}. \quad (50)$$

De esta ecuación se ve que, cuando $1 - 1/|a| > 0$, es decir, cuando $|a| > 1$, se obtiene

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} \theta / 2)^{1 - \frac{1}{|a|}} = 0, \quad (51)$$

implicando que $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} r = \tau$. Esto es consistente con el hecho de que, para $|a| > 1$, la gráfica de la sinécdo-la se compone de dos ramificaciones que parecieran interco-

nectase en el punto $(\tau, 0)$. Por su lado, cuando $|a| < 1$, se tiene que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} (\text{sen } \theta/2)^{1-\frac{1}{|a|}} = +\infty, \quad (52)$$

implicando que $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} r = \tau / (\text{sign}(a) \cdot \infty)$. Con lo cual, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} r = \frac{1}{+\infty} = 0^+$ si $a\tau > 0$ y $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} r = \frac{1}{-\infty} = 0^-$ si $a\tau < 0$. Por otra parte, cuando $|a| = 1$, se obtiene $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} r = \tau / (1 + \text{sign}(a)e^{-v})$.

Análogamente, en el caso $\theta \rightarrow 0^-$ se obtiene

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^-} r = \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\tau}{1 + \text{sign}(a) e^{\frac{v}{|a|}} (-\text{sen } \theta/2)^{1-\frac{1}{|a|}}}. \quad (53)$$

La única diferencia de esta ecuación con la ecuación (50) es el signo en el exponencial y el signo de $\text{sen } \theta$. Así, como $\text{sen } \theta$ es impar, puede mostrarse que $\lim_{\theta \rightarrow 0^-} r = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} r$ siempre que $|a| \neq 1$. Con lo cual, en estos casos, el límite de r cuando $\theta \rightarrow 0$ existe. Por lo visto previamente, se encuentra que r se anula en $\theta = 0$ solo cuando $|a| < 1$.

Luego, en los casos en que $|a| = 1$, se encuentra que r tiene una discontinuidad tipo salto en $\theta = 0$. Así, de las ecuaciones (50) y (53), se obtiene que $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} r = \tau (1 + e^{-v})^{-1} = e^v \lim_{\theta \rightarrow 0^-} r$ en el caso $a = 1$ y se obtiene que $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} r = \tau (1 - e^{-v})^{-1} = -e^v \lim_{\theta \rightarrow 0^-} r$ en el caso $a = -1$. Como puede verse, r cambia de signo en este punto de discontinuidad solo cuando $a = -1$.

Para analizar los intervalos de θ donde r es mayor que cero, se debe analizar el comportamiento de este r en $\theta = 0$. En el caso $|a| > 1$, se encontró que $\lim_{\theta \rightarrow 0} r = \tau$. Con lo cual, r no se anula en $\theta = 0$ y, por ende, tampoco cambia de signo allí. Asimismo, en el caso $|a| < 1$, se encontró que $\lim_{\theta \rightarrow 0} r = 0^+$ si $a\tau > 0$ y $\lim_{\theta \rightarrow 0} r = 0^-$ si $a\tau < 0$. Si bien r tiende a cero en ambos casos, esto lo hace solo por derecha o solo por izquierda, por lo que r no cambia de signo en $\theta = 0$ al igual que antes. Así, en estos casos, r solo podría cambiar de signo en los puntos donde se hace $\pm\infty$, es decir, en los puntos $\theta = \theta_n$. Como r tampoco cambia de signo en $\theta = 0$ en el caso $a = 1$, lo anterior también se cumple en este caso.

De esto se deduce que, si $a \neq -1$, entonces r siempre tiene el mismo signo, positivo

o negativo, en los intervalos de la forma (θ_m, θ_{m+1}) , con m entero. Como r es de periodo 2π , solo hace falta considerar los intervalos $(\theta_0 - \pi, \theta_0) \equiv I_1$ y $(\theta_0, \theta_0 + \pi) \equiv I_2$. De estos dos, se debe tomar el intervalo en el cual $r(\theta) > 0$.

Para saber el signo que toma r en los intervalos I_1 e I_2 , basta con averiguar el signo de $r(\theta)$ para algún valor de θ en uno de estos intervalos. Para esto, note que, como la imagen de la función $\operatorname{arccot}(x)$ es el intervalo $(0, \pi)$, entonces $\theta_0 := \operatorname{arccot}\left(\sinh\left(\frac{v}{a+1}\right)\right) \in (0, \pi)$. Con lo cual, $\theta_0 > 0$ y, por ende, $0 \in I_1$. Así, el signo de r en I_1 es igual al signo de $r(0)$. Por razones similares, el signo de r en I_2 es igual al signo de $r(\pi)$. Pero, como $r(\theta + \pi) = -r(\theta)$, entonces $r(\pi) = -r(0)$. Así, los signos asociados a I_1 e I_2 son opuestos. Es decir, si r es negativo en I_1 entonces es positivo en I_2 , y viceversa.

Como se mencionó antes, en el caso $|a| > 1$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} r = \tau$. Por lo tanto, el signo de $r(0)$ es igual a signo de τ en este caso. De la misma forma, en el caso $|a| < 1$, el signo de $r(0)$ es igual al signo de $a\tau$. Además, al igual que al inicio, en el caso $a = 1$ se obtiene que el signo de $r(0)$ es igual al signo de τ .

De lo anterior se concluye que se debe tomar $\theta \in I_2$ cuando $a \in (-1, 0)$ y $\tau > 0$ o cuando $a \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$ y $\tau < 0$. Para los demás valores de a y τ , con excepción de $a = -1, 0$ y $\tau = 0$, se debe considerar $\theta \in I_1$. Los casos en que $a = 0$ o $\tau = 0$ se deben excluir porque en ellos la ecuación (43) se vuelve indefinida o deja de tener sentido.

Por su parte, en el caso $a = -1$, se encontró que r cambia de signo en $\theta = 0$. Este caso es además un caso especial en el que el denominador de la ecuación (43) se hace cero solo cuando $v = 0$, independientemente del valor de θ . Con lo cual, r no se hace $\pm\infty$ para ningún valor de su argumento. Así, r solo cambia de signo en sus ceros. El caso $a = -1$ y $v = 0$ se excluye porque en este caso la sinécdoxa no está definida (cf. ecuación (38)). A partir del hecho de que, en este caso, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} r = \tau(1 - e^{-v})^{-1} = -e^v \lim_{\theta \rightarrow 0^-} r$, se puede mostrar que debe tomarse $\theta \in (0, \pi)$ si $v\tau > 0$ y $\theta \in (-\pi, 0)$ si $v\tau < 0$.

Por último, dado que la función cotangente es de periodo π , entonces $\cot \theta$ alcanza todos los reales excepto $\cot \theta_0$ al considerar $\theta \in I_1$ o $\theta \in I_2$. Así, en el caso $a \neq -1$,

el parámetro $t = \operatorname{arcsenh}(\cot \theta)$ de la sección anterior también toma todos los reales excepto $\operatorname{arcsenh}(\cot \theta_0) = v/(a+1)$. Es decir, en las ecuaciones paramétricas (40) y (41) se debe tomar $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{v}{a+1} \right\}$. En el caso $a = -1$, t debe tomar todos los reales.

2.3. Casos particulares de sinécdolas

En esta sección se estudian algunos valores particulares de a para los cuales la ecuación de la sinécdola puede escribirse como una ecuación algebraica en x y y . Como se verá luego, algunos de estos casos particulares ocurren cuando a es de la forma $a = k$ o $a = 1/k$, con k entero. En particular, para $a = 1$ y $a = -1$ se obtienen ecuaciones de segundo grado que corresponden a las ecuaciones de hipérbolas y de elipses, respectivamente.

Para empezar, note que la ecuación (38) se puede escribir como

$$\frac{x}{y} = \sinh v \cosh \left(a \operatorname{arcsenh} \left(\frac{x - \tau}{y} \right) \right) - \cosh v \sinh \left(a \operatorname{arcsenh} \left(\frac{x - \tau}{y} \right) \right). \quad (54)$$

Si $a \in \mathbb{Q}$, entonces es posible usar las identidades de las funciones hiperbólicas para reescribir los cosenos hiperbólicos y los senos hiperbólicos que contienen a x y y como raíces o potencias que contienen a $(x - \tau)/y$. En particular, para $a = k \in \mathbb{Z}$, solo hace falta usar de manera recursiva las identidades de suma de argumentos. Para dar un ejemplo, observe que

$$\cosh(2\alpha) = 2 \sinh^2 \alpha + 1 = 2 \frac{(x - \tau)^2}{y^2} + 1, \quad (55)$$

$$\sinh(2\alpha) = 2 \sinh \alpha \cosh \alpha = 2 \frac{x - \tau}{y} \sqrt{1 + \frac{(x - \tau)^2}{y^2}}, \quad (56)$$

con $\alpha = \operatorname{arcsenh}((x - \tau)/y)$. Al usar expresiones como estas, la ecuación (54) puede reescribirse como una ecuación algebraica en x y y por medio de despejes y de elevar al cuadrado a ambos lados de la ecuación.

En el caso en que $a = 1/k$, con $k \in \mathbb{Z}$, es más conveniente escribir la ecuación (38)

como

$$\frac{x - \tau}{y} = \sinh\left(\frac{v}{a}\right) \cosh\left(\frac{1}{a} \operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{y}\right)\right) - \cosh\left(\frac{v}{a}\right) \sinh\left(\frac{1}{a} \operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{y}\right)\right). \quad (57)$$

Así, es posible usar las identidades de suma de argumentos para reescribir esta ecuación como una ecuación algebraica en x y y . Además, como es evidente, el grado de la ecuación algebraica resultante al considerar $a = k$ o $a = 1/k$ dependerá del valor de k . Al hacer los cálculos, se puede demostrar que este grado es igual a $2k$ al menos en los casos en que $|k| = 1, 2, 3, 4$.

Considere ahora algunos casos particulares. Por un lado, para $a = 1$, a partir de la ecuación (54) se obtiene

$$\frac{4 \cosh v + 1}{\tau^2 \cosh v - 1} \left(x - \frac{\tau}{2}\right)^2 - \frac{2 \sinh^2 v}{\tau^2 \cosh v - 1} y^2 = 1, \quad (58)$$

que es la ecuación de una hipérbola centrada en $(\frac{\tau}{2}, 0)$ cuyos focos coinciden con los puntos F y F' del capítulo anterior (cf. sección 1.2). Asimismo, en el caso $a = -1$, a partir de la ecuación (54) se encuentra

$$\frac{4 \cosh v - 1}{\tau^2 \cosh v + 1} \left(x - \frac{\tau}{2}\right)^2 + \frac{2 \sinh^2 v}{\tau^2 \cosh v + 1} y^2 = 1, \quad (59)$$

que es la ecuación de una elipse centrada en $(\frac{\tau}{2}, 0)$ cuyos focos también coinciden con F y F' . Las gráficas de esta hipérbola y de esta elipse corresponden a la unión de las gráficas de las sinécdolas dadas por las ecuaciones $g(x, y) = v$ y $g(x, y) = -v$, donde g se define como en la ecuación (38). Así, la sinécdola es un fragmento de una elipse o una hipérbola cuando $|a| = 1$.

Por otro lado, en el caso $a = 2$, a partir de la ecuación (54) se llega a

$$4(x - \tau)^4 + 4y(x \sinh v + y)(x - \tau)^2 - x^2 y^2 + 2xy^3 \sinh v - y^4 \sinh^2 v = 0. \quad (60)$$

De esta ecuación se nota que, al hacer $y = 0$, se obtiene $x = \tau$. Con lo cual, el punto $(\tau, 0)$ hace parte de la curva dada por esta ecuación. Asimismo, se encuentra que la

gráfica de esta curva es igual a la unión de la gráfica dada por la ecuación (38) con $a = 2$ y la gráfica dada por esta misma ecuación pero con $a = -2$.

2.4. La asíntota de la sinécdola

La asíntota de una curva puede definirse como una recta a la cual la curva converge en el infinito. Formalmente, esta es una recta que es tangente a la curva en un punto en el infinito. En el caso de las sinécdolas, es fácil darse cuenta de que hay una asíntota al escribir $x - \tau \approx x$, para valores grandes de x , en la ecuación (38). Hacer esto da lugar a la ecuación

$$\operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{y}\right) + a \operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{y}\right) = v. \quad (61)$$

Al despejar x de esta ecuación, se obtiene

$$x = \operatorname{senh}\left(\frac{v}{1+a}\right) y, \quad (62)$$

que es la ecuación de una recta que pasa por el origen. Al hacer las gráficas respectivas, se observa que la sinécdola se acerca mucho a esta recta, a medida que se aleja del origen, pero sin converger a ella exactamente. En realidad, la sinécdola parece converger a una recta paralela a esta otra.

Con lo cual, para hallar la asíntota de manera formal, se procede a calcular la recta tangente a la sinécdola en el infinito. Para empezar, al aplicar la derivada implícita en x a la ecuación (38), se llega a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \left(\sqrt{x^2 + y^2} a + \sqrt{y^2 + (x - \tau)^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2} a (x - \tau) + \sqrt{y^2 + (x - \tau)^2} x}. \quad (63)$$

Substituyendo las ecuaciones (40) y (41) en la ecuación anterior se encuentra

$$m := \frac{dy}{dx} = \frac{a \cosh t + \cosh\left(\frac{v-t}{a}\right)}{a \cosh t \sinh\left(\frac{v-t}{a}\right) + \cosh\left(\frac{v-t}{a}\right) \sinh t}. \quad (64)$$

Esta sería la expresión de la pendiente de la recta tangente a la sinécdola en el punto $(x(t), y(t))$. En particular para $t = \frac{v}{a+1}$, donde $x(t)$ y $y(t)$ tienden a $\pm\infty$, se obtiene

$$m \Big|_{t=\frac{v}{a+1}} = \operatorname{csch} \left(\frac{v}{a+1} \right). \quad (65)$$

Por su lado, la ordenada de la recta tangente en el punto $(x(t), y(t))$ puede escribirse como $b := -mx(t) + y(t)$. Reemplazando las ecuaciones (41), (40) y (64) se encuentra

$$b = -\frac{a\tau \cosh t}{a \cosh t \sinh \left(\frac{v-t}{a} \right) + \cosh \left(\frac{v-t}{a} \right) \sinh t}. \quad (66)$$

Al igual que antes, al reemplazar $t = \frac{v}{a+1}$, se obtiene

$$b \Big|_{t=\frac{v}{a+1}} = -\frac{a\tau}{a+1} \operatorname{csch} \left(\frac{v}{a+1} \right). \quad (67)$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la sinécdola en el infinito, es decir, la ecuación de su asíntota, es

$$x = \sinh \left(\frac{v}{a+1} \right) y + \frac{a\tau}{a+1}. \quad (68)$$

Con lo cual se comprueba que la línea recta dada por la ecuación (62) es paralela a la dada por la ecuación (68).

Para $a = -1$, la ecuación (61) se vuelve inconsistente. Por ende, no hay asíntota para este valor. Esto a su vez es consistente con el hecho de que, para $a = -1$, la sinécdola se convierte en un fragmento de una elipse. A excepción de este caso particular, las sinécdolas exhiben un comportamiento asintótico, al igual que las hipérbolas.

2.5. Intersecciones entre el óvalo de Descartes y la sinécdola

Como se verá en el siguiente capítulo, conocer la intersección entre el óvalo y la sinécdola es clave para construir el sistema de coordenadas ovoidales. En particular, se verá que estas intersecciones darán lugar a las relaciones entre las coordenadas

cartesianas y las coordenadas ovoidales. Por lo pronto, esta sección se enfoca en hallar dichas intersecciones. Para esto, se debe resolver el sistema 2×2 dado por

$$\sqrt{x^2 + y^2} + a\sqrt{(x - \tau)^2 + y^2} = u, \quad (69a)$$

$$\operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{y}\right) + a \operatorname{arcsenh}\left(\frac{x - \tau}{y}\right) = v. \quad (69b)$$

La solución a este sistema debe relacionar a x y y como funciones de u y v . Para simplificar el problema, se puede hacer uso de las ecuaciones paramétricas (40) y (41). Al sustituir estas ecuaciones, se encuentra que la ecuación (69b) se satisface idénticamente, dando lugar a la ecuación $v = v$. Pero, por su parte, la ecuación (69a) pasa a ser

$$\frac{|\tau| \left(\cosh t + a \cosh\left(\frac{v-t}{a}\right) \right)}{\left| \sinh t - \sinh\left(\frac{v-t}{a}\right) \right|} = u. \quad (70)$$

Así, el sistema de ecuaciones 2×2 se reduce a resolver esta ecuación para t .

Una forma de eliminar los valores absolutos de la ecuación (70) consiste en elevar a ambos lados al cuadrado. Sin embargo, se encuentra que esta estrategia conduce a grandes complicaciones al hacer que la solución sea más compleja. En su lugar, uno se da cuenta de que la expresión con valor absoluto es precisamente igual a $|y|$, con y dado por la ecuación (40). Así, al considerar $y > 0$ o $y < 0$, se pueden eliminar los valores absolutos de la ecuación (70). Hacer esto es equivalente a buscar intersecciones del óvalo y la sinécdoła sobre el semi-plano $y > 0$ o sobre el semi-plano $y < 0$.

En el apéndice B, se encuentra además que la condición que debe cumplir t para obtener $y > 0$ es que $(t - \frac{v}{a+1}) \tau \mathcal{S}(a) > 0$ si $a \neq -1, 0$ y $v\tau > 0$ si $a = -1$, con $\mathcal{S}(a) := \left| a + \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2}$. El caso $a = 0$ se excluye porque en este las ecuaciones paramétricas (40) y (41) no funcionan. Por consistencia, la condición resultante para t debe ser verificada luego de hallar una solución a la ecuación (70) con $|y| = y$. En algunos casos donde se tiene certeza de que existe una intersección y donde se encuentra una única solución real para t , esta verificación puede obviarse.

Así, al evaluar $|y| = y$ en la ecuación (70) y al considerar el cambio de variable

$t = \ln(s)$, con $s > 0$, se encuentra

$$(a\tau - u)s^{\frac{2}{a}} + e^{\frac{v}{a}}(\tau - u)s^{\frac{1}{a}+1} + e^{\frac{v}{a}}(\tau + u)s^{\frac{1}{a}-1} + e^{\frac{2v}{a}}(a\tau + u) = 0. \quad (71)$$

Debido a su importancia, esta ecuación será llamada también como *ecuación s* . Es fácil ver que al evaluar $|y| = -y$ en la ecuación (70), se obtiene la misma ecuación s , pero con u intercambiado por $-u$. De este modo, el problema de resolver la ecuación (70) se reduce a resolver solamente la ecuación (71) para valores positivos de s .

En el apéndice B, se encuentra que esta ecuación siempre puede reescribirse como una ecuación algebraica en una potencia de s al tomar $a \in \mathbb{Q}$. Así, usando las soluciones conocidas a las ecuaciones algebraicas, es posible resolver la ecuación (71) para valores definidos y racionales de a . Encontrar una solución general, para un valor indeterminado de a , es muy complicado, pues esto sería equivalente a resolver una ecuación algebraica de grado n -ésimo para un valor indeterminado de n .

Así mismo, en este mismo apéndice, se encuentra que la ecuación (71) siempre tiene al menos una solución positiva si a es un número racional positivo o un número racional menor o igual que -1 (cf. sección B.3). Con lo cual, el óvalo y la sinécdola siempre se intersecan al menos para estos valores de a . Además, en este mismo apéndice, se encuentran las soluciones de la ecuación (71) para $a = 1$ y $a = \frac{1}{3}$. En cada caso, se encuentra además la solución positiva de s .

3. EL SISTEMA DE COORDENADAS OVOIDALES

El propósito de este capítulo es definir en detalle el sistema de coordenadas ovaladas (2D) y el sistema de coordenadas ovoidales (3D). Con estas coordenadas, en la parte II de este trabajo se propondrá un ansatz métrico para modelar el campo gravitacional de un objeto ovoidal. Para definir estos sistemas de coordenadas se usarán los óvalos de Descartes confocales y las sinécdolas del capítulo anterior, así como los resultados de la sección 2.5. Así, en la sección 3.1, se construirán las coordenadas ovaladas y, en la sección 3.2, se construirán las coordenadas ovoidales a partir de las ovaladas al introducir una coordenada azimutal ϕ . Luego, en la sección 3.3 se escribirá el elemento de línea euclidiano en coordenadas ovoidales. Con los factores de escala dados por este elemento de línea, en la sección 3.4 se escribirán algunos operadores como el gradiente o el laplaciano. Por último, en la sección 3.5 se explorará el uso del método de separación de variables para resolver la ecuación de Laplace en coordenadas ovoidales.

3.1. Construcción de las coordenadas ovaladas

Para construir el sistema de coordenadas ovaladas, se definirá a una familia de óvalos de Descartes como curvas coordenadas. Es decir, se tomará al parámetro que define cada curva de esta familia como una de las nuevas coordenadas. Así mismo, para obtener un sistema de coordenadas ortogonales, se deberá considerar otra familia de curvas que se interseque ortogonalmente con esta familia de óvalos. Con lo cual, por lo visto en el capítulo anterior, esta otra familia de curvas deben ser las sinécdolas. Así, a continuación, se considerarán a los óvalos confocales y a las sinécdolas como curvas coordenadas.

Para esto, la idea es asignar a cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ las coordenadas ovaladas (u, v) dadas por

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} + a\sqrt{(x - \tau)^2 + y^2}, \quad (72)$$

$$v = \operatorname{arcsenh} \left(\frac{x}{y} \right) + a \operatorname{arcsenh} \left(\frac{x - \tau}{y} \right), \quad (73)$$

con a y τ constantes. Estas relaciones corresponden a las ecuaciones que definen a los óvalos confocales y a las sinécdolas, respectivamente. Como puede verse, estas relaciones además están definidas para todos los puntos de \mathbb{R}^2 excepto aquellos sobre el eje x . Para estos últimos, podemos fijar por convención $v = \infty$ para los puntos en el eje x positivo y $v = -\infty$ para los demás. Esto completa la asociación de coordenadas para todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Además, se encuentra que estas coordenadas son ambiguas, dado que hay más de un punto de intersección entre el óvalo y la sinécdola (cf. figura 13). Con lo cual, varios puntos distintos tendrían las mismas coordenadas ovaladas (u, v) . Existen varias maneras de resolver esta ambigüedad. Una de estas se explora en la sección final del apéndice B. Brevemente, esta idea consiste en asignar valores de u positivos a los puntos arriba del eje x y valores negativos a los puntos debajo del mismo. Más concretamente, en el caso $a = 1/3$, donde la condición de existencia del óvalo es $u \geq |\tau|/3$, se encuentran unas relaciones $x = x(u, v)$ y $y = y(u, v)$ que dan lugar a puntos arriba del eje x al tomar $u > |\tau|/3$ y a puntos abajo del eje x al tomar $u < -|\tau|/3$. En donde los puntos con coordenadas cartesianas $(x(u_0, v), y(u_0, v))$ y $(x(-u_0, v), y(-u_0, v))$ son los dos puntos de intersección del óvalo dado por la ecuación (72) con $u = u_0$ y la sinécdola dada por la ecuación (73). Esto resuelve la ambigüedad de coordenadas para $a = 1/3$. Se puede proceder de forma similar para los demás casos.

Ahora, para definir completamente el sistema de coordenadas, se deben encontrar las relaciones entre las coordenadas cartesianas y ovaladas. Estas relaciones se obtienen de las coordenadas (x, y) de los puntos de intersección del óvalo y la sinécdola encontradas en la sección 2.5 del capítulo anterior. Para $y > 0$, éstas son

$$x = \frac{\tau \sinh(\ln s)}{\sinh(\ln s) - \sinh\left(\frac{v - \ln s}{a}\right)}, \quad (74)$$

$$y = \frac{\tau}{\sinh(\ln s) - \sinh\left(\frac{v - \ln s}{a}\right)}, \quad (75)$$

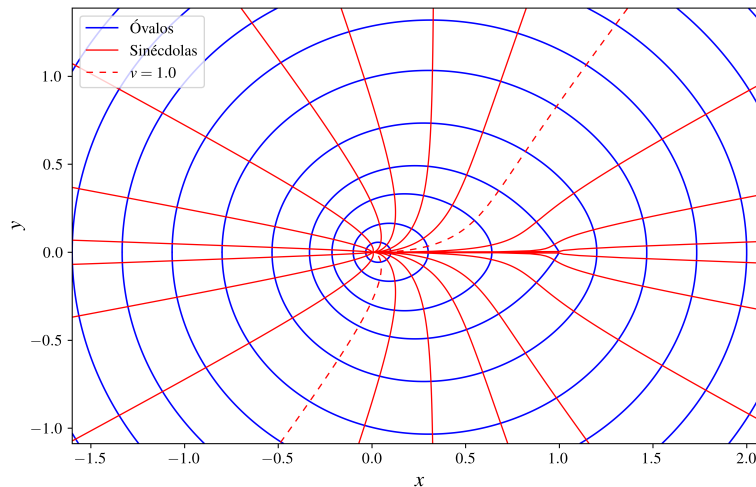


Figura 13. Curvas coordenadas del sistema de coordenadas ovaladas, correspondientes a óvalos que comparten dos focos y a sinécdolas. Se ha tomado $a = 1/2$ y $\tau = 1$. El óvalo con un pico, dado en esta gráfica por la ecuación $u = 1$, es también el ciclo interior de una caracola de Pascal (cf. apéndice A). A su vez, la sinécdola graficada con un trazo discontinuo permite notar que hay dos puntos de intersección entre cada óvalo con esta sinécdola

donde $s = s(u, v)$ es la solución real positiva de la ecuación (71) que además garantiza que la cantidad $t = \ln s$ cumpla las condiciones del cuadro 3. Dado que al graficar los óvalos y las sinécdolas vemos que siempre hay un punto de intersección sobre el semi-plano $y > 0$ (cf. figura 13), entonces ésta solución debería ser única siempre. Por su parte, para $y < 0$, debemos intercambiar u por $-u$ en la ecuación (71) y reemplazar su solución en las ecuaciones (74) y (75). En las relaciones resultantes al substituir s , se debe considerar que u toma aquellos valores que satisfagan la condición de existencia del óvalo (cf. cuadro 1) y se debe considerar que v toma cualquier valor real.

Como comentario adicional, el sistema de coordenadas ovaladas presentado aquí no debe confundirse con el sistema de coordenadas ovaladas cassinianas mencionadas en MOON, P. H. y SPENCER, D. E. 1988. En caso de confusión o para dar claridad se deberían llamar a las coordenadas de este capítulo como “coordenadas ovaladas cartesianas” o como “coordenadas ovaladas de Descartes”.

3.2. Construcción de las coordenadas ovoidales

Ahora se procede a construir las coordenadas ovoidales. Intuitivamente, éstas coordenadas se pueden considerar como una especie de “rotación” de las coordenadas ovaladas 2D, en el sentido de que las superficies coordenadas del uno son las superficies de revolución de las curvas coordenadas del otro. De este modo a cada punto (x, y, z) de \mathbb{R}^3 se le asignan unas coordenadas (u, v, ϕ) definidas por

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + a\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \tau)^2}, \quad (76)$$

$$v = \operatorname{arcsenh}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + a \operatorname{arcsenh}\left(\frac{z - \tau}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad (77)$$

$$\phi = \operatorname{atan2}(y, x). \quad (78)$$

donde $\phi = \operatorname{atan2}(y, x) := 2 \arctan\left(\frac{y}{(x + \sqrt{x^2 + y^2})}\right)$ es el ángulo formado entre la proyección del vector posición \mathbf{r} sobre el plano xy con el eje x . De este modo, las coordenadas u y v corresponden a los parámetros de los óvalos y sinécdolas usados para construir las superficies de revolución que pasan por el punto, y ϕ corresponde a una coordenada de rotación respecto al eje z (cf. figura 14). A diferencia del anterior, se encuentra que este sistema de coordenadas no es ambiguo debido principalmente a que la ecuación (77) es la ecuación de la superficie de revolución del tramo positivo de la sinécdola (arriba del eje focal), para el otro tramo siendo la misma ecuación (77) pero con $\sqrt{x^2 + y^2}$ intercambiado por $-\sqrt{x^2 + y^2}$.

En este caso, las relaciones entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas ovoidales son

$$x = \Upsilon(u, v) \cos \phi, \quad (79)$$

$$y = \Upsilon(u, v) \sin \phi, \quad (80)$$

$$z = \Lambda(u, v), \quad (81)$$

donde $\Lambda(u, v)$ y $\Upsilon(u, v)$ son definidas como el lado derecho de las ecuaciones (74) y (75), respectivamente. Estas ecuaciones consideran la solución real positiva de la

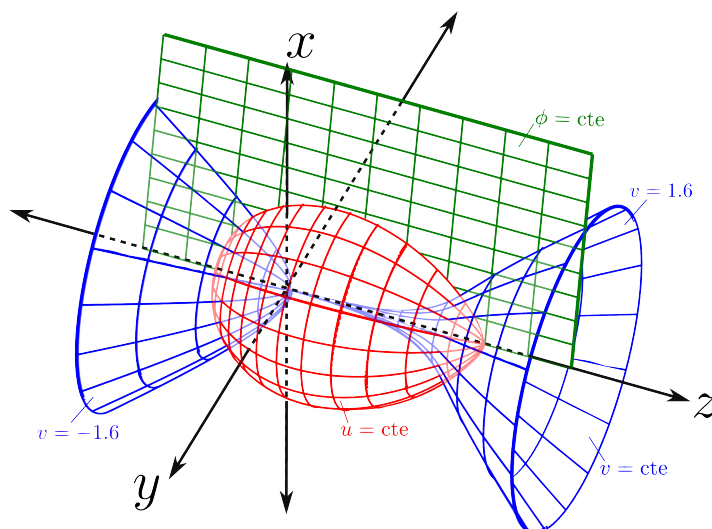


Figura 14. Superficies coordenadas del sistema de coordenadas ovoidales. Ellas corresponden de ovoides de Descartes, sinecdoloides y semi-planos paralelos al eje z . Aquí se consideró $a = \frac{1}{2}$, $\tau = 1$, $u = 0.95$, $\phi = -0.22$, y los valores $v = 1.6$ y $v = -1.6$, usados para graficar el sinecdoloide completo. Se ve que el sinecdoloide se asemeja al hiperboloide de doble hoja.

ecuación (71), que está asociada a la intersección del óvalo y la sinécdola dados por el sistema de ecuaciones (69) en el semi-plano $y > 0$. Consecuentemente, se tiene que $\rho := \sqrt{x^2 + y^2} = \Upsilon$, dado que por definición $\Upsilon(u, v) > 0$ para que corresponda al punto de intersección en el semi-plano $y > 0$. Es importante resaltar que, al igual que antes, u satisface la condición de existencia del óvalo de Descartes y v puede tomar cualquier real. Asimismo, por definición $\phi \in (-\pi, \pi]$.

Por otro lado, al reemplazar las ecuaciones (79)–(81) en las ecuaciones (76) y (77) se encuentran las relaciones

$$\sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} + a\sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} = u, \quad (82)$$

$$\operatorname{arcsenh}\left(\frac{\Lambda}{\Upsilon}\right) + a \operatorname{arcsenh}\left(\frac{\Lambda - \tau}{\Upsilon}\right) = v, \quad (83)$$

que serán de utilidad para simplificar los coeficientes del elemento de línea en coordenadas ovoidales que veremos luego.

