USO DEL SOFTWARE DE GEOMETRIA DINAMICA PARA EL DESARROLLO DE PROCESOS COMUNICATIVOS

YAMILE ZAMBRANO DELGADO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE CIENCIAS HUMANAS
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
BUCARAMANGA
2018

USO DEL SOFTWARE DE GEOMETRIA DINAMICA PARA EL DESARROLLO DE PROCESOS COMUNICATIVOS

YAMILE ZAMBRANO DELGADO

PROYECTO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGISTER EN PEDAGOGÍA

DIRECTOR
JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL
PhD. en Didáctica de la Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE CIENCIAS HUMANAS
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
BUCARAMANGA
2018

DEDICATORIA

Sea lo primero, agradecer infinitamente a Dios por su bondad, porque siempre estuvo para guiarme y darme su mano en los momentos difíciles donde todo parecía cerrarse, fue y es mi guía que me permitió ver realizado este sueño tan anhelado.

Gracias padre misericordioso, porque has permitido que hoy me sienta orgullosa por alcanzar la meta propuesta al recibir el mayor de los honores: ser egresada como Magister de la UIS.

A ti mi amado esposo, por tu valiosa ayuda, por estar siempre con tus manos generosas, presto a ayudarme a mis hijos Jhoan y José Luis, gracias por el tiempo que me brindaron y por los difíciles momentos de mal genio que supieron soportar, por sus desvelos, por su aliento en cada momento en que me sentía derrotada. Gracias por animarme, por apoyarme. Saben que no lo hubiera logrado sin ustedes. Los amo infinitamente. Este triunfo es nuestro.

A mis padres Eliecer y María Teresa, quienes con sus oraciones estuvieron dándome ánimo para ver este anhelo cumplido, sé que se sentirán muy orgullosos de su hija que con tanto cariño y generosidad ustedes formaron. Los amo con el alma.

AGRADECIMIENTOS

Infinitas gracias al gran compañero de estudio Carlo René quien me iluminó con su conocimiento y sabiduría, para hacer realidad este sueño de ser Magister.

Mil gracias al Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal, mi director de proyecto, por su exigencia constante, por sus enseñanzas y orientaciones. Es un honor haber sido formada por un profesional de tan altas calidades.

Al selecto grupo de maestros que se encargaron de iluminarnos constantemente con sus conocimiento y entrega en cada uno de los seminarios. Mil y mil gracias.

A mi hermana Martha Cecilia Medina, que fue mi paño de lágrimas en los momentos donde decaía y fue su palabra en el momento preciso y ayuda que me fortalecían para seguir luchando por alcanzar la meta.

A mis queridos y entrañables compañeros: Carlos René, John Freddy, Lorena, Yadira y Lydia de quienes me llevo muy gratos momentos. Gracias por hacer de esta etapa de mi vida una muestra de amistad verdadera, apoyo y cariño. Los llevo en el corazón.

A mis estudiantes que fueron la materia prima para desarrollar mi proceso de formación.

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

INTRODUCCION 21

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 25
1.1 PREGUNTAS DEL PROBLEMA 28
1.1.1 Pregunta General 28
1.1.2 Preguntas Específicas. 28

2. JUSTIFICACIÓN 29

3. OBJETIVOS 33
3.1 OBJETIVO GENERAL 33
3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS 33

4. MARCO DE REFERENCIA 34
4.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN 34
4.1.1 Antecedentes internacionales 34
4.1.2 Antecedentes nacionales 35
4.1.3 Antecedentes locales 36

5. MARCO CONCEPTUAL 38
5.1 LENGUAJE MATEMÁTICO Y COMUNICACIÓN 38
5.2 DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO 40
5.3 ¿QUÉ IMPLICA EL PROCESO DE LA COMUNICACIÓN MATEMÁTICA? 41
5.3.1 Habilidades matemáticas 42
5.3.2 Habilidades matemáticas generales 42
5.3.2.1 Habilidades de la formación de conceptos y propiedades 42

5.3.2.2 Habilidades de uso de procedimientos algorítmicos 43
5.3.2.3 Habilidades de resolución de problemas 44
5.3.3 Habilidades específicas del proceso de comunicación 44
5.3.3.1 Habilidad de Interpretación 44
5.3.3.2 Habilidad de Justificación.....45
5.3.3.3 Habilidad de Argumentación 46
5.4 SECUENCIA DIDÁCTICA.....48

6. METODOLOGÍA 50
6.1 CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN 50
6.2 ENFOQUE METODOLÓGICO.....50
6.3 DISEÑO METODOLÓGICO.....52

7. DESCRIPCIÓN DEL PROCESO METODOLÓGICO.....54
7.1 FASE 1. PLANEACIÒN 54
7.2 FASE 2. INTERVENCION.....55
7.3 FASE 3. EVALUACIÓN 57
7.4 POBLACIÓN 57
7.4.1 Muestra 57
7.5 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN 58
7.6 DISEÑO DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA 58
7.6.1 Categorías de análisis prueba diagnóstica 59
7.6.1.1 Categoría acierto 59
7.6.1.2 Categoría inconcluso 60
7.6.1.3 Categoría no justifica 60
7.6.1.4 Categoría desacierto.....60
7.6.1.5 Categoría no responde 60
7.6.2 Resultados prueba diagnostica.....61
7.6.3 Análisis por ítems.....64

7.7 ESTRUCTIRA DE LAS SECUENCIAS DIDÁCTICAS 78
7.7.1 Fase de Exploración 78
7.7.2 Fase de Aprehensión de Conocimiento 78
7.7.3 Fase de Discusión 79
7.7.4 Fase de consolidación 79
7.7.5 Fase de cierre 79
7.3.1. Construyendo el Rectángulo 80
7.7.6.1 Contenidos temáticos 80
7.7.6.2 Objetivo de aprendizaje 80
7.7.6.3 Desempeño 81
7.7.6.4 Indicadores de desempeño 81
7.8 ESTRUCTURA DE LA SESIÓN 1. ¿CUÁNTO MIDEN LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN TRIÁNGULO? 81
7.8.1 Fase de exploración 81
7.8.1.1 Categoría 82
7.8.5.2 Fase de aprehensión de conocimiento 101
7.8.5.3 Fase de discusión 103
7.8.5.4 Fase de consolidación 110
7.8.5.5 Fase de cierre 116
7.9 ANALISIS DE LA SECUENCIA DIDACTICA 118
7.9.1 Fase de Exploración 118
7.9.2 Fase de Aprehensión de Conocimiento 119
7.9.3 Fase de Discusión 119
7.9.4 Fase de consolidación 119
7.9.5 Fase de cierre 120

8. LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO 121
8.1 CONTENIDOS TEMÁTICOS 121
8.2 OBJETIVO DE APRENDIZAJE 122
8.3 DESEMPEÑO 122

8.4 INDICADORES DE DESEMPEÑO 122
8.5 ESTRUCTURA DE LA SESIÓN 2. ¿PODEMOS CONSTRUIR CUALQUIER TRIÁNGULO? 123
8.5.1 Fase de exploración 123
8.5.1.2 Categoría 128
8.5.1.3 Categoría 137
8.5.1.4 Fase de aprehensión de conocimiento 140
8.5.1.6 Fase de consolidación 148
8.5.1.7 Fase de cierre 153
8.6 ANÁLISIS PRUEBA FINAL 157
8.6.1 Categorías de análisis prueba diagnóstica final 157
8.6.1.1 Categoría acierto 157
8.6.1.2 Categoría inconcluso 158
8.6.1.3 Categoría no justifica 158
8.6.1.4 Categoría desacierto 158
8.6.1.5 Categoría no responde 158
8.6.2 Resultados comparativos prueba final 159
8.6.3 Análisis por ítems 162

9. CONCLUSIONES 174
10. RECOMENDACIONES 178
BLIBLIOGRAFIA 179
ANEXOS 186

LISTA DE FIGURAS

Pág.

Figura 1. Habilidades de la formación de conceptos y propiedades 43
Figura 2. Habilidades de uso de procedimientos 43
Figura 3. Habilidades de resolución de problemas 44
Figura 4. Interpretar 46
Figura 5. Categorías 48
Figura 6. Fases enfoque constructivista 49
Figura 7. Ítem 1: Reconocimiento de ángulos complementarios.....64
Figura 8. Cálculo ángulos complementarios estudiante E-15 65
Figura 9. Ítem 2: Reconocimiento de ángulos suplementarios 65
Figura 10. Reconocimiento de ángulos suplementarios 66
Figura 11. Ítem 4: Clasificación de triángulos según la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos. 67
Figura 12. Respuesta dada por el estudiante E-21.....68
Figura 13. Respuesta dada por la estudiante E-14.....69
Figura 14. Ítem Imagen 5. Teorema sumatorio de ángulos interiores de un triángulo 70
Figura 15. Respuesta dada por la estudiante E-5.....71
Figura 16. Respuesta dada por la estudiante E-6.....72
Figura 17. Argumento presentado por la estudiante E-29 72
Figura 18. Argumento presentado por la estudiante E-22 73
Figura 19. Ítem 5. Conexidad entre clasificación de triángulos según sus medidas y clases de triángulos según las medidas de sus ángulos 73
Figura 20. Respuesta dada por el estudiante E-18.....74
Figura 21. Respuesta dada por la estudiante E-9.....75
Figura 22. Ítem 6. Teorema de la desigualdad triangular.....76
Figura 23. Argumento falaz presentado por el estudiante E-18.....76

Figura 24. Respuesta sin justificación por el estudiante E-23.....77
Figura 25. Justificación con argumentos incongruentes. Estudiante E-32.....77
Figura 26. Construcción de tres triángulos para identificación de ángulos y lado opuesto. Estudiante E-24.....89
Figura 27. Ángulos y lados opuestos. Estudiante E-5.....90
Figura 28. Ángulos y lados opuestos. Estudiante E-24.....90
Figura 29. Ángulos y lados opuestos. Estudiante E-6.....91
Figura 30. Registro ángulos y lados opuestos. Estudiante E-6.....91
Figura 31. Determinación ángulos alternos – internos. Primera sesión secuencia didáctica.....98
Figura 32. Detalle paso a paso para la construcción de un triángulo con dos ángulos dados. Primera sesión secuencia didáctica.....107
Figura 33. Detalle paso a paso para la construcción de un triángulo con dos ángulos dados. Primera sesión secuencia didáctica.....107
Figura 34. Segmento inicial para la construcción de un triángulo. Primera sesión secuencia didáctica. Fase de consolidación.....111
Figura 35. Trazo de dos lados a partir de un segmento inicial. Primera sesión secuencia didáctica. Fase de consolidación.....113
Figura 36. Trazo de dos nuevos lados a partir de un segmento inicial. Primera sesión secuencia didáctica. Fase de consolidación.....114
Figura 37. Verificación sumatoria ángulos internos de un triángulo. Fase de consolidación.....115
Figura 38. Vista de diferentes alternativas de solución del problema. Primera sesión 115
Figura 39. Clasificación de los triángulos.....116
Figura 40. Opciones de respuesta.....117
Figura 41. Argumentación desigualdad triangular. Fase de exploración 130
Figura 42. Argumentación desigualdad triangular. Fase de exploración 131
Figura 43. Argumentación desigualdad triangular. Fase de exploración 131
Figura 44. Argumentación desigualdad triangular. Fase de exploración 132

Figura 45. Argumentación desigualdad triangular. Fase de exploración 132
Figura 46. Segmentos de recta que no alcanzan por su longitud a intersectarse para formar un triángulo.....133
Figura 48. Argumentación clases de triángulos según su longitud. Fase de exploración.....136
Figura 49. Argumentación clases de triángulos según su longitud. Fase de exploración.....136
Figura 50. Relación triángulo equilátero- triangulo isósceles. Fase exploración..139
Figura 51. Relación triángulo equilátero- triangulo isósceles. Fase exploración..139
Figura 52. Relación triángulo equilátero- triángulo isósceles. Fase exploración..139
Figura 53. Relación triángulo equilátero- triángulo isósceles. Fase de Exploración 140
Figura 54. Estrategia de construcción de un triángulo con medidas dadas.....143
Figura 55. Estrategia de construcción de un triángulo con medidas dadas.....144
Figura 56. Construcción final del triángulo por la E-6 144
Figura 57. Verificación de la construcción de un triángulo a través de la prueba del arrastre. 145
Figura 58. Uso de la herramienta polígono para la construcción de un triángulo con medidas determinadas.....146
Figura 59. Finalización construcción del triángulo con la herramienta polígono ..147
Figura 60. Aplicación prueba del arrastre construcción del triángulo a través de la herramienta polígono 148
Figura 61. Traslado de medidas de dos segmentos a un segmento dado.....152
Figura 62. Construcción final del triángulo. Fase de consolidación 153
Figura 63. Reconocimiento de ángulos complementarios 162
Figura 64. Determinación ángulo complementario prueba final. 162
Figura 65. Reconocimiento de ángulos suplementarios 163
Figura 66. Reconocimiento de ángulos suplementarios prueba final.....163
Figura 67. Clasificación de triángulos según sus ángulos 164

Figura 68. Ítem 3. Teorema sumatoria de ángulos interiores de un triángulo. Prueba final 165
Figura 69. Ítem 4: Teorema sumatoria de ángulos interiores de un triángulo 166
Figura 70. Clasificación de triángulos según la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos. Prueba final.....167
Figura 71. Selección de triángulos escalenos. Prueba final.....167
Figura 72. Argumentación sobre triángulos rectángulos.....168
Figura 73. Ítem 5. Conexidad entre clasificación de triángulos según sus medidas y clases de triángulos según las medidas de sus ángulos 168
Figura 74. Representación de un triángulo rectángulo e isósceles. Prueba final.169
Figura 75. Representación gráfica de un triángulo rectángulo e isósceles. Prueba final. 170
Figura 76. Representación gráfica de un triángulo escaleno e isósceles. Prueba final 170
Figura 77. Representación gráfica de un triángulo escaleno y obtuso. Prueba final 171
Figura 78. Representación gráfica de un triángulo escaleno y rectángulo a la vez.. Prueba final.....171
Figura 79. Ítem 6. Teorema de la desigualdad triangular.....172
Figura 80. Argumentos del teorema de la desigualdad triangular.....173
Figura 81. Argumentos del teorema de la desigualdad triangular ítem 6.....173

LISTA DE GRAFICAS

Pág.

Gráfica 1. Fortalezas y debilidades relativas en las competencias y componentes evaluados. Matemáticas - grado quinto 26
Gráfica 2. Reconocimiento de ángulos complementarios 61
Gráfica 3. Reconocimiento de ángulos suplementarios 61
Gráfica 4. Teorema sumatoria de ángulos interiores de un triángulo.....62
Gráfica 5. Clasificación de triángulos según la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos.....62
Gráfica 6. Conexidad entre triángulos según sus medidas y triángulos según sus ángulos 63
Gráfica 7. Teorema de la desigualdad triangular 63
Gráfica 8. Reconocimiento de ángulos complementarios 159
Gráfica 9. Reconocimiento de ángulos suplementarios 159
Gráfica 10. Teorema sumatoria de ángulos interiores de un triángulo.....160
Gráfica 11. Clasificación de triángulos según la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos.....160
Gráfica 12. Conexidad entre triángulos según sus medidas y triángulos según sus ángulos 161
Gráfica 13. Teorema de la desigualdad triangular 161

LISTA DE TABLAS

Pág.

Tabla 1. ¿Qué es un triángulo? ¿Qué características tiene? 84
Tabla 3. ¿Qué es un cuadrilátero? ¿Qué características tiene? 84
Tabla 2. ¿Cuáles son los elementos del triángulo? 86
Tabla 3. Menciona cada uno de los ángulos de los triángulos y su lado opuesto .. 89
Tabla 4. Argumentos escogencia de un lado de un triángulo y su ángulo opuesto. 93
Tabla 5. Lados y ángulos de triángulos 95
Tabla 6. Suma ángulos internos de un triángulo 96
Tabla 7. Ángulos alternos -internos 98
Tabla 8. Reconocimiento ángulos alternos - internos 99
Tabla 9. Segmento inicial para la construcción de un triángulo. Primera sesión secuencia didáctica. 102
Tabla 10. Estrategia utilizada para la construcción de un triángulo 104
Tabla 11. Presentación de argumentos. 108
Tabla 12. Presentación de argumentos. Fase de consolidación. Primera sesión didáctica. 111
Tabla 13. Cuadro Falso - verdadero 118
Tabla 14. Análisis sumatoria de dos lados de un triángulo con respecto al lado restante. 125
Tabla 15. Presentación de argumentos desigualdad triangular 129
Tabla 16. Clasificación de triángulos según sus lados. Argumentos 134
Tabla 17. ¿Un triángulo equilátero puede ser isósceles? Presentación de argumentos. 137
Tabla 18. Presentación de estrategias para resolución de problemas, Fase de discusión 141

Tabla 19. Presentación de argumentos. Fase de consolidación. Segunda sesión didáctica.....149
Tabla 20. Justificación premisa. Fase de cierre.....154
Tabla 21. Justificación premisa. Fase de cierre.....156

LISTA DE ANEXOS

Pág.

Anexo A. Ítems de la prueba diagnóstica.....186
Anexo B. Carta aval rectora.....202
Anexo C. Formato consentimiento informado de los estudiantes.....203
Anexo D. Formato consentimiento informado padres de familia.....204
Anexo E. Carta de Aval director del proyecto.....205
Anexo F. Certificado.....206

RESUMEN

TITULO: USO DEL SOFTWARE DE GEOMETRIA DINAMICA PARA EL DESARROLLO DE PROCESOS COMUNICATIVOS*

AUTOR: YAMILE ZAMBRANO DELGADO**

PALABRAS CLAVES: Estudiante, Geometría, Comunicación, GeoGebra.

DESCRIPCIÓN:

El presente proyecto presenta un análisis académico de las prácticas pedagógicas de aula en la clase de geometría, basado en resultados efectivos, producto de un diagnóstico inicial que permitió reconocer las dificultades presentadas por los estudiantes en el proceso de comunicación matemática del grado sexto del Colegio Luis Camacho Rueda. Dichas falencias se originan, entre otras, en la ausencia de un vocabulario técnico-matemático, en el débil manejo de conceptos requeridos, en la ejecución de unas prácticas de aula descontextualizadas y carentes de significado para el estudiante, además de la poca habilidad para expresar sus pensamientos y sus inquietudes educativas. A partir de allí surgió la necesidad de implementar una unidad didáctica que constaba de dos secuencias didácticas las cuales iban encaminadas a fortalecer los procesos comunicativos a través del uso del GeoGebra, software dinámico educativo que posibilitó al estudiante un acercamiento real, práctico, productivo y asertivo del estudio de una figura geométrica, el triángulo. Desde su manipulación se generaron las condiciones requeridas para resolver situaciones problema, las cuales propiciaron el desarrollo de las habilidades de pensamiento, tales como argumentar, interpretar y justificar, para así generar las competencias comunicativas y favorecer las condiciones que permitan el desarrollo de éstas. Así mismo hacer de los estudiantes del grado sexto personas competentes en un mundo que requiere de soluciones prácticas para hacer de su contexto un mejor espacio de vida.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Ciencias Humanas. Director. Jorge Enrique Fiallo Leal. PhD. en Didáctica de la Matemática

ABSTRACT

TITLE: USE OF THE DYNAMIC GEOMETRY SOFTWARE FOR THE DEVELOPMENT OF COMMUNICATIVE PROCESSES*

AUTHOR: YAMILE ZAMBRANO DELGADO**

KEY WORDS: Students, geometry, communication, GeoGebra, abilities**.**

DESCRIPTION:

This Project presents an academic analysis of the classroom teaching practice in the geometry class, based on effective results, product of an initial diagnosis that allowed recognizing the difficulties presented by the students in the communicative process of mathematics of the sixth grade of the Luis Camacho Rueda School. These failures originated, among others, in the lack of a technical-mathematical vocabulary, the weak management of required concepts, also, in the execution of a classroom practices decontextualized and lacking of meaning for the student, besides to the poor ability to express their thoughts and their educational concerns. Since then, arose the necessity to implement a didactic unit that consisted in two didactical sequences which were aimed to strengthen the communicative processes through the use of GeoGebra, educational dynamic software that allowed to the student a real, practice, productive and assertive approach to the study of a geometric figure, the triangle. Since the manipulation, it generated the require conditions to solve problem situations, which propitiated the development of thinking abilities, such as arguing, interpreting, justifying, to generate the communicative competences and favor the conditions that allow the development of those competences. Likewise, to do those students of sixth grade competent people in a world that requires of practice solutions to do of their context a better living space.

* Bachelor Tesis

** Faculty of Human Sciences. School of Human Sciences. Director. Jorge Enrique Fiallo Leal. PhD. in Didactics of Mathematics

INTRODUCCION

La importancia que tiene basar la enseñanza de las matemáticas en los procesos y no en los contenidos, es la columna vertebral de este proceso investigativo.

Se puede llegar a una comprensión matemática cuando en el acto pedagógico de enseñarla, se involucran los procesos de comunicación, representación, razonamiento, ejercitación y resolución de problemas. La conjunción de todos los procesos es lo que hace a un estudiante idóneo en esta área.

Si bien es cierto que el proceso de comunicación no es el único que está inmerso en la tarea de enseñar o aprender matemáticas, es aquel en el que los estudiantes participantes de esta investigación, han presentado fallas y vacíos conceptuales, demostrados en los resultados de las pruebas saber en los años 2014 y 2015 en el grado sexto uno del colegio Luis Camacho Rueda del municipio de San Gil.

Lo que muestran estas mediciones, es que los estudiantes no son totalmente competentes en matemáticas, debido a que este y otros procesos son débiles amén de las falencias en los pensamientos matemáticos, particularmente en el pensamiento espacial.

Aprovechando los avances en la tecnología y la facilidad de acceso de los estudiantes a la misma, se optó por elegir como estrategia pedagógica la mediación del software de geometría dinámica GeoGebra para fortalecer el proceso de comunicación, teniendo en cuenta las habilidades de interpretar, justificar y argumentar. Esta mediación, va acompañada de otro proceso: la resolución de problemas geométricos.

Se espera entonces que en la medida en que los estudiantes vayan resolviendo un problema geométrico, puedan llegar a expresarse en un lenguaje matemático propio, para explicar a sus pares sus procedimientos, argumentos, predicciones o conjeturas sobre la figura objeto de estudio: el triángulo.

Usar el software de geometría dinámica, con actividades propias del pensamiento espacial y con actividades que indagan las habilidades comunicativas, es una nueva manera de abordar la enseñanza de la geometría, revaluando entonces el quehacer pedagógico del docente investigador.

Se habla en esta investigación de revaluar el quehacer pedagógico, ya que es uno de los propósitos de la misma, teniendo en cuenta aspectos como los siguientes:

- La enseñanza de la geometría en la institución, por mucho tiempo estuvo relegada, o abordada de manera superficial.
- Predominaba en la práctica educativa la enseñanza de la aritmética a través de la ejercitación de procedimientos algorítmicos.
- No se daba mayor importancia al hecho de reconocer que esta área del conocimiento tenía un lenguaje semiótico propio, el cual, si se estimula, ejercita y desarrolla, redundará en la capacidad de comprender de mejor manera los conceptos y contextos matemáticos.

Precisamente, el soslayar el uso del lenguaje matemático restringe y obstaculiza el proceso de poder enseñar y aprender matemáticas. Al no poder comprender el “mensaje” que los símbolos, gráficas u otros sistemas de representación nos comunican, de manera inmediata aparecen las dificultades no solo para los estudiantes sino también para el mismo docente.

Por eso es relevante que este proyecto de investigación acción tenga como pretensión principal, fortalecer habilidades del proceso de comunicación a través de

resolución de problemas en un entorno de software de matemática interactiva, pues en la medida en que se es hábil al comunicar en matemática, se está más cerca de la comprensión y de la competencia global en esta área del conocimiento.

Para ello, este trabajo se organizó de la siguiente manera:

En primer lugar se hará una descripción general del problema de estudio y se dan a conocer antecedentes de investigaciones relacionadas con el problema planteado en el capítulo.

En seguida, hay una parte que contiene los referentes conceptuales del proceso de comunicación, en particular aquellos que han hecho estudios de las habilidades de interpretar, argumentar y justificar los cuales sustentan la propuesta investigativa. De igual manera, se citan los aportes hechos por CRONBACHT, Miguel de Guzmán, Rojas y Watson, referentes que permitieron realizar el diseño de las secuencias didácticas, estructurar sus fases, plantear las actividades de las mismas y establecer las categorías y subcategorías para realizar el análisis de la información aportada por los estudiantes en la fase de intervención.

Posteriormente, se presentó una descripción detallada del proceso metodológico, caracterizando la población de estudio y las etapas en las que se desarrolló la investigación: el análisis documental, la prueba diagnóstica, el diseño de un plan de intervención, la sistematización de los datos, el análisis de los resultados y finalmente el reporte de investigación.

Se continuó con la descripción de las actividades propias de la fase de intervención, la sistematización de los datos y el análisis de los resultados obtenidos.

Finalmente, aparece la presentación de las conclusiones del trabajo investigativo y las recomendaciones formuladas para concluir el trabajo de proyecto de grado de la maestría en pedagogía de su autora.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El Colegio Luis Camacho Rueda, es una institución educativa, con reconocimiento de carácter oficial, otorgado por la Resolución 00998 del 6 de noviembre de 2001 , con registro DANE 168679000142 del municipio de San Gil que atiende población mixta en calendario A; fundamenta sus procesos educativos en los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias atendiendo políticas educativas nacionales; ofrece educación Formal a estudiantes en los niveles de preescolar, básica (primaria y secundaria) y Media Técnica (10 y 11º), jornadas diurnas mañana y tarde.

De acuerdo con los resultados en el área de matemáticas obtenidos en las pruebas saber del año 2014, los puntajes del promedio (Colegio Luis Camacho Rueda: 326 / Colombia: 292) y la desviación estándar (Colegio Luis Camacho Rueda: 77 / Colombia: 71), son similares[1]. Estos muestran debilidades en los procesos de comunicación (Competencia Comunicación, representación y modelación) y en las competencias relacionadas con el pensamiento métrico (componente Geométrico-métrico, representación y modelación).

[1] ICFES. Resultados de quinto grado en el área de matemáticas. [en línea]. 2014. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/seleccionListaInstituciones.jspx

Gráfica 1. Fortalezas y debilidades relativas en las competencias y componentes evaluados. Matemáticas - grado quinto

Fuente: Icfes interactivo.

En las prácticas de clase se observa dificultad en la ubicación espacial, manejo de lateralidad, falta de comprensión y relación de los conceptos trabajados con las figuras y los cuerpos geométricos, además debilidades para desarrollar procesos de comunicación en las competencias matemáticas.

Al preguntársele a los estudiantes por la comprensión de un tema, pocas veces ellos pueden expresar en dónde radica su dificultad o expresar en qué estado están los procesos de razonamiento y de resolución de problemas debido al escaso

desarrollo de la habilidad comunicativa en esta asignatura. Con frecuencia requieren que el docente explique el enunciado del problema a resolver, para poder desarrollarlo y buscar la correcta solución. Los conceptos matemáticos que manejan carecen de conceptualizaciones por parte de los estudiantes, no definen ciertos términos que constantemente usan. La falta de comprensión lectora se evidencia cuando ellos se enfrentan a una situación textual problemática y no identifican el asunto a resolver, ni los medios que se requieren para la solución.

Lo anterior, debido a que en las metodologías contempladas dentro de los lineamientos curriculares tradicionales se le ha dado prelación al desarrollo de un pensamiento numérico, simbólico, dejando de lado el proceso de comunicación que permita expresar el pensamiento matemático significativo y comprensivo; la no incorporación de habilidades o competencias ciudadanas integradas con las habilidades matemáticas (razonamiento cuantitativo) refleja la débil percepción de la realidad en relación al uso de las matemáticas en contextos cotidianos.

Habilidades como la comprensión, aplicación de métodos (matemáticos) y argumentación que son evaluados por el MEN[2] pueden ser adaptadas dentro de una coherencia vertical aplicadas a las necesidades y contexto en el cual se desenvuelven los estudiantes en cada uno de sus grados respectivos.

> "La comunicación matemática en el proceso se refiere a las interacciones de construcción cultural que se producen entre los autores del proceso y dentro y fuera de las aulas de clase en el contexto de la educación y de la vida social"[3].

[2] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de competencias. Bogotá, D.C: 2006.
[3] RUBINSTEIN, Sergei. Principios de psicología general, citado por FAUSTINO, Arnaldo; DEL POZO, Gutiérrez; ARROCHA, Olaysi. Fundamentos epistemológicos que intervienen en el desarrollo de la comunicación matemática [en línea]. Fundación Universitaria Andaluza Inca Garcilaso. 2013. P. 1. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en: http://www.eumed.net/libros-gratis/2013/1279/index.htm

En la búsqueda de estrategias que permitan disminuir estas dificultades en los estudiantes, se pretende fortalecer el proceso comunicativo en Matemática a través de la implementación del software dinámico de Geometría “GeoGebra”. Mediante el uso de esta herramienta tecnológica se espera despertar el interés por el estudio de la geometría y a partir de ella desarrollar habilidades comunicativas tales como: argumentar, definir, demostrar interpretar, decodificar y explicar.

1.1 PREGUNTAS DEL PROBLEMA

Por lo anterior surgen las siguientes preguntas directrices y la pregunta motivo de la investigación:

1.1.1 Pregunta General. ¿Cómo mejorar el desarrollo de habilidades en el proceso de Comunicación Matemática, a través de la incorporación de un Software matemático para la enseñanza de la Geometría, en los estudiantes del grado Sexto del Colegio Luis Camacho Rueda de San Gil?

1.1.2 Preguntas Específicas.

- ¿Cómo desarrollar las habilidades comunicativas de los estudiantes del grado sexto en el desempeño del área de Matemática?
- ¿Qué estrategias se pueden implementar para fortalecer las habilidades comunicativas de los estudiantes?
- ¿Cómo desarrollar las habilidades del pensamiento crítico y matemático de los estudiantes del grado Sexto a partir de la implementación de un software?

2. JUSTIFICACIÓN

La importancia que tienen las Matemáticas en la vida cotidiana, sea como un instrumento que ayude con la contabilización y operaciones que se realicen en forma prácticamente automática como lo es en el momento de hacer Compras y Ventas, o bien ayuda a ejercitar la inteligencia a través de operaciones que requieren de lógica, razonamiento y deducción.

Pero la utilidad que deriva de esta ciencia formal tiene una gran variedad de aplicaciones, siendo auxiliar de una gran variedad y cantidad de ciencias, y una de las que en esta ocasión es de la atracción de la presente investigación, la Geometría, que originalmente surgió, de la observación de las características de la tierra y el mundo en general.

Como su nombre lo indica, de lo que se encarga principalmente es de analizar las formas de las cosas, para posteriormente realizar una medición de cada una de sus características y cualidades, teniendo distintas formas de realizarse e inclusive los más variados instrumentos, como el uso del compás para poder realizar y mensurar figuras circulares perfectas, como también la regla, entre otros materiales didácticos.

Un conocimiento geométrico básico es indispensable para desenvolverse en la vida cotidiana: Orientarse reflexivamente en el espacio; Hacer estimaciones sobre formas y distancias; Hacer apreciaciones y cálculos relativos a la distribución de los objetos en el espacio.

Howard Gardner en su teoría de las inteligencias múltiples“considera al manejo espacial una inteligencia ya que es usado para representar y manipular información

en el aprendizaje y en la resolución de problemas y plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico"[4].

La enseñanza de esta asignatura en la institución permite desarrollar un pensamiento geométrico espacial basado en la deducción, la intuición y la comprensión de las figuras bi y tridimensionales.

Para dar validez a la importancia que tiene la enseñanza de esta asignatura se debe superar varios inconvenientes que surgen desde la infraestructura hasta las herramientas de aprendizaje, desde las expectativas de la asignatura hasta la aplicabilidad de lo aprendido ante la realidad.

Lo anterior sumado a las debilidades vistas en las pruebas saber en el área de Matemáticas, y Lectura Crítica, pueden obedecer a esa forma tradicional de enseñar esta asignatura, donde los problemas son ejercicios de razonamiento cuantitativos trabajados después de ciertas teorías, conceptos, problemas presentados de manera descontextualizada, mediante una educación tradicional, haciendo que la asignatura no sea significativa para el estudiante. Es ahí donde se objeta una de las grandes debilidades de los estudiantes del grado Sexto, está en la dificultad que presentan para expresar sus ideas, interpretar textos y comunicarse en el plano lingüístico y en el Matemático, todo esto debido a la falta de estimulación de la inteligencia lingüística, la inteligencia lógico – matemática y la inteligencia espacial, necesarias para el abordaje de estos problemas, es aquí en donde se nota el bajo desempeño, precisamente en el momento de analizar y buscar la opción correcta para responder al problema adecuadamente. Además cuando encuentran términos matemáticos, no identifican el proceso a seguir, la falta de comprensión lectora se

[4] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de competencias. [en línea].. Bogotá, D.C: 2006. p. 51: [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-339975_matematicas.pdf

refleja en el momento de interpretar un contexto, pero para ello actualmente el estudiante necesita que el docente explique el enunciado para poder iniciar el desarrollo del problema, en donde muchas veces el docente no sabe cómo estimular dichas inteligencias para que el estudiante lo haga por si sólo y evitar un bajo nivel en el proceso matemático de los estudiantes, debido al escaso análisis que se demuestra en la falta de interpretación y solución de los problemas, de la mínima transferencia que hacen de los conocimientos adquiridos a su entorno real, todo esto debido al débil proceso comunicativo que tienen los estudiantes objeto de este proyecto.

Desde el punto de vista institucional el área de matemática debe proveer las herramientas necesarias para lograr desarrollar un pensamiento analítico que permita generar competencias respecto de la resolución y planteamiento de problemas. Así mismo fortalecer los procesos que contribuyan a mejorar la competencia comunicativa. Las habilidades relacionadas con la argumentación, interpretación y explicación, En consecuencia, la institución debe implementar las estrategias necesarias que permitan desarrollar en los estudiantes las habilidades matemáticas requeridas para promover la generación de competencias comunicativas.

Ahora bien si tenemos en cuenta que esta sociedad está inmersa en el desarrollo tecnológico, donde el avance de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) han modificado la forma de vivir, de las cuales no está exenta el área de Matemática, específicamente en Geometría a través de tecnologías que se ofrecen virtualmente a través de la red como el uso de Software dinámicos, los cuales se convierten en un recurso muy importante para hacer que los estudiantes se acerquen positivamente al mundo geométrico y puedan desarrollar las habilidades y competencias propias de la asignatura.

Con la aplicación de este proyecto se derivan otras acciones metodológicas como el trabajo colaborativo, la creación de situaciones y, el fortalecimiento de competencias y habilidades que buscan generar un pensamiento matemático basado en el fortalecimiento de los procesos comunicativos que posibiliten al estudiante las herramientas necesarias con las cuales él pueda hacer juicios críticos, analíticos de su entorno y de los procesos relacionados con el pensamiento matemático que le permitan conocer su realidad y lo provean de los elementos necesarios para lograr comprender, interpretar, explicar y analizar el planteamiento y la resolución de problemas.

La implementación del software como prueba piloto dentro del aula de clase y su uso por parte de los estudiantes, permitió ver un panorama claro de la situación problemática, al mismo tiempo, proporcionó una serie de resultados que fueron objeto de estudio y análisis y así apreciar de una forma medible el progreso del estudiante en relación a las competencias de comunicación matemática. De acá surgieron nuevas pautas que permitieron re-contextualizar y reinterpretar la propuesta curricular institucional, esta nueva propuesta buscará adaptarse al contexto sociocultural institucional implementando esta herramienta tecnológica como parte de una estrategia pedagógica dando solución a las nuevas necesidades de aprendizaje del estudiante, fortaleciendo sus competencias cognitivas, concretizándose en la perspectiva del PEI haciendo posible el objetivo educativo de la institución.

A nivel institucional, la aplicación de esta estrategia pretendió desarrollar en los estudiantes del grado sexto habilidades de pensamiento, las cuales les permitan una mejor comprensión del espacio físico donde se desenvuelven, asimismo hacer una interpretación de su realidad vista desde una dimensión geométrica. Con lo anterior se logró fortalecer los procesos de comunicación, elemento importante en la construcción de un pensamiento crítico y reflexivo entorno a su rol como estudiante y frente a su responsabilidad como individuo perteneciente a una sociedad.

3. OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GENERAL

Fortalecer habilidades en el proceso de comunicación matemática a través de la incorporación de software dinámico de geometría en los estudiantes del grado sexto del Colegio Luis Camacho Rueda.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar las debilidades presentadas por los estudiantes en el desarrollo de las habilidades comunicativas relacionadas con el estudio en el área de Matemáticas
- Diseñar estrategias didácticas que permitan despertar el interés de los estudiantes y desarrollar sus competencias comunicativas, en los procesos matemáticos.
- Verificar en los procesos geométricos la apropiación de las habilidades de comunicación de los estudiantes a través de la expresión oral y escrita.

4. MARCO DE REFERENCIA

4.1 ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

En este aparte se destacan reseñas bibliográficas relacionadas con investigaciones llevadas a cabo a nivel internacional, nacional y local, que guardan una estrecha relación con el proceso matemático de la comunicación. A pesar de encontrarse muchas referencias de proyectos hechos con base en el software de geometría dinámica GeoGebra, en muchos casos, estos se realizaron para el estudio de determinadas figuras geométricas, pero en muy pocos se encuentran proyectos de apoyo al fortalecimiento de un proceso matemático. Las mostradas en este documento son aquellas que más aportan luces para el desarrollo de esta propuesta investigativa.

4.1.1 Antecedentes internacionales. Crespo[5] del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" de la Universidad de Buenos Aires en Buenos Aires (Argentina), realizó una investigación sobre la base del reconocimiento de las dificultades que presentan los estudiantes tanto para comprender la necesidad de las demostraciones en la matemática, como para realizarlas. El concepto de demostración es uno de los conceptos matemáticos centrales en la matemática y por lo tanto es indispensable su transmisión a los alumnos a partir de la escuela media. Sin embargo no siempre se realiza de manera satisfactoria. En él se presentan brevemente algunas concepciones que tienen los docentes de matemática y los estudiantes de licenciatura de matemática en relación con la importancia de trabajar con argumentaciones, justificaciones y otras

[5] CRESPO, Cecilia R. Crespo; FARFÁN, Rosa María. Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 2005, vol. 8, no 3, p. 287-317.

habilidades comunicativas para llegar a hacer demostraciones en el aula de matemática.

Ángela Ramírez[6] en la Universidad Autonomat de Barcelona, en la facultad de ciencias de la educación en España, realizó el proyecto de grado para la obtención del grado de Máster Oficial de iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales titulado: "La competencia de comunicación en el desarrollo de las competencias matemáticas en secundaria" en el año 2009. Esta investigación llevada a cabo en Cataluña con la participación de 24 docentes de matemáticas de secundaria de varias instituciones educativas. La información se obtuvo de un cuestionario sobre competencias matemáticas y particularmente sobre el proceso de comunicación. Las contribuciones más relevantes de esta investigación tienen que ver con los aportes de los participantes para desarrollar el proceso de comunicación en matemáticas y las estrategias que utilizan para promover su fortalecimiento, encontrando que en la mayoría de los casos los aportes hechos por los profesores participantes están muy cercanos a lo planteado en la literatura existente sobre la competencia de comunicación en matemáticas en España.

4.1.2 Antecedentes nacionales. A nivel nacional, referencio González[7] con su trabajo "Estrategias para Optimizar el uso de las TIC en la Práctica Docente que Mejoren el Proceso de Aprendizaje" de la Universidad Autónoma De Bucaramanga. La contribución más relevante de este trabajo es ver el abordaje que se da a las TIC para fortalecer el proceso de enseñanza de las matemáticas.

[6] RAMÍREZ, Ángela. La competencia de comunicación en el desarrollo de las competencias matemáticas en secundaria. Tesis. Universidad Autonoma de Barcelona. Cataluña. 2009.
[7] GONZÁLEZ. Luis Carlos. Estrategias para Optimizar el Uso de las TIC´ s en la Práctica Docente que Mejoren el Proceso de Aprendizaje-Edición Única. 2012.

Los estudiantes de pre-grado de la licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad de Antioquia, Fernández Tobón Sandra Patricia, Velásquez Padilla Marisol, Peña Aparicio Yuri Maríahan contribuido en mi investigación con su proyecto "Desarrollo de la Competencia Comunicativa en la Construcción de Representaciones Geométricas, a través del uso de Materiales Físicos y Virtuales" [8]puesto que su estrategia pedagógica tiene como fin el de favorecer la comunicación matemática a través de la expresión escrita, el intercambio de opiniones, la generación de discusiones y realizar diversas representaciones acerca del objeto de conocimiento. Ellas llevaron a cabo una intervención, en la Institución Educativa Turbo con estudiantes del grado 9°, con el objetivo de contribuir al desarrollo de la competencia comunicativa, a partir de la construcción de representaciones geométricas, mediante el uso de material físico y virtual. Las autoras diseñaron planes de clase que incluyeron actividades en las que se utilizaron manipulables (físicos y virtuales), propiciando ambientes dinámicos de aprendizaje.

El análisis de los resultados se realizó desde tres aristas: las habilidades de la competencia comunicativa, el impacto generado en los estudiantes con respecto del uso de los materiales físicos y virtuales y la percepción de los estudiantes hacia las matemáticas. En la investigación se hizo énfasis en el análisis de las habilidades de comunicación de los estudiantes que participaron en este proyecto.

4.1.3 Antecedentes locales. Silvia Johanna Rojas y Sonia Rocío Suarez[9] estudiantes de pregrado de Matemáticas de la UIS, desarrollaron una propuesta didáctica alrededor de las competencias comunicativas en Matemáticas, en la que

[8] FERNÁNDEZ TOBÓN, Sandra Patricia; VELÁSQUEZ PADILLA, Marisol; PEÑA APARICIO, Yuri María. Desarrollo de la competencia comunicativa en la construcción de representaciones geométricas, a través del uso de materiales físicos y virtuales. Tesis Licenciatura en Matemáticas y Física. 2014.

[9] CÁLIZ, Sonia Rocío Suárez; SEPÚLVEDA, Silvia Johanna Rojas; PICO, Sandra Evely Parada. Actividades de refuerzo para estudiantes de once grado alrededor de sus habilidades comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad. *Revista Científica*, 2013, p. 418-422.

diseñaron experiencias que posibilitaron el desarrollo de habilidades comunicativas en estudiantes de once grado, demostraron en una prueba realizada que las bajas calificaciones, obedecían a la inadecuada interpretación de los enunciados y no a al escaso dominio en los procedimientos requeridos. Diseñaron un plan de intervención, el cual consistió en una prueba diagnóstica inicial y posterior a ella se aplicaron talleres que buscaban reforzar las debilidades comunicativas que se evidenciaron en el diagnóstico realizado, tales como la deficiente interpretación de un problema, las respuestas incoherentes que se formulaban y la relación intrínseca entre pensamiento y lenguaje.

Así mismo, referencio el trabajo de Carlos René Bautista Niño[10]: "Desarrollo del proceso de comunicación en la enseñanza y aprendizaje de la geometría con la mediación de software matemático interactivo", investigación presentada en el año 2017 en la Universidad Industrial de Santander. Este proyecto buscaba fortalecer habilidades comunicativas en estudiantes de los últimos grados de educación primaria de una escuela rural del departamento de Santander, a través del estudio de polígonos regulares. La contribución de este trabajo a mi investigación es que sirvió como apoyo para diseñar las secuencias didácticas y enfocar las actividades propuestas al fortalecimiento a las habilidades comunicativas.

[10] BAUTISTA NIÑO Carlos René: Desarrollo del proceso de comunicación en la enseñanza y aprendizaje de la geometría con la mediación de software matemático interactivo. Universidad Industrial de Santander. 2017.

5. MARCO CONCEPTUAL

5.1 LENGUAJE MATEMÁTICO Y COMUNICACIÓN

Las matemáticas, al igual que otras áreas del saber, tienen un lenguaje propio y particular con el cual se transmite conocimiento, con el que ellas pueden comunicarse, con el que se expresan y representan, se leen y se escriben. Es por ello, que tanto para el docente como para el estudiante, debe ser una tarea primordial llegar al dominio de ese lenguaje matemático, sabiendo que si lo logra, el propósito de ser competente en esta área está muy cerca.

La utilización del lenguaje matemático es una acción progresiva, es decir, comienza con un contacto incipiente en las primeras edades, pero debe aumentar su uso, representación, complejidad y léxico en la medida que avanza el proceso escolar.

Gracias a la amplia utilización de diferentes sistemas de notación simbólica (números, letras, tablas, gráficos), las matemáticas son útiles para representar de forma precisa informaciones de diversas vertientes. Pero, no es únicamente el uso de las notaciones o de diversos sistemas de representación lo que da el conocimiento matemático, el lenguaje es parte de la base en la que la persona competente matemáticamente halla un soporte firme para serlo.

Quien domina el lenguaje matemático es hábil al comunicar, quien comunica puede interpretar y expresar situaciones propias de los contextos matemáticos en un lenguaje determinado y específico. Estas habilidades comunicativas en la solución de un problema matemático, son acciones relacionadas de manera cognoscitiva

que lleva implícito la propia actividad verbal, tales como: audición y expresión oral, resumir, argumentar, definir, dialogar, comentar y discutir[11].

Algunos especialistas manifiestan que la comunicación para el proceso de aprendizaje de las matemáticas es un componente esencial, porque a través de la comunicación, los estudiantes reflexionan, clarifican y amplían sus ideas y la comprensión sobre las relaciones y razonamientos matemáticos[12]. La comunicación matemática está muy asociada con acciones como plantear y resolver problemas en donde se estructuran actividades secuenciales con base a "preguntas, respuestas y razones"; formalizar representaciones matemáticas a través de la reflexión como herramienta para resolver problemas; y debates dialécticos necesarios para el proceso de mejora con base en argumentaciones[13].

Bajo estas premisas, la comunicación no se trata entonces de responder a las preguntas planteadas por el profesor con palabras, números, imágenes y símbolos, se trata de crear argumentos matemáticos en donde el estudiante se apoye en los símbolos, las expresiones numéricas, los diagramas o cualquier sistema de representación para manifestarlos.

La comunicación matemática como se ha dicho, hace parte de una base para lograr la competencia, pero no es un proceso que se pueda abordar de un modo aislado, sino que está ligado a otros como la resolución de problemas, la ejercitación, el razonamiento y la representación, al momento de aprender o enseñar esta asignatura.

---

[11] FAUSTINO, Arnaldo; DEL POZO, Gutiérrez; ARROCHA, Olaysi. Fundamentos epistemológicos que intervienen en el desarrollo de la comunicación matemática. *Editado por la Fundación Universitaria Andaluza Inca Garcilaso para eumed. net, Disponible en: http://www. eumed. net/libros-gratis/2013/1279/index. htm*, 2013.

[12] COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. ¿Qué hay que saber de las Competencias Matemáticas?. [en línea. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/home/1592/article-103987.html

[13] VÁZQUEZ, Edith Arévalo. Propuesta pedagógica para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, desde la comunicación. Procesos de enseñanza y aprendizaje: estudios en el ámbito de la educación media superior y superior. En: Enseñanza de las matemáticas. Plan de Estudios 2011

Este proceso está conformado por unas habilidades propias, las cuales, si se fortalecen en las prácticas pedagógicas, transformarán el aula en un espacio para el aprendizaje colectivo, donde todos podrán presentar sus argumentos, justificaciones o explicaciones en términos que sean de igual comprensión para todos, sin dar espacio a otras interpretaciones. Al hablar un mismo idioma, los estudiantes comunican y lo manifiestan "cuando trabajan en grupos cooperativos, cuando explican un algoritmo para resolver ecuaciones, cuando construyen y explican una representación gráfica de un fenómeno del mundo real o cuando propone conjeturas sobre una figura geométrica[14]".

5.2 DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO

El pensamiento espacial no sólo se considera como una herramienta necesaria para describir el espacio circundante, comprenderlo e interactuar en él, sino que, como disciplina científica, que descansa sobre importantes procesos de formalización que son ejemplo de rigor, abstracción y generalidad[15]. De acuerdo al MEN el pensamiento espacial se considera como una serie de procesos de tipo cognitivo, a través de los cuales las representaciones mentales de los objetos del espacio se construyen y se manipulan, se establecen las relaciones entre ellas y sus representaciones. Estos sistemas geométricos se construyen a través de la modelación del espacio tanto para la situación en la que los objetos que se encuentran como cuando se encuentran en movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso que avanza desde un espacio que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, entre otros, a un espacio abstracto, relacionado con la capacidad de

[14] La comunicación. [citado el 22 de octubre de 2017]. P.10. Disponible en: http://cmap.upb.edu.co/rid=1197584504359_194526086_999/La%20comunicaci%C3%B3n.doc

[15] MAMMANA, C.; VILLANI, V. Geometry and geometry-teaching through the ages. *New icmi studies series*, 1998, vol. 5, p. 1-3.

representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas tomando sistemas de referencia[16].

