

ESTUDIO TEÓRICO DE LA GENERACIÓN DEL WAKEFIELD POR
MICROONDAS EN UNA GUÍA DE ONDA RECTANGULAR

YENSUR HARVEY CAMACHO HERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2018

**ESTUDIO TEÓRICO DE LA GENERACIÓN DEL WAKEFIELD POR
MICROONDAS EN UNA GUÍA DE ONDA RECTANGULAR**

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

FÍSICO

YENSUR HARVEY CAMACHO HERNÁNDEZ

DIRECTOR: EDUARDO ALBERTO OROZCO OSPINO, Ph.D

CODIRECTOR: ANA MARÍA HERRERA RODRÍGUEZ, M.Sc

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2018

*“A todas las personas que han contribuido
a mi formación personal y académica”*

AGRADECIMIENTOS

Al Doctor Eduardo Orozco, por toda su colaboración y orientación durante el desarrollo del trabajo y por introducirme al fascinante mundo de la física del plasma.

A la Magister y estudiante de Doctorado Ana María Herrera, por sus valiosas correcciones y recomendaciones en el desarrollo del proyecto.

A Tata, por su amor, apoyo y paciencia incondicionales a lo largo de estos años.

A mi familia, por apoyarme en este camino a pesar de resultar más largo de lo habitual. En especial a mi madre, cuyo temple siempre ha sido una cualidad motivante.

A todos mis amigos y compañeros, quienes han contribuido en un alto grado a mi formación personal y académica.

A todas las personas que olvidé mencionar y me han compartido su conocimiento.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	16
1. ACELERACIÓN DE PARTÍCULAS CARGADAS CON PLASMA	19
1.1. Plasma	20
1.2. Fuerza ponderomotriz	22
1.3. Aceleración wakefield	23
1.3.1. Generación del wakefield	25
1.3.2. Inyección de las partículas	28
1.3.3. Aceleración	28
1.3.4. Extracción	29
1.4. Ruptura de onda	29
1.5. Efectos no-lineales y multidimensionales	31
1.5.1. Efectos no-lineales	31
1.5.2. Efectos tridimensionales	32
1.5.3. Evolución del forzador	33
2. DEL LÁSER A LAS MICROONDAS	34

ÍNDICE GENERAL	8
2.1. El plasma	35
2.2. La guía de onda	35
2.3. El pulso de microondas	36
3. WAKEFIELD GENERADO POR MICROONDAS EN UNA GUÍA DE ONDA METÁLICA RECTANGULAR	40
3.1. Ecuación diferencial del wake	40
3.2. Análisis de la ecuación diferencial	42
3.3. Solución analítica	45
3.4. Solución numérica	45
4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	47
4.1. Wake, wakefield y densidad electrónica generados	47
4.2. Energía ganada por un electrón	56
4.3. Restricciones del modelo	58
4.4. Notas finales	58
5. CONCLUSIONES	60

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1. Aceleración de electrones en plasma.	19
Figura 1.2. (a) Plasma parcialmente ionizado, (b) Fenómenos en que el plasma está presente natural y artificialmente: nebulosa, viento solar, aurora boreal, el sol, relámpago, fusión por confinamiento inercial, bola de plasma, flamas y aviso de neón.	20
Figura 1.3. Apantallamiento del potencial eléctrico producido por una carga eléctrica en un plasma respecto al potencial producido por la misma carga en el vacío.	22
Figura 1.4. Efecto de la fuerza ponderomotriz de un pulso electromagnético sobre los electrones.	23
Figura 1.5. Aceleración wakefield láser (LWFA) en 2D.	24
Figura 1.6. (a) Acelerador wakefield láser (LWFA), acelerador wakefield plasma (PWFA), (b) Acelerador láser beat-wave (LBWA), (c) Acelerador wakefield láser auto-modulado (SM-LWFA), (d) Esquemas multipulso.	25
Figura 1.7. Ruptura de onda de una ola en el mar.	30
Figura 1.8. Formas de la solución para el wakefield en el régimen no-lineal. (a) Pulso, (b) Wake, (c) Wakefield y (d) Concentración electrónica.	32
Figura 1.9. Wakefield generado por un pulso láser en 2D. (a) Campo eléctrico longitudinal E_l , (b) Campo eléctrico transversal E_t . La línea punteada roja representa un perfil de los campos E_l y E_t	33
Figura 2.1. Componentes de campo eléctrico transversal de los modos (a) TE_{10} , (b) TE_{11} , (c) TM_{11} y (d) TE_{20}	37

Figura 2.2. Componente longitudinal del campo eléctrico del modo TM_{11}	38
Figura 3.1. Perfiles de pulso utilizados para resolver la ecuación del wake (a) Gaussiano, (b) Senoidal y (c) Rectangular-triangular (RT).	44
Figura 4.1. Resultados obtenidos con los parámetros $f = 8$ [GHz], $\tau = 0,8$ [ns], $I_0 = 0,5$ [W/m ²], $b = 0,03$ [m] y $\omega_p = 2\pi/\tau$ ($n_0 = 1,94 \times 10^{16}$ [m ⁻³]). (a) Wake, (b) Wakefield y (c) Perturbaciones de la concentración electrónica.	48
Figura 4.2. Wakefield generado por el pulso (a) Senoidal y (b) Rectangular triangular para los mismos parámetros de la Figura 4.1	49
Figura 4.3. Amplitud vs frecuencia para los pulsos gaussiano (rojo), senoidal (verde) y rectangular-triangular (azul). (a) Wake, (b) Wakefield, (c) Densidad electrónica y (d) Velocidad de grupo.	50
Figura 4.4. Amplitud vs ancho de la guía de onda para los pulsos gaussiano (rojo), senoidal (verde) y rectangular-triangular (azul). (a) Wake, (b) Wakefield, (c) Densidad electrónica y (d) Velocidad de grupo.	51
Figura 4.5. Amplitud vs densidad plásmica para los pulsos gaussiano (rojo), senoidal (verde) y rectangular-triangular (azul). (a) Wake, (b) Wakefield, (c) Densidad electrónica y (d) Velocidad de grupo.	52
Figura 4.6. Amplitud vs intensidad para los pulsos gaussiano (rojo), senoidal (verde) y rectangular-triangular (azul). (a) Wake, (b) Wakefield, (c) Densidad electrónica y (d) Velocidad de grupo.	53
Figura 4.7. Amplitud vs duración del pulso para los pulsos gaussiano (rojo), senoidal (verde) y rectangular-triangular (azul). (a) Wake, (b) Wakefield, (c) Densidad electrónica y (d) Velocidad de grupo.	54
Figura 4.8. Wakefield generado por el pulso senoidal para los parámetros $f = 8$ [GHz], $I_0 = 0,25$ [W/m ²], $b = 0,03$ [m], $n_0 = 1,8 \times 10^{16}$ [m ⁻³] y (a) $\tau = 0,5824$ [ns], (b) $\tau = 1,676$ [ns] y (c) $\tau = 2,600$ [ns].	55
Figura 4.9. Onda plásmica generada para los parámetros $f = 12$ [GHz], $b = 0,04$ [m], $I_0 = 0,5$ [GW/m ²], $\tau = 0,8$ [ns] (correspondiente concentración plásmica $n_0 = 1,94$ [m ⁻³]).	56

Figura A.1. (a) Envolvente de un pulso gaussiano con amplitud $E_0 = 1 \times 10^6$ [MV/m] y frecuencia $f = 10$ [GHz], (b) Potencial ponderomotriz del pulso gaussiano sobre un electrón y un protón.	73
Figura C.1. Comparación de las soluciones numéricas respecto a la solución exacta. (a) Posición, (b) Velocidad.	81
Figura C.2. Errores absolutos en la posición para los datos I , II y IV de la Tabla C.1.	82
Figura C.3. Errores porcentuales en la posición para los datos I , II y IV de la Tabla C.1. (a) Escalas completas, (b) Zoom a las escalas verticales.	83
Figura C.4. Resultados numéricos del método RKF45 utilizando flag=-1 y flag=-2 en el intervalo de $t = 0$ a $t = 20$ (parámetros V y VI en la Tabla C.1). (a) Posición, (b) Errores absolutos en la posición.	84
Figura C.5. Comparación de errores absolutos en el intervalo de $t = 1990$ a $t = 2000$ (parámetros V y VI en la Tabla C.1).	85
Figura C.6. Comparación de errores absolutos entre RK4 y RKF45 (parámetros III , V y VI en la Tabla C.1). (a) RK4 con $h = 10^{-4}$, (b) RKF45 con flag=-1 y flag=-2.	86

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla C.1. Conjunto de parámetros para resolver numéricamente la ecuación (C.1)	81
--	----

LISTA DE ANEXOS

A. FUERZA PONDEROMOTRIZ	68
B. ALGORITMO RKF45	74
C. VALIDACIÓN DE LOS CÓDIGOS COMPUTACIONALES	79

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO TEÓRICO DE LA GENERACIÓN DEL WAKEFIELD POR MICROONDAS EN UNA GUÍA DE ONDA RECTANGULAR*

AUTOR: Yensur Harvey Camacho Hernández**

PALABRAS CLAVE: Onda plásmica, wake, wakefield, microondas, guía de onda.

DESCRIPCIÓN:

Se presenta un estudio teórico-computacional de la viabilidad del uso de pulsos de microondas para excitar ondas plásmicas de gran amplitud en un plasma al interior de una guía de onda metálica rectangular. El campo electrostático asociado a esta onda (*wakefield*) permite acelerar partículas cargadas hasta altas energías en cortas distancias usando un método denominado *aceleración wakefield*, propuesto originalmente con el uso de láseres de alta intensidad en plasmas de alta densidad.

Se revisa la teoría relacionada a la aceleración wakefield impulsada por láser y su adaptación al uso de microondas y guías de onda. Se analiza la viabilidad de los modos TE_{mn} y TM_{mn} para la excitación de la onda plásmica y el efecto de la guía de onda sobre la velocidad de grupo del pulso. Además, se establecen las ventajas, desventajas y posibles aplicaciones del uso de microondas para excitar el wakefield.

Adicionalmente, se utiliza un modelo no relativista que describe el *wake* (potencial asociado al wakefield) generado por un pulso de microondas que se propaga en un *plasma de baja densidad* al interior de la guía de onda excitando el modo TE_{10} para estudiar el wakefield generado. El modelo fue propuesto por *Aria y Malik* [1]. Asimismo, se calculan las perturbaciones de la densidad electrónica y el campo máximo soportado por la onda plásmica, estableciendo dos criterios para limitar el rango de validez del modelo. Además, se calcula la amplitud del wakefield en función de la frecuencia de microondas f , el ancho de la guía b , la densidad del plasma n_0 y la duración τ e intensidad del pulso I_0 . Finalmente, se realiza una estimación de la energía máxima ganada por un electrón acelerado en el wakefield generado al optimizar los parámetros del sistema para obtener una velocidad de grupo alta.

*Trabajo de grado

**Grupo de investigación en física y tecnología del plasma y corrosión (FITEK). Escuela de física. Facultad de ciencias. Director: Eduardo Alberto Orozco Ospino, Ph.D. Codirector: Ana María Herrera Rodríguez, M.Sc.

ABSTRACT

TITLE: THEORETICAL STUDY OF WAKEFIELD GENERATION BY MICROWAVES IN A RECTANGULAR WAVEGUIDE*

AUTHOR: Yensur Harvey Camacho Hernández**

KEY WORDS: Plasma wave, wake, wakefield, microwaves, waveguide.

DESCRIPTION:

A theoretical-computational study of the feasibility of using microwaves pulses to excite large amplitude plasma waves in a plasma filling a rectangular metallic waveguide is presented. The longitudinal electrostatic field associated with this wave (*wakefield*) allows the acceleration of charged particles up to high energies over short distances using a method so-called *wakefield acceleration*, originally proposed with the use of high intensity lasers in high density plasmas.

The theory related to laser-driven wakefield acceleration and its adaptation to the use of microwaves and waveguides is reviewed. The feasibility of the TE_{mn} and TM_{mn} modes for plasma wave excitation and the effect of the waveguide on the pulse group velocity are analysed. Furthermore, the advantages, disadvantages and possible applications of using microwaves to excite the wakefield are established.

In addition, a non-relativistic model that describes the *wake* (potential associated with the wakefield) generated by a microwave pulse that propagates in a *low-density plasma* inside the waveguide exciting the TE_{10} mode is used to study the generated wakefield. The model was proposed by *Aria* and *Malik* [1]. The electron density perturbations and the maximum field supported by the plasma wave are also calculated, which establishes two criteria to limit the validity range of the model. Moreover, the amplitude of the wakefield is calculated as a function of the microwave frequency f , the width of the waveguide b , the plasma density n_0 , the pulse duration τ and the pulse intensity I_0 . Finally, an estimate is made of the maximum energy gained by an accelerated electron in the wakefield generated by optimizing the system parameters to obtain a high group velocity.

*Degree work

**Research group in physics and technology of plasma and corrosion (FITEK). School of physics. Faculty of Science. Director: Eduardo Alberto Orozco Ospino, Ph.D. Co-director: Ana María Herrera Rodríguez, M.Sc.

INTRODUCCIÓN

En 1979, los investigadores *T. Tajima* y *J. M. Dawson* propusieron un novedoso mecanismo de aceleración de partículas cargadas, en el que un pulso láser corto ($L = \lambda_p/2$, donde λ_p representa la longitud de onda plásmica electrónica) de alta intensidad incide sobre un plasma [2]. La fuerza ponderomotriz del pulso expulsa los electrones hacia las zonas de menor intensidad, generando una perturbación en la concentración electrónica y, consecuentemente, en el potencial (wake) y campo eléctrico (wakefield). El pulso transfiere energía y momentum a los electrones, lo cual, combinado con la inercia, permite la generación de oscilaciones plásmicas que dan origen a una onda plásmica electrónica. Esta onda actúa como un tren de pozos de potencial de gran amplitud que se propaga a la velocidad de grupo del pulso láser, de tal forma que un haz cargado inyectado con la energía y fase apropiadas puede ser capturado y acelerado hasta energías relativistas en cortas distancias. Este esquema de aceleración se denomina *laser wakefield accelerator (LWFA)*.

El interés en este mecanismo incrementó con la invención y desarrollo de los pulsos láser ultra cortos de alta potencia. En particular, la técnica *chirped pulse amplification* (CPA) desarrollada por *Strickland* y coinvestigadores (1985) aportó la tecnología para crear fuentes láser compactas capaces de generar pulsos ultra cortos de alta potencia, necesarios para la generación de ondas plásmicas de gran amplitud que permitan la aceleración eficiente de partículas cargadas [3–5].

Se ha demostrado que el wakefield en un plasma puede ser generado principalmente de dos formas: con la fuerza ponderomotriz de un pulso láser o el efecto de carga espacial de un haz de partículas cargadas [6, 7]. Con base en estos esquemas varios mecanismos de aceleración han sido propuestos, de los cuales los más ampliamente desarrollados son: *laser beat-wave accelerator (LBWA)*, en el que dos pulsos, cuya diferencia de frecuencia coincide con la frecuencia plásmica electrónica, se superponen para generar resonantemente el wakefield mediante los batidos de longitud λ_p [2], *self-modulated laser wakefield accelerator (SM-LWFA)* donde un pulso largo ($L > \lambda_p$) es auto-modulado en un tren de pulsos más cortos de longitud λ_p debido a una inestabilidad de la interacción láser-plasma denominada *auto-modulación*. Los pulsos cortos excitan resonantemente una onda plásmica de gran amplitud [8, 9]. *Chen* y colaboradores (1985) propusieron el mecanismo *plasma wakefield accelerator (PWFA)* y desarrollaron la teoría en el régimen lineal [10]. En este esquema, la separación de carga que origina la onda plásmica es

generada por el efecto de la carga espacial de un haz cargado que atraviesa el plasma a alta velocidad.

La ventaja fundamental de estos mecanismos es que al usar el plasma como medio acelerador, no están sometidos a las limitaciones de los costosos y gigantescos aceleradores lineales (LINACS) usados hace décadas a nivel mundial. La onda plásmica puede soportar campos eléctricos hasta tres órdenes de magnitud mayores que los campos eléctricos soportados por las cavidades metálicas, lo cual reduce significativamente la distancia necesaria para acelerar un haz cargado hasta una energía dada. Además, en el proceso se convierte el campo eléctrico transversal del pulso láser a un campo electrostático longitudinal de gran amplitud. Por esta razón, el esquema LWFA y sus derivados prometen hacer posibles tecnológicamente los aceleradores de partículas cargadas compactos de alta energía.

Los avances en esta tecnología han sido lentos, aunque en la última década se ha logrado extender la distancia de aceleración, la ganancia de energía ha alcanzado el orden de los GeV y la estabilidad del haz acelerado ha aumentado gracias a la implementación de diversas técnicas de focalización. En 1998, *Amiranoff* y su equipo de trabajo reportaron la primera observación de electrones acelerados usando el esquema LWFA, alcanzando una energía de 1,6 MeV con un campo eléctrico de 1,5 GV/m [11] (reportes previos de electrones acelerados como efecto secundario en interacciones láser-plasma habían sido atribuidos a este mecanismo [12]). Usando un acelerador PWFA de 85 cm de longitud efectiva, *Blumenfeld* y coinvestigadores duplicaron la energía de un pequeño grupo de electrones de la parte trasera del haz forzador (42 GeV), igualando la energía ganada en un LINAC de 3 km en el Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) [13]. *Clayton* y colaboradores usaron la técnica de ionización inducida (CO₂ al 3% y He al 97%) para acelerar electrones de la capa K del oxígeno hasta 1,45 GeV en una distancia de tan sólo 1,3 cm con un acelerador impulsado por un pulso láser (LWFA) [14]. En 2016, el equipo de trabajo de *Litos* reportó una ganancia máxima de energía de 9 GeV con baja dispersión ($\sim 5\%RMS$) en un haz de electrones de 28,3 pC. El acelerador, de 1,3 m de longitud, utilizó un esquema de doble haz, el primero funcionó como impulsor para generar el wakefield y el segundo se inyectó con el retardo adecuado para su captura y aceleración (PWFA), además, demostraron que sus datos concuerdan con el escalado de experimentos previos [15].

El uso de láseres de alta potencia en la aceleración de partículas con plasma requiere instrumentación altamente sofisticada, y por ende, costosa para la implementación eficiente. En consecuencia, la factibilidad tecnológica para potenciales aplicaciones, no sólo depende de optimizar la calidad del haz acelerado, también es necesario hacer económicamente viable la construcción del acelerador. Con este enfoque, recientemente se han realizado múltiples estudios acerca de la aceleración de partículas cargadas con microondas en guías de onda llenas con plasma, con geometría rectangular [1, 16–22], cilíndrica [23, 24] y elíptica [25–27]. Sin embargo, estos estudios son principalmente analíticos con soluciones numéricas, los experimentos realizados utilizan guías de onda con haces impulsores para generar el wakefield como alternativa a las microondas [28, 29]. En 2017,

Bliokh y coinvestigadores realizaron un estudio teórico-computacional de la generación del wakefield por microondas en una guía de onda metálica circular llena con plasma y proyectaron la realización de un experimento con las mismas características [30]. En el marco de este proyecto también presentaron una fuente de pulsos cortos de microondas de alta potencia ($P \simeq 550$ MV, $\tau \simeq 0,5$ ns, $f \simeq 9,6$ GHz) [31].

Las microondas fueron consideradas desde los primeros años posteriores a la proposición del método, aunque se descartaron rápidamente por la falta de fuentes de alta potencia [32]. No obstante, el uso de guías de onda resuelve el problema de confinar la energía electromagnética en un área fija. En el caso de los pulsos láser, el área de enfoque (spot) se incrementa a medida que el pulso se propaga en el plasma debido a la difracción, lo que limita la distancia efectiva de aceleración. Además, dado que la frecuencia del pulso debe ser mayor que la frecuencia plásmica para que haya propagación, las microondas requieren un plasma de baja densidad, lo que extiende la duración del pulso necesaria para satisfacer la condición de resonancia alrededor de mil veces respecto al esquema LWFA. Este incremento permitiría la realización y diagnóstico de experimentos con el uso de tecnología menos sofisticada.