Por otra parte, a la superficie de revolución del óvalo se le denomina ovoide y a la superficie de revolución de la sinécdola se le denomina *sinecdoloide*, en analogía

con hiperboloide. Como puede inferirse de lo mencionado antes, el sinecdoloide se compone de la unión de las superficies definidas por $v = C$ y $v = -C$, siendo C una constante real (cf. figura 14). La superficie definida por $v = \text{constante}$ se denominará manto de sinécdoide. Así, las superficies coordenadas de las coordenadas ovoidales son ovoides, mantos de sinecdoloides y semi-planos paralelos al eje z .

3.3. El elemento de línea en coordenadas ovoidales

En esta sección se calculará el elemento de línea euclidiano en coordenadas ovoidales. Intuitivamente, se pueden expresar los elementos de línea dx , dy y dz en términos de los elementos du , dv y $d\phi$ de la manera usual. Por ejemplo, dx puede escribirse como $dx = x_u du + x_v dv + x_\phi d\phi$, donde los subíndices indican derivada parcial. Al reemplazar la ecuación (79) es posible encontrar este dx explícitamente. Por lo tanto, si se considera el elemento de línea $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ y se reemplazan los elementos dx , dy y dz en términos de du , dv y $d\phi$, se encuentra

$$ds^2 = \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) du^2 + 2 \left(\Lambda_u \Lambda_v + \Upsilon_u \Upsilon_v \right) du dv + \left(\Lambda_v^2 + \Upsilon_v^2 \right) dv^2 + \Upsilon^2 d\phi^2, \quad (84)$$

donde los subíndices indican derivada parcial. Aunque aparece un término cruzado en $du dv$, se puede demostrar que este es cero, como se verá luego.

Para simplificar este elemento de línea, considere las ecuaciones (82) y (83). Al aplicar la derivada implícita con respecto a u (o v) a estas ecuaciones se obtiene un sistema lineal 2×2 con respecto a Λ_u y Υ_u (o Λ_v y Υ_v). Al resolver estos sistemas lineales, se obtiene

$$\Lambda_u = \frac{- \left(\sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} a (\tau - \Lambda) - \Lambda \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} \right)}{2a (\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) + (a^2 + 1) \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2}}, \quad (85)$$

$$\Upsilon_u = \frac{\Upsilon \left(\sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} a + \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} \right)}{2a (\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) + (a^2 + 1) \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2}}, \quad (86)$$

$$\Lambda_v = \frac{\Upsilon^2 \left(\sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} a + \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} \right)}{2a (\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) + (a^2 + 1) \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2}}, \quad (87)$$

$$\Upsilon_v = \frac{\Upsilon \left(\sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} a (\tau - \Lambda) - \Lambda \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} \right)}{2a (\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) + (a^2 + 1) \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2}}. \quad (88)$$

De estas ecuaciones, se observa que $\Lambda_v = \Upsilon \Upsilon_u$ y $\Upsilon_v = -\Upsilon \Lambda_u$. Al reemplazar estas relaciones en la ecuación (84) se llega a

$$ds^2 = \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) du^2 + \Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) dv^2 + \Upsilon^2 d\phi^2, \quad (89)$$

demostrando que el término cruzado en $du dv$ es cero. Adicionalmente, al sumar los cuadrados de las ecuaciones (85) y (86) y al reemplazar del lado derecho las definiciones de Λ y Υ en términos de v y $\ln s$ (cf. ecuaciones (74) y (75)) se encuentra que

$$\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 = \frac{(s^2 + 1) \left(s^{\frac{2}{a}} + \psi^2 \right)}{\left[(a + 1)^2 s^2 + (a - 1)^2 \right] \psi^2 + 8a s^{\frac{a+1}{a}} \psi + s^{\frac{2}{a}} \left[(a - 1)^2 s^2 + (a + 1)^2 \right]}, \quad (90)$$

donde $\psi := e^{\frac{v}{a}}$. Además, de la ecuación (75) también es posible escribir Υ^2 en términos de s y ψ como

$$\Upsilon^2 = \frac{4\tau^2 s^2 \psi^2}{\left(s^{\frac{a-1}{a}} \psi^2 + (1 - s^2) \psi - s^{\frac{a+1}{a}} \right)^2}. \quad (91)$$

En general las expresiones explícitas de $\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2$ y Υ^2 en términos de u y v para un valor particular de a son muy extensas. Con lo cual, es mejor evitar su uso hasta donde sea posible.

3.4. Operadores diferenciales en coordenadas ovoidales

En esta sección se busca explorar cómo lucen algunos operadores diferenciales, como el gradiente o el laplaciano, en coordenadas ovoidales. En la siguiente sección se buscarán soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas ovoidales usando separación de variables. Para encontrar los operadores diferenciales se con-

siderarán los resultados de Moon y Spencer⁶⁵.

Para empezar, de las definiciones mostradas en⁶⁶, el gradiente de un campo escalar $\Psi = \Psi(u, v, \phi)$ en coordenadas ovoidales queda como

$$\nabla\Psi = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2}} \frac{\partial\Psi}{\partial u} \hat{\mathbf{e}}_u + \frac{1}{\Upsilon\sqrt{\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2}} \frac{\partial\Psi}{\partial v} \hat{\mathbf{e}}_v + \frac{1}{\Upsilon} \frac{\partial\Psi}{\partial\phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (92)$$

donde los vectores $\hat{\mathbf{e}}_u$, $\hat{\mathbf{e}}_v$ y $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ son los vectores unitarios asociados al sistema de coordenadas ovoidales. Éstos están dados por

$$\hat{\mathbf{e}}_u = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2}} \left(\Upsilon_u \cos\phi \hat{\mathbf{i}} + \Upsilon_u \sin\phi \hat{\mathbf{j}} + \Lambda_u \hat{\mathbf{k}} \right), \quad (93)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_v = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2}} \left(-\Lambda_u \cos\phi \hat{\mathbf{i}} - \Lambda_u \sin\phi \hat{\mathbf{j}} + \Upsilon_u \hat{\mathbf{k}} \right), \quad (94)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\phi = -\sin\phi \hat{\mathbf{i}} + \cos\phi \hat{\mathbf{j}}, \quad (95)$$

donde $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ son los vectores unitarios en las direcciones de x , y y z , respectivamente. Por su parte, a partir de las definiciones de⁶⁷, el laplaciano de un campo escalar $\Psi(u, v, \phi)$ queda como

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{\Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\Upsilon^2 \frac{\partial\Psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial^2\Psi}{\partial v^2} + (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} \right]. \quad (96)$$

En la siguiente sección se intentará resolver esta expresión igualada a cero de manera exacta.

⁶⁵ MOON, P. H. y SPENCER, D. E. 1988.

⁶⁶ Ibíd.

⁶⁷ Ibíd.

3.5. La ecuación de Laplace en coordenadas ovoidales

En esta sección se quiere ver si la ecuación de Laplace en coordenadas ovoidales puede resolverse usando el método de separación de variables. Así, de la ecuación (96), se tiene que la ecuación de Laplace puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\Upsilon^2 \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} + \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (97)$$

El método de separación de variables consiste en proponer el ansatz $\Psi(u, v, \phi) = U(u)W(v)\Phi(\phi)$. Al reemplazar este ansatz en la ecuación anterior y al dividirla en ambos lados por $UW\Phi$ se obtiene

$$\frac{(\Upsilon^2 U')_u}{U} + \frac{W''}{W} + \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \frac{\Phi''}{\Phi} = 0, \quad (98)$$

donde el símbolo (') indica derivada ordinaria. Al dividir a ambos lados por $(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)$ se observa que los primeros dos términos se convierten en funciones solo de (u, v) , y el tercero, solo de ϕ . Por tanto, se concluyen que éstos son constantes, es decir,

$$\frac{(\Upsilon^2 U')_u}{U} + \frac{W''}{W} = C(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2), \quad (99)$$

$$\Phi'' = -C\Phi \quad (100)$$

con C una constante. La ecuación (99) es fácil de resolver analíticamente, pero la otra no lo es debido a que no está completamente separada en u y v . Esto demuestra que la ecuación de Laplace no es separable en coordenadas ovoidales, dado que el ansatz $\Psi(u, v, \phi) = U(u)W(v)\Phi(\phi)$ no conduce a tres ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto sugiere que posiblemente se deban usar métodos numéricos para resolver esta ecuación.

No obstante, otra forma de resolver la ecuación de Laplace sería proponer una R -separabilidad, que consiste en proponer el ansatz $\Psi = U(u)W(v)\Phi(\phi)/R(u, v, \phi)$ ⁶⁸.

⁶⁸ MOON, P. H. y SPENCER, D. E. 1988.

En el capítulo 4 de⁶⁹ este método es detallado en términos de una matriz de Stäckel. Sin embargo en las pruebas realizadas por el autor de este trabajo no se encontró alguna función R que sea útil. Cabe mencionar que, además, la ecuación de Laplace 2D tampoco resulta separable en coordenadas ovaladas.

Al repetir el procedimiento anterior para la ecuación de Helmholtz tampoco fue posible obtener tres ecuaciones diferenciales ordinarias al proponer el ansatz $\Psi(u, v, \phi) = U(u)W(v)\Phi(\phi)$. Como se menciona en⁷⁰, algunas otras ecuaciones diferenciales de interés físico, como la ecuación de difusión y la ecuación de onda, pueden reducirse a la ecuación de Helmholtz al usar separación de variables. De este modo, éstas otras ecuaciones diferenciales tampoco son separables en coordenadas ovoidales. Al igual que antes, esto sugiere que se debería usar un enfoque computacional para resolver estas ecuaciones.

⁶⁹ MOON, P. H. y SPENCER, D. E. 1988.

⁷⁰ *Ibíd.*

PARTE II:

SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN

4. ESPACIOTIEMPOS ESTACIONARIOS Y OVOIDALMENTE SIMÉTRICOS

Symmetry, as wide or as narrow as you may define its meaning, is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty and perfection.

—Hermann Weyl, *Symmetry* (1952).

En este capítulo se usará el método de Krasinski⁷¹ para proponer un ansatz métrico estacionario y ovoidalmente simétrico. Este método consta de definir unos observadores cuyos espacios locales en reposo tienen una métrica inducida con una parte localmente conforme a la métrica sobre ovoides de Descartes. Para esto, se usarán los resultados de la sección 3.3, referentes al elemento de línea en coordenadas ovoidales. Se hablará brevemente del método de Krasinski en la sección 4.1 y éste se implementará luego en la sección 4.2. Por su parte, en la sección 4.3 se hablará acerca los invariantes geométricos usados típicamente para caracterizar una métrica. En la sección 4.4 se calcularán todos los vectores de Killing asociados al ansatz métrico ovoidal y estático. Para el cual, se hallará la solución más general de la ecuación de Killing.

4.1. El método de Krasinski

Para implementar el método de Krasinski, considere un conjunto de observadores con cuadrivelocidad u . Cada espacio local en reposo de estos observadores tiene una métrica inducida que localmente es igual a

$$h = g + \underline{u} \otimes \underline{u}, \quad (101)$$

⁷¹ KRASIŃSKI, A. 1978.

siendo $\underline{u} := g(\cdot, u)$ el dual métrico de u y siendo g la métrica del espaciotiempo. El término local se refiere al hecho de que la métrica inducida sobre el espacio local en reposo Σ asociado a $u|_p$ tiene la forma $\mathcal{H} = g + \underline{n} \otimes \underline{n}^{72}$, con n ortogonal a Σ y con $n|_p = u|_p$, pero con n no necesariamente igual a $u|_\Sigma$, dado que esto implicaría que u tuviera una familia de hipersuperficies ortogonales. En cuyo caso, u cumpliría el teorema de Frobenius. Sin embargo, esto no es algo impuesto por Krasinski en su artículo original⁷³. Con lo cual, h es sólo localmente igual a \mathcal{H} en el sentido de que $h|_p = \mathcal{H}|_p$, pero $h|_\Sigma \neq \mathcal{H}|_\Sigma$ en general. Así, h solo tiene una interpretación local y no corresponde necesariamente a la métrica inducida sobre alguna hipersuperficie. La idea fundamental de Krasinski para definir espaciotiempos elipsoidales oblatos es que la métrica inducida sobre los espacios locales en reposo de u debe ser localmente igual a la métrica sobre elipsoides oblatos más un término que complete la métrica. Usando coordenadas tipo elipsoidales oblatas (r, θ, Φ) , Krasinski impone que⁷⁴

$$h = f^2 dr \otimes dr + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta \otimes d\theta + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\Phi \otimes d\Phi, \quad (102)$$

siendo $f = f(r, \theta)$ una función escalar y a una constante real. Si se elimina el primer término, se obtiene la métrica inducida sobre elipsoides oblatos. Si se eligiera por su parte $f(r, \theta) = (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)/(r^2 + a^2)$, entonces se obtendría una métrica euclidiana. De este modo, h puede interpretarse como la métrica de un *3-espacio elipsoidal curvo*, en el sentido de que la desviación de $f(r, \theta)$ de $(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)/(r^2 + a^2)$ da lugar a una métrica no euclidiana.

En este orden ideas, un espaciotiempo es elipsoidal oblato, en el sentido de Krasinski, si existen unos observadores cuyos espacios locales en reposo tienen una

⁷² É. GOURGOULHON: “3+1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity”. En: Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2012. Cap. 3. Geometry of Hypersurfaces, págs. 29-54.

⁷³ KRASIŃSKI, A. 1978.

⁷⁴ Ibíd.

métrica inducida localmente igual a h , donde “localmente” se refiere al hecho de que la igualdad $h|_{\Sigma} = \mathcal{H}$ se cumple, en general, solo en un punto p , siendo \mathcal{H} y Σ igual que antes. De este modo, solo ciertos observadores son los que perciben localmente la simetría elipsoidal oblata.

Si la cuadrivelocidad u es conocida, entonces g puede hallarse al buscar la métrica más general que satisfaga la ecuación (102) con $h = g + \underline{u} \otimes \underline{u}$. Bajo este método, Krasinski fue capaz de hallar un ansatz métrico estacionario y con simetría elipsoidal oblata que tiene a la métrica de Kerr como caso particular⁷⁵. Esto se consigue, al considerar unos observadores con cuadrivelocidad $u = U\partial_t + V\partial_\phi$, donde U y V son funciones de r y θ . Si el espaciotiempo estuviera dotado además de un fluido estacionario, entonces estos observadores podrían interpretarse como observadores comóviles con dicho fluido.

Como se verá luego en la siguiente sección, el método de Krasinski también puede usarse para hallar un ansatz métrico estático y esféricamente simétrico. Esto aporta un argumento adicional a favor de usar el método de Krasinski para proponer un ansatz estacionario y ovoidalmente simétrico.

4.2. El ansatz métrico estacionario y ovoidalmente simétrico

En esta sección, se implementará el método de Krasinski para proponer un ansatz métrico estacionario y ovoidalmente simétrico. Para lo cual se tomará un conjunto de observadores similar al usado por Krasinski y luego se impondrá que h , definida por la ecuación (101), adopta una forma parecida a la métrica sobre ovoides de Descartes con un término extra que completa la métrica. Por último, se encontrará la métrica g más general que satisfaga lo anterior.

Para empezar, como los ovoides son axialmente simétricos, se considera un espaciotiempo estacionario y axialmente simétrico. Existen naturalmente dos vectores de

⁷⁵ KRASIŃSKI, A. 1978.

Killing $\xi = \partial_t$ y $\eta = \partial_\phi$ que conmutan $[\xi, \eta] = 0$ ⁷⁶. La idea es considerar observadores con una cuadrivelocidad u que sea combinación lineal de estos dos vectores de Killing, al igual que como lo hizo Krasinski. Así, se define que

$$u = U\partial_t + V\partial_\phi, \quad (103)$$

con U y V campos escalares independientes de t y ϕ . Al igual que antes, si el espaciotiempo estuviera dotado de un fluido estacionario entonces estos observadores podrían interpretarse como observadores comóviles con dicho fluido.

Adicional a lo anterior, en un espaciotiempo estacionario y axialmente simétrico con vectores de Killing ∂_t y ∂_ϕ la métrica más general está dada por⁷⁷

$$g = g_{00} dt \otimes dt + g_{03} (dt \otimes d\phi + d\phi \otimes dt) + g_{33} d\phi \otimes d\phi + g_{AB} dx^A \otimes dx^B, \quad (104)$$

donde $A, B = 1, 2$ y donde todas las componentes son funciones de $x^1 \equiv u$ y $x^2 \equiv v$. Así, siguiendo el método de Krasinski, se impondría que una parte de $h = g + \underline{u} \otimes \underline{u}$ tuviera la forma de la métrica sobre ovoides. Aquí se desea ir un poco más lejos, imponiendo que una parte de este tensor h es conforme a la métrica sobre ovoides, en lugar de ser exactamente igual. De este modo, se impone que

$$h = f^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) du \otimes du + k^2 (\Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) dv \otimes dv + \Upsilon^2 d\Phi \otimes d\Phi), \quad (105)$$

donde f y k dependen de u y v , y donde k^2 es el factor conforme. Note la similitud con el elemento de línea en coordenadas ovoidales (cf. ecuación (89)). Dado que se usó justo este elemento de línea, la parte conforme en la ecuación (105) se interpreta como la métrica sobre una familia de ovoides confocales. Esto mismo sucede en el artículo de Krasinski⁷⁸, donde aparece la métrica sobre una familia de elipsoides

⁷⁶ STEPHANI, H. et al. 2003.

⁷⁷ KRASIŃSKI, A. 1978; STEPHANI, H. et al. 2003.

⁷⁸ KRASIŃSKI, A. 1978.

oblatos también confocales. Tanto en el caso de Krasinski como en el caso de aquí, el uso de superficies confocales está basado en que los sistemas de coordenadas usados tienen estas superficies confocales por construcción.

Finalmente, al imponer la ecuación (105) con $\mathbf{h} = \mathbf{g} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ se obtiene que la forma más general de \mathbf{g} es

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = & -J^2 (\mathbf{dt} + \omega \mathbf{d}\phi) \otimes (\mathbf{dt} + \omega \mathbf{d}\phi) + f^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \mathbf{du} \otimes \mathbf{du} \\ & + k^2 \Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \mathbf{dv} \otimes \mathbf{dv} + A^2 \mathbf{d}\phi \otimes \mathbf{d}\phi, \end{aligned} \quad (106)$$

donde J , A y ω son funciones independientes entre sí que dependen de u y v , y que pueden escribirse en términos de U , V y g_{33} por medio de las ecuaciones (262), (265) y (266) con $g_{00} = -J^2$. Para más detalles valla al apéndice D.

El límite estático de esta métrica se obtiene al tomar $\omega = 0$, lo cual implica $V = \mp \sqrt{k^2 \Upsilon^2 - A^2} / A^2$. Sin embargo, además se quisiera que sobre los espacios locales en reposo la métrica inducida no tuviera términos con \mathbf{dt} . De la ecuación (261) se ve que esto ocurre cuando $V = 0$. Por ende, necesitamos adicionalmente $A^2 = k^2 \Upsilon^2$. Esto es equivalente a decir que en el caso estático los observadores con cuadrivelocidad \mathbf{u} deben interpretarse como observadores comóviles con un fluido estático. Con lo cual se debe tener $V = 0$ para que \mathbf{u} solo tenga componentes en ∂_t . Así, en el límite estático, la métrica de la ecuación (106) se reduce a

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = & -J^2 \mathbf{dt} \otimes \mathbf{dt} + f^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \mathbf{du} \otimes \mathbf{du} + k^2 \Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \mathbf{dv} \otimes \mathbf{dv} \\ & + k^2 \Upsilon^2 \mathbf{d}\phi \otimes \mathbf{d}\phi. \end{aligned} \quad (107)$$

Finalmente, dado que los ovoides tienen como caso particular a la esfera, es de interés ver qué forma adopta la métrica de la ecuación (107) en este límite esférico, que se obtiene al tomar $a = 0$ o $\tau = 0$. Para ver este límite, es más conveniente tener la métrica en coordenadas esféricas. Para esto, se deben usar las ecuaciones (76)–(78) para escribir \mathbf{du} y \mathbf{dv} en términos de \mathbf{dr} y $\mathbf{d}\theta$. Luego, usando las ecuaciones (85) y (86) es posible reescribir $\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2$ en términos de Λ , Υ , τ y a . Así, al

recordar que $\Lambda = z = r \cos \theta$ y $\Upsilon = \sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \theta$ (cf. ecuaciones (79)–(81)) y al imponer ya sea $a = 0$ o $\tau = 0$ se obtiene

$$g = -J^2 dt \otimes dt + f^2 dr \otimes dr + k^2 r^2 d\theta \otimes d\theta + k^2 r^2 \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi. \quad (108)$$

Como puede verse, al fijar el factor conforme k^2 a uno y considerar que J y f dependen solo de r , ésta corresponde al ansatz métrico de la solución de Schwarzschild en su forma usual⁷⁹. Por lo tanto, nuestro ansatz métrico ovoidal de la ecuación (107) se reduce al ansatz métrico esférico en el caso límite $a = 0$ o $\tau = 0$.

4.3. Simetrías en Relatividad General

En relatividad general las simetrías del espaciotiempo usualmente están asociadas a la existencia de vectores de Killing, que están relacionados con la invarianza de la métrica ante arrastres de Lie. En el caso de la simetría elipsoidal oblata, Krasinski no parte de considerar la existencia de un vector de Killing para esta nueva simetría. Sin embargo, vale la pena estudiar si los ansatz métricos derivados del método de Krasinski poseen o no vectores de Killing. Antes de eso, a continuación se hará una revisión sobre los vectores de Killing con el objetivo de traer a discusión la intrínseca relación entre estos y nuestra noción intuitiva de simetría. En la siguiente sección se calcularán los vectores de Killing para el caso estático del ansatz métrico ovoidal de la ecuación (107).

4.3.1. Vectores de Killing e isometrías Un vector de Killing se define como un campo vectorial ξ tal que la derivada de Lie de la métrica $\mathcal{L}_\xi g$ en la dirección de ξ

⁷⁹ WALD, R. M. 2010; MISNER, C. W., THORNE, K. S. y WHEELER, J. A. 2017; S. WEINBERG: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., 1972.

es cero. Por definición la derivada de Lie de un tensor \mathbf{T} en la dirección de ξ es⁸⁰

$$\mathcal{L}_\xi \mathbf{T} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{-t}^* \mathbf{T} - \mathbf{T}}{t} = 0, \quad (109)$$

donde φ_{-t}^* es el *push-forward* asociado al mapeo $\varphi : I \subset \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ cuyas orbitas $\phi(\cdot, p) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ son las curvas integrales de ξ , siendo \mathcal{M} la variedad y $\varphi_t := \varphi(t, \cdot) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. El hecho de que $\mathcal{L}_\xi g = 0$ resulta en que φ_t satisface la propiedad $\varphi_{-t}^* g = g$. A los mapeos de \mathcal{M} en \mathcal{M} que cumplen esta propiedad se les llama isometrías⁸¹. Así, cada vector de Killing está asociado con un conjunto de isometrías $\{\varphi_t\}_{t \in I}$, que al ser dotado de la operación de composición forma un grupo denominado como grupo uniparamétrico de isometrías.

De manera intuitiva, los mapeos $\varphi_{-t}^* = (\varphi_t)_*$ pueden verse como un transporte que lleva tensores de $\varphi_t(p)$ a p a lo largo de la curva $\varphi(\cdot, p)$. Con lo cual, el hecho de que g permanezca invariante al ser transportado por esta curva implica de forma intuitiva que todos los puntos de esta curva son “equivalentes” respecto a g . Esto puede entenderse mejor mediante un ejemplo. Considere el caso de un espaciotiempo con simetría axial. En este caso, existe un vector de Killing $\eta = \partial_\phi$ que tiene asociado un grupo uniparamétrico de isometrías G isomorfo al grupo $SO(2)$ de rotaciones en $\mathbb{R}^{2,2}$. Esto es consistente con la noción de que si hay simetría axial entonces el sistema es invariante ante rotaciones alrededor de un eje de simetría. En este caso, es la métrica la que es invariante ante transformaciones de este tipo. En este sentido, la noción de isometría coincide con la noción intuitiva que se tiene de simetría de un sistema físico. De ahí la importancia de los vectores de Killing, dado que estos están asociados a un grupo uniparamétrico de isometrías.

⁸⁰ WALD, R. M. 2010.

⁸¹ Ibíd.; J. M. LEE: *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2019.

⁸² STEPHANI, H. et al. 2003.

4.3.2. Constantes de movimiento y otros invariantes Un aspecto adicional de los vectores de Killing es que si se toma una geodésica con vector tangente u entonces el escalar $g(\xi, u)$ es constante a lo largo de esta geodésica⁸³. De este modo, la existencia de simetrías en un espaciotiempo también está evidenciada por la existencia de constantes de movimiento. De esta manera, existen otros invariantes distintos a los vectores de Killing que no inducen isometrías pero que sí llevan a constantes de movimiento. Algunos de estos son los vectores de Killing conformes y los tensores de Killing⁸⁴. Los primeros están relacionados con que la derivada de Lie de g sea igual a sí misma por un campo escalar, mientras que la segunda, se relaciona con que la simetrización de la derivada covariante de un tensor simétrico de rango $(0, p)$ sea cero. Ambos se asocian con constantes de movimiento a lo largo de ciertas geodésicas.

Más recientemente se han definido otros invariantes relacionados con que la derivada de Lie de ciertas cantidades como el tensor de Ricci o de Riemann sean cero⁸⁵, a las cuales se les llama respectivamente como colineaciones de Ricci y colineaciones de curvatura. En particular, en⁸⁶ se hace una descripción detallada de éstas, junto con las relaciones entre ellas. La mayoría de estos invariantes están asociados a constantes a lo largo de geodésicas⁸⁷.

Por su parte, otra forma de caracterizar una métrica es considerando los valores propios asociados a los tensores de Ricci y de Weyl. Las multiplicidades y el número de eigenvalores distintos que se encuentran determinan los tipos de la clasificación de

⁸³ WALD, R. M. 2010.

⁸⁴ *Ibíd.*

⁸⁵ KATZIN, G. H. y LEVINE, J. 1972; KATZIN, G. H., LEVINE, J. y DAVIS, W. R. 1969; J. CAROT, L. A. NÚÑEZ y U. PERCOCO: *Ricci collineations for type B warped space-times*. En: *General Relativity and Gravitation* 29.10 (1997), págs. 1223-1237; L. H. GREEN et al.: *The Robertson-Walker metric and the symmetries belong to the family of contracted Ricci collineations*. En: *General Relativity and Gravitation* 8 (1977), págs. 731-736.

⁸⁶ KATZIN, G. H. y LEVINE, J. 1972.

⁸⁷ *Ibíd.*

Petrov y de Segre⁸⁸. Estas clasificaciones permiten interpretar a las distintas métricas de ciertas como soluciones de tipo fluido perfecto, soluciones de tipo radiación pura o soluciones con constante cosmológica⁸⁹. Estas clasificaciones, así como los otros invariantes mencionados antes, podrían usarse para caracterizar la simetría ovoidal en el caso en que no hubieran vectores de Killing asociados exclusivamente a esta simetría.

4.4. Vectores de Killing del ansatz métrico estático y ovoidal

En esta sección se hallará la solución más general de la ecuación de Killing para el ansatz métrico estático y ovoidal. Se ha elegido el caso estático como un primer caso de prueba y debido a que los cálculos son más simples que en el caso estacionario. La idea es que el ansatz ya lleva toda la información de la simetría ovoidal incluso antes de hacer que cumpla las ecuaciones de Einstein. Esto mismo ocurre con las demás simetrías como la simetría esférica, donde puede comprobarse que el ansatz de la ecuación (108) con J , f y k funciones de r ya tiene los tres vectores de Killing asociados a la simetría esférica. Así, a continuación se resolverá la ecuación de Killing para la métrica dada por la ecuación (107).

Para empezar, se considera la forma más general de un vector de Killing como $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$, con $\xi^\mu = \xi^\mu(t, u, v, \phi)$. La ecuación de Killing corresponde a⁹⁰

$$\mathcal{L}_\xi g = 0, \quad (110)$$

siendo g la métrica. Luego, por facilidad de cálculo, conviene reescribir la ecuación

⁸⁸ STEPHANI, H. et al. 2003; E. ZAKHARY y J. CARMINATI: *A new algorithm for the Segre classification of the trace-free Ricci tensor*. En: *General relativity and gravitation* 36 (2004), págs. 1015-1038.

⁸⁹ STEPHANI, H. et al. 2003.

⁹⁰ WALD, R. M. 2010.

(107) como

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = & -\mathbf{e}^{2A} \mathbf{dt} \otimes \mathbf{dt} + \mathbf{e}^{2B} (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \mathbf{du} \otimes \mathbf{du} + \mathbf{e}^{2C} \Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \mathbf{dv} \otimes \mathbf{dv} \\ & + \mathbf{e}^{2C} \Upsilon^2 \mathbf{d\phi} \otimes \mathbf{d\phi}, \end{aligned} \quad (111)$$

donde A , B y C son funciones de u y v solamente. Así, en la base coordenada local $\{\mathbf{dx}^\mu\} = \{\mathbf{dt}, \mathbf{du}, \mathbf{dv}, \mathbf{d\phi}\}$, las componentes independientes de la ecuación (110) son

$$-2 \mathbf{e}^{2A} (A_u \xi^1 + A_v \xi^2 + \xi_{,t}^0) = 0, \quad (112)$$

$$\xi_{,t}^1 \mathbf{e}^{2B} (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) - \xi_{,u}^0 \mathbf{e}^{2A} = 0, \quad (113)$$

$$\xi_{,t}^2 \mathbf{e}^{2C} \Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) - \xi_{,v}^0 \mathbf{e}^{2A} = 0, \quad (114)$$

$$\xi_{,t}^3 \mathbf{e}^{2C} \Upsilon^2 - \xi_{,\phi}^0 \mathbf{e}^{2A} = 0, \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Upsilon} & ((\Upsilon_u \Upsilon \xi^2 - \Lambda_u \xi^1) \Upsilon_{uv} + (\Lambda_u \Upsilon \xi^2 + \Upsilon_u \xi^1) \Lambda_{uv} \\ & + (\Upsilon \xi_{,u}^1 - \Upsilon_u \xi^1 + \Upsilon (B_u \xi^1 + B_v \xi^2)) (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)) \mathbf{e}^{2B} = 0, \end{aligned} \quad (116)$$

$$(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (\mathbf{e}^{2C} \xi_{,u}^2 \Upsilon^2 + \xi_{,v}^1 \mathbf{e}^{2B}) = 0, \quad (117)$$

$$\xi_{,u}^3 \mathbf{e}^{2C} \Upsilon^2 + \xi_{,\phi}^1 \mathbf{e}^{2B} (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) = 0, \quad (118)$$

$$\begin{aligned} 2 & ((\Upsilon_u \Upsilon \xi^2 - \Lambda_u \xi^1) \Upsilon_{uv} + (\Lambda_u \Upsilon \xi^2 + \Upsilon_u \xi^1) \Lambda_{uv} \\ & + \Upsilon (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (C_u \xi^1 + C_v \xi^2 - \xi^2 \Lambda_u + \xi_{,v}^2)) \Upsilon \mathbf{e}^{2C} = 0, \end{aligned} \quad (119)$$

$$\left((\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \xi_{,\phi}^2 + \xi_{,v}^3 \right) \mathbf{e}^{2C} \Upsilon^2 = 0, \quad (120)$$

$$2 (\Upsilon \xi_{,\phi}^3 + (\Upsilon C_u + \Upsilon_u) \xi^1 + \xi^2 \Upsilon (C_v - \Lambda_u)) \mathbf{e}^{2C} \Upsilon = 0, \quad (121)$$

donde lo subíndices indican derivada parcial y donde se han usado las relacio-

nes (237) y (239) del apéndice C para simplificar las expresiones. Se ha decidido dar énfasis a las derivadas parciales de ξ^μ añadiendo una coma al inicio de cada subíndice. Una solución inmediata de estas ecuaciones es $\xi^0 = c_1$, $\xi^1 = 0$, $\xi^2 = 0$ y $\xi^3 = c_2$, con c_1 y c_2 constantes. Ésta corresponde al vector de Killing

$$\xi = c_1 \partial_t + c_2 \partial_\phi, \quad (122)$$

el cual es la combinación lineal del vector de Killing ∂_t , asociado al carácter estático de g , y del vector de Killing ∂_ϕ , asociado a la simetría axial.