Este proceso de construcción del espacio, está condicionado e influenciado tanto por las características cognitivas individuales como por la influencia del entorno físico, cultural y de aula, por lo tanto, el estudio de la geometría en la escuela, debe favorecer estas interacciones. Se busca entonces que la exploración de los objetos en el espacio se haga a través de una herramienta tecnológica, con palabras propias del lenguaje matemático, resolviendo problemas geométricos con la figura objeto de estudio: el triángulo, de manera que puedan reconocer sus características y elementos esenciales, los nomine, clasifique y construya diferenciando sus atributos y particularmente haga uso de sus propiedades.

5.3 ¿QUÉ IMPLICA EL PROCESO DE LA COMUNICACIÓN MATEMÁTICA?

La comunicación matemática según NCTM[17] es un proceso que implica:

- Organizar y consolidar el pensamiento matemático a través de la comunicación.
- Expresar el pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas.
- Analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los demás.
- Usar el lenguaje semiótico para expresar ideas matemáticas con precisión.

Teniendo en cuenta dichas implicaciones, para conseguir la competencia comunicativa se deben fortalecer entonces las habilidades de este proceso. ¿Y qué son entonces las habilidades matemáticas?

---

[16] SEPÚLVEDA, Ramón Emilio; OSPINA, Carlos Humberto; GONZÁLEZ, José Manuel. Pensamiento espacial y sistemas geométricos. 2006.
[17] NCTM. Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: Thales National Council of Teachers of Mathematics. 2003.

5.3.1 Habilidades matemáticas. Las habilidades matemáticas, según Hernández[18] son reconocidas como aquellas capacidades que se constituyen durante la realización de las acciones y operaciones que tienen un carácter fundamentalmente matemático. Es decir, la habilidad matemática es la capacidad del estudiante, al abordar una actividad matemática, que le permite indagar o utilizar conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos matemáticos, hacer distintos tipos de representación, emplear estrategias de trabajo, establecer conjeturas, realizar razonamientos, emitir juicios y resolver problemas matemáticos.

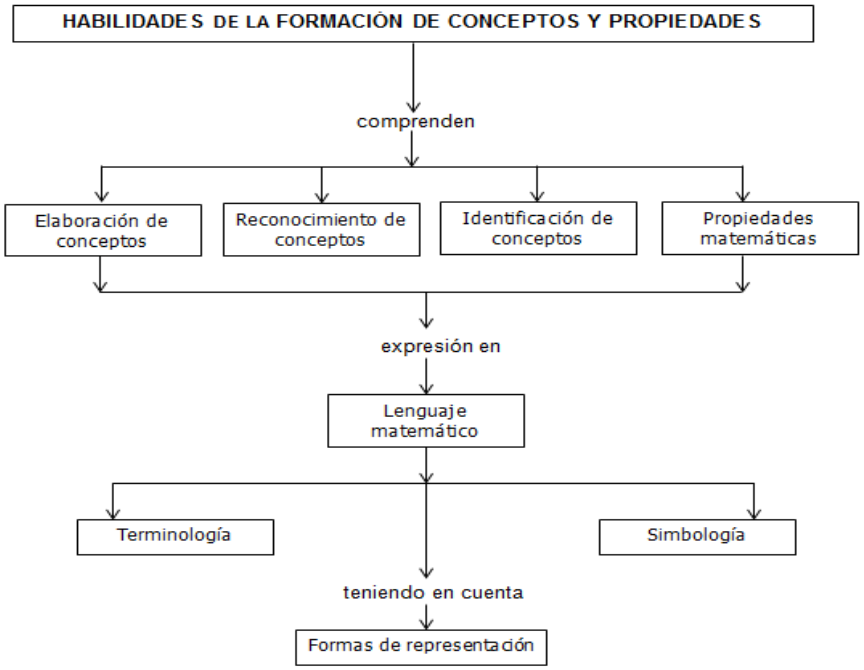
Las habilidades matemáticas evidencian el nivel de dominio conceptual de un estudiante, la capacidad de buscar alternativas de solución a un problema matemático en cualquier contexto. Y en el proceso de resolución de un problema, sus habilidades matemáticas le permiten establecer conjeturas, predecir un posible resultado y establecer las relaciones de conexidad de las variantes del problema usando el lenguaje apropiado, es decir, sus habilidades lo harán diestro en los procesos y el resultado será el dominio de la actividad matemática.

5.3.2 Habilidades matemáticas generales. Autores como Hernández[19] establece una serie de habilidades generales en matemáticas como son:

5.3.2.1 Habilidades de la formación de conceptos y propiedades**.** Son aquellas que sirven para analizar y comprender un problema.

[18] HERNÁNDEZ, Carlos, et al. Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 2012.
[19] Ibid., p. 1

Figura 1. Habilidades de la formación de conceptos y propiedades



5.3.2.2 Habilidades de uso de procedimientos algorítmicos

Figura 2. Habilidades de uso de procedimientos

5.3.2.3 Habilidades de resolución de problemas

Figura 3. Habilidades de resolución de problemas

5.3.3 Habilidades específicas del proceso de comunicación. Estas habilidades comprenden la capacidad de interpretar, entender y comunicar información geométrica, ya sea a través de una representación gráfica o de forma escrita, a través del uso de símbolos y léxico propios de la geometría. Así mismo, la capacidad de expresar sus predicciones, conjeturas, explicaciones, argumentaciones o justificaciones utilizando un lenguaje matemático, teniendo en cuenta los conceptos, teoremas, procedimientos y propiedades geométricas. Se evidencian al interpretar la información de un problema para empezar a resolverlo y al discutir con sus pares las posibles estrategias de resolución del mismo. A continuación se hace referencia específica de cada una de ellas.

5.3.3.1 Habilidad de Interpretación. Interpretar es adjudicar un significado a las expresiones matemáticas para que estas adquieran sentido en función del propio

objeto matemático o en función del fenómeno o problemática real de que se trate, Hernández[20].

Interpretar es una habilidad que consiste en captar una información que está presente en un contexto determinado, atribuyéndole un significado dentro de un campo del conocimiento, lo cual se hace a partir de las experiencias previas del individuo[21]:

¿Qué procesos de pensamiento se requieren para interpretar?

Al momento de tratar de resolver un problema geométrico, el estudiante deberá:

- Determinar en qué consiste el problema.
- Identificar y definir las variables que intervienen en la situación.
- Valerse de los sistemas de representación para obtener una vía de solución.
- Identificar las relaciones entre las variables involucradas en la situación.

La interpretación sigue unos criterios de veracidad, los cuales no implican solo la comprensión de los contextos sino que se debe dirigir a la situación concreta y reflexionar sobre sus implicaciones y los procesos de pensamiento involucrados con el recuerdo, comprensión, análisis, medición, etc.[22]

*5.3.3.2 Habilidad de Justificación***.** La palabra justificar es un vocablo que presenta un uso lingüístico recurrente y aplicado en distintas situaciones como:

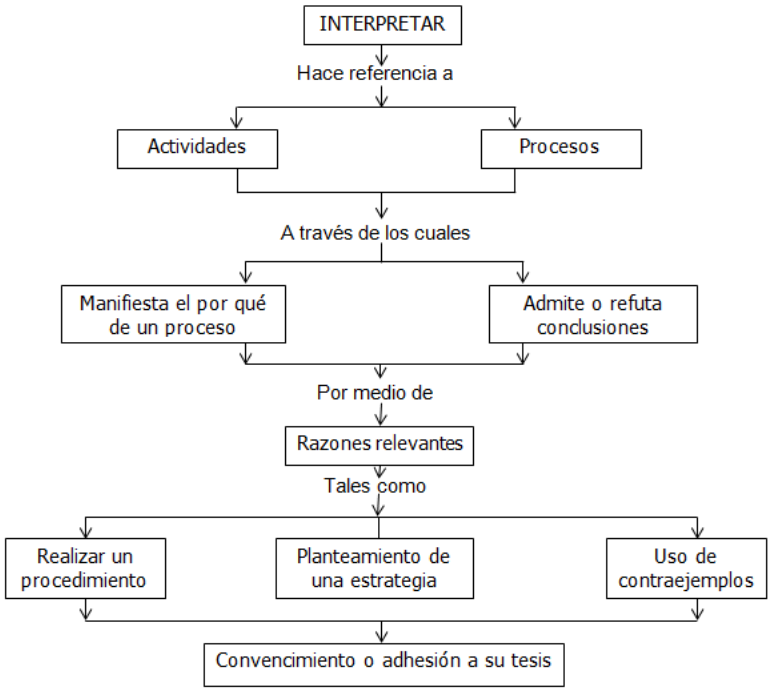
---

[20] ibíd., p. 1
[21] ROJAS, Víctor Miguel Niño. *Los procesos de comunicación y del lenguaje: para su aplicación en cursos y talleres de nivel superior*. Ecoe, 1985.
[22] KLENOWSKI, Val. *Desarrollo del portafolios para el aprendizaje y la evaluación: procesos y principios*. Narcea Ediciones, 2004.

- Demostrar algo con pruebas.
- Explicar un comportamiento con base en ciertas razones.
- Sustentar con argumentos matemáticos algún procedimiento, con el fin de lograr adhesión a una tesis[23].

Jorba[24] por su parte hace un aporte muy interesante sobre la justificación, la cual se sintetiza así:

Figura 4. Interpretar



5.3.3.3 Habilidad de Argumentación. Aunque la noción de argumentación matemática debe interpretarse en el contexto de esta área, se fundamenta en la

[23] RIGO, Mirela; ROJANO, Teresa; PLUVINAGE, François. Las prácticas de justificación en el aula de matemáticas. 2011.
[24] ALDÁMIZ-ECHEVARRIA, María del Mar, et al. A.(2000).*¿. Cómo hacerlo? Propuestas para educar en la diversidad*.

noción más amplia de argumentación. Al respecto Sardá[25] habla de la argumentación como:

> "Actividad social, intelectual y verbal que sirve para justificar o refutar una opinión y que consiste en hacer declaraciones teniendo en cuenta al receptor y la finalidad con la cual se emiten. Para argumentar hace falta elegir entre diferentes opiniones o explicaciones y razonar los criterios que permiten evaluar como más adecuada la opción elegida".

Para Herrera la habilidad de argumentación cobra importancia en la medida en que mejora la competencia comunicativa matemática, ya que el estudiante cuando requiera argumentar, necesariamente deberá emplear de manera apropiada el lenguaje matemático[26]. Esta destreza requiere:

- Entender la situación problema.
- Elegir el medio de argumentación adecuado y formular un juicio a partir de identificar un concepto, plantear una estrategia fundamentada y realizar un procedimiento.

Esta habilidad es fundamental no solo para el desarrollo del pensamiento matemático, sino para organizar y plantear secuencias, formular conjeturas y corroborarlas, así como establecer conceptos, juicios y razonamientos que den sustento lógico y coherente al proceso o solución encontrada[27].

---

[25] REVEL CHION, Andrea Fernanda; MEINARDI, Elsa; ADÚRIZ BRAVO, Agustín. La argumentación científica escolar: contribución a la comprensión de un modelo complejo de salud y enfermedad. *Ciência & Educação (Bauru)*, 2014, vol. 20, no 4. P. 123.

[26] LARRAÍN, Antonia; FREIRE, Paulina; OLIVOS, Trinidad. Habilidades de argumentación escrita: Una propuesta de medición para estudiantes de quinto básico. *Psicoperspectivas*, 2014, vol. 13, no 1, p. 94-107.

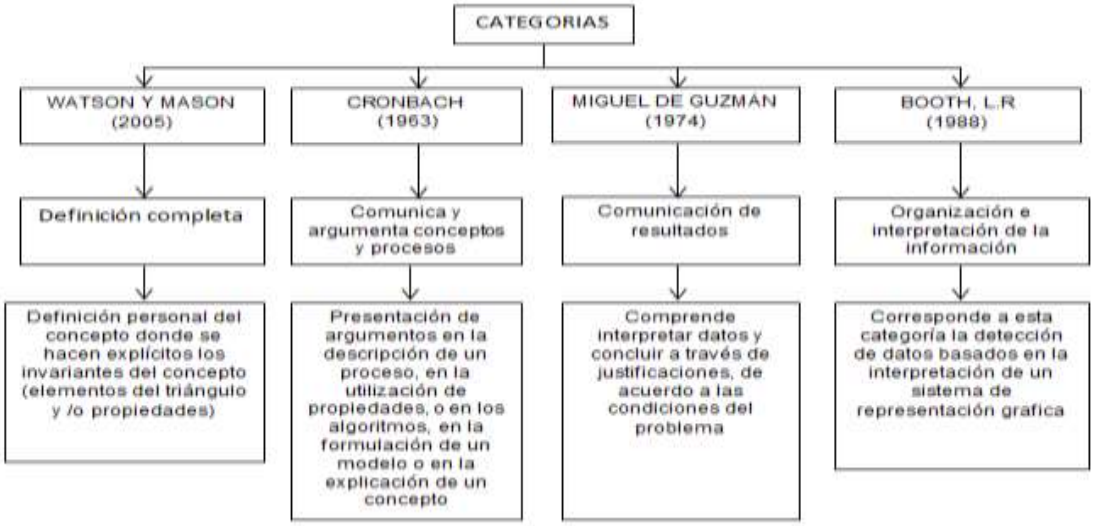
[27] ZAVALETA PORTILLO, Edgar. Capacidades matemáticas. 2013. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en: https://es.slideshare.net/edken/capacidades-matematicas-2013ed

El fortalecimiento de la habilidad de argumentar, trae consigo el desarrollo de la competencia comunicativa, pues cuando un estudiante argumenta, maneja de manera adecuada el lenguaje matemático[28]. Cuando se trata del papel del docente, para desarrollar la habilidad de argumentar, el maestro debe contar con suficientes herramientas para aprender a plantear preguntas que requieran argumentaciones u otras actividades escritas u orales (diálogos) que fortalezcan el proceso de comunicación a través de la expresión matemática.

5.4 SECUENCIA DIDÁCTICA

En esta secuencia didáctica se tuvieron en cuenta los aportes de Cronbach Watson y Mason; Miguel de Guzmán y Booth[29] en las categorías presentes en la investigación.

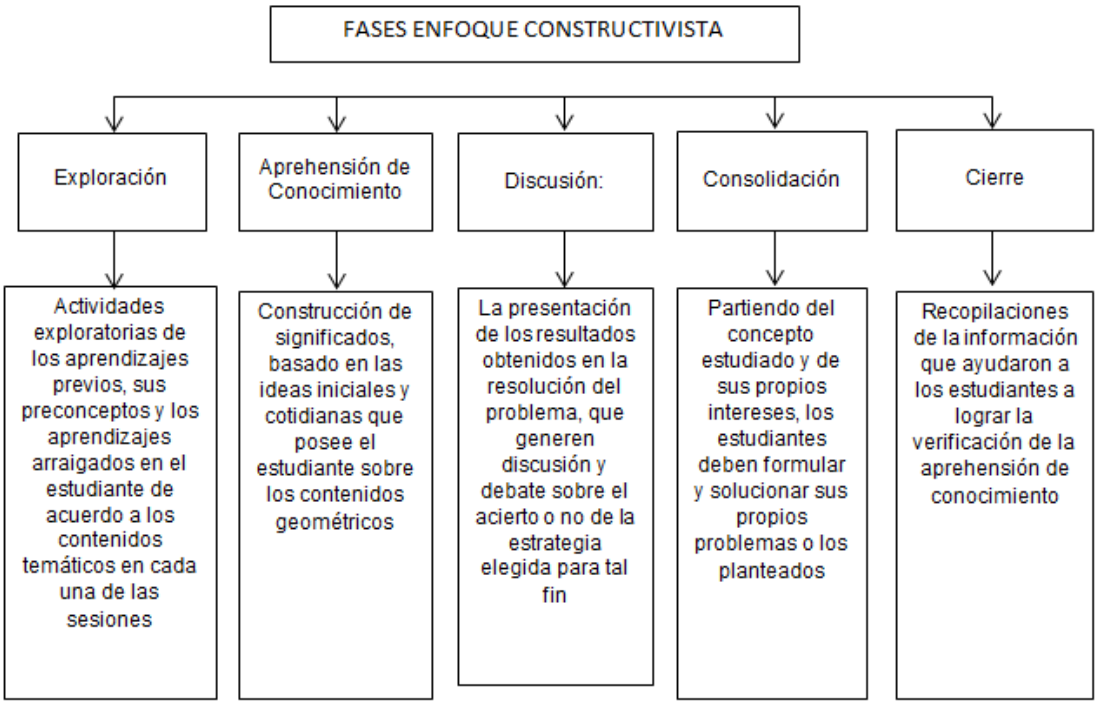
Figura 5. Categorías



[28] REVEL CHION, Andrea Fernanda; MEINARDI, Elsa; ADÚRIZ BRAVO, Agustín. La argumentación científica escolar: contribución a la comprensión de un modelo complejo de salud y enfermedad. *Ciência & Educação (Bauru)*, 2014, vol. 20, no 4. P. 123.

[29] BOOTH, Tony. Guía para la evaluación y mejora de la educación inclusiva Index for inclusion Desarrollando el aprendizaje y la participación en las escuelas. *LEA*, 2000, vol. 1997, p. 98.

Figura 6. Fases enfoque constructivista



6. METODOLOGÍA

La actual investigación es de tipo cualitativo, en esta temática de la investigación, se mencionan las diferentes fases del proceso como: la contextualización, el enfoque y diseño metodológico, la población objeto del estudio, los instrumentos empleados en la recolección de datos y el análisis de resultados. La investigación admitirá reconocer la incidencia que tiene el uso del software de geometría dinámica GeoGebra en el fortalecimiento del proceso de comunicación, y en la resolución de problemas.

6.1 CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La presente investigación se llevó a cabo en el Colegio Luis Camacho Rueda, institución de carácter oficial, ubicada en el municipio de San Gil (Santander), la cual ofrece una educación formal con énfasis en educación ambiental y sistemas.

El colegio es única sede y ofrece educación desde el nivel de preescolar hasta el grado undécimo.

El proyecto de investigación se desarrolló con los 33 estudiantes de grados 6º 1 del Colegio Luis Camacho Rueda.

6.2 ENFOQUE METODOLÓGICO

A partir de la investigación acción se pretende realizar un trabajo reflexivo e investigativo sobre la experiencia en el aula. Tomando la investigación como la base de la metodología a realizar, entendiendo que la labor docente es un proceso de constante búsqueda, reflexión y retroalimentación. Elliott, el principal representante de la investigación-acción desde un enfoque interpretativo la define como «un

estudio de una situación social con el fin de mejorar la calidad de la acción dentro de la misma[30]».

La investigación-acción en el presente proyecto facilitará indagar, explorar, conocer, reflexionar y fortalecer los procesos relacionados con elementos de la comunicación en el estudio de la geometría.

Desde un enfoque de tipo cualitativo, se desarrolló el proyecto. Al respecto, Hernández[31], afirma que este enfoque "utiliza recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación y puede o no probar hipótesis en su proceso de interpretación".

En términos generales, este enfoque busca "describir sucesos complejos en su medio natural, comprender y profundizar los fenómenos en relación con el contexto, buscando de esta manera comprender la perspectiva de los participantes acerca de los fenómenos que los rodea y profundizar en sus experiencias, perspectivas, opiniones y significados" Hernández[32].

La investigación permitió puntualizar, comprender y explicar la incidencia que tiene el uso de un software de geometría dinámica, en el afianzamiento del proceso de comunicación, en el marco de la resolución de problemas de tipo geométrico del grado sexto 1 del Colegio Luis Camacho Rueda del municipio de San Gil.

---

[30] MURILLO TORRECILLA, Francisco Javier. Métodos de investigación en Educación Especial. Investigación Acción. [en línea]. 3ª Educación Especial. Curso: 2010-2011. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en: https://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Curso_10/Inv_accion_trabajo.pdf

[31] HERNÁNDEZ SAMPIERI, Roberto; FERNÁNDEZ COLLADO, Carlos; BAPTISTA LUCIO, Pilar. Metodología de la investigación. México: McGraw-Hill, 2003.

[32] Ibid, p. 1

6.3 DISEÑO METODOLÓGICO

Partiendo de la investigación-acción se debe mencionar a Lewin[33] quien definió a la investigación-acción como “una forma de cuestionamiento autoreflexivo, llevada a cabo por los propios participantes en determinadas ocasiones con la finalidad de mejorar la racionalidad y la justicia de situaciones, de la propia práctica social educativa, con el objetivo también de mejorar el conocimiento de dicha práctica y sobre las situaciones en las que la acción se lleva a cabo”. Según lo anterior el punto de partida del presente estudio está en la autorreflexión por parte de todos los participantes en esta propuesta.

Además es importante resaltar a Elliott[34] quien dice que la investigación-acción” se centra en el descubrimiento y resolución de los problemas a los que se enfrenta el profesorado para llevar a la práctica sus valores educativas. Supone una reflexión simultánea sobre los medios y los fines. Como fines, los valores educativos se definen por las acciones concretas que selecciona el profesorado como medio para realizarlos”. El compromiso del docente es fundamental para lograr que la investigación-acción permita proyectar situaciones académicas creativas con miras al fortalecimiento del desarrollo de los diferentes procesos. El modelo de Elliot[35] tiene punto de partida un modelo cíclico que comprende tres momentos: elaborar un plan, ponerlo en marcha y evaluarlo. En este modelo aparecen tres fases que son:

1. Identificación de una idea general
2. Planteamiento de las acciones que hay que realizar para modificar la práctica
3. Construcción del plan de acción.

---

[33] LEWIN, Kurt Laffite, et al. *La teoría de campo en la ciencia social*. 1988.
[34] ELLIOTT, Jhon. El cambio educativo desde la Investigación Acción [en línea]. Madrid: Morata S.L, 1993. p. 88. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en: https://books.google.com.co/books?isbn=8471123835
[35]Ibid, p.1

Un docente comprometido está en la búsqueda constante de estrategias de mejoramiento, por esto se tendrá en cuenta la propuesta de Lomax[36] quien define la investigación-acción como «una intervención en la práctica profesional con la intención de ocasionar una mejora». La intervención se basa en la investigación debido a que implica una indagación disciplinada.

Este tipo de investigación da importancia al fortalecimiento del proceso comunicativo y al papel que cumple el docente, al revisar su práctica pedagógica.

El papel del docente investigador es clave en este proceso, pues su intervención puede contribuir para resolver problemas pertinentes a la enseñanza y aprendizaje. El maestro en este tipo de investigación elige el objetivo de la misma, es decir, elige algo que quiere cambiar. En este caso en particular, se busca fortalecer uno de los procesos que garantizan la competencia matemática: el de la comunicación.

Al indagar sobre la propia práctica, el docente se convierte en un maestro reflexivo. Al trabajar en su medio, en su contexto, esto posibilita el enriquecimiento de la práctica porque en el transcurso de la investigación el docente puede intercambiar ideas con otros pares sobre el objeto de su investigación. Al finalizar la investigación, la institución educativa se verá favorecida, pues se comparten los resultados para beneficio de todos.

[36] LOMAX, Richard G. *A beginner's guide to structural equation modeling*. Psychology Press, 2004.

7. DESCRIPCIÓN DEL PROCESO METODOLÓGICO

7.1 FASE 1. PLANEACIÒN.

Esta fase es llamada fase de planeación o de planificación. Esta fase comprende las siguientes acciones:

1. Efectuar lectura de los resultados de las pruebas saber de los últimos dos años (2014 y 2015), para descubrir las debilidades tanto en procesos como en pensamientos matemáticos, lo que permite el plantear del problema de investigación.
2. Se diseñó una prueba diagnóstica basada en el conocimiento del triángulo, que respalden principalmente a determinar habilidades comunicativas teniendo en cuenta:

- Ángulos complementarios.
- Ángulos suplementarios.
- Teorema suma de los ángulos interiores de un triángulo.
- Clases de triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados.
- Clases de triángulos de acuerdo a la medida de sus ángulos.

La prueba diagnóstica que se diseñó, cumple con los siguientes propósitos:

- Determinar el nivel de aprehensión de conceptos geométricos (triángulos)
- Establecer el nivel de dominio de las habilidades del proceso de comunicación.
- Reconocer las fortalezas del proceso de comunicación que tienen los estudiantes.

- Identificar la capacidad de sustentación de argumentos, defensa de una tesis, o comprobación de una conjetura en la resolución de una situación matemática determinada.
- Reconocer las diferencias entre ángulos complementarios y suplementarios, como pre saber determinante para la construcción de un triángulo.
- Determinar la habilidad de interpretar que tienen los estudiantes, al identificar datos en un enunciado o en un gráfico.
- Determinar las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver problemas con la construcción de un triángulo.
- Identificar el tipo de propiedades que manejan en la representación de un triángulo.
- Detectar el nivel de manejo de las habilidades de comunicación (interpretar, argumentar y justificar), en la resolución de un problema matemático.

7.2 FASE 2. INTERVENCION

Esta fase es llamada de intervención. En ella se pone en marcha la secuencia didáctica diseñada para lograr el fortalecimiento de habilidades comunicativas a través del software de geometría dinámica. La estrategia se encamina de la siguiente manera:

Se realizaron dos secuencias didácticas cada uno con un propósito definido la primera secuencia didáctica se diseñó para que los estudiantes reconocieran las características generales y propiedades de los triángulos, a través de la resolución de un problema geométrico, buscando fortalecer las habilidades de justificación, argumentación e interpretación, mediante el estudio de las propiedades, características, elementos y sistemas de representación del triángulo.

La sesión dos fue diseñada para que los estudiantes reconocieran la propiedad de desigualdad triangular. Las actividades propias de la sesión permiten a los

estudiantes indagar acerca de las características, propiedades y relaciones de los triángulos con el propósito de dotarlas de significados.

La mediación pedagógica para las secuencia fue el software de geometría dinámica GeoGebra cuya interfaz permite a los estudiantes realizar una construcción geométrica, interactuando con la figura objeto de estudio.

Cada una de las secuencias didácticas presenta inicialmente al estudiante un problema relacionado con los triángulos y sus actividades están diseñadas de acuerdo a las fases del modelo de Miguel de Guzmán[37]. La estructura general de cada secuencia contiene:

- Fase de exploración
- Fase de aprehensión de conocimiento
- Discusión
- Consolidación
- Cierre

Para recalcar que los problemas presentados deben ser solucionados con el uso del S.G.D. y comprobados con la prueba del arrastre, que consiste en elegir uno de los objetos independientes de la figura y moverlo, de manera que esta puede ampliarse, girarse, reducirse o invertirse en cuanto a posición, longitudes, etc., pero, conservando siempre sus propiedades.

[37] DE GUZMAN. pasos para resolver un problema matemático. [en linea]. 2013. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en :http://daniyvalentina123.blogspot.com.co/2013/09/metodo-de-miguel-de-guzman.html

7.3 FASE 3. EVALUACIÓN

Como se mencionó, ya hay una preestablecida que es la prueba de tipo diagnóstica, empleada en la fase inicial del proyecto para detectar las debilidades tanto en procesos como en pensamientos matemáticos, lo que permite el planteamiento del problema de investigación y determinar el nivel del proceso de comunicación matemática con que se encuentran los estudiantes.

Cada actividad en las sesiones de trabajo tiene como propósito hacer una valoración de los componentes cognitivos, procedimentales y actitudinales.

Al final de la intervención se reaplicará la prueba diagnóstica como prueba final un instrumento en el que se evidencien los avances o dificultades que tuvieron los estudiantes luego de la intervención.

7.4 POBLACIÓN

La presente investigación se llevó a cabo en la institución educativa Luis Camacho Rueda, institución , con reconocimiento de carácter oficial, otorgado por la Resolución 00998 del 6 de noviembre de 2001 , con registro DANE 168679000142 del municipio de San Gil que atiende población mixta en calendario A; fundamenta sus procesos educativos en los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias atendiendo políticas educativas nacionales; ofrece educación Formal a estudiantes en los niveles de preescolar, básica (primaria y secundaria) y Media Técnica (10 y 11º), jornadas diurnas mañana y tarde. La población estudiantil en el año 2016 corresponde a 576 estudiantes.

7.4.1 Muestra. El presente proyecto se desarrolló con 33 estudiantes del grado sexto, cuyas edades oscilan entre los 11 y 15 años, pertenecen a un nivel socioeconómico bajo. Son niños académicamente aceptables y disciplinariamente

también. Se caracterizan por ser responsables, respetuosos y laboriosos en la clase.

7.5 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Para el desarrollo del presente trabajo se utilizaron los siguientes instrumentos de recolección:

- Talleres
- Lectura y análisis de documentos

En cuanto a los instrumentos empleados para la recolección de datos tenemos:

- Programa de software a Tube Catcher
- Guías de trabajo
- Videos
- Fotografías
- Diario de campo

7.6 DISEÑO DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

Se diseñó una prueba diagnóstica basada en el conocimiento de triángulos, tendiente a determinar el nivel de dominio de las habilidades comunicativas de interpretar, argumentar y justificar, teniendo en cuenta para ello los siguientes contenidos temáticos:

- Ángulos complementarios.
- Ángulos suplementarios.
- Teorema suma de los ángulos interiores de un triángulo.

- Clases de triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados.
- Clases de triángulos de acuerdo a la medida de sus ángulos.

La prueba diagnóstica que se diseñó, cumple con los siguientes propósitos:

- Determinar el nivel de aprehensión de conceptos geométricos (triángulos)
- Establecer el nivel de dominio de las habilidades del proceso de comunicación.
- Reconocer las fortalezas del proceso de comunicación que tienen los estudiantes.
- Identificar la capacidad de sustentación de argumentos, defensa de una tesis, o comprobación de una conjetura en la resolución de una situación matemática determinada.
- Reconocer las diferencias entre ángulos complementarios y suplementarios, como presaber determinante para la construcción de un triángulo.
- Determinar la habilidad de interpretar que tienen los estudiantes, al identificar datos en un enunciado o en un gráfico.
- Determinar las dificultades que encuentran los estudiantes al resolver problemas con la construcción de un triángulo.
- Identificar el tipo de propiedades que manejan en la representación de un triángulo.
- Detectar el nivel de manejo de las habilidades de comunicación (interpretar, argumentar y justificar), en la resolución de un problema matemático.

7.6.1 Categorías de análisis prueba diagnóstica. Para el análisis de la prueba diagnóstica se tuvieron en cuenta las siguientes categorías:

7.6.1.1 Categoría acierto. En esta categoría se clasifican las respuestas de los estudiantes que contestaron y justificaron correctamente el ítem planteado,

demostrando aprehensión de conceptos, uso de propiedades geométricas y habilidad en la representación gráfica de las figuras.

7.6.1.2 Categoría inconcluso. Corresponden a esta categoría, las respuestas de los estudiantes que emplearon algunos de los conceptos o propiedades. Sin embargo.

- La respuesta fue dada de manera parcial porque el estudiante la dio pero sin justificar.
- La respuesta es incorrecta, pero la justificación presentada es completamente correcta.
- Las representaciones gráficas no estaban acordes con la justificación presentada o viceversa.

7.6.1.3 Categoría no justifica. Clasifican en esta categoría las respuestas de los estudiantes que resolvieron correctamente el ítem empleando los conceptos o propiedades, pero no presentan ninguna justificación a sus procedimientos, o, se limitan a transcribir el encabezado del ítem.

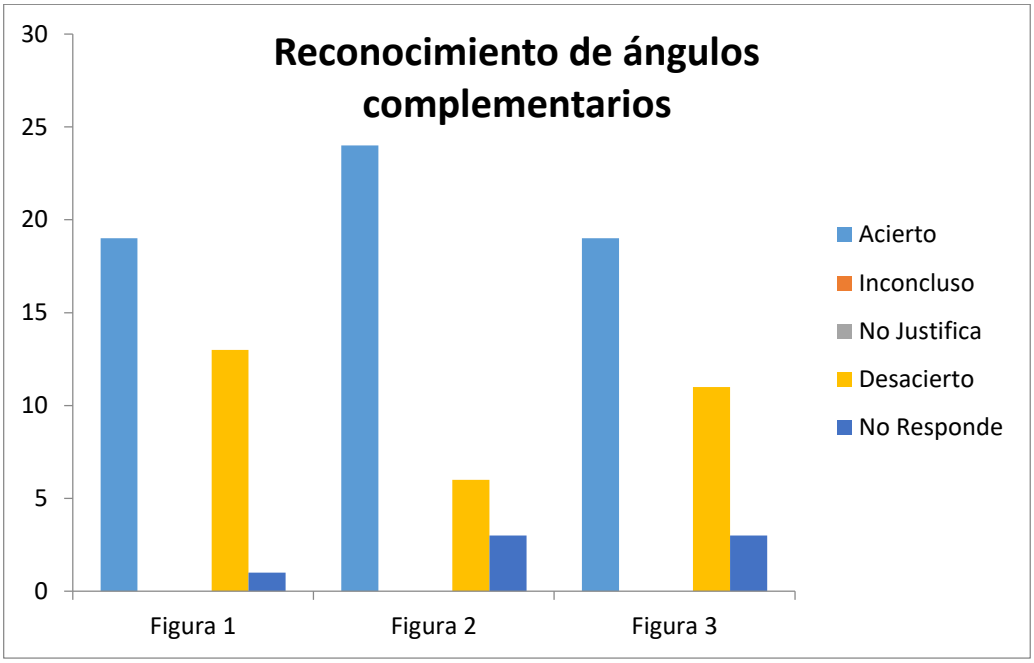
7.6.1.4 Categoría desacierto**.** Se clasifican en esta categoría las respuestas erróneas, teniendo en cuenta las siguientes situaciones:

- Uso inapropiado de propiedades
- Incapacidad de realizar representaciones gráficas
- Sus argumentos son completamente incoherentes con el procedimiento realizado
- Tanto la respuesta como la justificación están erradas.

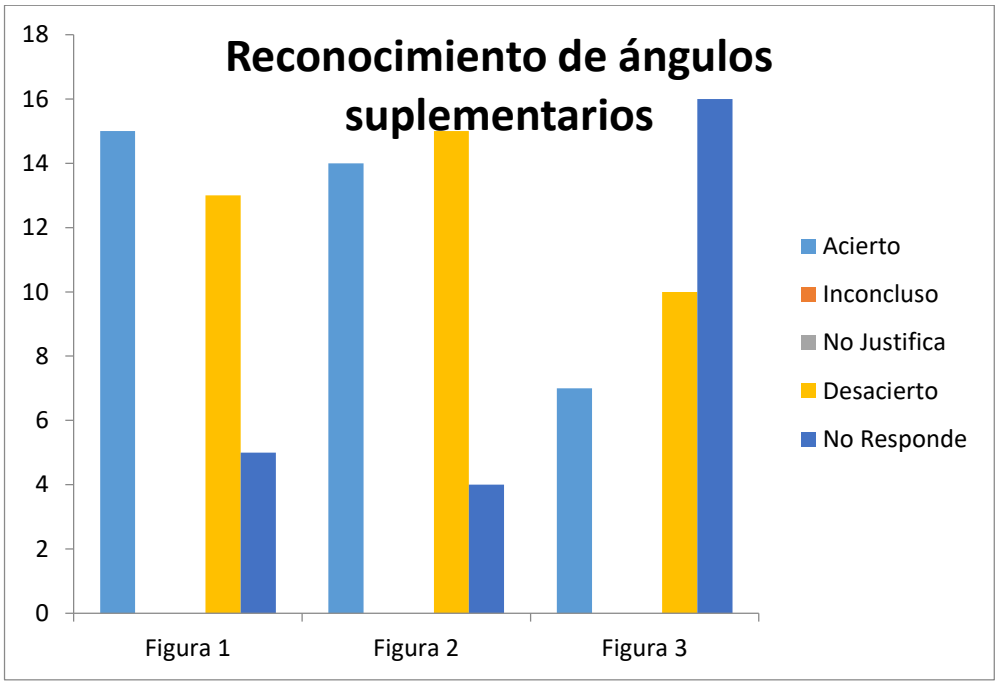
7.6.1.5 Categoría no responde**.** Hacen parte de esta categoría los estudiantes que no resolvieron el ítem, dejando en blanco el espacio para el desarrollo del mismo.

7.6.2 Resultados prueba diagnostica

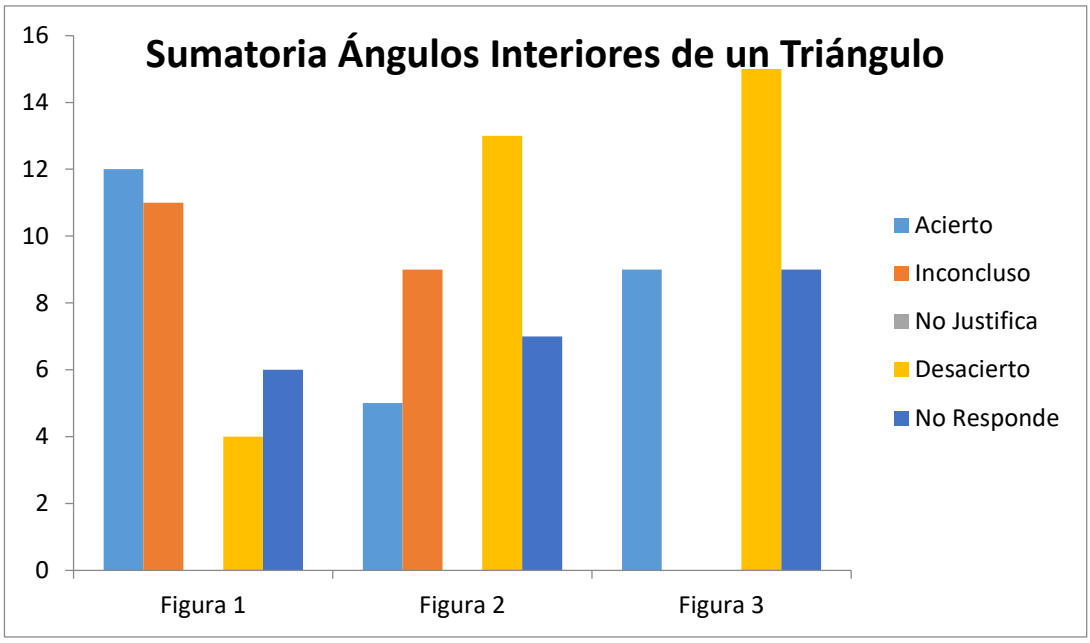
Gráfica 2. Reconocimiento de ángulos complementarios.



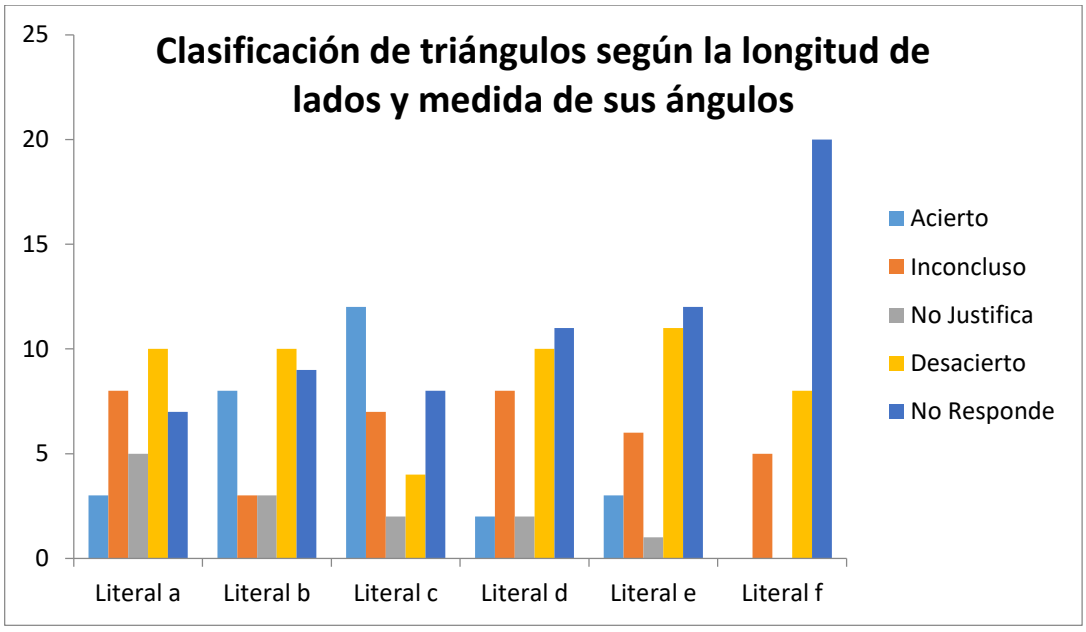
Gráfica 3. Reconocimiento de ángulos suplementarios.



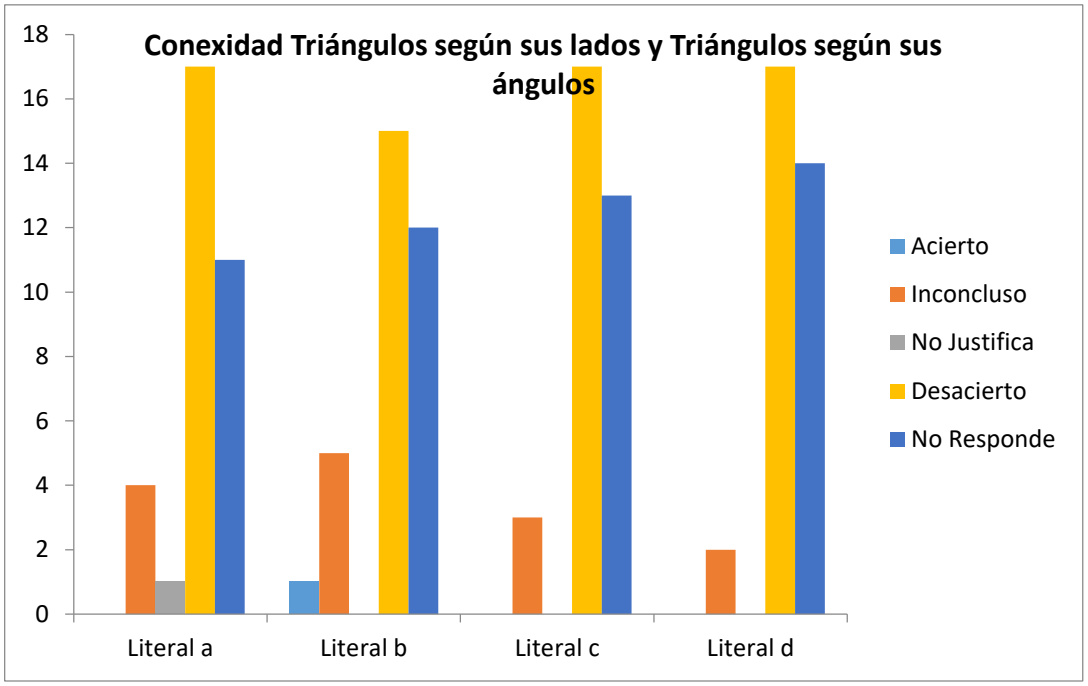
Gráfica 4. Teorema sumatoria de ángulos interiores de un triángulo.



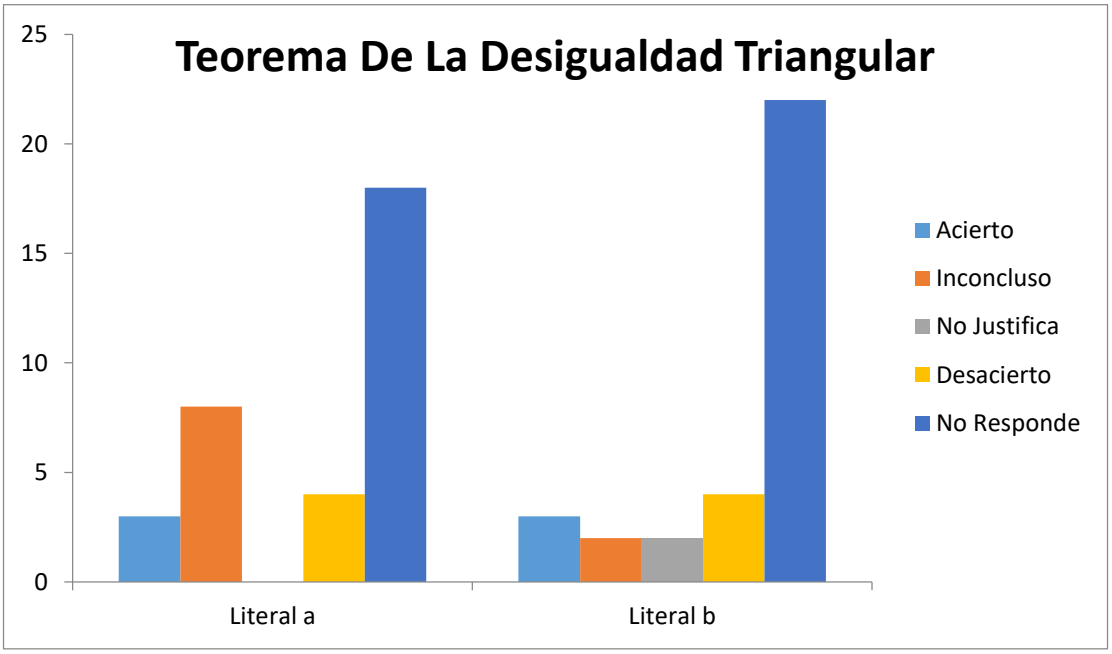
Gráfica 5. Clasificación de triángulos según la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos.



Gráfica 6. Conexidad entre triángulos según sus medidas y triángulos según sus ángulos.

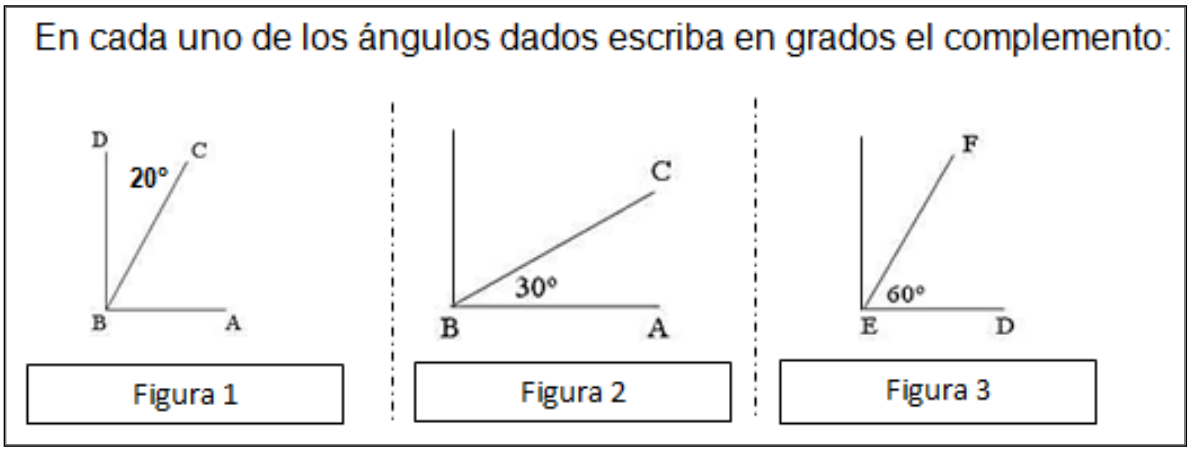


Gráfica 7. Teorema de la desigualdad triangular



7.6.3 Análisis por ítems

Figura 7. Ítem 1: Reconocimiento de ángulos complementarios



Se propuso este ítem con el fin de que los estudiantes calcularan el valor del ángulo complementario, al ángulo dado en cada figura. Con este punto, se quiso verificar si los estudiantes reconocían los conceptos de ángulos complementarios y de ángulos rectos (a través del cálculo mental y percepción visual).

Así mismo, se pretendió determinar las fortalezas o debilidades en la habilidad comunicativa de la interpretación, al poder extraer información a partir de una imagen presentada, para dar solución al problema. Se observa que los estudiantes presentan algunas dificultades en la determinación del valor del ángulo complementario, pues muchos de ellos expresaron valores numéricos que superan la medida de un ángulo recto, evidenciando que desconocen que dos ángulos son complementarios cuando al adicionarse los valores de su amplitud, dan como resultado 90º.

Si bien, los resultados muestran una gran cantidad de aciertos, los mismos también revelan que hubo una cuantía importante en la categoría de desaciertos,

confirmando que su habilidad de interpretar, presenta innegables debilidades como se ve a continuación:

El estudiante E-15, presentó los siguientes cálculos de ángulos complementarios:

Figura 8. Cálculo ángulos complementarios estudiante E-15.