CAPÍTULO 1

ACELERACIÓN DE PARTÍCULAS CARGADAS CON PLASMA

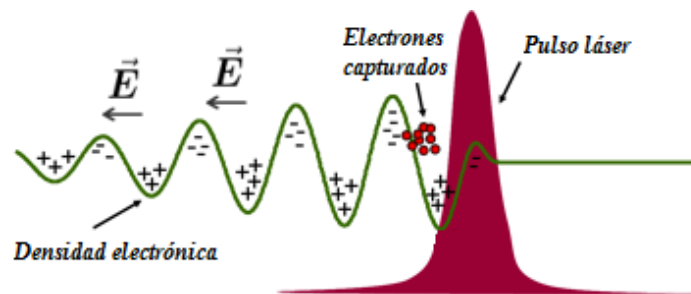


Figura 1.1: Aceleración de electrones en plasma. Imagen modificada de “<https://cuos.engin.umich.edu/researchgroups/hfs/research/laser-wakefield-acceleration/>”.

Alrededor del 99% de la materia conocida en el universo se encuentra en estado de plasma. Las nebulosas, el espacio interestelar, el viento solar, las estrellas, entre muchos otros objetos astronómicos se encuentran en este estado. La energía solar que recibimos a diario tiene su origen en reacciones termonucleares en el plasma que compone nuestro sol. En contraste, los plasmas también pueden ser creados artificialmente en la tierra al ionizar un gas, lo que permite utilizar sus peculiares propiedades en aplicaciones al servicio de la humanidad.

Entre la gran cantidad de propiedades que posee el plasma destaca su capacidad para soportar campos eléctricos de gran amplitud sin sufrir alteraciones significativas además del incremento en el grado de ionización. Explotando esta propiedad, hace alrededor de cuatro décadas se propuso utilizar pulsos láser cortos de alta intensidad para excitar ondas plásmicas de gran amplitud cuyo campo electrostático longitudinal permite ace-

lerar partículas cargadas hasta altas energías en cortas distancias [2]. Este mecanismo se denominó *aceleración plasma wakefield*¹. En las cavidades metálicas, campos eléctricos del orden de 100 [MV/m] generan la ruptura eléctrica de las paredes, por lo cual en los aceleradores convencionales el campo acelerador debe restringirse a valores menores. Por su parte, una onda plásmica puede soportar campos eléctricos del orden de 100 [GV/m] antes de que los efectos altamente no-lineales la destruyan. La ventaja es clara; cuanto mayor es el campo acelerador, menores distancias se necesitan para alcanzar un valor de energía dado. A la fecha, esta área de investigación se encuentra aún en desarrollo, sin embargo, se han producido grandes avances entre los que destaca alcanzar energías del orden de GeV en distancias del orden de centímetros [14], algo imposible con los campos aceleradores de ~ 100 [MV/m] en los aceleradores tradicionales.

1.1 Plasma

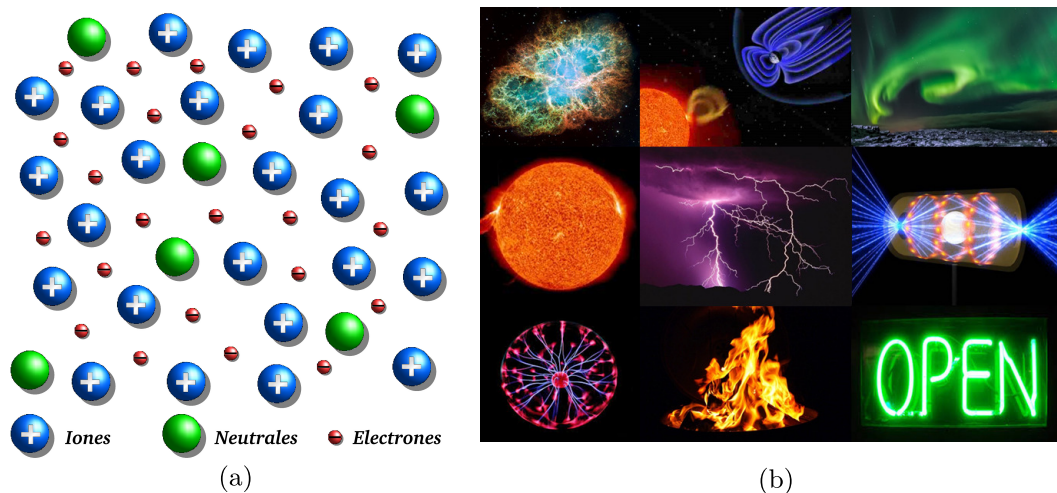


Figura 1.2: (a) Plasma parcialmente ionizado, (b) Fenómenos en que el plasma está presente natural y artificialmente: nebulosa, viento solar, aurora boreal, el sol, relámpago, fusión por confinamiento inercial, bola de plasma, flamas y aviso de neón. Fuente: (b) Imagen modificada a partir de imágenes de uso libre no comercial.

La estructura microscópica de la materia se ordena de acuerdo a una jerarquía en la energía de los enlaces entre sus bloques constituyentes, esto es, moléculas y/o átomos, protones y electrones, etc, lo cual da origen a los estados materiales. Un sólido se genera cuando las moléculas o átomos se encuentran ligados entre sí formando una estructura rígida. Al agregar energía al sistema, típicamente aplicando una diferencia de potencial, aumentando la temperatura o con radiación, los enlaces se debilitan y

¹En algunos estudios el nombre “plasma wakefield” se refiere a aceleradores impulsados por haces cargados. Asimismo, el término “láser wakefield” se usa para aceleradores impulsados por láser.

flexibilizan creando un compuesto en el que los átomos y moléculas se pueden deslizar unos sobre otros, dando origen al estado líquido. Al agregar una cantidad superior de energía al sistema, los enlaces entre moléculas/átomos se rompen para formar el estado gaseoso, en el que cada componente se mueve libremente al interior del recipiente que contiene al gas. La adición de la energía suficiente para arrancarle electrones a una cantidad significativa de átomos genera que el gas se convierta en plasma; un compuesto de iones, electrones libres y átomos neutros. El plasma tiene una dinámica diferente a los gases debido a que está compuesto por una gran cantidad de cargas eléctricas (pese a que globalmente es cuasineutro), lo que pone en primer plano las interacciones electromagnéticas.

El orden jerárquico de energía se extiende hasta los enlaces en el nivel subatómico. Sin embargo, para alcanzar estos niveles se requiere una energía mucho mayor. En este caso, la adición de energía aumenta el grado de ionización al arrancar electrones de las capas más internas de los átomos, de modo que, como se mencionó previamente, el plasma puede soportar campos eléctricos de gran magnitud sin sufrir alteraciones notables.

Las propiedades fundamentales del plasma derivan de la capacidad de un sistema compuesto por cargas eléctricas para producir efectos colectivos. En este sentido, ionizar un gas no es condición suficiente para obtener un plasma. Formalmente, un sistema compuesto por cargas eléctricas positivas y negativas, tales como un gas ionizado parcial o totalmente, se define como plasma cuando satisface dos condiciones: *cuasineutralidad* y *comportamiento colectivo*. Ambas condiciones pueden ser determinadas mediante la longitud de Debye:

$$\lambda_{De} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2}}, \quad (1.1)$$

donde λ_{De} representa la longitud de Debye en la aproximación de iones fijos, ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío, k_B es la constante de Boltzmann y, T_e , n_0 y e son la temperatura, concentración y carga electrónicas, respectivamente.

La longitud de Debye representa la *escala espacial* sobre la cual el potencial eléctrico producido por una carga decae significativamente respecto al potencial que generaría en el vacío. Esto se debe al apantallamiento por la acumulación de cargas de signo opuesto en las cercanías (ver Fig. 1.3).

La cuasineutralidad se satisface cuando el sistema tiene dimensiones mucho mayores que λ_{De} . El comportamiento colectivo se satisface si en la esfera de radio λ_{De} hay una cantidad estadísticamente significativa de partículas, de tal manera que el campo eléctrico de una partícula individual es irrelevante y la dinámica de las cargas se determina por la interacción con el campo colectivo.

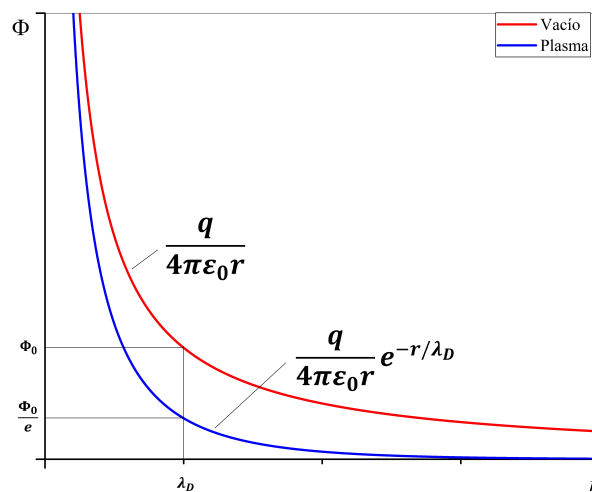


Figura 1.3: Apantallamiento del potencial eléctrico producido por una carga eléctrica en un plasma respecto al potencial producido por la misma carga en el vacío.

Otro parámetro fundamental para caracterizar el plasma es la frecuencia plásmica electrónica, que determina la frecuencia natural de oscilación de los electrones y, en el tema central de este trabajo, también determina la frecuencia de la onda plásmica:

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}, \quad (1.2)$$

donde m_e es la masa del electrón [33].

1.2 Fuerza ponderomotriz

En el contexto de la aceleración de partículas, las ondas plásmicas puede generarse principalmente por dos mecanismos: la carga espacial de un haz impulsor y la fuerza ponderomotriz de un pulso electromagnético corto². La carga espacial se puede obtener de la ecuación de Poisson al introducir la densidad de carga del haz impulsor. Sin embargo, este trabajo se centra en las ondas plásmicas producidas por pulsos electromagnéticos, por lo cual nos enfocamos en la fuerza ponderomotriz.

El estudio de la dinámica de partículas cargadas en presencia de un campo electromagnético no homogéneo que varía armónicamente en el tiempo, $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos \omega t$, permite obtener la expresión de la fuerza ponderomotriz en el caso no relativista (ver Apéndice A)

$$\vec{F}_{pond} = -\frac{q^2}{4m^2\omega^2} \vec{\nabla} E_0^2(\vec{r}), \quad (1.3)$$

²Respecto a la longitud de onda plásmica λ_p .

donde q y m son la carga y la masa de la partícula, respectivamente, $\vec{E}_0(\vec{r})$ es la amplitud del campo eléctrico y ω es su frecuencia. Esta fuerza no depende del signo de la carga eléctrica, es no lineal, incrementa su efectividad con la reducción de la frecuencia y empuja las cargas hacia las zonas de menor intensidad del campo (ver Fig. 1.4).

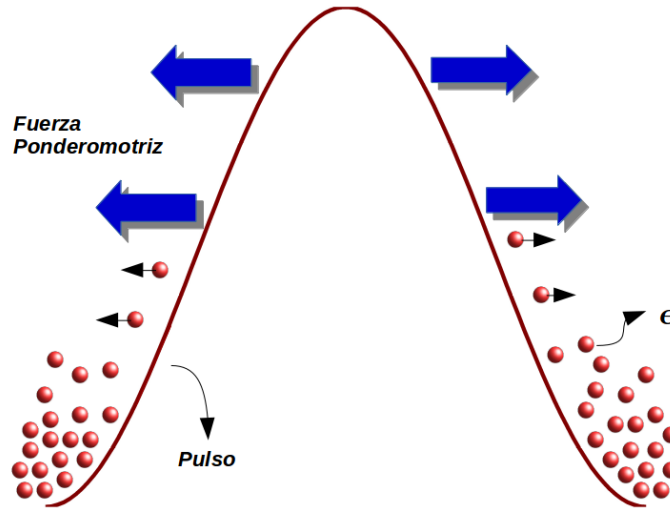


Figura 1.4: Efecto de la fuerza ponderomotriz de un pulso electromagnético sobre un grupo de electrones.

El efecto dominante del campo electromagnético sobre la dinámica de las partículas es producir oscilaciones rápidas en la dirección de polarización del campo eléctrico. Sin embargo, en una escala temporal más lenta, las partículas experimentan un desplazamiento neto en la dirección en la que la intensidad del campo eléctrico decrece. Esto significa que la fuerza ponderomotriz surge como consecuencia del gradiente en la amplitud del campo, aunque también se puede interpretar como el gradiente en la presión de radiación [6, 7].

1.3 Aceleración wakefield

Este mecanismo de aceleración consiste en utilizar el campo eléctrico longitudinal de una onda plásmica de gran amplitud para acelerar cargas eléctricas hasta energías ultra-relativistas. Un pulso láser/haz cargado de velocidad relativista y corta duración ($L \simeq \lambda_p$) se hace incidir sobre un plasma inicialmente en equilibrio, lo que genera una separación de electrones debido a la fuerza ponderomotriz/carga espacial. Los iones permanecen fijos debido a su gran masa (inercia) y a la alta velocidad del forzador combinada con su corta duración, es decir, el proceso ocurre en una escala temporal muy rápida. Una vez que el forzador ha pasado por determinada región del plasma, los electrones tienden a recuperar su estado de equilibrio por la atracción electrostática

del fondo iónico y la repulsión de los electrones mismos en las zonas de acumulación. Sin embargo, el exceso momentum y energía transferidos por el forzador permiten la generación de oscilaciones plásmicas. Este proceso se realiza a la velocidad del forzador, de tal manera que la onda plásmica generada por la perturbación viaja detrás del pulso/haz a la misma velocidad, esto es, a la velocidad de grupo del pulso $v_p = v_g$ o a la velocidad del haz $v_p = v_f$ [2].

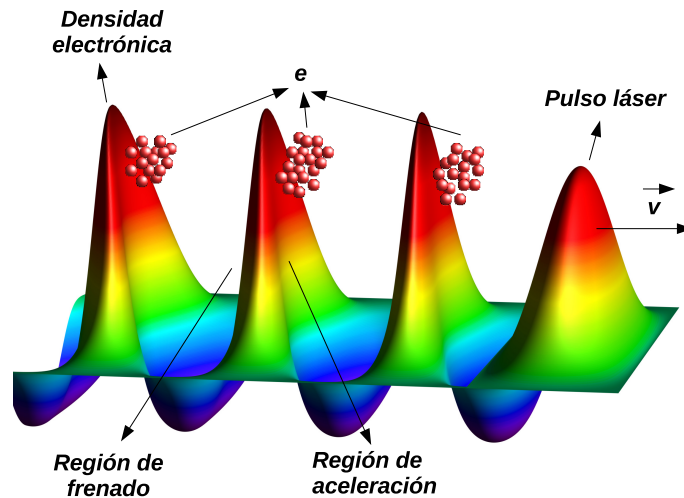


Figura 1.5: Aceleración wakefield láser (LWFA) en 2D.

La onda plásmica generada es una onda electrostática de densidad electrónica (ver Fig. 1.5), por lo tanto, mediante la ecuación de Poisson se le puede asociar un potencial eléctrico y un campo eléctrico denominados *wake* y *wakefield*³, respectivamente. Este campo puede alcanzar amplitudes del orden de 100 [GV/m], permitiendo la aceleración hasta energías ultra-relativistas en distancias del orden de metros. En términos del wake, la onda plásmica se puede entender como un tren de pozos de potencial que viajan a velocidades relativistas. De esta manera, la amplitud del wake determina la profundidad del pozo y establece uno de los criterios para capturar las partículas y acelerarlas de manera efectiva.

La aceleración de partículas con plasma es altamente compleja y requiere de instrumentación muy sofisticada. Sin embargo, dejando de lado la alta complejidad experimental que cada mecanismo requiere, el proceso se puede resumir en un esquema de cuatro etapas: generación del wakefield, inyección de las partículas, ganancia de energía (aceleración) y extracción.

³El término *wakefield* se utiliza más comúnmente para referirse a la onda plásmica en lugar de al campo eléctrico de ésta.

1.3.1 Generación del wakefield Existen diversos mecanismos para generar el wakefield, sin embargo, los métodos más ampliamente utilizados se basan en el uso de haces cargados de alta energía o pulsos electromagnéticos para generar la separación de carga en el plasma que origina el wakefield. Típicamente, se busca que el wakefield tenga una gran amplitud y alta velocidad de fase v_p debido a que esto favorece la captura de las cargas y minimiza la distancia de aceleración necesaria para alcanzar una energía dada.

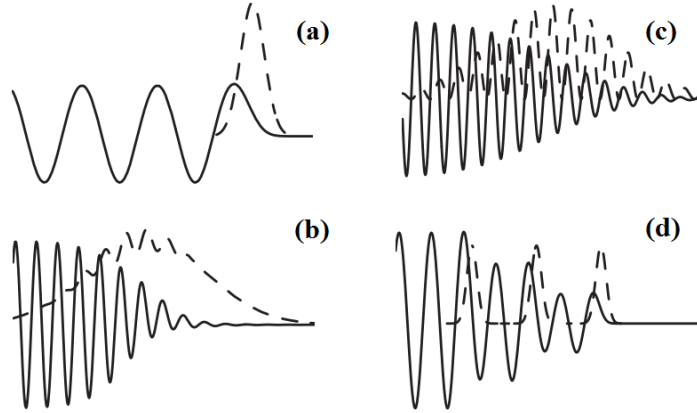


Figura 1.6: (a) Acelerador wakefield láser (LWFA), acelerador wakefield plasma (PWFA), (b) Acelerador láser beat-wave (LBWA), (c) Acelerador wakefield láser auto-modulado (SM-LWFA), (d) Esquemas multipulso. Las líneas sólida y discontinua representan el wake y el forzador, respectivamente. Imagen tomada de [7].

Láser wakefield (LWFA) La fuerza ponderomotriz de un único pulso láser que incide sobre el plasma, genera una onda plásmica que se propaga detrás del pulso con una velocidad de fase igual a la velocidad de grupo $v_p = v_g$ (ver Fig. 1.6.a). En este esquema el wakefield es generado más eficientemente cuando la longitud del pulso coincide con la longitud de onda de la onda plásmica $L = \lambda_p$, donde $\lambda_p = 2\pi v_p / \omega_p$ [6,7]. En algunos estudios esta condición se expresa en términos de la velocidad de la luz en el vacío, lo que constituye una aproximación cuando la frecuencia láser es mucho mayor que la frecuencia plásmica. En general, la velocidad de grupo de una onda electromagnética en el plasma viene dada por:

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \quad (1.4)$$

donde ω_p es la frecuencia plásmica y ω es la frecuencia central del láser [2]. Nótese que ω debe ser mayor que ω_p para que la onda electromagnética se propague en el plasma.

Láser “beat-wave” (LBWA) En este mecanismo dos pulsos láser largos, cuya diferencia de frecuencia coincide con la frecuencia plásmica $|\omega_1 - \omega_2| = \omega_p$, se superponen en el plasma para generar el wakefield (ver Fig. 1.6.b). *Tajima y Dawson* eran

conscientes cuando propusieron el mecanismo LWFA de que las fuentes de pulsos láser ultracortos no estaban al alcance tecnológico de la época. Por esta razón, propusieron el mecanismo LBWA [2], que se convirtió en el método empleado hasta mediados de los años ochenta cuando se desarrollaron los láseres ultracortos de alta potencia [3].

Láser wakefield auto-modulado (SM-LWFA) Un pulso láser largo comparado con la longitud de onda plásmica ($L > \lambda_p$) que incide sobre un plasma es auto-modulado en pulsos cortos de longitud λ_p debido a una inestabilidad de la interacción láser-plasma denominada “auto-modulación” combinada con dispersión Raman (ver Fig. 1.6.c). Con el fin de que esto ocurra la potencia del pulso debe ser mayor que la potencia crítica para el guiado óptico (refractivo) relativista ($P \geq P_c$, donde $P_c \simeq 17\omega^2/\omega_p^2$ [GW]) [6–9]. En la práctica las condiciones $L > \lambda_p$ y $P \geq P_c$ son satisfechas simultáneamente usando los mismos parámetros de pulso del esquema LWFA y plasmas alrededor de 20 veces más densos.

Este mecanismo permite mejorar la aceleración debido a varias razones: el uso de un plasma de mayor densidad hace que el campo eléctrico máximo soportado por la onda plásmica sea superior (ver Sección 1.4, Ec. 1.8), el wakefield es excitado resonantemente por múltiples pulsos sin la necesidad de garantizar previamente la condición de resonancia con los parámetros del pulso y del plasma como en los esquemas LWFA y LBWA, además, el guiado óptico relativista permite que el tren de pulsos se propague en el plasma una distancia mayor que en los esquemas anteriores, lo que aumenta la distancia efectiva de aceleración [34]. Este efecto se debe a la difracción de Rayleigh; a medida que el pulso láser se propaga en el plasma su área de enfoque se incrementa, lo que reduce su intensidad. El guiado óptico introduce una forma de reducir la difracción de Rayleigh para aumentar la distancia de interacción efectiva entre el plasma y el láser.