Luego, para encontrar la solución general es posible ver que de las ecuaciones (112) y (121) se pueden escribir ξ^1 y ξ^2 en términos de derivadas de ξ^0 y ξ^3 como

$$\xi^1 = \frac{((-C_v + \Lambda_u) \xi_{,t}^0 + A_v \xi_{,\phi}^3) \Upsilon}{-(\Upsilon C_u + \Upsilon_u) A_v + A_u \Upsilon (C_v - \Lambda_u)}, \quad (123)$$

$$\xi^2 = \frac{(\Upsilon C_u + \Upsilon_u) \xi_{,t}^0 - \Upsilon \xi_{,\phi}^3 A_u}{A_u \Upsilon (C_v - \Lambda_u) - A_v (\Upsilon C_u + \Upsilon_u)}. \quad (124)$$

Para que ξ^1 y ξ^2 sean distintas de cero se necesita que $\xi_{,t}^0$ y $\xi_{,\phi}^3$ no sean cero simultáneamente. Por simplicidad en los cálculos posteriores se decide escribir ξ^1 y ξ^2 como

$$\xi^1 = \Sigma \xi_{,t}^0 + \Xi \xi_{,\phi}^3, \quad (125)$$

$$\xi^2 = \zeta \xi_{,t}^0 + \Theta \xi_{,\phi}^3. \quad (126)$$

De modo que Σ , Ξ , ζ y Θ se definen tal que éstas ecuaciones coincidan con las ecuaciones (123) y (124). Así, luego de una serie de manipulaciones algebraicas y del uso de derivadas parciales es posible encontrar que el vector de Killing dado por la ecuación (122) corresponde a la solución más general de la ecuación (110). Para ver los detalles valla al apéndice E

Esto concuerda con lo esperado previamente, pues es intuitivo pensar que sobre una superficie ovoidal todos sus puntos no son equivalentes entre sí. Es de esperarse que cerca a la parte puntiaguda del ovoide las propiedades geométricas sean distintas que en la parte achatada del ovoide. En un espaciotiempo ovoidal descrito

mediante coordenadas ovoidales los puntos relacionados con la región puntiaguda del ovoide son aquellos con $z > 0$, mientras que los puntos asociados con la parte llana son aquellos con $z < 0$ (cf. figura 14). De este modo la desviación local de geodésicas y otras propiedades deberían ser diferentes en estas dos regiones. Así, no debería existir una isometría cuyos vectores de Killing vayan en dirección de ∂_v , dado que estos se interpretarían como un transporte que lleva puntos de la parte puntiaguda del ovoide a la parte achata del mismo.

Como nota aclaratoria, la demostración presentada en este trabajo de que solo hay dos vectores de Killing independientes para la métrica dada por la ecuación (111) fue hecha originalmente sin el uso de las cantidades Σ , Ξ , ζ y Θ . Estas cantidades se introdujeron en este escrito solo con el fin de acortar la extensión de las ecuaciones que aparecen en la demostración.

Por último, la búsqueda de otros invariantes geométricos para el ansatz métrico estático y la búsqueda de vectores de Killing para el ansatz estacionario fue pospuesto para otro trabajo debido a la complicación de las ecuaciones resultantes. Basta con ver la demostración mostrada en el apéndice E para ver lo complicado que pueden llegar a ser las ecuaciones. Al analizarlo un poco, se vuelve claro que la complicación principal en estas ecuaciones se debe a lo complicado que es el elemento de línea euclidiano en coordenadas ovoidales (cf. ecuación (89)). A esto se le suma el hecho de que incluso al expresar Λ_u y Υ_u en términos de Λ y Υ se obtienen expresiones complicadas (cf. apéndice C).

5. FLUIDOS ANISÓTROPAS ESTÁTICOS

*“... I could be bounded in a nut shell
and count myself a king of infinite
space, ...”*

—William Shakespeare, *Hamlet*
(1603).

En este capítulo se encontrarán soluciones de tipo fluido estático con presiones anisótropas a las ecuaciones de campo de Einstein. Para ello, en la sección 5.1 se hablarán algunas generalidades sobre los fluidos en Relatividad General y sobre la forma que debe tomar el tensor de energía-momento. Luego, en la sección 5.2 se resolverán las ecuaciones de campo de Einstein para un espaciotiempo con este tensor de energía-momento y con el ansatz métrico estático y ovoidal de la ecuación (107) del capítulo anterior. Por último, en la sección 5.3 se estudiarán las condiciones de aceptabilidad física de las soluciones encontradas.

5.1. Fluidos en Relatividad General

Se suele pensar en un fluido como una distribución continua de materia tal que en cada punto de esta distribución es posible definir una densidad de masa-energía μ , unas presiones P_i , unas cizalladuras σ_{ij} y unas densidades de momentum p_i ⁹¹, con $i, j = 1, 2, 3$. Típicamente estas cantidades son consideradas como funciones continuas que conforman las componentes de un tensor simétrico T de rango $(0, 2)$ llamado el tensor de energía-momento. Fenomenológicamente, el fluido está compuesto de átomos, neutrones u otras partículas que interactúan entre sí de tal modo que el comportamiento del fluido está determinado completamente por las funciones de densidad de masa-energía, presiones y demás cantidades mencionadas previa-

⁹¹ WALD, R. M. 2010; MISNER, C. W., THORNE, K. S. y WHEELER, J. A. 2017.

mente. Así, no necesariamente hace falta conocer la composición del fluido para modelarlo matemáticamente, solo hace falta conocer cómo es su tensor de energía-momento.

En ocasiones se conoce además la ecuación de estado del fluido, la cual determina la presión en términos de la densidad⁹². En estos casos, el modelo si está considerando la naturaleza del fluido, puesto que cada uno, de acuerdo con su composición, debe tener una ecuación de estado distintiva. No obstante, no es necesario conocer esta ecuación de estado para resolver las ecuaciones de campo de Einstein. Con lo cual, no necesariamente se debe conocer la composición del fluido para hallar soluciones de tipo fluido. En este trabajo, se considera precisamente un fluido general sin una ecuación de estado predeterminada. En teoría, al obtener una solución sería posible inferir cuál es la ecuación de estado asociada al fluido.

Ahora, se dice que un fluido es perfecto cuando se desprecian la viscosidad y el flujo de calor al interior fluido⁹³. Así, un fluido perfecto está caracterizado únicamente por sus funciones de densidad de masa-energía y presión. El tensor de energía-momento de un fluido perfecto suele escribirse de la forma⁹⁴

$$\mathbf{T} = (\mu + P) \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} + P \mathbf{g}, \quad (127)$$

siendo \mathbf{g} la métrica, μ , P y $\underline{\mathbf{u}}$ la densidad de masa-energía, la presión isótropa y el dual métrico de la cuadrivelocidad \mathbf{u} del fluido, respectivamente. Esta forma del tensor de energía-momento es muy conveniente, pues en ella μ y P coinciden con las definiciones locales de densidad de masa-energía y presión isótropa de un observador comóvil con el fluido. Esto evidencia en el hecho de que las componentes de \mathbf{T} en la base de la tetraada ortonormal $\{e_a\}$, con $e_0 = \mathbf{u}$, del observador comóvil

⁹² WALD, R. M. 2010.

⁹³ Ibíd.

⁹⁴ Ibíd.; MISNER, C. W., THORNE, K. S. y WHEELER, J. A. 2017.

sean

$$(T_{ab}) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \quad (128)$$

donde $T_{00} = \mathbf{T}(e_0, e_0)$ y $T_{ii} = \mathbf{T}(e_i, e_i)$, con $i = 1, 2, 3$, se interpretan como la densidad de masa-energía y las presiones medidas por dicho observador comóvil, respectivamente⁹⁵.

Por otro lado, cuando se permite que las presiones en cada dirección e_i sean distintas se dice entonces que el fluido es anisótropo. En estos casos, es posible escribir a \mathbf{T} como

$$\mathbf{T} = \mu \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} + P_1 \underline{\mathbf{e}}_1 \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 + P_2 \underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2 + P_3 \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3, \quad (129)$$

o equivalentemente como

$$\mathbf{T} = (\mu + P_1) \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} + P_1 \underline{\mathbf{g}} + (P_2 - P_1) \underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2 + (P_3 - P_1) \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3, \quad (130)$$

siendo $\underline{\mathbf{e}}_i := \mathbf{g}(e_i, \cdot)$ el dual métrico de e_i y P_i la presión del fluido en la dirección de e_i , con $i = 1, 2, 3$. Al igual que antes, μ y P_i coinciden con la densidad de masa-energía y las presiones medidas por el observador comóvil con el fluido. Como es de esperarse, en este caso las componentes de \mathbf{T} en la tetrada ortonormal $\{e_a\}$ son

$$(T_{ab}) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix}. \quad (131)$$

Además, de la ecuación (130) es fácil ver que al hacer $P_i = P$ para $i = 1, 2, 3$ se recupera la forma del tensor del fluido con presiones isotropas (cf. ecuación (127)). Por último, se dice que un fluido es estático cuando su cuadrivelocidad es propor-

⁹⁵ MISNER, C. W., THORNE, K. S. y WHEELER, J. A. 2017.

cional a un vector de Killing tipo tiempo ξ , que es el asociado al carácter estático del espaciotiempo. En un sistema coordinado adaptado a él, ξ puede escribirse como $\xi = \partial_t$. Así, la cuadrivelocidad de un fluido estático puede escribirse como $u = H\partial_t$ con $H = (\xi \cdot \xi)^{-1/2}$.

5.2. Soluciones de fluido de las ecuaciones de campo de Einstein a partir del ansatz métrico estático y ovoidal

En esta sección se hará el planteamiento de las ecuaciones de campo de Einstein para un fluido estático. Para ello, se considerará el ansatz estático y ovoidal de la ecuación (107) y el tensor de energía-momento de un fluido anisótropo de la ecuación (130). Con esto será posible plantear las ecuaciones de campo de Einstein y hallar una solución de tipo fluido anisótropo.

Primeramente, como se considera un fluido estático, naturalmente no debe haber flujo de calor ni esfuerzos de cizalladura, debido a que se considera que el fluido está quieto. Esto justifica el hacer uso del tensor de energía-momento

$$\mathbf{T} = (\mu + P_1) \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} + P_1 \mathbf{g} + (P_2 - P_1) \underline{\mathbf{e}}_2 \otimes \underline{\mathbf{e}}_2 + (P_3 - P_1) \underline{\mathbf{e}}_3 \otimes \underline{\mathbf{e}}_3, \quad (132)$$

con $\underline{\mathbf{u}}$ siendo el dual métrico de la cuadrivelocidad del fluido y $\underline{\mathbf{e}}_i$ los duales métricos de los vectores de la tetraada ortonormal $\{\mathbf{e}_a\}$, que se especificarán más adelante.

Ahora bien, como se considera un espaciotiempo estático y ovoidalmente simétrico, la métrica toma la forma

$$\mathbf{g} = -e^{2A} dt \otimes dt + e^{2B} (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) du \otimes du + e^{2C} \Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) dv \otimes dv + e^{2C} \Upsilon^2 d\phi \otimes d\phi, \quad (133)$$

con A , B y C funciones de u y v (cf. ecuación (107)). En esta métrica, $\xi = \partial_t$ es el vector de Killing tipo tiempo asociado a que el espaciotiempo es estático. Con lo cual, la cuadrivelocidad del fluido se escribe como $\underline{\mathbf{u}} = e^{-A} \partial_t$. Así, la tetraada

ortonormal del observador comóvil con el fluido es

$$e_0 = e^{-A} \partial_t, \quad (134a)$$

$$e_1 = \frac{e^{-B}}{\sqrt{\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2}} \partial_u, \quad (134b)$$

$$e_2 = \frac{e^{-C}}{\Upsilon \sqrt{\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2}} \partial_v, \quad (134c)$$

$$e_3 = \frac{e^{-C}}{\Upsilon} \partial_\phi. \quad (134d)$$

Sus duales métricos \underline{e}_a están definidos por $\underline{e}_a = g(e_a, \cdot)$.

Luego, se pueden plantear las ecuaciones de campo de Einstein en unidades geometrizadas ($c = 1, G = 1$) como

$$\mathbf{Ric} - \frac{1}{2} R g = 8\pi \mathbf{T}, \quad (135)$$

donde \mathbf{Ric} es el tensor de Ricci y R es el escalar de Ricci definidos igual que en⁹⁶ (cf. apéndice F). Por simplicidad, es más conveniente reescribir esta ecuación como

$$\mathbf{Ric} = 8\pi \left(\mathbf{T} - \frac{1}{2} T g \right), \quad (136)$$

siendo $T = T^a_a = P_1 + P_2 + P_3 - \mu$ la traza del tensor de energía-momento. Así, las componentes no cero del tensor de Ricci en la base coordenada local $\{dt, du, dv, d\phi\}$ son

$$R_{tt} = \left\{ \Upsilon \left[\Upsilon A_{uu} - A_u (\Upsilon (B_u - 2C_u - A_u) - 2\Upsilon_u) \right] e^{2A-2B} + (B_v A_v + A_v^2 + A_{vv}) e^{2A-2C} \right\} \left[\Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \right]^{-1}, \quad (137)$$

⁹⁶ STEPHANI, H. et al. 2003; MISNER, C. W., THORNE, K. S. y WHEELER, J. A. 2017; S. CHANDRASEKHAR: *The Mathematical Theory of Black Holes*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1998.

$$\begin{aligned}
R_{uu} = & \left\{ \left[\left(\Lambda_u^2 - \Upsilon_u^2 \right) \left(\Lambda_{uv}^2 - \Upsilon_{uv}^2 \right) + 4\Lambda_u \Upsilon_u \Lambda_{uv} \Upsilon_{uv} - \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \right. \right. \\
& \times \left\{ \Upsilon_u \Upsilon_{uvv} + \Lambda_u \Lambda_{uvv} + (B_v + A_v) \left(\Upsilon_u \Upsilon_{uv} + \Lambda_u \Lambda_{uv} + B_v \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \right) \right. \\
& \left. \left. + B_{vv} \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \right\} \right] \mathbf{e}^{2B-2C} - \Upsilon \left[\left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \left\{ \Upsilon \left(\Upsilon_u \Upsilon_{uuu} + \Lambda_u \Lambda_{uuu} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \Upsilon_{uu} \left(2\Lambda_u^2 + 2\Upsilon_u^2 - \Upsilon (B_u + A_u) \Upsilon_u \right) - \Lambda_u \Upsilon (B_u + A_u) \Lambda_{uu} \right\} \right. \\
& \left. \left. + \Upsilon \left(\Lambda_u^2 - \Upsilon_u^2 \right) \left(\Lambda_{uu}^2 - \Upsilon_{uu}^2 \right) - 4\Lambda_u \Upsilon_u \Lambda_{uu} \Upsilon_{uu} \Upsilon - \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left\{ 2(B_u - 2C_u) \Upsilon_u + \Upsilon \left((2C_u + A_u) B_u - 2C_u^2 - 2C_{uu} - A_u^2 - A_{uu} \right) \right\} \right] \right\} \\
& \times \left[\Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right)^2 \right]^{-1}, \tag{138}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{vv} = & \left\{ \left[-\Upsilon \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \left\{ \Upsilon \left(\Upsilon_u \Upsilon_{uuu} - \Lambda_u \Lambda_{uuu} \right) + \Upsilon_{uu} \left(\Lambda_u^2 + 3\Upsilon_u^2 \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \Upsilon (B_u - 2C_u - A_u) \left(\Upsilon_u \Upsilon_{uu} + \Lambda_u \Lambda_{uu} \right) + 2\Upsilon_u \Lambda_u \Lambda_{uu} \right\} + \Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 - \Upsilon_u^2 \right) \right. \\
& \left. \times \left(\Lambda_{uu}^2 - \Upsilon_{uu}^2 \right) + 4\Upsilon^2 \Lambda_u \Upsilon_u \Lambda_{uu} \Upsilon_{uu} + \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right)^2 \left((B_u - 2C_u - A_u) \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left(\Upsilon \Upsilon_u + \Upsilon^2 C_u \right) - 2\Upsilon \Upsilon_u C_u - \Upsilon^2 C_{uu} - \Upsilon_u^2 \right) \right] \Upsilon^2 \mathbf{e}^{2C-2B} - \Upsilon \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \\
& \times \left[\Upsilon \left(\Upsilon_u \Upsilon_{uvv} + \Lambda_u \Lambda_{uvv} \right) + \left(\Lambda_u \Lambda_{uv} + \Upsilon_u \Upsilon_{uv} \right) \left(\Upsilon (B_v - 2C_v - A_v) - 2\Upsilon_v \right) \right] \\
& \left. \left. + \Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 - \Upsilon_u^2 \right) \left(\Lambda_{uv}^2 - \Upsilon_{uv}^2 \right) + 4\Upsilon^2 \Upsilon_u \Lambda_u \Lambda_{uv} \Upsilon_{uv} - \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left[\Upsilon^2 (A_{vv} + B_{vv} + C_{vv} + A_v (A_v - C_v) + B_v (B_v - C_v)) - \Upsilon_v^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \Upsilon (\Upsilon_{vv} - \Upsilon_v (B_v + A_v)) \right] \right\} \left[\Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right)^2 \right]^{-1}, \tag{139}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\phi\phi} = & - \left\{ \Upsilon^2 \left[\Upsilon \left(\Upsilon_{uu} + \Upsilon C_{uu} \right) + \Upsilon_u^2 + \Upsilon \Upsilon_u (C_u + A_u - B_u) \right] + \Upsilon^2 C_u (2C_u \right. \\
& \left. + A_u - B_u) \right] \mathbf{e}^{2C-2B} + \Upsilon \left(\Upsilon_{vv} - \Upsilon C_{vv} \right) - \Upsilon_v^2 + \Upsilon \Upsilon_v (B_v + A_v) + \Upsilon^2 C_v \\
& \left. \times (B_v + A_v) \right\} \left[\Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \right]^{-1}, \tag{140}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{uv} = & \left\{ (\Upsilon (A_u + C_u) \Upsilon_u - \Lambda_u (A_v + C_v)) \Upsilon_{uv} + ((A_v + C_v) \Upsilon_u \right. \\
& + \Upsilon \Lambda_u (A_u + C_u)) \Lambda_{uv} + [(B_v - C_v) \Upsilon_u + \Upsilon (A_u (B_v - A_v) \\
& + C_u (B_v + A_v) - A_{uv} - C_{uv})] \left. (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \right\} \left[\Upsilon (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \right]^{-1}. \quad (141)
\end{aligned}$$

donde los subíndices en A , B , C , Λ y Υ indican derivada parcial. Por su parte, las componentes no cero del lado derecho de la ecuación (136) son

$$4\pi \left(\mathbf{T} - \frac{1}{2} T \mathbf{g} \right)_{tt} = 4\pi e^{2A} (P_3 + P_2 + P_1 + \mu), \quad (142)$$

$$4\pi \left(\mathbf{T} - \frac{1}{2} T \mathbf{g} \right)_{uu} = -4\pi e^{2B} (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (P_3 + P_2 - P_1 - \mu), \quad (143)$$

$$4\pi \left(\mathbf{T} - \frac{1}{2} T \mathbf{g} \right)_{vv} = -4\pi e^{2C} \Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (P_3 - P_2 + P_1 - \mu), \quad (144)$$

$$4\pi \left(\mathbf{T} - \frac{1}{2} T \mathbf{g} \right)_{\phi\phi} = 4\pi e^{2C} \Upsilon^2 (P_3 - P_2 - P_1 + \mu). \quad (145)$$

De este modo, de la ecuación (136) se desprenden cinco ecuaciones a resolver. Una de ellas es $R_{uv} = 0$, y las cuatro restantes forman un sistema lineal 4×4 para μ , P_1 , P_2 y P_3 .

Para empezar, primero se resolverá la ecuación igualada a cero. Para esto, se simplifica R_{uv} usando las relaciones (237) y (239) del apéndice C como

$$\begin{aligned}
R_{uv} = & \left\{ (\Upsilon (A_u + C_u) \Upsilon_u - \Lambda_u (A_v + C_v)) \Upsilon_{uv} + ((A_v + C_v) \Upsilon_u \right. \\
& + \Upsilon \Lambda_u (A_u + C_u)) \Lambda_{uv} + [(B_v - C_v) \Upsilon_u + \Upsilon (A_u (B_v - A_v) \\
& + C_u (B_v + A_v) - A_{uv} - C_{uv})] \left. (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \right\} \left[\Upsilon (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \right]^{-1}. \quad (146)
\end{aligned}$$

A su vez, esta ecuación se simplifica bastante al elegir $A = A(u)$, $B = B(u)$ y $C = C(u)$, dando lugar a

$$R_{uv} = \frac{C_u + A_u}{\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2} (\Lambda_{uv} \Lambda_u + \Upsilon_u \Upsilon_{uv}). \quad (147)$$

Usando las relaciones (242)–(251) del apéndice C se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_{uv}\Lambda_u + \Upsilon_u\Upsilon_{uv}}{\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2} &= 4\Upsilon^2\tau^2 \left[(8\tau\Upsilon^2 - 13\Lambda((\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2)) \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} (5\tau\Upsilon^2 - 7\Lambda(\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \tau\Lambda)) \right] \\ &\quad \times \left[\sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} (4(\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) \right. \\ &\quad \left. + 5\sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2})^3 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (148)$$

Dado que en coordenadas cartesianas $\Lambda = z$ y $\Upsilon = \sqrt{x^2 + y^2}$, entonces lo anterior muestra que $(\Lambda_{uv}\Lambda_u + \Upsilon_u\Upsilon_{uv})/(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)$ no es igual cero. Por lo tanto, la ecuación (147) solo se hace cero si

$$C(u) = -A(u) + c_1, \quad (149)$$

con c_1 una constante. La anterior es una de las soluciones de $R_{uv} = 0$. Como no necesariamente se está buscando la solución más general de la ecuación (136), entonces se usará esta solución particular en los cálculos posteriores.

De este modo, al tomar $A = A(u)$, $B = B(u)$ y $C = -A(u) + c_1$ y resolver las cuatro ecuaciones restantes para μ , P_1 , P_2 y P_3 se encuentra

$$\begin{aligned} \mu &= \left\{ \left[(\Lambda_u^2 - \Upsilon_u^2) (\Lambda_{uv}^2 - \Upsilon_{uv}^2) - (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (\Lambda_u (\Lambda_{uvv} + \Upsilon_u \Upsilon_{uv}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Upsilon_u (\Upsilon_{uvv} - \Upsilon_u \Lambda_{uv})) + 4\Lambda_u \Upsilon_u \Lambda_{uv} \Upsilon_{uv} \right] (e^{2A-2c_1} - e^{-2B}) \right. \\ &\quad \left. + e^{-2B} \Upsilon (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \left[(A_u + B_u) (\Upsilon_u \Lambda_{uv} - \Lambda_u \Upsilon_{uv}) + (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (2\Upsilon A_{uu} + (B_u + 5A_u) \Upsilon_u - A_u \Upsilon (2B_u + 3A_u)) \right] \right\} \left[8\pi \Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)^3 \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (150)$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \left\{ - (\Upsilon_{uv} \Upsilon_u \Lambda_u - \Lambda_{uv} \Upsilon_u^2 + A_u^2 \Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)) e^{-2B} \right. \\ &\quad \left. + \Upsilon_u (\Upsilon_{uv} \Lambda_u - \Lambda_{uv} \Upsilon_u) e^{-2c_1+2A} \right\} \left[8\pi \Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)^2 \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (151)$$

$$P_2 = \left\{ \left[\Upsilon_{uv} \Upsilon_u \Lambda_u + \Lambda_{uv} \Lambda_u^2 - \Upsilon \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \left((A_u + B_u) \Upsilon_u - A_u^2 \Upsilon \right) \right] e^{-2B} - \Lambda_u \left(\Lambda_u \Lambda_{uv} + \Upsilon_{uv} \Upsilon_u \right) e^{-2c_1 + 2A} \right\} \left[8\pi \Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right)^2 \right]^{-1}, \quad (152)$$

$$P_3 = \left\{ \left[\left(\Lambda_u^2 - \Upsilon_u^2 \right) \left(\Upsilon_{uv}^2 - \Lambda_{uv}^2 \right) + \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \left(\Upsilon_u \left(\Upsilon_{uvv} + \Lambda_u \Upsilon_{uv} \right) + \Lambda_u \left(\Lambda_{uvv} + \Lambda_u \Lambda_{uv} \right) \right) - 4\Lambda_u \Upsilon_u \Lambda_{uv} \Upsilon_{uv} \right] \left(e^{2A - 2c_1} - e^{-2B} \right) + \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \times \left((A_u + B_u) \left(\Upsilon \Lambda_u \Upsilon_{uv} - \Upsilon \Upsilon_u \Lambda_{uv} \right) + A_u^2 \Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \right) e^{-2B} \right\} \times \left[8\Upsilon^2 \pi \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right)^3 \right]^{-1}, \quad (153)$$

donde se han usado las ecuaciones (237)–(241) del apéndice C para simplificar las expresiones. Esta solución representa la densidad de masa-energía y presiones que deberían haber en el fluido para que se cumplan las ecuaciones de campo de Einstein (136) con $A = A(u)$, $B = B(u)$ y $C(u) = A(u) + c_1$. Ésta a su vez, es una familia de soluciones de tipo fluido anisótropo que están función de $A(u)$, $B(u)$ y c_1 . Es de esperarse que al elegir apropiadamente las funciones $A(u)$ y $B(u)$, junto con la constante c_1 , se obtenga una solución físicamente aceptable. Es decir, una en la cual se cumplan algunas de las condiciones de energía (débil, fuerte, o dominante), o que se cumplan todas ellas. Se intentará imponer algunas de éstas condiciones físicas en la siguiente sección.

5.3. Imposición de las condiciones de energía a la familia de soluciones encontrada

En esta sección se intentan imponer las condiciones de energía sobre las soluciones obtenidas en la sección anterior. Para esto se encontrarán las condiciones sobre las funciones $A(u)$ y $B(u)$, y sobre la constante c_1 , para que se cumplan las condiciones de energía débil y fuerte. En el apéndice G se muestra que para cumplir estas dos condiciones basta con imponer que $\mu \geq 0$ y $P_i \geq 0$ para $i = 1, 2, 3$. Para que se cumpliera además la condición de energía dominante se necesitaría imponer adi-

cionalmente que $\mu \geq P_i$ y que $\mu > 0$. Dado que de por sí las condiciones de energía débil y fuerte son muy complicadas, para este trabajo se decidió no investigar las condiciones de energía dominante. Así, solo se impondrá que $\mu \geq 0$ y $P_i \geq 0$.

Para empezar, considere escribir la ecuación (151) como

$$P_1 = \frac{\Upsilon_{uv}\Upsilon_u\Lambda_u - \Lambda_{uv}\Upsilon_u^2}{8\Upsilon^2(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)^2} \pi \left[e^{-2c_1+2A} - e^{-2B} - A_u^2 \frac{\Upsilon^2(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)}{\Upsilon_{uv}\Upsilon_u\Lambda_u - \Lambda_{uv}\Upsilon_u^2} e^{-2B} \right]. \quad (154)$$

Así, la condición de que $P_1 \geq 0$ puede escribirse como

$$\left(\Upsilon_{uv}\Upsilon_u\Lambda_u - \Lambda_{uv}\Upsilon_u^2 \right) \left[e^{-2c_1+2A} - e^{-2B} - A_u^2 \frac{\Upsilon^2(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)}{\Upsilon_{uv}\Upsilon_u\Lambda_u - \Lambda_{uv}\Upsilon_u^2} e^{-2B} \right] \geq 0, \quad (155)$$

que sería la condición exacta. Si se desea, es posible aproximar algunos términos de esta condición para obtener una condición más sencilla. Usando las expresiones (242)–(251) para expresar $\Upsilon^2(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)(\Upsilon_{uv}\Upsilon_u\Lambda_u - \Lambda_{uv}\Upsilon_u^2)^{-1} \equiv \mathfrak{A}$ en función de $\Lambda = z$ y $\Upsilon = \rho$ se encuentra que

$$\mathfrak{A} \approx -(a+1)^2(z^2 + \rho^2), \quad (156)$$

donde se ha considerado que $\sqrt{(z-\tau)^2 + \rho^2} \approx \sqrt{z^2 + \rho^2}$ para valores grandes de z y donde se ha aproximado en cada suma al término de la forma $\alpha z^n \rho^m$, siendo α constante, con mayor valor de $n+m$. Operacionalmente, esto es equivalente a evaluar $\tau = 0$ en \mathfrak{A} . Si además se considera que

$$u \approx (a+1)\sqrt{z^2 + \rho^2}, \quad (157)$$

para valores grandes de z (cf. ecuación (76)), entonces $\mathfrak{A} \approx -u^2$. Además, como $\mathfrak{A} < 0$ para valores grandes de z y ρ , entonces también se cumple que $(\Upsilon_{uv}\Upsilon_u\Lambda_u - \Lambda_{uv}\Upsilon_u^2) < 0$ para valores grandes de z y ρ . Con esto, es posible escribir la inecua-

ción (155) aproximadamente como

$$e^{-2c_1+2A} - e^{-2B} + u^2 e^{-2B} A_u^2 \leq 0. \quad (158)$$

Ésta sería la condición aproximada de que $P_1 \geq 0$ para valores grandes de ρ y z . Un conjunto de funciones $A(u)$ y $B(u)$ que cumplen esta condición es

$$B(u) = -A(u) + c_2, \quad (159)$$

$$A(u) = \int \frac{\sqrt{F(u) - e^{2(c_2-c_1)}}}{u} du + c_3, \quad (160)$$

donde $F(u)$ es cualquier función que cumpla $e^{2(c_2-c_1)} \leq F(u) \leq 1$, y c_2 y c_3 , constantes.