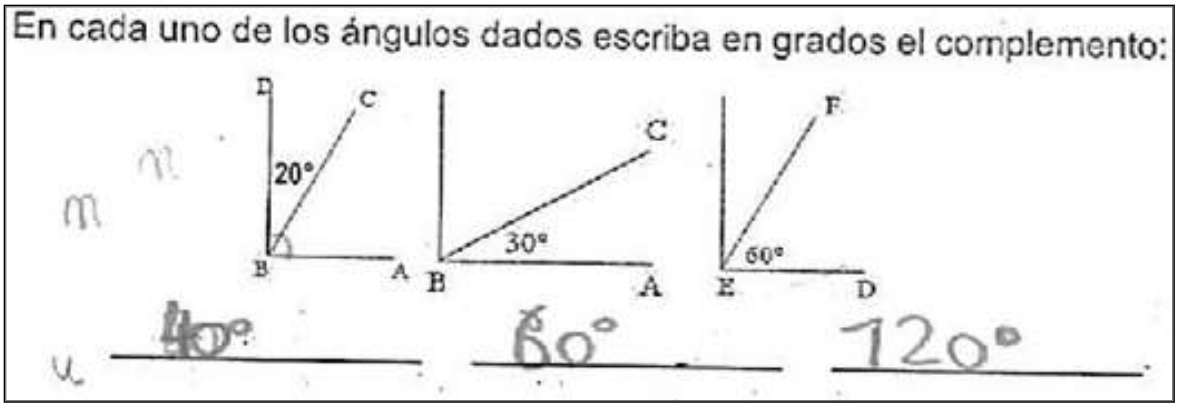
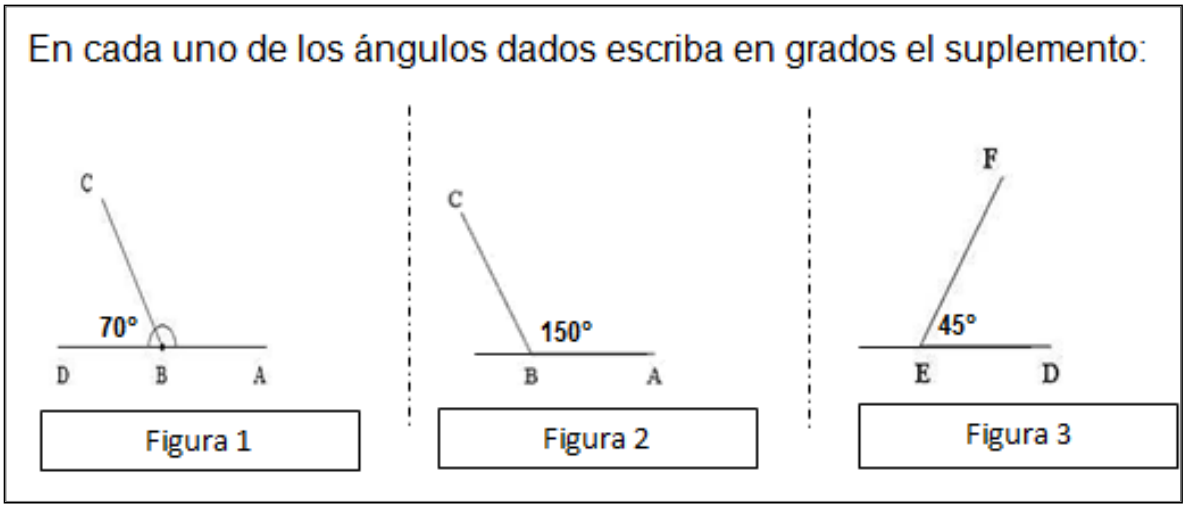


Figura 9. Ítem 2: Reconocimiento de ángulos suplementarios.



Se propuso este ítem con el fin de que los estudiantes calcularan el valor del ángulo suplementario, al ángulo dado en cada figura. Con este punto, se quiso verificar si los estudiantes reconocían los conceptos de ángulos suplementarios y de ángulos obtusos (a través del cálculo mental y percepción visual).

Así mismo, se pretendió determinar las fortalezas o debilidades en la habilidad comunicativa de la interpretación, al poder extraer información a partir de una imagen presentada, para dar solución al problema. Se observa que los estudiantes presentan dificultades en la determinación del valor del ángulo suplementario, pues muchos de ellos expresaron valores numéricos que superan o no alcanzan la medida de un ángulo llano, evidenciando que desconocen que dos ángulos son suplementarios cuando al adicionarse los valores de su amplitud, dan como resultado 180º. Los resultados muestran que hubo una gran cantidad de desaciertos, que reafirman que la habilidad de interpretar, presenta indiscutibles flaquezas como el no reconocer que los ángulos se miden en grados y no en porcentaje como se ve a continuación:

El estudiante E-26, presentó los siguientes cálculos de ángulos complementarios:

Figura 10. Reconocimiento de ángulos suplementarios.

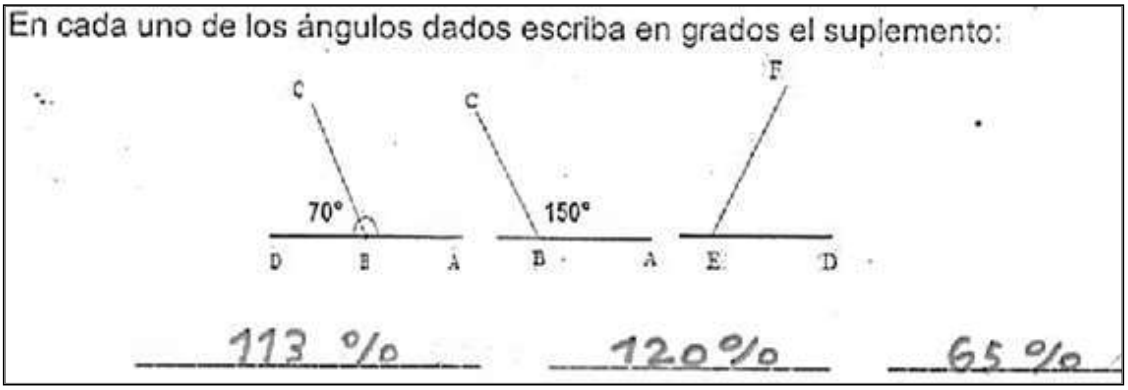
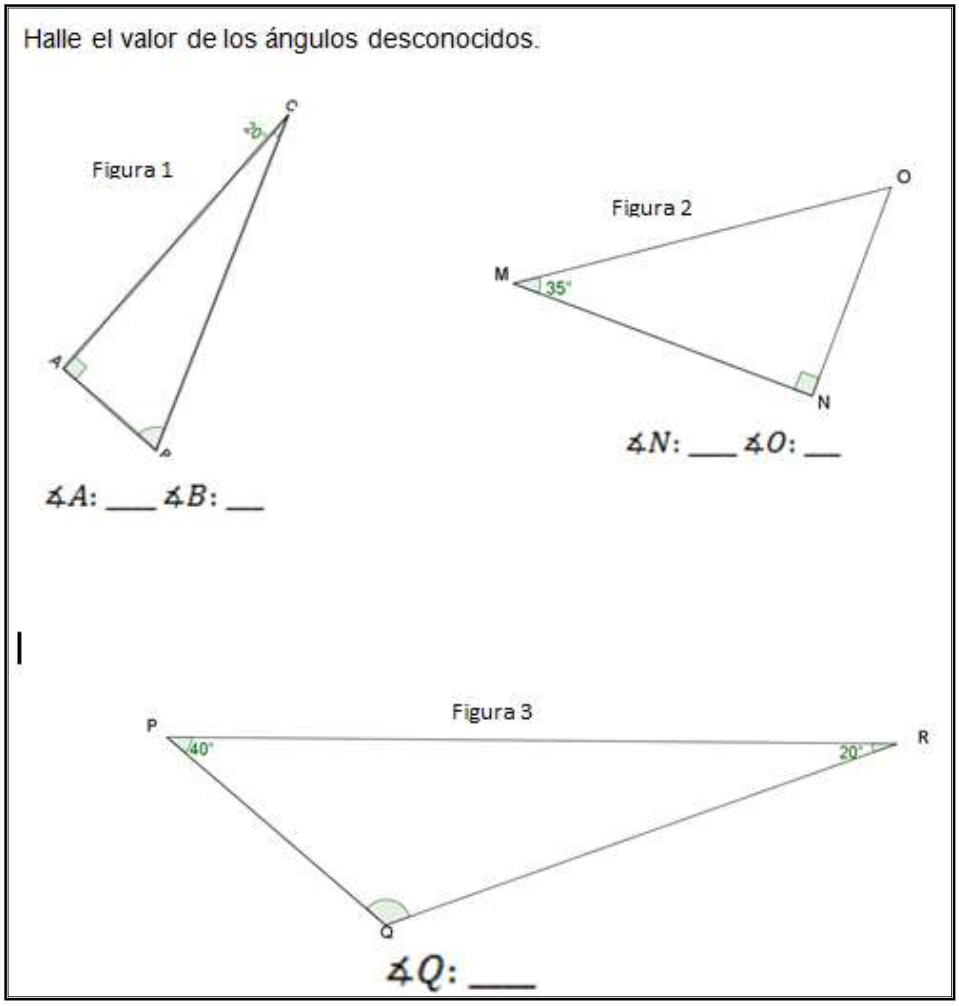


Figura 11. Ítem 4: Clasificación de triángulos según la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos.



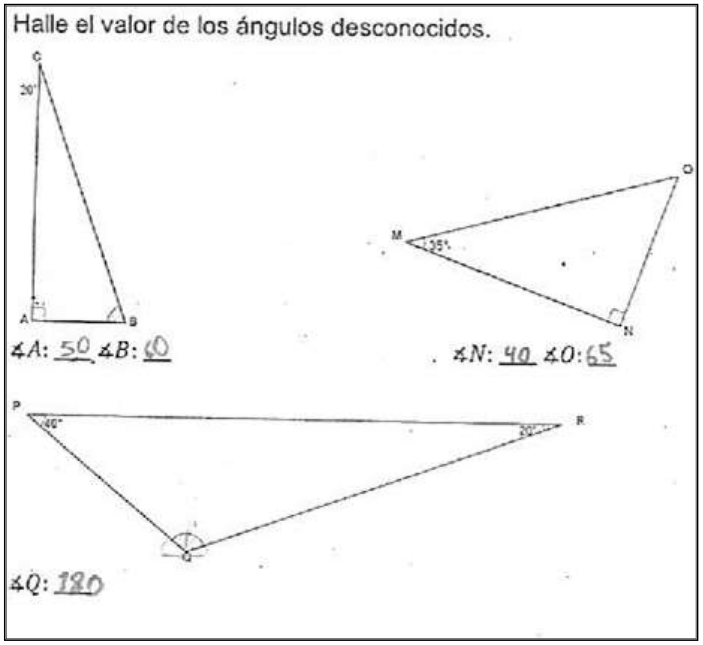
En este ítem se pidió a los estudiantes hallar el valor de un ángulo desconocido en cada una de las figuras triangulares presentadas. Las finalidades de este punto eran las de determinar si los estudiantes reconocían el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, al mismo tiempo que establecer el nivel de su habilidad de interpretación, demostrada en la capacidad de inferir información a partir del gráfico dado. Se encontró que hubo dificultades en el proceso de encontrar

el ángulo desconocido bien sea por muchos desaciertos como por la muestra de desconocimiento del teorema al dejar el ítem sin responder.

Así mismo, se observó que los estudiantes, en su inmensa mayoría, no tuvieron la capacidad de interpretar por cuanto:

- Desconocen que el ícono (cuadrado), presente en la base de la figura 1 y en el vértice “N” de la figura 2, indican la presencia de un ángulo de 90º. Así mismo, pasan por alto la escritura del ícono que indica los grados luego de una medida como se ve a continuación.

Figura 12. Respuesta dada por el estudiante E-21.



- Otros estudiantes, escribieron valores de manera aleatoria, que distaban mucho del valor esperado para la sumatoria de los ángulos interiores de los triángulos que es de 180º, como lo hizo la estudiante E-14:

Figura 13. Respuesta dada por la estudiante E-14.

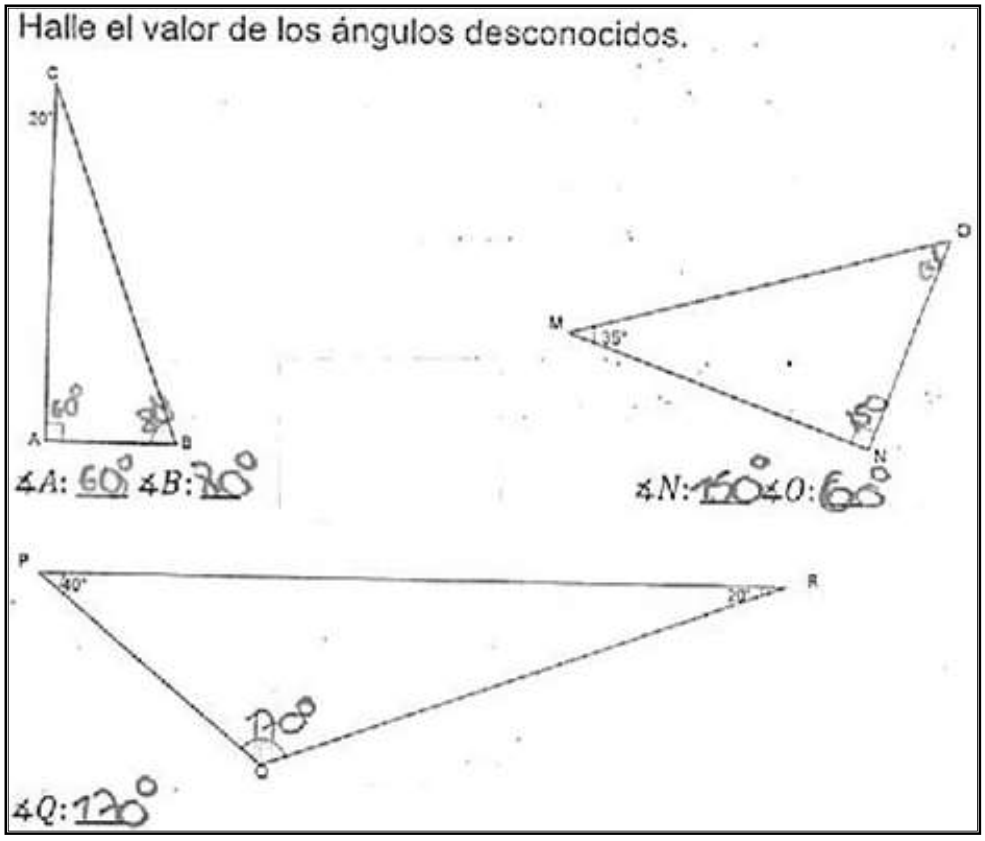
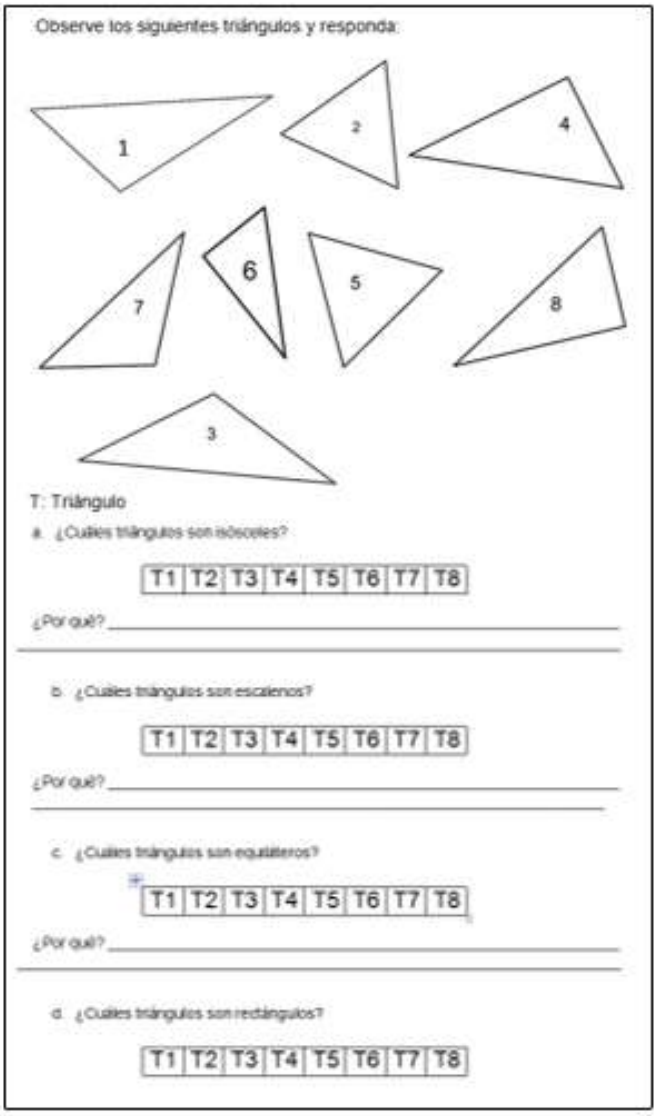


Figura 14. Ítem Imagen 5. Teorema sumatorio de ángulos interiores de un triángulo.



Se propuso este ítem con el fin de:

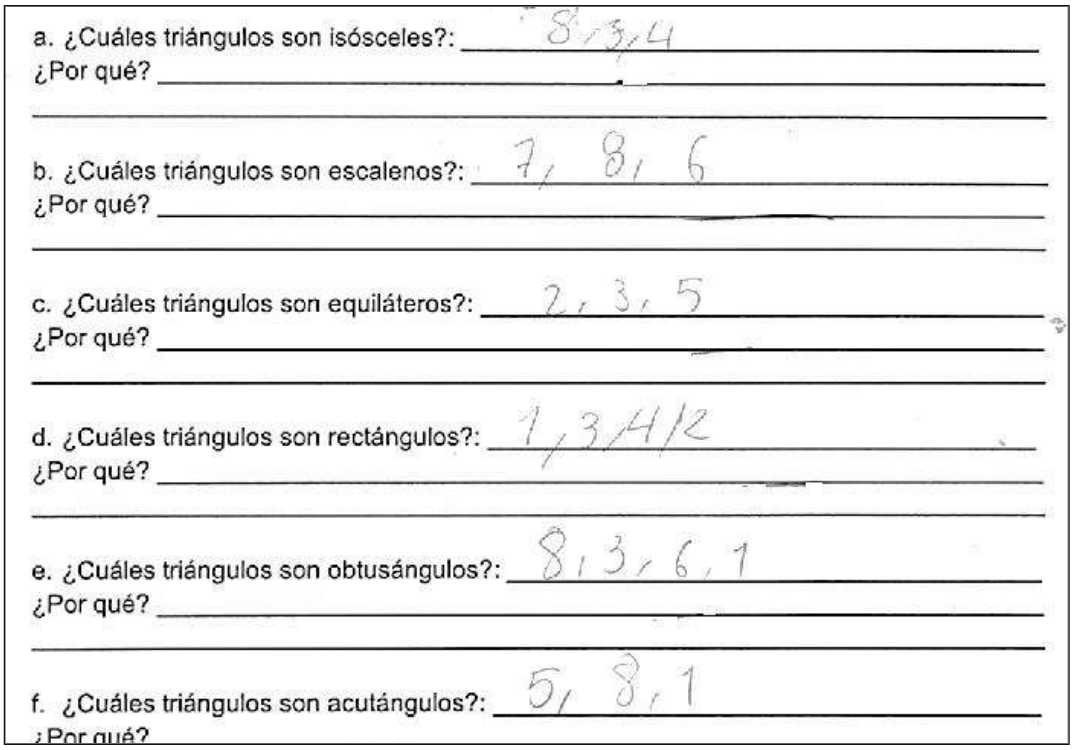
- Constatar el manejo del lenguaje geométrico básico para mencionar los triángulos por su nombre correcto, al clasificarlos de acuerdo a la longitud de sus lados o a la medida de sus ángulos.

- Determinar la capacidad de interpretar de los estudiantes para clasificar triángulos, no sólo a través de la percepción visual de las figuras, sino de las características que tienen cada uno de ellos acorde a la medida de sus lados o a la amplitud de los ángulos con los que están construidos.

- Permitir a los estudiantes presentar sus argumentos en cuanto a la elección de una u otra figura de acuerdo a las condiciones planteadas en cada uno de los literales.

Los resultados mostraron evidentes fallas en las habilidades de interpretar y de argumentar por cuanto: Hubo respuestas equivocadas y/o sin argumentos como lo muestra la prueba de los estudiantes E-5 y E-6:

Figura 15. Respuesta dada por la estudiante E-5


a. ¿Cuáles triángulos son isósceles?: 8, 3, 4
¿Por qué? _____

b. ¿Cuáles triángulos son escalenos?: 7, 8, 6
¿Por qué? _____

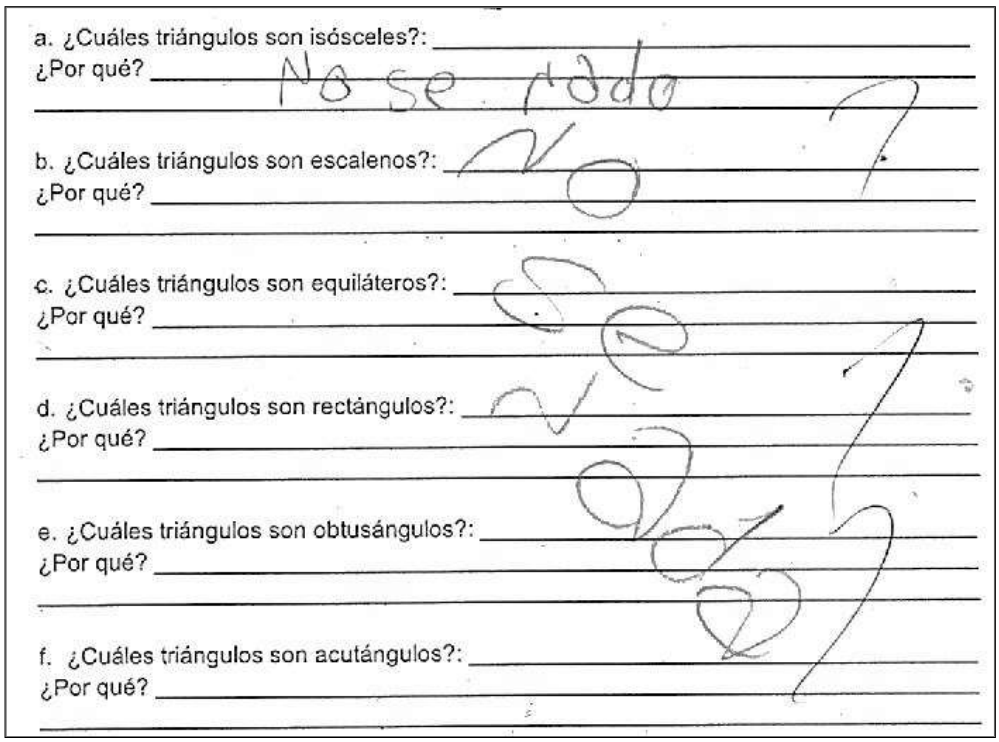
c. ¿Cuáles triángulos son equiláteros?: 2, 3, 5
¿Por qué? _____

d. ¿Cuáles triángulos son rectángulos?: 1, 3, 4, 2
¿Por qué? _____

e. ¿Cuáles triángulos son obtusángulos?: 8, 3, 6, 1
¿Por qué? _____

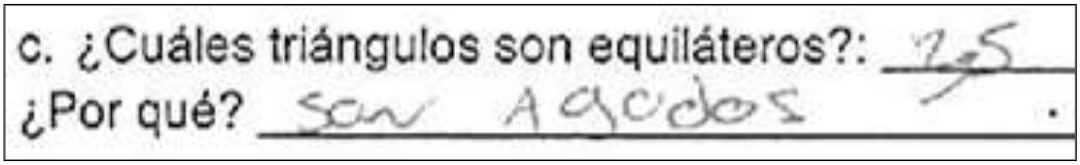
f. ¿Cuáles triángulos son acutángulos?: 5, 8, 1
¿Por qué?

Figura 16. Respuesta dada por la estudiante E-6



Los argumentos que presentan para justificar su elección, denotan desconocimiento de conceptos o confusión de los mismos, como se muestra en la respuesta de la estudiante E-29, quien acertó en la elección de las figuras, pero presentó un argumento que no sustenta la opción escogida por ella.

Figura 17. Argumento presentado por la estudiante E-29



Los argumentos que esgrimen se basan en evocación de imágenes visuales, como lo hizo el estudiante E-22, quien no hizo elección de ninguna figura y además confunde un triángulo rectángulo con el cuadrado, tal y como se evidencia en la imagen:

Figura 18. Argumento presentado por la estudiante E-22

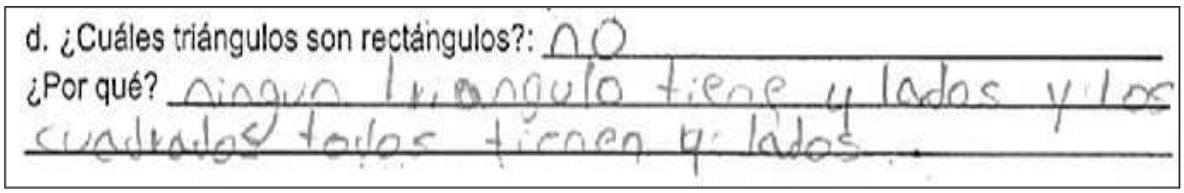
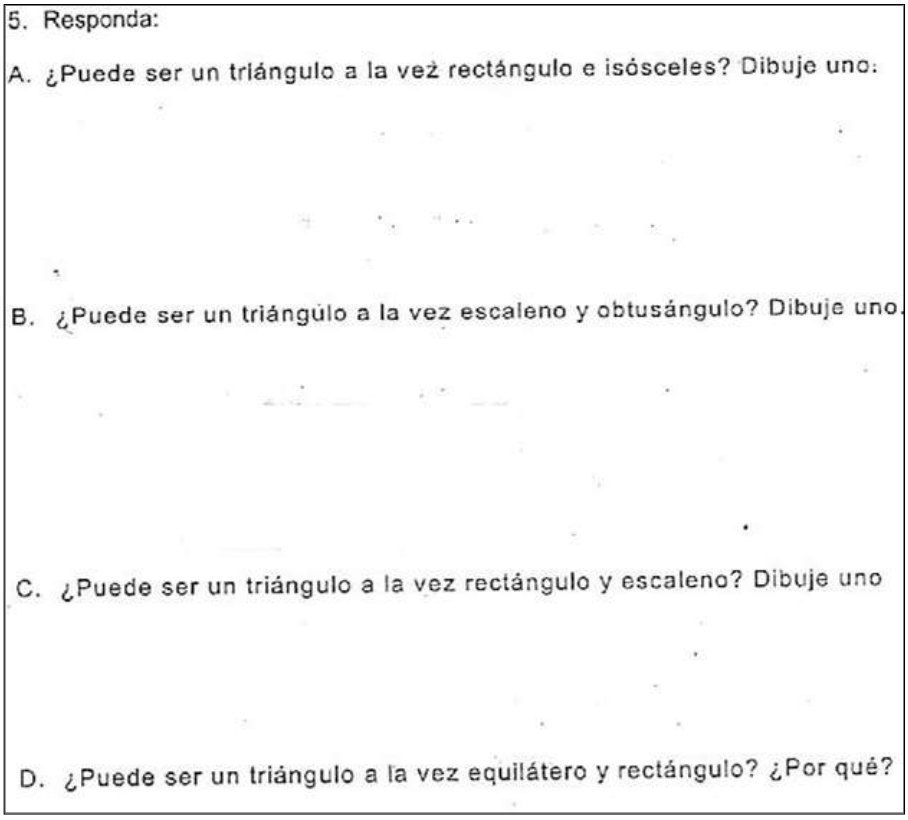


Figura 19. Ítem 5. Conexidad entre clasificación de triángulos según sus medidas y clases de triángulos según las medidas de sus ángulos.

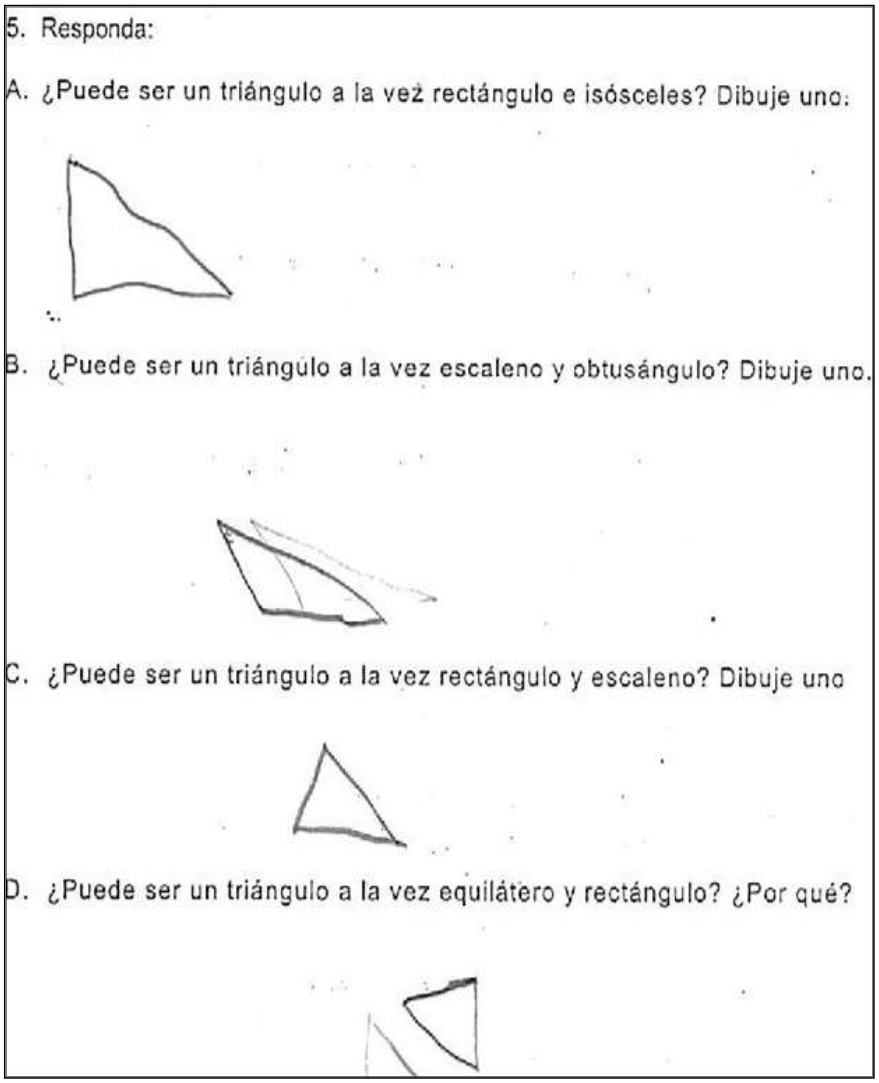


Se planteó este punto con el propósito de determinar la capacidad de interpretar al realizar la conversión de un lenguaje matemático escrito a uno de carácter gráfico.

Se encontró que este ítem fue uno de los que mayor dificultad representó para los estudiantes, ya que en su gran mayoría hubo respuestas desacertadas o no contestadas que las que fueron respondidas correctamente.

Llama poderosamente la atención que en muchas de las representaciones gráficas, los estudiantes ni siquiera tienen en cuenta que un triángulo es una figura cerrada compuesta por tres segmentos de recta, ya que ellos dibujan una serie de figuras, que si bien son cerradas, no se asemejan formalmente a un triángulo, porque sus lados están hechos a mano alzada (lo que no garantiza que los lados sean completamente rectos) y además no señalan ni sus vértices, ni sus ángulos ni nombran cada uno de los lados de la figura, como se puede observar en la imagen que corresponde a la respuesta del estudiante E-18:

Figura 20. Respuesta dada por el estudiante E-18



Un número significativo de estudiantes dejaron el ítem sin contestar por la no comprensión de lo que el encabezado del problema planteaba, según se puede constatar en la siguiente imagen de la respuesta de la estudiante E-9:

Figura 21. Respuesta dada por la estudiante E-9.

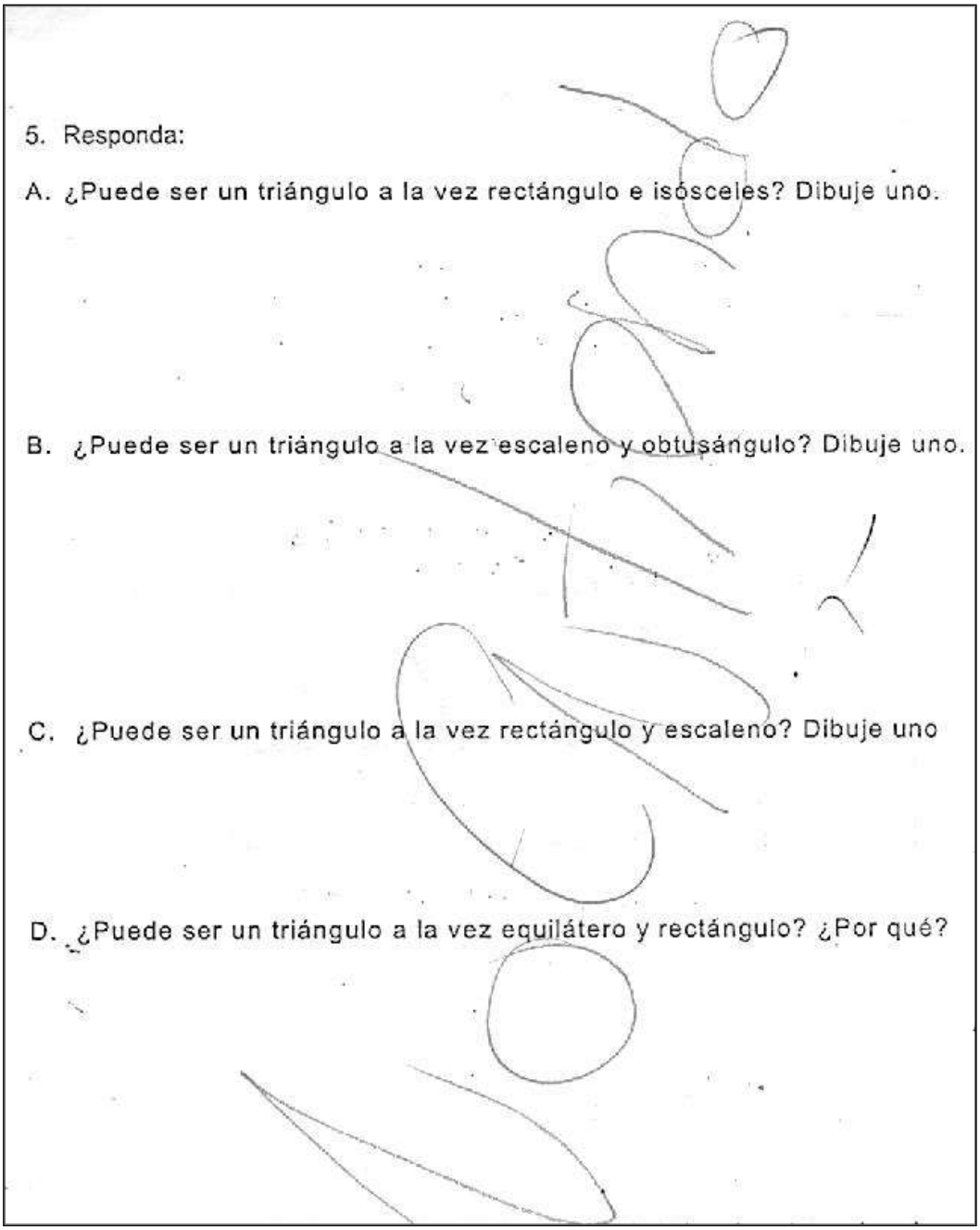


Figura 22. Ítem 6. Teorema de la desigualdad triangular.

6. Dadas las siguientes ternas de longitudes de triángulos, determine si con esas longitudes se puede formar un triángulo y explique por qué si o por qué no se puede.

   a. p= 2cm, q= 4cm, r= 7 cm

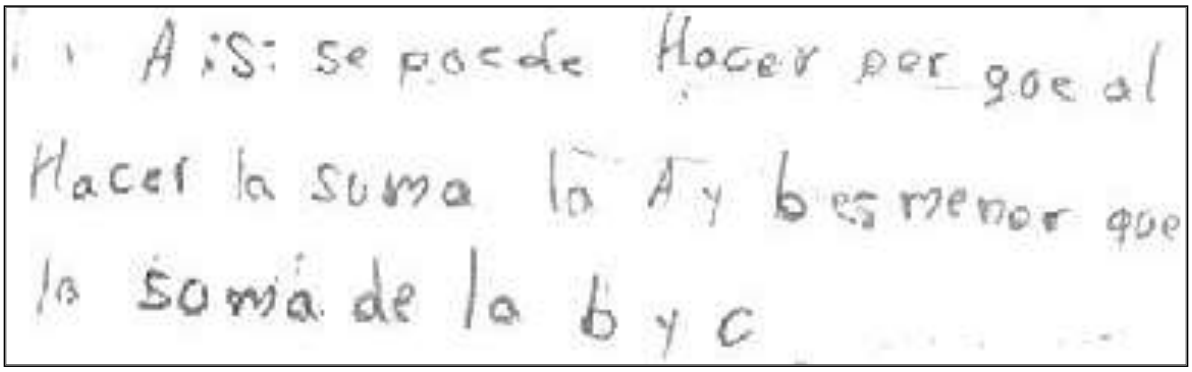
   b. p= 3cm, q= 4cm, r= 6 cm

En el ítem 6 se planteó un problema a los estudiantes, con el fin de que pusieran a prueba el manejo y conocimiento del teorema de la desigualdad triangular e indagar la capacidad de justificar por parte de los participantes. A los estudiantes se les propuso dos ternas de longitudes de triángulos, debiendo determinar con cuál de las dos era posible realizar la construcción de un triángulo.

- Se encontró que este ítem fue el más difícil de toda la prueba por cuanto se registró la mayor cantidad de respuestas sin contestar.

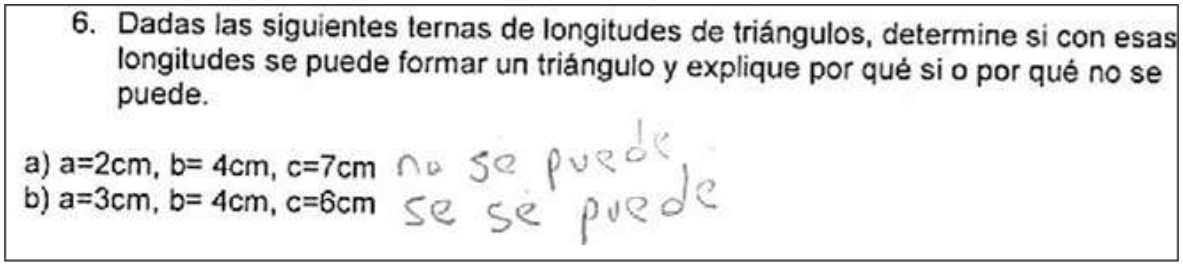
- Muchos de los estudiantes presentaron justificaciones falaces, como la presentada por el estudiante E-18:

Figura 23. Argumento falaz presentado por el estudiante E-18



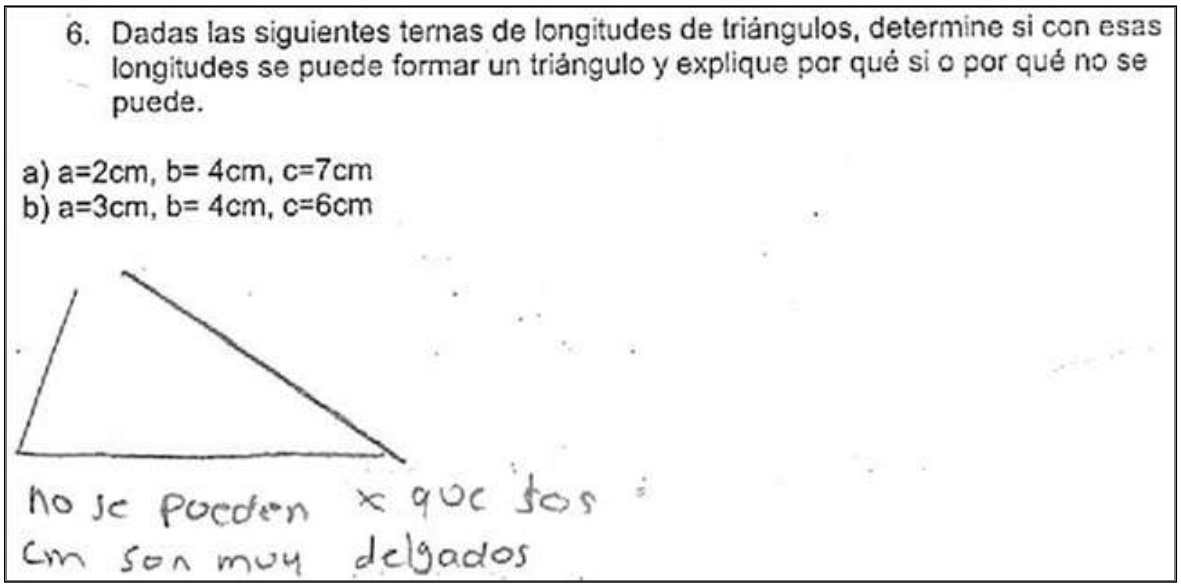
- Otros estudiantes acertaron en la respuesta, sin embargo, al momento de justificar, no encontraron argumentos que avalaran su resolución. Prueba de ello es la respuesta dada por el estudiante E-23.

Figura 24. Respuesta sin justificación por el estudiante E-23



- Es recurrente la presentación de argumentos incongruentes como el presentado por la estudiante E-32:

Figura 25. Justificación con argumentos incongruentes. Estudiante E-32.



En términos generales, hay debilidades en las habilidades de comunicación en cuanto a justificar, interpretar y argumentar, así como en la conversión de sistemas de representación.

7.7 ESTRUCTIRA DE LAS SECUENCIAS DIDÁCTICAS

La estructura de las actividades de la secuencia didáctica se hizo bajo un enfoque constructivista, que se organizó en cinco fases:

7.7.1 Fase de Exploración. Se plantearon actividades exploratorias de los aprendizajes previos, sus preconceptos y los aprendizajes arraigados en el estudiante de acuerdo a los contenidos temáticos en cada una de las sesiones, aspectos que representan el punto de partida para tomar contacto con el objeto de estudio y que son la base para plantear la estrategia de aprendizaje de las etapas subsiguientes en cada sesión de trabajo.

En esta fase exploratoria se tuvo en cuenta que cada una de las actividades planteadas, apuntaran al fortalecimiento de las habilidades comunicativas a través de la justificación de sus afirmaciones, la presentación de sus argumentos y la capacidad de atribuir significado a las expresiones matemáticas (interpretar), de modo que estas adquieran sentido en función del propio objeto matemático de estudio (el triángulo).

7.7.2 Fase de Aprehensión de Conocimiento. Para que haya un proceso de construcción de significados, basado en las ideas iniciales y cotidianas que posee el estudiante sobre los contenidos geométricos, se propone a los estudiantes un problema geométrico, con el fin de que utilice para su resolución, las propiedades, elementos y características de la figura que se estudia, con la mediación del software de geometría. Esta actividad brindó espacio para la rememoración de saberes, la aplicación de propiedades y la planeación de una estrategia de resolución del problema. Este ha sido seleccionado para permitir al estudiante aprehender los conceptos, propiedades o definiciones fundamentales de los triángulos.

7.7.3 Fase de Discusión. Es fundamental en esta fase la presentación de los resultados obtenidos en la resolución del problema, que generen discusión y debate sobre el acierto o no de la estrategia elegida para tal fin, los criterios empleados para seleccionar la estrategia, y el reconocimiento de las diversas formas que permiten resolver la situación matemática planteada. La discusión entre los estudiantes, ayuda a que ellos tengan una mejor comprensión de las propiedades de los triángulos, a ver la aplicabilidad de los contenidos temáticos en la resolución de un problema y conlleva al uso del lenguaje matemático al participar en la discusión. La profesora interviene a través de pequeñas preguntas para generar la discusión, indagando el grado de eficacia que tuvo la estrategia elegida para resolver la situación matemática. Esta fase constituyó la base para que tanto la profesora como los estudiantes determinen sus fortalezas, debilidades y aspectos a mejorar dentro del nivel de aprendizaje alcanzado.

7.7.4 Fase de consolidación. Esta fase se planificó con el fin de enfrentar a los estudiantes a resolver situaciones matemáticas geométricas donde pudiese aplicar los diferentes aprendizajes matemáticos logrados y, reforzar el uso del lenguaje semiótico matemático. Partiendo del concepto estudiado y de sus propios intereses, los estudiantes deben formular y solucionar sus propios problemas o los planteados por la profesora.

7.7.5 Fase de cierre. En esta fase la profesora dirigió recopilaciones de la información que ayudaron a los estudiantes a lograr la verificación de la aprehensión de conocimiento. Estas recopilaciones se hacen mediante el diseño de rejillas, mapas mentales, cuadros sinópticos o test cortos sobre contenidos temáticos, elementos, características y propiedades del triángulo. La actividad propuesta no implica la aparición de nuevos conocimientos, sino solo la organización de los ya adquiridos.

7.7.6 Tema secuencia didáctica "La construcción del triángulo". La secuencia didáctica se diseñó para que los estudiantes reconocieran las características generales y propiedades de los triángulos, a través de la resolución de un problema geométrico, buscando fortalecer las habilidades de justificación, argumentación e interpretación. La secuencia didáctica se diseñó buscando el fortalecimiento de las habilidades de comunicación mencionadas, mediante el estudio de las propiedades, características, elementos y sistemas de representación del triángulo. La mediación pedagógica para esta secuencia fue el software de geometría dinámica GeoGebra cuya interfaz permite a los estudiantes realizar una construcción geométrica, interactuando con la figura objeto de estudio.

7.7.6.1 Contenidos temáticos**.** Las actividades propuestas en las diferentes sesiones son los siguientes:

- Segmentos de Recta
- Recta
- Elementos del triángulo
- Clasificación de triángulos según la longitud de sus lados
- Clasificación de triángulos según la amplitud de sus ángulos
- Líneas y puntos notables del triángulo (altura, mediana, bisectriz, mediatriz
- Propiedades de los triángulos: (propiedad de la desigualdad triangular, propiedad fundamental de los triángulos, propiedad de la oposición del mayor lado vs mayor ángulo).

7.7.6.2 Objetivo de aprendizaje. Reconocer las características generales de los triángulos y comprobar algunas de sus propiedades, a través de la resolución de una situación matemática, mediante el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, para buscar el fortalecimiento del proceso de comunicación matemática.

7.7.6.3 Desempeño**.** Manifiesta adelantos en el fortalecimiento de habilidades de comunicación matemática, tales como empleo de lenguaje matemático (argumentación), capacidad para exponer ideas y esgrimir razones (explicar), justificar un procedimiento e identificar en un enunciado la pregunta y los datos.

7.7.6.4 Indicadores de desempeño**:**

- Reconoce y utiliza el software de geometría dinámica para realizar la construcción de triángulos.
- Reconoce los datos relevantes de una situación matemática para resolverla.
- Usa lenguaje matemático para hacer referencia a las características generales de los triángulos.
- Comprueba mediante la construcción geométrica en el software, las propiedades generales de los triángulos.
- Reconoce los elementos de un triángulo.
- Clasifica triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados y a la amplitud de sus ángulos.
- Utiliza el software de geometría dinámica para identificar en su construcción geométrica las líneas notables de los triángulos.
- Conjetura acerca de la forma en que se pueden justificar o demostrar posibles resultados en la resolución de un problema geométrico.

7.8 ESTRUCTURA DE LA SESIÓN 1. ¿CUÁNTO MIDEN LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN TRIÁNGULO?

7.8.1 Fase de exploración*.* Duración: 10 horas

La fase de exploración está conformada por una serie de actividades a partir de las cuales es posible identificar los saberes, las preconcepciones y los conocimientos previos de los estudiantes. Inicialmente, los participantes realizaron “dibujos libres”

con el software, con el fin de que se familiarizaran con la interfaz e interactuaran con cada una de las herramientas del programa. Esta etapa es la diseñada para que el estudiante tome contacto con el nuevo tema objeto de estudio. Para ello, se orientó a los participantes de tal manera que a través del software, determinaran cuáles son los lados opuestos a los ángulos de un triángulo. Así mismo, verificar a través de la sumatoria de la medida de la amplitud de los ángulos, la propiedad que indica que la suma de los mismos en su parte interna mide 180º. Los propósitos de esta actividad propuesta, pretendían que el estudiante pudiese identificar, comparar y analizar atributos generales de un triángulo, además de expresar sus ideas en lenguaje matemático para describirlos, potenciando así las habilidades de interpretación, justificación y argumentación, a través de la resolución de preguntas planteadas para este fin.