Plasma wakefield (PWFA) Un haz de partículas cargadas de corta duración y velocidad relativista excita un wakefield en el plasma debido a la fuerza de carga espacial (ver Fig. 1.6.a). Los electrones del plasma son repelidos (o atraídos) y forzados a acumularse en zonas determinadas a medida que el haz atraviesa el plasma. De manera análoga al efecto ponderomotriz, este proceso genera una onda electrostática electrónica (wakefield) que se propaga a la velocidad del haz [10]. En el régimen lineal y usando haces axialmente simétricos se ha demostrado que el cociente de transformación de energía entre el haz incidente y los electrones acelerados está limitado a valores ≤ 2 [35]. *Chen* y coinvestigadores demostraron que el uso de haces asimétricos permite cocientes de transformación superiores (> 2) [36]. Posteriormente, Rozenzweig estudió el régimen no-lineal y demostró que incluso haces simétricos pueden generar cocientes > 2 [37].

Este esquema ha sido ampliamente estudiado y existen múltiples aceleradores experimentales a nivel mundial basados en este mecanismo. Dado que los electrones son más fáciles de pre-acelerar que los protones, representan el impulsor más comúnmente usado. Sin embargo, el requisito para generar el wakefield es el efecto de la carga espacial,

de modo que un haz de protones también puede impulsar este mecanismo, tal como se pretende realizar en el proyecto AWAKE en el CERN [38]. El uso de protones tiene la ventaja adicional de que su capacidad de penetración es superior.

Esquemas multipulso El uso de esquemas multipulso no representa un mecanismo nuevo para generar el wakefield. Se basa en algunos de los mecanismos previamente descritos con la diferencia que se usan múltiples pulsos láser o haces de partículas consecutivos para mejorar progresivamente la amplitud del wakefield (ver Fig. 1.6.d). El estudio de este método es importante ya que permite incrementar la amplitud del wakefield sin la necesidad de un pulso láser de ultra-alta intensidad o un haz cargado de alta densidad. En el régimen lineal, N pulsos consecutivos separados un número entero de la longitud de onda plásmica incrementan N veces la amplitud del wakefield. El régimen no-lineal requiere de mayor cuidado debido a las variaciones del periodo del wakefield con la amplitud. En este caso, la separación y duración de los pulsos debe ser corregida a la longitud de onda plásmica efectiva (ver Sección 1.5.1, Ec. 1.10) para cada pulso [6, 7].

Condición de resonancia La frecuencia plásmica define el tiempo característico de la respuesta colectiva de los electrones del plasma frente a una perturbación externa de poca magnitud, es decir, en el régimen lineal. La condición de resonancia $L = \lambda_p/2$ que maximiza la amplitud del wakefield, definida por *Tajima* y *Dawson* [2], se puede entender al considerar la generación de la onda plásmica como un proceso de transferencia de energía y momentum del pulso al plasma. Si el pulso es simétrico, durante la primera mitad de la interacción la fuerza ponderomotriz empuja los electrones hacia su dirección de propagación. Posteriormente, la fuerza actúa en la dirección contraria. Cuando se satisface la condición $L = \lambda_p/2$ la fuerza ponderomotriz invierte su dirección justo en el momento en el que los electrones alcanzan su máxima amplitud e invierten su dirección de movimiento, es decir, en una cuarta parte del periodo de la oscilación plásmica. De este modo, la fuerza ponderomotriz transfiere energía al plasma durante toda la interacción. Sin embargo, cuando la duración del pulso es $\tau < f_p^{-1}/2$, la fuerza ponderomotriz invierte su dirección antes de que los electrones alcancen su máxima amplitud, lo que reduce la energía transferida. De forma similar, la fuerza ponderomotriz de un pulso de mayor duración ($\tau > f_p^{-1}/2$) invierte su dirección cuando los electrones han sobrepasado su amplitud máxima y se mueven de regreso a su posición de equilibrio, lo que nuevamente genera que durante una parte de la interacción el plasma pierda energía.

Del proceso anterior se define la condición de resonancia de acuerdo con la longitud del pulso τ que maximiza el trabajo realizado por la fuerza ponderomotriz sobre el plasma. Sin embargo, el análisis anterior se realizó en el marco de un proceso lineal e idealizado. En realidad, los electrones se mueven inicialmente en la misma dirección que se propaga el pulso, extendiendo la duración de la interacción. Asimismo, un pulso largo

($\tau > f_p^{-1}/2$) continúa realizando trabajo sobre el plasma durante una distancia mayor a $\lambda_p/4$ después de invertir la dirección de la fuerza. Además, los procesos no lineales alteran considerablemente la situación. En consecuencia, la condición de resonancia depende de la forma y duración del pulso aunque, en términos generales, se cumple que $L \simeq \lambda_p$.

Un análisis similar se puede realizar para establecer la condición de resonancia del mecanismo PWFA, aunque se debe tomar en cuenta que la carga espacial puede actuar a distancia. Asimismo, es importante destacar que en el mecanismo SM-LWFA no se requiere satisfacer inicialmente la condición de resonancia debido a que la inestabilidad de la interacción se encarga de modular el pulso largo ($L > \lambda_p$) en un tren de pulsos cortos que satisfacen la condición $L = \lambda_p$.

1.3.2 Inyección de las partículas El wakefield es un tren de pozos de potencial que viaja a velocidades cercanas a c , por tanto, para poder capturar una carga eléctrica se requiere que la energía de escape sea mayor que la energía cinética de la partícula *medida en el marco de referencia del wakefield*. En caso contrario, la partícula no es capturada y no puede ganar una cantidad significativa de energía [6, 7].

El proceso de inyección se puede realizar mediante diferentes técnicas tales como la inyección colineal u oblicua de un haz preacelerado cuyo retraso respecto al pulso/haz forzador es cuidadosamente seleccionado, la inyección por *ionización inducida*, en la cual al gas a partir del cual se produce el plasma se le agrega una pequeña proporción de un compuesto que sirve de fuente de electrones, así el frente del pulso láser/haz cargado ioniza este compuesto y los electrones libres adquieren la energía suficiente para inyectarse efectivamente en el wakefield [39, 40]. Otra alternativa es utilizar los electrones del plasma que exceden la velocidad del wakefield debido a los efectos altamente no-lineales para inyectar partículas del plasma mismo en el wakefield. Esta técnica se denomina *auto-inyección* [41].

1.3.3 Aceleración Comúnmente se realiza una analogía entre la aceleración de partículas cargadas en plasma y un surfista moviéndose sobre una ola. Esto se debe a que ambos procesos comparten características similares. El surfista debe ganar velocidad en la dirección de la ola para que ésta lo arrastre de la misma forma que las cargas se deben inyectar con un mínimo de energía para que el wakefield las capture y acelere.

El wakefield tiene una región de fase en la que el campo eléctrico es acelerador y otra región de fase en la que el campo frena las cargas respecto a la dirección de propagación de la onda (ver Fig. 1.5). Esta situación es equivalente a un surfista que se mueve entre dos olas consecutivas; si su velocidad es menor que la velocidad de las olas, la ola trasera eventualmente lo alcanza e impulsa hacia adelante (asumiendo que el surfista no tiene energía cinética suficiente para salir del pozo de potencial generado entre las olas), en caso contrario, si su velocidad es mayor, al alcanzar la parte trasera de la ola frontal,

el surfista pierde velocidad debido a que en el ascenso transforma energía cinética a energía potencial. De modo equivalente, al principio de la interacción las cargas se retrasan sobre el wakefield mientras ganan la energía suficiente para igualar su velocidad. Posteriormente, las cargas continúan en la región de aceleración y exceden la velocidad de la onda. Cuando las partículas alcanzan su valor máximo de energía, ingresan en la región de frenado donde empiezan a ceder la energía ganada. Este proceso lleva a un movimiento oscilatorio entre máximos o mínimos⁴ consecutivos del wake que limita la cantidad de energía que pueden ganar las partículas y establece las condiciones de extracción que la maximizan. Esta situación corresponde al caso ideal, sin embargo, existen efectos tridimensionales, no-lineales y experimentales que pueden alterar significativamente el proceso.

1.3.4 Extracción De la sección anterior se deduce que las partículas deben ser extraídas justo antes de que ingresen en la región de frenado. Sin embargo, para expresarlo de manera formal, se usa un modelo unidimensional y lineal, que asume la aceleración de un electrón y permite realizar un *aproximado* de la energía máxima ganada W_{max} y la distancia de aceleración necesaria L_d [6, 7]:

$$L_d \simeq \gamma_p^2 \lambda_p \simeq 2\pi \frac{\omega^2}{\omega_p^3} c \quad (1.5)$$

donde L_d es la *longitud de desfase*⁵, $\gamma_p \simeq \frac{\omega}{\omega_p} \gg 1$ es el factor relativista del marco de referencia del wakefield, $\lambda_p \simeq 2\pi c/\omega_p$ y ω es la frecuencia del pulso láser.

Asimismo, la energía máxima ganada por el electrón se puede estimar como:

$$W_{max} \simeq eE_{z0}L_d \simeq 2\pi\gamma_p^2 \frac{E_{z0}}{E_0} m_e c^2 \quad (1.6)$$

donde e y m_e son la carga y masa del electrón, respectivamente, E_0 es el campo de ruptura de onda en el régimen lineal y unidimensional (ver Sección 1.4) y E_{z0} es la amplitud del wakefield.

1.4 Ruptura de onda

Los aceleradores de partículas de alta energía usados en la actualidad son fabricados principalmente con cavidades metálicas dentro de las cuales ocurre la aceleración. El campo máximo que pueden soportar estas estructuras es alrededor de 100 [MV/m]. Cuando se excede este valor ocurre la ruptura eléctrica del material. De este modo, la única alternativa es extender la distancia de aceleración a *decenas de kilómetros* con el fin de alcanzar energías del orden de TeV.

⁴Dado que la dirección de la fuerza electrostática depende del signo de la carga, las regiones de aceleración y frenado para cargas de signo opuesto son diferentes.

⁵Distancia que viaja el electrón antes de entrar en la región de frenado.

Por su parte, el mayor atractivo del plasma para la aceleración de partículas, es justamente que puede soportar campos eléctricos aproximadamente *tres órdenes de magnitud* mayores que estas estructuras. La ruptura eléctrica no le afecta porque ya se encuentra en estado ionizado. Sin embargo, la amplitud del campo eléctrico de una onda plásmica tiene un valor límite, cuando se excede este umbral, *los electrones del plasma* superan la velocidad de fase del wakefield y esto lleva a la ruptura de la onda, tal como le ocurre a las olas de gran amplitud en el mar (ver Fig. 1.7).



Figura 1.7: Ruptura de onda de una ola en el mar. Imagen tomada de “https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Large_breaking_wave.jpg”

El valor máximo de campo ha sido estimado en el régimen 1D lineal y no-lineal usando un modelo de plasma frío, también existen cálculos más complejos que incluyen los efectos de la dispersión en la distribución de velocidad por efectos térmicos. En el límite lineal, el campo máximo se puede estimar asumiendo que todos los electrones oscilan con un número de onda $k_p = \omega_p/c$, es decir, $n_{e1} = n_0 \sin k_p x$ y usando la ley de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{en_{e1}}{\epsilon_0}. \quad (1.7)$$

Este cálculo lleva a la siguiente expresión para el valor máximo del campo:

$$E_0 = \frac{en_0}{\epsilon_0 k_p} \simeq 0,96 \sqrt{n_0} [\text{cm}^{-3}] [\text{V/cm}]. \quad (1.8)$$

E_0 crece al aumentar la concentración plásmica, por esta razón se utilizan plasmas de alta densidad y se requieren pulsos ultra-cortos⁶ con el fin de garantizar la condición de resonancia. De acuerdo con la Ec. (1.8) un plasma de densidad $n_0 = 10^{18} [\text{cm}^{-3}]$ soporta wakefields de amplitud $E_0 = 96 [\text{GV/m}]$, que es aproximadamente 1000 veces mayor que el campo máximo soportado por las cavidades metálicas.

⁶Típicamente se utilizan pulsos con una duración del orden de picosegundos a femtosegundos

En el régimen no-lineal, las perturbaciones pueden exceder el valor E_0 . En este caso, la amplitud máxima del wakefield viene dada por:

$$E_{wb} = \sqrt{2(\gamma_p - 1)}E_0, \quad (1.9)$$

donde $\gamma_p = \sqrt{1 - \frac{v_p^2}{c^2}}$ y v_p es la velocidad de fase del wakefield. Esta ecuación sólo es válida en el régimen relativista.

En un plasma “caliente” la velocidad electrónica tiene dispersión en la distribución de velocidades alrededor del valor medio debido a su temperatura, de modo que algunos electrones alcanzan el límite de ruptura de onda $|v_e + \delta v| = v_g$ con campos menores que E_{wb} [6, 7].

En general, la ruptura de onda es un efecto indeseable. Sin embargo, se puede utilizar para auto-inyectar electrones en el wakefield. Los electrones del plasma que sobrepasan la velocidad de la onda pueden ser capturados y acelerados sin la necesidad de inyectar un haz externo.

1.5 Efectos no-lineales y multidimensionales

La mayoría de los efectos descritos previamente corresponden a modelos unidimensionales y lineales. Esto se debe a que el problema de la aceleración wakefield tiene soluciones analíticas únicamente para el caso 1D y 3D en que los pulsos tienen forma simple y *no evolucionan*. La inclusión de la evolución del forzador normalmente requiere del uso de simulaciones.

1.5.1 Efectos no-lineales El régimen lineal se caracteriza por la forma sinusoidal del wakefield y ocurre cuando la perturbación en el plasma n_{e1} , generada por el pulso láser o el haz cargado, es mucho menor que la concentración inicial n_0 ($n_{e1} \ll n_0$, donde $n_e = n_0 + n_{e1}$ es la concentración electrónica). En el régimen no-lineal, las perturbaciones n_{e1} pueden ser del orden o exceder n_0 ($n_{e1} \gtrsim n_0$), lo que genera soluciones con la forma mostrada en la Fig. 1.8.

La forma aguda de la concentración electrónica se debe a que se puede concentrar una cantidad de electrones mucho mayor que n_0 en una región determinada pero sólo se puede extraer una cantidad limitada por n_0 , es decir, el valor mínimo de electrones que se pueden acumular en una región dada es cero. Las formas del wake y el wakefield se relacionan a n_e por la ecuación de Poisson.

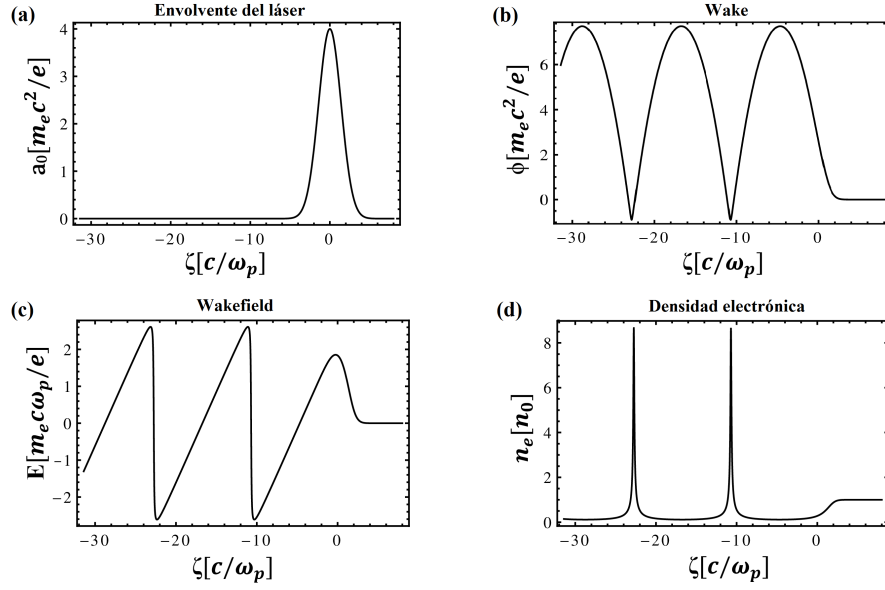


Figura 1.8: Formas de la solución para el wakefield en el régimen no-lineal. (a) Pulso, (b) Wake, (c) Wakefield y (d) Concentración electrónica. Imagen modificada de [42].

En la Sección 1.4 se describió el fenómeno de ruptura de onda, en el que los efectos altamente no-lineales limitan la amplitud máxima del wakefield. Pese a que la aceleración wakefield se hace más eficiente en el régimen no-lineal, algunas cantidades se alteran respecto a su valor en el régimen lineal. En particular, la longitud de onda se hace más larga y debe ser ajustada al valor

$$\lambda_{Np} = \frac{2}{\pi} \frac{E_{z0}}{E_0} \lambda_p, \quad E_{z0}/E_0 \gg 1, \quad (1.10)$$

donde E_{z0} es la amplitud del wakefield, E_0 es el campo de ruptura de onda y $\lambda_p \simeq 2\pi c/\omega_p$.

1.5.2 Efectos tridimensionales En este mecanismo de aceleración se utiliza la carga espacial o la fuerza ponderomotriz para generar una onda plásmica con un campo longitudinal de gran amplitud. Los pulsos láser utilizados típicamente tienen perfiles gaussianos en todas las direcciones. De manera equivalente, los haces cargados repelen o atraen las cargas sin distinción de la dirección. Por esta razón, la carga espacial y la fuerza ponderomotriz generan wakefields transversales cuyo efecto puede debilitar el wakefield longitudinal debido a que las partículas se pueden acumular en cualquier dirección. De hecho, el régimen unidimensional es válido sólo cuando el radio del área de enfoque del láser o el radio transversal de interacción del haz⁷ son grandes comparados con la longitud de onda. En caso contrario, los efectos transversales adquieren importancia.

⁷El valor mayor entre el radio del haz y la penetración de piel.

Una ejemplo de los efectos altamente no-lineales combinado con los efectos 3D es el régimen de *cavitación*⁸, en el que el uso de un pulso láser de ultra-alta intensidad permite crear una cavidad iónica completamente vacía de electrones [42]. Los electrones forman una gran acumulación en pequeñas regiones que da origen densidades electrónicas con máximos muy pronunciados (ver Fig. 1.9).

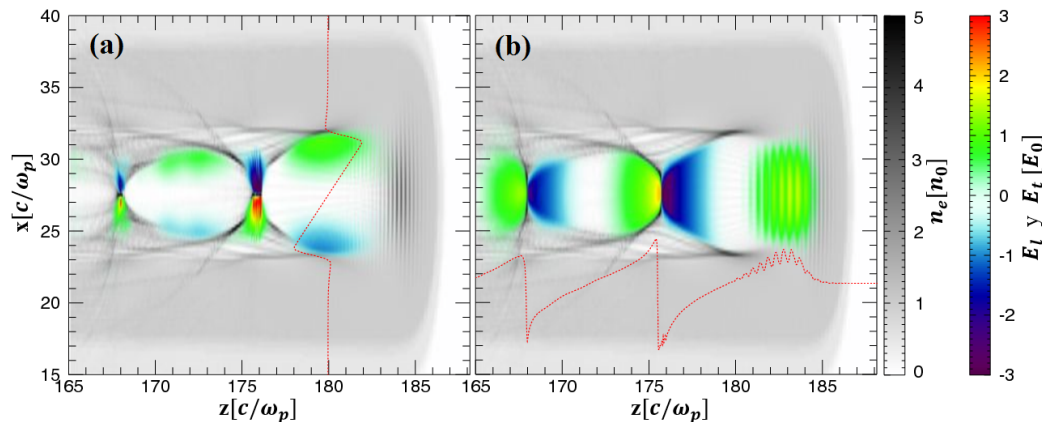


Figura 1.9: Wakefield generado por un pulso láser en 2D. (a) Campo eléctrico longitudinal E_l , (b) Campo eléctrico transversal E_t . La línea punteada roja representa un perfil de los campos E_l y E_t . Imagen modificada de [42].

De la Fig. 1.9 es importante notar que a pesar de que la estructura formada transversalmente reduce la cantidad efectiva de electrones acumulados longitudinalmente, se genera un pozo de potencial transversal que favorece al confinamiento en estas direcciones. El campo eléctrico transversal asociado a este potencial se denomina *campo de enfoque*.