Por otro lado, para $P_2 \geq 0$ se escribe la ecuación (152) como

$$P_2 = \left[-\Lambda_u (\Lambda_u \Lambda_{uv} + \Upsilon_{uv} \Upsilon_u) (e^{-2c_1+2A} - e^{-2B}) - (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \Upsilon \left((A_u + B_u) \Upsilon_u - A_u^2 \Upsilon \right) e^{-2B} \right] \left[8\Upsilon^2 \pi (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)^2 \right]^{-1}. \quad (161)$$

Usando las relaciones (242)–(251) se encuentra que

$$\Lambda_u (\Lambda_u \Lambda_{uv} + \Upsilon_{uv} \Upsilon_u) \approx 0, \quad (162)$$

para valores grandes de z y ρ , siguiendo el mismo procedimiento de antes. Con lo cual, se puede despreciar el primer término adentro de los corchetes de la ecuación (161), siempre y cuando $e^{-2c_1+2A} - e^{-2B}$ no se haga muy grande para valores grandes de z y ρ . Así, una condición aproximada para que $P_2 \geq 0$ es

$$(A_u + B_u) \Upsilon_u - \Upsilon A_u^2 \leq 0. \quad (163)$$

Así mismo, volviendo a usar las relaciones del apéndice C y aproximando para va-

lores grandes de z y ρ se encuentra que

$$\frac{\Upsilon}{\Upsilon_u} \approx (a+1)\sqrt{z+\rho^2} \approx u, \quad (164)$$

cf. ecuación (157). Por lo tanto, la inecuación (163) queda como

$$(A_u + B_u) \frac{1}{u} - A_u^2 \leq 0. \quad (165)$$

Una familia de funciones $A(u)$ y $B(u)$ que cumplen esta condición es

$$B(u) = -A(u) + \tilde{F}(u) \quad (166)$$

donde $A(u)$ es cualquier función y $\tilde{F}(u)$ satisface que $\frac{1}{u}\tilde{F}_u \leq A_u^2$. En particular, la inecuación (165) se cumple al tomar $\tilde{F}(u) = \text{cte}$.

Luego, para $P_3 \geq 0$ se escribe la ecuación (153) como

$$P_3 = \left\{ \mathfrak{B} (e^{-2c_1+2A} - e^{-2B}) + (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) ((A_u + B_u) (\Upsilon \Lambda_u \Upsilon_{uv} - \Upsilon \Upsilon_u \Lambda_{uv}) + A_u^2 \Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)) e^{-2B} \right\} \left[8 \Upsilon^2 \pi (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)^3 \right]^{-1}, \quad (167)$$

donde

$$\mathfrak{B} = (\Lambda_u^2 - \Upsilon_u^2) (\Upsilon_{uv}^2 - \Lambda_{uv}^2) + (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (\Upsilon_u (\Upsilon_{uvv} + \Lambda_u \Upsilon_{uv}) + \Lambda_u (\Lambda_{uvv} + \Lambda_u \Lambda_{uv})) - 4 \Lambda_u \Upsilon_u \Lambda_{uv} \Upsilon_{uv}. \quad (168)$$

Al igual que antes, usando las relaciones (242)–(241d) y considerando valores muy grandes de z y ρ se obtiene que

$$\mathfrak{B} \approx 0. \quad (169)$$

Con lo cual se puede despreciar \mathfrak{B} en la ecuación (167), siempre y cuando $e^{-2c_1+2A} - e^{-2B}$ no se haga muy grande al tomar valores grandes de z y ρ . Al repetir lo anterior,

es posible encontrar que

$$\Upsilon \Lambda_u \Upsilon_{uv} - \Upsilon \Upsilon_u \Lambda_{uv} \approx -\frac{\rho^2}{(a+1)^3 \sqrt{z^2 + \rho^2}}. \quad (170)$$

$$\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \approx \frac{1}{(a+1)^2} \quad (171)$$

Tomando estas ecuaciones junto con la ecuación (157) se encuentra que una condición aproximada para que $P_3 \geq 0$ es

$$-(A_u + B_u) \frac{1}{u} + A_u^2 \geq 0, \quad (172)$$

la cual es exactamente igual a la condición para $P_2 \geq 0$ (cf. inecuación (165)). De hecho, puede comprobarse que P_2 y P_3 se hacen iguales al aproximar para valores grandes de z y ρ .

Finalmente, para obtener $\mu \geq 0$ se escribe la ecuación (150) como

$$\begin{aligned} \mu = & \left\{ \mathfrak{E} (e^{-2c_1+2A} - e^{-2B}) + \Upsilon (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \left[(A_u + B_u) (\Upsilon_u \Lambda_{uv} - \Lambda_u \Upsilon_{uv}) \right. \right. \\ & \left. \left. + (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (2\Upsilon A_{uu} + (B_u + 5A_u) \Upsilon_u - A_u \Upsilon (2B_u + 3A_u)) \right] e^{-2B} \right\} \\ & \times \left[8\Upsilon^2 \pi (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)^3 \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (173)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = & (\Lambda_u^2 - \Upsilon_u^2) (\Lambda_{uv}^2 - \Upsilon_{uv}^2) - (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (\Lambda_u (\Lambda_{uvv} + \Upsilon_u \Upsilon_{uv}) \\ & + \Upsilon_u (\Upsilon_{uvv} - \Upsilon_u \Lambda_{uv})) + 4\Lambda_u \Upsilon_u \Lambda_{uv} \Upsilon_{uv}. \end{aligned} \quad (174)$$

Usando las relaciones (242)–(241d) y aproximando para valores grandes de z y ρ se llega a

$$\mathfrak{E} \approx \frac{\rho^2}{(a+1)^6 (z^2 + \rho^2)}, \quad (175)$$

$$\Upsilon_u \Lambda_{uv} - \Lambda_u \Upsilon_{uv} \approx \frac{\rho}{(a+1)^3 \sqrt{z^2 + \rho^2}}. \quad (176)$$

Usando estas aproximaciones junto con las ecuaciones (157), (164) y (171) se obtiene que una condición aproximada para que $\mu \geq 0$ es

$$e^{-2c_1+2A} - e^{-2B} + 2 \left(3A_u + B_u + uA_{uu} - uA_u B_u - \frac{3}{2}uA_u^2 \right) u e^{-2B} \geq 0. \quad (177)$$

Si se considera $B(u) = -A(u) + c_2$, una condición suficiente para que la inecuación (177) se cumpla es que $e^{2(c_2-c_1)} + 2 \left(2A_u + uA_{uu} - \frac{1}{2}uA_u^2 \right) u \geq 1$.

Las condiciones de las inecuaciones (158), (165), (172) y (177) corresponden a las condiciones aproximadas sobre $A(u)$, $B(u)$ y c_1 para que se cumpla la condición de energía débil y la condición de energía fuerte. Estas condiciones permitirían obtener una solución físicamente aceptable. Sin embargo, dado que estas condiciones son aproximadas, solo se obtendría una solución que cumpliría las condiciones de energía solo aproximadamente, para valores grandes de z y ρ . Debido a esto y a la complejidad de las condiciones exactas, se decidió dejar la investigación hasta aquí, sin encontrar algunas expresiones específicas de $A(u)$, $B(u)$ y c_1 .

CONCLUSIONES GENERALES

En el primer capítulo 1 de este trabajo se hizo una revisión de algunas propiedades conocidas del óvalo de Descartes, como, por ejemplo, la existencia de un tercer foco, su parametrización respecto a la coordenada polar θ , su condición de existencia y su caso límite como caracola de Pascal, o como un fragmento de ella. Varios de estos resultados corresponden a redescubrimientos y/o recuperaciones de trabajos muy antiguos como los de⁹⁷. Se encontró y se caracterizó además una parametrización respecto a la coordenada polar r , que tiene la ventaja de graficar correctamente al óvalo para cualquier valor de a y de u con $a \neq 0$. Al contrario de la parametrización respecto a θ , que no es conveniente cuando $|a| > 1$. Esta parametrización del óvalo en la variable r no fue encontrada en la literatura, con lo cual, corresponde a un resultado nuevo.

En el siguiente capítulo se encontraron y caracterizaron las curvas ortogonales a una familia de óvalos de Descartes confocales. Se encontró que, excepto en el caso $a = -1$, estas curvas ortogonales, llamadas sinécdolas, se componen de dos ramas que se extienden al infinito y que nacen desde un mismo punto. Se encontró además que estas dos ramas convergen de manera asintótica a una recta en el infinito. Se parametrizó la sinécdola en términos de la coordenada polar θ y la cantidad $t = \operatorname{arsenh}(x/y)$. A su vez, se obtuvieron algunos casos particulares en los que la ecuación de la sinécdola puede reescribirse como una ecuación algebraica en x y y . Además, en los casos $a = -1$ y $a = 1$, se encontró que las sinécdolas se convierten en elipses e hipérbolas, respectivamente, cuyos focos coinciden con los de los óvalos confocales a los cuales se intersecan ortogonalmente. Estas curvas no han sido reportadas antes en la literatura, por lo cual, son un nuevo tipo de curvas. Con estas curvas, junto con la familia de óvalos de Descartes confocales, se cons-

⁹⁷ SOUTHALL, J. P. C. 1922; CHASLES, M. 1837; WILLIAMSON, B. 1912; WOOLSEY, J. M. 1875; QUETELET, A. 1829.

truyó un sistema de coordenadas ovaladas. En este, las curvas coordenadas son óvalos confocales y sinécdolas. A partir de este, se construyó un sistema de coordenadas ovoidales 3D en el cual las superficies coordenadas son ovoides confocales y mantos de las superficies de revolución de las sinécdolas, llamadas sinécdoloides. Cada manto se define como la superficie de revolución de una de las ramas de la sinécdola. Se determinaron los factores de escala de estas coordenadas ovoidales en términos de las funciones $\Lambda(u, v)$ y $\Upsilon(u, v)$, asociadas a las transformaciones de coordenadas ovoidales a cartesianas. Se determinó además que las ecuaciones de Laplace y de Helmholtz no son separables en estas coordenadas ovoidales, lo cual sugiere el uso de enfoques numéricos para resolverlas. Se encontró también que la ecuación de Laplace 2D no es separable en coordenadas ovaladas.

Adicionalmente, se determinaron las funciones $\Lambda(u, v)$ y $\Upsilon(u, v)$ en términos de la solución positiva de la ecuación (71), que es similar a una ecuación algebraica, pero con potencias reales. Se determinó que esta ecuación puede reescribirse como una ecuación algebraica si $a \in \mathbb{Q}$ y que siempre tiene al menos una solución positiva si además $a \notin (-1, 0]$. El grado de esta ecuación se determinó en función del valor de a , encontrando que éste es menor o igual que 4 en los casos en que $|a| = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. En estos casos es posible resolver la ecuación (71) en términos de radicales. En particular, se encontró la solución positiva de esta ecuación para $a = 1$ y $a = \frac{1}{3}$, encontrando que ésta es única en ambos casos. Una solución general de la ecuación (71) para un valor indefinido de a no se pudo encontrar, debido a que esto implica resolver la ecuación algebraica de grado n para un valor de n indefinido.

Se determinó también una metodología para escribir las derivadas parciales de n -ésimo orden de $\Lambda(u, v)$ y $\Upsilon(u, v)$ en función de sí mismas. Éstas se hallaron usando las definiciones de las coordenadas ovoidales u y v en términos de las coordenadas cartesianas, y fueron de gran ayuda para simplificar o aproximar expresiones en el capítulo 5. Asimismo, de estas se encontraron las relaciones $\Lambda_v = \Upsilon\Upsilon_u$ y $\Upsilon_v = -\Upsilon\Lambda_u$, donde los subíndices indican derivada parcial. A partir de estas dos, se determinaron relaciones entre las segundas y terceras derivadas de Λ y Υ de manera sistemática, las cuales fueron de gran ayuda en los capítulos 4 y 5 para simplificar

las expresiones encontradas en la ecuación de Killing y en las ecuaciones de campo de Einstein.

A partir del elemento de línea sobre ovoides de Descartes, en el capítulo 4 se propuso y caracterizó un ansatz métrico estacionario y ovoidalmente simétrico para describir fuentes ovoidales en la teoría gravitacional de Einstein. Para esto se siguió un procedimiento inspirado en el trabajo de Krasinski para definir espaciotiempos estacionarios y elipsoidales⁹⁸. A diferencia de Krasinski, en este caso se usó la métrica sobre ovoides de Descartes confocales. Este ansatz métrico ovoidal se reduce al ansatz métrico esférico al imponer, entre otras cosas, la condición $a = 0$ o $\tau = 0$, en la cual los ovoides usados para construir el ansatz se convierten en esferas. Al hallar la solución más general de la ecuación de Killing, se encontraron solamente dos vectores de Killing linealmente independientes: $\xi = \partial_t$ y $\eta = \partial_\phi$, asociados al carácter estacionario de la métrica y a su simetría axial, respectivamente. Esto confirma la suposición inicial de que la simetría ovoidal no está caracterizada por una isometría. No obstante, esto no descarta la existencia de algún otro invariante asociado a esta simetría ovoidal.

Con este ansatz métrico ovoidal, en el caso estático, se encontraron soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein de tipo fluido estático y anisótropo. Se encontró que la densidad y las presiones dependen en general de las dos coordenadas ovoidales u y v . Se encontró también que las presiones tangenciales, P_2 y P_3 , se hacen iguales para puntos en el infinito. Asimismo, se determinaron las condiciones sobre las funciones libres $A(u)$ y $B(u)$, junto con la constante c_1 , para que se cumplan las condiciones de energía débil y fuerte. Se encontraron versiones aproximadas de estas condiciones para puntos distantes, con valores grandes de z y ρ comparados con τ . Pese a tomar estas aproximaciones, las condiciones resultaron lo suficientemente complicadas como para hallar un caso particular que las cumpla. Con lo cual, no se pudo encontrar una solución particular que fuera físicamente aceptable.

Para extender los resultados de este trabajo, se pueden considerar una serie de

⁹⁸ KRASIŃSKI, A. 1978.

cosas. La primera consiste en considerar otra familia de ovoides de Descartes para construir el ansatz métrico. En vez de usar ovoides que comparten dos focos, se podrían usar ovoides que comparten sus tres focos, lo cual daría lugar a un ansatz métrico ovoidal *triconfocal*. Para lo cuál se necesitaría crear además unas coordenadas ortogonales ovoidales *triconfocales*. La segunda cosa que se puede considerar es buscar soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein de tipo fluido estacionario con flujo de calor y tensor de anisotropía. Al no tener que imponer que las funciones A , B y C dependan solo de u , se puede obtener mayor libertad sobre las funciones libres de la solución para hacer cumplir las condiciones de energía. Asimismo, se podrían buscar soluciones de tipo vacío de las ecuaciones de campo de Einstein a partir del ansatz métrico ovoidal. No obstante, debido a la complejidad de estas ecuaciones se espera que hacer esto último sea muy complicado.

En este trabajo, por su parte, se evidencia como el uso de óvalos de Descartes para construir coordenadas ortogonales da lugar a expresiones muy complicadas como las de $\Lambda(u, v)$ y $\Upsilon(u, v)$. La complejidad en estas expresiones hace que, por ejemplo, la ecuación de Laplace no sea separable en coordenadas ovoidales. A su vez, este panorama no cambia mucho en relatividad general. En este caso, fue posible encontrar soluciones exactas de tipo fluido anisótropo estático. Sin embargo, debido a la complejidad de la solución, no fue posible imponer las condiciones de energía en la solución de manera satisfactoria. Esto parece indicar que, si bien es posible encontrar soluciones a partir de óvalos de Descartes, la complejidad de estas soluciones hace impráctico e inviable su análisis físico o de cualquier otro tipo.

Estas percepciones podrían cambiar si se elige otra familia de óvalos de Descartes para construir las coordenadas. Como, por ejemplo, la mencionada familia de óvalos de Descartes *triconfocales* o los óvalos de Descartes derivados a partir de la función elíptica de Weierstrass $\wp(z)$ ⁹⁹. No obstante, no hay garantía de que se obtengan

⁹⁹ FAROUKI, R. T. 2022; FERRÉOL, R. s.f.; C. L. BACON: *The Cartesian Oval and the Elliptic Functions p and σ* . En: *American Journal of Mathematics* 35.3 (1913), págs. 261-280.

soluciones simples al usar estos otros enfoques. Es posible, por otra parte, que el uso de coordenadas de tipo ovoidales sea útil en otros problemas físicos. Como por ejemplo, el modelo de un disco de acreción alrededor de un objeto astrofísico o el de un núcleo atómico sin simetría de reflexión¹⁰⁰, por decir algo.

¹⁰⁰ Y. CAO et al.: *Landscape of pear-shaped even-even nuclei*. En: *Physical Review C* 102.2 (2020); G. ALBERTINI, D. BASSANI y F. CARDONE: *Two questions about a non-flat nuclear space-time*. En: *The European Physical Journal Plus* 133.2 (2018).

BIBLIOGRAFÍA

ALBERTINI, G. et al.: *Two questions about a non-flat nuclear space-time*. En: *The European Physical Journal Plus* 133.2 (2018).

ARNOLD, V. I. et al.: *Mathematical Methods Of Classical Mechanics*. 2nd. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1989.

BACON, C. L.: *The Cartesian Oval and the Elliptic Functions p and σ* . En: *American Journal of Mathematics* 35.3 (1913), págs. 261-280.

BUCHDAHL, H. A.: *Reciprocal static solutions of the equations of the gravitational field*. En: *Australian Journal of Physics* 9.1 (1956), págs. 13-18.

CAMCI, U. et al.: *Ricci collineations of the Bianchi types I and III, and Kantoeski-Sachs spacetimes*. En: *International Journal of Modern Physics D* 10.05 (2001), págs. 751-765. DOI: 10.1142/S0218271801001219.

CAO, Y. et al.: *Landscape of pear-shaped even-even nuclei*. En: *Physical Review C* 102.2 (2020).

CAROT, J. et al.: *Ricci collineations for type B warped space-times*. En: *General Relativity and Gravitation* 29.10 (1997), págs. 1223-1237.

CHAI SI, M. et al.: *Compact anisotropic spheres with prescribed energy density*. En: *General relativity and gravitation* 37 (2005), págs. 1177-1189.

CHANDRASEKHAR, S.: *The Mathematical Theory of Black Holes*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1998.

CHASLES, M.: "Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie: particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi

d'un mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie". En: Mém. couronnés, Acad. des sci. et belles lett. de Bruxelles. M. Hayez, 1837. Cap. Note XXI: Sur les ovales de Descartes, ou lignes aplanétiques. Págs. 350-353.

CHINEA, F. J. et al.: *Interior gravitational field of a stationary, axially symmetric perfect fluid in irrotational motion*. En: *Classical and Quantum Gravity* 7.5 (1990), pág. L99.

CHO, S.: *Explicit superconic curves*. En: *J. Opt. Soc. Am. A* 33.9 (2016), págs. 1822-1830. DOI: 10.1364/JOSAA.33.001822.

DARBOUX, G.: "Leçons sur les systemes orthogonaux et les coordonnées curvilignes". En: Gauthier-Villars, 1910. Cap. Recherche des systèmes isothermes et d'autres systèmes qui se présentent dans la théorie de la chaleur, pág. 277.

— *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, 2e édit*. En: *Hermann, Paris* (1899).

DARMOIS, G.: *Les équations de la gravitation einsteinienne*. 25. 1927.

— *Memorial des sciences mathématique: fascicule XXV: les equations de la gravitation einsteinienne*. Gauthier-Villars Paris, 1927.

DESCARTES, R.: "La Géométrie". En: 1637. Cap. Explication de quatre nouveaux genres d'ovales qui servent à l'optique, págs. 352-357.

EREZ, G. et al.: *The gravitational field of a particle possessing a multipole moment*. En: *Bull. Research Council Israel* Vol: Sect. F.8 (1959).

FAROUKI, R. T.: *The Cartesian ovals*. En: *The Mathematical Intelligencer* 44.4 (2022), págs. 343-353.

FERRÉOL, R.: *Cartesian Oval*. [Sitio web]. Consulta: 1 de agosto de 2025. Disponible en: <https://mathcurve.com/courbes2d.gb/descartes/descartes.shtml>.

GARCÍA, A.: *A new stationary axisymmetric perfect fluid type D solution with differential rotation*. En: *Classical and Quantum Gravity* 11.3 (1994), pág. L45.

GOODMAN, D.: "Handbook of Optics: Volume I - Geometrical and Physical Optics, Polarized Light, Components and Instruments". En: ed. por Michael BASS. 3rd ed. McGraw-Hill Professional, 210. Cap. 1. General Principles of Geometric Optics.

GOURGOULHON, É.: "3+1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity". En: *Lecture Notes in Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 2012. Cap. 3. Geometry of Hypersurfaces, págs. 29-54.

GREEN, L. H. et al.: *The Robertson-Walker metric and the symmetries belong to the family of contracted Ricci collineations*. En: *General Relativity and Gravitation* 8 (1977), págs. 731-736.

GREYNOLDS, A. W.: "Superconic and subconic surface descriptions in optical design". En: *International Optical Design Conference*. Optica Publishing Group, 2002, IMA1. DOI: 10.1364/IODC.2002.IMA1.

GUTIÉRREZ-PIÑERES, A. C. et al.: *C^3 Matching Conditions for Anisotropic Fluids*. En: *International Journal of Theoretical Physics* 63.9 (2024), pág. 218.

— *C^3 matching for asymptotically flat spacetimes*. En: *Classical and Quantum Gravity* 36.13 (2019), pág. 135003.

— *Darmois matching and C^3 matching*. En: *Classical and Quantum Gravity* 39.3 (2022), pág. 035015.

HAWKING, S. W. et al.: "The Large Scale Structure of Space-Time". En: Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973. Cap. 4. The physical significance of curvature, págs. 88-96.

HERNÁNDEZ-PASTORA, J. L. et al.: *Monopole-quadrupole static axisymmetric solutions of Einstein field equations*. En: *General Relativity and Gravitation* 26.9 (1994), págs. 877-907.

KATZIN, G. H. et al.: "Applications of Lie derivatives to symmetries, geodesic mappings, and first integrals in Riemannian spaces". En: *Colloquium Mathematicum*. Vol. 1. 26. 1972, págs. 21-38.

KATZIN, G. H. et al.: *Curvature Collineations: A Fundamental Symmetry Property of the Space-Times of General Relativity Defined by the Vanishing Lie Derivative of the Riemann Curvature Tensor*. En: *Journal of Mathematical Physics* 10.4 (1969), págs. 617-629. DOI: 10.1063/1.1664886.

KERR, R. P.: *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*. En: *Physical review letters* 11.5 (1963), pág. 237.

KOLASSIS, C. A. et al.: *Energy conditions for an imperfect fluid*. En: *Classical and Quantum Gravity* 5.10 (1988), pág. 1329.

KRAMER, D.: *A new solution for a rotating perfect fluid in general relativity*. En: *Classical and Quantum Gravity* 1.1 (1984), pág. L3.

KRASIŃSKI, A.: *Ellipsoidal space-times, sources for the Kerr metric*. En: *Annals of Physics* 112.1 (1978), págs. 22-40. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(78\)90079-9](https://doi.org/10.1016/0003-4916(78)90079-9).

LAMÉ, G.: *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications*. Mallet-Bachelier, 1859.

LEE, J. M.: *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2019.

MISNER, C. W. et al.: *Gravitation*. Princeton University Press, 2017.

MOON, P. et al.: *Cylindrical and rotational coordinate systems*. En: *Journal of the Franklin Institute* 252.4 (1951), págs. 327-344.

— *Some coordinate systems associated with elliptic functions*. En: *Journal of the Franklin Institute* 255.6 (1953), págs. 531-543.

MOON, P. H. et al.: *Field Theory Handbook: Including Coordinate Systems, Differential Equations, and Their Solutions*. John T. Zubal, 1988.

MORRIS, M. S. et al.: *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*. En: *American Journal of Physics* 56.5 (1988), págs. 395-412.

NEWMAN, E. et al.: *Empty-space generalization of the Schwarzschild metric*. En: *Journal of Mathematical Physics* 4.7 (1963), págs. 915-923.

QUETELET, A.: “Correspondance mathématique et physique”. En: vol. 5. M. Hayez, Imprimeur de L'Académie Royale, 1829. Cap. Sur les lignes dirimantes à deux foyers conjugués, págs. 109-116.

QUEVEDO, H.: *Exterior and interior metrics with quadrupole moment*. En: *General Relativity and Gravitation* 43.4 (2011), págs. 1141-1152.

RACZ, I.: *Note on stationary-axisymmetric vacuum spacetimes with inside ellipsoidal symmetry*. En: *Classical and Quantum Gravity* 9.8 (1992), pág. L93. DOI: 10.1088/0264-9381/9/8/004.

SALAZAR-ARIZA, K. et al.: *Trajectories on the Poincaré sphere of polarization states of a beam passing through a rotating linear retarder*. En: *Journal of the Optical Society of America A* 35.1 (2017), págs. 65-72.

SCHWARZSCHILD, K.: *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie*. En: *Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1916), págs. 424-434.

— *Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie*. En: *Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften* (1916), págs. 189-196.

SENOVILLA, J. M. M.: *New family of stationary and axisymmetric perfect-fluid solutions*. En: *Classical and Quantum Gravity* 9.11 (1992), pág. L167.

— *Stationary and axisymmetric perfect-fluid solutions to Einstein's equations*. En: *Rotating Objects and Relativistic Physics: Proceedings of the El Escorial Summer School on Gravitation and General Relativity 1992: Rotating Objects and Other Topics Held at El Escorial, Spain, 24–28 August 1992*. 2005, págs. 73-88.

SILVA-LORA, A. et al.: *Achromatic stigmatism: achromatic Cartesian ovoid*. En: *J. Opt. Soc. Am. A* 39.9 (2022), págs. 1524-1532. DOI: 10.1364/JOSAA.460993.

— *Aplanatism in stigmatic optical systems*. En: *Optics Letters* 45.23 (2020), págs. 6390-6393.

— *Explicit Cartesian oval as a superconic surface for stigmatic imaging optical systems with real or virtual source or image*. En: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 476.2235 (2020), pág. 20190894. DOI: 10.1098/rspa.2019.0894.

— *Rigorously aplanatic Descartes ovoids*. En: *J. Opt. Soc. Am. A* 38.8 (2021), págs. 1160-1169. DOI: 10.1364/JOSAA.422809.

SILVA-LORA, A. et al.: *Superconical aplanatic ovoid singlet lenses*. En: *J. Opt. Soc. Am. A* 37.7 (2020), págs. 1155-1165. DOI: 10.1364/JOSAA.392795.

SINGH, K. P. et al.: *Ricci and Maxwell collineations in a null electromagnetic field*. En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 8.12 (1975), pág. 1875.

SOUTHALL, J. P. C.: *Aplanatic (or Cartesian) optical surfaces*. En: *Journal of the Franklin Institute* 193.5 (1922), págs. 609-626.

STEPHANI, H. et al.: *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. 2.^a ed. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003.

The Robertson-Walker metric and the symmetries belong to the family of contracted Ricci collineations. En: *General Relativity and Gravitation* 8.9 (1977), págs. 731-736.

TOLMAN, R. C.: *Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid*. En: *Physical Review* 55.4 (1939), pág. 364.

WAHLQUIST, H. D.: *Interior solution for a finite rotating body of perfect fluid*. En: *Physical Review* 172.5 (1968), pág. 1291.

WALD, R. M.: *General Relativity*. University of Chicago Press, 2010.

WEBER, E.: "Electromagnetic Fields. Theory and applications". En: vol. 1. Wiley, 1950. Cap. Three-dimensional analytic solutions, págs. 503-509.

WEINBERG, S.: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., 1972.

WILLIAMSON, B.: "An Elementary Treatise on the Differential Calculus: Containing the Theory of Plane Curves, with Numerous Examples". En: Longmans, Green, 1912. Cap. XX On the Cartesian Oval, págs. 375-384.

WOOLSEY, J. M.: *Bipolar Equations-Cartesian Ovals*. En: *The Analyst* (1875), págs. 106-115.

WRINCH, D. M.: *CIX. Some problems concerned with inverted prolate spheroids*. En: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 14.95 (1932), págs. 1061-1070.

YAVUZ, I. et al.: *Ricci collineations of the Bianchi type II, VIII, and IX space-times*. En: *General Relativity and Gravitation* 28.6 (1996), págs. 691-700.

ZAKHARY, E. et al.: *A new algorithm for the Segre classification of the trace-free Ricci tensor*. En: *General relativity and gravitation* 36 (2004), págs. 1015-1038.

ZSIGRAI, J.: *Ellipsoidal shapes in general relativity: general definitions and an application*. En: *Classical and Quantum Gravity* 20.13 (2003), pág. 2855. DOI: 10.1088/0264-9381/20/13/330.

ZWILLINGER, D.: "CRC Standard Mathematical Tables and Formulae". En: 31st ed. *Advances in Applied Mathematics*. CRC Press LLC, 2003. Cap. 2.3 Polynomials.

A. ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LOS ÓVALOS DE DESCARTES

En esta sección se desea profundizar en la parametrización $\theta = \theta(r)$ de la sección 1.3.2 y en el caso particular de los óvalos de Descartes como caracolas de Pascal. Respecto al primero de estos temas, se busca identificar el intervalo de valores que toma r en esta parametrización. Para lo cual se encuentran cuatro posibles valores mínimos y máximos de r , de los cuales siempre hay solo dos que corresponde al máximo y mínimo de r dados unos valores fijos de u y a . Los resultados de este problema se dan en función de los distintos rangos de valores que puede tomar a , como, por ejemplo, $|a| < 1$, $|a| > 1$, $a = 1$, etc. Por otra parte, para determinar los casos donde el óvalo se convierte en caracola de Pascal, se toman las ecuaciones paramétricas (7) y (9), que relacionan un radio en función de un ángulo, y se impone la condición de que éstas sean de la forma $r = \alpha + \beta \cos \theta$, siendo α y β constantes. Con esto, se obtienen dos ecuaciones que definen caracolas de Pascal, una en relación a una distancia radial al foco F , y la otra, en relación al foco F' . Como conclusión adicional, se encuentra que el óvalo se convierte en caracola cuando uno de los focos converge en el otro.

A.1. Limite superior e inferior del radio en la parametrización radial del óvalo de Descartes

Determinar el intervalo de valores que toma r en la parametrización $\theta = \theta(r)$ definida por la ecuación (10) es equivalente a encontrar los valores máximo y mínimo de r . Para esto, se puede emplear la ecuación (7) que expresa r en función de θ . Considerando $\theta \in (-\pi, \pi]$, $r(\theta)$ alcanza sus valores máximo y mínimo cuando $\theta = \pi$ o cuando

$$\frac{dr}{d\theta} = \mp \frac{a\tau \sin \theta \left(a^2\tau \cos \theta \pm a\sqrt{-a^2\tau^2 \sin^2 \theta - 2u\tau \cos \theta + \tau^2 + u^2} - u \right)}{(a^2 - 1)\sqrt{-a^2\tau^2 \sin^2 \theta - 2u\tau \cos \theta + \tau^2 + u^2}} = 0. \quad (178)$$

Como puede verse, una solución de esta ecuación es $\sin \theta = 0$, que implica $\theta \in \{0, \pi\}$. La otra posibilidad consiste en que

$$a^2\tau \cos \theta \pm a\sqrt{-a^2\tau^2 \sin^2 \theta - 2u\tau \cos \theta + \tau^2 + u^2} - u = 0. \quad (179)$$

Simplificando esta expresión se obtiene

$$a^2\tau \cos \theta - u \pm \frac{a}{\sqrt{a^2}} \sqrt{(a^2\tau \cos \theta - u)^2 + (a^2\tau^2 - u^2)(1 - a^2)} = 0. \quad (180)$$

Por ende, al pasar $a^2\tau \cos \theta - u$ al lado derecho y al elevar a ambos lados de la ecuación al cuadrado se cancela la parte que contiene a θ dando lugar a

$$(a^2\tau^2 - u^2)(1 - a^2) = 0, \quad (181)$$

la cual no depende de θ . La solución de esta ecuación da lugar a un posible caso extremo en el cual $dr/d\theta = 0$ para todo θ . Por ende, se descarta esta otra posibilidad, dejando solamente el caso en que $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

Lo anterior ilustra que r alcanza sus valores máximo y mínimo en puntos sobre el eje x . Es decir, puntos donde $y = r \sin \theta = 0$. Así, una manera de hallar los posibles máximos y mínimos de r consiste en resolver la ecuación $y(r) = 0$, tomando $y(r)$ de la ecuación (12). Para esto, es conveniente reescribir $y(r)^2$ como

$$y(r)^2 = -\frac{1}{4\tau^2 a^4} ((a+1)r - u - a\tau) ((a+1)r - u + a\tau) ((a-1)r + u + a\tau) \\ \times ((a-1)r + u - a\tau). \quad (182)$$

Así, las soluciones de $y(r) = 0$ son

$$r_1 = \frac{a\tau - u}{a - 1}, \quad r_2 = \frac{-a\tau - u}{a - 1}, \quad r_3 = \frac{-a\tau + u}{a + 1}, \quad r_4 = \frac{a\tau + u}{a + 1}. \quad (183)$$

Un hecho interesante de estas soluciones es que al reemplazarlas en la ecuación

(10) se obtiene

$$\cos(\theta(r_i)) = 1 \quad i \in \{1, 4\}, \quad (184)$$

$$\cos(\theta(r_j)) = -1 \quad j \in \{2, 3\}. \quad (185)$$

Por ende, r_1 y r_4 dan lugar a puntos en el eje x positivo, $x(r_i) = r_i$, y r_2 y r_3 dan lugar a puntos en el eje x negativo, $x(r_j) = -r_j$.