Al respecto, las respuestas dadas por los estudiantes se encuentran dentro de las categorías mostradas a continuación:

7.8.1.1 Categoría***: "Definición completa"***. Watson y Mason[38]

El estudiante da una definición personal del concepto, donde se hacen explícitos los invariantes del concepto (elementos del triángulo y /o propiedades) en el pensamiento espacial y geométrico y en un contexto comunicativo y no en el de medida o en variacional. Es decir reconoce el triángulo como una figura geométrica formada por:

a) Segmentos de recta
b) Con tres lados de igual o distinta longitud
c) Con tres vértices

[38] WATSON, op cit. p. 1

d) Con tres ángulos internos cuya amplitud puede variar
e) Con propiedades que lo hacen característico y particular

SUBCATEGORÍAS

- **Definición correcta:** La definición es correcta cuando el estudiante hace mención amplia de todos los elementos que conforman el triángulo y/o de una de sus propiedades utilizando para ello lenguaje matemático.

- **Definición Incompleta**: La definición es incompleta si no hace referencia explícita a todos los elementos que conforman el triángulo o a una de sus propiedades.

- **Definición Incorrecta:** Bajo esta subcategoría están a aquellas definiciones que restringen la mención de uno o más elementos que conforman el triángulo u omiten alguna de sus propiedades.

- **Definición fuera de contexto:** Se considera que está fuera de contexto la definición si hace referencia a la medida; es decir, si se refiere de manera explícita o implícita a un número.

- **No responde:** En esta subcategoría, se referencian los estudiantes que no escribieron ningún tipo de respuesta a las preguntas.

1. Utiliza la herramienta GeoGebra y construye tres triángulos, selecciona un vértice en cada triángulo y luego señala el lado opuesto a ese vértice escogido. Luego de construir los triángulos y seleccionar los lados opuestos a los vértices escogidos responde:

a) ¿Qué es un triángulo? ¿Qué características tiene? Justifica tu respuesta.

Tabla 1. ¿Qué es un triángulo? ¿Qué características tiene?

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
	E1		NO RESPONDE
	E2	“Es un poligono con 3 lados que tiene del vertices y 3 angulos” (Sic)	INCOMPLETA
	E3		NO RESPONDE
	E4	“Es un poligono de 3 lados y tres vertices”	INCOMPLETA
	E5	“tiene 3 lados”	INCOMPLETA
	E6	“es una figura geométrica que debe tener 3 lados por que si tiene mas lados no es un triangulo”	INCOMPLETA
	E7	“es una figura con tres puntas y con tres lados cada una con sus angulos”	INCORRECTA
	E8		NO RESPONDE
	E9	“es un polígono cuadrilátero que tiene 3 lados con sus vertises”	INCORRECTA
Definición completa	E10	“figura geometrica de 3 lados y 3 angulos, una caracteristica es que al sumarse los ángulos da por resultado 180º”	CORRECTA
	E11	“Es un polígono de tres lados, tres vértices, tres ángulos. Y la suma de los suyos da 180º”	CORRECTA
	E12	“Es una Figura Geometrica con 3 lados de igual medida con 3 vertises”	INCORRECTA
	E13	“es una figura que 3 lados 3 angulos de Lados iguales”	INCORRECTA
	E14	“es una figura geometrica poligonal de tres lados”	INCONCLUSO
	E15	“es una figura Geografica de treslados con igual medida”	INCORRECTA
	E16	“un triangulo es el que se hace con tres elementos de la misma media”	INCORRECTA
	E17		NO RESPONDE
	E18		NO RESPONDE
	E19		NO RESPONDE
	E20		NO RESPONDE
	E21	“un triangulo es una figura geometrica construida por tres lados. Tiene 3 angulos y 3 Vertices”	CORRECTA
	E22	“es una figura geometrica que debe tener 3 lados por que si tiene mas no es triangulo”	INCOMPLETA
	E23	“es una figura geometrica con 3 lados de igual o distinta medida tiene 3 vertices 3 angulos”	CORRECTA
	E24	“es una figura geometrica con 3 lados y 3 angulos”	INCOMPLETA
	E25	“es una figura, tiene 3 lados”	INCOMPLETA
	E26		NO RESPONDE
	E27	“Una figura geometrica de tres lados tres angulos tres vertices y la suma de sus angolos internos da 180º”	CORRECTA
	E28	“tiene tres vertices tres lados y tres angulos iguales”	INCORRECTA
	E29	“es una figura geometrica con 3 lados de igual medida con 3 vertises”	INCORRECTA
	E30	“es una característica geometriga que tiene sus angulos iguales”	INCORRECTA
	E31	“es una figura con tres lados iguales entre si”	INCORRECTA
	E32	“un triangulo es un polígono de tres lados. Es la figura mas simple despues de la recta”	INCOMPLETA
Definición completa	E33	“es una figura geometrica de tres lados, tres vertices, tres angulos, y la suma de sus angulos internos es de 180º”	CORRECTA

* E = Estudiante

Las respuestas emitidas por los estudiantes permiten llegar a las siguientes conclusiones:

- Hubo una notable representación de estudiantes (24%) que no manifestaron no querer responder a las preguntas del taller, por cuanto esta actividad no representaba una nota formal en su planilla de calificaciones, afectando de cierta manera la tabulación de los datos.

- Se puede evidenciar que a pesar de ser estudiantes de bachillerato, hay fallas en la expresión de su lenguaje natural como lo es:

❖ La confusión de términos: “figura geográfica por figura geométrica” E15.
❖ La omisión o adición de fonemas: “es una característica geometriga” E30,
❖ La falta de coherencia y cohesión en sus expresiones: “un triangulo es el que se hace con tres elementos de la misma media” E16

Estos y otros vicios del lenguaje les imposibilitan a los estudiantes comunicar de manera apropiada sus ideas.

- Todos los estudiantes que respondieron la pregunta, utilizaron términos matemáticos de los elementos de los triángulos como lados, vértices y ángulos en mayor o menor medida, aunque éstos términos no son manejados con claridad, puesto que alguno de los participantes menciona que el triángulo está formado por tres lados, omitiendo el hecho de mencionar que dichos lados son segmentos de recta y cuya convergencia recibe el nombre de vértices que a su vez hace parte de uno de los tres ángulos que conforman esta figura.

- A pesar de ser una figura geométrica reconocida por ellos (al menos visualmente), a lo largo de sus años de formación escolar, llama la atención el hecho de obtener un 27% de respuestas inconclusas, en las cuales los

estudiantes que emplearon algunos conceptos o propiedades pero de manera parcial o con fallas en la presentación de sus argumentos, al ser estos fácilmente rebatibles.

- En cuanto a las respuestas acertadas cabe destacar que no solo los estudiantes utilizaron lenguaje matemático para nombrar los elementos que hacen parte de la figura sino que mencionaron al menos una de sus propiedades.

b) ¿Cuáles son los elementos del triángulo y qué características tiene cada uno? Presenta tus argumentos.

Tabla 2. ¿Cuáles son los elementos del triángulo?

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Definición completa	E1		NO RESPONDE
	E2	"incentro, eliocentro"	INCOMPLETA
	E3		NO RESPONDE
	E4	"180º"	FUERA DE CONTEXTO
	E5	"vertices, lados"	INCORRECTA
	E6	"incentro y circuentro tiene caracteritsicas como 3 lados 3 vertices y 3 angulos"	INCOMPLETA
	E7	"tiene angulos de 180º"	FUERA DE CONTEXTO
	E8		NO RESPONDE
	E9	"base, altura y angulos"	INCORRECTA
	E10	"incentro es el punto de intersección de las 3 bisectrices. Altura: es el segmento pereprendicular comprendido entre un vertices y un lado opuesto""	INCORRECTA
	E11	"incentro es el punto de intersección entre todos sus vertices. Circuncentro: unión de todos los vertices por fuera y se forma la altura"	INCORRECTA
	E12	"incentro que el circulo ba por dentro del triangulo y el circucentro ba por fuera"	INCORRECTA
	E13	"Bisectriz es la semirecta que divide a un angulo en dos partes iguales. Incentro es el punto de intercecion de las de las tres bisectrices de un triangulo"	CORRECTA
	E14	"angulos rectas y vertises"	INCORRECTA
	E15	"incentro es el PUNto de interrelacion entre todos sus vertises el circucentro es la union de todos sus vertices"	INCORRECTA
	E16	"Bisectriz semirecta que divide al angulo Incentro punto de interección	INCORRECTA

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
		Mediatris, circucentro, altura, ortocentro, medianay bari sentro”	
	E17		NO RESPONDE
	E18		NO RESPONDE
	E19		NO RESPONDE
	E20		NO RESPONDE
	E21	“que es un tipo de piramide”	INCORRECTA
	E22	“que tiene unas medidas mas largas que otras por ejemplo 10cm, 6cm y 4cm”	FUERA DE CONTEXTO
	E23	“el incentro es el de interpretación entre todos sus vertices El del cucentro es la union de todos sus vertices por fuera y foma la altura es la medida desde la base al punto mas alto”	INCORRECTA
	E24	“Bisectriz, es una recta que parte un angulo en pociones iguales”	INCORRECTA
	E25	“los elementos Incentro y circuncentro tienen 3 lados, 3 angulos y 3 vertices”	INCORRECTA
	E26		NO RESPONDE
Definición completa	E27	“Incentro: el punto de intersección entre todos sus vertices. Circuncentro: es la unión de todos sus vertices de afuera forman circulo. Altura: es la medida desde la base al punto mas alto”	INCOMPLETA
	E28	“Incentro que el circulo ba por dentro del triangulo y el circuncentro el circulo ba por fuera”	INCORRECTA
	E29	“Incentro que va por dentro y la otra ba por fuera”	INCORRECTA
	E30	“lados angulos y vertices”	INCORRECTA
	E31	“esta figura tiene sus elementos de angulos y vertices y con tres lados iguales”	INCORRECTA
	E32	“Bisectriz es la semirecta que divide a un angulo en dos partes iguales”	INCOMPLETA
	E33	“El incentro, es el punto de interseccion entre todos sus vertices. El circucentro es la union de todos sus vertices por fuera y forma circulo. La altura es la medida desde la base al punto mas alto”	INCOMPLETA

Las respuestas dadas por los estudiantes para este ítem permiten concluir que:

- Hay confusión evidente entre las características externas visuales de un triángulo (lados, vértices y ángulos) y los elementos del mismo (incentro, circuncentro, ortocentro y baricentro).

- Algunos estudiantes mencionan en lenguaje matemático ciertos elementos del triángulo, sin embargo, no hay una aprehensión del concepto que les permita expresar con propiedad las características de cada uno de estos. Así por ejemplo, el E23 en su respuesta menciona uno de los elementos del triángulo como es el incentro: “el incentro es el de interpretación entre todos sus vertices”, sin embargo, al leer su repuesta el término solo se queda en la mera mención, pues no relaciona otros elementos para expresar una comprensión al menos global de este elemento.

- Otros estudiantes como el E30, no reconocen los elementos del triángulo, sino que persisten en la expresión de las características visuales de la figura, como se evidencia en su respuesta: “lados angulos y vertices”.

- Falta profundidad y precisión en la expresión comunicativa de los conceptos, como se evidencia en la respuesta del E16: “Bisectriz: semirecta que divide al ángulo”, si bien es cierto que la bisectriz es una semirrecta, esta no solo divide al ángulo, sino que lo hace en dos magnitudes congruentes, es decir los dos nuevos ángulos tienen la misma medida.

- En cuanto a lo ateniente a las respuestas acertadas, cabe destacar que los estudiantes utilizaron lenguaje matemático para nombrar con claridad algunos elementos que hacen parte del triángulo como el caso de la estudiante E31: “Bisectriz es la semirecta que divide a un angulo en dos partes iguales”

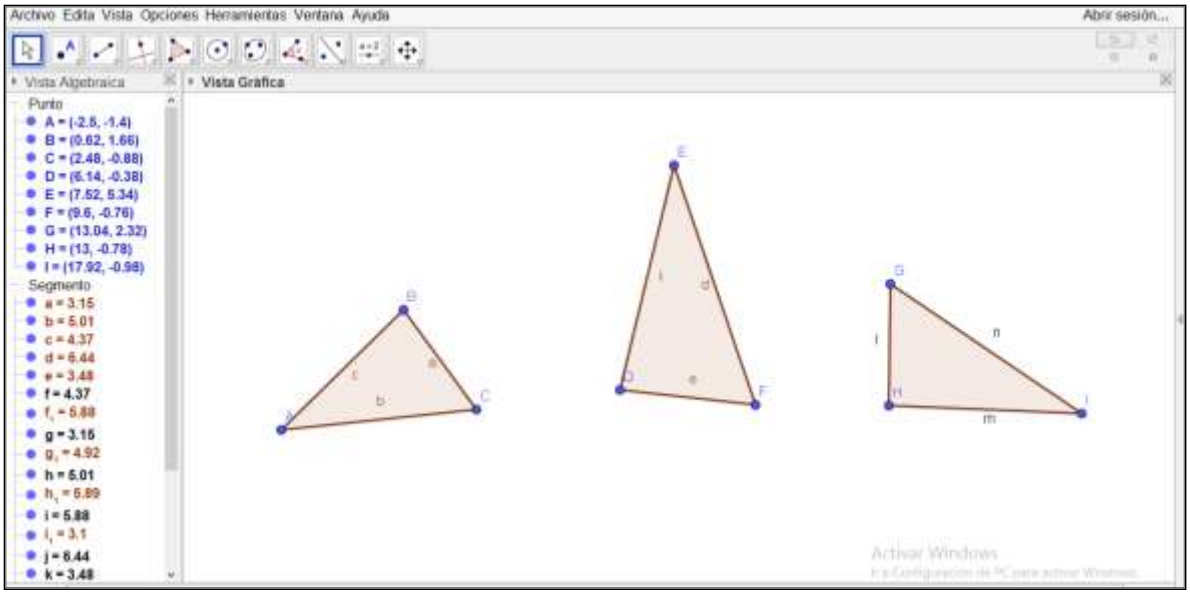
En términos generales, la habilidad de argumentación, no está consolidada por cuanto falta aprehensión de conceptos, estableciendo relaciones de conexidad entre estos. Así mismo, el uso del lenguaje matemático está para la gran mayoría de los estudiantes apenas en un nivel incipiente.

c) Menciona cada uno de los ángulos de los triángulos y nombra cuál es su lado opuesto.

Tabla 3. Menciona cada uno de los ángulos de los triángulos y su lado opuesto

TRIÁNGULO 1		TRIÁNGULO 2		TRIÁNGULO 3	
ÁNGULO	LADO OPUESTO	ÁNGULO	LADO OPUESTO	ÁNGULO	LADO OPUESTO

Figura 26. Construcción de tres triángulos para identificación de ángulos y lado opuesto. Estudiante E-24



Al respecto podemos destacar que la gran mayoría de los estudiantes tuvo la capacidad de identificar cual era el lado opuesto a un determinado ángulo, como se evidencia en las siguientes imágenes:

Figura 27. Ángulos y lados opuestos. Estudiante E-5

TRIÀNGULO 1		TRIÁNGULO 2		TRIÁNGULO 3	
ÁNGULO	LADO OPUESTO	ÁNGULO	LADO OPUESTO	ÁNGULO	LADO OPUESTO
	a		b		c

La estudiante E5, hizo representaciones gráficas demostrando habilidades comunicativas para:

- Nominar con letras mayúsculas cada uno de los vértices del triángulo.
- Ubicar correctamente la posición del lado opuesto al ángulo escogido.
- Nominar correctamente el lado opuesto con la misma letra del ángulo pero en minúscula.

Aunque sencillas, estas acciones dan cuenta de buenas habilidades comunicativas matemáticas, por cuanto es clara la forma como se debe nominar los vértices, los ángulos y los lados de un triángulo, demostrando también habilidad de interpretación al emplear distintos sistemas de representación.

Figura 28. Ángulos y lados opuestos. Estudiante E-24

TRIÀNGULO 1		TRIÁNGULO 2		TRIÁNGULO 3	
ÁNGULO	LADO OPUESTO	ÁNGULO	LADO OPUESTO	ÁNGULO	LADO OPUESTO
A, E, C	E	S, L, N	L	P, K, N	P

Caso contrario ocurre con la E-24, quien nominó los vértices de sus triángulos correctamente, pero al momento de elegir el lado opuesto, designó como tal el vértice del ángulo.

Figura 29. Ángulos y lados opuestos. Estudiante E-6

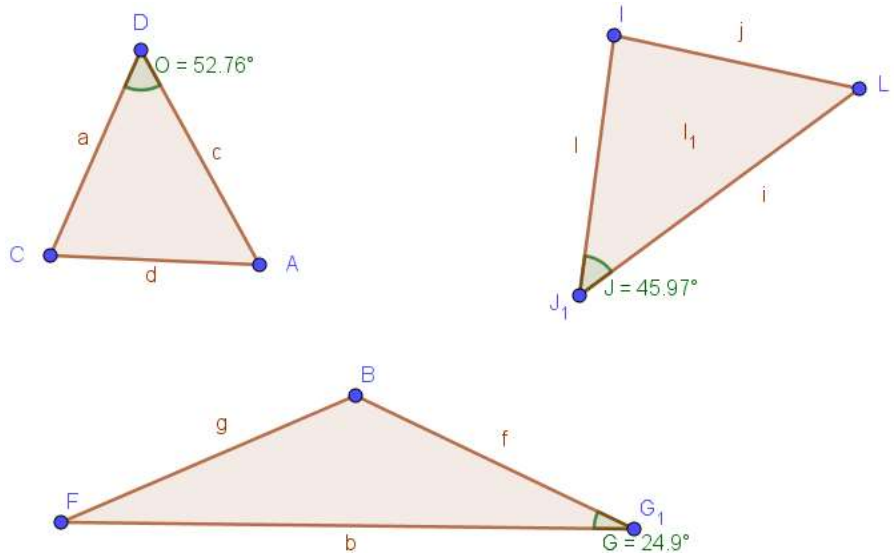


Figura 30. Registro ángulos y lados opuestos. Estudiante E-6

TRIÀNGULO 1		TRIÁNGULO 2		TRIÁNGULO 3	
ÁNGULO	LADO OPUESTO	ÁNGULO	LADO OPUESTO	ÁNGULO	LADO OPUESTO
O	C y A	J	I y L	G	f y B

En este caso particular, la estudiante E-6, designa como lado opuesto las letras de los otros dos vértices del triángulo, desconociendo que puede unirlas y bajo la representación de un segmento. Tal y como ella lo expresa, no señala lados sino

vértices de la figura, demostrando fallas en el manejo del lenguaje matemático al momento de designar o nominar características de los triángulos.

d) ¿Por qué escogiste ese lado como opuesto al ángulo y no otro? Justifica tu respuesta.

CATEGORÍA: “Comunica y argumenta conceptos y procesos”. Cronbach (1963)

Se refiere a la presentación de argumentos en la descripción de un proceso, en la utilización de propiedades, o en los algoritmos, en la formulación de un modelo o en la explicación de un concepto.

El estudiante presenta argumentos para explicar la escogencia del lado opuesto a un ángulo determinado del triángulo construido.

SUBCATEGORÍAS:

- **Definición correcta:** La definición es correcta cuando el estudiante hace una correcta escogencia del ángulo y de su lado opuesto, presentando argumentos válidos y veraces con sustento matemático.

- **Definición Incompleta**: La definición es incompleta si la elección del ángulo es correcta, pero no presenta los argumentos para sustentar su elección.

- **Definición Incorrecta:** Bajo esta subcategoría están aquellos argumentos que no sustentan veraz y suficientemente la elección del ángulo y su lado opuesto.

- **Definición fuera de contexto:** Se considera que está fuera de contexto el argumento si hace referencia a la medida; es decir, si se refiere de manera explícita o implícita a un número.

- **No responde:** En esta subcategoría, se referencian los estudiantes que no escribieron ningún tipo de respuesta a las pregunta.

Tabla 4. Argumentos escogencia de un lado de un triángulo y su ángulo opuesto.

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Comunica y argumenta conceptos y procesos	E1		NO RESPONDE
	E2		NO RESPONDE
	E3		NO RESPONDE
	E4		NO RESPONDE
	E5	“porque es el contrario”	INCORRECTA
	E6	“por que fue el que escogi y si hubiera escogido otro sería otro”	INCORRECTA
	E7	“porque ese vertice era el de mayor tamaño y entonces escogi el que midiera menos”	FUERA DE CONTEXTO
	E8		NO RESPONDE
	E9	“yo escogì el lado B porque es el que está mas cerca al angulo”	INCORRECTA
	E10		NO RESPONDE
	E11	“porque elegi el ángulo A y sus lados opuestos son Cy B”	INCORRECTA
	E12	“por que ese es el lado del angulo lo cambio y no me ba a quedar Bien”	INCORRECTA
	E13		NO RESPONDE
	E14	“porque es el contrario”	INCORRECTA
	E15	“porque fue el que marque y decidi hacerlo”	INCORRECTA
	E16	“porque si se cambia el angulo no seria lo mismo”	INCORRECTA
	E17		NO RESPONDE
	E18		NO RESPONDE
	E19		NO RESPONDE
	E20		NO RESPONDE
	E21	“por que si se cambia el angulo de posición no quedaría igual”	INCORRECTA
	E22	“porque fue el elegido y yo escoji ese”	INCORRECTA
	E23	“porque estan al lado opuesto”	INCORRECTA
	E24	“porque si se cambia el angulo no seria lo mismo sino al contrario”	INCORRECTA
	E25	“porque fue el que escogi y si hubiera escogido otro seria otro”	INCORRECTA
	E26		NO RESPONDE
	E27	“Por que es el único que se encuentra al opuesto de este de vertice”	INCORRECTA
	E28	“porque ese es el otro lado del angulo y si lo cambio no me ba a quedar bien”	INCORRECTA
	E29	“por que ese es el lado del angulo”	INCORRECTA
	E30	“porque ese es el que se opone al angulo”	INCORRECTA
	E31		NO RESPONDE
	E32		NO RESPONDE
Definición completa	E33	“porque es el único que es el que se encuentra al contrario de los ángulos que ya nombre”	INCORRECTA

En este caso, no hubo respuesta CORRECTA. Se indagó por la habilidad de interpretar y argumentar, pretendiendo que los estudiantes presentaran los criterios de selección de un lado opuesto a un ángulo. Al observar con detalle los argumentos presentados por los estudiantes se puede determinar que:

- La habilidad de argumentar se ve en franca involución, demostrada en parte, por la abstención de los estudiantes de presentar alguna respuesta (42%), porque los estudiantes simplemente hicieron la elección de un ángulo y su lado opuesto al azar, sin fundamento matemático que lo guiara.

- Sus argumentos son falacias informales de ambigüedad, por cuanto las razones poco claras que hay presentes, confunden al interlocutor, debido a los diferentes significados con los que son usadas las palabras o frases. Por ejemplo, podemos observar la respuesta dada por el E-25: “porque fue el que escogí y si hubiera escogido otro seria otro”.

- El criterio de suficiencia no se aplica puesto que es evidente que las razones presentadas no son relevantes. Para la muestra la respuesta dada por la E-22: “porque fue el elegido y yo escoji ese”

- Los argumentos presentados están plagados de falacias anfibológicas, porque presentan una ambigüedad provocada por una deficiente estructuración gramatical de los enunciados. Esto es evidente en la respuesta del E-6: “por que ese fue el que escogi y si hubiera escogido otro entonces sería otro y no ese”.

Cuesta trabajo siquiera considerar las razones expuestas por los estudiantes como argumentos, por cuanto presentan serias fallas en la estructura gramatical de la oración, carecen de sustento matemático y no responden al interrogante planteado. Las habilidades de argumentar e interpretar evidencian enormes deficiencias.

e) Completa la siguiente tabla nombrando los lados y ángulos de cada uno de los triángulos y escribiendo su longitud y su amplitud respectivamente

Tabla 5. Lados y ángulos de triángulos

TRIÁNGULO	LADO 1	LADO 2	LADO 3
TRIÁNGULO	ÁNGULO 1	ÁNGULO 2	ÁNGULO 3

Luego de completar la tabla responde: Si sumas los ángulos internos de cada uno de los triángulos: ¿Cuál es el resultado? ¿Por qué sucede esto? Justifica tu respuesta.

CATEGORÍA: Comunicación de resultados*.* De Guzmán, M. (1974).

Esta categoría comprende interpretar datos y concluir a través de justificaciones, de acuerdo a las condiciones del problema. Se refiere a producir razones o argumentos, establecer relaciones entre ellos haciendo referencia a las actividades y procesos mediante los cuales respalda una afirmación, manifestando el porqué de un proceso, admitiendo o refutando una conclusión por medio de razones relevantes como la realización de un procedimiento, el planteamiento de una estrategia determinada y la utilización de un contraejemplo para lograr convencimiento o adhesión a sus tesis.

SUBCATEGORÍAS:

- **Definición correcta:** La definición es correcta cuando el estudiante presenta argumentos válidos, veraces con sustento matemático.

- **Definición Incompleta**: La definición es incompleta si la elección del ángulo es correcta, pero no presenta los argumentos para sustentar su elección.

- **Definición Incorrecta:** Bajo esta subcategoría están a aquellos argumentos que no sustentan veraz y suficientemente la elección del ángulo y su lado opuesto.

- **Definición fuera de contexto:** Se considera que está fuera de contexto el argumento si hace referencia a la medida; es decir, si se refiere de manera explícita o implícita a un número.

- **No responde:** En esta subcategoría, se referencian los estudiantes que no escribieron ningún tipo de respuesta a las pregunta.

Tabla 6. Suma ángulos internos de un triángulo.

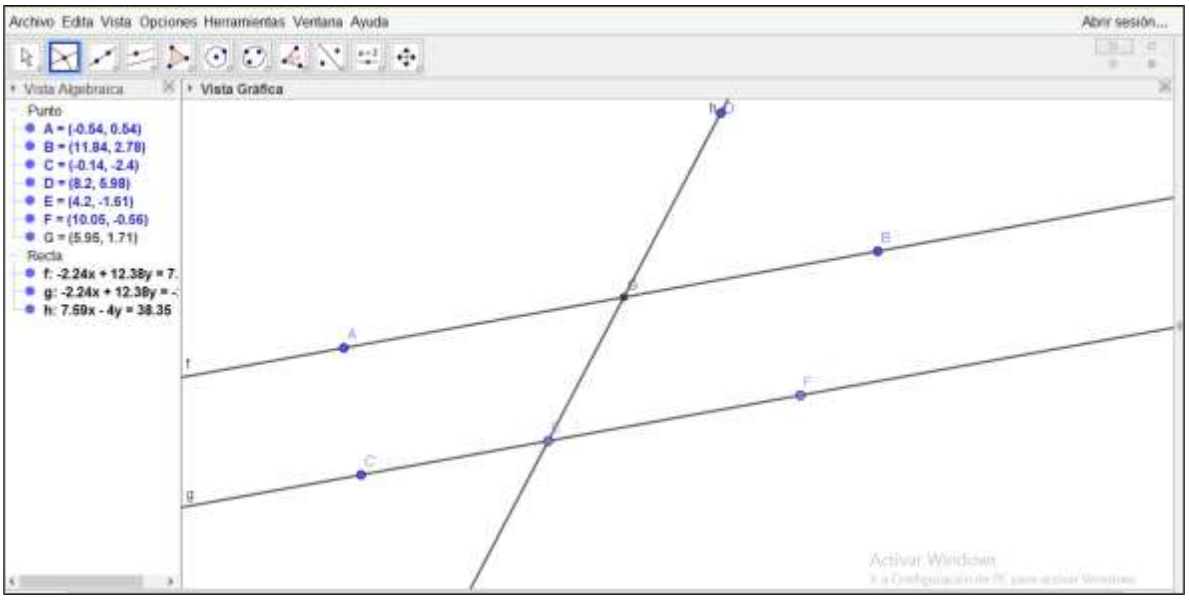
CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Comunicación de resultados	E1		NO RESPONDE
	E2	“180º”	FUERA DE CONTEXTO
	E3	“por que esa regla la cumplen todos los triangulos”	INCORRECTA
	E4		NO RESPONDE
	E5	“”180º porque es una propiedad de los triangulos”	INOMPLETA
	E6	“180º porque la suma de los angulos interiores de un triangulo siempre debe dar 180º”	INCOMPLETA
	E7	“180º por que es la mitad de la del circulo”	INCOMPLETA
	E8		NO RESPONDE
	E9	“por que es una regla general de los triangulos”	INCOMPLETA
	E10	“180º porque es una propiedad de los angulos”	INCOMPLETA
	E11	“180º”	FUERA DE CONTEXTO
	E12	“180º por que es una propiedad del triangulo”	INCOMPLETA
	E13		NO RESPONDE
	E14	“da 180º porque suma eso”	INCORRECTA
	E15	“180º porque cada angulo debe tener la misma para que el triangulo este bien hecho”	INCORRECTA
	E16	“180º porque es una propiedad del triangulo”	INCOMPLETA
	E17		NO RESPONDE
	E18		NO RESPONDE
	E19		NO RESPONDE
	E20	“180º”	FUERA DE CONTEXTO
	E21	“180º porque es una propiedad del triangulo”	INCOMPLETA

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Comunicación de resultados	E22	“”180º porque es una propiedad”	INCOMPLETA
	E23	“180º porque separados se les sumamos eso dan”	INCOMPLETA
	E24	“180º porque es una propiedad del triangulo”	INCOMPLETA
	E25	“180 porque la suma de los angulos interiores siempre debe dar 180º”	INCOMPLETA
	E26		NO RESPONDE
	E27	“180º por es una propiedad de los angulos”	INCORRECTA
	E28	“180º porque es una propiedad del triangulo”	INCOMPLETA
	E29	“180º porque es una propiedad del triangulo”	INCOMPLETA
	E30	“180º”	FUERA DE CONTEXTO
	E31		NO RESPONDE
	E32		NO RESPONDE
	E33	“su resultado es 180º en todos porque es una propiedad de los ángulos”	INCOMPLETA

Los estudiantes no manifiestan de manera explícita la conclusión a la que llegan luego de medir los ángulos interiores del triángulo. Al analizar la habilidad de justificar, se encuentran vacíos en cada uno de los estudiantes en este campo, por cuanto la validez y fuerza de sus razones son débiles, su lenguaje natural no es claro y sus argumentos son fácilmente debatibles. Tampoco se establecen relaciones de conexidad entre los argumentos, puesto que las razones expuestas no resisten la réplica. Así mismo, es evidente la debilidad existente para justificar analizar e interpretar la sumatoria de los datos numéricos debido a que presentaron una adhesión por convencimiento a que la suma de los ángulos interiores de un triángulo da como resultado 180º. Ninguno expuso demostración o contraejemplo.

2) Observa en la pantalla del computador la siguiente imagen.

Figura 31. Determinación ángulos alternos – internos. Primera sesión secuencia didáctica.



a) Encuentra un par de ángulos alternos – internos, márcalos en el GeoGebra y escribe los datos en la siguiente tabla:

Tabla 7. Ángulos alternos -internos

ÁNGULOS ALTERNOS – INTERNOS		
Opción	Nombre de los ángulos	Medidas de los ángulos
1		
2		

CATEGORÍA: Organización e interpretación de la información. Booth, L. R. (1988).

Corresponde a esta categoría la detección de datos basada en la interpretación de un sistema de representación gráfica. Interpretar implica ciertos procesos de pensamiento, y para el desarrollo de esta habilidad se requiere que el estudiante pueda:

- Identificar y definir las variables que intervienen en la situación.

- Identificar las relaciones entre las variables involucradas en la situación.
- Hacer un esquema, o "traducir" los pasos anteriores de un sistema de representación a otro.

SUBCATEGORÍAS:

- **Definición correcta:** La definición es correcta cuando el estudiante identifica los nombres y medidas de los ángulos alternos – internos.

- **Definición Incompleta**: La definición es incompleta si la elección del ángulo es correcta, pero no presenta las medidas o viceversa.

- **Definición Incorrecta:** Bajo esta subcategoría están a aquellos datos que no corresponden a los ángulos alternos – internos que se presentan en la imagen.

- **No responde:** En esta subcategoría, se referencian los estudiantes que no escribieron ningún tipo de respuesta a las pregunta.

Tabla 8. Reconocimiento ángulos alternos - internos.

CATEGORÍA	E	Nombre de los ángulos	Medidas de los ángulos	SUBCATEGORIA
Organización e interpretación de la información	E1			NO RESPONDE
	E2			NO RESPONDE
	E3			NO RESPONDE
	E4			NO RESPONDE
	E5			NO RESPONDE
	E6	A C	53,66 53,63	INCORRECTA
	E7	B C	46.83 37,22	INCORRECTA
	E8			NO RESPONDE
	E9			NO RESPONDE
	E10			NO RESPONDE
	E11	A,I,J B,K,L	56º53 56º69	INCORRECTA
	E12			NO RESPONDE

CATEGORÍA	E	Nombre de los ángulos	Medidas de los ángulos	SUBCATEGORIA
	E13			NO RESPONDE
	E14	ABE Y CEB EBG Y CED	140,77º Y 39,39º 140,61 Y 39,39	CORRECTA
	E15	A B	53,70 53,80	INCORRECTA
	E16			NO RESPONDE
	E17			NO RESPONDE
	E18			NO RESPONDE
	E19			NO RESPONDE
	E20			NO RESPONDE
	E21	L F	72,3º 67,81º	INCORRECTA
	E22	A C	53,66 53,63	INCORRECTA
	E23	E B	40,73 42,52	INCORRECTA
	E24	D L	68,21º 72.3	INCORRECTA
	E25	A B	53.66 53.63	INCORRECTA
	E26			NO RESPONDE
	E27	A:=B Y 0	27.57º B52,43º Y=29,13º O=150.87	INCORRECTA
	E28	V I	47,73º 129.09º	INCORRECTA
	E29	ABC HEG	A=212.69º V=195.37º	INCORRECTA
	E30			NO RESPONDE
	E31			NO RESPONDE
	E32			NO RESPONDE
Organización e interpretación de la información	E33	EBE Y BED EBG Y CEB	140.77º Y 39.39º 320.77 Y 219,39	INCORRECTA

En este ítem se evidencia una deficiencia en la habilidad comunicativa de interpretación por cuanto la gran mayoría (58%) de los estudiantes no contestaron el ítem, y quienes lo hicieron, demuestran falencias para seleccionar la información presente en un sistema de representación gráfico para transcribirlo a un sistema de representación numérico. Para el hallazgo de los ángulos alternos internos debió tenerse en cuenta que la suma de los ángulos alternos internos es igual a dos veces la suma de dos ángulos rectos.

Las fallas en la habilidad de interpretación se reflejan en la incapacidad de los estudiantes de:

- Determinar de qué trata el problema.
- Manejar un lenguaje matemático que mantenga un hilo conductor en distintos sistemas de representación.
- Utilizar operaciones aritméticas para la comprobación de sus elecciones. Bastaba con realizar la sumatoria de las medidas de los ángulos elegidos para comprobar que la selección había sido hecha correctamente.

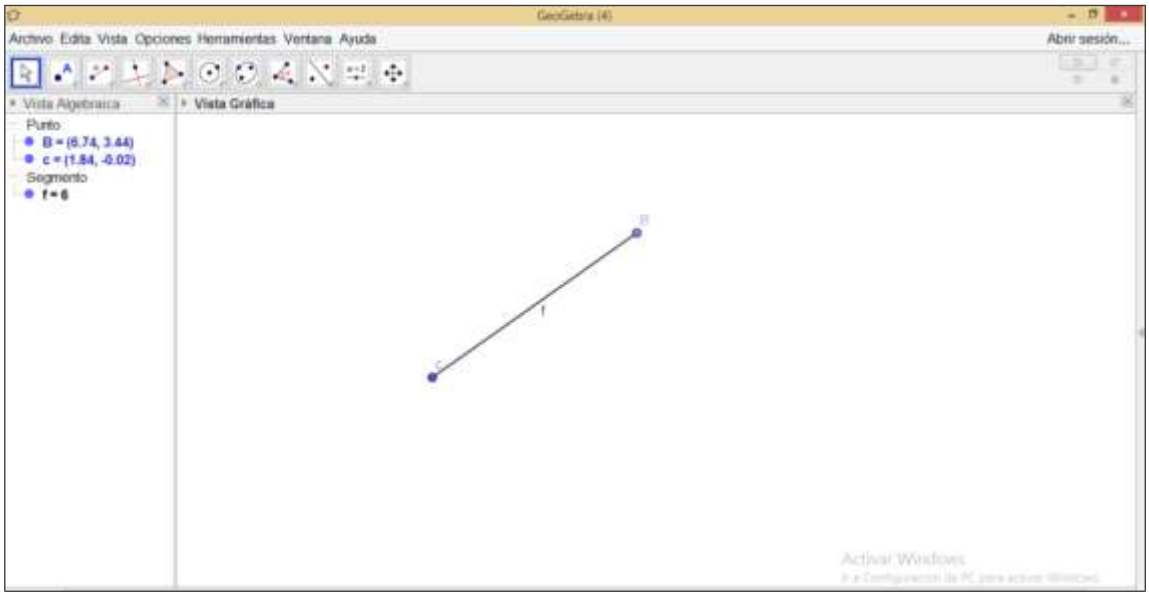
7.8.5.2 Fase de aprehensión de conocimiento***.*** Se presenta a los estudiantes el problema, con el fin de que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar. El problema propuesto ha de llevar directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben apropiar. Cuando lo necesiten, se orientará a los estudiantes hacia la solución, de acuerdo con la estrategia individual que cada uno haya elegido.

El problema ha sido seleccionado para permitir al estudiante aprender los conceptos, propiedades o definiciones fundamentales de los triángulos.

Situación problema a resolver.

Un triángulo tiene un lado CB que mide 6 cm. El ángulo ACB mide 70º y el ángulo ABC mide 50º. ¿Cuántos triángulos distintos que cumplan esta condición pueden construirse? Utiliza la herramienta GeoGebra para resolver el problema.

Tabla 9. Segmento inicial para la construcción de un triángulo. Primera sesión secuencia didáctica.



Para iniciar la resolución del problema se dio una indicación corta del trabajo a realizar por los estudiantes como es la de efectuar la construcción del triángulo con las condiciones dadas. Cada estudiante planeó la estrategia para resolver el problema planteado.

Esta actividad es pertinente porque:

- Permite que el estudiante plantee conjeturas a partir del segmento inicial dado para llegar a la construcción final del triángulo, y a medida que avanza la actividad, él debe centrarse en la propiedad de la sumatoria de los ángulos internos de esta figura.

- Es preciso que en la estrategia de construcción del triángulo con las condiciones dadas, el estudiante involucre conceptos clave como:

- ❖ Nominación de ángulos
- ❖ Nominación de lados de un triángulo
- ❖ Uso de las herramientas del software

El software de geometría dinámica, se convierte en este caso en un mediador imprescindible para el efecto de esta actividad, consiguiendo que los estudiantes puedan reflexionar sobre sus estrategias y plasmarlas comunicativamente, ya que se puede establecer la diferencia entre construcción geométrica y dibujo.

No es posible para el estudiante saber, sin utilizar la prueba del arrastre, cuantos triángulos se pueden construir con las condiciones dadas. Al hacerla se espera que determine que con esas condiciones, un solo triángulo de estas características podrá ser construido.

7.8.5.3 Fase de discusión*.* En esta fase se hace énfasis en la expresión oral o escrita de los resultados que han obtenido al resolver el problema, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio. Se espera que los estudiantes utilicen el vocabulario adecuado (lenguaje matemático) para describir la estrategia empleada en la resolución del problema. Se promueve en esta fase la discusión y presentación de argumentos sobre la forma de resolver la situación matemática y que se evidencie la apropiación de elementos, propiedades de la figura objeto de estudio. Para ello, los estudiantes responderán los siguientes ítems:

1. Explica ante tus compañeros la estrategia que empleaste para resolver el problema.

Tabla 10. Estrategia utilizada para la construcción de un triángulo.

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Presenta razones a los procesos de solución de un problema matemático.	E1		NO RESPONDE
	E2		NO RESPONDE
	E3	“Trazo tres rectas a la línea que esta y de hay le marco los angulos”	INCORRECTA
	E4		NO RESPONDE
	E5	“Longitud fija, angulo dada su amplitud”	INCORRECTA
	E6	“Traza las lineas en angulos y tratar de que queden las medidas”	INCORRECTA
	E7		NO RESPONDE
	E8		NO RESPONDE
	E9		NO RESPONDE
	E10	“yo trazo las líneas y acomodo el angulo de 70º y luego muebo el otro lado hasta que me quede el angulo que falta y asi lo hago”	INCORRECTA
	E11	“segmento de longitud fija puse 6cm luego angulo dad su amplitud. Recta que pasa por dos puntos. Angulo dada su amplitud. Recta pasa dos puntos interseccion de dos objetos. Poligono”	INCORRECTA
	E12	“angulo según su amplitud y polígono”	INCORRECTA
	E13		NO RESPONDE
	E14	“poligonos lados y compas”	INCORRECTA
	E15	“unimoslos lados y de ahí de esto formo un triangulo”	INCORRECTA
	E16		NO RESPONDE
	E17		NO RESPONDE
	E18		NO RESPONDE
	E19		NO RESPONDE
	E20		NO RESPONDE
	E21		NO RESPONDE
	E22	“Trazo las lineas en angulos y tratar de que qyeden las medidas”	INCORRECTA
	E23	“angulo dada su amplitud y polígono y asi cumple las medidas”	INCORRECTA
	E24		NO RESPONDE
	E25	“segmento de longitud fija 6cm. Angulo dada su amplitud recta que pasa por dos puntos. Angulo dada su amplitud recta que pasa por dos puntos intersección.”	INCORRECTA
	E26		NO RESPONDE
	E27	“utilize segmento de longitud fija. Angulo angulo, angulo dad su amplitud. Segmento entre dos puntos, polígono.	INCORRECTA
	E28	“angulo según su amplitud y polígono”	INCORRECTA
	E29	“angulo según su amplitud y polígono”	INCORRECTA
	E30		NO RESPONDE
	E31		NO RESPONDE
	E32		NO RESPONDE
	E33	“Utilizo el de la recta y el ángulo dada su amplitud para armarlo”	INCORRECTA

Al realizar el análisis de la habilidad de argumentar, es evidente que persisten las debilidades en este aspecto debido a que las razones de los estudiantes:

- No denotan una secuencia lógica de acciones para encontrar la solución a un problema.
- No evidencian conocimiento matemático.
- No producen entre ellas justificaciones que sean de naturaleza deductiva.
- Las explicaciones presentadas no se han hecho con palabras claras o ejemplos para que se haga perceptible el procedimiento de resolución del problema.
- No ayudan a recordar o reconstruir conocimiento matemático.
- Son menciones de los nombres de las herramientas del software que de ninguna manera constituyen persé un argumento

El estudiante B, explica la estrategia empleada para resolver el problema planteado:

P: Profesora **E23:** Estudiante B **O:** Observación

P: ¿Cuál es tu estrategia para construir el triángulo con las condiciones dadas?

E23: "Usted me pidió que hiciera un triángulo que midiera 70º en un ángulo y que el otro fuera de 50º, entonces yo lo hice con ángulo dada su amplitud y ahí me salía el triángulo y por último polígono."

P: ¿Cómo haces para garantizar las medidas de los ángulos del triángulos?

E23: Con la medida de longitud fija.

P: ¿A qué medida te refieres?

E23: La medida de la base

P: ¿Y de qué manera empleando la base se puede garantizar que el triángulo cumpla con las medidas en los ángulos?

E23: Con la herramienta elige y mueve.

O: El estudiante realiza la construcción de un segmento, haciendo coincidir uno de los extremos del mismo con uno de los extremos del segmento inicial. Utiliza la herramienta elige y mueve y trata de acomodar uno de los extremos hasta que el ángulo formado tenga una amplitud de 70º. Lo intenta pero no tiene éxito en su propósito.

P: ¿Por qué no pudiste formar el ángulo de 70º?

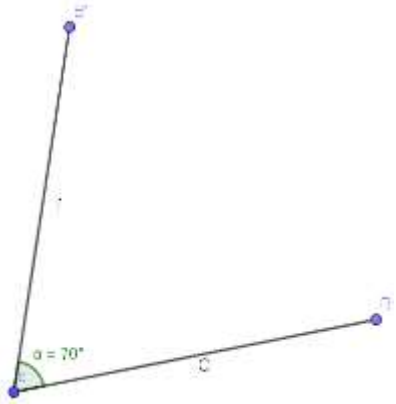
E23: "Es que eso se mueve mucho y cuando ya lo tengo cerca pasa derecho el ángulo"

P: ¿Quién puede explicar cómo se garantiza la medida de uno de los ángulos?

E33: Profesora yo lo que hice fue usar ángulo dada su amplitud. Toqué las puntas del segmento y escribí 70º y ahí apareció un punto.
P: Y, ¿para qué te sirve o qué te indica ese punto?

E33: Pues yo lo que hice fue trazar una línea desde el punto C hasta ese punto. Ya ahí tengo un ángulo de 70º.

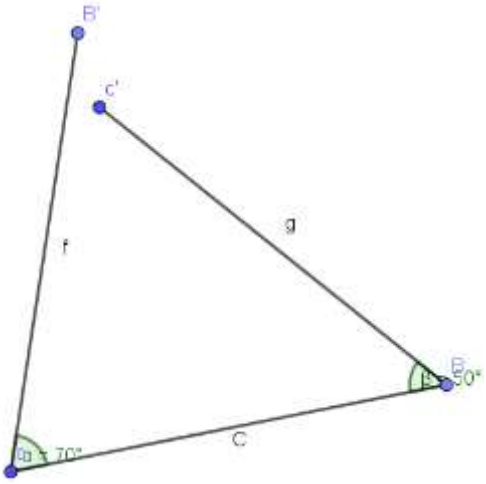
Figura 32. Detalle paso a paso para la construcción de un triángulo con dos ángulos dados. Primera sesión secuencia didáctica.



P: ¿Y cómo se construye el otro ángulo, el de 50º?

E33: Pues se hace lo mismo, usando ángulo dada su amplitud y volvemos a trazar la otra línea

Figura 33. Detalle paso a paso para la construcción de un triángulo con dos ángulos dados. Primera sesión secuencia didáctica.



P: Si yo observo esa imagen, tengo garantizadas las medidas de los triángulos, pero aún no está construido. ¿Deben unirse los extremos B' y C`?

O: E-33 No responde y utiliza la herramienta elige y mueve para seleccionar los extremos de esos segmentos. Se les conminó a los estudiantes a observar la vista algebraica pues a pesar de que los estudiantes movían los extremos B' y c' de los segmentos, no se percataron que alteraban el valor de la amplitud de los ángulos, cambiando las condiciones dadas en el problema inicial.

El hecho de poder interactuar con el software, les lleva a utilizar un lenguaje matemático, y a reconocer ciertas propiedades de los triángulos al momento de realizar la construcción. Muchos de los estudiantes se abstuvieron de participar de manera activa en esta primera sesión y quienes lo hicieron, evidencian debilidades al momento de interpretar, justificar y comunicar matemáticamente.

Para resolver el problema los estudiantes inicialmente contestarán las siguientes preguntas, que darán cuenta del nivel de habilidades comunicativas:

2. ¿De qué manera garantizas la amplitud de los ángulos del triángulo? Presenta tus argumentos.

Tabla 11. Presentación de argumentos.