1.5.3 Evolución del forzador En toda la teoría mencionada previamente se asume que el forzador no evoluciona. Sin embargo, cuando el pulso/haz se propaga generando la onda plásmica, transfiere parte de su energía y momentum al plasma, lo que lleva a una reducción de su amplitud/velocidad que afecta directamente la amplitud y velocidad de fase del wakefield. Además, en los esquemas impulsados por láser, la difracción de Rayleigh incrementa el área de enfoque del pulso a medida que se propaga en el plasma, por tanto, la situación no es estacionaria. En consecuencia, aunque teóricamente las cargas capturadas producen oscilaciones entre sus valores máximos y mínimos de energía, la evolución del wakefield obliga a extraerlas en el primer ciclo.

⁸También conocido como régimen de *burbuja* o *blow-out*.

CAPÍTULO 2

DEL LÁSER A LAS MICROONDAS

El uso de microondas como alternativa al láser para generar el wakefield se consideró desde los primeros años posteriores a la proposición de este mecanismo de aceleración [32]. No obstante, se descartó debido a que no existían fuentes con la potencia suficiente para excitar un wakefield de amplitud óptima para la aceleración. La aceleración con láser es muy eficiente pero requiere instrumentación altamente sofisticada: los láseres de ultra-alta intensidad y la medición en la escala temporal ultra-rápida hacen costosa la realización de experimentos. Por esta razón, las microondas fueron consideradas nuevamente en la última década como una alternativa de bajo costo. Actualmente se están desarrollando fuentes de microondas que emiten pulsos cortos ($\tau \lesssim 1$ [ns]), de alta potencia ($P \sim 0,5$ [GW]) y baja frecuencia ($f \sim 10$ [GHz]) [31]. La duración de los pulsos requeridos es alrededor de 10^3 - 10^4 veces mayor que en la aceleración impulsada por láser, lo que también reduce la sofisticación en los equipos de medición. Por último, la guía de onda resuelve el problema de la difracción del área de enfoque de los pulsos láser debido a que la energía electromagnética se enfoca en un área fija, lo que permite eliminar un factor limitante de la distancia máxima de aceleración.

La viabilidad de las microondas para generar el wakefield depende de tres elementos: la guía de onda, el plasma y la fuente de microondas. A partir de los parámetros que caracterizan los elementos descritos se determina la eficiencia para la aceleración de partículas cargadas. Explícitamente, los parámetros son: la velocidad de grupo del pulso v_g , la intensidad de microondas I_0 , la frecuencia de microondas ω , la duración del pulso τ , las dimensiones de la guía de onda y la concentración plásmica n_0 (correspondiente frecuencia plásmica ω_p). En adición, la fuerza ponderomotriz incrementa su efectividad con la reducción de la frecuencia del campo, lo que favorece a las microondas sobre el láser pese a que limita la concentración plásmica máxima y, por ende, reduce el campo de ruptura de onda.

2.1 El plasma

El parámetro más relevante del plasma en relación con la aceleración wakefield es la concentración electrónica, que establece la frecuencia plásmica (Ec. 1.2) e implícitamente define la frecuencia del wakefield. En este mecanismo de aceleración se busca que la concentración electrónica sea suficientemente alta debido a que esto permite incrementar el campo de ruptura de onda (Ec. 1.8). No obstante, como la frecuencia de microondas es significativamente menor que la frecuencia láser, se debe utilizar un plasma de *baja densidad* con el fin de garantizar una velocidad de grupo alta.

La velocidad de grupo de un pulso electromagnético que se propaga en un plasma viene dada por la Ec. (1.4), de la cual se extrae la condición de que $\omega \gg \omega_p$ para que la velocidad de propagación sea cercana a c . Esta condición es fundamental porque la velocidad de grupo determina la velocidad de fase del wakefield, lo que a su vez incrementa la longitud de desfase (ver Sección 1.3.4), es decir, el incremento de la velocidad de grupo genera que las cargas aceleradas permanezcan más tiempo en la región de aceleración y alcancen mayores energías.

2.2 La guía de onda

A lo largo de este trabajo se considera una guía de onda metálica rectangular, por lo que sus dimensiones se caracterizan por el ancho a y el alto b ($a \geq b$).

La velocidad de grupo de una onda electromagnética que se propaga en este tipo de guía de onda viene dada por la expresión general

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_{mn}^2}{\omega^2}} = c\sqrt{1 - \frac{m^2\pi^2c^2}{a^2\omega^2} - \frac{n^2\pi^2c^2}{b^2\omega^2}}, \quad (2.1)$$

donde $\omega_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi c}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi c}{b}\right)^2}$ representa la frecuencia de corte de los modos transversales eléctricos (TE_{mn}) y transversales magnéticos (TM_{mn}) [43, 44]. Si la frecuencia de microondas ω es menor que ω_{mn} , la onda se atenúa rápidamente en vez de propagarse. Nótese que cuanto mayor es la frecuencia de la onda respecto a la frecuencia de corte de la guía, mayor es la velocidad de grupo, de forma similar al plasma.

La inclusión de la constante dieléctrica del plasma $\epsilon_p = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ al resolver las ecuaciones de Maxwell para la guía de onda lleva a la siguiente expresión de la velocidad de grupo en una guía de onda rectangular con plasma en su interior

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{m^2\pi^2c^2}{a^2\omega^2} - \frac{n^2\pi^2c^2}{b^2\omega^2}}, \quad (2.2)$$

donde la frecuencia de corte modificada para incluir el efecto del plasma es:

$$(\omega_{mn})_{plasma} = \sqrt{\omega_p^2 + \frac{m^2\pi^2c^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2c^2}{b^2}}. \quad (2.3)$$

El uso de la Ec. (2.2) con un plasma de densidad $n_0 = 2 \times 10^{16} [\text{m}^{-3}]$, una guía de onda de dimensiones $a = b = 0,03 [\text{m}]$ y una frecuencia de microondas $f = \omega/2\pi = 10 [\text{GHz}]$ genera velocidades de grupo $v_g \simeq 0,86c$ para el modo TE_{10} y $v_g \simeq 0,70c$ para los modos TE_{11} y TM_{11} . Las frecuencias de corte son $f_c = 5,16 [\text{GHz}]$ y $f_c = 7,19 [\text{GHz}]$, respectivamente. La frecuencia de corte para el modo TE_{20} es $f_c = 10,08 [\text{GHz}]$, por lo cual ni siquiera hay propagación de la onda.

Los parámetros calculados de velocidad de grupo generan factores relativistas $\gamma = 1,96$ y $\gamma = 1,40$, respectivamente, que son apenas débilmente relativistas. Con el fin de maximizar la velocidad de grupo se deben manipular adecuadamente las dimensiones de la guía de onda y la frecuencia de microondas. La reducción de la concentración plásmica aumenta la velocidad de grupo pero reduce la amplitud máxima posible del wakefield (ver Sección 1.4), por lo cual es deseable mantener este valor tan alto como sea posible. Nótese que el uso de la guía de onda permite introducir las dimensiones transversales como parámetros adicionales de control del sistema que permiten manipular directamente la velocidad de grupo.

2.3 El pulso de microondas

El pulso de microondas se caracteriza por la duración (τ), la frecuencia (ω), la amplitud (o intensidad) y el modo que excita en la guía (TE_{mn} o TM_{mn}). La duración del pulso se define implícitamente (de manera aproximada) al establecer la concentración electrónica, dado que se utiliza la condición de resonancia $\tau = 2\pi/\omega_p$. El uso de plasmas de baja densidad genera que la duración del pulso sea del orden de los nanosegundos, lo que reduce la precisión necesaria en los instrumentos de medición temporal respecto a la técnica LWFA. Este aspecto es de gran importancia porque, de resultar eficiente la aceleración wakefield con microondas, permitiría la realización de experimentos con un costo menor y el uso de instrumentos de medición menos sofisticados.

La frecuencia de microondas se debe elegir tan alta como sea posible para satisfacer las condiciones $\omega/\omega_p \gg 1$ y $(m\pi c/a + n\pi c/b)/\omega \gg 1$ en la búsqueda de maximizar la velocidad de grupo con el fin de incrementar la distancia de aceleración. Por otra parte, existe una razón adicional para requerir el uso de frecuencias altas: un pulso electromagnético se genera por la superposición de una gran cantidad de ondas armónicas. El espacio temporal y el espacio frecuencial son inversos, en consecuencia, cuanto menor es la duración del pulso, mayor es su ancho espectral en el espacio de frecuencias, es decir, tiene un rango de frecuencias $\Delta\omega$ mayor alrededor de su frecuencia central ω . Con el fin de evitar el filtrado de las frecuencias más bajas que conforman el pulso, es necesario que la frecuencia central sea suficientemente alta respecto a la frecuencia de corte.

La amplitud del pulso es un parámetro que depende netamente de la fuente de microondas. La única restricción que se impone sobre esta cantidad es que la amplitud del wakefield excitado no supere el campo de ruptura de onda ni el campo máximo que

puede soportar la estructura metálica de la guía de onda antes de producirse efectos que afecten el wakefield. Una vez satisfechas estas condiciones, la amplitud debe ser la máxima posible debido a que la relación es directa con la amplitud del wakefield.

Por último, para elegir el modo de microondas se debe tomar en cuenta que en la generación del wakefield la prioridad es perturbar el plasma con un pulso electromagnético de gran amplitud y corta duración, de tal forma que la fuerza ponderomotriz longitudinal sea alta. Este proceso está asociado con el perfil longitudinal del pulso. Los efectos transversales son consecuencia de que el pulso tiene un perfil similar en todas las direcciones. Como ya se vio en la Sección 1.5.2, esto puede reducir la amplitud efectiva del wakefield longitudinal creando un campo de enfoque que ayuda al confinamiento transversal de las cargas a acelerar. Sin embargo, el campo eléctrico de los modos que se pueden excitar en la guía de onda presenta diferentes patrones transversales (ver Fig. 2.1). En este sentido, la selección del modo requiere balancear la reducción de la velocidad de grupo con el perfil transversal del campo eléctrico y la posición de su máximo (zonas rojas en la Figura 2.1).

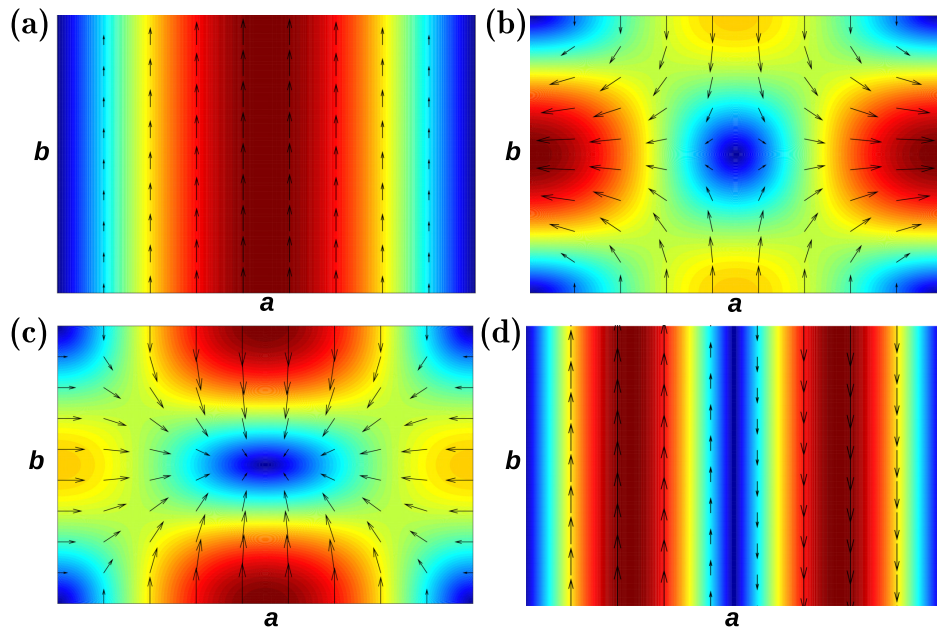


Figura 2.1: Componentes de campo eléctrico transversal de los modos (a) TE_{10} , (b) TE_{11} , (c) TM_{11} y (d) TE_{20} .

Con base en lo anterior, es claro que el modo TE_{10} (Fig. 2.1a) es el más efectivo para maximizar la velocidad de grupo. Además, dada su distribución de campo eléctrico, se espera que el wakefield generado sea similar al wakefield generado por un láser en dos dimensiones (ver Figura 1.9). Cuando el ancho de la guía de onda es significativamente mayor que la longitud del pulso se obtiene la aproximación unidimensional, en la cual los efectos transversales se hacen despreciables.

Los modos TE_{11} (Fig. 2.1b) y TM_{11} (Fig. 2.1c) reducen considerablemente la velocidad de grupo respecto al modo TE_{10} . Además, sus valores máximos de campo eléctrico se ubican hacia las paredes de la guía, es decir, la amplitud máxima del wakefield estaría ubicada en esta región de poca utilidad. Sin embargo, el modo TM_{11} tiene una componente longitudinal de campo eléctrico con una distribución muy similar al perfil tridimensional de un pulso láser (ver Figura 2.2). Esta componente está adelantada un cuarto del periodo respecto a la componente transversal, lo que genera un patrón de campo eléctrico variable en magnitud y dirección, alternando entre regiones netamente transversales y regiones netamente longitudinales. Esta variación genera que la posición del máximo de campo no sea constante, es decir, en los modos TE sólo varía la magnitud y orientación del campo eléctrico mientras que en los modos TM el desfase entre las componentes transversal y longitudinal genera que también varíe la dirección y el patrón de campo eléctrico.

En general, en el esquema LWFA el pulso láser se encuentra polarizado transversalmente, de tal forma que los electrones oscilan en dirección perpendicular a la dirección de la fuerza ponderomotriz. Sin embargo, el efecto ponderomotriz también existe en dirección paralela a las oscilaciones, por lo que el campo eléctrico longitudinal del modo TM_{11} podría utilizarse para excitar un wakefield muy similar al wakefield generado por un pulso láser en tres dimensiones.

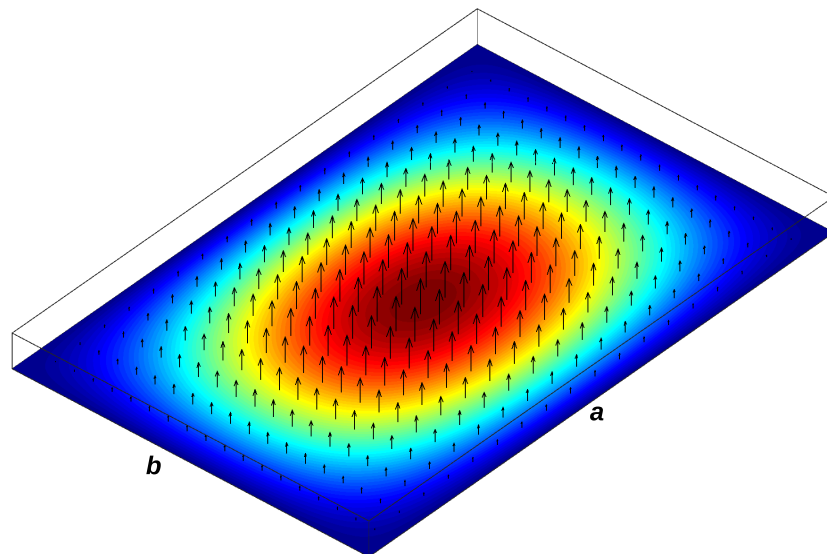


Figura 2.2: Componente longitudinal del campo eléctrico de modo TM_{11} .

Finalmente, el modo TE_{20} (Fig. 2.1d) implica una reducción considerablemente mayor de la velocidad de grupo y un incremento significativo de la frecuencia de corte. Además, su distribución de campo simplemente duplica el perfil transversal del pulso, lo que generaría la formación de dos wakefields paralelos e incrementaría el efecto ponderomotriz transversal. Los modos de orden superior sólo incrementan los efectos descritos previa-

mente, por lo que, en principio, resultan poco útiles en vista de la aceleración wakefield forzada por microondas.

CAPÍTULO 3

WAKEFIELD GENERADO POR MICROONDAS EN UNA GUÍA DE ONDA METÁLICA RECTANGULAR

3.1 Ecuación diferencial del wake

Aria y Malik dedujeron una ecuación diferencial que describe la generación del wake detrás de un pulso de microondas que excita el modo TE_{10} en una guía de onda metálica rectangular de ancho b llena con un plasma de baja densidad [1, 34]. En la deducción se utiliza el modelo de fluido frío y acolisional, en el cual se asume que los iones forman un fondo fijo,

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{v}_e) = 0 \quad (\text{Ec. de continuidad}), \quad (3.1)$$

$$\frac{d\vec{p}_e}{dt} = -e[\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}] \quad (\text{Ec. de Newton-Lorentz}), \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_W = -\frac{e}{\epsilon_0}(n_e - n_0) \quad (\text{Ley de Gauss del campo eléctrico}), \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Ley de Gauss del campo magnético}), \quad (3.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Ley de inducción de Faraday}), \quad (3.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 e n_e \vec{v}_e \quad (\text{Ley de Ampere-Maxwell}), \quad (3.6)$$

donde n_e , \vec{v}_e , \vec{p}_e y e representan la concentración, velocidad, momentum y magnitud de carga del electrón, respectivamente, n_0 es la concentración inicial, \vec{E} y \vec{B} representan

el campo de microondas y $E_W = -\frac{\partial\phi}{\partial z}$ es el campo puramente electrostático, es decir, el *wakefield*. La aproximación de plasma frío es válida debido a que la velocidad de grupo es alta y la duración del pulso es corta.

El sistema de ecuaciones (3.1-3.6) se complementa con las componentes del campo de microondas del modo TE_{10} ,

$$\vec{E} = E(\xi) \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right) \hat{y}, \quad (3.7)$$

$$\vec{B} = B_x(\xi) \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right) \hat{x} + B_z(\xi) \cos\left(\frac{\pi x}{b}\right) \hat{z}, \quad (3.8)$$

donde $B_x(\xi)$ y $B_z(\xi)$ se calculan en función del perfil del pulso de microondas $E(\xi)$ con las ecuaciones de Maxwell y $\xi = z - v_g t$ representa un eje longitudinal que se mueve con el pulso. En este punto, se asume que el pulso de microondas se propaga en el plasma, por lo que v_g representa la velocidad de grupo para la guía de onda llena con plasma.

El uso de la aproximación cuasiestática, en la que se asume que el forzador no evoluciona significativamente (pulso no dispersivo), permite transformar el sistema de ecuaciones a un “marco de referencia” $\xi = z - v_g t$ en el que el wakefield es estático, esto es, la variación temporal se hace irrelevante debido a que sólo describe el movimiento de la onda a la velocidad de grupo. Por lo tanto, se realiza una *transformación algebraica* del sistema de ecuaciones de las variables z y t a la variable ξ , lo que no constituye una transformación física sino matemática, por lo que las cantidades se siguen calculando en el marco de referencia del laboratorio. Esta transformación se realiza comúnmente en la aceleración láser wakefield a un “marco” $\xi = z - ct$ para *visualizar* el wakefield en un eje que se mueve con el pulso láser.

El campo eléctrico está polarizado en dirección \hat{y} y el ancho de la guía es representado por la variable x , de tal forma que la fuerza ponderomotriz actúa en dirección \hat{z} . Se utilizan las aproximaciones $\partial v_x / \partial x = 0$ y $\partial n_{e1} / \partial x = 0$ (donde $n_e = n_0 + n_{e1}$), las cuales se sustentan en la afirmación de que los electrones oscilan en dirección \hat{y} y ganan momentum por el efecto ponderomotriz a lo largo de \hat{z} . Sin embargo, el modelo no considera los términos oscilatorios y dado que el modo TE_{10} es simétrico en dirección y , esta variable no aparece explícitamente en las ecuaciones. Además, se utiliza la teoría débilmente no lineal ($n_{e1} < n_0$) para simplificar las ecuaciones.