Para distinguir cuales de las soluciones r_i de $y(r) = 0$ se deben usar, se usará el hecho de que por construcción se debe cumplir la ecuación (4). Así, al reemplazar $r = r_1$ en esta ecuación y al usar la ecuación (184) se obtiene

$$\frac{a}{a-1} (\text{sign}(a-1)|\tau - u| + \tau - u) = 0, \quad (186)$$

donde sign es la función signo, definida como $\text{sign}(x) = x/|x|$. De esta expresión se ve que a no puede tomar el valor de 1 para evitar inconsistencias y que $\text{sign}(a-1)|\tau - u| \leq 0$ para que la expresión en paréntesis sea cero. En los casos donde esto no se cumple, r_1 deja de ser un máximo o mínimo de r . Adicional a esto, se debe buscar la condición de que $r_1 \geq 0$. Los resultados de este análisis aplicados a cada radio r_k se muestran en el cuadro 2, donde se ha definido por conveniencia

$$\bar{r}_1 = \frac{a|\tau| - u}{a-1}, \quad \bar{r}_2 = \frac{-a|\tau| - u}{a-1}, \quad \bar{r}_3 = \frac{-a|\tau| + u}{a+1}, \quad \bar{r}_4 = \frac{a|\tau| + u}{a+1}. \quad (187)$$

Esto da como resultado que para cada intervalo posible de u siempre hay solo dos radios posibles que cumplen las condiciones impuestas. Con lo cual, el mayor es el máximo y el menor es el mínimo. En la columna "Obs." del cuadro 2 se ilustra cuál de los radios es mayor que el otro en cada caso posible. En la figura 15 se ilustra esto mismo pero gráficamente.

Ahora, se deben considerar los casos límites $a = 1$ y $a = -1$. En el caso $a = 1$, los radios pasan a ser $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \pm\infty$, $\bar{r}_3 = \frac{-|\tau|+u}{2}$ y $\bar{r}_4 = \frac{|\tau|+u}{2}$. Del cuadro 1, la condición de existencia del óvalo para $a = 1$ es $u \geq |\tau|$. Por ende, tanto \bar{r}_3 como \bar{r}_4 son no negativas. Se encuentra estas dos son consistentes con la ecuación (4), dado que dan lugar a que ésta se cumpla idénticamente. Con lo cual \bar{r}_3 es el radio mínimo y

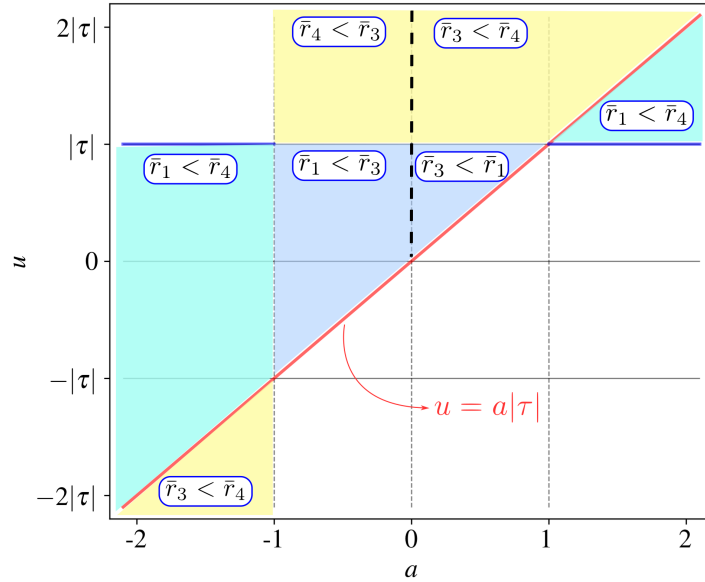


Figura 15. En cada región coloreada del plano ua se ilustra cual de los dos radios de la ecuación (187) que cumplen ser no negativos y ser consistentes con la ecuación (4) es mayor que el otro. La región en color blanco representa las regiones donde no se cumple la condición de existencia del óvalo (cf. cuadro 1).

Tabla 2. En este cuadro se presenta las condiciones para que la ecuación (4) se cumpla idénticamente al reemplazar $r = \bar{r}_k$ y para que $\bar{r}_k \geq 0$, con $k = 1, 2, 3, 4$. Estas condiciones toman en cuenta que u debe satisfacer la condición de existencia del óvalo del cuadro 1. La columna marcada con “Obs.” contiene una observación adicional sobre los radios \bar{r}_k en el intervalo respectivo. Para el caso $|a| < 1$ con $a \neq 0$, la observación en paréntesis es para el caso $a < 0$, y la otra, para el caso $a > 0$. Por último, el símbolo $\neg\exists u$ indica que no existe ningún u que cumpla las condiciones impuestas.

\bar{r}_k	$a > 1$		$ a < 1$ con $a \neq 0$		$a < -1$	
	Condición	Obs.	Condición	Obs.	Condición	Obs.
\bar{r}_1	$u \in [\tau , a \tau]$	$\bar{r}_1 < \bar{r}_4$	$u \in [a \tau , \tau]$	$\bar{r}_3 < \bar{r}_1$ ($\bar{r}_1 < \bar{r}_3$)	$u \in [a \tau , \tau]$	$\bar{r}_1 < \bar{r}_4$
\bar{r}_2	$\neg\exists u$		$\neg\exists u$		$\neg\exists u$	
\bar{r}_3	$u \in [a \tau , \infty)$	$\bar{r}_3 < \bar{r}_4$	$u \in [a \tau , \infty)$		$u \in (-\infty, a \tau]$	$\bar{r}_3 < \bar{r}_4$
\bar{r}_4	$u \in [\tau , \infty)$		$u \in [\tau , \infty)$	$\bar{r}_3 < \bar{r}_4$ ($\bar{r}_4 < \bar{r}_3$)	$u \in (-\infty, \tau]$	

\bar{r}_4 es el radio máximo.

Por otra parte, en el caso $a = -1$ se tiene $\bar{r}_1 = \frac{|\tau|+u}{2}$, $\bar{r}_2 = \frac{-|\tau|+u}{2}$ y $\bar{r}_3 = \bar{r}_4 = \pm\infty$. En este caso, la condición de existencia es $-\tau \leq u \leq \tau$. Con lo cual $\bar{r}_1 \geq 0$, pero $\bar{r}_2 \leq 0$. Dado que el óvalo se convierte en una de las ramas de una hipérbola, entonces naturalmente el radio máximo es $r = \infty$. Al igual que antes, se encuentra

que \bar{r}_1 es consistente con la ecuación (4). Por lo tanto, \bar{r}_1 es el radio mínimo.

Finalmente, de todo lo anterior se encuentra que el intervalo de valores que toma r en las ecuaciones paramétricas (11) y (12) va acorde con

$$r \in \begin{cases} \left[\frac{u - a|\tau|}{a \operatorname{sign}(a(u - a|\tau|)) + 1}, \frac{a|\tau| + u}{a + 1} \right], & \text{si } |a| > 1; \\ \left[\frac{a|\tau| + u \operatorname{sign}(u - |\tau|)}{a + \operatorname{sign}(u - |\tau|)}, \frac{-a|\tau| + u}{a + 1} \right], & \text{si } -1 < a < 0; \\ \left[\frac{-a|\tau| + u}{a + 1}, \frac{a|\tau| + u \operatorname{sign}(u - |\tau|)}{a + \operatorname{sign}(u - |\tau|)} \right], & \text{si } 0 < a < 1; \\ \left[\frac{-|\tau| + u}{2}, \frac{|\tau| + u}{2} \right], & \text{si } a = 1; \\ \left[\frac{|\tau| + u}{2}, \infty \right), & \text{si } a = -1. \end{cases} \quad (188)$$

donde $\operatorname{sign}(x) = x/|x|$ es la función signo.

A.2. Caracolas de Pascal como un caso particular de los óvalos de Descartes

En los capítulos de la parte I se veía que al graficar óvalos de Descartes algunos de ellos presentaban un pico (cf. figuras 3, 4 y 13). Al final de la sección 1.6 se demostró que esto ocurría cuando alguno de los vértices de los dos conos dados por las ecuaciones (32) y (33) se intersecaba con la superficie del otro. Se encontró que esto ocurría cuando $u = |\tau|$ si $|a| < 1$ y cuando $u = a|\tau|$ si $|a| > 1$. Como se verá luego, estos óvalos corresponden a caracolas de Pascal, o fragmentos de ellas.

Aquí se realizará un enfoque alternativo al de la sección 1.6 al analizar las ecuaciones paramétricas del óvalo de Descartes dadas por las ecuaciones (7) y (9). Se buscarán condiciones para que estas relaciones sean de la forma $r = \alpha + \beta \cos \theta$, con α y β constantes. Este enfoque permitirá encontrar las ecuaciones de las caracolas de Pascal que resultan a partir de los óvalos de Descartes, y permitirá ver que toda caracola de Pascal es un caso particular de estos mismos, excepto el cardiode. Las

ecuaciones y resultados obtenidos aquí son consistentes con lo encontrado en¹⁰¹. La primera ecuación paramétrica (7) se obtuvo al solucionar la ecuación (6)

$$(a^2 - 1)r^2 + 2(u - a^2\tau \cos \theta)r - u^2 + a^2\tau^2 = 0. \quad (189)$$

Dado que la ecuación polar de las caracolas de Pascal es $r = \alpha + \beta \cos \theta$, con α y β constantes, se desea que en esta ecuación la dependencia de r con $\cos \theta$ sea lineal. La única manera en que esto puede ocurrir es si $-u^2 + a^2\tau^2 = 0$, es decir, si $u = \pm a\tau$. Para este caso, de la ecuación (189) se obtiene

$$r = -\frac{2a\tau}{a^2 - 1}(\pm 1 - a \cos \theta). \quad (190)$$

Al comparar con la condición de existencia del óvalo de Descartes del cuadro 1 se encuentra que esta curva es no vacía o no degenerada en un punto cuando $|a| > 1$ y $\pm\tau > 0$, y cuando $-1 < a < 0$ y $\pm\tau < 0$. El signo \pm de estas condiciones es el mismo que el de la ecuación (190). Es interesante mencionar que el caso $-1 < a < 0$ no corresponde a un óvalo con un pico, pues para $|a| < 1$ se necesitaría $u = |\tau|$, pero sin embargo es una caracola de Pascal.

Ahora se realiza el mismo análisis pero para la ecuación paramétrica (9). En este caso, se tiene la ecuación cuadrática (8)

$$(a^2 - 1)r'^2 - 2(\tau \cos \phi + au)r' - \tau^2 + u^2 = 0. \quad (191)$$

De la figura 5 es fácil ver que r' y ϕ pueden interpretarse como las coordenadas polares de un sistema de coordenadas cartesianas con el origen en el foco F' y paralelo al sistema coordenado xy . Así, para obtener caracolas de Pascal se quiere que $-\tau^2 + u^2 = 0$, es decir, que $u = \pm\tau$. Al reemplazar esta ecuación en (191) se obtiene

$$r' = \frac{2\tau}{a^2 - 1}(\cos \phi \pm a). \quad (192)$$

¹⁰¹ WOOLSEY, J. M. 1875.

Al comparar con la condición de existencia del cuadro 1 se encuentra que esta curva es no vacía o no degenerada en un punto cuando $|a| < 1$ y $\pm\tau > 0$, y cuando $a < -1$ y $\pm\tau < 0$. El signo \pm de estas condiciones es igual al de la ecuación (192). El caso $a < -1$ corresponde a una caracola de Pascal sin un pico.

Por otra parte, al tomar la ecuación (30) que relaciona la distancia r'' al tercer foco y repetir el procedimiento anterior no se encuentran casos nuevos de caracolas de Pascal. En particular, al tomar ψ como el ángulo formado entre el segmento MF'' y el eje x (cf. figura 8) se tienen las relaciones $x = r'' \cos \psi + \tau + \xi$ y $y = r'' \sin \psi$. Al reemplazar $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en la ecuación (26), con los x y y mencionados antes, se obtiene

$$\frac{a^2\tau^2 - u^2}{\tau^2} \left[r''^2 - 2\frac{\pm a\tau^2 + u^2 \cos \psi}{\tau(a^2 - 1)} r'' + \frac{(a^2\tau^2 - u^2)(\tau^2 - u^2)}{\tau^2(a^2 - 1)^2} \right] = 0, \quad (193)$$

donde se usó la ecuación (24b) que relaciona ξ con u y τ . Como puede verse, la condición de que r'' sea lineal con $\cos \psi$ implica que $u = \pm\tau$ o que $u = \pm a\tau$, que son las dos condiciones ya vistas antes. Al reemplazar estos valores de u en la ecuación (193) se pueden obtener nuevamente las ecuaciones (190) y (192). Por ende, el uso de la ecuación (30) no conduce a nuevos resultados.

Vale la pena mencionar que en el caso $u = \pm\tau$ se obtiene $\xi = 0$ y en el caso $u = \pm a\tau$ se obtiene $\tau + \xi = 0$ (cf. ecuación (24b)). Así, el foco F'' se hace igual al foco F o F' al imponer la condición de que el óvalo sea una caracola de Pascal. Por lo tanto, se puede decir que el óvalo de Descartes se convierte en caracola de Pascal cuando uno de los focos converge en otro.

De las ecuaciones (190) y (192) puede verse que para obtener una ecuación de la forma $r = \alpha \pm \alpha \cos \theta$, con α constante, se necesita que $a = \pm 1$. Sin embargo, para estos valores de a el coeficiente de $\cos \theta$ y el término independiente se hacen infinitos. Para evitar esto, se puede considerar el límite donde $a \rightarrow \pm 1$ y $\tau \rightarrow 0$ con $\tau/(a^2 - 1) \equiv d$ constante. Así, el cardiode se obtiene en un caso límite en que los tres focos convergen en un solo punto.

Por su parte, para demostrar que toda caracola de Pascal que tiene por ecuación

$r = \alpha + \beta \cos \theta$ es un óvalo de Descartes, con α y β constantes, basta con encontrar los valores de a y τ en función de los valores de α y β . Para este caso, de la ecuación (190), puede demostrarse que estas relaciones son

$$a = \pm \frac{\beta}{\alpha}, \quad \tau = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\beta}. \quad (194)$$

Al repetir lo mismo para la caracola de Pascal cuya ecuación es $r' = \alpha + \beta \cos \phi$, con α y β constantes, se obtiene

$$a = \pm \frac{\alpha}{\beta}, \quad \tau = -\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\beta}, \quad (195)$$

a partir de la ecuación (192). Pese a que en los casos $\alpha = 0$ o $\beta = 0$ las expresiones (194) y (195) presentan problemas, las caracolas de Pascal correspondientes si son óvalos de Descartes. En particular, la curva dada por $r = \alpha$ corresponde al óvalo con $a = 0$ y $u = \alpha$, mientras que la curva dada por $r = \beta \cos \theta$ corresponde al óvalo en el caso límite en que $\tau = \beta/2$ y a y u tienden a ∞ con $a/u = 1$. Asimismo, la curva dada por $r' = \alpha$ corresponde al caso límite en que $\tau = \beta/2$ y a y u tienden a ∞ con $a/u = \alpha$, mientras que la curva dada por $r' = \beta \cos \phi$ corresponde al caso límite en que $a = 0$ y $\tau = -\beta/2$.

B. ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LAS SINÉCDOLAS

B.1. Condición para que la función $y(t)$, asociada a la parametrización de la sinécdoła en la variable $t = \operatorname{arcsenh}(x/y)$, tome valores positivos

Aquí se encontrará la condición de t para que y de la ecuación (40) sea positivo o negativo. Esta condición es importante para que las soluciones de $s = e^t$ de la ecuación (71) sean también soluciones de la ecuación (70), y así correspondan efectivamente a puntos de intersección entre el óvalo y la sinécdoła definidos por las ecuaciones (69a) y (69b), respectivamente. Para hacer esto, se considera primero el signo de

$$\frac{\tau}{y} = \sinh(t) - \sinh\left(\frac{v-t}{a}\right) := F(t). \quad (196)$$

En el límite asintótico cuando $|t|$ es muy grande, $F(t)$ tiende a $\sinh(t)$ si $|a| > 1$ y tiende a $\sinh(t/a)$ si $|a| < 1$. En ambos casos, $F(t)$ tiende tanto a ∞ como a $-\infty$ a medida que $|t|$ se hace infinito. Así, como es una función continua, F debe cambiar de signo en alguno de sus ceros al menos una vez. En este caso, el único cero de F es $t = v/(a+1)$. Por lo tanto, $F(t)$ es positivo cuando $t > v/(a+1)$ si $|a| > 1$ ó $0 < a \leq 1$, pues en estos casos $F(t) \rightarrow \infty$ a medida que $t \rightarrow \infty$. Análogamente, $F(t)$ es positivo cuando $t < v/(a+1)$ si $-1 < a < 0$, pues en ese caso $F(t) \rightarrow \infty$ a medida que $t \rightarrow -\infty$.

Con esto es posible encontrar fácilmente la condición para que $y > 0$ o $y < 0$. Solo se debe considerar adicionalmente el signo de la constante τ . Una manera compacta de escribir esta condición es

$$\left(t - \frac{v}{a+1}\right) \tau \mathcal{S}(a) > 0, \quad (197)$$

con $\mathcal{S}(a) := \left|a + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}$. Así, cuando $\mathcal{S}(a) < 0$, es decir, cuando $-1 < a < 0$, esta inecuación queda como $t < v/(a+1)$ para $\tau > 0$; y cuando $\mathcal{S}(a) > 0$, queda como $t > v/(a+1)$ para $\tau > 0$. Si se quiere una manera menos compacta de escribir esta

condición puede ver el cuadro 3. Note que la condición subyacente para $s = e^t$ es que $s \in \left(e^{\frac{v}{a+1}}, \infty\right)$ o que $s \in \left(0, e^{\frac{v}{a+1}}\right)$.

Un hecho particular ocurre en el caso en que $a = -1$. Para este caso se tiene que $F(t) = \frac{1}{2}e^t(1 - e^{-v}) + \frac{1}{2}e^{-t}(e^v - 1)$. Así, cuando $v > 0$ se tiene que $F(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$, pues $e^v > 1$ y $e^{-v} < 1$, y cuando $v < 0$ se tiene que $F(t) < 0 \forall t \in \mathbb{R}$ por razones similares. Por lo tanto, si $a = -1$ y $v > 0$ entonces y/τ siempre es positivo, y si $a = -1$ y $v < 0$ entonces y/τ siempre es negativo. Las particularidades de este caso se deben a que la sinécdoła se convierte en la parte superior o inferior de una elipse, como se vio en la sección 2.3.

Tabla 3. Condición sobre el valor de t para que la función $y(t)$ definida por la ecuación (40) sea positiva. Las expresiones \mathbb{R}_+ y \mathbb{R}_- representan respectivamente a los reales positivos y a los reales negativos. Se excluyen los casos en que $a = -1$ y $v\tau < 0$, porque en ellos no existe condición para t

Valores de los parámetros			Condición para t
τ	a	v	
\mathbb{R}_+	$\mathbb{R}_{\setminus[-1,0]}$	\mathbb{R}	$t > \frac{v}{a+1}$
	$(-1, 0)$	\mathbb{R}	$t < \frac{v}{a+1}$
	-1	\mathbb{R}_+	$t \in \mathbb{R}$
\mathbb{R}_-	$\mathbb{R}_{\setminus[-1,0]}$	\mathbb{R}	$t < \frac{v}{a+1}$
	$(-1, 0)$	\mathbb{R}	$t > \frac{v}{a+1}$
	-1	\mathbb{R}_-	$t \in \mathbb{R}$

B.2. Grado algebraico de la ecuación s para $a \in \mathbb{Q}$

Aquí se responderá la siguiente pregunta: ¿Dado un valor racional de a , es posible escribir la ecuación (71) como una ecuación algebraica? Y si es así, ¿entonces cuál es su grado? En este apartado se demostrará que si $a \in \mathbb{Q}$ entonces la ecuación (71) puede efectivamente reorganizarse como una ecuación algebraica en $s^{m/p}$, donde m y p serán definidos más adelante. Analizando el polinomio resultante, $P(Z)$, asociado a la ecuación algebraica será posible demostrar en la siguiente sección que siempre existe al menos una solución de la ecuación (71) con $s > 0$ siempre y cuando $a \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{\setminus(-1,0)}$.

Primero, sea p/q la fracción irreducible igual a a , donde se considera sin pérdida de generalidad $p > 0$ por conveniencia. Ahora, la ecuación (71) puede reescribirse como

$$\kappa s^{\frac{2q}{p}} + \lambda s^{\frac{q}{p}+1} + \mu s^{\frac{q}{p}-1} + \nu = 0, \quad (198)$$

donde $\kappa = (a\tau - u)$, $\lambda = e^{\frac{\nu}{a}}(\tau - u)$, $\mu = e^{\frac{\nu}{a}}(\tau + u)$ y $\nu = e^{\frac{2\nu}{a}}(a\tau + u)$. A continuación se dividirá el análisis de la ecuación (198) en los casos en que $q > p$, $|q| < p$, $q < -p$. Al finalizar se discutirán los casos en que $q = \pm p$, es decir, cuando $a = \pm 1$.

Para $q > p$, se reescribe la ecuación (198) como

$$\kappa (s^{1/p})^{2q} + \lambda (s^{1/p})^{q+p} + \mu (s^{1/p})^{q-p} + \nu = 0. \quad (199)$$

Dado que $q > p$ y $p > 0$ entonces se encuentra que $2q > 0$, $q + p > 0$ y $q - p > 0$, es decir, todas las potencias de $s^{1/p}$ en la última ecuación son enteros positivos. Por lo tanto, ésta es una ecuación algebraica en $s^{1/p}$. Como $p < q$, entonces $2q$ es su mayor potencia. Luego, la ecuación (199) es una ecuación algebraica en $s^{1/p}$ de grado a lo sumo de $2q$. Se dice que es *a lo sumo* debido a que si existe un divisor común m de $2q$, $q + p$ y $q - p$ distinto de 1, se podría reescribir la ecuación (199) como una ecuación algebraica en $s^{m/p}$ de grado $2q/m$

$$\kappa (s^{m/p})^{\frac{2q}{m}} + \lambda (s^{m/p})^{\frac{q+p}{m}} + \mu (s^{m/p})^{\frac{q-p}{m}} + \nu = 0. \quad (200)$$

Por otro lado, para $|q| < p$ se multiplica a la ecuación (198) a ambos lados por $s^{1-\frac{q}{p}}$ y se reescribe como

$$\kappa (s^{1/p})^{p+q} + \lambda (s^{1/p})^{2p} + \mu + \nu (s^{1/p})^{p-q} = 0. \quad (201)$$

Al escribirla de esta forma se encuentra que todas las potencias de $s^{1/p}$ son enteros positivos, implicando que es una ecuación algebraica en $s^{1/p}$. Se encuentra que $2p$ es la potencia más grande. Luego, al igual que antes, si existe un divisor común de $2p$, $p + q$ y $p - q$ distinto de 1, se podría reescribir la ecuación (201) como una ecuación algebraica en $s^{m/p}$ de grado $2p/m$.

Por último, para $q < -p$ se multiplica la ecuación (198) por $s^{-\frac{2q}{p}}$ y se reescribe como

$$\kappa + \lambda (s^{1/p})^{-q+p} + \mu (s^{1/p})^{-q-p} + \nu (s^{1/p})^{-2q} = 0. \quad (202)$$

De nuevo, escrita en esta forma, se encuentra que todas las potencias de $s^{1/p}$ son enteros positivos, siendo $-2q$ es la potencia más grande. Así, la ecuación (202) puede reescribirse como una ecuación algebraica en $s^{m/p}$ de grado $-2q/m$, donde m es el máximo común divisor de $-2q$, $-q + p$ and $-q - p$.

Analizando estos resultados se encuentra que el grado algebraico más pequeño que se puede obtener al reescribir la ecuación (71) es precisamente $2\bar{p}/m$, donde m es el máximo común divisor de $2\bar{p}$, $\bar{p} + \bar{q}$ y $\bar{p} - \bar{q}$, y donde \bar{p} y \bar{q} se definen como el máximo y el mínimo del conjunto $\{p, |q|\}$, respectivamente. En todos los casos de a , la ecuación algebraica se escribe en la variable $s^{m/p}$. Una consecuencia inmediata de este resultado es que los casos $a = k$, $a = -k$ y $a = 1/k$, con $k \in \mathbb{Q}$, tienen el mismo grado algebraico dado que todos ellos tienen igual \bar{p} y \bar{q} .

Además, es posible demostrar fácilmente que m solo puede tomar los valores de 1 y 2. Para ver esto, note que dado que p/q es una fracción irreducible, entonces p y q son primos relativos. Por ende, \bar{p} y \bar{q} también son primos relativos. Ahora, si m es divisor de $\bar{p} + \bar{q}$ y $\bar{p} - \bar{q}$, entonces m también es divisor de su suma, que es $2\bar{p}$. Luego, se puede decir que m es simplemente el máximo común divisor solo de $\bar{p} + \bar{q}$ y $\bar{p} - \bar{q}$. Por su parte, el hecho de que m sea un común divisor implica que existen enteros k_1 y k_2 tales que $\bar{p} + \bar{q} = k_1 m$ y $\bar{p} - \bar{q} = k_2 m$. De estas ecuaciones es posible despejar a \bar{p} y \bar{q} como $\bar{p} = (k_1 + k_2)m/2$ y $\bar{q} = (k_1 - k_2)m/2$. Pero, como \bar{p} y \bar{q} deben ser primos relativos, entonces m solo puede tomar los valores de 1 y 2, de lo contrario, m o $m/2$ sería un factor común entre ellos.

Finalmente, para $a = 1$ la ecuación (71) queda como

$$(\tau - u)s^2 + e^v(\tau + u) = 0, \quad (203)$$

que es una ecuación algebraica de grado 2. Este caso coincide con el análisis hecho previamente al considerar $\bar{p} = 1$, $\bar{q} = 1$ y $m = 1$. Así el grado de la ecuación (71) es

$2\bar{p}/m = 2$. Por su parte, para $a = -1$ la ecuación (71) queda como

$$(\tau + u)s^{-2} - e^{-v}(\tau - u) = 0. \quad (204)$$

Multiplicando a ambos lados por $-s^2$ se obtiene

$$e^{-v}(\tau - u)s^2 - (\tau + u) = 0. \quad (205)$$

que es una ecuación algebraica de grado 2. Al igual que antes, este caso coincide con el análisis hecho previamente al considerar $\bar{p} = 1$, $\bar{q} = 1$ y $m = 1$.

B.3. Teorema de existencia de soluciones positivas de la ecuación s

Un teorema subyacente a los resultados de la sección anterior es el siguiente

Teorema 1. *Sean $u, v, a \in \mathbb{R}$ tales que $a > 0$ o $a \leq -1$, y u satisface la condición de existencia del óvalo de Descartes presente en el cuadro 1. Si adicionalmente $a \in \mathbb{Q}$, entonces la ecuación (71) siempre tiene al menos una solución real positiva para s .*

Demostración. Sea p/q la fracción irreducible igual a a con $p > 0$. Ahora considere los dos primeros casos y el último caso de la sección anterior. El primero consiste en $q > p$, para el cual se encontró previamente que las soluciones de la ecuación (71) son raíces del polinomio (cf. ecuación (199))

$$P(Z) := (a\tau - u)Z^{\frac{2q}{m}} + e^{\frac{v}{a}}(\tau - u)Z^{\frac{q+p}{m}} + e^{\frac{v}{a}}(\tau + u)Z^{\frac{q-p}{m}} + e^{\frac{2v}{a}}(a\tau + u), \quad (206)$$

donde m es el máximo común divisor de $q + p$ y $q - p$, y donde $Z = s^{m/p}$. De este polinomio, es posible ver que $(a\tau - u)Z^{\frac{2q}{m}}$ es el término dominante de $P(Z)$ a medida que $Z \rightarrow \infty$. Por lo pronto se considera la condición $u > \min(1, a)|\tau| = a|\tau|$ del cuadro 1, habiendo cambiando \geq por $>$. Así, de esta condición se sigue que $(a\tau - u) < 0$, implicando que $P(Z) \rightarrow -\infty$ cuando $Z \rightarrow \infty$, y que $P(0) = e^{\frac{2v}{a}}(a\tau + u) > 0$. Dado que los polinomios son continuos en \mathbb{R} , en particular lo son en el intervalo $[0, \infty)$. Como P cambia de signo en los límites de este intervalo, entonces

$P(Z)$ se hace cero al menos una vez en el intervalo $(0, \infty)$, es decir, P tiene al menos una raíz positiva. Es importante resaltar que este resultado no garantiza que $Z = s^{m/p} \in (e^{\frac{v}{a+1} \frac{m}{p}}, \infty)$ o que $Z = s^{m/p} \in (0, e^{\frac{v}{a+1} \frac{m}{p}})$.

El caso $u = a|\tau|$ puede estudiarse como el caso límite en que u tiende a $a|\tau|$ por derecha. En este límite se cumple lo mismo que antes, es decir, que $(a\tau - u) < 0$ y que $P(0) > 0$. Por ende, se sigue cumpliendo que P tiene al menos una raíz positiva en el límite en que u tiende a $a|\tau|$ por derecha. En este sentido puede hallarse $s(a|\tau|, v)$ como $s(a|\tau|, v) = \lim_{u \rightarrow a|\tau|+} s(u, v)$. Tiene sentido considerar el caso $u = a|\tau|$ como un límite del caso $u > a|\tau|$, debido a que para $u = a|\tau|$ el óvalo se degenera en un punto, que es el mismo punto en donde se interseca con la sinécdoala (cf. figura 13).