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Presenta razones a los procesos de solución de un problema matemático.	E1		NO RESPONDE
	E2		NO RESPONDE
	E3	"Trazo tres rectas a la línea que esta y de hay le marco los angulos"	INCORRECTA
	E4		NO RESPONDE
	E5	"Longitud fija, angulo dada su amplitud"	INCORRECTA
	E6	"Traza las lineas en angulos y tratar de que queden las medidas"	INCORRECTA
	E7		NO RESPONDE
	E8		NO RESPONDE
	E9		NO RESPONDE
	E10	"yo trazo las líneas y acomodo el angulo de 70º y luego muebo el otro lado hasta que me quede el angulo que falta y asi lo hago"	INCORRECTA
	E11	"segmento de longitud fija puse 6cm luego angulo dad su amplitud. Recta que pasa por dos puntos. Angulo dada su amplitud. Recta pasa	INCORRECTA

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
		dos puntos interseccion de dos objetos. Poligono”	
	E12	“angulo según su amplitud y polígono”	INCORRECTA
	E13		NO RESPONDE
	E14	“poligonos lados y compas”	INCORRECTA
	E15	“unimoslos lados y de ahí de esto formo un triangulo”	INCORRECTA
	E16		NO RESPONDE
	E17		NO RESPONDE
	E18		NO RESPONDE
	E19		NO RESPONDE
	E20		NO RESPONDE
	E21		NO RESPONDE
	E22	“Trazo las lineas en angulos y tratar de que qyeden las medidas”	INCORRECTA
	E23	“angulo dada su amplitud y polígono y asi cumple las medidas”	INCORRECTA
	E24		NO RESPONDE
	E25	“segmento de longitud fija 6cm. Angulo dada su amplitud recta que pasa por dos puntos. Angulo dada su amplitud recta que pasa por dos puntos intersección.”	INCORRECTA
Presenta razones a los procesos de solución de un problema matemático.	E26		NO RESPONDE
	E27	“utilize segmento de longitud fija. Angulo angulo, angulo dad su amplitud. Segmento entre dos puntos, polígono.	INCORRECTA
	E28	“angulo según su amplitud y polígono”	INCORRECTA
	E29	“angulo según su amplitud y polígono”	INCORRECTA
	E30		NO RESPONDE
	E31		NO RESPONDE
	E32		NO RESPONDE
	E33	“Utilizo el de la recta y el angulo dada su amplitud para armarlo”	INCORRECTA

Ninguno de los estudiantes presenta argumentos matemáticos que permitan garantizar la medida de amplitud de los ángulos. Al analizar la habilidad de argumentar, se evidencia que ni siquiera las expresiones gramaticales plasmadas por los estudiantes pueden ser consideradas argumentos por cuanto:

- En ningún caso hay una estructura gramatical que garantice una intención comunicativa del estudiante por mostrar o defender su estrategia.

- No tuvieron en cuenta que los argumentos debían estar dirigidos a mostrar la garantía de la conservación de unas medidas en unos ángulos.

- Por su debilidad para argumentar no responde a las preguntas planteadas por la profesora ni con el uso de palabras, números, imágenes o símbolos, sino que se limita a mencionar las herramientas del software con las cuales interactuó.

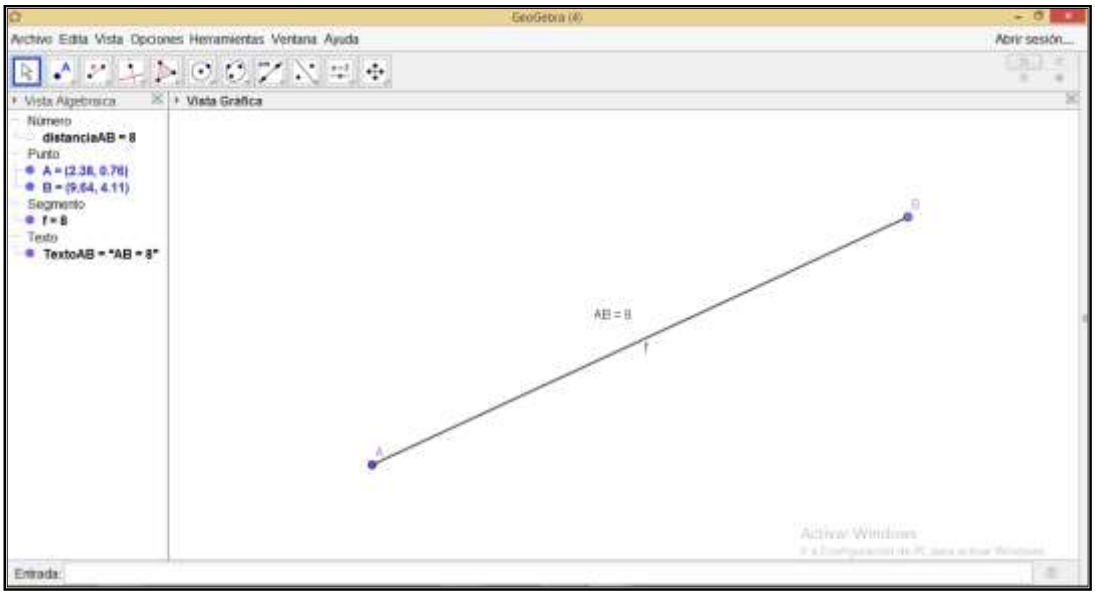
- Es evidente la falta de consistencia en los argumentos por cuanto no muestran coherencia ni sustento matemático alguno.

- Las razones presentadas son intrascendentes porque no formulan conjeturas ni las corroboran, ni sus razones emplean conceptos, juicios o razonamientos que den sustento lógico a la solución de la situación.

7.8.5.4 Fase de consolidación**.** En esta etapa del proceso se produce la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes utilizan los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, un poco más complejos. La profesora propone a sus estudiantes resolver un problema en el que se debe hacer uso de propiedades y que tiene varias soluciones. La ayuda del profesor a los estudiantes Se limita al máximo en la resolución del problema.

El lado AB del triángulo ABC mide 8cm como se ve en la imagen. Verifique con ayuda del software cuantos triángulos se pueden construir con esta condición y compruebe si la sumatoria de las medidas de los ángulos da como resultado 180º.

Figura 34. Segmento inicial para la construcción de un triángulo. Primera sesión secuencia didáctica. Fase de consolidación.



a) ¿De qué manera solucionó el problema planteado? Justifique su respuesta.

Tabla 12. Presentación de argumentos. Fase de consolidación. Primera sesión didáctica.

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Presenta razones a los procesos de solución de un problema matemático.	E1		NO RESPONDE
	E2		NO RESPONDE
	E3	"Eso es mas fácil porque yo solo dejo la linea de abjo y los otros dos los trazo como quiera"	INCOMPLETA
	E4		NO RESPONDE
	E5	"como no tengo que trazar angulos entonces trazo las lineas que faltan"	I INCOMPLETA
	E6	"Con angulo dada su amplitud y marco 70º y luego trazo la linea"	INCORRECTA
	E7		NO RESPONDE
	E8		NO RESPONDE
	E9		NO RESPONDE
	E10	"solamente se traza el segmento de abajo y las otras lineas yo las trace que se cruzaran"	INCOMPLETA
	E11	"yo coji la base del triangulo y trase dos lineas parecidas de largo y uni con polígono"	INCOMPLETA
	E12	"es mas fácil porque yo solo dibujo las dos lineas que faltan y listo"	INCOMPLETA
	E13		NO RESPONDE

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Presenta razones a los procesos de solución de un problema matemático.	E14	“yo dibujo las dos lineas que le hacen falta para que sea un triangulo”	INCOMPLETA
	E15	“se unen con dos rayas el lado que ya nos dieron y usamos polígono despues la movemos y no se desbarata”	INCOMPLETA
	E16		NO RESPONDE
	E17		NO RESPONDE
	E18		NO RESPONDE
	E19		NO RESPONDE
	E20		NO RESPONDE
	E21		NO RESPONDE
	E22	“Yo coji la herramienta segmento y luego trace uno hasta la mitad del otro y después volvi a marcar otro segmento para unir toda la figura y asi queda el triangulo echo”	INCOMPLETA
	E23	“se trasa cualquier linea de cualquier medida y se usa elige y mueve”	INCOMPLETA
	E24		NO RESPONDE
	E25	“se usa la herramienta segmento y con eso se trasan dos lineas para formar el triangulo que se une con polígono para formar triangulo.”	INCOMPLETA
	E26		NO RESPONDE
	E27	“Yo dibuje dos lineas sin el angulo ni nada para formar el traiangulo que le faltaban dos lados..	INCOMPLETA
	E28	“puede ser cualquier triangulo desde que la linea de abajo no cambie no pasa nada”	INCOMPLETA
	E29	“al triangulo le hacían falta dos lados y uno los puede trasar con el segmento y los une con poligono”	INCOMPLETA
	E30		NO RESPONDE
	E31		NO RESPONDE
	E32		NO RESPONDE
	E33	“use el segmento para construir los dos lados que le faltaban a la figura”	INCOMPLETA

Esta actividad se propuso para que los estudiantes verificaran que la conservación de la longitud de uno de los lados del triángulo, tiene infinitas posibilidades de solución, puesto que no había una condición previa para la conservación de la amplitud de ninguno de los ángulos del triángulo.

Luego de hacer la construcción los estudiantes respondieron una serie de preguntas que generaron discusión en el grupo y que se presentan a continuación en el extracto del diálogo sostenido.

Explica a tus compañeros la estrategia que empleaste para resolver el problema

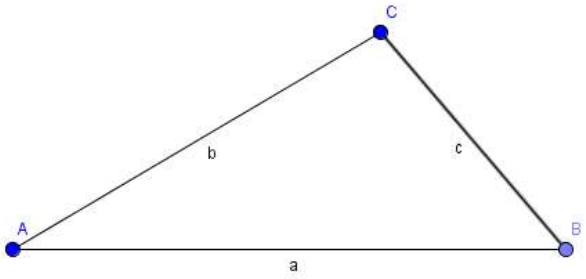
P: Profesora **E:** Estudiante **O:** Observación

P: ¿En qué consiste la estrategia para construir el triángulo a partir del segmento dado?

E28: Pues es fácil porque yo tracé un lado usando segmento y luego volví a usar segmento y tracé el otro.

O: El estudiante utilizó la herramienta segmento para trazar a uno y otro extremo del segmento inicial (el cual no sufrió modificaciones), los dos lados faltantes a la figura.

Figura 35. Trazo de dos lados a partir de un segmento inicial. Primera sesión secuencia didáctica. Fase de consolidación.



P: Al trazar esos dos lados como lo has indicado, ¿el segmento inicial no sufre ninguna modificación?

E28: No profesora porque yo no me estoy metiendo con el. O sea que solo le ponemos las puntas de los otros lados.

P: Cuando dices “ponerle las puntas de los otros lados”, ¿a qué te refieres?

E28: A que desde ese lado se arranca a dibujar los otros lados que faltan.

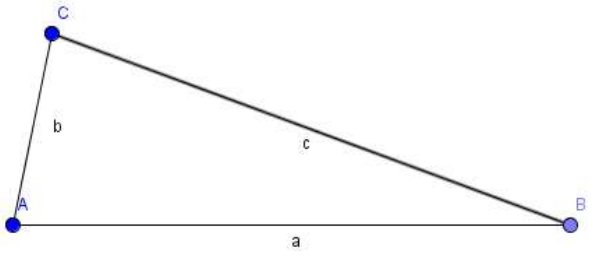
P: ¿Hubiera sido posible trazar otro triángulo diferente?

E28: Pues si yo cojo los lados y los mando para otro lado.

P: ¿Puedes explicar que es mandar los lados para otro lado por favor?

O: El estudiante utiliza de nuevo la herramienta segmento y traza dos nuevos lados pero esta vez con una magnitud y sentido diferentes a los iniciales así:

Figura 36. Trazo de dos nuevos lados a partir de un segmento inicial. Primera sesión secuencia didáctica. Fase de consolidación.

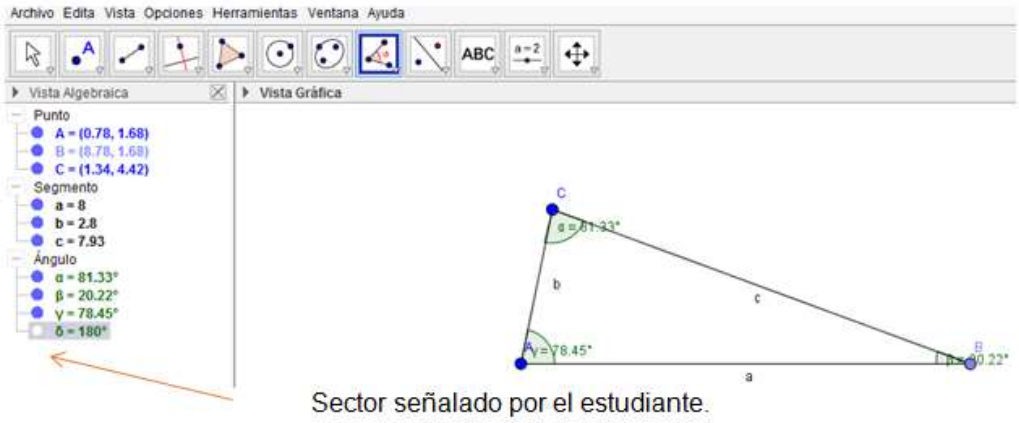


P: ¿Si sumamos los ángulos internos del anterior y de este nuevo triángulo miden lo mismo?

E28: Si porque si sumamos miden 180°.

O: El estudiante señala con su dedo la vista algebraica donde se ve la sumatoria de los tres ángulos internos.

Figura 37. Verificación sumatoria ángulos internos de un triángulo. Fase de consolidación.

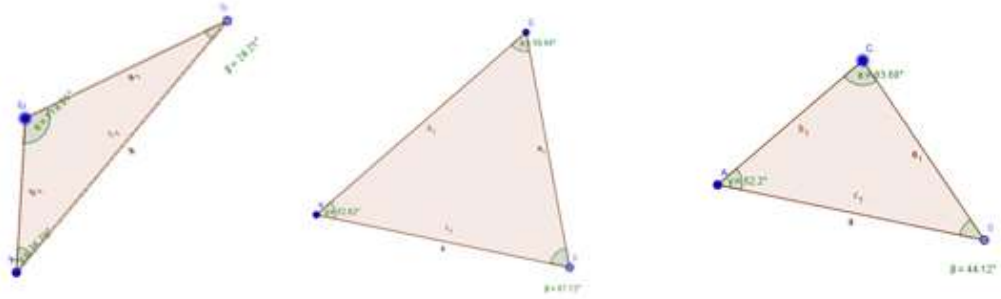


P: Si haces la prueba del arrastre, ¿qué sucede con el segmento inicial?

E28: Si movemos con la flecha sigue siendo el triángulo.

O: El estudiante no se percata que cuando se hace la prueba del arrastre, la longitud del segmento inicial se conserva. De la misma manera pasó por alto el hecho de ver que las soluciones de construcción de este triángulo con las condiciones dadas son infinitas.

Figura 38. Vista de diferentes alternativas de solución del problema. Primera sesión.

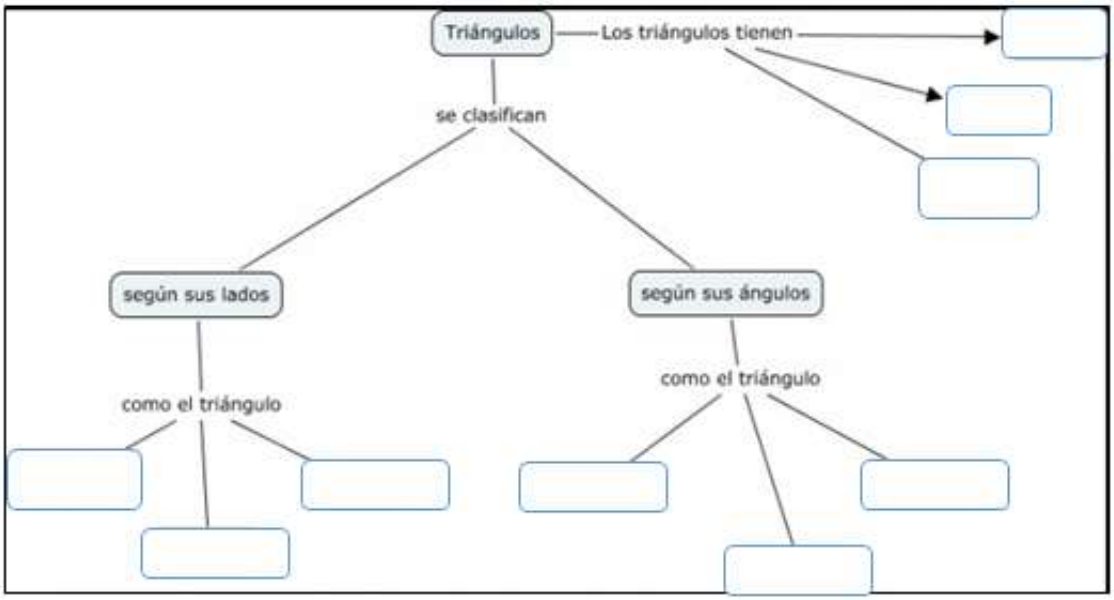


7.8.5.5 Fase de cierre. En esta fase la profesora dirige resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a establecer una visión global de todo lo aprendido sobre el tema, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente.

En esta etapa no hay aparición de nuevos conocimientos, sino la estructuración de los ya adquiridos.

Se propuso para esta etapa la recopilación de la información en la siguiente tabla.

Figura 39. Clasificación de los triángulos



En general se observó que con respecto a esta fase, los estudiantes:

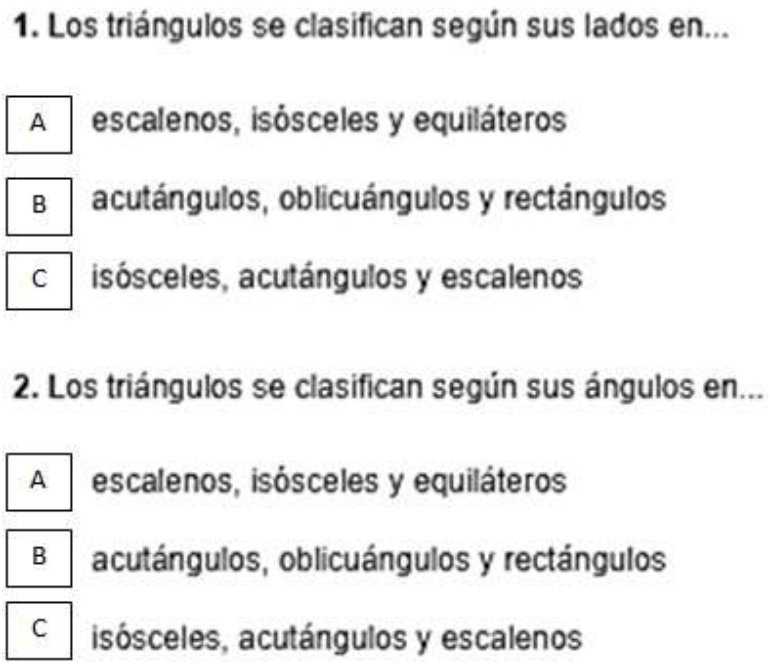
- Emplean algunos términos matemáticos para referirse a los elementos del objeto de estudio: el triángulo.

- Se observó que en los espacios de discusión, los estudiantes expresaron sus ideas de manera libre, observando que si bien ya emplean una jerga matemática, en ocasiones estos términos son utilizados sin mucha propiedad y por ende en algunos estudiantes sus argumentos parecen confusos o se presentan con desaciertos.

- Cuando manifiestan sus razones del significado de la prueba del arrastre, observan en el software las variaciones de medida en la longitud de los lados, la conservación de la medida de los ángulos o de alguno de sus lados, pero, sus argumentos se basan exclusivamente en percepciones visuales. Es importante para ello destacar en su justificación la conservación de la forma de la figura y la reducción o ampliación de su tamaño, sin percibir la conservación de las propiedades de la misma.

Ahora responde:

Figura 40. Opciones de respuesta



f) En cada afirmación marque F (falso) o V (verdadero) Justifique cuando la afirmación se a falsa.

Tabla 13. Cuadro Falso - verdadero

AFIRMACIÓN	F	V	JUSTIFICACIÓN
A. La suma de los ángulos interiores de un triángulo depende de la longitud de los lados del mismo.			
B. En cualquier caso la suma de los ángulos interiores de un triángulo da como resultado 180º			
C. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a otro triángulo, entonces los terceros triángulos también son congruentes.			

7.9 ANALISIS DE LA SECUENCIA DIDACTICA

La estructura de las actividades de la secuencia didáctica se hizo bajo un enfoque constructivista, que se organizó en cinco fases:

7.9.1 Fase de Exploración. Se plantearon actividades exploratorias de los aprendizajes previos, sus preconceptos y los aprendizajes arraigados en el estudiante de acuerdo a los contenidos temáticos en cada una de las sesiones, aspectos que representan el punto de partida para tomar contacto con el objeto de estudio y que son la base para plantear la estrategia de aprendizaje de las etapas subsiguientes en cada sesión de trabajo.

En esta fase exploratoria se tuvo en cuenta que cada una de las actividades planteadas, apuntaran al fortalecimiento de las habilidades comunicativas a través de la justificación de sus afirmaciones, la presentación de sus argumentos y la capacidad de atribuir significado a las expresiones matemáticas (interpretar), de modo que estas adquieran sentido en función del propio objeto matemático de estudio (el triángulo).

7.9.2 Fase de Aprehensión de Conocimiento. Para que haya un proceso de construcción de significados, basado en las ideas iniciales y cotidianas que posee el estudiante sobre los contenidos geométricos, se propone a los estudiantes un problema geométrico, con el fin de que utilice para su resolución, las propiedades, elementos y características de la figura que se estudia, con la mediación del software de geometría. Esta actividad brindó espacio para la rememoración de saberes, la aplicación de propiedades y la planeación de una estrategia de resolución del problema. Este ha sido seleccionado para permitir al estudiante aprehender los conceptos, propiedades o definiciones fundamentales de los triángulos.

7.9.3 Fase de Discusión. Es fundamental en esta fase la presentación de los resultados obtenidos en la resolución del problema, que generen discusión y debate sobre el acierto o no de la estrategia elegida para tal fin, los criterios empleados para seleccionar la estrategia, y el reconocimiento de las diversas formas que permiten resolver la situación matemática planteada. La discusión entre los estudiantes, ayuda a que ellos tengan una mejor comprensión de las propiedades de los triángulos, a ver la aplicabilidad de los contenidos temáticos en la resolución de un problema y conlleva al uso del lenguaje matemático al participar en la discusión. La profesora interviene a través de pequeñas preguntas para generar la discusión, indagando el grado de eficacia que tuvo la estrategia elegida para resolver la situación matemática. Esta fase constituyó la base para que tanto la profesora como los estudiantes determinen sus fortalezas, debilidades y aspectos a mejorar dentro del nivel de aprendizaje alcanzado.

7.9.4 Fase de consolidación. Esta fase se planificó con el fin de enfrentar a los estudiantes a resolver situaciones matemáticas geométricas donde pudiese aplicar los diferentes aprendizajes matemáticos logrados y, reforzar el uso del lenguaje semiótico matemático. Partiendo del concepto estudiado y de sus propios intereses,

los estudiantes deben formular y solucionar sus propios problemas o los planteados por la profesora.

7.9.5 Fase de cierre. En esta fase la profesora dirigió recopilaciones de la información que ayudaron a los estudiantes a lograr la verificación de la aprehensión de conocimiento. Estas recopilaciones se hacen mediante el diseño de rejillas, mapas mentales, cuadros sinópticos o test cortos sobre contenidos temáticos, elementos, características y propiedades del triángulo. La actividad propuesta no implica la aparición de nuevos conocimientos, sino solo la organización de los ya adquiridos.

8. LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO

La secuencia didáctica se diseñó para que los estudiantes reconocieran las características generales y propiedades de los triángulos, a través de la resolución de un problema geométrico, buscando fortalecer las habilidades de justificación, argumentación e interpretación. La secuencia didáctica se diseñó buscando el fortalecimiento de las habilidades de comunicación mencionadas, mediante el estudio de las propiedades, características, elementos y sistemas de representación del triángulo. La mediación pedagógica para esta secuencia fue el software de geometría dinámica GeoGebra cuya interfaz permite a los estudiantes realizar una construcción geométrica, interactuando con la figura objeto de estudio.

8.1 CONTENIDOS TEMÁTICOS

Las actividades propuestas en las diferentes sesiones son los siguientes:

- Segmentos de Recta
- Recta
- Elementos del triángulo
- Clasificación de triángulos según la longitud de sus lados
- Clasificación de triángulos según la amplitud de sus ángulos
- Líneas y puntos notables del triángulo (altura, mediana, bisectriz, mediatriz
- Propiedades de los triángulos: (propiedad de la desigualdad triangular, propiedad fundamental de los triángulos, propiedad de la oposición del mayor lado vs mayor ángulo)

8.2 OBJETIVO DE APRENDIZAJE

Reconocer las características generales de los triángulos y comprobar algunas de sus propiedades, a través de la resolución de una situación matemática, mediante el uso del software de geometría dinámica GeoGebra, para buscar el fortalecimiento del proceso de comunicación matemática.

8.3 DESEMPEÑO

Manifiesta adelantos en el fortalecimiento de habilidades de comunicación matemática, tales como empleo de lenguaje matemático (argumentación), capacidad para exponer ideas y esgrimir razones (explicar), justificar un procedimiento e identificar en un enunciado la pregunta y los datos.

8.4 INDICADORES DE DESEMPEÑO

- Reconoce y utiliza el software de geometría dinámica para realizar la construcción de triángulos.
- Reconoce los datos relevantes de una situación matemática para resolverla.
- Usa lenguaje matemático para hacer referencia a las características generales de los triángulos.
- Comprueba mediante la construcción geométrica en el software, las propiedades generales de los triángulos.
- Reconoce los elementos de un triángulo.
- Clasifica triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados y a la amplitud de sus ángulos.
- Utiliza el software de geometría dinámica para identificar en su construcción geométrica las líneas notables de los triángulos.

- Conjetura acerca de la forma en que se pueden justificar o demostrar posibles resultados en la resolución de un problema geométrico.

8.5 ESTRUCTURA DE LA SESIÓN 2. ¿PODEMOS CONSTRUIR CUALQUIER TRIÁNGULO?

La sesión 2 fue diseñada para que los estudiantes reconocieran la propiedad de desigualdad triangular. El título que se propuso para esta sesión, cuestiona si es posible hacer la construcción de cualquier triángulo, porque en la preconcepción de los estudiantes no se tiene en cuenta la propiedad que involucra las longitudes de los lados de esta figura para construirlo. A través de la interacción con el software y la resolución de problemas, los estudiantes resolverán este cuestionamiento. Se buscó, a través de la resolución de una situación geométrica, fortalecer las habilidades de justificación, argumentación e interpretación. Las actividades propias de la sesión permitieron a los estudiantes indagar acerca de las características, propiedades y relaciones de los triángulos con el propósito de dotarlas de significados. La situación planteada no cuenta con un proceso de resolución inmediato y requiere para resolverla apropiación del contenido, conocimiento de las propiedades de la figura y manejo de las herramientas del software. La mediación pedagógica para esta secuencia fue el software de geometría dinámica GeoGebra cuya interfaz permite a los estudiantes realizar una construcción geométrica, interactuando con la figura objeto de estudio.

8.5.1 Fase de exploración. Duración: 10 horas

La fase de exploración está conformada por una serie de actividades a partir de las cuales es posible identificar los saberes, las preconcepciones y los conocimientos previos de los estudiantes. Inicialmente, los participantes realizaron la construcción de un triángulo con medidas aleatorias. En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo tema objeto de estudio. Luego, construyeron un triángulo con unas

medidas determinadas. Posteriormente se les orientó para que hicieran la suma de dos de los lados de la figura y analizaran la relación con respecto al lado restante. El propósito de esta actividad propuesta, era que el estudiante pudiese identificar, comparar y analizar las relaciones existentes en la suma de dos de los lados del triángulo con respecto al lado sobrante, a fin de llevarlo al descubrimiento de la propiedad de desigualdad triangular, teniendo en cuenta que los estudiantes expresaran sus ideas en lenguaje matemático, potenciando así las habilidades propias del proceso de comunicación.

Las actividades propuestas para esta fase fueron las siguientes:

1. Utiliza la herramienta GeoGebra y construye un triángulo con las medidas que quieras. Luego, construye un triángulo FGH cuyas medias sean 6cm, 5cm y 8 cm.

2. Si sumas dos lados de tu triángulo, ¿cómo es este resultado con respecto al lado restante?

Al respecto, las respuestas escritas por los estudiantes se encuentran dentro de las categorías mostradas a continuación:

8.5.1.1 Categoría: “Comunica y argumenta conceptos y procesos”. Cronbach[39]. Se refiere a la presentación de argumentos en la descripción de un proceso, en la utilización de propiedades, o en los algoritmos, en la formulación de un modelo o en la explicación de un concepto.

[39] CRONBACH, Lee J. Evaluation for course improvement. Teachers College Record, 1963, vol. 64, no 8, p. 672-683.

El estudiante presenta argumentos para explicar la escogencia del lado opuesto a un ángulo determinado del triángulo construido.

SUBCATEGORÍAS

- **Definición correcta:** La definición es correcta cuando el estudiante presenta argumentos válidos, veraces con sustento matemático.

- **Definición Incompleta**: La definición es incompleta cuando el estudiante responde con una palabra o frase pero no sustenta su aseveración.

- **Definición Incorrecta:** Bajo esta subcategoría están a aquellos argumentos que no sustentan veraz y suficientemente la respuesta.

- **Definición fuera de contexto:** Se considera que está fuera de contexto el argumento si hace referencia al ángulo u otro elemento propio del triángulo o cuando sus argumentos son confusos y no expresan claramente sus ideas.

- **No responde:** En esta subcategoría, se referencian los estudiantes que no escribieron ningún tipo de respuesta a las pregunta.

Tabla 14. Análisis sumatoria de dos lados de un triángulo con respecto al lado restante.

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
	E1	"El lado restante siempre va a ser menor que los lados que se suman"	CORRECTA
	E2	"Cuando se suman dos a comparación del otro es mayor que la siguiente"	FUERA DE CONTEXTO
	E3	"Es superior al lado que no fue sumado"	CORRECTA
	E4	"mayor"	INCOMPLETA

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Definición completa	E5	“El resultado de la suma de los lados es mayor que el otro lado”	CORRECTA
	E6	“Cuando se suman dos lados el resultado es mayor que el lado que no sumamos y siempre da si”	CORRECTA
	E7		NO RESPONDE
	E8	“Cuando se suman dos lados siempre da un resultado diferente al otro lado”	INCORRECTA
	E9	“La suma es diferente”	INCORRECTA
	E10	“Al sumar 2 lados el resultado es mayor que el siguiente”	CORRECTA
	E11	“Será mayor porque”	INCOMPLETA
	E12	“Que la suma de los dos lados debe ser mayor al trecer lado”	CORRECTA
	E13	“Son mayores diferentes ay dos Lados iguales y uno es diferente”	FUERA DE CONTEXTO
	E14	“Mayor que el otro lado”	CORRECTA
	E15	“la suma de sus dos lados es mayor con la del lado restante”	INCOMPLETA
	E16	“Cuando suman 2 con comparacion con el siguiente”	FUERA DE CONTEXTO
	E17	“la suma es más grande o mayor que el lado”	CORRECTA
	E18	“la suma de los dos lados es mayor que la del otro”	CORRECTA
	E19	“Mayor que el otro lado”	CORRECTA
	E20	“es Mayor que el lado rrestante porque al sumar son mayor a el lado restante”	INCOMPLETA
	E21	“cuando sumamos dos lados siempre nos da un resultado”	INCORRECTA
	E22	“la suma es mayor y siempre serán mayores por que si es menor la suma de los 2 lados no se puede armar el triángulo”	CORRECTA
	E23	“Mayor por que sies menor no se puede armar”	CORRECTA
	E24	“suman mucho mas que el lado que no coji”	INCORRECTA
	E25	“cuando suman dos triangulos con comparacion con el siguiente”	FUERA DE CONTEXTO

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Definición completa	E26	“es superior al lado que no fue sumado”	CORRECTA
	E27	“mayor”	INCOMPLETA
	E28	“la suma de los dos lados es mayor que el lado restante”	CORRECTA
	E29	“la suma de sus lados siempre es mayor”	INCOMPLETA
	E30	“son diferentes y mayores”	FUERA DE CONTEXTO
	E31	“la suma de sus dos lados es mayor”	CORRECTA
	E32	“al sumardos lados el resultado es mayor que el siguiente”	CORRECTA
	E33	“es mayor para poderlo armar”	CORRECTA

*E = Estudiante

Las respuestas emitidas por los estudiantes permiten llegar a las siguientes conclusiones:

- Hubo una notable representación de estudiantes que están dentro de la subcategoría correcta (49%), lo que permite inferir que tuvieron la habilidad de realizar la interpretación, basada en los valores de la suma y además que tuvieron la habilidad de pasar de un sistema de representación gráfico a uno de carácter numérico.

- En cuanto al uso del lenguaje matemático es evidente que el empleo del mismo está apenas en un nivel incipiente, puesto que hay una cantidad considerable de estudiantes que presentan argumentos confusos, dificultad para la exponer sus razones y además hay omisión en la mención de los elementos del triángulo y de los términos de la operación aritmética que se emplea en este punto.

- En términos generales, la mayoría de los estudiantes pudieron interpretar que para realizar la construcción de un triángulo, se debe tener en cuenta la longitud de los lados de la figura, de manera que se cumpla la desigualdad triangular.

1) Ahora toma dos lados del triángulo FGH y súmalos. ¿Cómo se relaciona este resultado con respecto al lado restante? ¿Por qué ocurre esto? Presenta tus argumentos.

8.5.1.2 Categoría: “Comunica y argumenta conceptos y procesos”. Cronbach[40]

Se refiere a la presentación de argumentos en la descripción de un proceso, en la utilización de propiedades, o en los algoritmos, en la formulación de un modelo o en la explicación de un concepto.

El estudiante presenta argumentos para explicar la escogencia del lado opuesto a un ángulo determinado del triángulo construido.

SUBCATEGORÍAS:

- **Definición correcta:** La definición es correcta cuando el estudiante presenta argumentos válidos, veraces con sustento matemático.

- **Definición Incompleta**: La definición es incompleta cuando el estudiante responde con una palabra o frase pero no sustenta su aseveración.

- **Definición Incorrecta:** Bajo esta subcategoría están a aquellos argumentos que no sustentan veraz y suficientemente la respuesta.

[40]Ibid. P. 1

- **Definición fuera de contexto:** Se considera que está fuera de contexto el argumento si hace referencia al ángulo u otro elemento propio del triángulo o cuando sus argumentos son confusos y no expresan claramente sus ideas.

- **No responde:** En esta subcategoría, se referencian los estudiantes que no escribieron ningún tipo de respuesta a las pregunta.

Tabla 15. Presentación de argumentos desigualdad triangular.

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Definición completa	E1	“dos lados sumados siempre serán mallores porque, si el numero mallor es 8 el menor es 5 y el del medio es 6 al sumar 5+6=11 este resultado es mallor a 8 que es el numero mallor”	INCORRECTA
	E2	“por que el otro quedo solo y no se suma con ninguno más”	INCORRECTA
	E3	“Es menor al lado que se quedo sin suma”	INCORRECTA
	E4	“Pa que al sumar dos lados el resultado es mayor que el otro”	INCOMPLETA
	E5	“Cuando sumamos dos lados del triángulo debe siempre quedar mayor que el tercer lado”	INCOMPLETA
	E6	“Es menor a lado que se quedosin suma ve y nomames”	FUERA DE CONTEXTO
	E7	“por que la suma siempre da mayor que el otro lado”	INCOMPLETA
	E8	“Por que el que esta solo del otro lado no se suma y es mas pequeño”	INCORRECTA
	E9	“porque no se	INCORRECTA
	E10	“al sumar los dos lados el tercero debe ser menor”	INCOMPLETA
	E11	“será mayor , porque si da menos el triángulo no podrá dar”	CORRECTA
	E12	“la suma de dos lados es mayor que el otro lado por que la suma de los dos lados siempre es mayor”	INCORRECTA
	E13	“150º por que no pueden guardar esactos”	FUERA DE CONTEXTO
	E14	“Es mayor por que al sumar los dos lados el otro sigue siendo menor”	INCOMPLETA
	E15	“es superior al lado restante que se quedo sin ser sumado”	INCOMPLETA
	E16		NO RESPONDE
	E17	“la suma es mayor porque no se puede construir el triangulo”	INCORRECTA
	E18	“la suma es mayor que el otro lado restante”	INCOMPLETA
	E19	“Es mayor porque al sumar los dos lados el otro sigue menor”	INCOMPLETA
	E20	“porque el otro quedo solo y no se suma con ninguno más”	INCORRECTA

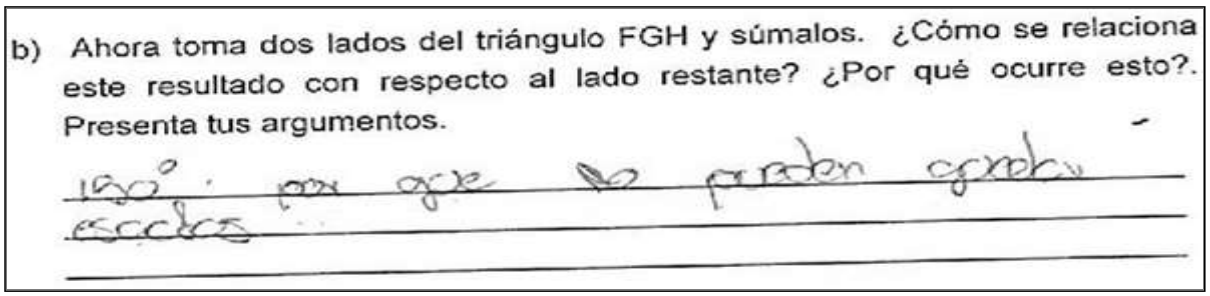
CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Definición completa	E21	“la suma de los dos lados siempre es mayor no importa sus medidas”	INCORRECTA
	E22	“mayor por que si fuera menor no se podría armar el triángulo”	CORRECTA
	E23	“mayor por que sino no se poria aser el triangulo”	CORRECTA
	E24	“es menor al lado que se quedo sin suma”	INCORRECTA
	E25	“la suma de los 2 lados tienen quedar mayor que el otro lado”	INCORRECTA
	E26	“porque eso es lo que da”	INCORRECTA
	E27	“mayor la suma de dos de sus lados es mayor, si el resultado fuera menor no se podria armar”	CORRECTA
	E28	“La suma de dos lados es mayor que el otro lado por que la suma de los dos lados siempre es mayor”	INCORRECTA
	E29	“La suma de Los dos Lados tiene que dar mayor que el otro Lado”	INCOMPLETA
	E30	“135º por que no puede quedar exacto”	FUERA DE CONTEXTO
	E31	“porque se suman y da un numero mas grande que el otro lado”	INCOMPLETA
	E32	“al sumar los dos lados el tercero debe ser menor”	INCOMPLETA
	E33	“Siempre la suma da mayor de 2 lados para poderlo armar o si no no cerraría”	CORRECTA

*E = Estudiante

Este ítem se planteó para observar el nivel de argumentación de los estudiantes. Las respuestas dadas por ellos permiten llegar a las siguientes conclusiones:

- Un importante porcentaje de los estudiantes (51%) están dentro de las categorías incorrecta, fuera de contexto o no responde. Sorprende que en la presentación de argumentos para este ítem, se encuentren respuestas como la dada por la E-6:

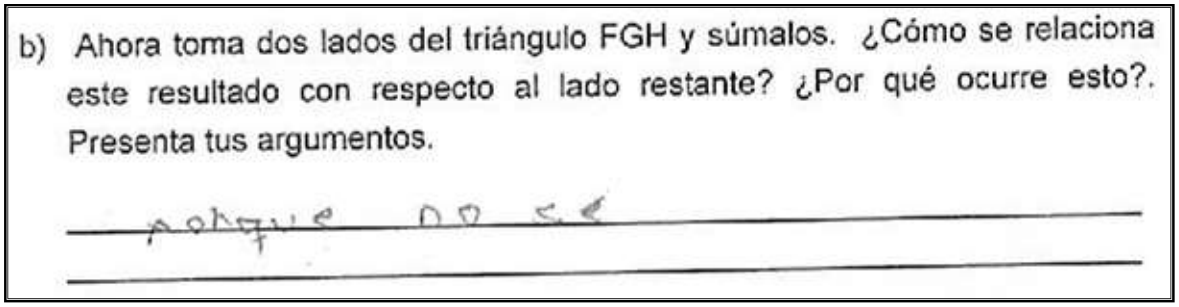
Figura 41. Argumentación desigualdad triangular. Fase de exploración



Este estudiante basó su respuesta en la presentación de la medida de la amplitud de uno de los ángulos del triángulo, aspecto que en ningún momento daba respuesta al interrogante planteado. Así mismo, llama la atención la caligrafía empleada por el estudiante, ya que el conjunto de rasgos que caracterizan la escritura de esta persona es en muchos casos ilegible.

- Otros estudiantes se quedaron sin argumentos para resolver la pregunta y simplemente decidieron expresarlo abiertamente en el espacio, como se muestra en la respuesta dada por la estudiante E-9.

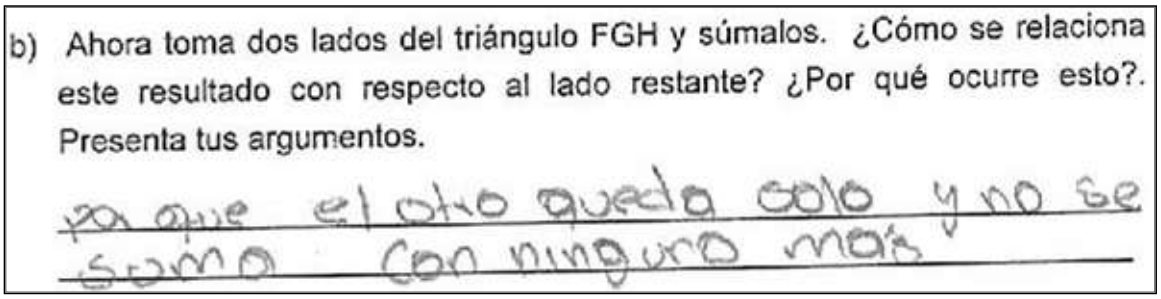
Figura 42. Argumentación desigualdad triangular. Fase de exploración


b) Ahora toma dos lados del triángulo FGH y súmalos. ¿Cómo se relaciona este resultado con respecto al lado restante? ¿Por qué ocurre esto?. Presenta tus argumentos.

porque no se

- En cuanto a la habilidad de argumentación, encontramos varios tipos de falacias, entre ellas por desconocimiento, tal y como se muestra en la respuesta dada por el estudiante E-2:

Figura 43. Argumentación desigualdad triangular. Fase de exploración

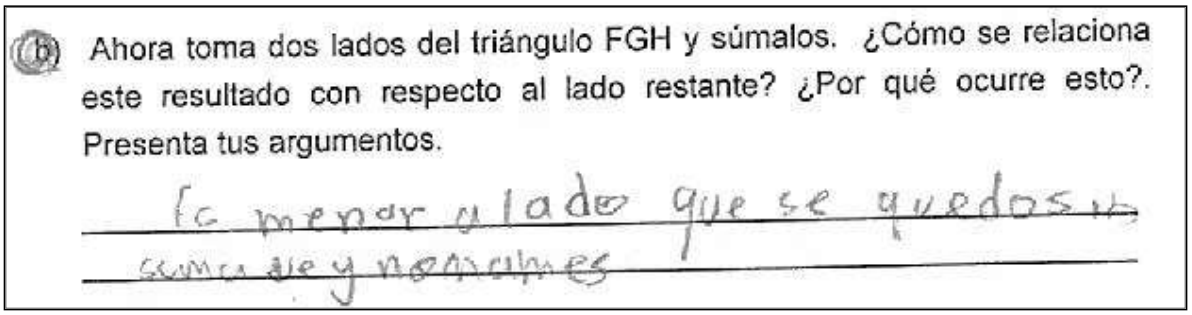

b) Ahora toma dos lados del triángulo FGH y súmalos. ¿Cómo se relaciona este resultado con respecto al lado restante? ¿Por qué ocurre esto?. Presenta tus argumentos.

ya que el otro queda solo y no se suma con ninguno más

En la argumentación por desconocimiento, el estudiante falla en la inferencia entre premisas y conclusión, sencillamente porque las premisas son ignoradas o están ausentes; por ello no hay relación, ni implicación pertinente.

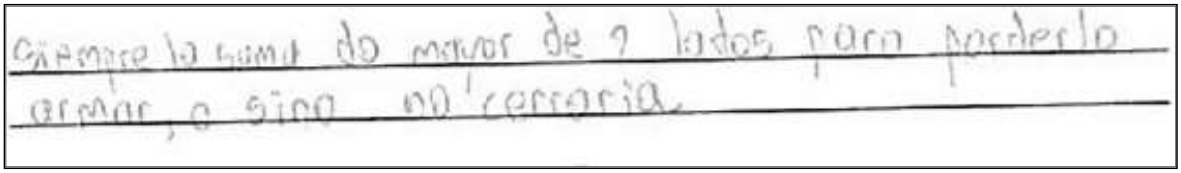
- Otras tantas respuestas no pueden siquiera a llegar a ser consideradas como argumentos, por cuanto la mala redacción y los errores gramaticales impiden que se pueda expresar con claridad una idea. Una muestra de ello es la respuesta dada por la E-6:

Figura 44. Argumentación desigualdad triangular. Fase de exploración



- En cuanto a lo atinente a las respuestas acertadas, cabe destacar que los estudiantes carecen de lenguaje matemático para presentar sus argumentos, como por ejemplo la respuesta dada por la E-33:

Figura 45. Argumentación desigualdad triangular. Fase de exploración



*se debe inferir de la respuesta de la estudiante que para poder “armar” (entiéndase construir) el triángulo, la suma de dos lados debe ser mayor que la longitud del lado

restante para que este “cierre” (entiéndase que los otros dos segmentos de recta, deben tener una longitud tal que les permita cortarse en un punto determinado.

Figura 46. Segmentos de recta que no alcanzan por su longitud a intersectarse para formar un triángulo.

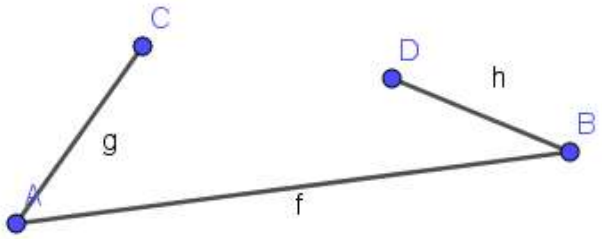
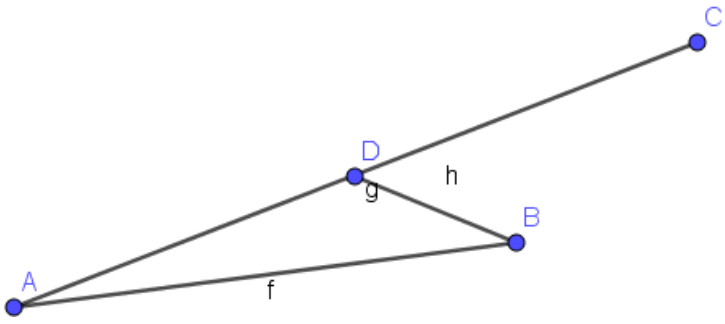


Figura 47. Proyección de uno de los lados para formar un triángulo.



3. Construye en el software un triángulo equilátero, un escaleno y un isósceles y responde las preguntas, presentando tus argumentos:

a) ¿Qué características tiene cada uno de ellos con respecto a la longitud de sus lados?
b) Un triángulo isósceles, ¿puede ser equilátero?
c) Los triángulos escalenos pueden tener al menos dos ángulos de la misma medida?

a) ¿Qué características tiene cada uno de ellos con respecto a la longitud de sus lados?

Tabla 16. Clasificación de triángulos según sus lados. Argumentos.