De este modo, se obtiene la ecuación que representa el wake generado en el plasma detrás del pulso de microondas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{e}{2m_e v_g^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\omega_p^2}{v_g^2} \phi - \frac{ec^2}{m_e v_g^2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{b}\right) F(\xi) = 0, \quad (3.9)$$

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{v_g^2} - \frac{1}{c^2} \right) E^2(\xi) - B_z^2(\xi) \right], \quad B_z(\xi) = \frac{\pi}{bv_g} \int E(\xi) d\xi,$$

donde ϕ representa el wake, $\xi = z - v_g t$ es el eje longitudinal que viaja con el pulso a la velocidad de grupo v_g , e y m_e son la magnitud de la carga y masa del electrón, respectivamente, ω_p es la frecuencia plásmica electrónica, c es la velocidad de la luz en el vacío, b es el ancho de la guía de onda y x es el eje a lo ancho de la guía. $E(\xi)$ y $B_z(\xi)$ son las componentes longitudinales de campo eléctrico y magnético asociadas al pulso. La notación en derivadas parciales expresa el hecho de que, en general, el potencial también depende de x , aunque su dependencia explícita desaparece de la ecuación como consecuencia de las aproximaciones realizadas.

3.2 Análisis de la ecuación diferencial

La ecuación del wake se puede entender fácilmente al realizar una analogía con el oscilador armónico forzado y amortiguado. El primer término simplemente describe la “aceleración” del wake. El segundo término representa una fuerza no lineal que en algunas regiones agrega energía al sistema y en otras regiones la disipa (término no lineal). Del tercer término se extrae la frecuencia espacial del wake, es decir, el número de onda $k_p = \omega_p/v_g$, lo que define la longitud de onda plásmica $\lambda_p = 2\pi/k_p = 2\pi v_g/\omega_p$. El último término corresponde a la “fuerza externa” que le agrega energía al sistema para sacarlo del equilibrio. Naturalmente, este término sólo es diferente de cero en la región del pulso, que en este caso se considera entre $\xi = 0$ y $\xi = L$, siendo $L = v_g \tau$ la longitud del pulso con duración τ . La física implícita en la analogía es válida para el último término debido a que la fuerza ponderomotriz del pulso tiene la función de realizar trabajo sobre el plasma para transferirle energía y momentum, perturbar el equilibrio inicial y generar la onda plásmica. Una vez que el pulso ha pasado por determinada región, la transferencia de energía se detiene localmente y las oscilaciones plásmicas se deben atenuar debido a los efectos disipativos presentes en el plasma.

El análisis de la influencia de cada uno de los parámetros del sistema sobre cada término de la ecuación diferencial requiere el uso explícito del perfil de pulso. Por esta razón, a continuación se introducen tres perfiles de pulso con los cuales se resuelve numéricamente la ecuación del wake en las secciones posteriores.

- **Pulso gaussiano:** este pulso representa el perfil más realista y se expresa matemáticamente como

$$E(\xi) = \frac{E_0}{2} \left[1 + \cos \left\{ \frac{2\pi}{L} (\xi - L/2) \right\} \right]. \quad (3.10)$$

Este perfil tiene una gran ventaja desde el punto de vista numérico debido a que justo en los extremos, donde el campo se anula $E(0) = E(L) = 0$, la pendiente también se anula, generando completa continuidad (ver Figura 3.1.a). La ecuación

del wake asociada a este pulso es

$$\phi'' + \frac{e}{2m_e v_g^2} (\phi')^2 + \frac{\omega_p^2}{v_g^2} \phi - \frac{E_0^2 c^2 e}{8m_e v_g^4} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{b} \right) [f(\xi) - g(\xi)], \quad (3.11)$$

$$f(\xi) = \left(1 - \frac{v_g^2}{c^2} \right) \left[1 + \cos \left\{ \frac{2\pi}{L} (\xi - L/2) \right\} \right]^2,$$

$$g(\xi) = \frac{\pi^2}{b^2} \left[\xi + \frac{L}{2\pi} \sin \left\{ \frac{2\pi}{L} (\xi - L/2) \right\} \right]^2.$$

- **Pulso senoidal:** en este caso se considera el siguiente perfil de pulso (ver Figura 3.1.b)

$$E(\xi) = E_0 \sin \left\{ \frac{\pi \xi}{L} \right\}. \quad (3.12)$$

La ecuación del wake correspondiente es

$$\phi'' + \frac{e}{2m_e v_g^2} (\phi')^2 + \frac{\omega_p^2}{v_g^2} \phi - \frac{E_0^2 c^2 e}{2m_e v_g^4} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{b} \right) f(\xi), \quad (3.13)$$

$$f(\xi) = \left(1 - \frac{v_g^2}{c^2} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi \xi}{L} \right) - \frac{L^2}{b^2} \cos^2 \left(\frac{\pi \xi}{L} \right).$$

- **Pulso rectangular-triangular:** este pulso se construye como un incremento aproximadamente lineal del campo hasta E_0 seguido de una zona constante y una caída aproximadamente lineal hasta que el campo se anula nuevamente (ver Figura 3.1.c)

$$E(\xi) = \begin{cases} E_0 \sqrt{[1 - \cos \{ \frac{2\pi \xi}{L} \}]}, & 0 \leq \xi \leq L/4 \\ E_0, & L/4 < \xi \leq 2L/3 \\ E_0 \sqrt{[1 + \cos \{ \frac{3\pi \xi}{L} \}] / 2}, & 2L/3 < \xi \leq L. \end{cases} \quad (3.14)$$

La ecuación que describe el wake detrás de este pulso es

$$\phi'' + \frac{e}{2m_e v_g^2} (\phi')^2 + \frac{\omega_p^2}{v_g^2} \phi - \frac{E_0^2 c^2 e}{2m_e v_g^4} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{b} \right) f(\xi), \quad (3.15)$$

$$f(\xi) = \begin{cases} \left(1 - \frac{v_g^2}{c^2} \right) [1 + \cos \{ \frac{2\pi \xi}{L} \}] - \frac{2L^2}{b^2 [\tan^2(\frac{\pi \xi}{L}) + 1]}, & 0 \leq \xi \leq L/4 \\ 1 - \frac{v_g^2}{c^2} - \frac{\pi^2 \xi^2}{b^2}, & L/4 < \xi \leq 2L/3 \\ \left(1 - \frac{v_g^2}{c^2} \right) \frac{1}{2} [1 + \cos \{ \frac{3\pi \xi}{L} \}] - \frac{4L^2}{9b^2 [\tan^2(\frac{3\pi \xi}{2L}) + 1]}, & 2L/3 < \xi \leq L. \end{cases}$$

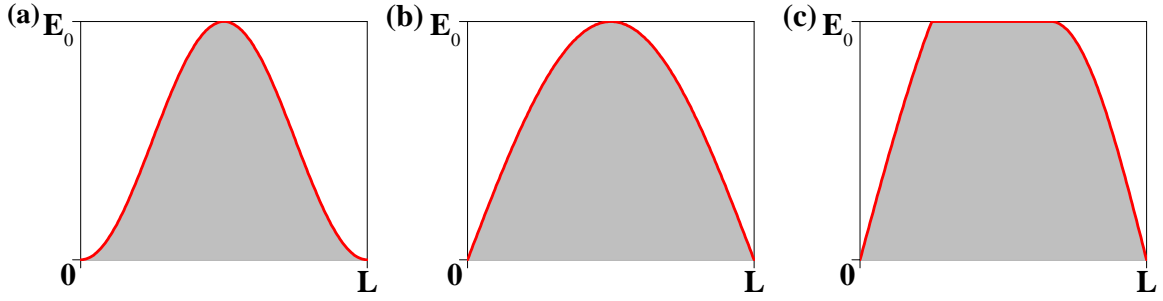


Figura 3.1: Perfiles de pulso utilizados para resolver la ecuación del wake (a) Gaussiano, (b) Senoidal y (c) Rectangular-triangular (RT).

En todas las ecuaciones se asume que el campo eléctrico del pulso y el término forzador son diferentes de cero sólo en la región $0 \leq \xi \leq L$. Estos perfiles de pulso son introducidos por *Aria* y *Malik* en diferentes estudios [1, 20].

Adicionalmente, es necesario especificar la forma explícita de la velocidad de grupo para el modo TE_{10} incluyendo el efecto del plasma, la cual viene dada por

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\pi^2 c^2}{b^2 \omega^2}}. \quad (3.16)$$

De acuerdo con la forma explícita de las ecuaciones que describen el wake para cada pulso, el efecto de incrementar la velocidad de grupo es reducir el término no-lineal, el número de onda k_p (longitudes de onda más largas) y el término forzador, aunque éste último se reduce a un ritmo que depende de cómo se combine la longitud del pulso $L = v_g \tau$ en las ecuaciones de acuerdo con el perfil del pulso. Asimismo, la frecuencia de microondas, el ancho de la guía de onda y la frecuencia plásmica, influyen en el sistema indirectamente por su efecto sobre v_g , de tal manera que mayores frecuencias de microondas y guías de onda más anchas generan reducciones de v_g . Además, por la expresión de la componente transversal del campo magnético en la Ec. (3.9), siempre existe una componente del término forzador que decae como π^2/b^2 , por lo que el efecto indirecto se combina con el efecto directo para generar que el término forzador disminuya a un ritmo incluso mayor. Por su parte, el uso de un plasma de mayor densidad reduce la velocidad de grupo, por lo que su efecto es generar incrementos en todos los términos. Además, su influencia explícita sobre k_p se combina con el efecto indirecto para generar longitudes de onda más cortas $\lambda_p = 2\pi v_g/\omega_p$.

El efecto de la duración del pulso τ (correspondiente longitud $L = v_g \tau$) depende siempre del perfil del pulso, aunque para los perfiles utilizados hay una componente del término de fuerza que crece como L^2 . Nótese que en la región central constante del pulso RT el término forzador no depende de L . Sin embargo, pulsos de mayor duración incrementan la región de interacción entre el plasma y el pulso.

Por último, el efecto de la amplitud es incrementar el término forzador como E_0^2 . Sin embargo, es importante caracterizar el pulso por la intensidad en lugar de la amplitud

máxima del campo eléctrico E_0 . Dado que la ecuación incorpora la variable E_0 , se utiliza la expresión general del vector de Poynting promedio para los modos transversales eléctricos con el fin de relacionar E_0 con la intensidad del pulso

$$I_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 v_g E_0^2, \quad (3.17)$$

donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío, v_g es la velocidad de grupo en la guía de onda llena con plasma y E_0 es la amplitud máxima de la envolvente. A pesar de que el modelo no lo considera, se ha asumido que la envolvente del campo eléctrico tiene un factor $\cos \omega t$ que oscila a la frecuencia de microondas ω . Asimismo, la intensidad se considera en el punto máximo del pulso, es decir, en $\xi = L/2$ y $x = b/2$. Nótese que la expresión 3.17 introduce un factor v_g adicional en el denominador del término forzador de la Ec. 3.9, por lo que para una intensidad fija, la frecuencia de microondas, el ancho de la guía y la densidad del plasma modifican el valor de la amplitud del campo E_0 .

3.3 Solución analítica

Como se mencionó previamente, la ecuación del wake es una modificación de la ecuación del oscilador armónico simple que incluye un término no-lineal y un término forzador. Justamente, son estos términos los que dificultan la obtención de una solución analítica. En particular, el término forzador genera grandes complicaciones debido a su forma matemática compleja. Además, a lo largo de este trabajo se utilizan los tres perfiles de pulso introducidos previamente para resolver la ecuación diferencial del wake. De este modo, al considerar la dependencia del último término respecto al perfil del pulso, el enfoque analítico no sólo se hace complejo sino ineficiente. En consecuencia, el enfoque alternativo más adecuado es utilizar técnicas numéricas para aproximar la solución.

3.4 Solución numérica

Con el fin de resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales del wake para cada pulso se utilizan las condiciones iniciales $\phi(L) = 0$ y $d\phi(L)/d\xi = 0$, es decir, el potencial y el campo eléctrico se asumen nulos antes de que el pulso perturbe el plasma. Asimismo, se implementan los métodos de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) y de Runge-Kutta-Fehlberg de cuarto-quinto orden (RKF45) para realizar la integración numérica. El uso de múltiples métodos permite establecer un mecanismo de validación de resultados. En el Apéndice B se realiza una breve descripción de los aspectos más relevantes del algoritmo RKF45 y la subrutina que lo implementa, y en el Apéndice C se resuelve numéricamente la ecuación del oscilador armónico utilizando ambos métodos para analizar el error respecto a la solución analítica, lo que establece un mecanismo adicional de validación de resultados.

La ecuación (3.9) se normaliza utilizando los siguientes parámetros:

$$\text{Potencial} \quad \longrightarrow \quad \phi_N = \frac{en_0}{\epsilon_0 k_p^2} = \frac{en_0 v_g^2}{\epsilon_0 \omega_p^2} \quad (3.18)$$

$$\text{Campo eléctrico} \quad \longrightarrow \quad E_N = \frac{en_0}{\epsilon_0 k_p} = \frac{m_e v_g \omega_p}{e} \quad (3.19)$$

$$\text{Campo magnético} \quad \longrightarrow \quad B_N = \frac{en_0}{\epsilon_0 k_p c} = \frac{m_e v_g \omega_p}{ec} \quad (3.20)$$

$$\text{Distancia} \quad \longrightarrow \quad k_p^{-1} \quad (3.21)$$

$$\text{Velocidad} \quad \longrightarrow \quad c \quad (3.22)$$

donde $k_p = \omega_p/v_g$. Nótese que el parámetro de normalización del campo eléctrico es el campo de ruptura de onda en el caso no relativista, el cual depende explícitamente de la velocidad de grupo y de la frecuencia plásmica. Dado que esta cantidad separa el régimen lineal del régimen no lineal, el límite puede modificarse con la selección adecuada de los parámetros ω , n_0 y b .

De esta manera, la ecuación general del wake normalizada viene dada por

$$\phi^{*''} + \frac{1}{2}(\phi^{*'})^2 + \phi^* - \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\pi x^*}{b^*} \right) \left[\left(\frac{1}{v_g^{*2}} - 1 \right) E^{*2}(\xi^*) - B_z^{*2}(\xi^*) \right], \quad (3.23)$$

donde el superíndice * simboliza variables normalizadas.

La ecuación normalizada (Ec. 3.23) se expresa como un sistema de dos ecuaciones de primer orden, lo que permite aplicar los métodos previamente mencionados, y se resuelve desde $\xi = L$ hasta $\xi_{final} = -0,75$ [m] detrás del pulso (asumiendo que éste se propaga en la dirección positiva de z), lo que permite visualizar el wake generado en una escala adecuada. En el proceso de integración numérica se obtiene el valor del campo eléctrico (wakefield). Posteriormente, se complementan los resultados calculando la concentración electrónica asociada con la perturbación mediante la solución de la ecuación de Poisson en *diferencias finitas centradas de cuarto orden* utilizando los valores del potencial en la malla equidistante generada. Esto permite establecer un mecanismo de validación del modelo directamente mediante la evaluación de las perturbaciones generadas, teniendo en cuenta que se ha usado la aproximación $n_{e1} < n_0$ en su deducción. Es importante aclarar que la variable x aparece en la ecuación como un parámetro que modula transversalmente la amplitud del término forzador. Por esta razón, la ecuación se resuelve para la variable ξ utilizando alrededor de 200 valores de x con el fin de reconstruir el perfil del wakefield generado a lo ancho de la guía.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Wake, wakefield y densidad electrónica generados

En primer lugar, se resuelve la ecuación del wake para el pulso gaussiano utilizando parámetros típicos de microondas con el fin de mostrar el wake, wakefield y las perturbaciones de la concentración electrónica generados (ver Figura 4.1). En la gráfica se muestran los resultados numéricos obtenidos utilizando el método RK4 con un paso $h = 10^{-4}[m]$ y el método RKF45 con tolerancias al error relativo y absoluto $ABSEERR = RELEERR \simeq 1,49 \times 10^{-8}$ ¹ (estos parámetros se mantienen para todos los resultados presentados a lo largo de este capítulo a menos que se indique lo contrario). Dada la alta precisión de los métodos, la gráfica no muestra ninguna diferencia en las soluciones. Sin embargo, como se mencionó previamente, el uso de múltiples métodos valida los resultados al ser obtenidos de manera independiente.

El cociente entre la amplitud del wakefield y la amplitud máxima del campo de microondas es $E_{wf}/E_0 = 5,78$, lo que implica que el wakefield no sólo convierte el campo eléctrico transversal en un campo longitudinal, sino que lo amplifica en un factor considerable. La frecuencia de corte del sistema es $f_c = 5,15$ [GHz] y el wakefield generado tiene una longitud de onda $\lambda_p = 0,183$ [m]. El campo de ruptura de onda (no relativista) es $E_{wb} \simeq 10,2$ [MV/m] y las perturbaciones de la densidad electrónica son aproximadamente del 30%. Dado que el modelo es no relativista y débilmente no-lineal, es necesario satisfacer las condiciones $E_{wf} < E_{wb}$ y $n_{e1} < n_0$. Bajo estas circunstancias, microondas de intensidad moderada producen un wakefield de amplitud considerable. No obstante, la velocidad de grupo ($v_g = 0,77c$, $\gamma_p \simeq 1,57$) es un factor que limita el proceso de aceleración debido a que la *longitud de desfase* crece con la velocidad del wakefield, es decir, cuanto mayor es la velocidad de la onda plásmica, mayor es

¹Este valor es sugerido por la subrutina como el valor mínimo para las tolerancias utilizando precisión *double*.

la distancia de aceleración. En caso contrario, el proceso es similar a tener un campo eléctrico longitudinal “estático” de gran amplitud.

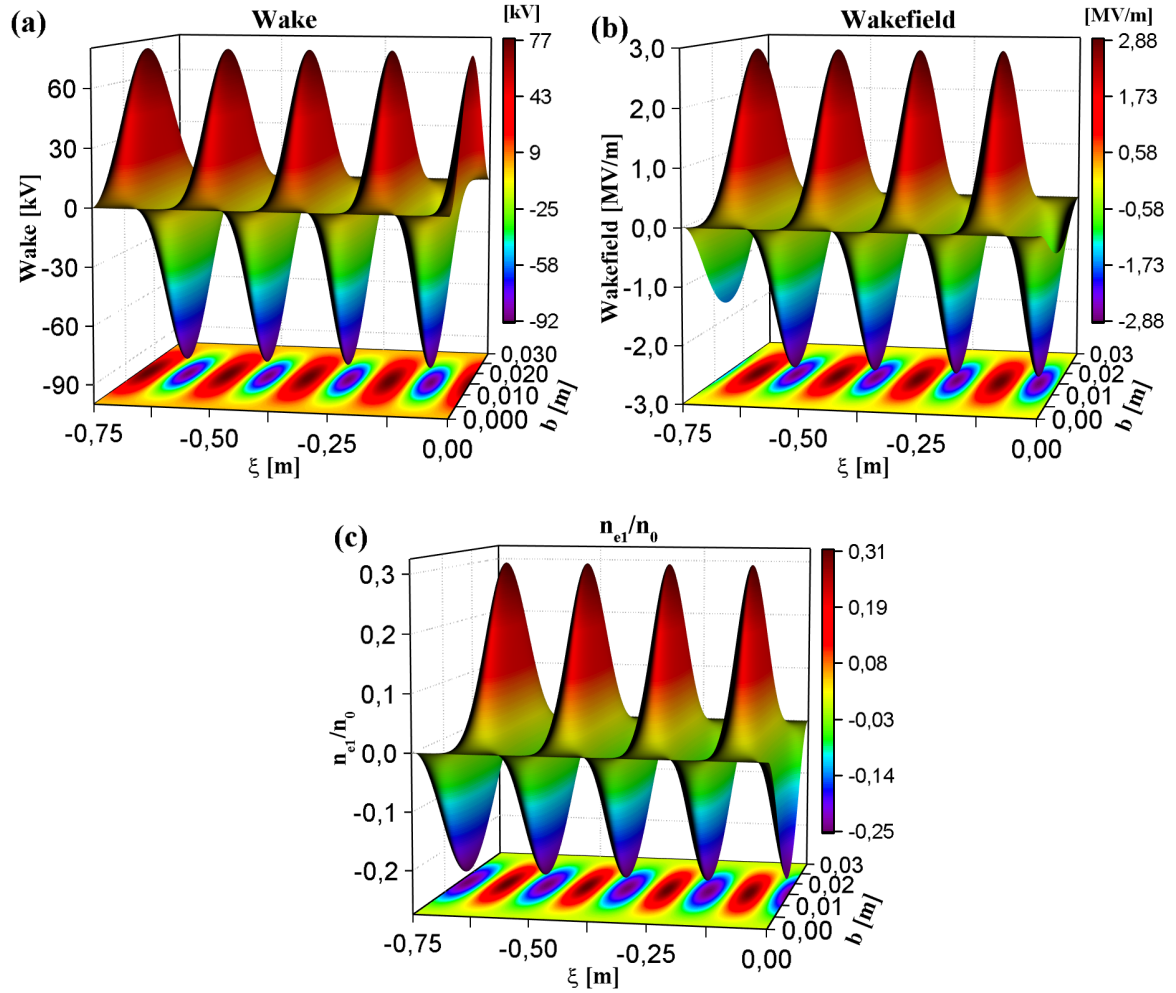


Figura 4.1: Resultados obtenidos con los parámetros $f = 8$ [GHz], $\tau = 0,8$ [ns], $I_0 = 0,25$ [GW/m²], $b = 0,03$ [m] y $\omega_p = 2\pi/\tau$ ($n_0 \simeq 1,9 \times 10^{16}$ [m⁻³]). (a) Wake, (b) Wakefield y (c) Perturbaciones de la concentración electrónica.