Por otro lado, en el segundo caso $|q| < p$ se encontró previamente que el polinomio asociado a la ecuación (71) es (cf. ecuación (201))

$$Q(Z) := (a\tau - u)Z^{\frac{p+q}{m}} + e^{\frac{v}{a}}(\tau - u)Z^{\frac{2p}{m}} + e^{\frac{v}{a}}(\tau + u) + e^{\frac{2v}{a}}(a\tau + u)Z^{\frac{p-q}{m}}, \quad (207)$$

donde m es el máximo común divisor de $p+q$ y $p-q$, y donde $Z = s^{m/p}$ como antes. En este caso, se encuentra que $e^{\frac{v}{a}}(\tau - u)Z^{\frac{2p}{m}}$ es el término dominante de $Q(Z)$ a medida que $Z \rightarrow \infty$. Se deben considerar dos casos $q > 0$ y $q < 0$. Para $q > 0$ se considera la condición $u > \min(1, a)|\tau| = |\tau|$ del cuadro 1. De ésta se obtiene que $(\tau - u) < 0$, implicando que $Q(Z) \rightarrow -\infty$ cuando $Z \rightarrow \infty$, y que $Q(0) = e^{\frac{v}{a}}(\tau + u) > 0$. Por el mismo argumento de antes, dado que Q es continua y que cambia de signo en el intervalo $[0, \infty)$, entonces existe al menos un $Z \in (0, \infty)$ tal que $Q(Z) = 0$. Es decir, Q tiene al menos una raíz positiva. Para el caso $q < 0$, se considera $u < |\tau|$ del cuadro 1. Al contrario de antes, de ésta condición se encuentra $\tau - u > 0$ y $Q(0) < 0$. Pero, como Q aún cambia de signo en el intervalo de $[0, \infty)$, se concluye lo mismo de antes.

Los casos donde se considera la igualdad en la condición de existencia se pueden tomar casos límites en que u tiende a $|\tau|$ por derecha o por izquierdo de acuerdo al signo de q . Por el mismo argumento anterior, en este límite Q sigue teniendo al

menos una raíz positiva. Esto da por finalizada la demostración

Finalmente, para $a = \pm 1$ se encontró previamente que la ecuación algebraica asociada a la ecuación (71) es la ecuación (203) para $a = 1$ y la ecuación (205) para $a = -1$. En el primer caso, se tiene al polinomio

$$R_+(Z) := (\tau - u)Z^2 + e^v(\tau + u) = 0. \quad (208)$$

En este caso, se considera $u > |\tau|$ por el cuadro 1. De esta condición se obtiene que $(\tau - u) < 0$, implicando que $\lim_{Z \rightarrow \infty} R_+(Z) = -\infty$, y que $R_+(0) = e^v(\tau + u) > 0$. Por ende, R_+ cambia de signo en los límites del intervalo $[0, \infty)$, implicando que tiene una raíz positiva siempre. Por otro lado, para $a = -1$ se tiene al polinomio

$$R_-(Z) := e^{-v}(\tau - u)Z^2 - (\tau + u) = 0. \quad (209)$$

Del cuadro 1 se toma la condición $-|\tau| < u < |\tau|$. Ahora, se consideran dos casos, $\tau > 0$ y $\tau < 0$. Para $\tau > 0$ se encuentra que $R_-(0) = -(\tau + u) < 0$ y que $(\tau - u) > 0$, implicando que $\lim_{Z \rightarrow \infty} R_-(Z) = \infty$. Por ende, R_- cambia de signo en los límites del intervalo $[0, \infty)$. Luego, para $\tau < 0$ se obtiene que $R_-(0) = -(\tau + u) > 0$ y que $(\tau - u) < 0$, implicando que $\lim_{Z \rightarrow \infty} R_-(Z) = -\infty$. Por lo tanto R_- aún cambia de signo en el mismo intervalo de antes. De este modo, debe existir un $Z \in (0, \infty)$ tal que $R_-(Z) = 0$ tanto para $\tau > 0$ como para $\tau < 0$. Aquí se excluye el caso $\tau = 0$, porque en este caso la ecuación del óvalo deja de tener sentido (cf. ecuación (72)). En los casos donde se considera la igualdad en la condición de existencia, pueden tomarse igual que antes. Es decir, como casos límites en que u tiende a $|\tau|$ o $-|\tau|$ por derecha o izquierda. Dando lugar a que en estos límites R_+ y R_- tienen ambos una raíz positiva. Esto da por finalizado la prueba.

□

Para valores de a tales que $-1 < a < 0$ no se pudo probar que el polinomio asociado a la ecuación (71) tuviera siempre una raíz positiva. Esto fue debido a que en este caso dicho polinomio no siempre cambia de signo en los límites del intervalo $[0, \infty)$.

Adicionalmente, la importancia del teorema de esta sección es que sugiere que el óvalo y la sinécdoxa siempre tienen algún punto de intersección. En particular, el teorema muestra que esto es cierto si $a \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{\setminus(-1,0]}$.

La demostración del teorema anterior también permite demostrar el siguiente corolario

Corolario 1. Sean $u, v, a \in \mathbb{R}$ tales que $a > 0$ o $a \leq -1$, y u satisface la condición de existencia del óvalo de Descartes presente en el cuadro 1. Si adicionalmente $a \in \mathbb{Q}$, entonces el polinomio asociado a la ecuación (71) definido por la ecuación (206) si $0 < a < 1$ y por la ecuación (207) si $|a| \geq 1$ siempre tiene al menos una raíz positiva.

B.4. Soluciones de la ecuación s para $a = 1$ y $a = 1/3$

Las últimas secciones permiten inferir el tipo de soluciones de la ecuación (71) y cómo deberían ser para el caso $a \in \mathbb{Q}$. En este apartado, se mostrará la solución explícita de la ecuación (71) para los casos $a = 1$ y $a = 1/3$ usando el método de¹⁰² para resolver la ecuación algebraica resultante. No se considerará el caso $a = 1/2$ porque en éste se obtienen expresiones muy grandes de s con respecto a los casos $a = 1$ y $a = 1/3$. Esto es debido a que se obtiene una ecuación cuártica en s para $a = 1/2$. Además que, si se usa el método de¹⁰³ para resolver esta cuártica, se obtiene que la solución positiva de la ecuación (71) es una complicada función por partes.

B.4.1. Soluciones en el caso $a = 1$ En el caso $a = 1$ la ecuación (71) puede escribirse como

$$(\tau - u)(e^v + 1)s^2 + (\tau + u)(e^v + 1)e^v = 0. \quad (210)$$

¹⁰² D. ZWILLINGER: "CRC Standard Mathematical Tables and Formulae". En: 31st ed. Advances in Applied Mathematics. CRC Press LLC, 2003. Cap. 2.3 Polynomials.

¹⁰³ Ibíd.

Se encuentra que su solución positiva es $s_+ := \sqrt{e^v(u + \tau)/(u - \tau)}$, la cual toma valores reales para $|u| \geq |\tau|$, que es precisamente la condición de existencia del óvalo para $a = 1$ (cf. cuadro 1). Por ende, s_+ toma valores reales en el dominio de interés de u , como debe ser.

Adicionalmente, se desean encontrar soluciones de la ecuación (71) pero con u intercambiado por $-u$, que corresponden a intersecciones en el semi-plano $y < 0$. En este caso, la solución positiva es $\bar{s}_+ := \sqrt{e^v(u - \tau)/(u + \tau)} = s_+(-u, v)$. Al igual que antes, dado que $u \geq |\tau|$, se tiene que \bar{s}_+ toma valores reales.

Es interesante mencionar como quedan las expresiones de $x(u, v)$ y $y(u, v)$ en este caso. Así, al reemplazar $t = \ln s_+$ en las ecuaciones (40) y (41) se obtiene

$$x(u, v) = \frac{e^v(\tau + u) + \tau - u}{2(e^v + 1)}, \quad (211)$$

$$y(u, v) = \frac{\sqrt{e^v(u^2 - \tau^2)}}{e^v + 1} \text{sign}(u + \tau), \quad (212)$$

donde $\text{sign}(u + \tau) = |u + \tau|/(u + \tau)$. Éstas ecuaciones permiten confirmar que $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - \tau)^2 + y^2} = u$ y, más interesante aún, permiten encontrar que

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x - \tau)^2 + y^2} = \tau \tanh(v/2). \quad (213)$$

Por lo tanto, curvas u -constante son elipses confocales y curvas v -constante son tramos de hipérbolas confocales. Esto significa que el sistema de coordenadas ovoideas se reduce al sistema de coordenada elípticas para $a = 1$.

Las ecuaciones (211) y (212) representan además el punto de intersección entre el óvalo y la sinécdola definidos por las ecuaciones (69a) y (69b), respectivamente, sobre el semi-plano $y > 0$. El otro punto de intersección, sobre el semi-plano $y < 0$, se obtiene al intercambiar u por $-u$ en estas ecuaciones debido a que $\bar{s}_+(u, v) = s_+(-u, v)$. De este modo, las ecuaciones (211) y (212) pueden usarse para obtener coordenadas de todo el plano xy al considerar $v \in \mathbb{R}$ y $u \in \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq |\tau| \text{ ó } a < -|\tau|\} = \mathbb{R} \setminus_{[-|\tau|, |\tau|]}$, $u > |\tau|$ correspondiendo a puntos con $y > 0$ y $u < -|\tau|$ correspondiendo a puntos con $y < 0$.

B.4.2. Soluciones en el caso $a = \frac{1}{3}$ Por otro lado, para $a = 1/3$ se puede escribir la ecuación (71) como

$$(\tau - 3u)(s^2)^3 + 3e^{3v}(\tau - u)(s^2)^2 + 3e^{3v}(\tau + u)(s^2) + e^{6v}(\tau + 3u) = 0, \quad (214)$$

que es una ecuación cúbica en s^2 . Siguiendo el procedimiento de¹⁰⁴, que básicamente es el método de Cardano, las tres raíces de esta cúbica son $r_1 = \alpha^{\frac{1}{3}} + \beta^{\frac{1}{3}} - \gamma$, $r_2 = \alpha^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2\pi}{3}i} + \beta^{\frac{1}{3}}e^{\frac{4\pi}{3}i} - \gamma$, y $r_3 = \alpha^{\frac{1}{3}}e^{\frac{4\pi}{3}i} + \beta^{\frac{1}{3}}e^{\frac{2\pi}{3}i} - \gamma$, donde

$$\alpha = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2}, \quad (215)$$

$$\beta = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2}, \quad (216)$$

$$\gamma = \frac{(\tau - u)e^{3v}}{\tau - 3u}, \quad (217)$$

$$p = -\frac{e^{3v}((\tau - u)^2 e^{3v} - (\tau + u)(\tau - 3u))}{(\tau - 3u)^2}, \quad (218)$$

$$q = \frac{2e^{6v}((\tau - u)^3 e^{3v} - (\tau - 3u)(\tau^2 + 3u^2))}{(\tau - 3u)^3}. \quad (219)$$

La cantidad $\Delta = q^2 + 4p^3$ clasifica cada tipo de solución. Si $\Delta > 0$, una raíz es real y las otras dos son complejas, una conjugada de la otra; si $\Delta = 0$, las tres raíces son reales, con al menos dos iguales, y si $\Delta < 0$, entonces las tres raíces son reales y distintas¹⁰⁵. En cualquiera de estos casos se deben buscar las raíces positivas, dado que se necesita que s^2 sea positivo.

Para el caso $\Delta > 0$ es fácil ver que r_1 es la raíz real, dado que en este caso $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ahora, como se probó previamente en la sección B.3, si a es un número racional que no está entre -1 y 0 entonces el polinomio asociado a la ecuación (71) siempre tiene una raíz positiva. Como r_1 es la única raíz real, entonces ésta debe ser positiva por

¹⁰⁴ ZWILLINGER, D. 2003.

¹⁰⁵ *Ibíd.*

consistencia.

Por su parte, para el caso $\Delta = 0$ las tres raíces pueden escribirse como $r_1 = 2\alpha^{\frac{1}{3}} - \gamma$ y $r_2 = r_3 = -\alpha^{\frac{1}{3}} - \gamma$. Además, la condición $\Delta = 0$ puede escribirse como

$$(\tau + 3u)(\tau - u)^3 \psi^2 - 2(\tau^4 - 6\tau^2 u^2 - 3u^4) \psi + (\tau - 3u)(\tau + u)^3 = 0 \quad (220)$$

con $\psi = e^{3v}$. Esta ecuación cuadrática tiene como soluciones $\psi_1 = \frac{(\tau-3u)(\tau+u)^3}{(\tau+3u)(\tau-u)^3}$ y $\psi_2 = 1$. Para $\psi = \psi_1$, las raíces pasan a ser

$$r_1 = -\frac{(\tau - 3u)(\tau + u)^2}{(\tau - u)^2(\tau + 3u)}, \quad (221)$$

$$r_2 = r_3 = -\frac{(\tau + u)^2}{(\tau - u)^2}. \quad (222)$$

Ahora, para $a = 1/3$ la condición de existencia del óvalo es $u \geq |\tau|/3$ (cf. cuadro 1). Entonces, es de interés encontrar soluciones tanto para $u \geq |\tau|/3$ como para $u < -|\tau|/3$. El primer caso permite encontrar intersecciones del óvalo y la sinécdocha para $y > 0$, y el segundo, para $y < 0$. Así, de la condición $|u| \geq |\tau|/3$ es posible mostrar que $r_1 \geq 0$, $r_2 \leq 0$ y $r_3 \leq 0$ en este caso. Por otro lado, para $\psi = \psi_2$ se obtiene $r_1 = -(\tau + 3u)/(\tau - 3u)$ y $r_2 = r_3 = -1$. Debido a que $|u| \geq |\tau|/3$ se obtiene nuevamente que $r_1 \geq 0$. Por lo tanto, se concluye que r_1 es la raíz positiva también para el caso $\Delta = 0$.

Por último, para el caso $\Delta < 0$ se encuentra que α y β pueden escribirse como $\alpha = -\frac{1}{2}q + \frac{i}{2}\sqrt{-\Delta}$ y $\beta = -\frac{1}{2}q - \frac{i}{2}\sqrt{-\Delta}$. Como es mencionado en¹⁰⁶, para este caso las raíces pueden escribirse como

$$r_1 = 2\sqrt{-p} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{-q}{2\sqrt{-p^3}} \right) \right) - \gamma, \quad (223)$$

$$r_2 = 2\sqrt{-p} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{-q}{2\sqrt{-p^3}} \right) + \frac{2\pi}{3} \right) - \gamma, \quad (224)$$

¹⁰⁶ ZWILLINGER, D. 2003.

$$r_3 = 2\sqrt{-p} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{-q}{2\sqrt{-p^3}} \right) - \frac{2\pi}{3} \right) - \gamma. \quad (225)$$

Para lo cual se debe considerar la fórmula de De Moivre y el hecho de que el argumento complejo de α es $\arg(\alpha) = \arccos \left(\frac{-q}{2\sqrt{-p^3}} \right) = -\arg(\beta)$. Dado que $\arccos(x) \in [0, \pi]$ se tiene que $\cos(\Phi + \frac{2\pi}{3}) \in [-1, -\frac{1}{2}]$, donde $\Phi = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{-q}{2\sqrt{-p^3}} \right)$. Por lo tanto, cuando $\gamma \geq 0$ se obtiene inmediatamente que $r_2 < 0$. Se encuentra que la condición $\gamma < 0$ implica que $u \in (\tau/3, \tau)$ si $\tau > 0$ y que $u \in (\tau, \tau/3)$ si $\tau < 0$. Para este resultado se usó el hecho de que u debe cumplir $|u| > |\tau|/3$ por la condición de existencia. Ahora, usando el hecho de que $\cos(\Phi + \frac{2\pi}{3}) \leq -\frac{1}{2}$, se tiene que $r_2 \leq -\sqrt{-p} - \gamma$. Luego, se escribe $\sqrt{-p}$ como

$$\sqrt{-p} = \frac{e^{\frac{3v}{2}} \sqrt{(\tau - u)^2 e^{3v} - (\tau + u)(\tau - 3u)}}{|\tau - 3u|}. \quad (226)$$

De aquí es posible mostrar que $-(\tau + u)(\tau - 3u) \geq 0$ para los dos casos mencionados antes donde $\gamma < 0$. Consecuentemente

$$\sqrt{-p} \geq \frac{e^{\frac{3v}{2}} \sqrt{(\tau - u)^2 e^{3v}}}{|\tau - 3u|} = \frac{e^{3v} |\tau - u|}{|\tau - 3u|} = |\gamma|. \quad (227)$$

Como $\gamma < 0$, se tiene que $r_2 \leq -|\gamma| - \gamma = 0$. Por ende, $r_2 \leq 0$ también para $\gamma < 0$. Si además se demostrara que $r_3 \leq 0$, entonces por consistencia con el corolario 1 se tendría que $r_1 > 0$.

A continuación se hará una demostración indirecta de esto. Para lo cual se debe considerar el polinomio asociado a la ecuación (214), que es

$$P(Z) = (\tau - 3u)Z^3 + 3e^{3v}(\tau - u)Z^2 + 3e^{3v}(\tau + u)Z + e^{6v}(\tau + 3u) = 0. \quad (228)$$

Los puntos críticos de P , donde $P'(Z) = 0$, son

$$Z_{\pm} := -\frac{(\tau - u)e^{3v}}{\tau - u} \pm \sqrt{-p}. \quad (229)$$

Usando la ecuación (219) se puede escribir

$$Z_- = - \left[\frac{q}{2} + \frac{e^{6v}(\tau^2 + 3u^2)}{(\tau - 3u)^2} \right]^{1/3} - \sqrt{-p} \leq - \left(\frac{q}{2} \right)^{1/3} - \sqrt{-p}. \quad (230)$$

Ahora, usando el hecho de que $\Delta = q^2 + 4p^3 < 0$ y $q \in \mathbb{R}$, se tiene que $0 < q^2 < -4p^3$. De esto es posible mostrar que $-2\sqrt{-p} < \left(\frac{q}{2}\right)^{1/3} - \sqrt{-p} < 0$. Por lo tanto, de la ecuación (230) se tiene que $Z_- < 0$. Por otro lado, se encuentra que

$$Z_- Z_+ = \frac{e^{3v}(\tau + u)}{\tau - 3u}. \quad (231)$$

Así, algunas veces Z_+ será positivo y otras veces será negativo, dependiendo del signo de $(\tau + u)/(\tau - 3u)$. Por otra parte, para estudiar si Z_+ o Z_- es un máximo o mínimo local, se evalúa Z_{\pm} en la segunda derivada de P . Esto da lugar a

$$P''(Z_{\pm}) = \pm 6(\tau - 3u)\sqrt{-p}. \quad (232)$$

Por lo tanto, mientras que un punto crítico es un máximo local, el otro es un mínimo local, como deber ser. Por su parte, también es posible mostrar que

$$P(Z_{\pm}) = (\tau - 3u) \left(\mp 2\sqrt{-p^3} + q \right). \quad (233)$$

Como se mencionó antes, la condición $\Delta < 0$ implica que $0 < q^2 < -4p^3$. Por ende, de esta se puede mostrar que $-2\sqrt{-p^3} + q < 0$ y $2\sqrt{-p^3} + q > 0$. Con lo cual

$$P(Z_+)P(Z_-) < 0, \quad (234)$$

es decir, mientras que $P(Z_+)$ es positivo, $P(Z_-)$ es negativo, y viceversa. Además, también se tiene que

$$P(Z_{\pm})P''(Z_{\pm}) < 0, \quad (235)$$

implicando que si $P(Z_{\pm})$ es positivo, entonces $(Z_{\pm}, P(Z_{\pm})) := A_{\pm}$ es un máximo local, y cuando $P(Z_{\pm})$ es negativo, entonces A_{\pm} es un mínimo local. El hecho de

que $P(Z_+)P(Z_-) < 0$ implica que debe haber una raíz de P entre Z_- y Z_+ . Como A_+ y A_- corresponden a máximos y mínimos locales, entonces las otras dos raíces¹⁰⁷ de P están en los intervalos $(-\infty, Z_-)$ y (Z_+, ∞) . La raíz en $(-\infty, Z_-)$ siempre será negativa dado que $Z_- < 0$.

Los resultados anteriores permiten realizar el siguiente análisis. En el caso $u > |\tau|$ se encuentra que $Z_+ > 0$ y que A_+ es un máximo local, con $P(Z_+) > 0$. Como $P(0) = e^{6v}(\tau + 3u) > 0$, entonces necesariamente la raíz entre Z_- y Z_+ está en el intervalo $(Z_-, 0)$, dado que P es monótonamente creciente en el intervalo $[Z_-, Z_+]$. Con lo cual, P tiene dos raíces negativas cuando $u > |\tau|$. En el cuadro 4 se muestran los signos de Z_+ , $P(Z_+)$ y $P(0)$ para los demás casos de u . De este cuadro se encuentra que el signo de $P(Z_+)$ siempre es igual al signo de $P(0)$. Con lo cual, P no se anula en el intervalo entre 0 y Z_+ . Cuando $Z_+ > 0$, este hecho garantiza que la raíz en (Z_-, Z_+) sea negativa, mientras que cuando $Z_+ < 0$, ya se tiene que dicha raíz es negativa por defecto. Lo anterior muestra que P siempre tiene dos raíces negativas, y por el corolario 1, la otra raíz debe ser positiva.

Tabla 4. Signos de algunas cantidades relacionadas con los extremos relativos de P . En este cuadro $\text{sign}(Z_+) = -\text{sign}\left(\frac{\tau+u}{\tau-3u}\right)$, $\text{sign}(P(Z_+)) = -\text{sign}(\tau - 3u)$ y $\text{sign}(P(0)) = \text{sign}(\tau + 3u)$, donde $\text{sign}(x) = x/|x|$. Por la condición de existencia del óvalo para $a = 1/3$ se considera $|u| > |\tau|/3$ (cf. cuadro 1).

u	τ	$\text{sign}(Z_+)$	$\text{sign}(P(Z_+))$	$\text{sign}(P(0))$
$ \tau /3 < u < \tau $	$\tau > 0$	+1	+1	+1
	$\tau < 0$	-1	-1	-1
$u > \tau $	$\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	+1	+1	+1
$- \tau < u < - \tau /3$	$\tau > 0$	-1	-1	-1
	$\tau < 0$	+1	+1	+1
$u < - \tau $	$\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	+1	-1	-1

Como ya se vio antes, r_2 es una de las raíces negativas. Ahora, usando el hecho de que $\cos\left(\Phi - \frac{2\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}$, donde $\Phi = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{-q}{2\sqrt{-p^3}}\right)$, se tiene que

$$r_3 \leq \sqrt{-p} - \gamma = Z_+. \quad (236)$$

¹⁰⁷ Recuerde que como $\Delta < 0$, entonces la cúbica dada por la ecuación (214) tiene tres raíces reales.

Por ende, r_3 es la otra raíz negativa que hacía falta. Esto implica a su vez que r_1 debe ser la raíz positiva.

Por lo tanto, de todo lo anterior se concluye que r_1 es siempre la única raíz positiva de la ecuación (214) para cualquier $v \in \mathbb{R}$ y u tal que $|u| \geq |\tau|/3$. Así, r_1 es la única raíz que puede asociarse con un punto de intersección entre el óvalo y la sinécdoala definidos por las ecuaciones (69a) y (69b), respectivamente. Dicho punto de intersección se obtiene al considerar $s = e^t = \sqrt{r_1}$ en las ecuaciones (40) y (41), donde el caso $u > |\tau|/3$ da lugar al punto de intersección arriba del eje x , y el caso $u < -|\tau|/3$ da lugar al punto de intersección debajo del eje x .

C. RELACIONES ASOCIADAS A LAS DERIVADAS DE Λ Y Υ

En este apéndice se encuentran varias relaciones que describen las funciones $\Lambda(u, v)$ y $\Upsilon(u, v)$, definidas en el capítulo 3. Primero, en la sección C.1 se encuentran unas expresiones que relacionan a las derivadas de segundo y tercer orden consigo mismas y con las derivadas de orden inferior. Esto se hace al considerar el comentario debajo de las ecuaciones (85)–(88), en donde se puede notar que se cumple que $\Lambda_v = \Upsilon\Upsilon_u$ y $\Upsilon_v = -\Upsilon\Lambda_u$. Luego, en la sección C.2 se describirá el procedimiento para escribir todas las derivadas de Λ y Υ en términos de ellas mismas. Dado que $\Lambda = z$ y $\Upsilon = \sqrt{x^2 + y^2}$ (cf. ecuaciones (79)–(81)), este método es efectivo para determinar si alguna expresión que involucra Λ , Υ y sus derivadas es cero o no, sin la necesidad de reemplazar la dependencia explícita de Λ y Υ con u y v .

Estas dos estrategias nos permiten simplificar bastante las expresiones encontradas en las ecuaciones de campo de Einstein, sin la necesidad de escribir explícitamente a Λ y Υ en función de u y v . Esto es muy útil debido a que en general éstas relaciones explícitas son muy extensas algebraicamente.

C.1. Relaciones entre las segundas y terceras derivadas de Λ y Υ

Aquí se hallarán las relaciones entre las derivadas de segundo y tercer orden de Λ y Υ . Para hacer esto se empieza por retomar las ecuaciones encontradas en la sección 3.3, que son

$$\Lambda_v = \Upsilon\Upsilon_u, \quad (237a)$$

$$\Upsilon_v = -\Upsilon\Lambda_u, \quad (237b)$$

cf. ecuaciones (85)–(88). Así, las primeras derivadas de Λ y Υ están relacionadas entre sí. Se pueden hallar relaciones similares a éstas para las derivadas del segundo y tercer orden a partir de estas dos ecuaciones. Para lo cual se debe empezar por derivar las ecuaciones (237a) y (237b) a ambos lados en u o v .

Haciendo esto se obtienen un total de 4 ecuaciones, las cuales se reescriben de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\Lambda_{uu} &= -(\Upsilon_{uv} + \Upsilon_u \Lambda_u) \Upsilon^{-1}, \quad \Upsilon_{uu} = (\Lambda_{uv} - \Upsilon_u^2) \Upsilon^{-1}, \quad \Lambda_{vv} = \Upsilon_v \Upsilon_u + \Upsilon \Upsilon_{uv}, \\ \Upsilon_{vv} &= -\Upsilon_v \Lambda_u - \Upsilon \Lambda_{uv}.\end{aligned}\tag{238}$$

Luego, al reemplazar las ecuaciones (237a) y (237b) para que no aparezcan Λ_v y Υ_v se encuentra

$$\Lambda_{uu} = -(\Upsilon_{uv} + \Upsilon_u \Lambda_u) \Upsilon^{-1}, \tag{239a}$$

$$\Upsilon_{uu} = (\Lambda_{uv} - \Upsilon_u^2) \Upsilon^{-1}, \tag{239b}$$

$$\Lambda_{vv} = \Upsilon (\Upsilon_{uv} - \Upsilon_u \Lambda_u), \tag{239c}$$

$$\Upsilon_{vv} = \Upsilon (\Lambda_u^2 - \Lambda_{uv}). \tag{239d}$$

Éstas ecuaciones expresan las relaciones que guardan las derivadas de segundo orden de Λ y Υ entre sí. En el capítulo 5 se muestra que estas relaciones nos permiten simplificar bastante las ecuaciones de campo de Einstein que se obtienen. Por otro lado, para las relaciones de tercer orden se pueden derivar las ecuaciones (239) con respecto a u o v para obtener un total de 8 ecuaciones. Para esto, considere primero los casos donde se obtienen derivadas cruzadas. Al derivar las ecuaciones (239b) y (239a) con respecto a v se encuentra

$$\Upsilon_{uuv} = (\Lambda_{uvv} - 2\Upsilon_{uv} \Upsilon_u - \Lambda_u (\Upsilon_u^2 - \Lambda_{uv})) \Upsilon^{-1}, \tag{240a}$$

$$\Lambda_{uuv} = -(\Upsilon_{uuv} + 2\Upsilon_{uv} \Lambda_u + \Upsilon_u (\Lambda_u^2 + \Lambda_{uv})) \Upsilon^{-1}, \tag{240b}$$

donde se han reemplazado las ecuaciones (237) y (239) para eliminar X_v , X_{uu} y X_{vv} , con $X = \Lambda, \Upsilon$. Los demás casos posibles dan lugar a ecuaciones linealmente dependientes a estas dos.

Luego, al derivar las ecuaciones (239a) y (239b) con respecto a u y al derivar las

ecuaciones (239c) y (239d) con respecto a v se obtiene respectivamente

$$\Lambda_{uuu} = (4(\Lambda_u \Upsilon_u + \Upsilon_{uv}) \Upsilon_u - 2\Lambda_u \Lambda_{uv} - \Lambda_{uvv}) \Upsilon^{-2}, \quad (241a)$$

$$\Upsilon_{uuu} = \left((3\Upsilon_u^2 - 4\Lambda_{uv}) \Upsilon_u - (2\Upsilon_{uv} - \Upsilon_u \Lambda_u) \Lambda_u - \Upsilon_{uvv} \right) \Upsilon^{-2}, \quad (241b)$$

$$\Lambda_{vvv} = \Upsilon \left((\Lambda_u^2 - \Lambda_{uv}) \Upsilon_u - 2\Lambda_u \Upsilon_{uv} + \Upsilon_{uvv} \right), \quad (241c)$$

$$\Upsilon_{vvv} = -\Upsilon \left((\Lambda_u^2 - 3\Lambda_{uv}) \Lambda_u + \Lambda_{uvv} \right), \quad (241d)$$

donde se han reemplazando las ecuaciones (237), (239) y (240) al igual que antes. Como se ha mencionado previamente, estas relaciones permiten simplificar muchas expresiones que aparecen al intentar resolver las ecuaciones de Einstein.