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Comunica argumentos y procesos	E1	"Equilatero= todos sus lados son iguales Escaleno = no tiene ningún lado igual Isoceles = tiene dos lados iguales y uno diferente	CORRECTA
	E2		NO RESPONDE
	E3		NO RESPONDE
	E4	"que algunos son distintos"	INCORRECTA
	E5	"cada triángulo tiene medidas diferentes"	INCORRECTA
	E6		NO RESPONDE
	E7		NO RESPONDE
	E8		NO RESPONDE
	E9		NO RESPONDE
	E10		NO RESPONDE
	E11	"equiláteros = todos iguales Isósceles = 2 iguales 1 diferente Escaleno = todos diferentes"	CORRECTA
	E12	"El equilátero tiene todos sus lados iguales El escaleno sus lados son de diferente medida El isósceles tiene dos lados iguales"	CORRECTA
	E13		NO RESPONDE
	E14	"El equilátero = todos sus lados son iguales, Un escaleno = todos desiguales y el isósceles = 2 lados iguales y 1 desigual"	CORRECTA
	E15	"eqilatero tiene todos sus lados iguales Escaleno tiene dos lados iguales Isósceles todos sus lados son diferentes"	INCORRECTA
	E16	"Equilatero: 3 lados iguales Isoceles: 2 lados iGuales Escaleno: ninguno	CORRECTA
	E17	"sus medidas no son iguales"	INCORRECTA
	E18	"segun la cantidad de lados iguales reciben su nombre"	INCORRECTA
	E19	"las medidas"	INCORRECTA
	E20		NO RESPONDE
	E21	"tiene sus lados iguales"	INCORRECTA
	E22	"equilátero: tiene los 3 lados iguales escaleno: no tiene ningún lado igual isoseles: tiene 2 lados iguales"	CORRECTA
	E23	"equilátero tiene los 3 lados iguales escalenos no tiene ninguno igual isoseles 2 iguales	CORRECTA
	E24		NO RESPONDE
	E25	"Equilatero: tiene los 3 lados iguales Isoceles: tiene 2 lados iguales Escaleno: ninguno de sus lados son iguales"	CORRECTA

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Comunica argumentos y procesos	E26		NO RESPONDE
	E27	“escaleno 3 diferentes, isocolos 2 iguales y diferente y equilátero todos iguales”	CORRECTA
	E28	“equilátero tiene todos sus lados iguales escaleno sus lados son de diferente medida isoseles tienen dos lados iguales”	CORRECTA
	E29	“Equilatero tiene todos sus lados iguales Escaleno sus lados son de diferente medida Isoseles tiene dos lados iguales”	CORRECTA
	E30	“	NO RESPONDE
	E31	“Todos los lados son diferentes”	INCORRECTA
	E32		NO RESPONDE
	E33	“Escaleno 3 diferen, isosceles 2 Iguales, Equilatero todos igual”	CORRECTA

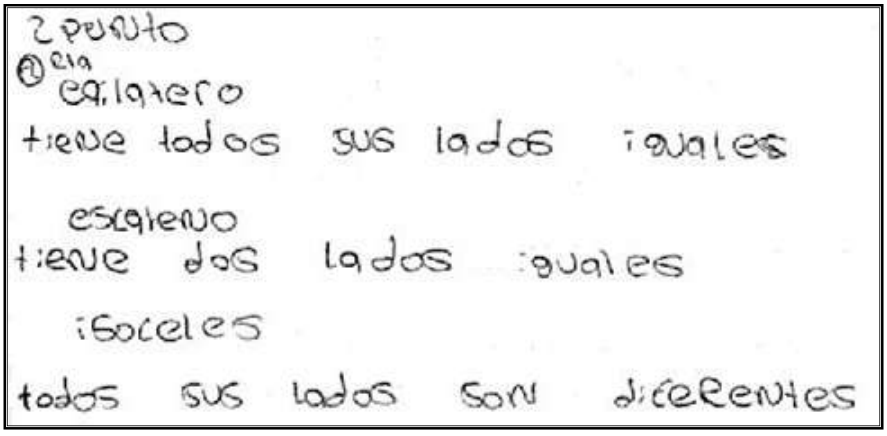
*E = Estudiante

Este ítem se planteó para observar el nivel de interpretación y argumentación de los estudiantes. Las respuestas dadas por ellos permiten llegar a las siguientes conclusiones:

- Cabe destacar que un considerable porcentaje de los estudiantes (39%) no respondieron este ítem, a pesar de ser un contenido que a lo largo de la educación primaria se ha repasado contantemente. Al indagar el hecho de no responder el ítem, los estudiantes manifestaron no acordarse de la clasificación de los triángulos. Esto pone en evidencia la poca significación que ha tenido el aprendizaje de la geometría para ellos en aspectos tan básicos.

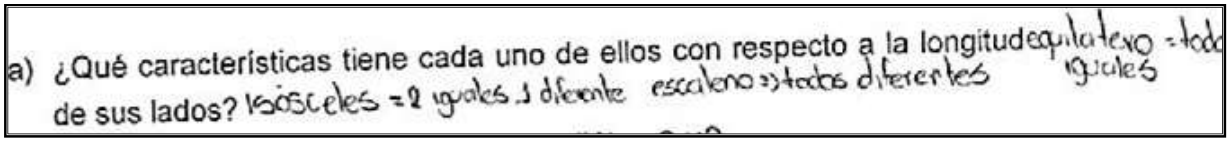
- No es menos llamativo el hecho de que un 27% de los estudiantes presentaran respuestas incorrectas. Es evidente que hay confusión la clasificación de los triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados como se muestra en la respuesta del E-15, quien manifiesta que en los triángulos isósceles todos sus lados son diferentes. Su lenguaje natural no le permite inferir que el prefijo “iso” significa igual, lo cual le ayudaría a orientar de mejor manera su respuesta.

Figura 48. Argumentación clases de triángulos según su longitud. Fase de exploración



Es una constante, que los estudiantes que dan respuestas correctas, no utilizan lenguaje matemático para expresarlas. Ninguna de las respuestas menciona el término “longitud” y en muchas de ellas ni siquiera mencionan la palabra “lados”. Tampoco pueden considerarse estas respuestas como un argumento por cuanto este es un razonamiento mediante el cual el estudiante intenta probar, explicar, manifestar o refutar o justificar una proposición o tesis. Esto se evidencia en la respuesta dada por el E-11

Figura 49. Argumentación clases de triángulos según su longitud. Fase de exploración



b) ¿Un triángulo isósceles puede ser equilátero?

8.5.1.3 Categoría. “Comunica y argumenta conceptos y procesos”. Cronbach[41]. Se refiere a la presentación de argumentos en la descripción de un proceso, en la utilización de propiedades, o en los algoritmos, en la formulación de un modelo o en la explicación de un concepto.

El estudiante presenta argumentos para explicar la escogencia del lado opuesto a un ángulo determinado del triángulo construido.

Tabla 17. ¿Un triángulo equilátero puede ser isósceles? Presentación de argumentos.

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Comunica argumentos y procesos	E1	“No puede por que si fueran todos sus lados equivalentes seria un triangulo equilatero”	INCORRECTA
	E2	“No puede ser”	INCORRECTA
	E3		NO RESPONDE
	E4	“No”	INCORRECTA
	E5	“Sí porque el isósceles tiene 2 lados iguales”	CORRECTA
	E6		NO RESPONDE
	E7	“No puede ser”	INCORRECTA
	E8	“No puede ser equilátero igual al isoceles”	INCORRECTA
	E9	“No”	INCORRECTA
	E10		NO RESPONDE
	E11	“No”	INCORRECTA
	E12	“No se puede”	INCORRECTA
	E13		NO RESPONDE
	E14	“No”	INCORRECTA
	E15	“Un triangulo isoceles no puede tene todos sus lados iguales es lo contrario”	INCORRECTA
	E16		NO RESPONDE
	E17	“No”	INCORRECTA
	E18	“Dejaria de ser isósceles”	INCORRECTA
	E19	“No”	INCORRECTA
	E20	“No puede ser”	INCORRECTA
	E21	“Si el conjunto tienen de 2 lados los triangulos”	FUERA DE CONTEXTO
	E22	“No porque si un triangulo isóseles tiene los tres lados iguales seria equilatero y dejaria de ser isóseles por completo”	INCORRECTA
	E23	“No por que si un tríangulo isoseles tiene los tres lados iguales seria equilatero y dejaria de ser isoseles”	INCORRECTA

[41] Ibid, p. 1

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Comunica argumentos y procesos	E24		NO RESPONDE
	E25		NO RESPONDE
	E26	“No porque tiene que tener todos los lados iguales”	INCORRECTA
	E27	“NO”	INCORRECTA
	E28	“No se puede”	INCORRECTA
	E29	“No se puede”	INCORRECTA
	E30		NO RESPONDE
	E31		NO RESPONDE
	E32		NO RESPONDE
	E33	“No”	INCORRECTA

*E = Estudiante

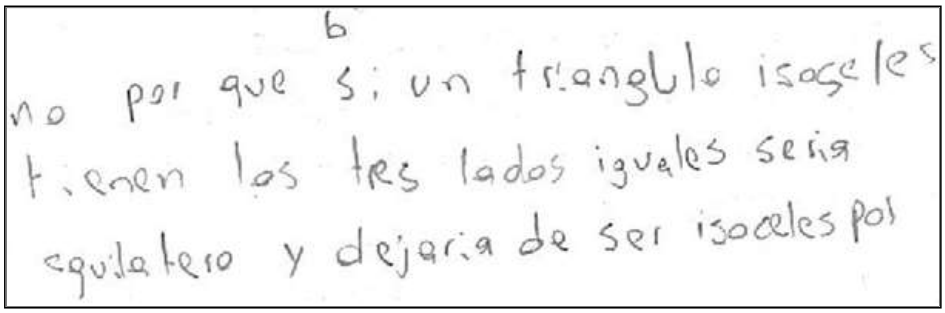
De acuerdo a las respuestas dadas por los estudiantes podemos concluir:

- Hubo un gran porcentaje de respuestas incorrectas (66%), debido la falta de claridad en la aprehensión de la clasificación de triángulos isósceles y triángulos equiláteros, pues los estudiantes tienen muy arraigado la definición de que un triángulo isósceles es aquel que tiene 2 lados de igual longitud y el otro lado de diferente longitud y no consideran que los triángulos isósceles son aquellos que tienen **al menos** dos de sus lados de igual longitud.

Si se observa esta última definición, se comprendería entonces que el triángulo equilátero es un caso especial de los triángulos isósceles por cuanto cumple con la premisa de tener al menos dos lados de igual longitud.

La definición que se mencionó está enraizada en los estudiantes como lo demuestra la respuesta del E- 23

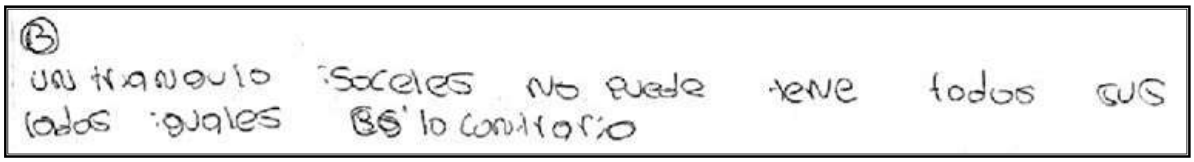
Figura 50. Relación triángulo equilátero- triangulo isósceles. Fase exploración



- Así mismo, una tercera parte de los estudiantes dejó de responder el ítem, puesto que muchos de ellos no comprendieron la pregunta y muchos otros se quedaron sin argumentos para contestarla.

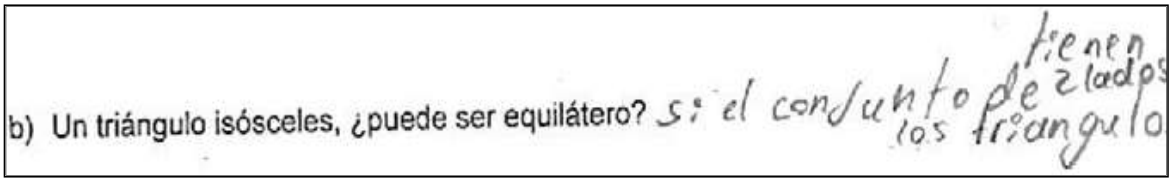
- En cuanto a los argumentos, muy pocos tienen sustento. Algunos presentan fallas por ambigüedad como es el caso del E-15:

Figura 51. Relación triángulo equilátero- triangulo isósceles. Fase exploración



- Otras respuestas ni siquiera son argumentos sino una ubicación de palabras sin sentido lógico como es el caso de la E-21:

Figura 52. Relación triángulo equilátero- triángulo isósceles. Fase exploración

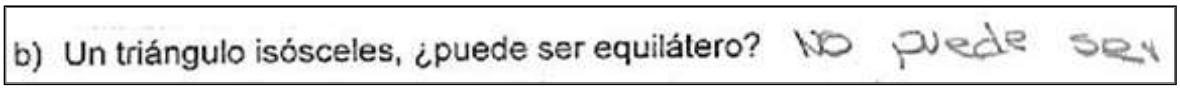


Como se puede observar, la respuesta del estudiante no es un argumento y hay que inferir que trató de decir. Al indagar al estudiante por su respuesta, este permaneció en silencio.

- Muchos otros argumentos no tienen peso ni sustento matemático, limitándose a decir que el triángulo equilátero no podía ser considerado isósceles, simplemente porque no se puede, sin ninguna otra razón.

Así se evidencia en la respuesta del E-2:

Figura 53. Relación triángulo equilátero- triángulo isósceles. Fase de Exploración



En conclusión, se evidencian fallas en la habilidad de argumentación de los estudiantes, por cuanto sus respuestas no tienen sustento matemático, no convencen ni persuaden y no presentan razones o estas son falsas o erróneas. En la habilidad de interpretación no son capaces de discriminar la información dada en la situación problema planteada

8.5.1.4 Fase de aprehensión de conocimiento. Se presenta a los estudiantes el problema, con el fin de que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar. El problema propuesto ha de llevar directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben apropiar. Cuando lo necesiten, se orientará a los estudiantes hacia la solución, de acuerdo con la estrategia individual que cada uno haya elegido.

4. Construye, si es posible, un triángulo cuyos lados miden 6 cm, 5 cm y 4 cm. ¿Cuántos triángulos distintos que cumplan esta condición pueden construirse?

8.5.1.5 Fase de discusión. En esta fase se hace énfasis en la expresión oral o escrita de los resultados que han obtenido al resolver el problema, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio. Se espera que los estudiantes utilicen el vocabulario adecuado (lenguaje matemático) para describir la estrategia empleada en la resolución del problema. Se promueve en esta fase la discusión y presentación de argumentos sobre la forma de resolver la situación matemática y que se evidencie la apropiación de elementos, propiedades de la figura objeto de estudio. Para ello, los estudiantes responderán los siguientes ítems:

a) Explica ante tus compañeros la estrategia que empleaste para resolver el problema

Tabla 18. Presentación de estrategias para resolución de problemas, Fase de discusión

CATEGORÍA	**E**	**RESPUESTA**
Comunica argumentos y procesos	E1	“Usando las herramientas del GeoGebra cogí longitud compas y polígono”
	E2	“Me entre a segmento de longitud fija me meti a compas y se los puntos y pase las lineas rectas”
	E3	“Tiene que ser solamente uno porque si se hace la prueba del arrastre las medidas cambian”
	E4	“Cogi longitud fija marque las tres medidas y luego cogi el compas y me lleve dos medidas y me fui a la herramienta de dos objetos y despues me fui de punto a punto ahore me fui poligono y despues hice poligo despue hice el elige y mueve y quedan exactos”
	E5	“Resolví con longitud fija , compas, polígono”
	E6	Segmento de longitud fija, compas, poligono”
	E7	
	E8	
	E9	“Poligono”
	E10	“El poligono y angulo longitud fija”
	E11	“Segmento de longitud fija. compas. interseccion de dos objetos. Polígono.”
	E12	“Recta que pasa por dos puntos, poligono, compas, intersecion de dos objetos”
	E13	“el poligono y angulo”

CATEGORÍA	E	RESPUESTA
Comunica argumentos y procesos	E14	
	E15	“Debe ser si se mueve”
	E16	“puse muchas medidas y con las medidas forme el triangulo”
	E17	“con el geogebra lo hice con poligono”
	E18	“le di diferentes medidas a otros triangulos y los compare y eran iguales, solo variaba su posición”
	E19	“1 porque los lados siguen siendo los mismos”
	E20	“me entre a segmento de longitud fija meti a compas y se los puntos y puse las lineas rectas”
	E21	“usando los poligonos, angulos, compas, la longitud entre sus angulos y sus medidas”
	E22	“con compas linea recta y despues poligono”
	E23	“con compas lines recta y poligono”
	E24	“segmento de longitud fija compas y poligono”
	E25	“Segmento de longitud fija, compas y poligono y lin”
	E26	“Yo lo hice con el lsegmento y le trace los otros lados del triangulo y luego con poligono””
	E27	“longitud fija, compas poligono”
	E28	“recta que pasa por dos puntos, poligono, compas, interseccion de dos objetos”
	E29	“recta que pasa por dos puntos, poligono, compas intersecion de dos objetos”
	E30	“El poligono y angulo”
	E31	
	E32	“Longitud fija compas, poligono”
	E33	“Use segmento de L. fija, compas y poligono , luego medida.”

- En la explicación, las razones presentadas deben tener una función descriptiva Duval (1999), pero en este caso no es así, puesto que las ideas plasmadas son inconexas, es decir, no tienen un hilo conductor y la redacción de los estudiantes reflejan simplemente la presentación de ideas aisladas.

- Las explicaciones presentadas no se han hecho con lenguaje matemático, simplemente, se limitaron a mencionar los nombres de las herramientas del software que utilizaron en la construcción de la figura. Por ende, no se hace perceptible el procedimiento de resolución del problema.

La estudiante E-6 explica el procedimiento utilizado para la resolución del problema.

P: Profesora **E: estudiante** **O: Observación**

P: Explica ante tus compañeros la estrategia que empleaste para resolver el problema.

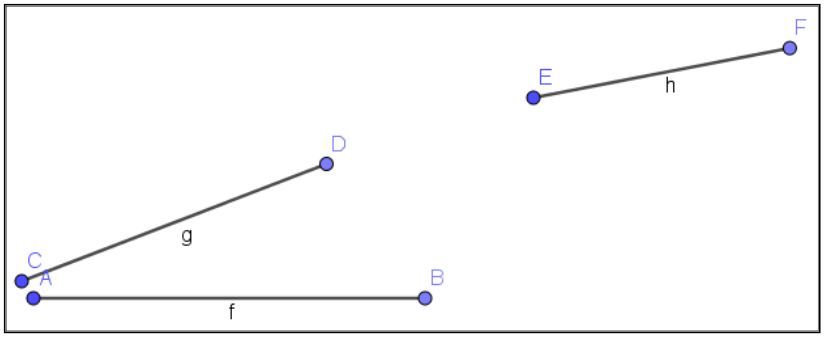
E- 6: “Yo tomé la herramienta segmento de longitud dada y marqué el lado de 6cm, luego volví a tomar esa herramienta y marqué el de 5cm y lo mismo con el de 4 cm”.

P: Ya tienes los tres lados con las medidas solicitadas, ¿de qué manera construyes el triángulo?

E-6: “Cogí el lado de 5 cm y uno de los extremos lo puse encima de la punta del lado de 6cm”

O. Lo que la estudiante hizo fue tomar el segmento de 5 cm y superponer uno de sus extremos con el extremo del lado inicial que era de 6cm.

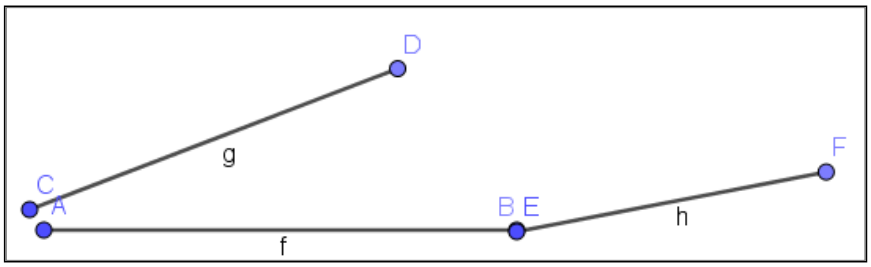
Figura 54. Estrategia de construcción de un triángulo con medidas dadas.



E-6: “Luego cojo el otro lado y hago lo mismo”.

O: Lo que la estudiante hizo fue tomar el segmento de 4 cm y superponer uno de sus extremos con el extremo del lado inicial.

Figura 55. Estrategia de construcción de un triángulo con medidas dadas.

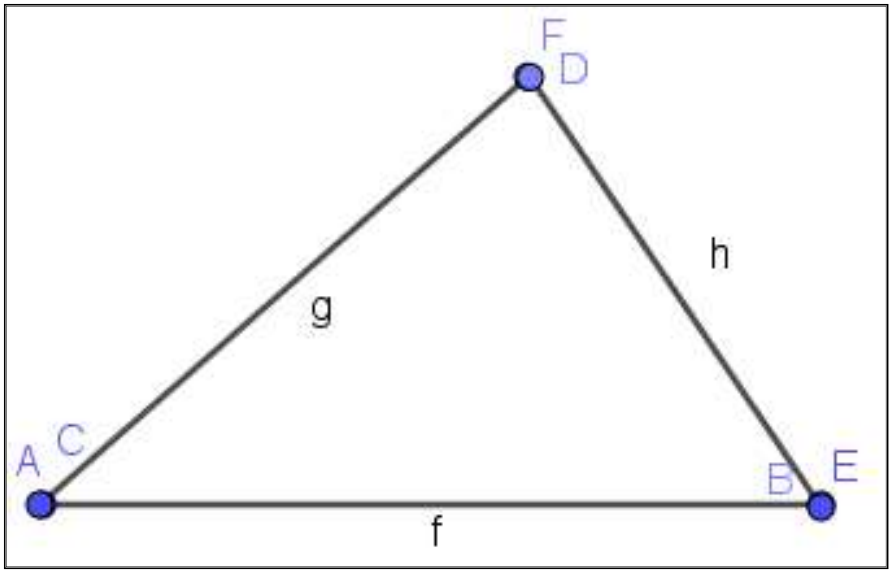


P: ¿Y cómo lo terminas de construir?

E-6: "Pues luego cojo la herramienta elige y mueve y muevo las puntas de los lados hasta que se choquen y de ahí ya tengo el triángulo hecho".

O: Lo que la estudiante quiere decir es que toma los extremos D y F y con la herramienta "elige y mueve" los hace coincidir en un punto determinado en el que se intersectan.

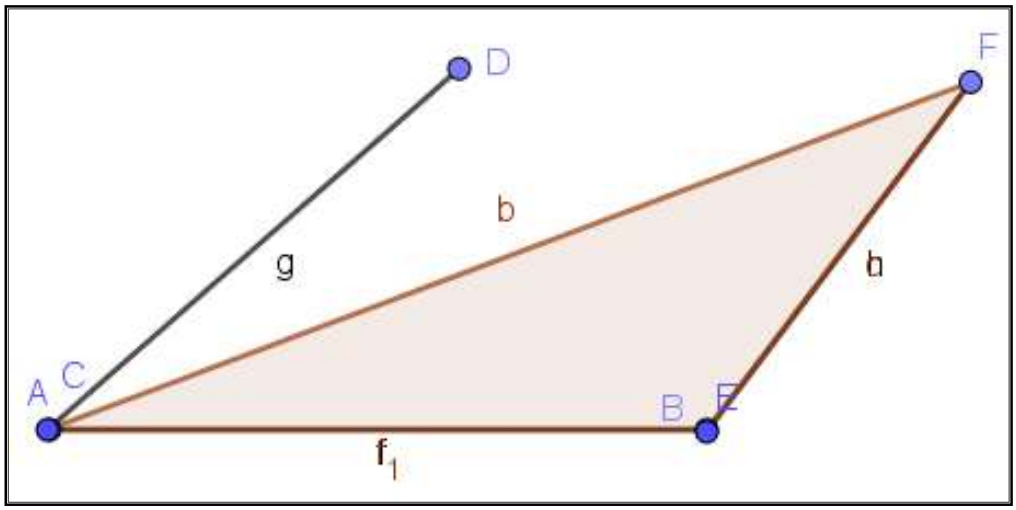
Figura 56. Construcción final del triángulo por la E-6:



P: Ahora por favor elige la herramienta polígono, selecciona los vértices y señálalos. Luego haces la prueba del arrastre y me cuentas que ocurre.

O: La estudiante utiliza la herramienta polígono, pero al momento de hacer la prueba del arrastre ocurre lo siguiente:

Figura 57. Verificación de la construcción de un triángulo a través de la prueba del arrastre.



P: ¿Qué ocurrió cuando hiciste la prueba del arrastre?

E-6: "Profe el triángulo se desbarató, no aguantó la prueba del arrastre"

O: En este caso particular la estudiante consideró válido hacer superposición de los extremos de los lados del triángulo y luego moverlos para hacerlos coincidir en un punto de intersección. Si bien, se garantiza la longitud de los lados del triángulo, su construcción está mal hecha, puesto que no se parte de la continuidad de segmentos de recta para formar la figura, sino en la superposición de los extremos de tres segmentos y mediante la coincidencia en un punto, se cree cumplir con la construcción de la figura.

El E-8 en cambio presentó una estrategia diferente, basada en el uso de la herramienta polígono:

P: ¿Cuál fue la estrategia utilizada para construir el triángulo?

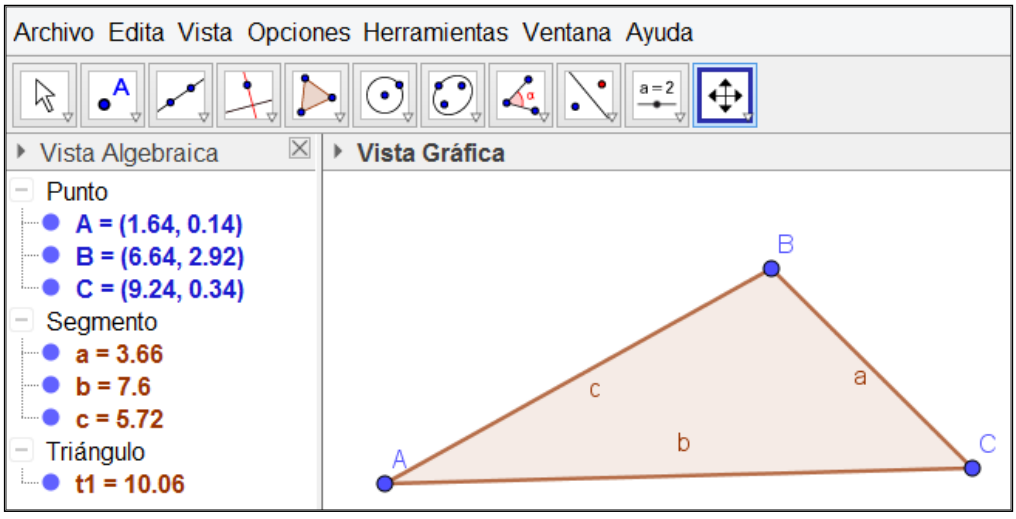
E-8: “Con polígono profesora”

P: ¿Y en qué consiste tu estrategia con esa herramienta?

E-8: “Yo cojo el polígono y hago un triángulo cuadrándole las medidas que me dieron”

O: El estudiante utilizó la herramienta polígono y trazó un triángulo con medidas aleatorias como se ve en la vista algebraica.

Figura 58. Uso de la herramienta polígono para la construcción de un triángulo con medidas determinadas.



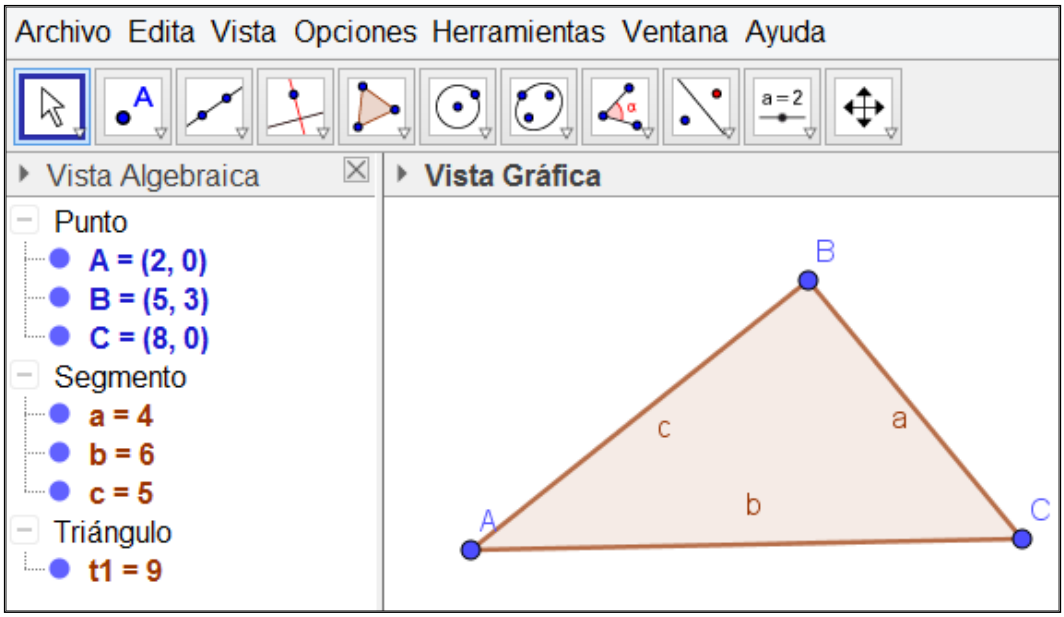
El problema pedía la construcción de un triángulo de medidas: 6cm, 5cm y 4 cm. Sin embargo, al iniciar el proceso de construcción, la vista algebraica muestra que estas medidas no corresponden con la exigencia del problema.

P: ¿De qué manera garantizas las medidas del triángulo?

E-8: “Profe pues moviendo la flecha de las puntas hasta que de el número”

O: El estudiante quiere decir que utiliza la herramienta elige y mueve, escogiendo los vértices de la figura y moverlos hasta hacerlos coincidir con las medidas que el problema exige. Tal y como se ve a continuación:

Figura 59. Finalización construcción del triángulo con la herramienta polígono.

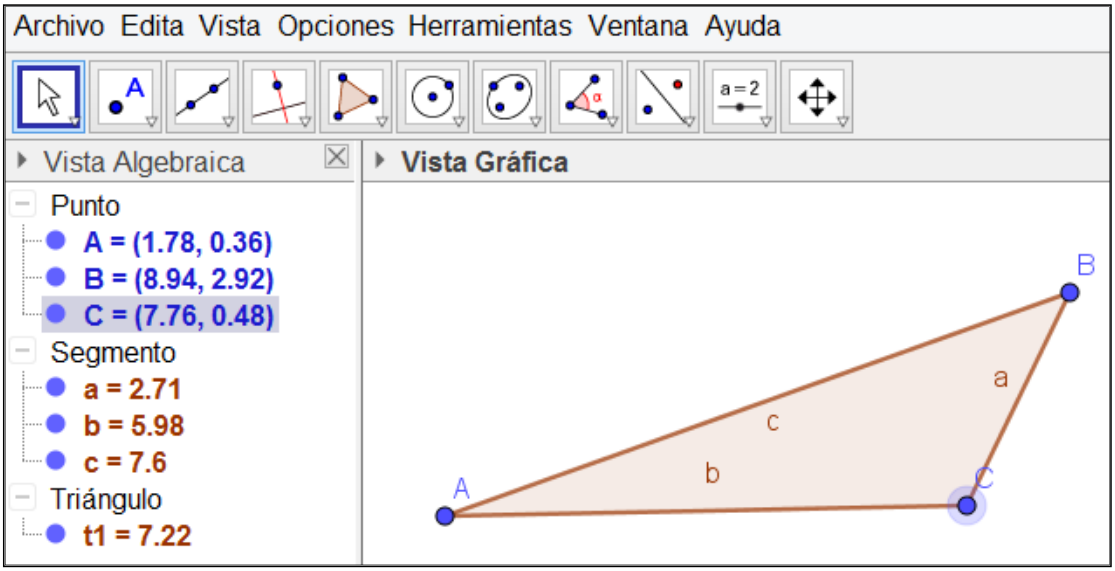


O: Si se observa con atención la vista algebraica, se puede corroborar que las medidas de esa figura coinciden con las medidas pedidas por el problema.

P: Ahora realiza la prueba del arrastre y comentas que sucede con la construcción.

O: El estudiante hace la prueba del arrastre, nótese la vista algebraica, luego de mover uno de los vértices de la figura:

Figura 60. Aplicación prueba del arrastre construcción del triángulo a través de la herramienta polígono.



P: ¿Qué ocurrió con la figura? ¿Qué pasó con las medidas?

E-8: "Pues se desbarató un poquito pero sigue siendo un triángulo. Pero las medidas si no son las mismas"

O: Al no garantizar desde un principio la conservación de las medidas iniciales, la construcción efectivamente conserva la forma, pero de ninguna manera las medidas pedidas por el problema.

8.5.1.6 Fase de consolidación. En esta etapa del proceso se produce la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes utilizan los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, un poco más complejos. La profesora propone a sus

estudiantes resolver un problema en el que se debe hacer uso de propiedades y que tiene varias soluciones. La ayuda del profesor a los estudiantes Se limita al máximo en la resolución del problema.

Los puntos A y B están a 7 cm y son dos de los vértices de un triángulo. Encuentra un punto C que esté a 3 cm de A y a 5 cm de B. Construye el triángulo.

a) ¿Esta figura es única? ¿Por qué? Argumenta
b) Explica detalladamente como resolviste el problema

Tabla 19. Presentación de argumentos. Fase de consolidación. Segunda sesión didáctica.

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Presenta razones a los procesos de solución de un problema matemático.	E1	a)"si porque las medidas estan dadas y no cambiaron" b)"Por medios usados anteriormente en GeoGebra"	INCOMPLETA
	E2	a)"Si porque está bien construida y me da medida exacta" b)Le di en longitud fija, compas y recta de dos puntos"	INCOMPLETA
	E3	a)"Por que si" b)	INCOMPLETA
	E4	a)"Si porque las medidas son iguales" b)"Cogì longitud fija despues el compas el poligono y forme el triangulo"	INCORRECTA
	E5	a)"Si porque las medidas son exactas" b)"Con la herramienta del GeoGebra longitud fija, compas"	INCOMPLETA
	E6	a) b)Primero cogi el compas despues le puse los angulos y las medidas"	INCOMPLETA
	E7		NO RESPONDE
	E8	a) "Si es única" b) "Me meti longitud a conpas y recta de dos puntos"	INCORRECTA
	E9	a) "Si" b)	INCOMPLETA
	E10	a) "Si porque me dan lados iguales" b)	INCORRECTA
	E11	a) "Si porque al moverlo no pasa nada y queda todo igual" b) "Segmento de longitud fija. Compas. Interseccion de objetos. Poligono"	INCORRECTA

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
Presenta razones a los procesos de solución de un problema matemático.	E12		NO RESPONDE
	E13	a) “si porque me da lados iguales” b) “coji la erramienta de longitu fija y coloque aA y cogi el compas a la B y asi”	INCORRECTA
	E14	a) “porque se mueve y las medidas no cambian” b) “longitud fija, luego el compas luego el poligono y con eso se forma la figura”	INCOMPLETA
	E15	a) “es unica porque si se hace la prueba del arrastre la figura cambiaria” b) “primero cogi el poligono luego hice la figura despues de hacerla le saque las medidas, pero entonces las medidas no nos salieron correctamente entonces hicimos la prueba del arrastre y quedo las medidas correctamente desarrolladas.	INCOMPLETA
	E16		NO RESPONDE
	E17	a) “No porque se pueden construir muchas” b)	INCORRECTA
	E18	a) “Si” b) “Si no lo hacemos con estas instrucciones armamos otra figura diferente”	INCOMPLETA
	E19	a) “Por que las medidas no cambian” b) “Longitud fija, compas, poligono con eso se forma la figura”	INCOMPLETA
	E20		NO RESPONDE
	E21	a) “Si porque las medidas no se mueven” b) “primero cogi el compas despues le puse los angulos y las medidas”	INCOMPLETA
	E22	a) “Si es única porque sus medidas no cambian y se puede mover”	INCOMPLETA
	E23	a) “Si es única se mueve pero las medidas no cambian” b) “Use segmento de longitud fija y despues con el elige y mueve lo arregle”	INCOMPLETA
	E24		NO RESPONDE
	E25	a) “Si porque las medidas no se mueven” b) “Cogi compas despues le puse los angulos y las medidas”	INCOMPLETA
	E26		NO RESPONDE
	E27	a) “si, porque al moverlas sus medidas no cambian” b) “longitud fija, compas y poligono. Medidas”	INCORRECTA
	E28	a) “si porque las medidas únicas” b)	INCOMPLETA
	E29	a) “Si porque las medidas son fijas” b) “elegi segmentos de dos puntos el compas recta que pace por dos puntos poligono”	INCOMPLETA
	E30	a) “si porque me da medidas exactas” b) “usando longitud fija y luego marque el a con la longitud y compas”	INCOMPLETA
	E31		NO RESPONDE

CATEGORÍA	E	RESPUESTA	SUBCATEGORÍA
	E32	a) "Si porque me da lados iguales" b) "coloque compas"	INCORRECTA
	E33	a) "Si x q al moverla no cambia" b) "Longitud fija compas poligono y medir"	INCOMPLETA

Esta situación problema se propuso para que los estudiantes construyeran, identificaran y argumentaran verificaran que la conservación de la longitud de los lados del triángulo, tiene una única posibilidad de solución. Luego de hacer la construcción los estudiantes respondieron una serie de preguntas que generaron discusión en el grupo y que se presentan a continuación en el extracto del diálogo sostenido.

- Con respecto a la habilidad de argumentar persisten las falencias puesto que los estudiantes no emplean lenguaje matemático para expresar sus razones, simplemente, se limitaron a mencionar los nombres de las herramientas del software que utilizaron en la construcción de la figura.

- Sus respuestas no constituyen per se argumentos, ya que no describen de manera detallada el procedimiento empleado para la solución del problema, con la finalidad de convencimiento

- Se debe recurrir al diálogo para que expresen de manera verbal la estrategia empleada para la resolución del problema.

A continuación el diálogo establecido con el E-11

Explica a tus compañeros la estrategia que empleaste para resolver el problema

P: Profesora **E:** Estudiante **O:** Observación

P: ¿De qué manera resolviste el problema?

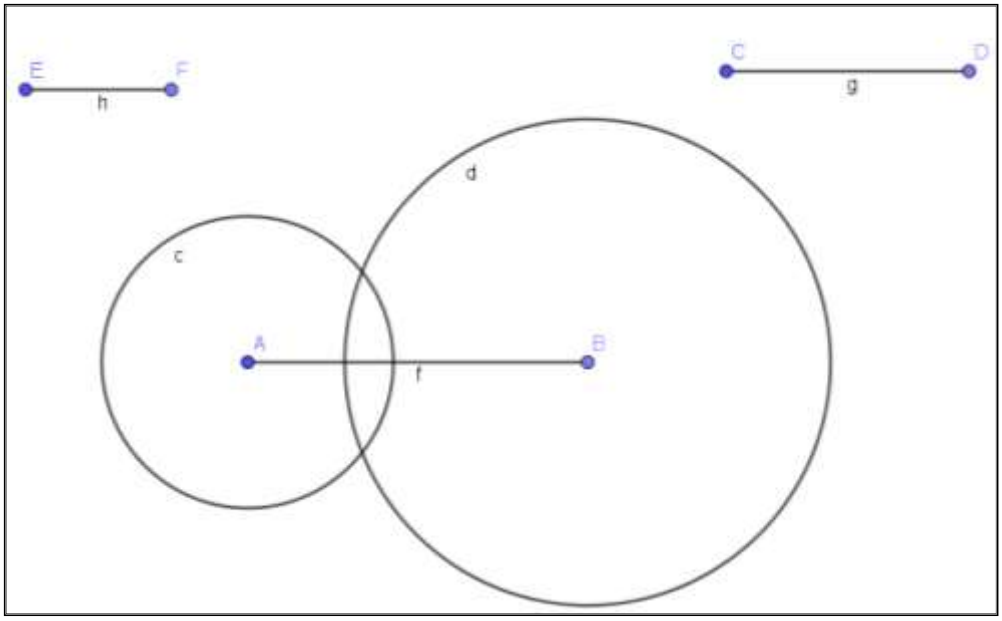
E-11: “El problema lo resolví con Geogebra. Fui y busqué longitud fija, tracé 7cm, 3cm y 5cm”

O: Lo que el estudiante quiere decir es que trazó 3 segmentos de recta con las longitudes antes mencionadas.

E-11: “Dejé de base la longitud de 7cm y busqué el compás y pasé con el compás 3cm y 5cm”

O: Lo que quiere decir el estudiante es que con la herramienta compás, tomó la medida del segmento de 3cm y puso como centro de la circunferencia el punto A y luego hizo lo mismo con el segmento de 5cm, tomando como centro de la circunferencia el punto B.

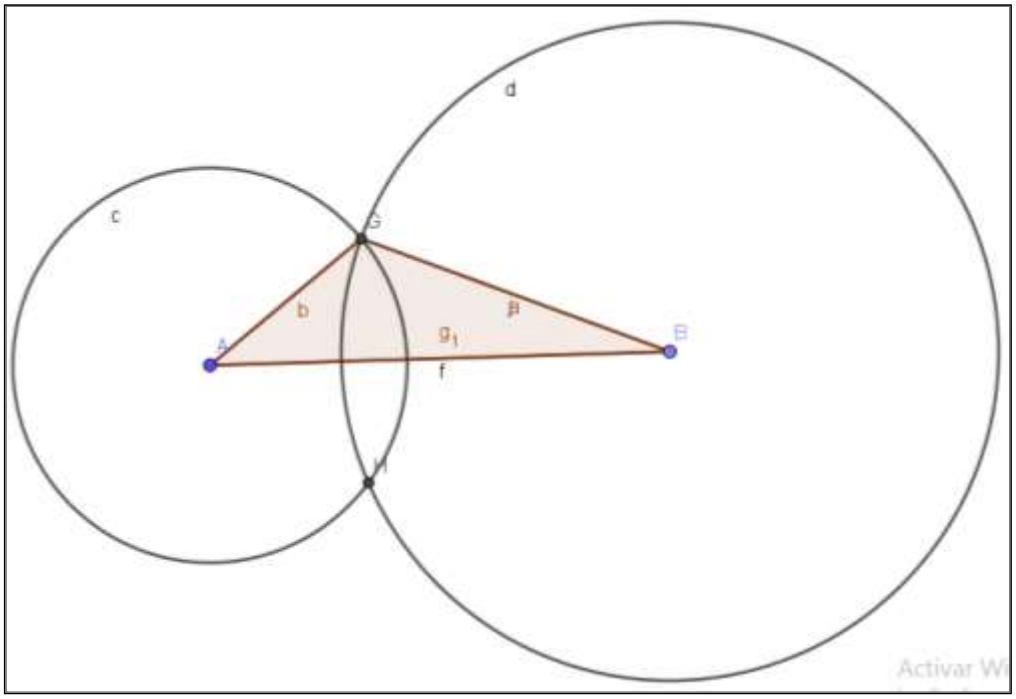
Figura 61. Traslado de medidas de dos segmentos a un segmento dado.



P: ¿Y cómo formas finalmente el triángulo?

E-11: “Fui a la herramienta punto intersección, y donde se unieron las dos circunferencias marco un punto. Luego, utilizo la herramienta segmento y uno el punto A y G y uno el junto G y B así se forma el triángulo

Figura 62. Construcción final del triángulo. Fase de consolidación.



P: ¿Qué ocurre si aplicas la prueba del arrastre?

E-11: “Al aplicar la prueba del arrastre la figura no se daña y sigue teniendo las mismas medidas”

P: ¿Cuántos triángulos distintos se pueden construir con esas medidas?

E-11: Se puede construir un solo triángulo porque nos dan medidas exactas.

8.5.1.7 Fase de cierre. En esta fase la profesora dirige resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a establecer una visión global de

todo lo aprendido sobre el tema, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente.

En esta etapa no hay aparición de nuevos conocimientos, sino la estructuración de los ya adquiridos.

Se propuso para esta etapa la recopilación de la información la siguiente actividad

Discute con tus compañeros si la afirmación es verdadera o falsa en cada caso. Justifica tu respuesta en cada caso.

a) Todos los triángulos equiláteros son isósceles. ( )

b) En los triángulos equiláteros se cumple la propiedad de desigualdad triangular ( )

Tabla 20. Justificación premisa. Fase de cierre

E	V	F	JUSTIFICACIÓN	SUBCATEGORÍA
E1		X	“No se puede porque al ser equilátero, todas las medidas y angulos serán iguales y el isósceles solo dos son iguales	INCORRECTA
E2	X		“Por que para ser equilátero tiene que tener los 3 lados iguales y también puede ser isósceles”	CORRECTA
E3				NO RESPONDE
E4		X	“un triangulo equilatero tiene todos los lados iguales”	INCORRECTA
E5	X		“Sí porque el isóseles es que tenga dos lados iguales”	CORRECTA
E6	X		“Porque si teien los tres lados puede tener dos”	CORRECTA
E7				NO RESPONDE
E8	X		“Si por que en algunos caso puede ocurrir”	INCOMPLETA
E9		X		NO RESPONDE
E10			“Puede ser que si”	FUERA DE CONTEXTO
E11		X	“no, porque los triangulos equilateros tienen todos los lados iguales y el isoseles dos iguales y uno diferente”	INCORRECTA
E12	X		“por que es un poligono regular”	FUERA DE CONTEXTO
E13				NO RESPONDE
E14		x	“Por que los equilateros tienen todos sus lados iguales y los isoseles solo dos iguales”	INCORRECTA

E	V	F	JUSTIFICACIÓN	SUBCATEGORÍA
E15		X	“no porque equilatero tiene las medidas iguales y isoseles tiene las medidas diferentes”	INCORRECTA
E16				NO RESPONDE
E17		X	“no porque las medidas son diferentes”	INCORRECTA
E18		X	“porque tiene mas de dos lados iguales”	INCORRECTA
E19		X	“porque los equilateros tiene los lados iguales y los isoseles solo dos lados”	INCORRECTA
E20				NO RESPONDE
E21	x		“Porque si tiene tres lados iguales puede tener dos”	CORRECTA
E22		X	“falsa por que los equilateros tienen 3 y el isóseles tiene 2 iguales”	INCORRECTA
E23		X	“porque los equilateros tienen 3 y los isiosceles tiene 2 lados iguales”	INCORRECTA
E24	X		“si por que tiene 3 lados puede tener dos”	CORRECTA
E25	X		“si por que si tiene 3 lados puede tener los 2 lados iguales”	CORRECTA
E26				NO RESPONDE
E27		X	“por que si es equilatero no puede isoseles pues sus propiedades son diferentes”	INCORRECTA
E28		X	“verdadero porque es un poligono regular”	FUERA DE CONTEXTO
E29	X		“porque asi son los isoseles”	INCOMPLETA
E30				NO RESPONDE
E31				NO RESPONDE
E32			“Puede ser”	FUERA DE CONTEXTO
E33		X	“Equilatero tiene todos los lados iguales, isoseles solo 2”	INCORRECTA
“Todos los triángulos equiláteros son isósceles”				

Para analizar la habilidad de justificar en este ítem se requiere interpretar, reflexionar y recomponer lo que los participantes han planteado. Se observó si el estudiante al justificar su respuesta, expresaba razones que tuvieran validez y sustento matemático.

En general, se observó que con respecto a esta habilidad, los estudiantes:

- Emplean algunos términos matemáticos para referirse a la clasificación de triángulos, aunque de manera incipiente.

- Las razones expresadas por los estudiantes demuestran la poca comprensión y aprehensión de las definiciones de triángulo isósceles y triángulos equiláteros.

Esto se evidencia en que un 73% de las respuestas dadas por los estudiantes corresponden a las subcategorías fuera de contexto, no responde o lo hicieron de manera incorrecta.

c) En los triángulos equiláteros se cumple la propiedad de desigualdad triangular ( )

Tabla 21. Justificación premisa. Fase de cierre.

E	V	F	JUSTIFICACIÓN	SUBCATEGORÍA
E1	X		"si por que al ser iguales siempre la suma será el doble"	INCOMPLETA
E2	X		"por que la suma de los lados siempre son diferentes"	INCOMPLETA
E3			"los lados equilateros tiene la misma medida"	INCORRECTA
E4	X		"por que los dos lados son mayores y se suman y es mayores al restante"	CORRECTA
E5	X		"si porque se puede construir el triangulo"	INCOMPLETA
E6		X	"Por que sus lados no son iguales"	INCOMPLETA
E7				NO CONTESTA
E8	X		"Porque en algunos casos es diferente"	INCOMPLETA
E9	X			NO CONTESTA
E10	X		"Si porque si no el triangulo no se puede formar"	INCOMPLETA
E11	X		"por que la suma de dos lados siempre va dar mayor al restante"	CORRECTA
E12		X	"porque todos los angulos miden lo mismo"	FUERA DE CONTEXTO
E13	X		"por que o si no el triangulo es claro que no se puede formar"	INCOMPLETA
E14	X		"por que al sumar los dos lados siempre tiene que ser mayor que el tercero"	CORRECTA
E15		X	"No No nO No…todos los lados deben ser iguales"	INCORRECTA
E16	x		"por que el triangulo es claro que si se puede formar"	INCOMPLETA
E17	X		"porque si no no se puede construir"	INCOMPLETA
E18	X		"si no se cumple no puede haber un triangulo"	INCOMPLETA
E19	X		"por que si no. No se puede formar el triangulo"	INCOMPLETA
E20				NO CONTESTA
E21		x	"porque sus lados no son iguales"	INCORRECTA
E22	X		"si porque tofos los lados son iguales"	INCOMPLETA
E23	X		"si porque se puede formar"	INCOMPLETA
E24			"porque sus lados no son iguales"	INCORRECTA
E25		x	"porque sus lados no son iguales"	INCORRECTA
E26	X		"por que se forma el triangulo"	INCOMPLETA
E27	X		"por que en los triangulos armados correctamente siempre se cumple esta condición"	INCOMPLETA
E28		X	"no porque todos los angulos tiene la misma medida"	INCORRECTA
E29		X	"por que todos los triangulos miden lo mismo"	INCORRECTA
E30	X		"si porque o si no el triangulo no se podria armar"	INCOMPLETA
E31	X		"el triangulo se puede armar"	INCOMPLETA

E	V	F	JUSTIFICACIÓN	SUBCATEGORÍA
E32	X		“si porque entonces el triangulo no puede hacer”	INCOMPLETA
E33	X		“por que en todos los bien armados se cumple”	INCOMPLETA
“Todos los triángulos equiláteros son isósceles”				

- Las justificaciones dadas por los estudiantes reflejan que persisten las limitaciones en los estudiantes para emitir razones o argumentos. En sus justificaciones el estudiante no presenta razones matemáticas de peso para apoyar su adhesión o rechazo a la tesis inicial propuesta, salvo por la mención que hacen de la suma de dos lados del triángulo.