La Figura 4.2 muestra el wakefield generado por los pulsos senoidal y rectangular-triangular (RT) para los mismos parámetros de la Figura 4.1.

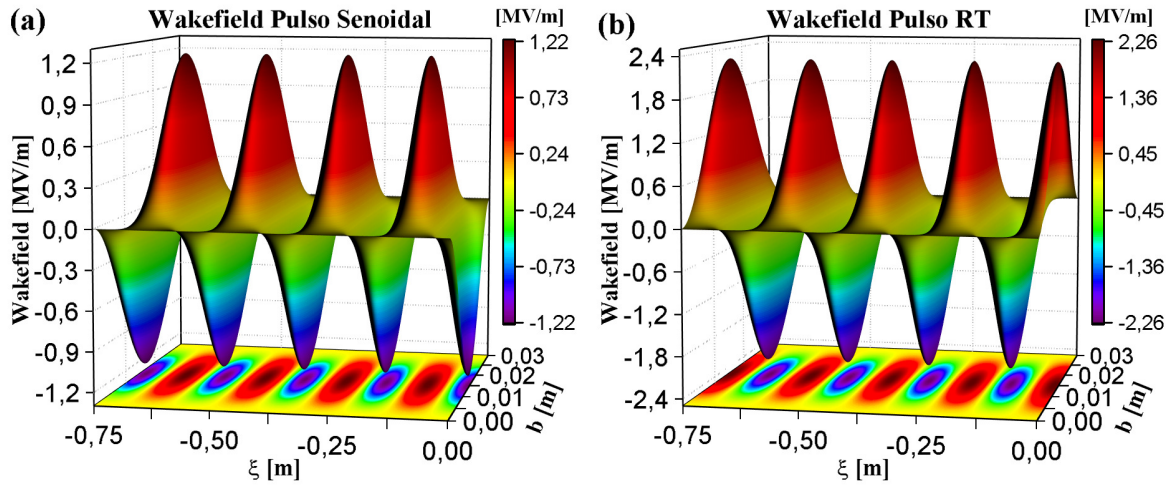


Figura 4.2: Wakefield generado por el pulso (a) Senoidal y (b) Rectangular triangular para los mismos parámetros de la Figura 4.1

Con el fin de estudiar la influencia de cada uno de los parámetros del sistema sobre la amplitud del wakefield, se resuelve la ecuación diferencial del wake para los tres pulsos variando en un rango amplio la frecuencia f , el ancho de la guía de onda b , la concentración de equilibrio del plasma n_0 , la intensidad máxima del pulso I_0 y su duración τ . Para todas las variaciones se asume la condición de resonancia $\tau = 1/f_p$, con la excepción de la duración del pulso, en cuyo caso se mantiene una densidad fija $n_0 = 1,8 \times 10^{16} \text{ [m}^{-3}\text{]}$ con el fin de analizar la interacción resonante. La amplitud del wake se calcula como la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo, la amplitud del wakefield se estima como el promedio de los valores mínimo y máximo (cuya diferencia en magnitud es mínima) y la amplitud de n_{e1} se toma como el valor máximo normalizado a n_0 . Los parámetros del sistema son idénticos a los de la Figura 4.1 excepto el valor que se varía.

Adicionalmente, la elaboración de las Figuras 4.3-4.7 requiere resolver una gran cantidad de veces la ecuación diferencial del wake (alrededor de 3000 veces) con el fin de obtener una buena resolución en las zonas de crecimiento rápido (cerca de 200 puntos). Por esta razón, el uso del método RKF45 adquiere relevancia debido a que calcula la solución en un tiempo significativamente menor que el método RK4. De este modo, las líneas sólidas representan la solución calculada por el método RKF45 y los puntos sobre las curvas representan un muestreo de control calculado con el método RK4.

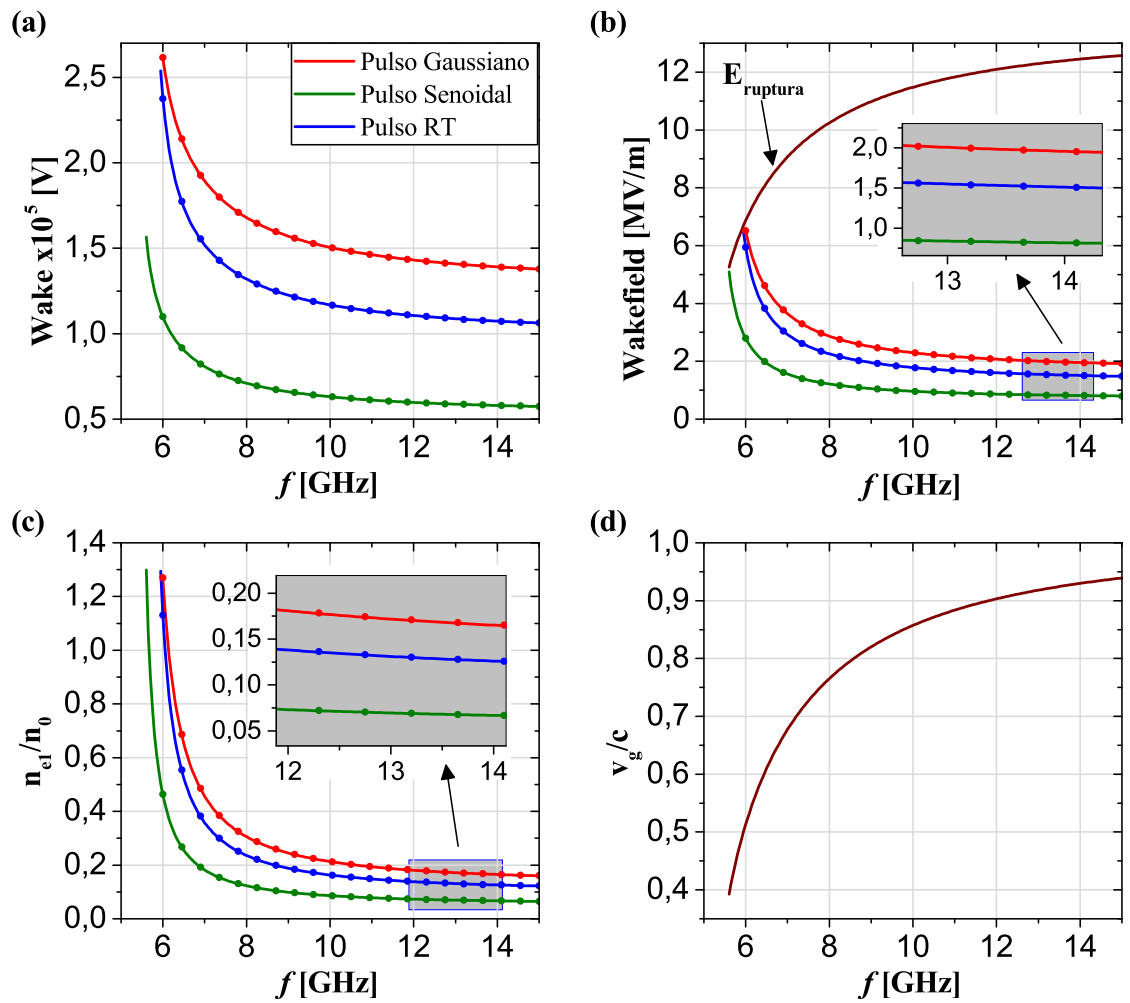


Figura 4.3: Amplitud vs frecuencia para los pulsos gaussiano (rojo), senoidal (verde) y rectangular-triangular (azul). (a) Wake, (b) Wakefield, (c) Densidad electrónica y (d) Velocidad de grupo.

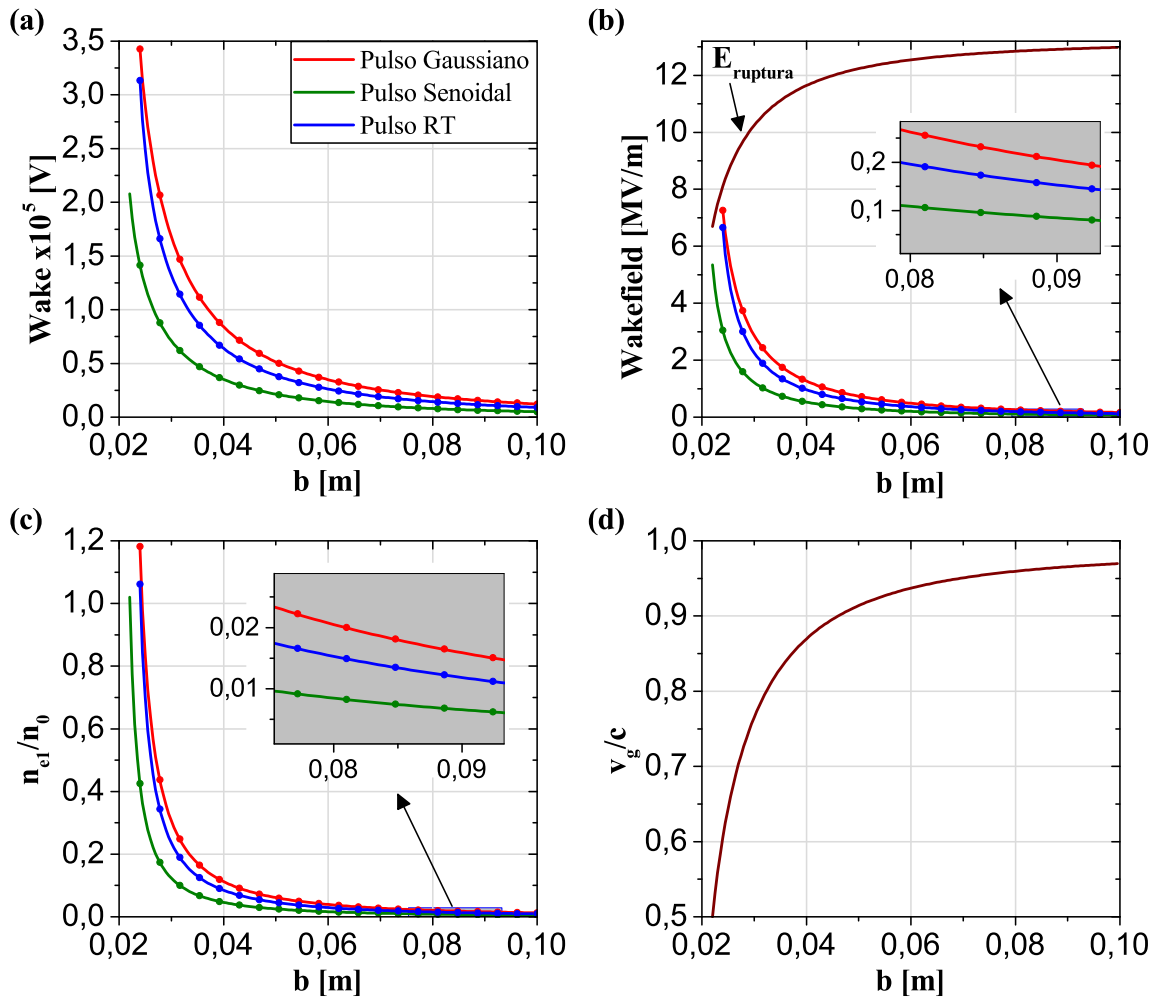


Figura 4.4: Amplitud vs ancho de la guía de onda para los pulsos gaussiano (rojo), senoidal (verde) y rectangular-triangular (azul). (a) Wake, (b) Wakefield, (c) Densidad electrónica y (d) Velocidad de grupo.

Los incrementos de frecuencia f y ancho de la guía de onda b reducen la amplitud del wakefield por el crecimiento de la velocidad de grupo y su influencia sobre el término forzador de la ecuación del wake. El ancho de la guía muestra una reducción mayor debido a la aparición explícita en el denominador del término forzador que refuerza la reducción implícita en v_g .

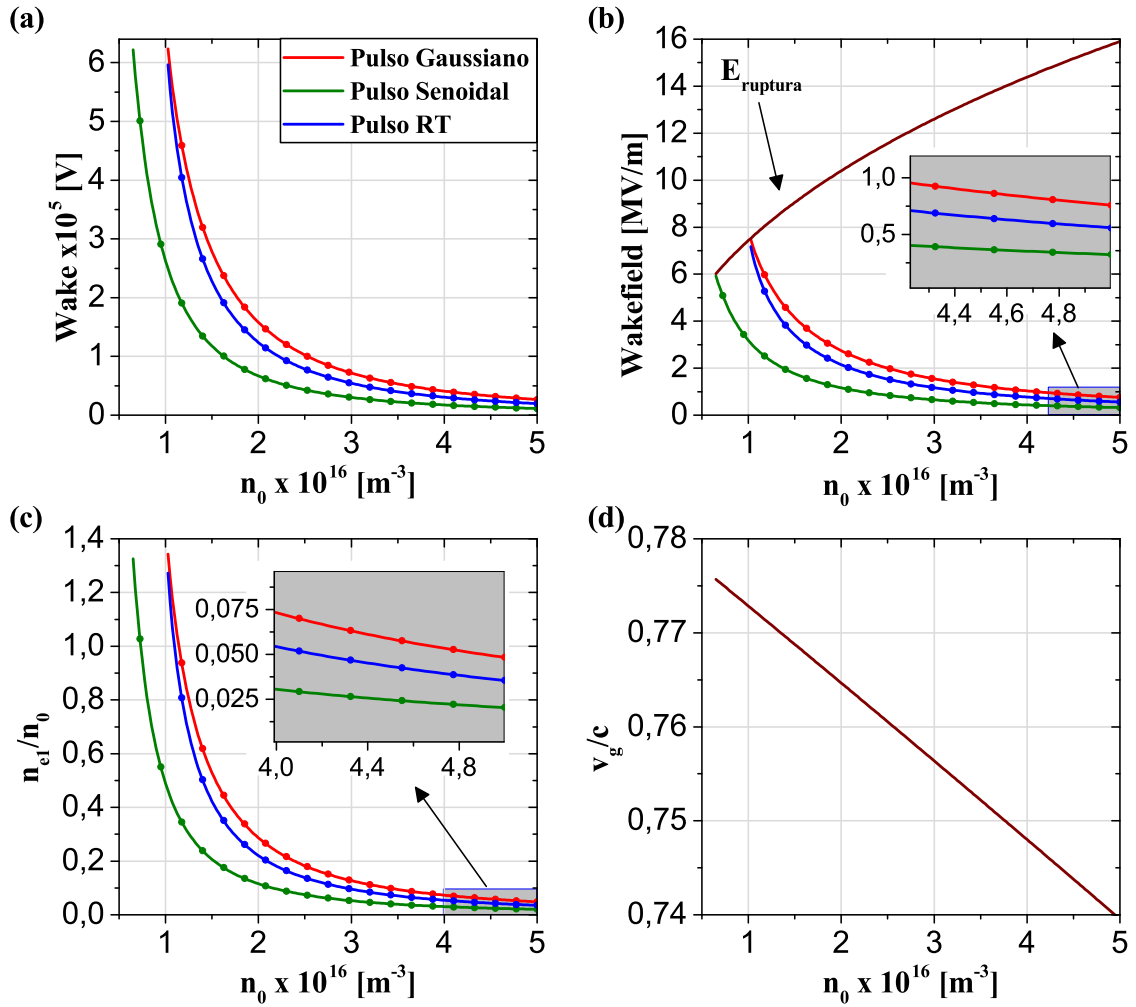


Figura 4.5: Amplitud vs densidad plásmica para los pulsos gaussiano (rojo), senoidal (verde) y rectangular-triangular (azul). (a) Wake, (b) Wakefield, (c) Densidad electrónica y (d) Velocidad de grupo.

Por otra parte, el uso de plasmas de mayor densidad reduce la amplitud del wakefield por la reducción de las perturbaciones debido a que el campo eléctrico y la velocidad de grupo se mantienen aproximadamente constantes. La fuerte dependencia se debe principalmente a la reducción de la duración del pulso para satisfacer la condición de resonancia, dado que la componente dominante del término forzador crece cuadráticamente con la longitud del pulso $L = v_g \tau$. Asimismo, el campo de ruptura de onda se incrementa considerablemente por el incremento de la frecuencia plásmica, lo que permitiría excitar ondas plásmicas de mayor amplitud con la disponibilidad de mayor intensidad de microondas o, alternativamente, la implementación de un esquema multipulsos que incremente progresivamente la amplitud del wakefield.

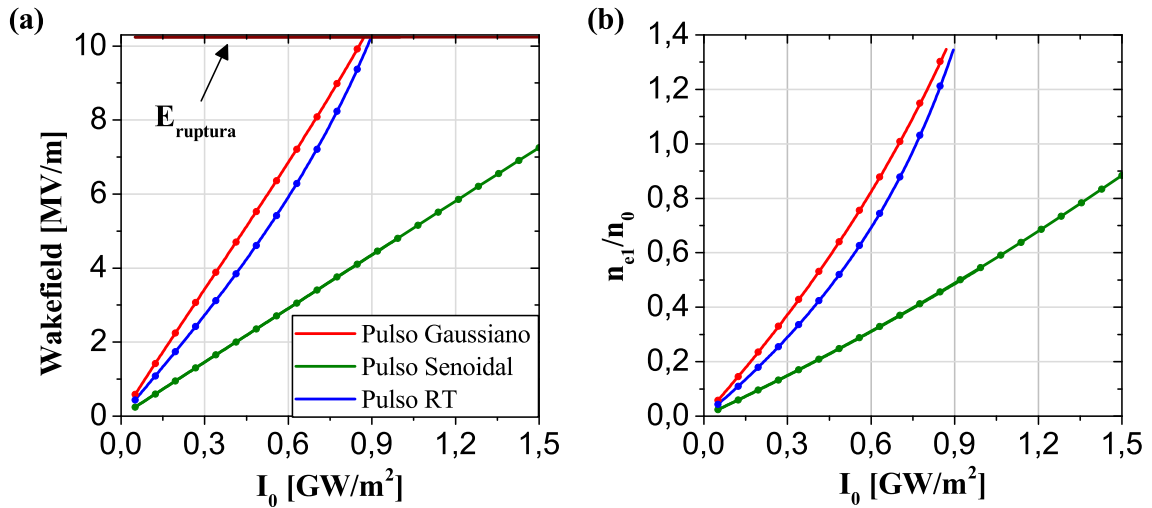


Figura 4.6: Amplitud vs intensidad para los pulsos gaussiano (rojo), senoidal (verde) y rectangular-triangular (azul). (a) Wake, (b) Wakefield, (c) Densidad electrónica y (d) Velocidad de grupo.

Las gráficas de amplitud vs intensidad (ver Figura 4.7) muestran una dependencia fuerte de los pulsos gaussiano y rectangular-triangular, la cual es muy similar para estas envolventes. Por su parte, la amplitud del wakefield crece a un ritmo menor al incrementar la intensidad utilizando un pulso senoidal.

Las curvas de amplitud en función de la duración del pulso (ver Figura 4.7) muestran un comportamiento menos monótono. La interacción resonante que origina un pico de amplitud para una duración de pulso específica sólo se observa para el pulso senoidal, la cual muestra una periodicidad. El pulso gaussiano exhibe un crecimiento continuo que cambia levemente la pendiente en algunas regiones. El pulso RT muestra un crecimiento rápido que se detiene para duraciones de pulso cercanas a $\tau = 1/f_p$ y luego crece a un ritmo que sale rápidamente de la región de validez del modelo. La periodicidad de los máximos para el pulso senoidal coincide en buena medida con el periodo de la onda plásmica. Además, en las regiones de gran amplitud este periodo se hace mayor, lo que coincide con el crecimiento del periodo plásmico en el régimen no-lineal.