C.2. Derivadas de Λ y Υ en función de sí mismas

En esta sección se extenderán los resultados de la sección 3.3 para incluir las relaciones entre las derivadas de n -ésimo orden de Λ y Υ en términos solo de ellas mismas. Para empezar con las relaciones de segundo orden se deriva

$$\Lambda_u = \frac{-\left(\sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} a (\tau - \Lambda) - \Lambda \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2}\right)}{2a(\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) + (a^2 + 1) \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2}}, \quad (242)$$

$$\Upsilon_u = \frac{\Upsilon \left(\sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} a + \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} \right)}{2a(\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) + (a^2 + 1) \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2}}, \quad (243)$$

$$\Lambda_v = \frac{\Upsilon^2 \left(\sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} a + \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} \right)}{2a(\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) + (a^2 + 1) \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2}}, \quad (244)$$

$$\Upsilon_v = \frac{\Upsilon \left(\sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} a (\tau - \Lambda) - \Lambda \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} \right)}{2a(\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) + (a^2 + 1) \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2}}. \quad (245)$$

con respecto a u y v a ambos lados. Del lado izquierdo obtenemos las derivadas de segundo orden X_{uu} , X_{uv} y X_{vv} , mientras que del lado derecho aparecen cantidades de la forma X , X_u y X_v , con $X = \Lambda, \Upsilon$. Dado que se conocen cómo se escriben las

derivadas de primer orden respecto a Λ y Υ , se obtiene

$$\Lambda_{uu} = a\tau^3\Upsilon^2 (a^2 - 1) \left[2a (\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) + \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} \right. \\ \left. \times (a^2 + 1) \right]^{-3}, \quad (246)$$

$$\Upsilon_{uu} = -a\tau^2\Upsilon \left((a^2 + 1) (\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) + 2a\sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} \right) \\ \times \left[2a (\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) + \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} (a^2 + 1) \right]^{-3}, \quad (247)$$

$$\Lambda_{vv} = \Upsilon^2 \left\{ a \left[(2\tau (9a^2 + 11) - 8 (a^2 + 1) \Lambda) \Lambda^4 - 16 (a^2 + 1) \Upsilon^2 \Lambda^3 \right. \right. \\ \left. \left. - 4 (3a^2 + 5) \tau^2 \Lambda^3 + 2\tau (12 (a^2 + 1) \Upsilon^2 + \tau^2 (a^2 + 3)) \Lambda^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 4 (3\tau^2 + 2\Upsilon^2) \Upsilon^2 (a^2 + 1) \Lambda + (2 (3a^2 + 1) \Upsilon^2 + \tau^2 (a^2 + 3)) \tau \Upsilon^2 \right] \right. \\ \left. - \left[2 ((1 + a^4 + a^2) (\Lambda^2 + \Upsilon^2) + \tau^2 (3a^2 + 1)) \Lambda - 2\tau a^2 \Upsilon^2 (a^2 + 3) \right. \right. \\ \left. \left. - 2\tau (a^4 + 9a^2 + 2) \Lambda^2 \right] \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} \right\} \\ \times \left[2a (\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) + \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} (a^2 + 1) \right]^{-3}, \quad (248)$$

$$\Upsilon_{vv} = \Upsilon \left\{ a \left[4\Lambda^4 (a^2 + 1) (\Lambda^2 - 3\tau\Lambda + 3\tau^2 + \Upsilon^2) - 4\tau (3a^2 + 1) \Upsilon^2 \Lambda^3 \right. \right. \\ \left. \left. - 4\tau^3 (a^2 + 1) \Lambda^3 - (4 (a^2 + 1) \Upsilon^2 - 13a^2 - 1) \Upsilon^2 \Lambda^2 + 8\tau \Upsilon^4 \Lambda \right. \right. \\ \left. \left. - \tau^3 \Upsilon^2 \Lambda (5a^2 + 1) - (4 (a^2 + 1) \Upsilon^2 - \tau^2 (a^2 - 3)) \Upsilon^4 \right] \right. \\ \left. + \left[-2 (a^4 - 1) \tau \Upsilon^2 \Lambda + \tau^2 \Upsilon^2 (a^4 + 2a^2 - 1) + (a^4 + 6a^2 + 1) \right. \right. \\ \left. \left. \times (\Lambda^4 - 2\tau \Lambda^3 + \tau^2 \Lambda^2 - \Upsilon^4) \right] \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} \right\} \\ \times \left[2a (\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) + \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2} \sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} (a^2 + 1) \right]^{-3}, \quad (249)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{uv} = & \Upsilon^2 \left\{ a \left[4(a^2 + 1)\Lambda^4 - 2\tau(3a^2 + 5)\Lambda^3 + 8(a^2 + 1)\Upsilon^2\Lambda^2 \right. \right. \\
& + \tau^2(a^2 + 7)\Lambda^2 + (2(-3a^2 - 5)\Upsilon^2 + \tau^2(a^2 - 1))\tau\Lambda \\
& \left. \left. + (4(a^2 + 1)\Upsilon^2 + \tau^2(a^2 + 3))\Upsilon^2 \right] + ((a^4 + 6a^2 + 1)(\Lambda^2 + \Upsilon^2) \right. \\
& \left. - 2\tau(3a^2 + 1)\Lambda - \tau^2(a^2 - 1))\sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2}\sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} \right\} \\
& \times \left[2a(\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) + \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2}\sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2}(a^2 + 1) \right]^{-3}, \quad (250)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{uv} = & \Upsilon \left\{ a \left[(\tau(9a^2 + 11)\Lambda - 4(a^2 + 1)(\Lambda^2 + 2\Upsilon^2))\Lambda^3 \right. \right. \\
& - \tau^2((6a^2 + 10)\Lambda^3 - 2\tau\Upsilon^2) - (6\tau^2 + 4\Upsilon^2)(a^2 + 1)\Upsilon^2\Lambda \\
& \left. \left. + \tau(12(a^2 + 1)\Upsilon^2 + \tau^2(a^2 + 3))\Lambda^2 - \tau(3a^2 + 1)\Upsilon^4 \right] \right. \\
& \left. + \left[a^2\tau\Upsilon^2(a^2 + 3) + \tau((a^4 + 9a^2 + 2)\Lambda - \tau(3a^2 + 1))\Lambda \right. \right. \\
& \left. \left. - (1 + a^4 + 6a^2)\Lambda(\Lambda^2 + \Upsilon^2) \right] \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2}\sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2} \right\} \\
& \times \left[2a(\Lambda^2 + \Upsilon^2 - \Lambda\tau) + \sqrt{\Lambda^2 + \Upsilon^2}\sqrt{(\Lambda - \tau)^2 + \Upsilon^2}(a^2 + 1) \right]^{-3}, \quad (251)
\end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que $\Upsilon > 0$. Del mismo modo se puede proceder para hallar las derivadas de tercer orden en función solo de Λ y Υ . Así, podemos encontrar sucesivamente las demás derivadas de orden superior. Dado que las ecuaciones de campo de Einstein involucran derivadas de la métrica hasta el segundo orden, en este trabajo solo son de interés las relaciones de las derivadas hasta el tercer orden.

D. ANSATZ MÉTRICO ESTACIONARIO Y OVOIDALMENTE SIMÉTRICO

Aquí se encuentra en detalle la métrica estacionaria y axialmente simétrica más general g que satisfaga la ecuación (101), donde $\mathbf{u} = U\partial_t + V\partial_\phi$ y donde h está dada por la ecuación (105). Se seguirá un procedimiento parecido al hecho en¹⁰⁸. Con la métrica dada por la ecuación (104), el dual métrico de \mathbf{u} , definido como $\underline{\mathbf{u}} = g(\cdot, \mathbf{u})$, es igual a

$$\underline{\mathbf{u}} = (g_{00}U + g_{03}V) dt + (g_{03}U + g_{33}V) d\phi. \quad (252)$$

Con esto, se calcularán las componentes de $\gamma \equiv g + \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}}$ para luego usar la ecuación (101).

Dado que $\underline{\mathbf{u}}$ solo tiene componentes en dt y $d\phi$, las componentes de γ en dx^A son $\gamma_{AB} = g_{AB}$, y sus demás componentes son

$$\gamma_{00} = g_{00} + g_{00}(g_{00}U^2 + 2g_{03}UV) + g_{03}^2V^2, \quad (253a)$$

$$\gamma_{03} = g_{03} + g_{03}(g_{00}U^2 + g_{33}V^2) + g_{00}g_{33}UV + g_{03}^2UV, \quad (253b)$$

$$\gamma_{33} = g_{33} + g_{03}^2U^2 + g_{33}(2g_{03}UV + g_{33}V^2). \quad (253c)$$

Luego, las cantidades entre paréntesis pueden simplificarse con la condición de normalización de \mathbf{u}

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = g_{00}U^2 + 2g_{03}UV + g_{33}V^2 = -1. \quad (254)$$

Al reemplazarla en las expresiones en paréntesis, las componentes de γ quedan

¹⁰⁸ KRASIŃSKI, A. 1978.

como

$$\gamma_{00} = - (g_{00}g_{33} - g_{03}^2) V^2, \quad (255a)$$

$$\gamma_{03} = (g_{00}g_{33} - g_{03}^2) UV, \quad (255b)$$

$$\gamma_{33} = - (g_{00}g_{33} - g_{03}^2) U^2. \quad (255c)$$

Esto permite escribir

$$\gamma_{MN} \mathbf{d}\mathbf{x}^M \otimes \mathbf{d}\mathbf{x}^N = - (g_{00}g_{33} - g_{03}^2) U^2 \left(\mathbf{d}\phi - \frac{V}{U} \mathbf{d}t \right) \otimes \left(\mathbf{d}\phi - \frac{V}{U} \mathbf{d}t \right), \quad (256)$$

donde $M, N = 0, 3$.

Finalmente, al comparar las componentes de γ con las de h (cf. ecuación (105)) se encuentra

$$g_{11} = f^2 \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right), \quad (257)$$

$$g_{22} = k^2 \Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right). \quad (258)$$

$$g_{12} = 0, \quad (259)$$

$$- (g_{00}g_{33} - g_{03}^2) U^2 = k^2 \Upsilon^2, \quad (260)$$

$$\mathbf{d}\Phi = \mathbf{d}\phi - \frac{V}{U} \mathbf{d}t. \quad (261)$$

En¹⁰⁹, también se halla una ecuación parecida a la ecuación (261). A primera vista, $\mathbf{d}\Phi$ resulta ser una forma inexacta pues no es posible integrarla para obtener Φ consistentemente. Esto implica que Φ no puede considerarse como una coordenada en los espacios locales en reposo si $V \neq 0$.

Por otra parte, para terminar de hallar las componentes de g_{MN} se debe considerar la ecuación (260) y la condición de normalización de u dada por la ecuación (254). De estas dos, se puede solucionar para dos componentes de g_{MN} , dejando una

¹⁰⁹ KRASIŃSKI, A. 1978.

indeterminada. Dado que el paso de una métrica inducida h a una general g no es único, es de esperarse que esto ocurra.

Al resolver el sistema de dos ecuaciones, se observa que lo más conveniente es dejar g_{33} como la variable indeterminada, pues esto permite llevar la métrica g al límite estático de manera más simple. De este modo, la solución del sistema 2×2 es

$$g_{00} = \frac{V^2 g_{33} \pm 2V \sqrt{k^2 \Upsilon^2 - g_{33}} - 1}{U^2}, \quad (262)$$

$$g_{03} = -\frac{g_{33} V \pm \sqrt{k^2 \Upsilon^2 - g_{33}}}{U}, \quad (263)$$

donde el signo $+$ o $-$ debe tomarse simultáneamente en estas dos ecuaciones. Lo más razonable sería tomar el signo menos para asegurarse que $g_{00} < 0$.

Reagrupando términos, la métrica de la ecuación (104) puede escribirse como

$$\begin{aligned} g = & g_{00} (\mathbf{dt} + \omega \mathbf{d}\phi) \otimes (\mathbf{dt} + \omega \mathbf{d}\phi) + f^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \mathbf{du} \otimes \mathbf{du} \\ & + k^2 \Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \mathbf{dv} \otimes \mathbf{dv} + A^2 \mathbf{d}\phi \otimes \mathbf{d}\phi, \end{aligned} \quad (264)$$

donde A y ω están dados por

$$A^2 = -\frac{k^2 \Upsilon^2}{g_{00} U^2}, \quad (265)$$

$$\omega = -\frac{g_{33} V \pm \sqrt{k^2 \Upsilon^2 - g_{33}}}{g_{00} U}, \quad (266)$$

y g_{00} está dado por la ecuación (262). Por convención, se puede definir $g_{00} = -J^2$. Por definición, U , V y g_{33} son funciones arbitrarias que no dependen unas de otras. Para probar si J , A y ω pueden considerarse del mismo modo basta con encontrar la dependencia funcional de U , V y g_{33} respecto a ellas.

De la ecuación (265) se encuentra

$$U = \frac{k\Upsilon}{AJ}, \quad (267)$$

donde se tomó por convención $k, A, J > 0$. Se considera además esta solución porque ella garantiza que $U > 0$, que a su vez implica que u es futuro dirigido. Por

otra parte, de la ecuación (264) uno se da cuenta fácilmente que

$$g_{33} = A^2 - J^2\omega^2. \quad (268)$$

Finalmente, al dividir la ecuación (266) entre la ecuación (265) se llega a

$$\frac{\omega}{A^2} = \frac{U \left(g_{33}V \pm \sqrt{k^2 - g_{33}} \right)}{k^2\Upsilon^2}. \quad (269)$$

Al reemplazar las ecuaciones (267) y (268) y al despejar a V se obtiene

$$V = \frac{J\omega k\Upsilon \mp A\sqrt{k^2\Upsilon^2 - A^2 + J^2\omega^2}}{A(A^2 - J^2\omega^2)}. \quad (270)$$

Para que V tome valores reales se necesita que $k^2\Upsilon^2 \geq A^2 - J^2\omega^2$, y para que g_{33} sea positivo se necesita además que $A^2 - J^2\omega^2 > 0$.

E. SOLUCIÓN MÁS GENERAL DE LA ECUACIÓN DE KILLING PARA EL ANSATZ MÉTRICO ESTÁTICO Y OVOIDAL

Aquí se presenta la demostración de que la solución más general de la ecuación de Killing (110) para el ansatz métrico estático y ovoidal de la ecuación (111) es simplemente $\xi = c_1 \partial_t + c_2 \partial_\phi$ con c_1 y c_2 constantes. Para lo cual, se retomarán los cálculos iniciados en la sección 4.4. Se recomienda leer ésta sección antes de continuar con este apartado.

Así, retomando los cálculos vistos previamente en la sección 4.4, se tiene que al reemplazar las ecuaciones (125) y (126) en las ecuaciones (113)–(120) se obtienen en el mismo orden las ecuaciones

$$e^{2B} \Xi \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \xi_{,\phi t}^3 + e^{2B} \Sigma \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \xi_{,tt}^0 - \xi_{,u}^0 e^{2A} = 0, \quad (271)$$

$$e^{2C} \Theta \Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \xi_{,\phi t}^3 + \zeta e^{2C} \Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \xi_{,tt}^0 - \xi_{,v}^0 e^{2A} = 0, \quad (272)$$

$$\xi_{,t}^3 e^{2C} \Upsilon^2 - \xi_{,\phi}^0 e^{2A} = 0, \quad (273)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \Upsilon \Xi \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \xi_{,\phi u}^3 + \Upsilon \Sigma \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \xi_{,tu}^0 + [(\Upsilon \Upsilon_u \Theta - \Lambda_u \Xi) \Upsilon_{uv} \right. \\ & + (\Upsilon \Lambda_u \Theta + \Xi \Upsilon_u) \Lambda_{uv} + \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) (-\Xi \Upsilon_u + \Upsilon (B_u \Xi + B_v \Theta + \Xi_u))] \xi_{,\phi}^3 \\ & + [(\Upsilon \Upsilon_u \zeta - \Lambda_u \Sigma) \Upsilon_{uv} + (\Upsilon \Lambda_u \zeta + \Sigma \Upsilon_u) \Lambda_{uv} + \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \\ & \left. \times (-\Sigma \Upsilon_u + \Upsilon (B_v \zeta + B_u \Sigma + \Sigma_u))] \xi_{,t}^0 \right\} 2e^{2B} \Upsilon^{-1} = 0, \end{aligned} \quad (274)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ e^{2C} \Upsilon^2 \xi_{,\phi u}^3 \Theta + \xi_{,\phi v}^3 \Xi e^{2B} + e^{2C} \Upsilon^2 \xi_{,tu}^0 \zeta + \xi_{,tv}^0 \Sigma e^{2B} + (\Xi_v \xi_{,\phi}^3 + \Sigma_v \xi_{,t}^0) e^{2B} \right. \\ & \left. + \Upsilon^2 e^{2C} (\Theta_u \xi_{,\phi}^3 + \zeta_u \xi_{,t}^0) \right\} \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (275)$$

$$e^{2B} \Xi \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \xi_{,\phi \phi}^3 + e^{2B} \Sigma \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \xi_{,\phi t}^0 + \xi_{,u}^3 e^{2C} \Upsilon^2 = 0, \quad (276)$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \Upsilon \Theta \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \xi_{,\phi v}^3 + \Upsilon \zeta \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \xi_{,tv}^0 + [(\Upsilon \Upsilon_u \Theta - \Lambda_u \Xi) \Upsilon_{uv} \right. \\
& + (\Upsilon \Lambda_u \Theta + \Xi \Upsilon_u) \Lambda_{uv} + \Upsilon \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) (C_u \Xi + C_v \Theta - \Lambda_u \Theta + \Theta_v)] \xi_{,\phi}^3 \\
& + [(\Upsilon \zeta \Upsilon_u - \Lambda_u \Sigma) \Upsilon_{uv} + (\Upsilon \zeta \Lambda_u + \Sigma \Upsilon_u) \Lambda_{uv} + \Upsilon \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \\
& \left. \times (C_v \zeta - \zeta \Lambda_u + C_u \Sigma + \zeta_v)] \xi_{,t}^0 \right\} 2\Upsilon e^{2C} = 0, \tag{277}
\end{aligned}$$

$$\Upsilon^2 e^{2C} \left(\Theta \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \xi_{,\phi\phi}^3 + \zeta \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \xi_{,\phi t}^0 + \xi_{,v}^3 \right) = 0, \tag{278}$$

donde los subíndices después de la coma indican derivada parcial.

De estas ecuaciones es evidente que se pueden relacionar derivadas de segundo orden con derivadas de primer orden. Por ejemplo, de las ecuaciones (271) y (272) se puede encontrar $\xi_{,tt}^0$ y $\xi_{,\phi t}^3$ en términos de $\xi_{,u}^0$ y $\xi_{,v}^0$ considerando éstas dos ecuaciones como un sistema lineal 2×2 . Así, de las ecuaciones (271) y (272) se obtiene

$$\xi_{,tt}^0 = \frac{e^{2A-2B} \Upsilon^2 \Theta \xi_{,u}^0 - e^{2A-2C} \Xi \xi_{,v}^0}{\Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) (\Theta \Sigma - \zeta \Xi)}, \tag{279}$$

$$\xi_{,\phi t}^3 = \frac{-e^{2A-2B} \Upsilon^2 \zeta \xi_{,u}^0 + e^{2A-2C} \Sigma \xi_{,v}^0}{\Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) (\Theta \Sigma - \zeta \Xi)}. \tag{280}$$

Del mismo modo, de las ecuaciones (276) y (278) se encuentra

$$\xi_{,\phi\phi}^3 = \frac{-\zeta \Upsilon^2 e^{-2B+2C} \xi_{,u}^3 + \xi_{,v}^3 \Sigma}{(\zeta \Xi - \Theta \Sigma) \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right)}, \tag{281}$$

$$\xi_{,\phi t}^0 = \frac{\Theta \Upsilon^2 e^{-2B+2C} \xi_{,u}^3 - \xi_{,v}^3 \Xi}{(\zeta \Xi - \Theta \Sigma) \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right)}. \tag{282}$$

Luego, de las ecuaciones (274) y (275) es posible despejar a $\xi_{,tu}^0$ y $\xi_{,\phi u}^3$ como

$$\begin{aligned} \xi_{,tu}^0 = & \left\{ -\Xi \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \left(\Sigma_v \xi_{,t}^0 + \Sigma \xi_{,tv}^0 + \Xi_v \xi_{,\phi}^3 + \Xi \xi_{,\phi v}^3 \right) e^{2B-2C} + \Upsilon \left[\Theta \left(\Upsilon \Upsilon_u \Theta \right. \right. \right. \\ & - \Lambda_u \Xi \Upsilon_{uv} + \Theta \left(\Upsilon \Lambda_u \Theta + \Xi \Upsilon_u \right) \Lambda_{uv} + \left(-\Upsilon_u \Xi \Theta + \Upsilon \left(B_u \Xi \Theta + B_v \Theta^2 + \Theta \Xi_u \right. \right. \\ & \left. \left. - \Xi \Theta_u \right) \right) \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \left. \right] \xi_{,\phi}^3 + \Upsilon \left[\Theta \left(\Upsilon \zeta \Upsilon_u - \Lambda_u \Sigma \right) \Upsilon_{uv} + \Theta \left(\Upsilon \zeta \Lambda_u + \Sigma \Upsilon_u \right) \Lambda_{uv} \right. \\ & \left. + \left(-\Upsilon_u \Sigma \Theta + \Upsilon \left(\zeta B_v \Theta + B_u \Sigma \Theta + \Theta \Sigma_u - \Xi \zeta_u \right) \right) \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \right] \xi_{,t}^0 \left. \right\} \\ & \times \left[\Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \left(\zeta \Xi - \Theta \Sigma \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (283)$$

$$\begin{aligned} \xi_{,\phi u}^3 = & \left\{ \Sigma \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \left(\Sigma_v \xi_{,t}^0 + \Sigma \xi_{,tv}^0 + \Xi_v \xi_{,\phi}^3 + \Xi \xi_{,\phi v}^3 \right) e^{2B-2C} - \Upsilon \left[\zeta \left(\Upsilon \Upsilon_u \Theta \right. \right. \right. \\ & - \Lambda_u \Xi \Upsilon_{uv} + \zeta \left(\Upsilon \Lambda_u \Theta + \Xi \Upsilon_u \right) \Lambda_{uv} + \left(-\zeta \Upsilon_u \Xi + \Upsilon \left(\zeta B_u \Xi + \zeta B_v \Theta + \zeta \Xi_u \right. \right. \\ & \left. \left. - \Sigma \Theta_u \right) \right) \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \left. \right] \xi_{,\phi}^3 - \left[\zeta \left(\Upsilon \zeta \Upsilon_u - \Lambda_u \Sigma \right) \Upsilon_{uv} + \zeta \left(\Upsilon \zeta \Lambda_u + \Sigma \Upsilon_u \right) \Lambda_{uv} \right. \\ & \left. + \left(-\zeta \Upsilon_u \Sigma + \Upsilon \left(\zeta^2 B_v + \Sigma \zeta B_u + \zeta \Sigma_u - \Sigma \zeta_u \right) \right) \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \right] \Upsilon \xi_{,t}^0 \left. \right\} \\ & \times \left[\Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \left(\zeta \Xi - \Theta \Sigma \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (284)$$

Por último, de la ecuación (277) es posible despejar a $\xi_{,tv}^0$ como

$$\begin{aligned} \xi_{,tv}^0 = & \left\{ -\Upsilon \Theta \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \xi_{,\phi v}^3 + \left[\left(\Lambda_u \Xi - \Upsilon \Upsilon_u \Theta \right) \Upsilon_{uv} - \left(\Upsilon \Lambda_u \Theta + \Xi \Upsilon_u \right) \Lambda_{uv} \right. \right. \\ & \left. - \Upsilon \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \left(C_u \Xi + C_v \Theta - \Lambda_u \Theta + \Theta_v \right) \right] \xi_{,\phi}^3 - \left[\left(\Upsilon \zeta \Upsilon_u - \Lambda_u \Sigma \right) \Upsilon_{uv} \right. \\ & \left. + \left(\Upsilon \zeta \Lambda_u + \Sigma \Upsilon_u \right) \Lambda_{uv} + \Upsilon \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \left(C_v \zeta - \zeta \Lambda_u + C_u \Sigma + \zeta_v \right) \right] \xi_{,t}^0 \left. \right\} \\ & \times \left[\Upsilon \zeta \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (285)$$

y de la ecuación (273) es posible despejar a $\xi_{,\phi}^0$ como

$$\xi_{,\phi}^0 = e^{2C-2A} \Upsilon^2 \xi_{,t}^3. \quad (286)$$

Ahora, es posible derivar a estas ocho ecuaciones (279)–(286) a ambos lados respecto a $\mu = t, u, v, \phi$ para obtener nuevas relaciones entre las segundas derivadas de ξ^0 y ξ^3 . Por ejemplo, al derivar la ecuación (280) respecto a ϕ y al derivar la

ecuación (281) respecto a t se obtiene dos ecuaciones para $\xi_{,\phi t}^0$ en términos de segundas derivadas de ξ^0 y ξ^3 . Si se restan estas dos ecuaciones se obtiene una ecuación que involucra solamente segundas derivadas, que es

$$0 = \frac{e^{2A-2B-2C} (-\xi_{,\phi u}^0 \Upsilon^2 e^{2C} \zeta + e^{2B} \xi_{,\phi v}^0 \Sigma)}{\Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (\Theta \Sigma - \zeta \Xi)} - \frac{-\zeta \Upsilon^2 e^{-2B+2C} \xi_{,tu}^3 + \xi_{,tv}^3 \Sigma}{(\zeta \Xi - \Theta \Sigma) (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)}.$$

Luego, usando la ecuación (286) para determinar $\xi_{,\phi u}^0$ y $\xi_{,\phi v}^0$ en términos de $\xi_{,tu}^1$ y $\xi_{,tv}^1$, respectivamente, se encuentra

$$0 = \left\{ 2\zeta \Upsilon^2 (-\xi_{,tu}^3 \Upsilon + \xi_{,t}^3 (A_u \Upsilon - C_u \Upsilon - \Upsilon_u)) e^{-2B+2C} + 2(\xi_{,tv}^3 \Upsilon - \xi_{,t}^3 (A_v \Upsilon - C_v \Upsilon - \Upsilon_v)) \Sigma \right\} \left[\Upsilon (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (\Theta \Sigma - \zeta \Xi) \right]^{-1}. \quad (287)$$

Se repite este procedimiento al derivar la ecuación (285) respecto a t y la ecuación (279) respecto a v para obtener $\xi_{,ttv}^0$. Se usa la ecuación (280) para determinar $\xi_{,\phi tv}^3$ en términos de segundas derivadas y se usa la ecuación (279) para expresar $\xi_{,tt}^0$ en términos de primeras derivadas. Al restarlas se obtiene

$$0 = \left\{ e^{2B} \left[(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \xi_{,vv}^0 - \xi_{,v}^0 (\Upsilon_u \Upsilon_{uv} + \Lambda_u \Lambda_{uv} - (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)) \times \left(2A_v - C_v - \Lambda_u - 2\frac{\Upsilon_v}{\Upsilon} \right) \right] + \Upsilon \xi_{,u}^0 e^{2C} \left[\Upsilon_u \Lambda_{uv} - \Lambda_u \Upsilon_{uv} + \Upsilon C_u (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \right] \right\} \times e^{2A-2B-2C} \left[\Upsilon^2 \zeta (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)^2 \right]^{-1}. \quad (288)$$

Luego, se deriva la ecuación (279) respecto a ϕ y la ecuación (282) respecto a t para hallar $\xi_{,\phi tt}^0$. Se usa la ecuación (286) para determinar $\xi_{,\phi \mu}^0$ en función de $\xi_{,t\mu}^3$, con $\mu = u, v$. Al restar estas dos ecuaciones se llega a

$$0 = \left\{ -2\Theta (-\xi_{,tu}^3 \Upsilon + \xi_{,t}^3 (\Upsilon A_u - C_u \Upsilon - \Upsilon_u)) \Upsilon^2 e^{-2B+2C} + 2\Xi (-\Upsilon \xi_{,tv}^3 + \xi_{,t}^3 (\Upsilon A_v - C_v \Upsilon - \Upsilon_v)) \right\} \left[\Upsilon (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (\Theta \Sigma - \zeta \Xi) \right]^{-1}. \quad (289)$$

Ahora, se despeja $\xi_{,\phi v}^3$ de la ecuación (284) y se deriva respecto a ϕ para hallar

$\xi^3_{,\phi\phi v}$. Se toma la ecuación (281) y se deriva con respecto a v con el mismo propósito. Luego se usa la ecuación (281) para encontrar $\xi^3_{,\phi\phi u}$ en función de segundas derivadas y se usa la ecuación (282) para reemplazar $\xi^0_{,\phi t}$. Al restarlas se obtiene como resultado

$$\begin{aligned}
0 = & \Upsilon \left\{ [2\Upsilon\Sigma (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \xi^3_{,uv} - 2\Sigma(\Upsilon(\Upsilon_u\Upsilon_{uv} + \Lambda_u\Lambda_{uv}) + (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)) \right. \\
& \times (\Upsilon(B_v - C_v) - \Upsilon_v)] \xi^3_{,u} - (\zeta\Upsilon_u\Upsilon_{uv} + \zeta\Lambda_u\Lambda_{uv} + 2\Upsilon_u\Sigma\Upsilon_{uu} + 2\Lambda_u\Sigma\Lambda_{uu} \\
& + \zeta B_v (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)) \Upsilon \xi^3_{,v} \left. \right] e^{-2B+2C} - [\Upsilon (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \xi^3_{,uu} - \xi^3_{,u} \{ \Lambda_u \Upsilon_{uv} \\
& - \Upsilon_u \Lambda_{uv} + 2\Upsilon\Upsilon_u\Upsilon_{uu} + 2\Lambda_{uu}\Lambda_u\Upsilon + (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (-\Upsilon_u + \Upsilon(B_u - 2C_u)) \}] \\
& \times e^{-4B+4C} \Upsilon^2 \zeta \left. \right\} \left[(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)^2 \Xi \Sigma \right]^{-1}. \quad (290)
\end{aligned}$$

Por último, se reemplaza $\xi^0_{,tv}$ de la ecuación (285) en la ecuación (283) y luego ésta se deriva respecto a t para hallar $\xi^0_{,ttu}$. Se deriva la ecuación (279) con respecto a u con el mismo propósito. Se usa la ecuación (280) para determinar $\xi^3_{,\phi tv}$ en función de segundas derivadas. Se reemplazan $\xi^0_{,tt}$ y $\xi^3_{,\phi t}$ de las ecuaciones (279) y (280). Al restar éstas dos ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned}
0 = & \left\{ \Xi \Sigma \left[(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \xi^0_{,vv} + \xi^0_{,v} \left((\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \left(2A_v - C_v - \Lambda_u - 2\frac{\Upsilon_v}{\Upsilon} \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \Upsilon_u\Upsilon_{uv} - \Lambda_u\Lambda_{uv} \right) \right] e^{4B-2C} + [\zeta\Upsilon (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (\Theta e^{2C}\Upsilon^2\xi^0_{,uu} - 2e^{2B}\Xi\xi^0_{,uv}) \right. \\
& + \zeta e^{2B} \{ \Theta\Upsilon(\Upsilon_{uv}\Upsilon_u + \Lambda_u\Lambda_{uv}) + 2\Upsilon\Xi(\Upsilon_u\Upsilon_{uu} + \Lambda_u\Lambda_{uu}) + (2\Xi\Upsilon_u + \Upsilon(B_v\Theta \\
& - 2A_u\Xi + 2C_u\Xi)) (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \} \xi^0_{,v} - \Xi\xi^0_{,u} e^{2B} (\Sigma(\Lambda_u\Upsilon_{uv} - \Upsilon_u\Lambda_{uv}) - 2\Upsilon\zeta \\
& \times (\Upsilon_u\Upsilon_{uv} + \Lambda_u\Lambda_{uv}) + (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (2\zeta A_v - 2B_v\zeta - C_u\Sigma)\Upsilon) + e^{2C}\zeta\Theta\xi^0_{,u}\Upsilon^2 \\
& \times \{ \Upsilon_u\Lambda_{uv} - \Lambda_u\Upsilon_{uv} - 2\Upsilon(\Upsilon_u\Upsilon_{uu} + \Lambda_{uu}\Lambda_u) + (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \\
& \left. \left. \times (-\Upsilon_u + \Upsilon(2A_u - B_u)) \right\} \Upsilon \left. \right\} e^{2A-2B-2C} \left[\Upsilon^4\zeta(\Theta\Sigma - \zeta\Xi) (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)^2 \right]^{-1}. \quad (291)
\end{aligned}$$

Todas estas relaciones que se acaban de encontrar (287)–(291) se usarán más adelante.