- Persiste en muchos casos la confusión entre las definiciones de triángulo isósceles y triángulo equilátero.

- Hay serias deficiencias en el lenguaje natural que les hace compleja su expresión, e impide la claridad en la expresión de algunos conceptos.

8.6 ANÁLISIS PRUEBA FINAL

Se llevará a cabo el análisis de los ítems de la prueba diagnóstica ya que esta prueba y la final fueron las mismas.

8.6.1 Categorías de análisis prueba diagnóstica final. Para el análisis de la prueba diagnóstica final se tuvieron en cuenta las mismas categorías del diagnóstico inicial:

8.6.1.1 Categoría acierto. En esta categoría se clasifican las respuestas de los estudiantes que contestaron y justificaron correctamente el ítem planteado, demostrando aprehensión de conceptos, uso de propiedades geométricas y habilidad en la representación gráfica de las figuras.

8.6.1.2 Categoría inconcluso. Corresponden a esta categoría, las respuestas de los estudiantes que emplearon algunos de los conceptos o propiedades. Sin embargo.

- La respuesta fue dada de manera parcial porque el estudiante la dio pero sin justificar.

- La respuesta es incorrecta, pero la justificación presentada es completamente correcta.

- Las representaciones gráficas no estaban acordes con la justificación presentada o viceversa.

8.6.1.3 Categoría no justifica.Clasifican en esta categoría las respuestas de los estudiantes que resolvieron correctamente el ítem empleando los conceptos o propiedades, pero no presentan ninguna justificación a sus procedimientos, o, se limitan a transcribir el encabezado del ítem.

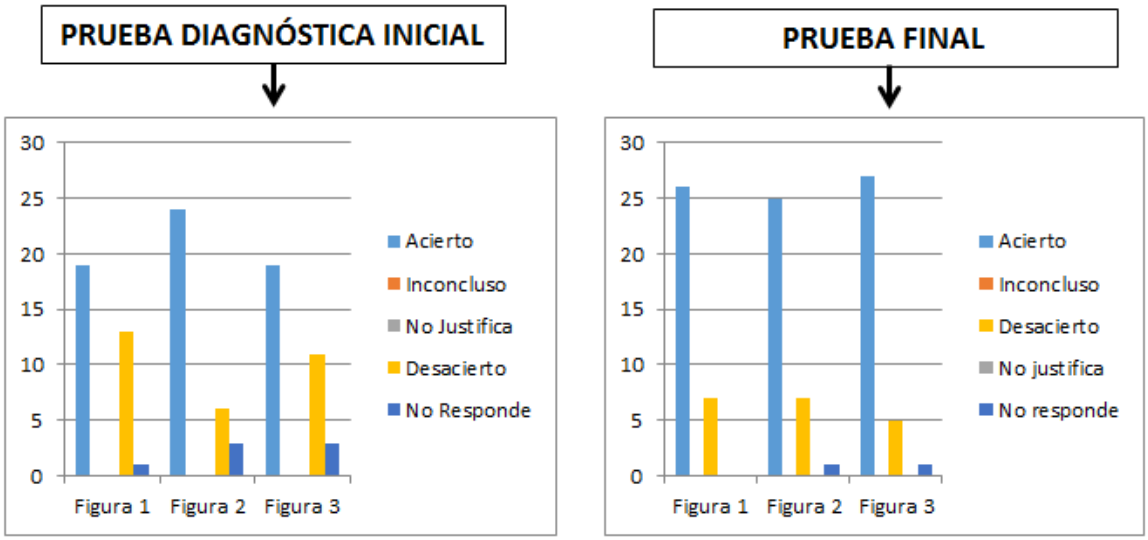
8.6.1.4 Categoría desacierto. Se clasifican en esta categoría las respuestas erróneas, teniendo en cuenta las siguientes situaciones:

- Uso inapropiado de propiedades
- Incapacidad de realizar representaciones gráficas
- Sus argumentos son completamente incoherentes con el procedimiento realizado
- Tanto la respuesta como la justificación están erradas.

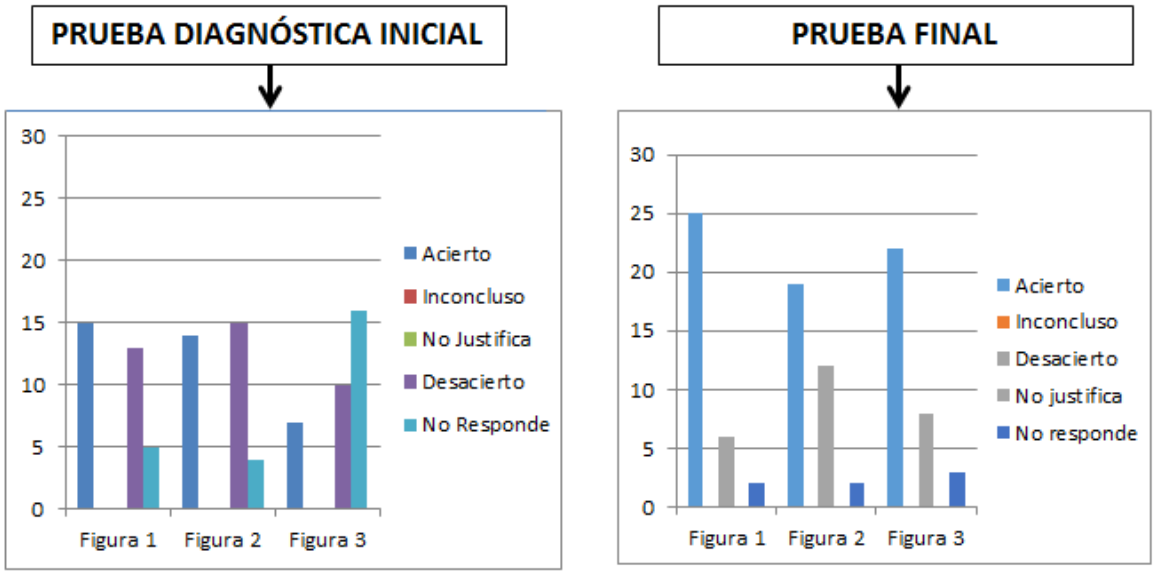
8.6.1.5 Categoría no responde. Hacen parte de esta categoría los estudiantes que no resolvieron el ítem, dejando en blanco el espacio para el desarrollo del mismo.

8.6.2 Resultados comparativos prueba final

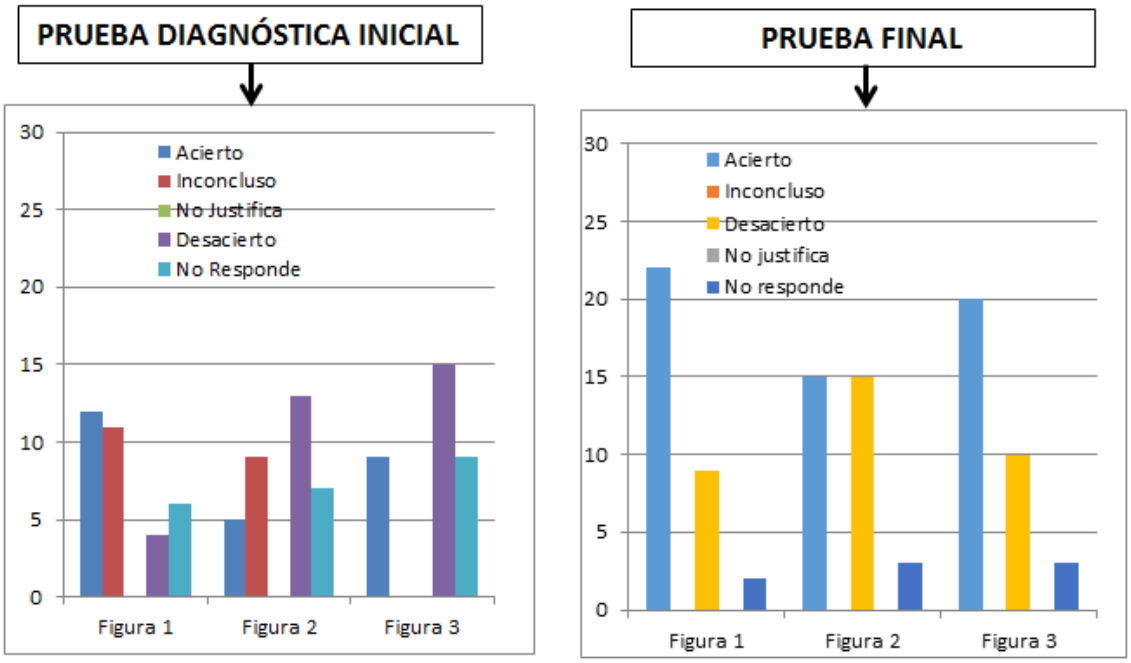
Gráfica 8. Reconocimiento de ángulos complementarios.



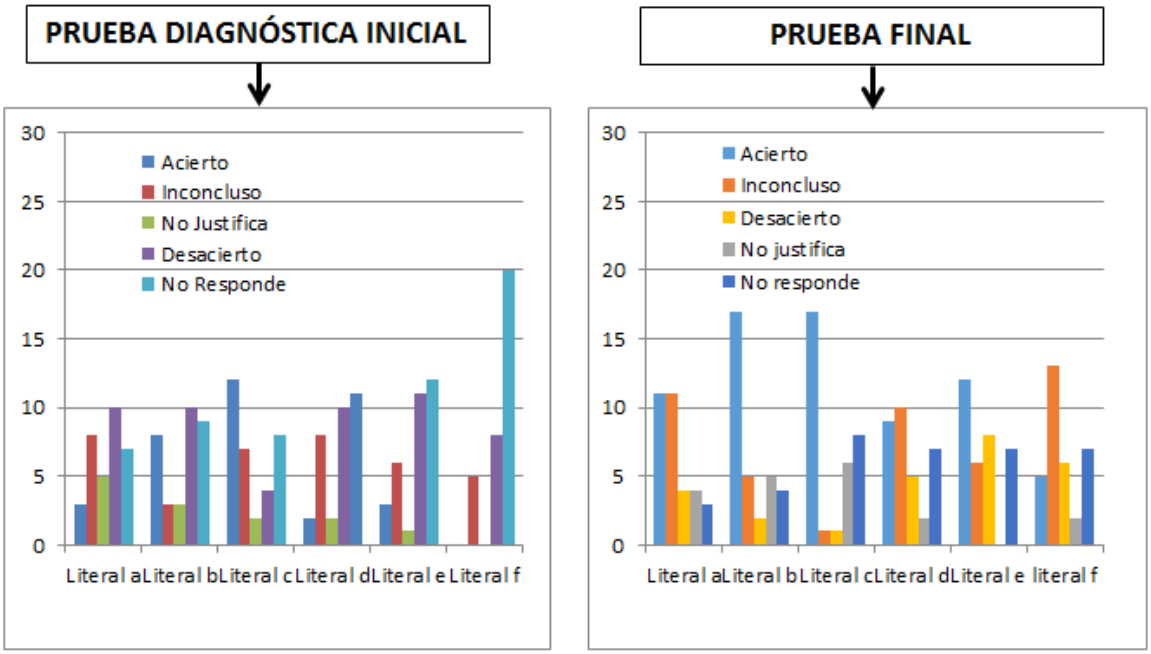
Gráfica 9. Reconocimiento de ángulos suplementarios.



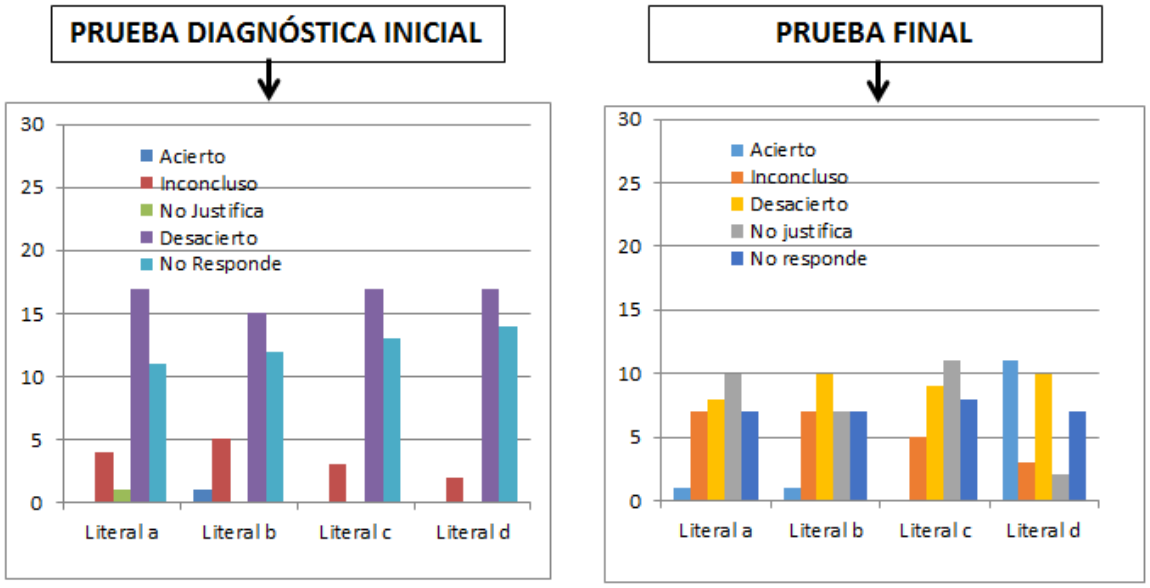
Gráfica 10. Teorema sumatoria de ángulos interiores de un triángulo.



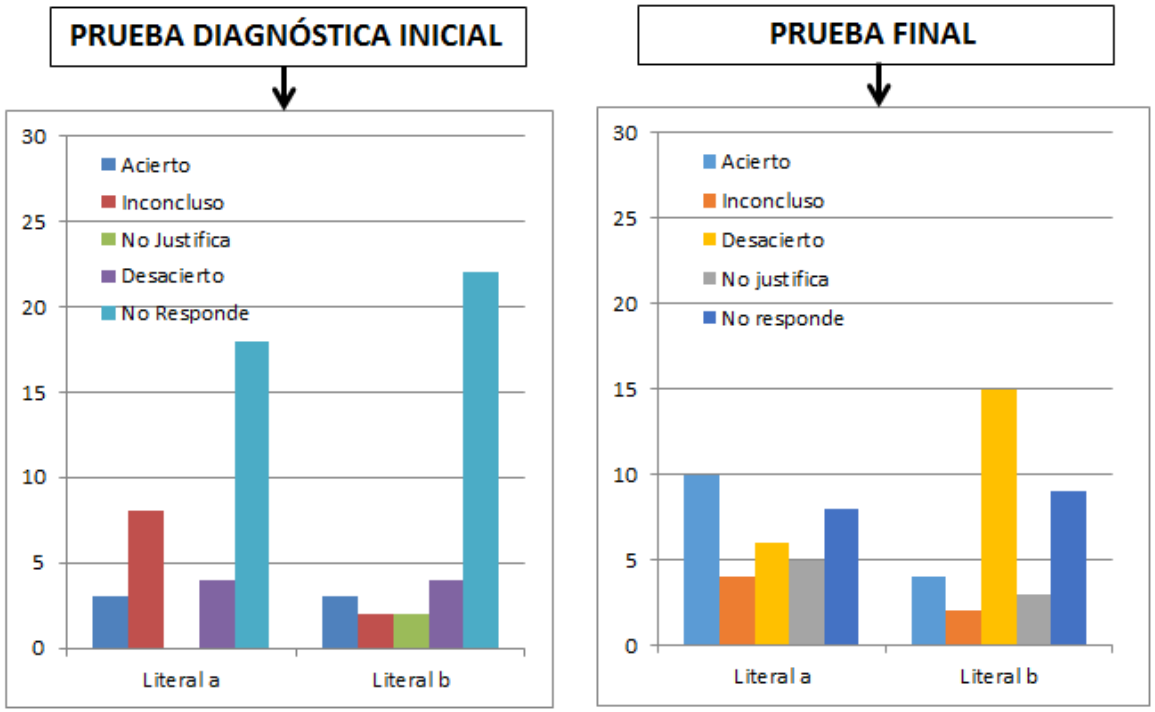
Gráfica 11. Clasificación de triángulos según la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos.



Gráfica 12. Conexidad entre triángulos según sus medidas y triángulos según sus ángulos.

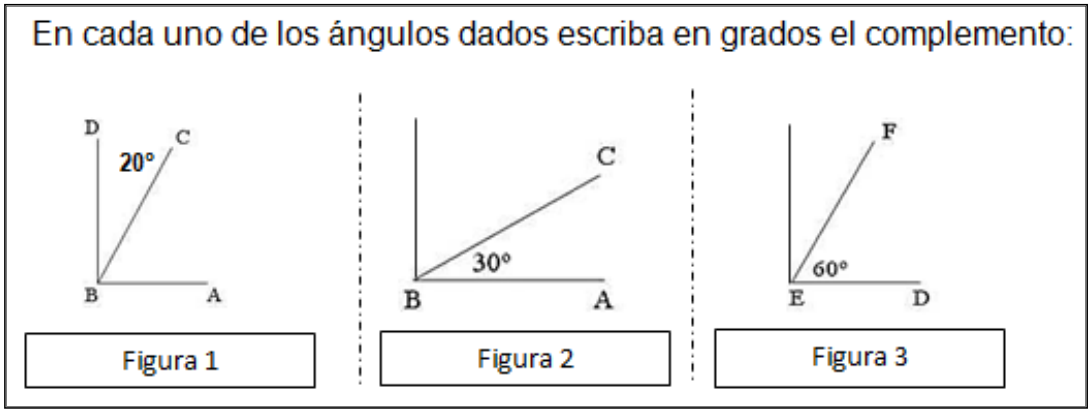


Gráfica 13. Teorema de la desigualdad triangular



8.6.3 Análisis por ítems

Figura 63. Reconocimiento de ángulos complementarios



De acuerdo a los resultados de la prueba final, se puede observar que los estudiantes mejoraron en su habilidad de interpretación al elegir criterios que les permiten extraer información partiendo de una imagen presentada, para encontrar el valor del ángulo complementario al ángulo dado. Se evidencia un avance notorio con respecto a la prueba diagnóstica inicial porque una considerable mayoría (78%) respondió de manera correcta. En este ítem los estudiantes mostraron no solamente comprensión sino aprehensión del concepto de complementariedad, como lo demuestra la respuesta dada por el E-16.

Figura 64. Determinación ángulo complementario prueba final.

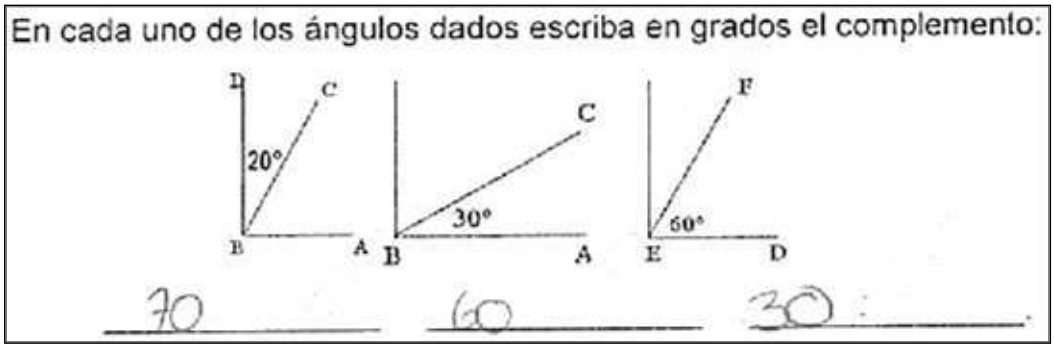
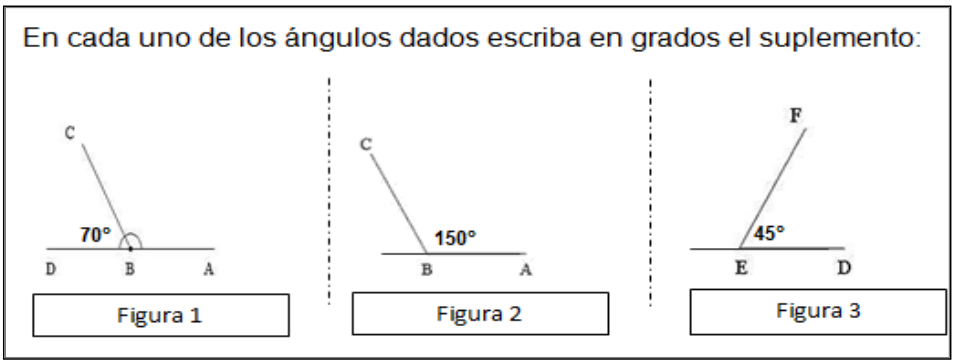


Figura 65. Reconocimiento de ángulos suplementarios



Se observa en este ítem un notable desempeño, por cuanto disminuyó de manera considerable el número de respuestas incorrectas e igualmente aumentó el número de estudiantes que respondieron el ítem. Su habilidad de interpretación presenta adelantos que se evidencian en la capacidad de basarse en un sistema de representación gráfico para predecir inicialmente y luego determinar con exactitud el valor del ángulo suplementario para cada una de las figuras. Cabe destacar la capacidad de los estudiantes de ubicar la posición del ángulo suplementario correctamente y de nombrar de manera apropiada cada uno de ellos, como lo vemos en la respuesta del E- 25:

Figura 66. Reconocimiento de ángulos suplementarios prueba final.

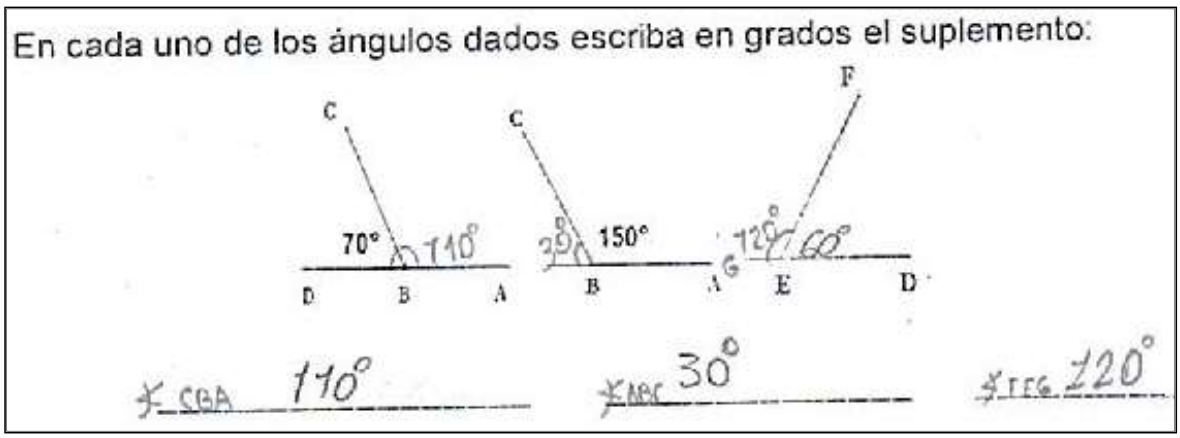
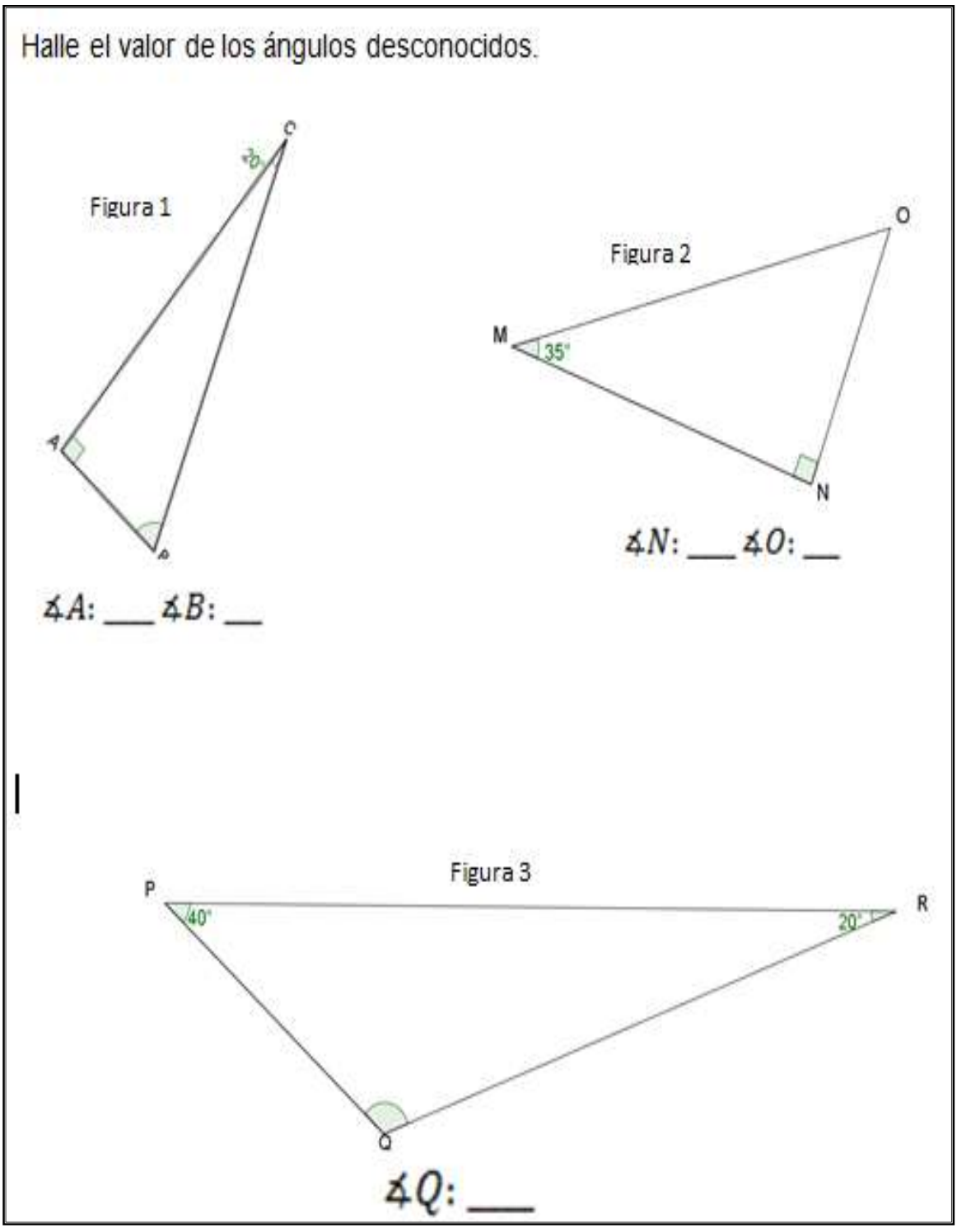


Figura 67. Clasificación de triángulos según sus ángulos.



La habilidad de interpretación, que se evidencia en la capacidad de inferir información a partir del gráfico dado, presentó un considerable repunte, toda vez que se incrementó el número de respuestas correctas, disminuyó el de los desaciertos y disminuyó el número de estudiantes que se abstuvieron de responderlo. Se encontró que les fue más fácil a los estudiantes hallar el valor del ángulo faltante, recordando la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

En cuanto al lenguaje matemático, los estudiantes demostraron:

- Reconocimiento del ícono que indica un ángulo de 90º, puesto que muchos de los estudiantes en la prueba inicial, pasaron por alto este símbolo, dándole valores aleatorios y errados al ángulo recto.
- Así mismo, indican los grados que tiene un ángulo.
- Nombran correctamente los ángulos de un triángulo.

Estas habilidades se ven en la respuesta dada por el E- 30

Figura 68. Ítem 3. Teorema sumatoria de ángulos interiores de un triángulo. Prueba final.

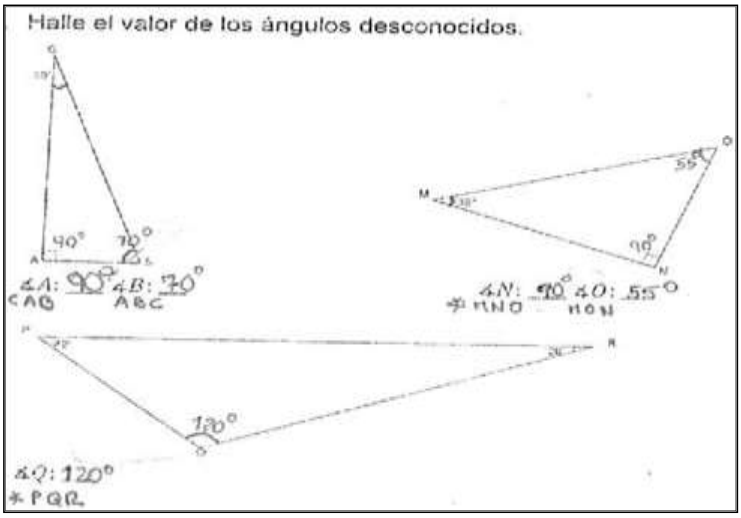
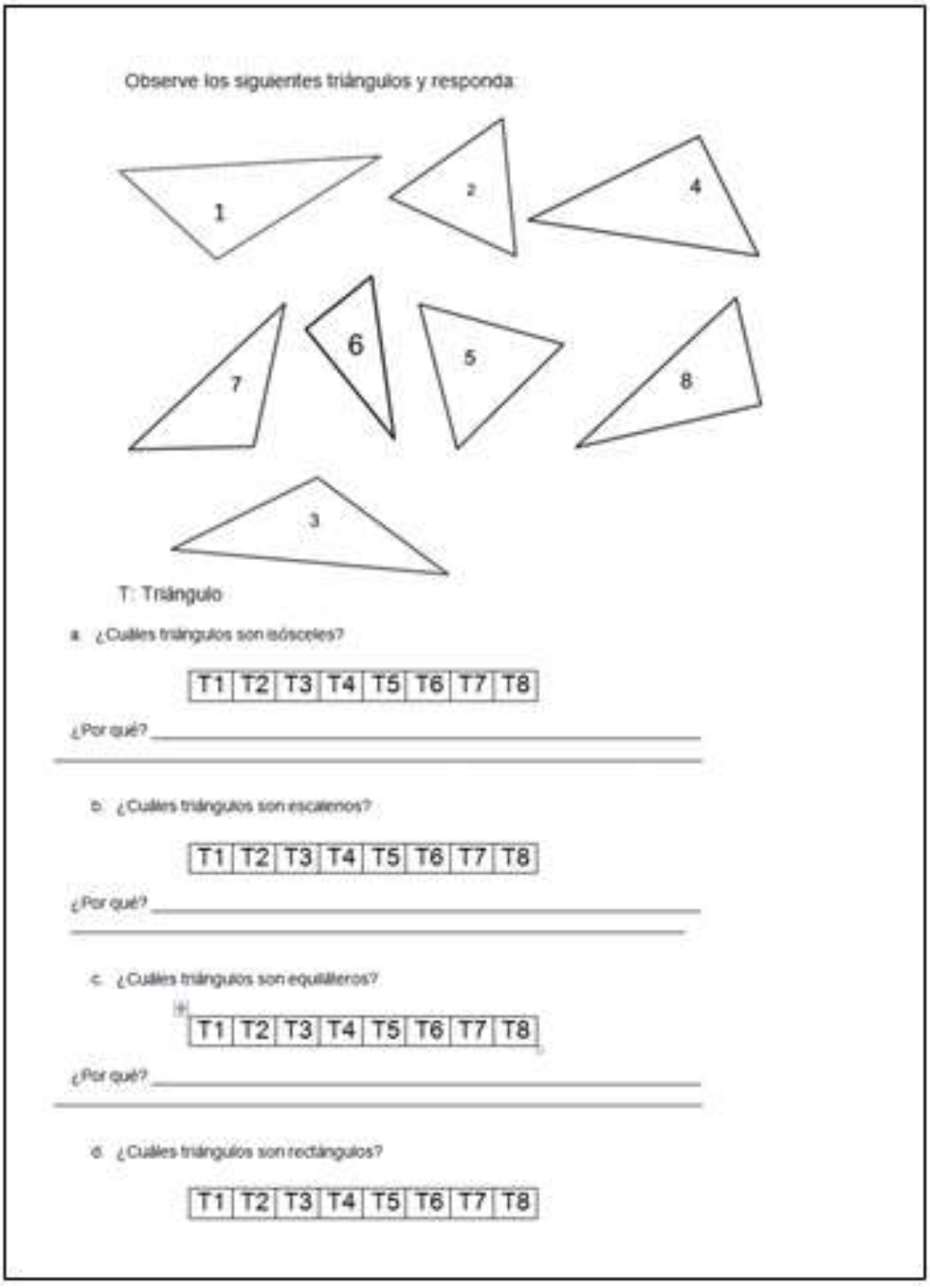


Figura 69. Ítem 4: Teorema sumatoria de ángulos interiores de un triángulo.



Observe los siguientes triángulos y responda

1 2 4 6 5 7 8 3

T: Triángulo

a. ¿Cuáles triángulos son isósceles?

T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8

¿Por qué? _____

b. ¿Cuáles triángulos son escalenos?

T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8

¿Por qué? _____

c. ¿Cuáles triángulos son equiláteros?

T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8

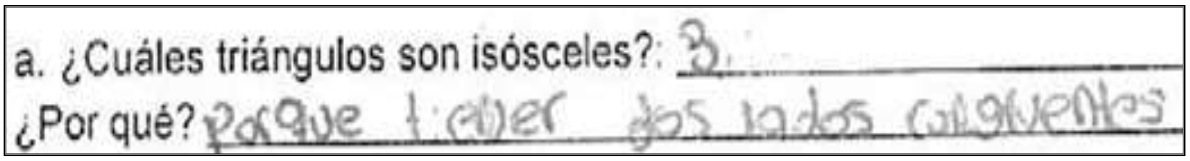
¿Por qué? _____

d. ¿Cuáles triángulos son rectángulos?

T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8

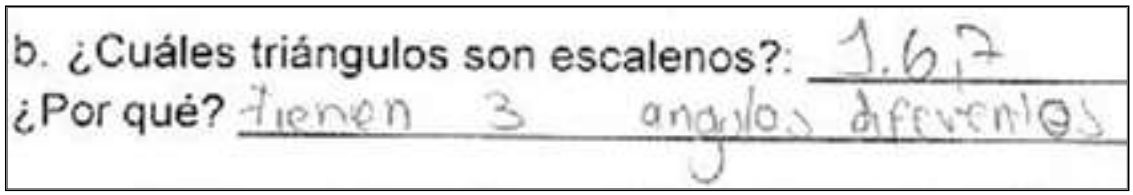
- En cuanto al uso del lenguaje geométrico básico clasificando los triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados o a la medida de sus ángulos, se observa un notable progreso, como se evidencia en la respuesta del E-15, quien acertadamente emplea el concepto de congruencia y lo relaciona con el del triángulo isósceles así:

Figura 70. Clasificación de triángulos según la longitud de sus lados y la medida de sus ángulos. Prueba final



- Con relación a la capacidad de interpretar de los estudiantes para clasificar triángulos, se observa que para llevarla a cabo, algunos estudiantes aún se basan en la mera percepción visual de las figuras, sin emplear como criterio de selección, las características que tienen cada uno de ellos (en este caso la longitud de las medidas de sus lados). Evidencia de ello es la respuesta del E-28 quien para seleccionar triángulos escalenos, emplea como criterio de selección la medida de sus ángulos.

Figura 71. Selección de triángulos escalenos. Prueba final.



En términos generales, se observa un progreso en los estudiantes en cuanto al uso del lenguaje matemático y la habilidad de interpretar. Parece haber claridad en los criterios de clasificación de triángulos de acuerdo a la amplitud de sus ángulos, como se muestra en la respuesta del E-21:

Figura 72. Argumentación sobre triángulos rectángulos.

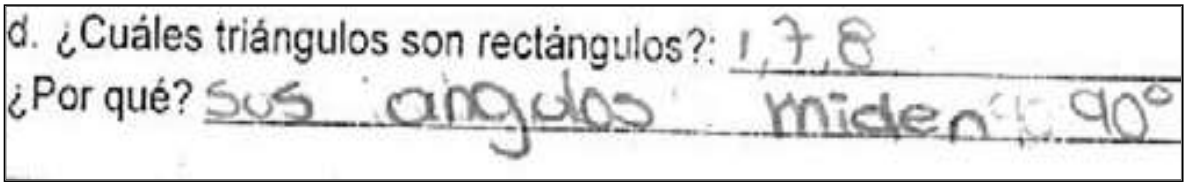
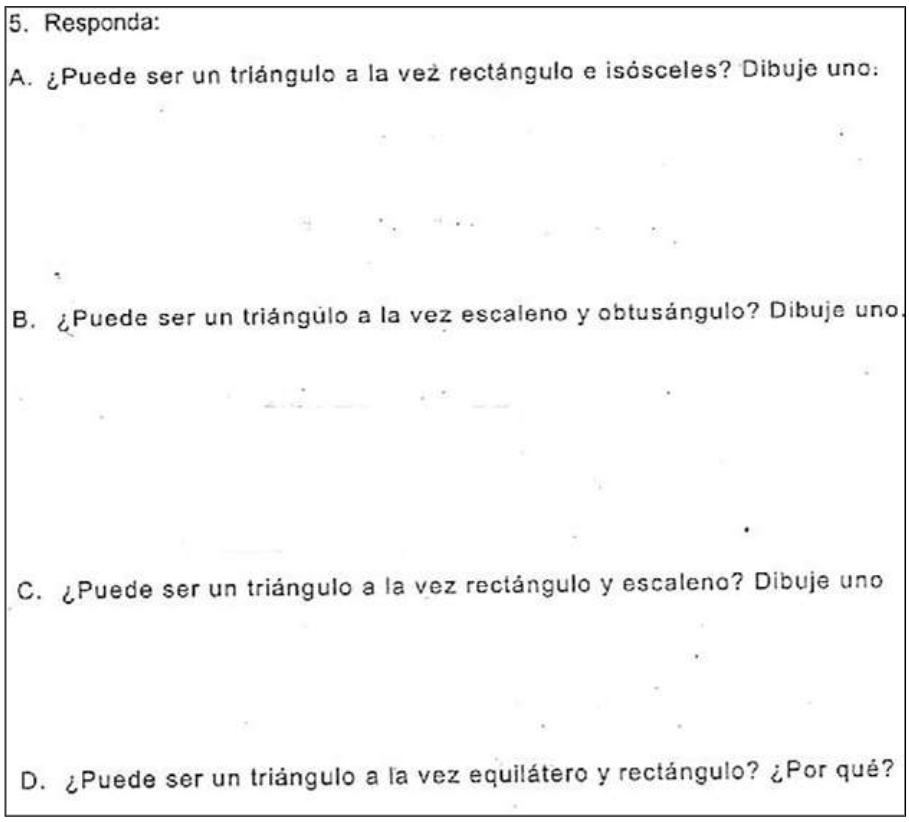
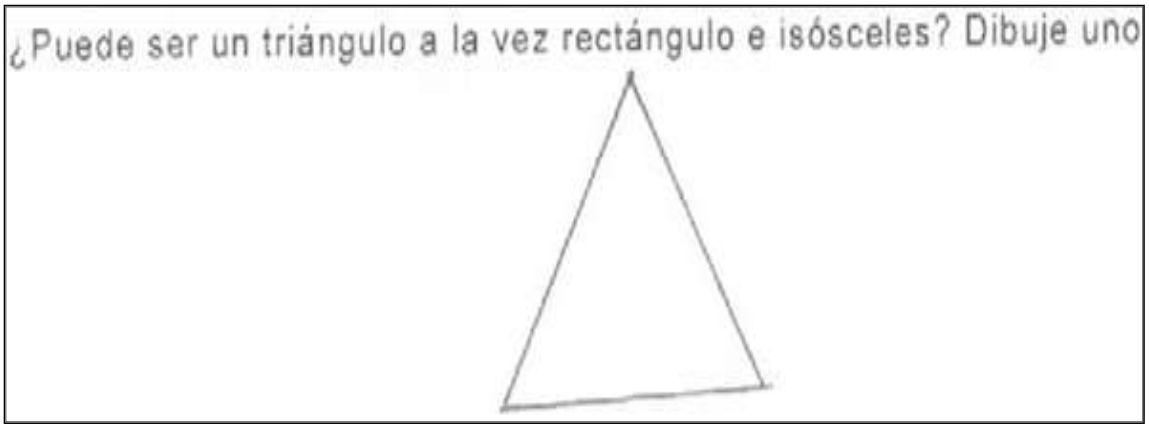


Figura 73. Ítem 5. Conexidad entre clasificación de triángulos según sus medidas y clases de triángulos según las medidas de sus ángulos.



La habilidad de interpretar al realizar la conversión de un lenguaje matemático escrito a uno de carácter gráfico fue puesta a prueba en este ítem. En la prueba final persisten las dificultades para los estudiantes, pues hubo una cantidad considerable de respuestas incorrectas o no contestadas que las que fueron respondidas correctamente. Así por ejemplo podemos observar la respuesta del E-29:

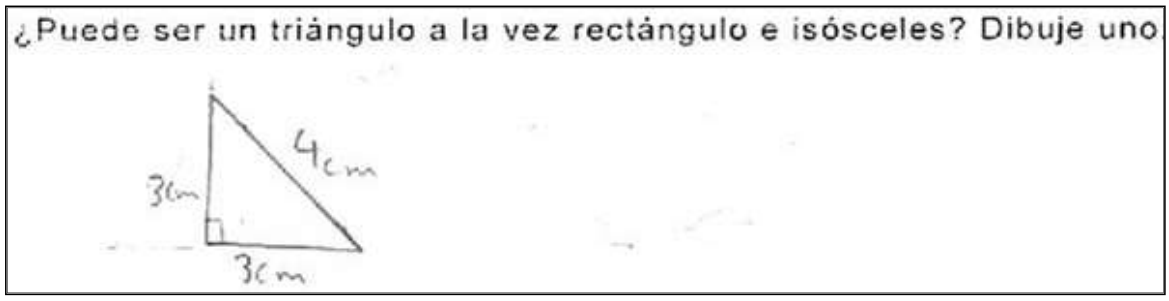
Figura 74. Representación de un triángulo rectángulo e isósceles. Prueba final.



Es evidente que el estudiante no maneja el concepto de ángulo recto, pues en su representación gráfica lo refleja, al dibujar una figura con tres ángulos agudos y tampoco presentó una respuesta al cuestionamiento inicial.

No obstante, hay otros estudiantes que muestran una mejor comprensión y aprehensión del concepto, según lo muestra la respuesta del E- 2:

Figura 75. Representación gráfica de un triángulo rectángulo e isósceles. Prueba final.

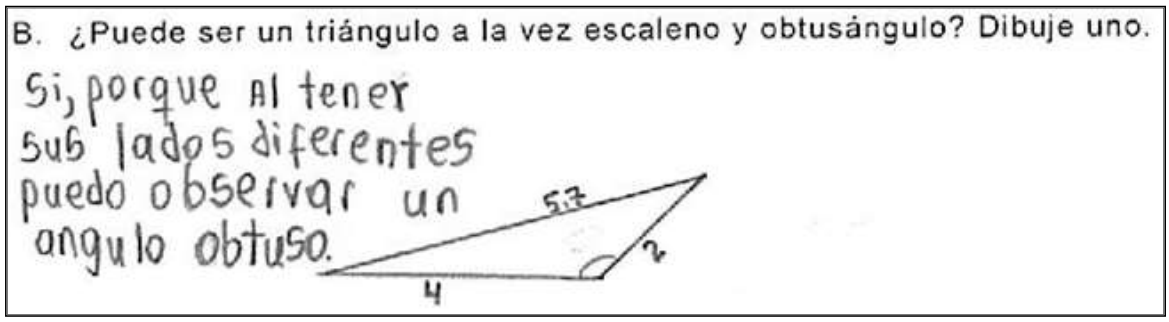


En esta representación gráfica el estudiante indica a través del ícono la presencia de un ángulo recto y además escribe dos medidas congruentes para el triángulo para cumplir con las condiciones del problema. Así mismo, las medidas plasmadas por el estudiante cumplen con la propiedad de desigualdad triangular.

Llama poderosamente la atención que una inmensa mayoría de los estudiantes realizan representaciones gráficas pero no tienen argumentos que las sustenten.

Uno de los pocos que justificó aunque de manera incompleta y no matemática, pero hizo la representación gráfica de manera correcta es E-33.

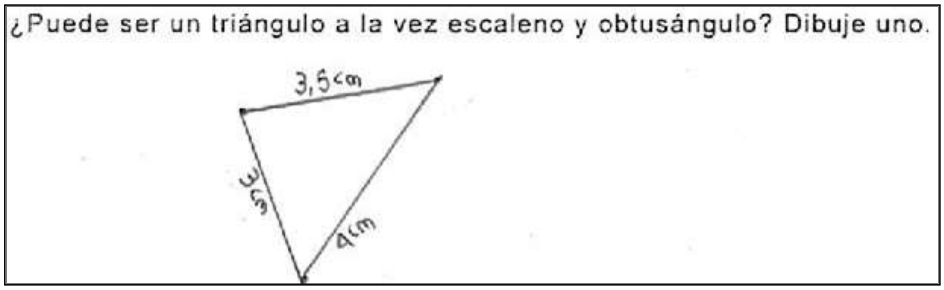
Figura 76. Representación gráfica de un triángulo escaleno e isósceles. Prueba final.



La constante entre los estudiantes era la presentación geométrica sin justificar.

Otros estudiantes hicieron de manera incorrecta la representación gráfica o la justificación, o ambas. Un ejemplo de ellos es el E-4-

Figura 77. Representación gráfica de un triángulo escaleno y obtuso. Prueba final.



Los estudiantes tienen dificultades para entender de qué trata el problema, mostrando poca comprensión en la lectura general de la pregunta, mostrando no reconocer las características y propiedades del triángulo. No manejan el lenguaje geométrico, que describe elementos propios de esta figura. Esto puede evidenciarse en la respuesta del E-18 quien, en efecto acierta en ubicar unas medidas que pueden corresponder a un triángulo escaleno, pero no cumple con la condición que este debe ser triángulo rectángulo. Tampoco presenta ninguna respuesta a la pregunta inicial. No hay argumentación en este caso.

Figura 78. Representación gráfica de un triángulo escaleno y rectángulo a la vez.. Prueba final.

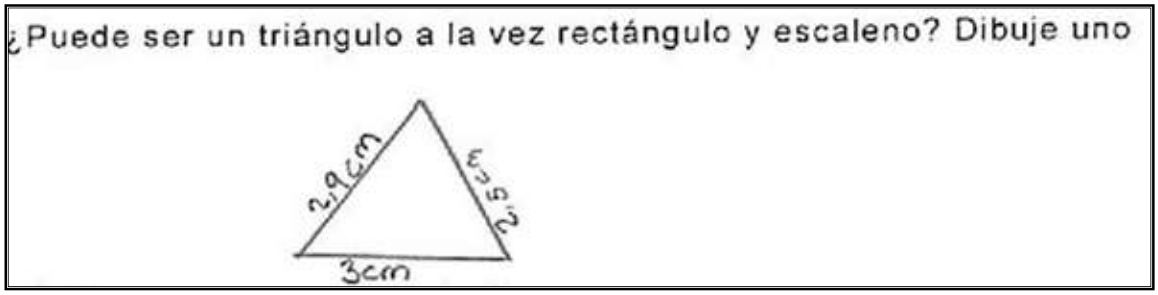
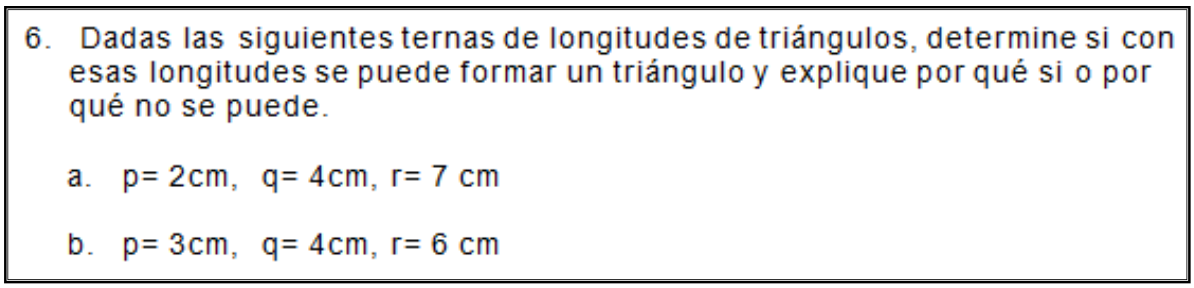


Figura 79. Ítem 6. Teorema de la desigualdad triangular.