El crecimiento progresivo de la amplitud con la longitud del pulso (ver Figura 4.7) se debe a que una componente del término forzador crece cuadráticamente con $L = v_g \tau$. Sin embargo, por la naturaleza de la interacción del pulso con el plasma, debe existir una duración de pulso que maximice la transferencia de energía. En la interacción láser-plasma, cuando la longitud del pulso excede considerablemente la longitud de onda plásmica, surgen inestabilidades que modulan el pulso largo en pulsos más cortos, por lo que es de esperarse que este proceso también ocurra en la interacción con microondas. No obstante, el modelado de este fenómeno implica considerar la evolución del pulso y, dado que la ecuación del wake se deduce en el marco de la aproximación cuasiestática, el efecto no puede ser descrito por esta ecuación, por lo que los resultados pueden

considerarse no válidos físicamente cuando L excede considerablemente λ_p ².

Por otra parte, la Figura 4.7.d muestra el cociente entre la amplitud del wakefield y el valor máximo de campo eléctrico para el pulso de microondas. Tomando en cuenta el rango de validez del modelo, se pueden alcanzar cocientes del orden de $E_{wf}/E_0 = 11$, por lo que la amplificación del campo es alta incluso restringiendo el rango de validez de los resultados.

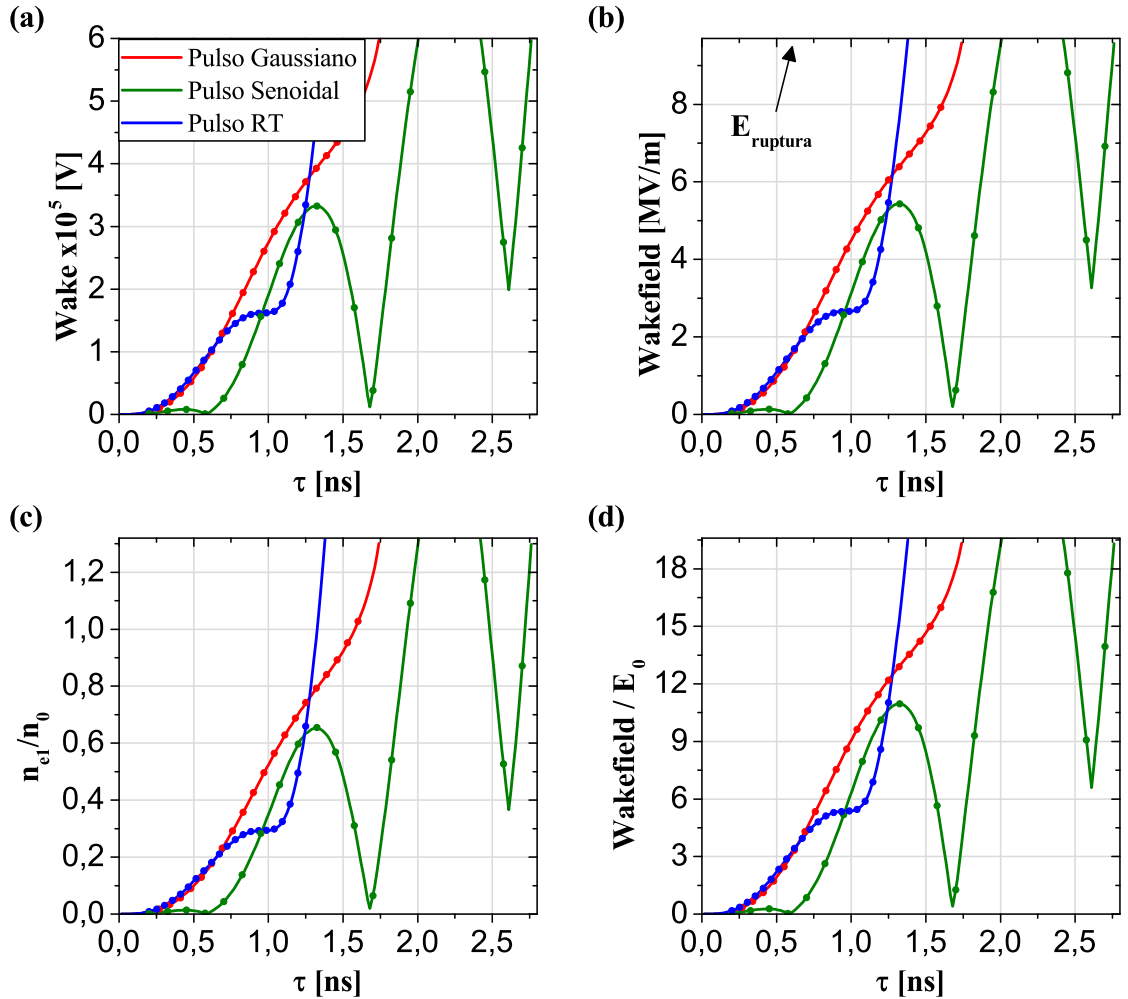


Figura 4.7: Amplitud vs duración del pulso para los pulsos gaussiano (rojo), senoidal (verde) y rectangular-triangular (azul). (a) Wake, (b) Wakefield, (c) Densidad electrónica y (d) Cociente entre el wakefield y el campo eléctrico de microondas.

El uso de duraciones de pulso que minimizan la amplitud del wakefield para el pulso

²En realidad la inestabilidad de auto-modulación ha sido estudiada utilizando teorías cuasiestáticas. Sin embargo, el modelo se resuelve de forma iterativa actualizando el estado del forzador en cada iteración mediante una ecuación que describe su evolución [6, 7, 9].

senoidal lleva a la generación de un wakefield con la distribución mostrada en la Figura 4.8, lo cual es una modulación transversal de la amplitud diferente a la esperada para el modo TE_{10} y generada por el efecto de la no-linealidad. Este efecto también es descrito por *Aria y Malik* en [1] para el pulso gaussiano y lo atribuyen a una inestabilidad que surge al usar frecuencias cercanas a la frecuencia de corte. En nuestro caso, el efecto sólo se evidencia para el pulso senoidal y se muestra que ocurre para duraciones muy precisas de pulso que minimizan la amplitud del wakefield, aunque también es sensible a la variación de los demás parámetros del sistema incluyendo la intensidad. De hecho, este efecto es tan sensible a pequeñas variaciones de los parámetros, que se debe usar un paso $h = 10^{-5}$ [m] para hacer coincidir las soluciones por los métodos RK4 y RK45, e incluso se aprecian diferencias sutiles en la Figura 4.8.a.

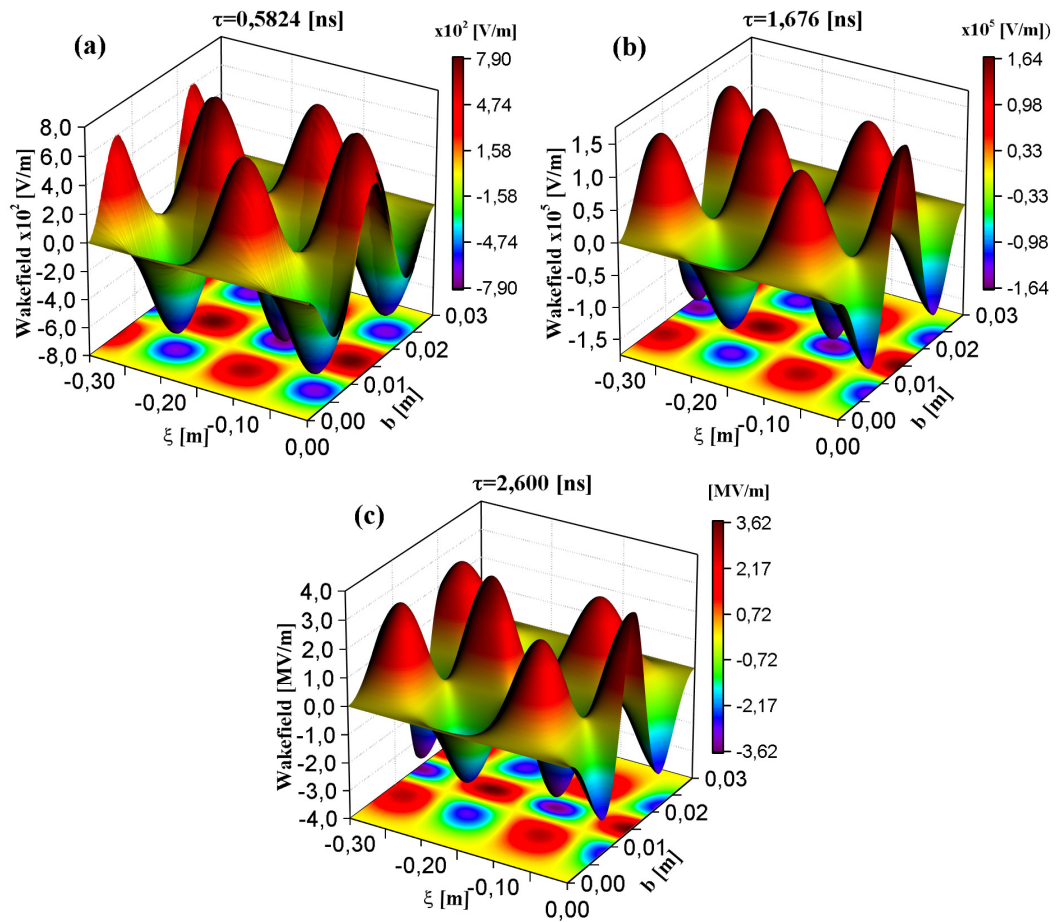


Figura 4.8: Wakefield generado por el pulso senoidal para los parámetros $f = 8$ [GHz], $I_0 = 0,25$ [W/m²], $b = 0,03$ [m], $n_0 = 1,8 \times 10^{16}$ [m⁻³] y (a) $\tau = 0,5824$ [ns], (b) $\tau = 1,676$ [ns] y (c) $\tau = 2,600$ [ns].

4.2 Energía ganada por un electrón

A continuación, se realiza una selección adecuada de los parámetros del sistema buscando la obtención de una velocidad de grupo alta, acompañada de un wakefield de amplitud apreciable con el fin de realizar un *estimado áspero* de la energía máxima alcanzada por un electrón utilizando la *longitud de desfase*. El proceso se realiza utilizando el pulso gaussiano debido a que éste modela de mejor manera los pulsos generados experimentalmente.

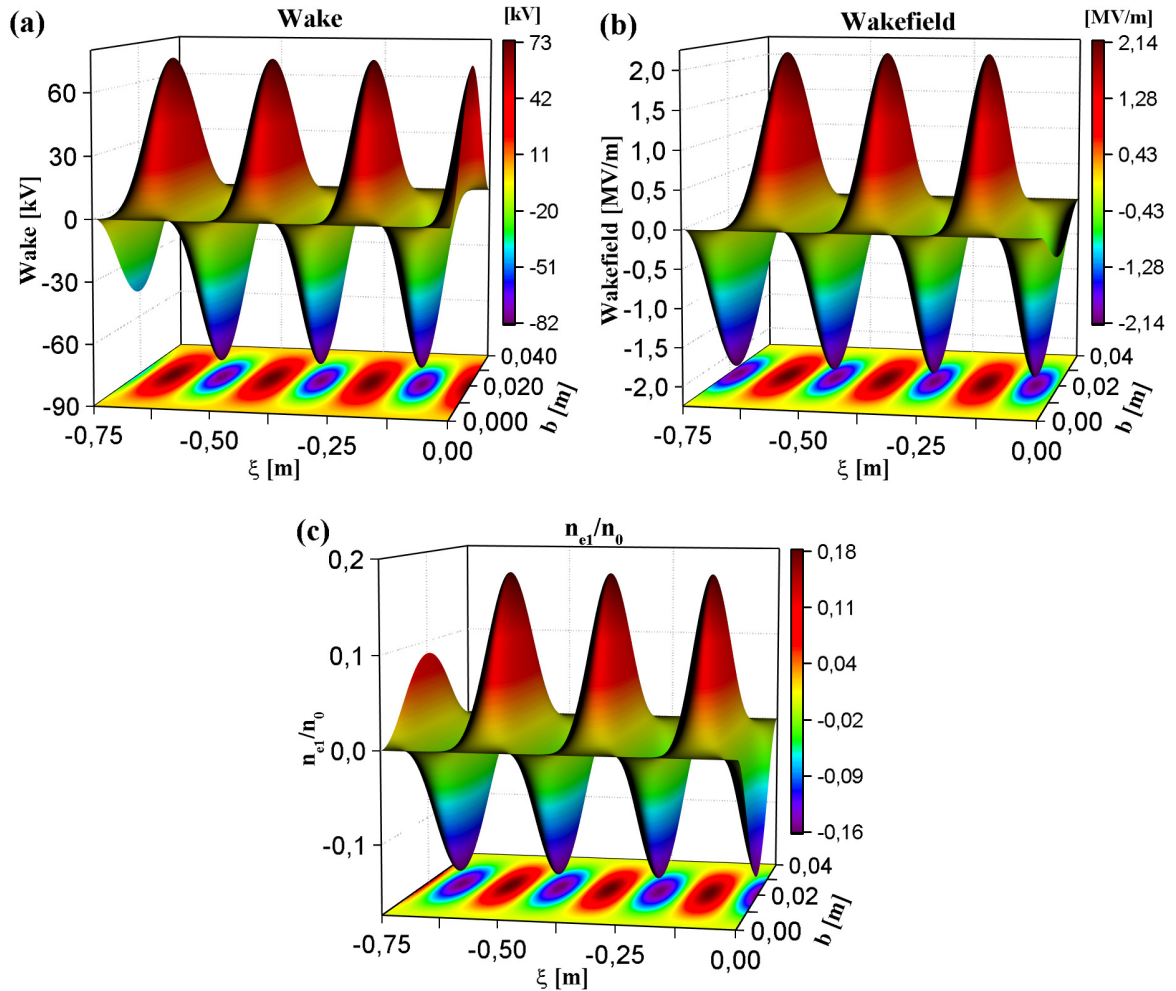


Figura 4.9: Onda plásmica generada para los parámetros $f = 12$ [GHz], $b = 0,04$ [m], $I_0 = 0,5$ [GW/m²], $\tau = 0,8$ [ns] (correspondiente concentración plásmica $n_0 = 1,94$ [m⁻³]).

Con estos parámetros se obtiene un wakefield de amplitud $E_{wf} = 2,13$ [MV/m] con un wake correspondiente $\phi_{wf} = 154$ [kV] (de mínimo a máximo) y una velocidad de

fase $v_g = 0,944c$ ($\gamma = 3,03$). Con esto, las amplitudes se hacen menores en relación a los datos mostrados previamente. Sin embargo, se logra incrementar notablemente la velocidad de grupo, lo que implica una mayor distancia de aceleración. Además, las perturbaciones de la concentración electrónica son alrededor del 18%, por lo que el uso de mayor intensidad incrementaría la amplitud del wakefield (linealmente según los resultados de la Figura 4.6).

El análisis es muy similar al usado para obtener la expresión 1.5 aunque se omite la aproximación $\gamma_p \gg 1$ en vista de la reducción de v_g con el uso de microondas. Se asume que un electrón se mueve a velocidad constante c (excediendo la velocidad de fase del wakefield). La primera mitad de la longitud de onda plásmica corresponde a la región en la que el campo es acelerador, es decir, una distancia $\lambda_p/2$. Así, la distancia recorrida por el electrón antes de ingresar en la región de frenado es

$$L_d = \frac{\lambda_p}{2 \left(1 - \frac{v_p}{c}\right)} \quad (4.1)$$

donde $v_p = v_g$ es la velocidad de fase de la onda plásmica y la duración de la interacción es $t_d = L_d/c$. Nótese que asumir un electrón que se mueve a menor velocidad sólo extiende la longitud de desfase y la duración de la interacción (electrones más lentos).

El uso de la Ec. 4.1 con los parámetros de la Figura 4.9 genera una longitud de desfase $L_d = 2,03$ [m]. Un estimado de la *energía máxima* ganada por un electrón utilizando la amplitud del wakefield muestra que se pueden alcanzar energías hasta $W_{max} = eE_{wf}L_d \simeq 4,3$ [MeV]. Es necesario aclarar que este resultado corresponde a un modelo unidimensional. En la aceleración láser wakefield en dos dimensiones la longitud de desfase se reduce a la mitad debido a que sólo durante un cuarto del periodo plásmico el campo es acelerador y la fuerza transversal es de enfoque. En el otro cuarto de periodo el campo es acelerador pero la fuerza invierte su dirección, por lo que la aceleración de un haz se vería fuertemente afectada. *Malik* estimó ganancias de energía de hasta $W = 360$ [keV] con una amplitud de campo de $E_{wf} = 1,2$ [MV/m] [17]. Sin embargo, en sus cálculos se consideró que la aceleración se producía únicamente en una distancia λ_p , omitiendo el cálculo de la longitud de desfase.

Por otra parte, la ecuación del wake muestra un crecimiento de E_{wf} con la reducción de la velocidad de grupo. Sin embargo, esto puede resultar beneficioso en función de la energía que se requiera alcanzar, dado que mayores gradientes transfieren más energía en distancias más cortas. Por esta misma razón, el incremento de la velocidad de grupo reduce la amplitud del wake, por lo que se requeriría mayor preaceleración de las partículas con el fin de que la onda plásmica las capture y acelere apropiadamente. Otro aspecto que requiere especial atención es la distancia máxima que el pulso se propaga en el plasma antes de transferir completamente su energía, efecto conocido como “pump depletion”, el cual puede reducir eventualmente la distancia de aceleración. No obstante, su análisis requiere considerar la evolución del pulso y, aunque existen modelos que permiten estimar esta distancia para pulsos láser [6,7], éstos no se consideran a lo largo de este trabajo porque requieren modificaciones cuidadosas y detalladas. Una ventaja

de las microondas es que al enfocarse en un área fija la energía electromagnética, la distancia de aceleración no se ve afectada por la longitud de Rayleigh que caracteriza la escala en la que el área de enfoque del láser crece considerablemente reduciendo su intensidad.

4.3 Restricciones del modelo

En la aceleración wakefield la fuerza ponderomotriz transversal es un elemento de gran importancia que adquiere relevancia siempre que la escala del gradiente de intensidad transversal sea del orden de la longitud de onda plásmica. Este efecto es omitido en el modelo bajo análisis y su inclusión lleva a un sistema de ecuaciones altamente complejo, por lo que su estudio de manera analítica está muy limitado. Con el fin de comprobar las amplitudes predichas por la ecuación del wake, el efecto transversal debe estudiarse en detalle.

Por otra parte, de acuerdo con los resultados de la Figura 4.7, la ecuación diferencial no modela de manera adecuada la interacción resonante entre el pulso y el plasma. Por esta razón, el rango de validez de los resultados debe restringirse a duraciones de pulso cercanas a la región de resonancia $\tau \simeq f_p^{-1}$ que, en términos generales, se ha demostrado ampliamente en la literatura como el valor que maximiza la amplitud del wakefield para pulsos láser. *Aria* y *Malik* han presentado resultados de este modelo que predicen amplitudes excediendo el campo de ruptura de onda y/o utilizando duraciones de pulso muy superiores al valor de resonancia [1, 20]. Como se ha mencionado previamente, la interacción de pulsos largos con el plasma es inestable y genera efectos que crecen en el tiempo, de tal forma que una teoría no autoconsistente no es apta para modelar esta interacción. Asimismo, la amplitud del wakefield puede exceder físicamente el campo de ruptura de onda clásico, sin embargo, el modelado de este efecto requiere una teoría que describa la dinámica relativista de los electrones. Por esta razón, en nuestros resultados se impone E_{wb} como el límite superior teniendo en cuenta que la ecuación modela bien los efectos débilmente no lineales. Asimismo, el cálculo de las perturbaciones permite generar otro parámetro de control del rango de validez del modelo debido a que en el régimen débilmente no-lineal se debe satisfacer $n_{e1} < n_0$.

4.4 Notas finales

En vista del alto crecimiento de las escalas espacial y temporal respecto al láser y las limitaciones de potencia de las fuentes actuales de microondas, se propone considerar el uso de un esquema multipulsos para incrementar progresivamente la amplitud del wakefield. Este proceso dependerá del ritmo al que una fuente dada permita generar los pulsos. Sin embargo, el crecimiento de la longitud de onda permite una calibración precisa, lo que puede resultar en wakefields de amplitud mucho mayor que los valores descritos en este trabajo que permitirían alcanzar las mismas energías en distancias

mucho menores.