Por el momento se usarán las ecuaciones (287), (289) y (290) para determinar la

forma que debe tener ξ^3 . Primeramente, de las ecuaciones (287) y (289) es posible despejar a $\xi^3_{,tu}$ y $\xi^3_{,tv}$ como

$$\xi^3_{,tu} = - \left(C_u - A_u + \frac{\Upsilon_u}{\Upsilon} \right) \xi^3_{,t}, \quad (292)$$

$$\xi^3_{,tv} = - \left(C_v - A_v + \frac{\Upsilon_v}{\Upsilon} \right) \xi^3_{,t}. \quad (293)$$

Siempre y cuando $\xi^3_{,t} \neq 0$ es posible escribir $\frac{\xi^3_{,tu}}{\xi^3_{,t}} = [\ln(\xi^3_{,t})]_{,u}$, $_{,u}$ indicando derivada parcial respecto a u . Así, de las ecuaciones (292) y (293) se encuentra

$$\ln(\xi^3_{,t}) = -C + A - \ln(\Upsilon) + \bar{F}, \quad (294)$$

con $\bar{F} = \bar{F}(t, \phi)$. Por lo tanto, se tiene que

$$\xi^3 = e^{-C+A-\ln(\Upsilon)F}, \quad (295)$$

donde $F := \int e^{\bar{F}} dt$. Para que esta solución sea válida, al reemplazarla en la ecuación (290), que contiene solo a ξ^3 , se debería cumplir idénticamente o debería dar información sobre la forma de F . Así, al reemplazar la ecuación (295) en la ecuación (290) se encuentra

$$\begin{aligned} 0 = & \left\{ \left[\left(\Sigma \Lambda_u (A_v - C_v) - (\zeta \Lambda_u + 2\Sigma (A_u - C_u) + \zeta (A_v - C_v)) \Upsilon \Upsilon_u \right) \Upsilon_{uv} \right. \right. \\ & - \left(2\Sigma \Upsilon_u (A_v - C_v) + (\zeta \Lambda_u + 2\Sigma (A_u - C_u) + \zeta (A_v - C_v)) \Upsilon \Lambda_u \right) \Lambda_{uv} \\ & + \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \left(2\Sigma \Upsilon (A_{uv} - C_{uv}) + 2\Sigma \Upsilon_u (B_v - C_v) + \Upsilon (2\Sigma (A_v - B_v) A_u \right. \\ & - \left. \zeta B_v \Lambda_u - 2\Sigma (A_v - B_v) C_u - \zeta B_v (A_v - C_v)) \right] e^{-2B+2C} - \left[\Lambda_u (\Upsilon (A_u \right. \\ & - \left. C_u) - \Upsilon_u) \Upsilon_{uv} - \left(\Upsilon (A_u - C_u) \Upsilon_u + \Lambda_u^2 \right) \Lambda_{uv} + \Upsilon^2 \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \right. \\ & \times \left. \left(A_{uu} - C_{uu} + (A_u - C_u) (A_u - B_u + C_u) + (A_u + B_u - 3C_u) \frac{\Upsilon_u}{\Upsilon} \right) \right] \\ & \left. \times \zeta \Upsilon e^{-4B+4C} \right\} e^{A-C} F \left[\left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right)^2 \Xi \Sigma \right]^{-1}, \quad (296) \end{aligned}$$

donde se han usado las relaciones (237) y (239) del apéndice C para simplificar las expresiones. Al reemplazar Σ , Ξ , ζ y Θ se encuentra que esta ecuación no se hace cero idénticamente. Por lo tanto, la única forma de que se cumpla esta ecuación es que $F = 0$, pero esto contradice el hecho de que $\xi^3_{,t} \neq 0$, que fue usado para deducir la ecuación (295). Luego, la solución de la ecuación (295) es inválida y entonces la solución correcta de las ecuaciones (292) y (293) es simplemente

$$\xi^3 = \xi^3(u, v, \phi) \equiv \psi^3(u, v, \phi). \quad (297)$$

Esto además implica que

$$\xi^0 = \xi^0(t, u, v) \equiv \psi^0(t, u, v) \quad (298)$$

por la ecuación (286).

A continuación se encontrará la forma que debe tener ξ^0 . Para lo cual, se usarán las ecuaciones (291), (288) y otras ecuaciones previas. Para empezar, de las ecuaciones (291) y (288) es posible despejar a $\xi^0_{,vv}$ y $\xi^0_{,uv}$ en términos de otras derivadas de ξ^0 como

$$\begin{aligned} \xi^0_{,vv} = & \left\{ \left(\Lambda_u \Upsilon_{uv} - \Upsilon_u \Lambda_{uv} - \Upsilon C_u \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \right) \xi^0_{,u} \Upsilon e^{-2B+2C} \right. \\ & \left. + \xi^0_{,v} \left(\Upsilon_u \Upsilon_{uv} + \Lambda_u \Lambda_{uv} - \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) (2A_v - C_v + \Lambda_u) \right) \right\} \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right)^{-1}, \quad (299) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi^0_{,uv} = & \left\{ \Upsilon^2 \Theta \left[\Upsilon \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \xi^0_{,uu} + \xi^0_{,u} \left(\Lambda_u \Upsilon_{uv} - \Upsilon_u \Lambda_{uv} + \left(\Upsilon_u + \Upsilon (2A_u - B_u) \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \right] e^{2C-2B} + 2 \left(\Upsilon_u \Upsilon_{uv} + \Lambda_u \Lambda_{uv} - \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) (A_v - B_v) \right) \Xi \Upsilon \xi^0_{,u} \right. \\ & \left. - \xi^0_{,v} \left((-\Upsilon \Upsilon_u \Theta + 2\Lambda_u \Xi) \Upsilon_{uv} + (-\Upsilon \Lambda_u \Theta - \Xi \Upsilon_u) \Lambda_{uv} + \Upsilon \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \times (2A_u \Xi - B_v \Theta - 2C_u \Xi) \right) \right\} \left[2\Upsilon \Xi \left(\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2 \right) \right]^{-1}. \quad (300) \end{aligned}$$

Por su parte, al reemplazar las ecuaciones (297) y (298) en las ecuaciones (280) y

(282) es posible despejar a $\psi_{,v}^0$ y $\psi_{,v}^3$ como

$$\psi_{,v}^0 = \frac{\Upsilon^2 \zeta e^{2C-2B}}{\Sigma} \psi_{,u}^0, \quad (301)$$

$$\psi_{,v}^3 = \frac{\Upsilon^2 \Theta e^{2C-2B}}{\Xi} \psi_{,u}^3, \quad (302)$$

donde se consideró $\xi^0 = \psi^0$ y $\xi^3 = \psi^3$. Usando estas dos ecuaciones se llega a dos ecuaciones importantes. Primero, se reemplaza $\psi_{,v}^0$ y $\psi_{,vv}^0$ de la ecuación (301) en la ecuación (299). Luego se usa la ecuación (301) para hallar $\psi_{,uv}^0$ en términos de $\psi_{,uu}^0$. Al hacer esto es posible despejar a $\psi_{,uu}^0$ como

$$\begin{aligned} \psi_{,uu}^0 = \psi_{,u}^0 \left\{ \left[\Sigma (\Upsilon \zeta \Upsilon_u + \Lambda_u \Sigma) \Upsilon_{uv} + \Sigma (\Upsilon \zeta \Lambda_u - \Sigma \Upsilon_u) \Lambda_{uv} - (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \right. \right. \\ \times (\Sigma (\Sigma C_u - \zeta \Lambda_u + \zeta_v) + (-\Sigma_v + \Sigma (2A_v - 2B_v + C_v)) \zeta) \Upsilon \left. \right] \Sigma e^{2B-2C} \\ - (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \Upsilon^2 (\Sigma (2\zeta \Upsilon_u + 2\zeta C_u \Upsilon + \zeta_u \Upsilon) - \zeta \Upsilon (2B_u \Sigma + \Sigma_u)) \zeta \left. \right\} \\ \times \left[\Sigma \Upsilon^3 \zeta^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \right]^{-1}, \quad (303) \end{aligned}$$

donde se ha usado la ecuación (237b) del apéndice C. Luego, se repite el mismo procedimiento de antes, pero con la ecuación (302) en lugar de la ecuación (301). Así, se reemplaza $\psi_{,v}^0$ y $\psi_{,uv}^0$ de la ecuación (301). De la ecuación resultante es posible despejar a $\psi_{,uu}^0$ como

$$\begin{aligned} \psi_{,uu}^0 = \psi_{,u}^0 \left\{ 2 (\Upsilon_u \Upsilon_{uv} + \Lambda_u \Lambda_{uv} - (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (A_v - B_v)) \Xi \Sigma^2 e^{2B-2C} \right. \\ + \Upsilon \left[(\Upsilon \Theta \zeta \Upsilon_u + (\Theta \Sigma - 2\zeta \Xi) \Lambda_u) \Sigma \Upsilon_{uv} + ((2\zeta \Xi - \Theta \Sigma) \Upsilon_u \right. \\ + \Upsilon \Lambda_u \Theta \zeta) \Sigma \Lambda_{uv} - (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) ((4\zeta \Xi - \Sigma \Theta) \Sigma \Upsilon_u \\ + \Upsilon \{ 2(\zeta \Xi - \Sigma \Theta) \Sigma A_u - (4\zeta \Xi - \Sigma \Theta) \Sigma B_u - B_v \Theta \zeta \Sigma \\ \left. \left. + 2\Xi (\Sigma \zeta_u + \zeta (C_u \Sigma - \Sigma_u)) \} \right) \right] \left. \right\} \left[\Sigma \Upsilon^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (2\zeta \Xi - \Theta \Sigma) \right]^{-1}. \quad (304) \end{aligned}$$

Al restar las ecuaciones (303) y (304) se encuentra una ecuación de la forma $0 = Y \psi_{,u}^0$, con $Y = Y(u, v)$. Al reemplazar Σ , Ξ , ζ y Θ , y simplificar las expresiones, se

encuentra que Y no es cero, pues queda en función de A , B y C , y sus derivadas. Así, la única forma posible de que se cumplan las ecuaciones (303) y (304) es que $\psi^0_{,u} = 0$. Pero, de la ecuación (301) esto implica que $\psi^0_{,v} = 0$. Por lo tanto, se encuentra que

$$\xi^0 = f_1(t). \quad (305)$$

Además, al reemplazar la ecuación (305) en la ecuación (279) se encuentra que $\xi^0_{,tt} = 0$, implicando que

$$\xi^0 = \alpha t + \beta, \quad (306)$$

con α y β constantes.

Con la solución (306) ahora es posible encontrar la forma de ξ^3 . Para lo cual se usarán las ecuaciones (285), (278), (283) y (281). Primero se reemplaza la ecuación (306) en la ecuación (283). De esta ecuación se despeja a $\psi^3_{,\phi v}$ como

$$\begin{aligned} \psi^3_{,\phi v} = & \Upsilon e^{-2B+2C} \left\{ -\frac{\Xi}{\Upsilon} (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (\Xi_v \psi^3_{,\phi} + \Sigma_v \alpha) e^{2B-2C} \right. \\ & + [(\Upsilon \Upsilon_u \Theta - \Lambda_u \Xi) \psi^3_{,\phi} + \alpha (\Upsilon \zeta \Upsilon_u - \Lambda_u \Sigma)] \Theta \Upsilon_{uv} \\ & + \Theta ((\Upsilon \Lambda_u \Theta + \Xi \Upsilon_u) \psi^3_{,\phi} + \alpha (\Upsilon \zeta \Lambda_u + \Sigma \Upsilon_u)) \Lambda_{uv} \\ & + [(-\Upsilon_u \Xi \Theta + \Upsilon (B_u \Xi \Theta + B_v \Theta^2 + \Xi_u \Theta - \Xi \Theta_u)) \psi^3_{,\phi} \\ & + (-\Upsilon_u \Sigma \Theta + \Upsilon (\zeta B_v \Theta + B_u \Sigma \Theta + \Theta \Sigma_u - \Xi \zeta_u)) \alpha] \\ & \left. \times (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \right\} \left[\Xi^2 (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \right]^{-1}. \quad (307) \end{aligned}$$

De igual modo, al reemplazar la ecuación (306) en la ecuación (277) es posible despejar a $\psi^3_{,\phi v}$ como

$$\begin{aligned} \psi^3_{,\phi v} = & \left\{ [(-\Upsilon \Upsilon_u \Theta + \Lambda_u \Xi) \psi^3_{,\phi} - \alpha (\Upsilon \zeta \Upsilon_u - \Lambda_u \Sigma)] \Upsilon_{uv} \right. \\ & + [(-\Upsilon \Lambda_u \Theta - \Xi \Upsilon_u) \psi^3_{,\phi} - \alpha (\Upsilon \zeta \Lambda_u + \Sigma \Upsilon_u)] \Lambda_{uv} \\ & - [(C_u \Xi + C_v \Theta - \Lambda_u \Theta + \Theta_v) \psi^3_{,\phi} + \alpha (C_v \zeta - \zeta \Lambda_u + C_u \Sigma + \zeta_v)] \\ & \left. \times (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \Upsilon \right\} \left[\Theta \Upsilon (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \right]^{-1}. \quad (308) \end{aligned}$$

Como puede preverse, ahora se restan las dos últimas ecuaciones (307) y (308) y

se despeja a $\psi^3_{,\phi}$. Haciendo esto se obtiene

$$\begin{aligned}
\psi^3_{,\phi} = & -\alpha \left\{ \Theta \Upsilon^2 \left[\Theta (\Upsilon \zeta \Upsilon_u - \Lambda_u \Sigma) \Upsilon_{uv} + \Theta (\Upsilon \zeta \Lambda_u + \Sigma \Upsilon_u) \Lambda_{uv} \right. \right. \\
& + (-\Upsilon_u \Sigma \Theta + \Upsilon \zeta B_v \Theta + \Upsilon (B_u \Sigma \Theta + \Theta \Sigma_u - \Xi \zeta_u)) (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \left. \right] e^{2C-2B} \\
& + \Xi \left[\Xi (\Upsilon \zeta \Upsilon_u - \Lambda_u \Sigma) \Upsilon_{uv} + \Xi (\Upsilon \zeta \Lambda_u + \Sigma \Upsilon_u) \Lambda_{uv} \right. \\
& + \Upsilon (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (\zeta C_v \Xi - \zeta \Xi \Lambda_u + C_u \Xi \Sigma - \Theta \Sigma_v + \zeta_v \Xi) \left. \right] \left. \right\} \\
& \times \left\{ \Theta \left[\Theta (\Upsilon \Upsilon_u \Theta - \Lambda_u \Xi) \Upsilon_{uv} + \Theta (\Upsilon \Lambda_u \Theta + \Xi \Upsilon_u) \Lambda_{uv} \right. \right. \\
& + (-\Upsilon_u \Xi \Theta + \Upsilon B_u \Xi \Theta + \Upsilon (B_v \Theta^2 + \Xi_u \Theta - \Xi \Theta_u)) (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) \left. \right] \Upsilon^2 e^{2C-2B} \\
& + \Xi \left[\Xi (\Upsilon \Upsilon_u \Theta - \Lambda_u \Xi) \Upsilon_{uv} + \Xi (\Upsilon \Lambda_u \Theta + \Xi \Upsilon_u) \Lambda_{uv} \right. \\
& + \Upsilon (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2) (C_u \Xi^2 + C_v \Xi \Theta - \Xi \Theta \Lambda_u - \Theta \Xi_v + \Xi \Theta_v) \left. \right] \left. \right\}^{-1}. \quad (309)
\end{aligned}$$

Como puede verse esta ecuación es de la forma $\psi^3_{,\phi} = \alpha Z$, con $Z = Z(u, v)$. Como Z no depende de ϕ , esto implica que $\psi^3 = \alpha Z \phi + H$, con $H = H(u, v)$. Nótese que una implicación adicional de esto es que

$$\psi^3_{,\phi\phi} = 0. \quad (310)$$

Así, reemplazando las ecuaciones (306) y (310) en la ecuación (278) se encuentra

$$\Upsilon^2 e^{2C} \psi^3_{,v} = 0, \quad (311)$$

es decir, $\psi^3_{,v} = 0$. Por su lado, al reemplazar las ecuaciones (306) y (311) en la ecuación (281) se encuentra

$$0 = \frac{-\zeta \Upsilon^2 e^{-2B+2C} \psi^3_{,u}}{(\zeta \Xi - \Theta \Sigma) (\Lambda_u^2 + \Upsilon_u^2)}, \quad (312)$$

lo cual implica que $\psi^3_{,u} = 0$. Por lo tanto, estas dos últimas ecuaciones muestran que

$$\psi^3 = h(\phi). \quad (313)$$

Pero por la ecuación (309) esto implicaría que $h_{,\phi} = \alpha Z$, con $Z = Z(u, v)$. Como Z en general no es constante o cero, pues depende de A, B, C , y sus derivadas, entonces la única posibilidad de que la ecuación (309) se cumpla es que $\alpha = 0$ y que $h_{,\phi} = 0$. Lo que a su vez implica que

$$\xi^0 = \beta, \quad (314)$$

$$\xi^3 = \lambda, \quad (315)$$

con λ una constante (cf. ecuaciones (306) y (313)). Al reemplazar las ecuaciones (314) y (315) en las ecuaciones (123) y (124) se obtiene

$$\xi^1 = 0, \quad (316)$$

$$\xi^2 = 0. \quad (317)$$

Lo anterior implica que la forma más general de un vector de Killing de la métrica dada por la ecuación (111) es el dado por la ecuación (122). Por lo tanto, esta métrica solo tiene dos vectores de Killing linealmente independientes.

F. TENSOR DE RICCI Y TENSOR DE RIEMANN

Este capítulo describe de manera geométrica algunas cantidades asociadas al tensor de Riemann. Esta descripción fue tomada y adaptada de las referencias¹¹⁰ y¹¹¹. La convención usada para definir al tensor de Ricci y al tensor de energía-momento coincide con la convención de¹¹² y¹¹³.

Se considera una n -variedad diferenciable \mathcal{M} dotada de un tensor métrico g . Se define a la conexión afín ∇ como un mapeo que asocia a cada campo vectorial X en \mathcal{M} un operador diferencial, ∇_X , que mapea tensores de rango (p, q) , T , en tensores de rango (p, q) , $\nabla_X T$. Esta definición es consistente con las siguientes propiedades

i) $\nabla_X T$ es lineal en el argumento de X , es decir,

$$\nabla_{fX+gY} T = f\nabla_X T + g\nabla_Y T, \quad (318)$$

donde f y g son campos escalares definidos en \mathcal{M} , y X y Y son campos vectoriales.

ii) $\nabla_X T$ es lineal en el argumento de T , es decir,

$$\nabla_X (T + S) = \nabla_X T + \nabla_X S, \quad (319)$$

donde T y S son campos tensoriales del mismo rango.

¹¹⁰ CHANDRASEKHAR, S. 1998.

¹¹¹ MISNER, C. W., THORNE, K. S. y WHEELER, J. A. 2017.

¹¹² Ibíd.

¹¹³ WALD, R. M. 2010.

iii) Sobre campos escalares f se cumple que

$$\nabla_{\mathbf{X}} f = \mathbf{X} f. \quad (320)$$

iv) $\nabla_{\mathbf{X}} T$ satisface la regla de Leibniz al actuar sobre un producto tensorial

$$\nabla_{\mathbf{X}}(T \otimes Q) = \nabla_{\mathbf{X}} T \otimes Q + T \otimes \nabla_{\mathbf{X}} Q, \quad (321)$$

donde T y Q son campos tensoriales no necesariamente del mismo rango.

Con esto, se define la derivada covariante de un tensor T de rango (p, q) como un tensor ∇T de rango $(p, q + 1)$ tal que al evaluarlo en la última entrada con un campo vectorial X se obtiene $\nabla T(\cdot, \dots, \cdot, X) = \nabla_{\mathbf{X}} T$, es decir,

$$\nabla T(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q, X) = (\nabla_{\mathbf{X}} T)(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q), \quad (322)$$

donde $\omega^1, \dots, \omega^p$ son campos vectoriales duales y Y_1, \dots, Y_q son campos vectoriales. $\nabla_{\mathbf{X}} T$ es llamada la derivada covariante de T en la dirección de X .

El mapeo ∇ queda completamente definido al establecer cómo es la derivada covariante en la dirección de X de los elementos de alguna base vectorial $\{e_a\}$. Esto se logra al definir las 1-formas ω^a_b que aparecen en la ecuación

$$\nabla_{\mathbf{X}} e_b = \omega^a_b(\mathbf{X}) e_a, \quad (323)$$

o también al definir los campos escalares $\omega^a_{bc} = \omega^a_b(e_c)$. Cuando se usa una base coordenada local $e_a = \partial_{x^a}$ es usual escribir Γ^a_{bc} en lugar de ω^a_{bc} , en cuyo caso estos son llamados como símbolos de Christoffel. En general, los escalares ω^a_{bc} pueden llamarse como *coeficientes de conexión*¹¹⁴.

Ahora, para definir el tensor de Riemann (o tensor de curvatura) y al tensor de torsión

¹¹⁴ STEPHANI, H. et al. 2003.

se definen los mapeos

$$\mathcal{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\nabla_{\mathbf{Y}} - \nabla_{\mathbf{Y}}\nabla_{\mathbf{X}} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}, \quad (324)$$

$$\mathcal{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \quad (325)$$

donde $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ es el conmutador de \mathbf{X} y \mathbf{Y} , que es un campo vectorial definido por $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]f = \mathbf{X}(\mathbf{Y}f) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}f)$, siendo f un campo escalar. Así, el tensor de curvatura y el tensor de torsión se definen como

$$\mathbf{R}(\omega, \mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle \omega, \mathcal{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} \rangle, \quad (326)$$

$$\mathbf{T}(\omega, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle \omega, \mathcal{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rangle, \quad (327)$$

donde ω es un campo vectorial dual, y \mathbf{X} , \mathbf{Y} y \mathbf{Z} son campos vectoriales. El tensor de Ricci se define como la contracción del tensor de Riemann entre su primera y tercera entrada

$$\mathbf{Ric}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{a=1}^n \mathbf{R}(e^a, \mathbf{X}, e_a, \mathbf{Y}), \quad (328)$$

donde $\{e^a\}$ es la base dual de una base cualquiera $\{e_a\}$, que satisface $e^a(e_b) = \delta^a_b$. En notación de índices el tensor de Ricci se escribe como $R_{ab} = R^c_{acb}$. El escalar de curvatura se define como la traza de \mathbf{Ric} , es decir, $R = R^a_a = g^{ab}R_{ab}$. Donde g^{ab} son las componentes de la métrica inversa de g , definida de modo que $g^{ab}g_{bc} = \delta^a_c$.

La imposición de que $\nabla g = 0$ y que $\mathcal{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ para todo \mathbf{X} y \mathbf{Y} definen unos únicos coeficientes de conexión ω^a_{bc} , y por ende una única conexión llamada la conexión de Christoffel. En una base coordenada local $\{\partial_{x^a}\}$ estos coeficientes son

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d}), \quad (329)$$

donde la coma indica derivada parcial, es decir, $f_{,a} := \partial f / \partial x^a$. Las componentes del tensor de Riemann en una base coordenada local pueden escribirse en términos de

estos coeficientes de conexión como

$$R^a{}_{bcd} = \Gamma^a{}_{bd,c} - \Gamma^a{}_{bc,d} + \Gamma^a{}_{kc}\Gamma^k{}_{bd} - \Gamma^a{}_{kd}\Gamma^k{}_{bc}. \quad (330)$$

Por último, al definir al tensor de Ricci como la contracción del tensor de Riemann en la primer y tercer entrada, se pueden escribir las ecuaciones de campo de Einstein en unidades naturales ($c = 1, G = 1$) como

$$\mathbf{Ric} - \frac{1}{2}R\mathbf{g} = 8\pi\mathbf{T}, \quad (331)$$

donde \mathbf{T} es el tensor de energía-impulso definido de modo que $\mathbf{T}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ para todo campo vectorial \mathbf{v} tipo tiempo. Es decir, se considera que $\mathbf{T}(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ es la densidad de energía medida por el observador con cuadrivelocidad \mathbf{v} .

G. CONDICIONES DE ENERGÍA EN RELATIVIDAD GENERAL

Aquí se desea hacer una descripción de las condiciones de energía débil, fuerte y dominante. Estas condiciones corresponden a presunciones físicas sobre lo que se considera un modelo realista o físicamente aceptable. Mediante el uso de las ecuaciones de Einstein, todas estas condiciones se traducen en imposiciones sobre el tensor de energía-momento. Se suele decir que todas las formas de materia conocidas tienen un tensor de energía-momento que satisface estas condiciones¹¹⁵. Por lo tanto, es sensato o deseable encontrar soluciones a las ecuaciones de Einstein que satisfagan estas condiciones, o que satisfagan algunas de ellas. Así, a continuación se hará una breve descripción de cada condición y se determinarán las condiciones para que el tensor de energía-momento dado por la ecuación (132) las cumpla.

G.1. Condición de energía débil

Esta condición dice que para todo vector tipo tiempo v se debe cumplir que

$$T(v, v) \geq 0, \quad (332)$$

donde T es el tensor de energía-momento¹¹⁶. Por definición, si v es unitario, entonces $T(v, v)$ es la densidad de energía medida por un observador con cuatrive locidad v . Por lo tanto, esta condición equivale a decir que la densidad de energía debe ser no negativa para todos los observadores¹¹⁷. Esta condición suele imponerse en los modelos de fluidos perfectos. Una situación especial donde no suele cumplirse

¹¹⁵ C. A. KOLASSIS, N. SANTOS y D. TSOUBELIS: *Energy conditions for an imperfect fluid*. En: *Classical and Quantum Gravity* 5.10 (1988), pág. 1329; WALD, R. M. 2010.

¹¹⁶ S. W. HAWKING y G. F. R. ELLIS: "The Large Scale Structure of Space-Time". En: *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1973. Cap. 4. The physical significance of curvature, págs. 88-96; WALD, R. M. 2010.

¹¹⁷ HAWKING, S. W. y ELLIS, G. F. R. 1973.

es en algunas regiones de soluciones de tipo agujero de gusano¹¹⁸.

Haciendo uso del tensor de energía-momento de la ecuación (132) y del hecho de que v es tipo tiempo, se obtiene

$$\mathbf{T}(v, v) = \mu V^2 + (\mu + P_1)(v^1)^2 + (\mu + P_2)(v^2)^2 + (\mu + P_3)(v^3)^2, \quad (333)$$

siendo $v^a = v \cdot e_a$ las componentes de v en la tetraada ortonormal dada por la ecuación (134)¹¹⁹ y donde $v \cdot v = -V^2 < 0$. Así, la condición de energía débil se cumple si

$$\mu \geq 0 \quad \text{y} \quad \mu + P_i \geq 0, \quad (334)$$

donde $i = 1, 2, 3$. Note que en el caso en que tanto μ y P_i sean mayores o iguales que cero también se cumple la condición de energía débil. La condición (334) también aparece en¹²⁰.

G.2. Condición de energía fuerte

Esta condición establece que para todo vector tipo tiempo v se debe cumplir que

$$\mathbf{Ric}(v, v) \geq 0, \quad (335)$$

siendo \mathbf{Ric} el tensor de Ricci. Esta condición garantiza que la expansión de una congruencia¹²¹ de geodésicas nulas o tipo tiempo con vorticidad cero decrezca monóto-

¹¹⁸ M. S. MORRIS y K. THORNE: *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*. En: *American Journal of Physics* 56.5 (1988), págs. 395-412.

¹¹⁹ Note que la tetraada ortonormal se define de modo que sea consistente con la signatura de la métrica $(-, +, +, +)$

¹²⁰ WALD, R. M. 2010.

¹²¹ Una congruencia de geodésicas en un abierto O de la variedad se define como una familia de curvas tales que por cada punto $p \in O$ pasa solamente una geodésica de esta familia, *ibíd.*

namente a lo largo de cualquiera de estas geodésicas¹²². Esto quiere decir, que si la vorticidad es cero, las geodésicas tienden a acercarse entre sí a medida que pasa el tiempo¹²³. Esto se interpreta como que la gravedad siempre es atractiva en todo punto del espaciotiempo. Equivalentemente, haciendo uso de las ecuaciones de campo de Einstein, esta condición pasa a ser

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{V^2}{2}T \geq 0, \quad (336)$$

donde T es la traza de \mathbf{T} , y $V^2 = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

En este caso, al considerar el tensor de energía-momento de la ecuación (132) y al tomar en cuenta que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -V^2 < 0$ se obtiene

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{V^2}{2}T = (\mu + P_1)(v^1)^2 + (\mu + P_2)(v^2)^2 + (\mu + P_3)(v^3)^2 + \frac{V^2}{2}(P_1 + P_2 + P_3 + \mu). \quad (337)$$

Por ende, una condición suficiente para se cumpla la condición de energía fuerte es

$$\mu + P_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \mu + P_1 + P_2 + P_3 \geq 0, \quad (338)$$

donde $i = 1, 2, 3$. Al igual que antes, de aquí es claro que simplemente la condición $\mu, P_i \geq 0$ es suficiente para que se cumpla la ecuación (336). La condición (338) también aparece en¹²⁴.

G.3. Condición de energía dominante

Para todo vector tipo tiempo \mathbf{v} dirigido hacia el futuro el cuadvivector $\mathbf{p} = g^{-1}(\underline{\mathbf{p}}, \cdot)$ asociado a la 1-forma $\underline{\mathbf{p}} = -\mathbf{T}(\mathbf{v}, \cdot)$ es futuro dirigido y es tipo tiempo o nulo, siendo g^{-1} la métrica inversa y \mathbf{T} el tensor de energía-momento. Si \mathbf{v} es un cuadvivector

¹²² HAWKING, S. W. y ELLIS, G. F. R. 1973.

¹²³ WALD, R. M. 2010.

¹²⁴ *Ibíd.*; HAWKING, S. W. y ELLIS, G. F. R. 1973.

unitario, entonces p representa el cuadvivector de flujo de densidad de energía. Así, la condición de energía dominante puede interpretarse como que ningún tipo de materia o energía puede viajar más rápido que la luz. De hecho, en¹²⁵ se demuestra que si un tensor de energía-momento satisface la condición de energía dominante y se hace cero en un conjunto cerrado tipo espacio \mathcal{S} entonces también se hace cero en su desarrollo futuro de Cauchy, $D^+(\mathcal{S})$, definido como el conjunto de puntos para el cual toda curva tipo tiempo o nula dirigida hacia el pasado se interseca con \mathcal{S} . Es decir, si una región tipo espacio \mathcal{S} está vacía entonces la región en el futuro accesible mediante curvas tipo tiempo o tipo luz, que provienen solo de \mathcal{S} , permanece vacía. La materia circundante a \mathcal{S} no alcanza a llegar a $D^+(\mathcal{S})$. Con lo cual, la materia no viaja más rápido que la luz¹²⁶.

Escribiendo $v = v^a e_a$ en la tetraada ortonormal dada por la ecuación (134) y tomando el tensor de energía-momento de la ecuación (132) se encuentra

$$p = \mu v^0 e_0 - P_1 v^1 e_1 - P_2 v^2 e_2 - P_3 v^3 e_3. \quad (339)$$

Como v es futuro dirigido, entonces $v \cdot e_0 = -v^0 < 0$. Recuerde que e_0 es futuro dirigido debido a que representa la cuadvivelocity del fluido. Por lo tanto, la condición de que p sea futuro dirigido es que $p \cdot e_0 = -\mu v^0 < 0$, es decir, que $\mu > 0$. Por otra parte, la condición de que p sea tipo tiempo o nulo es que

$$p \cdot p = -\mu^2 V^2 + (P_1^2 - \mu^2)(v^1)^2 + (P_2^2 - \mu^2)(v^2)^2 + (P_3^2 - \mu^2)(v^3)^2 \leq 0, \quad (340)$$

donde $V^2 = -v \cdot v$. Esta condición se cumple si $\mu \geq 0$ y $\mu \geq |P_i|$ para todo $i = 1, 2, 3$. El hecho de que esta condición mencione que μ es mayor que $|P_i|$ se suele decir como que la densidad energía domina sobre las demás componentes de T ¹²⁷.

¹²⁵ HAWKING, S. W. y ELLIS, G. F. R. 1973.

¹²⁶ *Ibíd.*

¹²⁷ *Ibíd.*

Lo anterior permite ver que la condición de energía débil y fuerte se cumple si $\mu \geq 0$ y $P_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, 3$. Si se garantiza adicionalmente que $\mu > 0$ y que $\mu \geq P_i$, entonces se cumple la condición de energía dominante.