6. Dadas las siguientes ternas de longitudes de triángulos, determine si con esas longitudes se puede formar un triángulo y explique por qué si o por qué no se puede.

a. p= 2cm, q= 4cm, r= 7 cm

b. p= 3cm, q= 4cm, r= 6 cm

Al establecer un comparativo entre la prueba diagnóstica inicial y la prueba final, se observa apenas un avance incipiente en la habilidad de argumentación y justificación.

Llama la atención que muy pocos estudiantes en la prueba presentaron sus argumentos, justificaciones y/o explicaciones respecto a los problemas planteados. No obstante, son destacables los siguientes hechos:

- Las actividades propuestas en las secuencias didácticas promueven el desarrollo de las habilidades comunicativas.

- Si bien es cierto que las razones expuestas no constituyen persé argumentos sólidos, o estos no alcanzan niveles analíticos con uso de la teoría y lenguaje matemático, se debe considerar que esta intervención (dos meses) es bastante corto para poder consolidar las habilidades comunicativas.

- De igual manera deben tenerse en cuenta factores que impiden que el proceso de comunicación esté muy bien fundamentado como por ejemplo:

❖ Fallas en la comprensión lectora

❖ Poca capacidad de producción textual manifestada en deficiencias para redacta, interpretar o escribir.

❖ Deficiencias en la comprensión de conceptos geométricos.

Figura 80. Argumentos del teorema de la desigualdad triangular

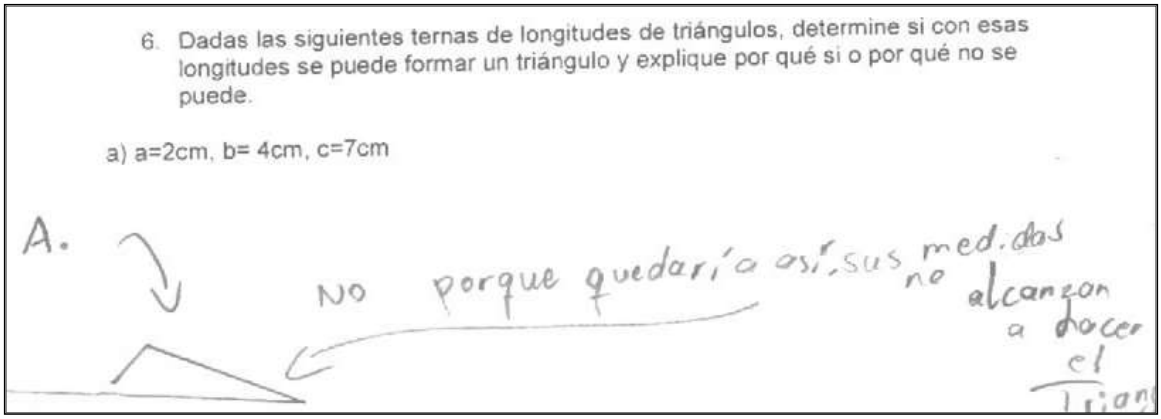
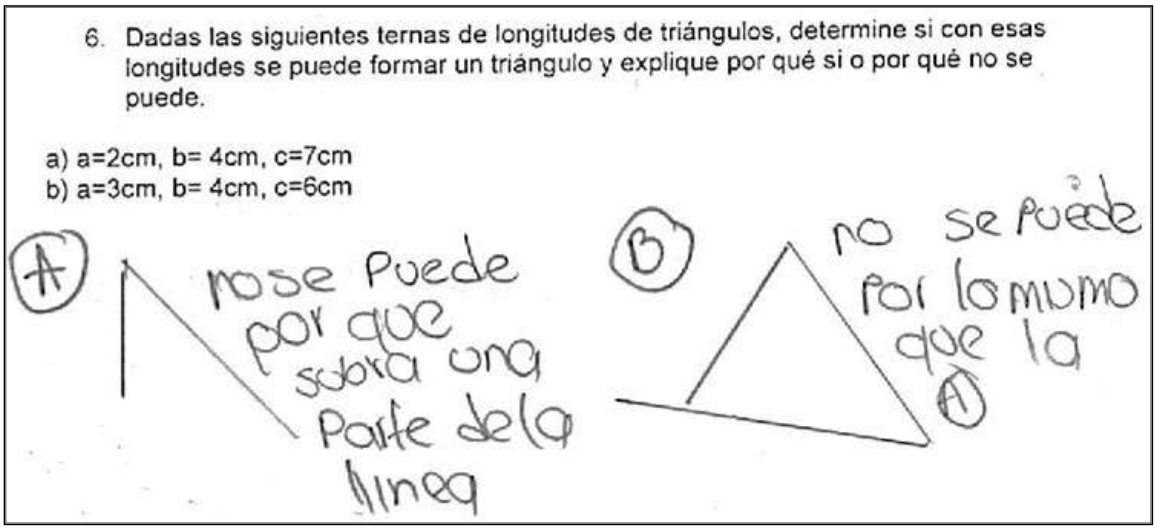


Figura 81. Argumentos del teorema de la desigualdad triangular ítem 6.



9. CONCLUSIONES

En la fase diagnóstica se pretendía medir el nivel de aprehensión de los estudiantes en lo relacionado con el estudio de la geometría, así mismo identificar el grado de desarrollo en las competencias comunicativas propias del estudio del área. Una vez analizados los resultados se pudo comprobar que los estudiantes adolecen de la apropiación de términos y conceptos relacionados con el tema de estudio, los triángulos, además mostraron grandes falencias en lo relacionado a la resolución de problemas , puesto que su nivel de lectura comprensiva es muy bajo, unido a lo anterior se detectaron dificultades en la parte comunicativa, no respondían a los interrogantes presentados, y al pedírsele que lo hicieran de forma oral tampoco mostraron esa habilidad. En algunos casos conocían la respuesta pero fallaban en la habilidad para contestarla, poniendo en evidencia que se debía fortalecer el proceso relacionado con la argumentación y la proposición de su ideas desde el espacio de la geometría.

Una de las conclusiones de esta investigación es el hecho de reconocer (a través de la práctica), que un factor determinante en la enseñanza de la geometría, es el uso del lenguaje matemático. En la medida en que el estudiante esté familiarizado con la jerga, expresiones o idioma propio de las matemáticas, se le hará más fácil la comprensión de los conceptos del área.

Desde luego, el contacto con el lenguaje semiótico debe darse desde los primeros años de escolaridad para que a medida que avanza en su formación escolar, la apropiación del lenguaje matemático también lo haga. Los estudiantes del grado sexto llegan a hacer contacto con nuevos términos matemáticos cuando ya ha pasado un importante ciclo de formación escolar: su educación primaria. Este contacto tardío no sólo con el lenguaje sino con el proceso de resolución de problemas, el empleo de una nueva herramienta tecnológica y otros factores, no

generaron el impacto que se esperaba, pues el desarrollo de las habilidades comunicativas apenas está en un nivel incipiente.

Lo anterior obedece al uso de estrategias metodológicas centradas en la apropiación de conceptos, con poco desarrollo de procesos matemáticos que permitan fortalecer las habilidades del pensamiento, y el manejo adecuado de expresiones propias del área.

Además falta un mayor compromiso por parte de los docentes para renovar las practicas pedagógicas, centrándolas en el desarrollo de competencias , haciendo uso de las nuevas tecnologías.

La labor docente con el paso del tiempo se vuelve rutinaria, el maestro se acostumbra a encontrarse con las mismas dificultades en sus estudiantes y una vez más aplica las estrategias que ha aplicado en los últimos años, en la mayoría de los casos sin resultados favorables, es decir se acostumbran a convivir con la dificultad y a entender que no se puede combatir. La enseñanza de la Geometría se ha limitado a definir figuras geométricas y a reconocerlas, a ser un relleno de la clase de Matemática, donde no hay necesidad de desarrollar procesos de pensamiento pues sólo se requiere de una escuadra y de un lápiz para su trabajo.

Cambiar paradigmas establecidos es una labor muy compleja, en el desarrollo de la propuesta , al encontrar en la tecnología una aliada un poco distante por el temor que se siente al abordar este tema. Enfocar la Geometría en el desarrollo de habilidades comunicativas, fue complicado pero al observar el efecto que producía en los estudiantes, la curiosidad que despertaba y sobre los avances que demostraban en los procesos geométricos, y de pensamiento, se entendió que las debilidades presentadas si se podían fortalecer

Destaco la importancia que tiene el uso del software de geometría dinámica como mediador en la enseñanza de la geometría, puesto que esta herramienta, permite a los estudiantes profundizar en las propiedades que hacen característica a una figura ya que, su estudio se hacía desde lo percibido de forma visual.

El diseño de las secuencias didácticas, es una estrategia pedagógica interesante para seguir aplicando en la enseñanza de la geometría, por cuanto sus actividades presentan diferentes niveles de complejidad y propenden por el fortalecimiento de las habilidades comunicativas

Por otra parte, en cuanto al abordaje de las habilidades del proceso de comunicación, puedo concluir que:

- La habilidad de interpretación, que se evidencia en la capacidad de inferir información a partir un sistema de representación, es de las que más se afianzó en el proceso, reconociendo en todo caso que aún persisten vacíos conceptuales. Los estudiantes tuvieron la capacidad de basarse en representaciones gráficas para inferir información, encontrar elementos para resolver un problema, captar la información que está presente en un contexto determinado y le atribuyeron un significado.

- Las habilidades de justificar y argumentar presentan vacíos, fallas y debilidades debido en parte a que:

❖ Aún en su lenguaje natural los estudiantes no se expresan correcta y coherentemente.
❖ Les cuesta trabajo asimilar los vocablos propios de la jerga matemática y darles un uso apropiado en un contexto como el de la resolución de un problema.
❖ Los argumentos presentados por los estudiantes en las actividades planteadas, son débiles, inconsistentes, rebatibles y con poco sustento.

- ❖ No utilizan como argumento de adhesión a sus tesis un ejemplo o una razón contundente.
- ❖ Es bastante marcada la costumbre de los estudiantes de abordar el estudio de figuras geométricas desde elementos de percepción visual: forma y tamaño, y no desde las propiedades de las mismas.

El trabajo hasta ahora empieza, el reto como Magister es contribuir de manera significativa a darle un cambio asertivo a la educación, renovar las antiguas practicas pedagógicas y reconocer en el estudiante un sujeto activo y participativo en su proceso, además implementar estrategias que hagan uso de los avances tecnológicos que vayan apareciendo.

10. RECOMENDACIONES

- El abordaje de la enseñanza de la geometría debe basarse en el fortalecimiento de los procesos matemáticos y no girar en torno a la memorización de los contenidos.

- Se debe desde los primeros grados de escolaridad estimular el uso de lenguaje matemático, la apropiación de sus términos, la aprehensión de los conceptos que estos encierran y darles significación en contextos determinados.

- Es importante que se dé continuidad al proceso de enseñanza de la geometría en la institución, fortaleciendo los planes de estudio, asignando una intensidad horaria determinada y motivar a los docentes y estudiantes a usar el software de geometría dinámica como mediador en el proceso.

- Se recomienda a la Institución invertir en la promulgación y desarrollo de estas estrategias de aprendizaje, desde el desarrollo del plan de asignatura en donde se incluya el uso de software especializado para lograr un proceso de enseñanza aprendizaje más asertivo.

BLIBLIOGRAFIA

ACOSTA, Martín Eduardo, et al. Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. 2004. P. 19.

ALSINA, C.; ÁVILA, D. El currículum de Matemáticas en los inicios del siglo XXI. 2000.

BAUTISTA NIÑO Carlos René: Desarrollo del proceso de comunicación en la enseñanza y aprendizaje de la geometría con la mediación de software matemático interactivo. Universidad Industrial de Santander. 2017.

CÁLIZ, Sonia Rocío Suárez; SEPÚLVEDA, Silvia Johanna Rojas; PICO, Sandra Evely Parada. Actividades de refuerzo para estudiantes de once grado alrededor de sus habilidades comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad. Revista Científica, 2013, p. 418-422.

CARRUTHERS, Elizabeth; WORTHINGTON, Maulfry. Making sense of mathematical graphics: The development of understanding abstract symbolism. European Early Childhood Education Research Journal, 2005, vol. 13, no 1, p. 57-79.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. ¿Qué hay que saber de las Competencias Matemáticas?. [en línea. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/home/1592/article-103987.html

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de competencias. [en línea]. Bogotá, D.C: 2006. [citado el 22 de octubre de 2017].

Disponible en: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-339975_matematicas.pdf.

CRESPO, Cecilia R. Crespo; FARFÁN, Rosa María. Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2005, vol. 8, no 3, p. 287-317.

CRONBACH, Lee. Evaluation for course improvement. Teachers College Record, 1963, vol. 64, no 8, p. 672-683.

DE GUZMAN. pasos para resolver un problema matemático. [en linea]. 2013. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en: http://daniyvalentina123.blogspot.com.co/2013/09/metodo-de-miguel-de-guzman.html

DELICADO, Haro y SOTOS SERRANO, María. Recorrido por diversos conceptos matemáticos con Geogebra. [en línea]. 2013. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en http://mates.albacete.org/ICEAMCM/PDF/comparg.pdf

DUVAL, Raymond. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME, 2006, vol. 9, no 1, p. 143.

ELLIOTT, Jhon. El cambio educativo desde la Investigación Acción [en línea]. Madrid: Morata S.L, 1993. p. 88. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en: https://books.google.com.co/books?isbn=8471123835

FAUSTINO, Arnaldo; DEL POZO, Gutiérrez; ARROCHA, Olaysi. Fundamentos epistemológicos que intervienen en el desarrollo de la comunicación matemática.

Editado por la Fundación Universitaria Andaluza Inca Garcilaso para eumed. net, Disponible en: http://www. eumed. net/libros-gratis/2013/1279/index. htm, 2013.

FERNÁNDEZ TOBÓN, Sandra Patricia; VELÁSQUEZ PADILLA, Marisol; PEÑA APARICIO, Yuri María. Desarrollo de la competencia comunicativa en la construcción de representaciones geométricas, a través del uso de materiales físicos y virtuales. Tesis Licenciatura en Matemáticas y Física. 2014.

FIALLO, Jorge. Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica. Tesis Doctor en Matemáticas. Valencia: Universidad de Valencia. España: 2010. pp. 139-140.

GALINDO, Claudia. Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la Geometría. Revista Ema, 1996, vol. 2, no 1, p. 49-58.

GONZÁLEZ. Luis Carlos. Estrategias para Optimizar el Uso de las TIC´ s en la Práctica Docente que Mejoren el Proceso de Aprendizaje-Edición Única. 2012.

GUACHAMÍN, Bonilla; ELIZABETH, Georgina. Influencia del uso del programa Geogebra en el rendimiento académico en Geometría Analítica Plana, de los estudiantes del tercer año de bachillerato, especialidad Físico Matemático, del Colegio Marco Salas Yépez de la ciudad de Quito, en el año lectivo 2012-2013. 2013.

HERNÁNDEZ SAMPIERI, Roberto; FERNÁNDEZ COLLADO, Carlos; BAPTISTA LUCIO, Pilar. Metodología de la investigación. México: McGraw-Hill, 2003.

HERNÁNDEZ, Carlos, et al. Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 2012.

HODGES, Thomas E.; CONNER, Elizabeth. Reflections on a Technology-Rich Mathematics Classroom. Mathematics Teacher, 2011, vol. 104, no 6, p. 432-438.

ICFES. Resultados de quinto grado en el área de matemáticas. [en línea]. 2014. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/seleccionListaInstituciones.jspx

JIMÉNEZ ESPINOSA, Alfonso; SUÁREZ ÁVILA, Nury Yolanda; GALINDO MENDOZA, Sandra María. La comunicación: eje en la clase de matemáticas. Práxis & Saber, 2010, vol. 1, no 2.

JIMÉNEZ, A.; PINEDA, L. Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. Educación y Ciencia, 2013, vol. 16, p. 101-116.

La comunicación. [citado el 22 de octubre de 2017]. P.10. Disponible en: http://cmap.upb.edu.co/rid=1197584504359_194526086_999/La%20comunicaci%C3%B3n.doc

LEWIN, Kurt Laffite, et al. La teoría de campo en la ciencia social. 1988.

LOMAX, Richard G. A beginner's guide to structural equation modeling. Psychology Press, 2004.

MAMMANA, C.; VILLANI, V. Geometry and geometry-teaching through the ages. New icmi studies series, 1998, vol. 5, p. 1-3.

MURILLO TORRECILLA, Francisco Javier. Métodos de investigación en Educación Especial. Investigación Acción. [en línea]. 3ª Educación Especial. Curso: 2010-2011. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en:

https://www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Curso_10/Inv_accion_trabajo.pdf

NCTM. Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: Thales National Council of Teachers of Mathematics. 2003.

PASCUAL FORONDA, Eladio. Diccionario Manual de la Lengua Española VOX. Barcelona: Larousse Editorial, SL, 2007.

PERDOMO, Liceth et al. Procesos de comunicación en la clase de matemáticas de grado 5°. Revista Científica, 2013, p. 27-31.

PICHARDO, Ivanovnna; PUENTE, Ángel Puentes. Innovación Educativa: Uso de las TIC en la enseñanza de la Matemática Básica. [en línea]. EDMETIC, 2012, vol. 1, no 2, p. 127-144. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en : http://helvia.uco.es/xmlui/bitstream/handle/10396/11641/Edmetic_vol_1_n_2_9.pdf?sequence=1

PIMM, David. El lenguaje matemático en el aula. Ediciones Morata, 1990.

POLYA, George. Como Plantear y Resolver Problemas. México: 1965.

PROENZA GARRIDO, Yolanda. LEYVA LEYVA, Luis Manuel. Estimulación del pensamiento geométrico en escolares primarios. [en linea]. Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero". Edición digital: Santa C Guzmán Fleites. Cuba Educa. Portal Educativo Cubano. [citado el 2 de octubre de 2017]. Disponible en: http://matematica.cubaeduca.cu/index.php?option=com_content&view=article&id=11060%3Aayuda-estimulacion-del-pensamiento-geometrico-en-escolares-primarios&catid=529%3Aayuda-p

RAMÍREZ, Angela. La competencia de comunicación en el desarrollo de las competencias matemáticas en secundaria. Master oficial de iniciación a la investigación en didáctica de la matemática y de las ciencias experimentales. Barcelona: Universitat Autónoma de Barcelona, 2009.

RAMÍREZ, Ángela. La competencia de comunicación en el desarrollo de las competencias matemáticas en secundaria. Tesis. Universidad Autonoma de Barcelona. Cataluña. 2009.

RICO, Luis. Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. Suma, 2008, vol. 58, p. 7-23.

RUBINSTEIN, Sergei. Principios de psicología general, citado por FAUSTINO, Arnaldo; DEL POZO, Gutiérrez; ARROCHA, Olaysi. Fundamentos epistemológicos que intervienen en el desarrollo de la comunicación matemática [en línea]. Fundación Universitaria Andaluza Inca Garcilaso. 2013. P. 1. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en: http://www.eumed.net/libros-gratis/2013/1279/index.htm

SANZ, Elena. El lenguaje ayuda a entender las Matemáticas. Muy interesante. [en línea]. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en: http://www.muyinteresante.es/ciencia/articulo/el-lenguaje-ayuda-a-entender-las-matematicas

SEPÚLVEDA, Ramón Emilio; OSPINA, Carlos Humberto; GONZÁLEZ, José Manuel. Pensamiento espacial y sistemas geométricos. 2006.

VAN DER HOFSTADT ROMÁN, Carlos J. El libro de las habilidades de comunicación. Ediciones Díaz de Santos, 2005.

VÁZQUEZ, Edith Arévalo. Propuesta pedagógica para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, desde la comunicación. Procesos de enseñanza y aprendizaje: estudios en el ámbito de la educación media superior y superior. En: Enseñanza de las matemáticas. Plan de Estudios 2011

VIEYRA. Comunicación matemática en las primeras edades: representación de problemas aritméticos. [en línea]. 2010. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, España. [citado el 22 de octubre de 2017]. Disponible en: http://www. uab. cat/servlet/Satellite/recerca/BlobServer.

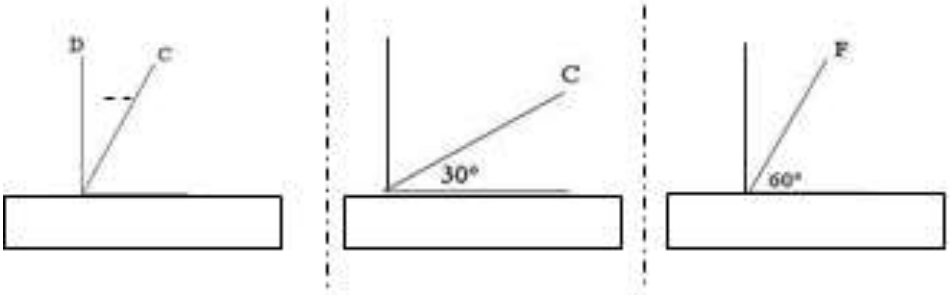
WATSON, Anne; MASON, John. Student-generated examples in the learning of mathematics. Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, 2002, vol. 2, no 2, p. 237-249.

WERNER, Jungk. Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la matemática 2 (primera parte) Editorial de Libros para la educación. Ciudad de la Habana, 1982, p. 48.

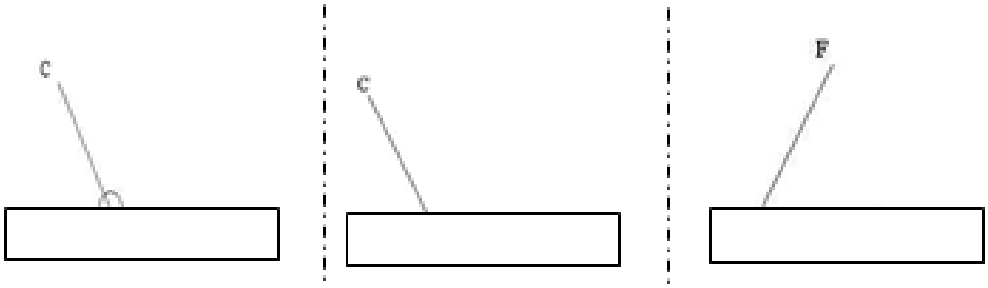
ANEXOS

Anexo A. Ítems de la prueba diagnóstica

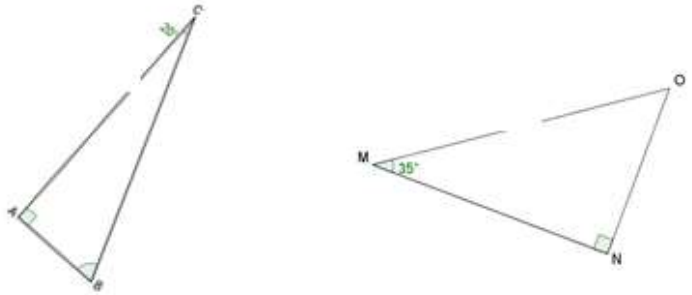
1. En cada uno de los ángulos dados escriba en grados el complemento:



2. En cada uno de los ángulos dados escriba en grados el suplemento:

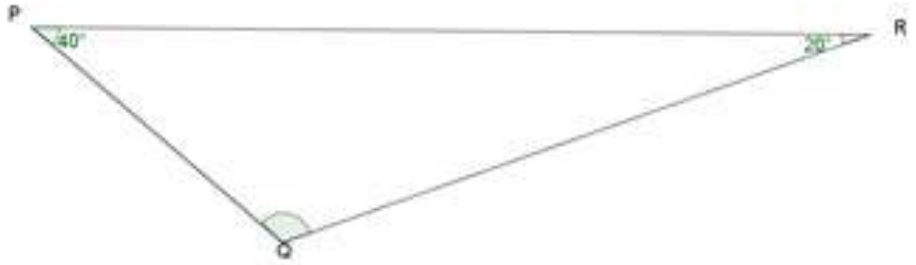


3. Halle el valor de los ángulos desconocidos.



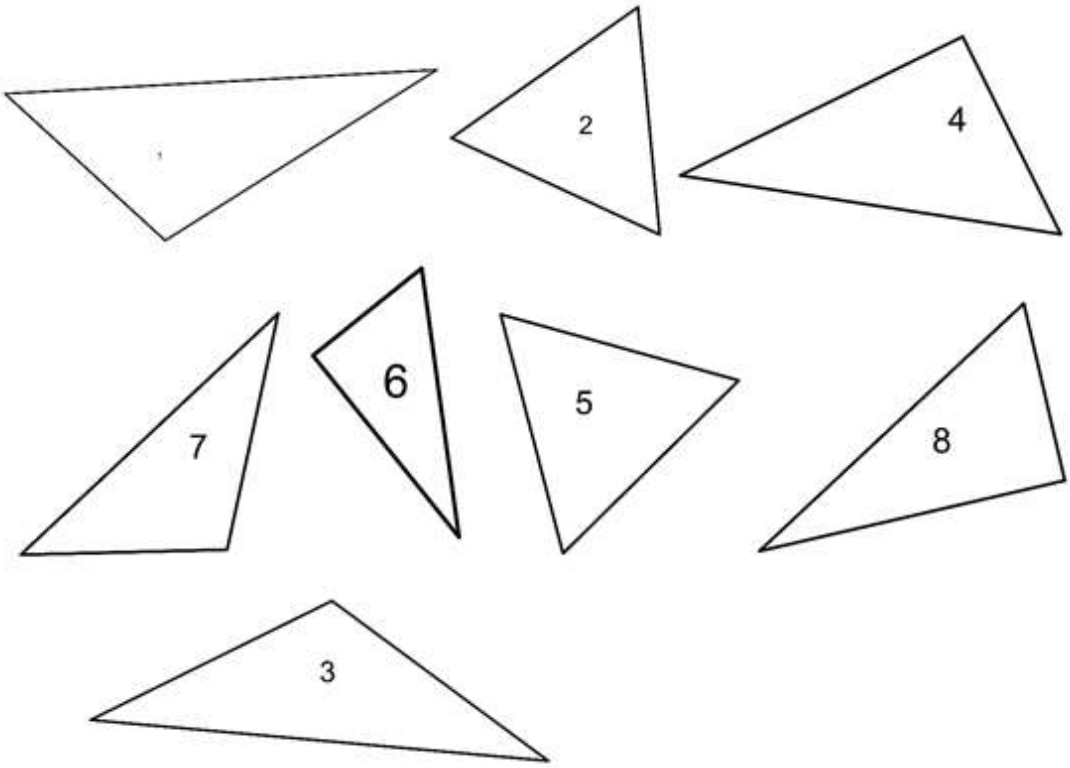
∢A: ___ ∢B: ___

∢N: ___ ∢O: ___



∢Q: ___

4. Observe los siguientes triángulos y responda:



T: Triángulo

a. ¿Cuáles triángulos son isósceles?

T 1	T 2	T 3	T 4	T 5	T 6	T 7	T 8

¿Por qué?_____
_____
_____

b. ¿Cuáles triángulos son escalenos?

T 1	T 2	T 3	T 4	T 5	T 6	T 7	T 8

¿Por qué?_____
_____
_____

c. ¿Cuáles triángulos son equiláteros?

T 1	T 2	T 3	T 4	T 5	T 6	T 7	T 8

¿Por qué?_____
_____
_____

¿Cuáles triángulos son rectángulos?

T 1	T 2	T 3	T 4	T 5	T 6	T 7	T 8

¿Por qué?_____
_____
_____

d. ¿Cuáles triángulos son obtusángulos?

T 1	T 2	T 3	T 4	T 5	T 6	T 7	T 8

¿Por qué?_____
_____
_____

e. ¿Cuáles triángulos son acutángulos?

T 1	T 2	T 3	T 4	T 5	T 6	T 7	T 8

¿Por qué?_____
_____
_____

5. Responda:

a. ¿Puede ser un triángulo a la vez rectángulo e isósceles? ¿Por qué? Dibuje uno.

_____
_____
_____
_____

b. ¿Puede ser un triángulo a la vez escaleno y obtusángulo? ¿Por qué? Dibuje uno.

_____
_____
_____
_____

c. ¿Puede ser un triángulo a la vez rectángulo y escaleno? ¿Por qué? Dibuje uno.

_____
_____
_____
_____

d. ¿Puede ser un triángulo a la vez equilátero y rectángulo? ¿Por qué? Dibuje uno.

_____
_____
_____
_____

6. Dadas las siguientes ternas de longitudes de triángulos, determine si con esas longitudes se puede formar un triángulo y explique por qué si o por qué no se puede.

a. p= 2cm, q= 4cm, r= 7 cm

b. p= 3cm, q= 4cm, r= 6 cm

¿CUÁNTO MIDEN LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN TRIÁNGULO?

1. Utiliza la herramienta geogebra y construye tres triángulos, selecciona un vértice en cada triángulo y luego señala el lado opuesto a ese vértice escogido. Luego de construir los triángulos y seleccionar los lados opuestos a los vértices escogidos responde:

A. ¿Qué es un triángulo? ¿Qué características tiene? Justifica tu respuesta.

B. ¿Cuáles son los elementos del triángulo y qué características tiene cada uno? Presenta tus argumentos.

_____
_____
_____
_____

C. Menciona cada uno de los ángulos de los triángulos y nombra cuál es su lado opuesto.

TRIÀNGULO 1		TRIÁNGULO 2		TRIÁNGULO 3	
ÁNGULO	LADO OPUESTO	ÁNGULO	LADO OPUESTO	ÁNGULO	LADO OPUESTO

D. ¿Por qué escogiste ese lado como opuesto al ángulo y no otro? Justifica tu respuesta.

_____
_____
_____
_____

1. Completa la siguiente tabla nombrando los lados y ángulos de cada uno de los triángulos y escribiendo su longitud y su amplitud respectivamente

TRIÁNGULO	LADO 1	LADO 2	LADO 3
TRIÁNGULO	ÁNGULO 1	ÁNGULO 2	ÁNGULO 3

Luego de completar la tabla responde:

a) Si sumas los ángulos internos de cada uno de los triángulos: ¿Cuál es el resultado? ¿Por qué sucede esto? Justifica tu respuesta.

_____

_____

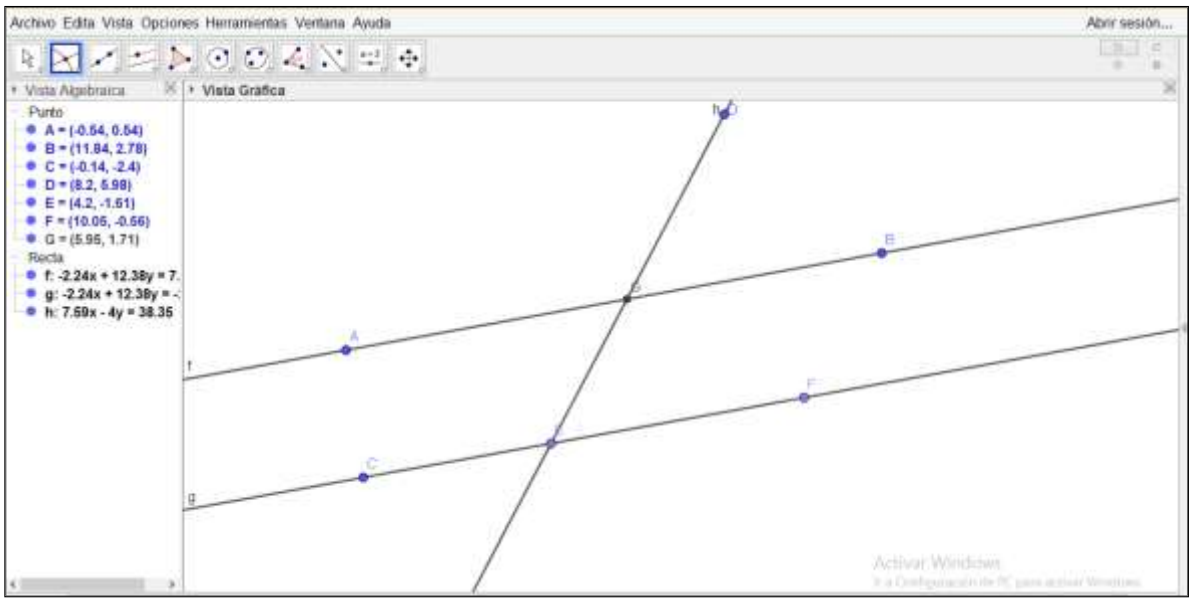
_____

b) Si construyes otro triángulo de longitudes aleatorias junto a los que construiste inicialmente y mides sus ángulos interiores, ¿Cuánto da la suma de ellos? ¿A qué conclusión llegas? Justifica tu respuesta.

_____

_____

_____



3. Observa en la pantalla del computador la siguiente imagen

b) Encuentra un par de ángulos alternos – internos, márcalos en el geogebra y escribe los datos en la siguiente tabla:

ÁNGULOS ALTERNOS – INTERNOS		
Opción	Nombre de los ángulos	Medidas de los ángulos
1		
2		

c) ¿Qué entiendes por ángulos alternos – internos? Justifica tu respuesta.

_____

_____

_____

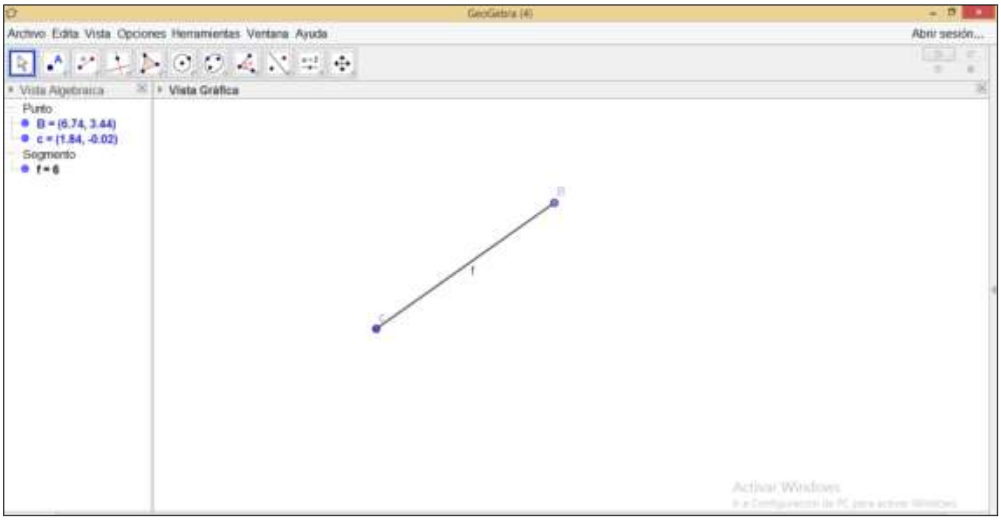
d) ¿Podríamos considerar los ángulos ACE y CAD como ángulos alternos – internos? ¿Por qué? Presenta tus argumentos.

_____

_____

_____

4. Un triángulo tiene un lado CB que mide 6 cm. El ángulo ACB mide 70º y el ángulo ABC mide 50º. ¿Cuántos triángulos distintos que cumplan esta condición pueden construirse? Utiliza la herramienta GeoGebra para resolver el problema.



Los estudiantes inicialmente contestarán las siguientes preguntas, que darán cuenta del nivel de habilidades comunicativas:

a) ¿Qué estrategia piensas utilizar para construir el triángulo con las especificaciones que te piden? Explica tu estrategia.

_____

_____

_____

_____

b) ¿Al sumar los ángulos internos de un triángulo, la suma puede dar como resultado más o menos de 180º? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.

_____

_____

_____

c) ¿La suma de los ángulos internos de un triángulo se modifica con los valores de la longitud de los lados de esta figura? ¿Por qué? Presenta tus argumentos.

_____

_____

_____

5. Explica ante tus compañeros la estrategia que empleaste para resolver el problema

_____

_____

_____

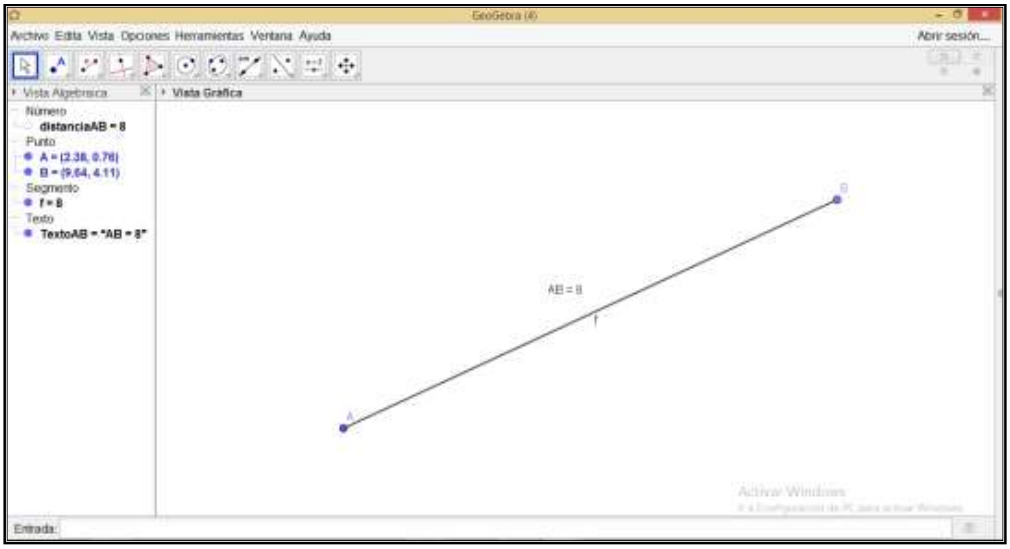
6. ¿Cómo garantizaste las medidas que te pedían de los ángulos del triángulo? Justifica tu respuesta.

_____

_____

_____

7. El lado AB del triángulo ABC mide 8cm como se ve en la imagen. Verifique con ayuda del software cuantos triángulos se pueden construir con esta condición y compruebe si la sumatoria de las medidas de los ángulos da como resultado 180º.



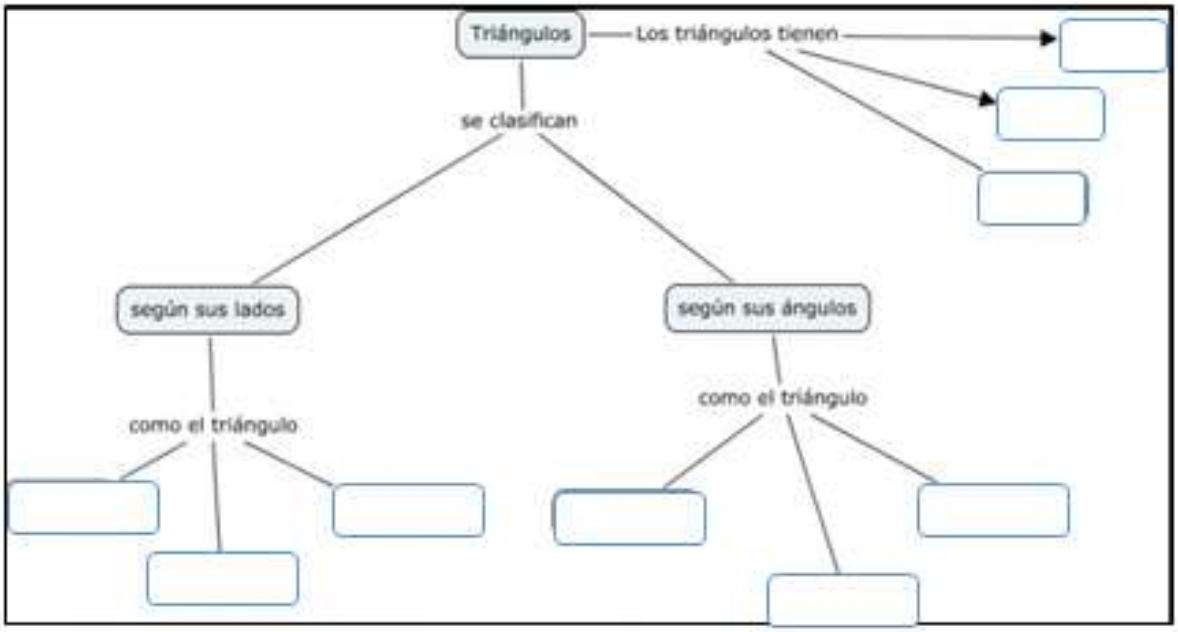
A. ¿De qué manera solucionó el problema planteado? Justifique su respuesta.

_____

_____

_____

8. Se propuso para esta etapa la recopilación de la información en la siguiente tabla



Los triángulos se clasifican según la longitud de sus lados en

_ Escalenos, isósceles y equiláteros

_ Acutángulos, obstusángulos y rectángulos

_ Isósceles, acutángulos y escalenos

Los triángulos se clasifican según sus ángulos en:

_ Escalenos, isósceles y equiláteros

_ Isósceles, acutángulos y escalenos

_ Rectángulos, acutángulos y obtusángulos

En cada afirmación marque F (falso) o V (verdadero) Justifique cuando la afirmación se a falsa.

AFIRMACIÓN	F	V	JUSTIFICACIÓN
A. La suma de los ángulos interiores de un triángulo depende de la longitud de los lados del mismo.			
B. En cualquier caso la suma de los ángulos interiores de un triángulo da como resultado 180º			
C. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a otro triángulo, entonces los terceros triángulos también son congruentes.			

¿PODEMOS CONSTRUIR CUALQUIER TRIÁNGULO?

2. Utiliza la herramienta GeoGebra y construye un triángulo con las medidas que quieras. Luego, construye un triángulo FGH cuyas medias sean 6cm, 5cm y 8 cm

- Si sumas dos lados de tu triángulo, ¿cómo es este resultado con respecto al lado restante?

_____
_____
_____

- Ahora toma dos lados del triángulo FGH y súmalos. ¿Cómo se relaciona este resultado con respecto al lado restante? ¿Por qué ocurre esto? Presenta tus argumentos.

_____
_____
_____

3. Construye en el software un triángulo equilátero, un escaleno y un isósceles y responde las preguntas, presentando tus argumentos:

a) ¿Qué características tiene cada uno de ellos con respecto a la longitud de sus lados?

b) Un triángulo equilátero, ¿puede ser isósceles?

4. Construye, si es posible, un triángulo cuyos lados miden 6 cm, 5 cm y 4 cm. ¿Cuántos triángulos distintos que cumplan esta condición pueden construirse?

a) Explica ante tus compañeros la estrategia que empleaste para resolver el problema

_____

_____

_____

b) ¿Qué ocurre con las longitudes de los lados si efectúas la prueba del arrastre? Explica

---

c) ¿Cuántos triángulos con esas especificaciones puedes construir? Justifica tu respuesta.

_____

c) ¿Es posible construir al menos otro triángulo con las mismas longitudes pero con ángulos distintos a los que construiste? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.

_____

_____

_____

5. Los puntos A y B están a 7 cm y son dos de los vértices de un triángulo. Encuentra un punto C que esté a 3 cm de A y a 5 cm de B. Construye el triángulo.

c) ¿Esta figura es única? ¿Por qué? Argumenta

d) Explica detalladamente como resolviste el problema

6. Discute con tus compañeros si la afirmación es verdadera o falsa en cada caso. Justifica tu respuesta en cada caso.

c) Todos los triángulos equiláteros son isósceles. ( )

_____

_____

d) En los triángulos equiláteros se cumple la propiedad de la desigualdad triangular ( )

_____

_____

_____

Anexo B. Carta aval rectora

CARTA AVAL: MAESTRÍAS DE PROFUNDIZACIÓN

San Gil, Abril de 2016

Profesores
COMITÉ ASESOR DE PROGRAMAS DE POSGRADO
Escuela de Pedagogía
Universidad Industrial de Santander
Presente

Referencia: Carta de aval del aspirante a cursar estudios de maestría en Pedagogía.
Yamile Zambrano Delgado

Estimados profesores,

De acuerdo a lo establecido en el literal m) del ARTÍCULO 87 del Reglamento General de Posgrado (RGP) y como representante legal de Colegio Luis Camacho Rueda, me permito indicar que contamos con la disposición para que Yamile Zambrano Delgado, identificado(a) con Cédula No. 37894057 expedida en San Gil, pueda plantear su trabajo de aplicación resolviendo un problema de interés para nuestra entidad en caso de ser admitido al programa de Maestría en Pedagogía de la Escuela de Educación.

En nombre de Colegio Luis Camacho Rueda a quien represento, agradezco de manera especial la consideración del aspirante avalado. Quedo atento a cualquier requisición en caso de ser necesaria cualquier aclaración o información adicional.

Cordial saludo,

Representante legal Colegio Luis Camacho Rueda de San Gil

Acompañan la presentación del aspirante, asumiendo los compromisos establecidos en el Parágrafo 2 del ARTÍCULO 18 del Reglamento General de Posgrado de la Universidad Industrial de Santander.

Director(a)

Director(a) del Trabajo de Aplicación del Aspirante

Codirector(a) del Trabajo de Aplicación del Aspirante

Anexo C. Formato consentimiento informado de los estudiantes

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS ESCUELA DE EDUCACION
MAESTRIA EN PEDAGOGIA

ASENTAMIENTO INFORMADO DE LOS ESTUDIANTES

Acepto participar voluntariamente en esta investigación, dirigida por YAMILE ZAMBRANO DELGADO. He sido informado (a) de que el objetivo principal de este estudio es Desarrollar habilidades en el proceso de comunicación matemática a través de la incorporación de software dinámico de geometría en los estudiantes del grado sexto del Colegio Luis Camacho Rueda.

Me han indicado también que tendré que responder un cuestionario con algunas preguntas en una encuesta , aplicación de una prueba diagnóstica y análisis de documentos presentados por los estudiantes, lo cual no tomará muchos minutos de mi.

Reconozco que la información que yo provea en el curso de esta investigación es estrictamente confidencial y no será usada para ningún otro propósito fuera de los de este estudio sin mi consentimiento. He sido informado de que puedo hacer preguntas sobre el proyecto en cualquier momento, sin que esto acarree perjuicio alguno para mi persona. De tener preguntas sobre mi participación en este estudio, puedo realizar contacto con quien lo dirige al correo _____ (correo del estudiante).

_____

Firma del Participante

Fecha

_____ _____

Firma del Padre de Familia

_____

Anexo D. Formato consentimiento informado padres de familia

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS ESCUELA DE EDUCACION
MAESTRIA EN PEDAGOGIA

ASENTAMIENTO INFORMADO DE LOS ESTUDIANTES

Acepto participar voluntariamente en esta investigación, dirigida por YAMILE ZAMBRANO DELGADO. He sido informado (a) de que el objetivo principal de este estudio es Desarrollar habilidades en el proceso de comunicación matemática a través de la incorporación de software dinámico de geometría en los estudiantes del grado sexto del Colegio Luis Camacho Rueda.

Me han indicado también que tendré que responder un cuestionario con algunas preguntas en una encuesta , aplicación de una prueba diagnóstica y análisis de documentos presentados por los estudiantes, lo cual no tomará muchos minutos de mi.

Reconozco que la información que yo provea en el curso de esta investigación es estrictamente confidencial y no será usada para ningún otro propósito fuera de los de este estudio sin mi consentimiento. He sido informado de que puedo hacer preguntas sobre el proyecto en cualquier momento, sin que esto acarree perjuicio alguno para mi persona. De tener preguntas sobre mi participación en este estudio, puedo realizar contacto con quien lo dirige al correo _____ (correo del estudiante).

Firma del Participante: Sintya Valentina Lizarazo

Fecha: Sep 8 2017

Firma del Padre de Familia: Aurora Duran

Anexo E. Carta de Aval director del proyecto

Bucaramanga, 27 de octubre de 2017

Señores
COMITÉ DE POSGRADO
Escuela de Educación
Maestría en Pedagogía
Universidad Industrial de Santander

Apreciados Señores:

De manera atenta me permito hacer entrega del Trabajo de Grado titulado USO DEL SOFTWARE DE GEOMETRIA DINAMICA PARA EL DESARROLLO DE PROCESOS COMUNICATIVOS, elaborado por el estudiante YAMILE ZAMBRANO DELGADO, con el fin de que sea enviado a evaluadores.

Gracias por su atención.

Atentamente,

JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL
Director del Proyecto

Anexo F. Certificado

Certificado de finalización

La Oficina para Investigaciones Extrainstitucionales de los Institutos Nacionales de Salud (NIH) certifica que **YAMILE ZAMBRANO DELGADO** ha finalizado con éxito el curso de capacitación de NIH a través de Internet "Protección de los participantes humanos de la investigación".

Fecha de finalización: 05/26/2017

Número de certificación: 383751