Por otra parte, desde un punto de vista práctico, se hace especial énfasis en la importancia de implementar un mecanismo para confinar transversalmente los electrones acelerados. El wakefield transversal generado con pulsos láser establece automáticamente un mecanismo de confinamiento en estas direcciones, al menos en determinadas regiones, debido al efecto ponderomotriz. Sin embargo, el modo TE_{10} tiene simetría en la dirección del campo eléctrico, por lo que no hay un efecto ponderomotriz análogo al láser y cualquier perturbación podría generar la desviación de los electrones en esta dirección.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

- Se realizó una revisión de la teoría asociada a la aceleración wakefield impulsada por láser y los elementos fundamentales del proceso. Asimismo, se identificaron las ventajas y los factores relevantes para la adaptación del fenómeno al uso de microondas y guías de onda, incluyendo los modos transversales eléctricos TE_{mn} y magnéticos TM_{mn} , entre los cuales se determinó que los modos de orden inferior son los más convenientes en vista de maximizar la velocidad de grupo. Además, se determinó que las microondas permiten una drástica reducción de los costos económicos y la sofisticación instrumental para la realización de experimentos y/o aplicaciones de la aceleración wakefield, con el coste de la reducción en la máxima energía alcanzada por los electrones.
- Se establecieron las limitaciones del modelo de *Aria* y *Malik* para predecir el fenómeno de resonancia en la interacción del pulso electromagnético con el plasma. Sin embargo, se propuso un rango de operación más allá del cual las predicciones realizadas no pueden coincidir con la física del proceso debido a las bases sobre las que se construye el modelo. Asimismo, se establecieron dos mecanismos de control sobre el rango de validez del modelo en relación con la amplitud del wakefield basados en el campo de ruptura de onda y en las perturbaciones de la concentración electrónica.
- Se realizó una estimación de la energía ganada por un electrón inyectado en el wakefield generado. En este aspecto, se hace énfasis en la importancia de optimizar la amplitud máxima del wakefield y la velocidad de grupo máxima en vista de su relación inversa de acuerdo con las predicciones del modelo. Se propone el uso de pulsos de frecuencia considerablemente mayor que la frecuencia de corte, con el objetivo de maximizar la velocidad de grupo y compensar la reducción de la amplitud del wakefield incrementando la intensidad. Alternativamente, en ausencia de fuentes de microondas de mayor potencia, se propone la implementación de

un esquema multipulso que permita incrementar progresivamente la amplitud de la onda plásmica. En vista del gran incremento de la longitud de onda plásmica al sustituir el láser por microondas (1000-10000 veces), el proceso de calibración del retardo entre pulsos consecutivos requiere una precisión mucho menor que el proceso análogo utilizando pulsos láser.

- En la solución de la ecuación del wake, se implementó un método de integración numérica con control del error (RKF45) que mejora la precisión del método de Runge-Kutta de cuarto orden y resuelve la ecuación en un tiempo de ejecución significativamente menor. Esto permitió analizar las variaciones de la amplitud del wakefield respecto a múltiples parámetros del sistema, en un amplio rango y con una buena resolución (alrededor de 200 puntos), eliminando el tiempo de ejecución del programa como un factor limitante. Asimismo, la implementación de dos métodos de manera independiente genera un soporte adicional para los resultados obtenidos.
- Mediante el estudio realizado, no sólo se determinó que con la selección adecuada de los parámetros del sistema las microondas pueden ser viables para la generación de ondas plásmicas de gran amplitud, sino que se identificaron los aspectos físicos y técnicos más relevantes del sistema físico bajo análisis. Esto genera una base sólida y un buen punto de partida para profundizar el estudio incorporando elementos físicos al sistema, tal como la excitación de otros modos en la guía de onda, la incorporación del efecto ponderomotriz transversal, el efecto de la dinámica relativista, la evolución del pulso, entre otros.

REFERENCIAS

- [1] Anil Kumar Aria and Hitendra Kumar Malik. Wakefield generation in a plasma filled rectangular waveguide. *Open Plasma Physics Journal*, 1:1–8, 2008.
- [2] T Tajima and JM Dawson. Laser electron accelerator. *Physical Review Letters*, 43(4):267, 1979.
- [3] Donna Strickland and Gerard Mourou. Compression of amplified chirped optical pulses. *Optics communications*, 55(6):447–449, 1985.
- [4] JP Watteau, G Bonnaud, J Coutant, R Dautray, A Decoster, M Louis-Jacquet, J Ouvry, J Sauteret, S Seznec, and D Teychenné. Experimental program on the 20 tw laser system. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 4(7):2217–2223, 1992.
- [5] Michael D Perry, Gerard Mourou, et al. Terawatt to petawatt subpicosecond lasers. *Science-AAAS-Weekly Paper Edition-including Guide to Scientific Information*, 264(5161):917–923, 1994.
- [6] Eric Esarey, Phillip Sprangle, Jonathan Krall, and Antonio Ting. Overview of plasma-based accelerator concepts. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 24(2):252–288, 1996.
- [7] E Esarey, CB Schroeder, and WP Leemans. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators. *Reviews of Modern Physics*, 81(3):1229, 2009.
- [8] J Krall, A Ting, E Esarey, and P Sprangle. Self-modulated-laser wakefield acceleration. In *Particle Accelerator Conference, 1993., Proceedings of the 1993*, pages 2629–2631. IEEE, 1993.
- [9] Eric Esarey, Phillip Sprangle, Jonathan Krall, Antonio Ting, and Glenn Joyce. Optically guided laser wake-field acceleration. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 5(7):2690–2697, 1993.
- [10] Pisin Chen, JM Dawson, Robert W Huff, and T Katsouleas. Acceleration of electrons by the interaction of a bunched electron beam with a plasma. *Physical review letters*, 54(7):693, 1985.

-
- [11] F Amiranoff, S Baton, D Bernard, B Cros, D Descamps, F Dorchies, F Jacquet, Victor Malka, JR Marques, G Matthieussent, et al. Observation of laser wakefield acceleration of electrons. *Physical Review Letters*, 81(5):995, 1998.
- [12] H Hamster, A Sullivan, S Gordon, W White, and RW Falcone. Subpicosecond, electromagnetic pulses from intense laser-plasma interaction. *Physical Review Letters*, 71(17):2725, 1993.
- [13] Ian Blumenfeld, Christopher E Clayton, Franz-Josef Decker, Mark J Hogan, Chengkun Huang, Rasmus Ischebeck, Richard Iverson, Chandrashekhar Joshi, Thomas Katsouleas, Neil Kirby, et al. Energy doubling of 42 gev electrons in a metre-scale plasma wakefield accelerator. *Nature*, 445(7129):741–744, 2007.
- [14] CE Clayton, JE Ralph, F Albert, RA Fonseca, SH Glenzer, C Joshi, W Lu, KA Marsh, SF Martins, WB Mori, et al. Self-guided laser wakefield acceleration beyond 1 gev using ionization-induced injection. *Physical Review Letters*, 105(10):105003, 2010.
- [15] M Litos, E Adli, JM Allen, W An, CI Clarke, Sébastien Corde, CE Clayton, J Frederico, SJ Gessner, SZ Green, et al. 9 gev energy gain in a beam-driven plasma wakefield accelerator. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 58(3):034017, 2016.
- [16] SS Baturin, IL Sheinman, AM Altmark, and AD Kanareikin. Wakefield radiation generated by an electron bunch in a rectangular dielectric waveguide. *Technical Physics*, 57(5):683–692, 2012.
- [17] Hitendra K Malik. Analytical calculations of wake field generated by microwave pulses in a plasma filled waveguide for electron acceleration. *Journal of Applied Physics*, 104(5):053308, 2008.
- [18] Sanjay K Tomar and Hitendra K Malik. Density modification by two superposing te₁₀ modes in a plasma filled rectangular waveguide. *Physics of Plasmas*, 20(7):072101, 2013.
- [19] Hitendra K Malik. Effect of plasma density on proton acceleration in a rectangular waveguide. *Plasma Science and Technology*, 6(5):2456, 2004.
- [20] AK Aria, HK Malik, and KP Singh. Excitation of wakefield in a rectangular waveguide: Comparative study with different microwave pulses. *Laser and Particle Beams*, 27(1):41–47, 2009.
- [21] Hitendra K Malik and Anil K Aria. Microwave and plasma interaction in a rectangular waveguide: Effect of ponderomotive force. *Journal of Applied Physics*, 108(1):013109, 2010.

- [22] Anil K Aria and Hitendra K Malik. Numerical studies on wakefield excited by gaussian-like microwave pulse in a plasma filled waveguide. *Optics Communications*, 282(3):423–426, 2009.
- [23] Abbas Abdoli-Arani. Acceleration and deflection of an electron inside the circular sectoral plasma waveguides. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 41(11):3109–3114, 2013.
- [24] Abbas Abdoli-Arani, Bahram Jazi, and Babak Shokri. Acceleration of an electron inside the circular and elliptical waveguides by microwave radiation. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 41(1):62–69, 2013.
- [25] A Abdoli-Arani, B Jazi, and B Shokri. Acceleration and dynamics of an electron in the degenerate and magnetized plasma elliptical waveguide. *Physics of Plasmas*, 20(2):023104, 2013.
- [26] A Abdoli-Arani. Influence of ponderomotive force on the microwave and plasma interaction in an elliptical waveguide. *Physics of Plasmas*, 21(2):023506, 2014.
- [27] A Abdoli-Arani. The effect of ponderomotive force on the density in the interaction of two superposing fundamental modes with plasma in an elliptical waveguide. *Plasma Sources Science and Technology*, 23(6):065027, 2014.
- [28] Alexei Kanareykin. Cherenkov radiation and dielectric based accelerating structures: Wakefield generation, power extraction and energy transfer efficiency. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 236, page 012032. IOP Publishing, 2010.
- [29] I Onishchenko, V Kiselev, and G Sotnikov. Wakefield excitation in dielectric waveguides by a sequence of relativistic electron bunches. In *Plasma Sciences (ICOPS) held with 2014 IEEE International Conference on High-Power Particle Beams (BEAMS), 2014 IEEE 41st International Conference on*, pages 1–6. IEEE, 2014.
- [30] Y. P. Bliokh, J. G. Leopold, G. Shafir, A. Shlapakovski, and Ya. E. Krasik. Wakefield in a waveguide. *Physics of Plasmas*, 24(6):063112, 2017.
- [31] G. Shafir, A. Shlapakovski, M. Siman-Tov, Yu. Bliokh, J. G. Leopold, S. Gleizer, R. Gad, V. V. Rostov, and Ya. E. Krasik. High power microwave source for a plasma wakefield experiment. *Journal of Applied Physics*, 121(3):033301, 2017.
- [32] DJ Sullivan and BB Godfrey. Simulation of the plasma beatwave accelerator. In *Proc. of the ECPA-RAL Meeting, Oxford*, page 209, 1982.
- [33] Paul M Bellan. *Fundamentals of plasma physics*. Cambridge University Press, 2008.

- [34] Hitendra K Malik. Electromagnetic waves and their application to charged particle acceleration. In *Wave Propagation Theories and Applications*. InTech, 2013.
- [35] Ronald D Ruth, PL Morton, Perry B Wilson, and AW Chao. A plasma wake field accelerator. *Part. Accel.*, 17(SLAC-PUB-3374):171, 1984.
- [36] Pisin Chen, JJ Su, JM Dawson, Karl Leopold Freitag Bane, and PB Wilson. Energy transfer in the plasma wake-field accelerator. *Physical review letters*, 56(12):1252, 1986.
- [37] James Rosenzweig. Nonlinear plasma dynamics in the plasma wakefield accelerator. *IEEE transactions on plasma science*, 15(2):186–191, 1987.
- [38] Advanced wakefield experiment, 2013 [Mar. 10, 2018]. URL:<http://awake.web.cern.ch/awake/>.
- [39] C. McGuffey, A. G. R. Thomas, W. Schumaker, T. Matsuoka, V. Chvykov, F. J. Dollar, G. Kalintchenko, V. Yanovsky, A. Maksimchuk, K. Krushelnick, V. Yu. Bychenkov, I. V. Glazyrin, and A. V. Karpeev. Ionization induced trapping in a laser wakefield accelerator. *Phys. Rev. Lett.*, 104:025004, Jan 2010.
- [40] M. Chen, E. Esarey, C. B. Schroeder, C. G. R. Geddes, and W. P. Leemans. Theory of ionization-induced trapping in laser-plasma accelerators. *Physics of Plasmas*, 19(3):033101, 2012.
- [41] Han Xu, Wei Yu, Peixiang Lu, V. K. Senecha, Feng He, Baifei Shen, Liejia Qian, Ruxin Li, and Zhizhan Xu. Electron self-injection and acceleration driven by a tightly focused intense laser beam in an underdense plasma. *Physics of Plasmas*, 12(1):013105, 2005.
- [42] J. Vieira, R.A. Fonseca, and L.O. Silva. Multidimensional plasma wake excitation in the non-linear blowout regime. *CERN Yellow Reports*, 1(0):79, 2016.
- [43] Roald K Wangsness. *Campos electromagnéticos*. Limusa., 1983.
- [44] David J Griffiths. Introduction to electrodynamics. 1999.
- [45] Richard Fitzpatrick. Introduction to plasma physics: A graduate level course. *Lulu.com*, 2006.
- [46] Erwin Fehlberg. Low-order classical runge-kutta formulas with stepsize control and their application to some heat transfer problems. Technical report, 1969.
- [47] William H Press, Saul A Teukolsky, William T Vetterling, and Brian P Flannery. *Numerical recipes in C*, volume 2. Cambridge university press Cambridge, 1996.
- [48] Rkf45 runge-kutta-fehlberg ode solver, Nov. 20, 2007 [Mar. 9, 2018]. URL: http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/cpp_src/rkf45/rkf45.html.

BIBLIOGRAFÍA

James A. Holloway. *Simulating plasma wakefield acceleration*. Tesis, Imperial College London, 2010.

John David Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1999.

Karl Krushelnick and Victor Malka. *Laser wakefield plasma accelerators*. *Laser & Photonics Reviews* 4.1 (2010): 42-52.

William L. Kruer. *The physics of laser plasma interactions*. 1987.

ANEXOS

APÉNDICE A

FUERZA PONDEROMOTRIZ

A.1 Técnica de promediado

Para demostrar formalmente de dónde surge la expresión de la fuerza ponderomotriz se utiliza una técnica de promediado descrita en [45] que consiste en separar la variable temporal t en dos variables; la variable t , que contiene la información de todos los movimientos no periódicos, y la variable $\tau = t/\epsilon$, que contiene los términos periódicos, de tal forma que al promediar la solución obtenemos únicamente los movimientos de deriva. El parámetro ϵ permite separar las escalas temporales lentas y rápidas, además, el incremento en la cantidad de variables independientes se compensa con la condición de periodicidad sobre las cantidades que dependen de τ .

En esta técnica, se considera la siguiente ecuación diferencial, que normalmente describe un problema dinámico que incorpora movimientos oscilatorios y de deriva,

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{f}(\vec{z}, t, \tau), \quad (\text{A.1})$$

y se busca una solución de la forma $\vec{z} = \vec{z}(t, \tau)$. Al desarrollar la derivada de la Ec. (A.1) tomando en cuenta las variables independientes t y τ , se obtiene la expresión

$$\frac{\partial \vec{z}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \vec{z}}{\partial \tau} = \vec{f}(\vec{z}, t, \tau). \quad (\text{A.2})$$

Dado que se busca promediar la solución para encontrar de manera independiente los movimientos de deriva, se asume que \vec{z} tiene la forma

$$\vec{z}(t, \tau) = \vec{Z}(t) + \epsilon \vec{\zeta}(\vec{Z}, t, \tau), \quad (\text{A.3})$$

donde $\vec{\zeta}$ es una función periódica de τ , es decir, $\langle \vec{\zeta}(\vec{Z}, t, \tau) \rangle = \frac{1}{2\pi} \oint \vec{\zeta}(\vec{Z}, t, \tau) d\tau = \vec{0}$. En la Ec. (A.3), $\vec{Z}(t)$ representa el centro de oscilación y $\vec{\zeta}$ contiene la información periódica de la solución.

Ahora, se expanden las funciones $\frac{d\vec{Z}}{dt}$ y $\vec{\zeta}$ en términos del parámetro ϵ con el fin de separar la solución en los diferentes órdenes de ϵ ,

$$\vec{\zeta} = \vec{\zeta}_0(\vec{Z}, t, \tau) + \epsilon \vec{\zeta}_1(\vec{Z}, t, \tau) + \epsilon^2 \vec{\zeta}_2(\vec{Z}, t, \tau) + \dots, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} = \vec{F}_0(\vec{Z}, t) + \epsilon \vec{F}_1(\vec{Z}, t) + \epsilon^2 \vec{F}_2(\vec{Z}, t) + \dots. \quad (\text{A.5})$$

Asimismo, se expande el término \vec{f} de la derecha de la Ec. (A.2) alrededor de \vec{Z} usando el teorema de Taylor para funciones de varias variables:

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{z}, t, \tau) &= \vec{f}(\vec{Z}, t, \tau) + \left((\vec{z} - \vec{Z}) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{f}(\vec{Z}, t, \tau) + \dots \\ &= \vec{f}(\vec{Z}, t, \tau) + \epsilon \left(\vec{\zeta} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{f}(\vec{Z}, t, \tau) + \dots. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Posteriormente, se reemplaza la expansión de $\vec{\zeta}$ (Ec. (A.4)) en la Ec. (A.6), lo que permite separar \vec{f} explícitamente en los diferentes órdenes de ϵ

$$\vec{f}(\vec{z}, t, \tau) = \vec{f}(\vec{Z}, t, \tau) + \epsilon \left(\vec{\zeta}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{f}(\vec{Z}, t, \tau) + \epsilon^2 \left(\vec{\zeta}_1 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{f}(\vec{Z}, t, \tau) + \dots. \quad (\text{A.7})$$

Ahora que se tienen todas las cantidades debidamente separadas en los diferentes órdenes de ϵ , se reemplazan todos los valores (Ecs. A.3-A.7) en la Ec. (A.2) y se desarrollan los términos para resolver la ecuación orden por orden en ϵ . Nótese que en la Ec. (A.3) $\vec{z} = \vec{z}(\vec{Z}, \vec{\zeta}) = \vec{z}(\vec{Z}(t), \vec{\zeta}(\vec{Z}(t), t, \tau))$, por lo que las derivadas denotadas como parciales se deben evaluar como derivadas totales para considerar todas las variaciones internas respecto a t y τ . Por su parte, τ es función de t , sin embargo, se considera como una variable independiente. De la Ec. (A.2) se obtiene:

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} + \epsilon \left(\frac{d\vec{Z}}{dt} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{\zeta} + \epsilon \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial \tau} = \vec{f}(\vec{z}, t, \tau). \quad (\text{A.8})$$

De lo anterior, nos interesa resolver el problema sólo en orden cero (ϵ^0) y orden uno (ϵ^1), por lo cual despreciamos los términos de orden superior y obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{F}_0(\vec{Z}, t) + \frac{\partial \vec{\zeta}_0}{\partial \tau} + \epsilon \left[(\vec{F}_0(\vec{Z}, t) \cdot \vec{\nabla}) \vec{\zeta}_0 + \frac{\partial \vec{\zeta}_0}{\partial t} + \vec{F}_1(\vec{Z}, t) + \frac{\partial \vec{\zeta}_1}{\partial \tau} \right] \\ = \vec{f}(\vec{Z}, t, \tau) + \epsilon \left(\vec{\zeta}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{f}(\vec{Z}, t, \tau). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

- **Orden cero:** agrupando los términos de orden cero (ϵ^0) se obtiene:

$$\vec{F}_0(\vec{Z}, t) + \frac{\partial \vec{\zeta}_0}{\partial \tau} = \vec{f}(\vec{Z}, t, \tau). \quad (\text{A.10})$$

La condición de solubilidad de la Ec. (A.10) se obtiene promediando respecto a τ y recordando que $\vec{\zeta}_0$ es una función periódica

$$\vec{F}_0(\vec{Z}, t) = \langle \vec{f}(\vec{Z}, t, \tau) \rangle. \quad (\text{A.11})$$

Despejando $\vec{\zeta}_0$ de la Ec. (A.10) e integrando se obtiene la solución de la componente oscilante de orden cero:

$$\vec{\zeta}_0 = \int_0^\tau (\vec{f} - \langle \vec{f} \rangle) d\tau' \quad (\text{A.12})$$

- **Orden uno:** repitiendo el procedimiento anterior para orden uno (ϵ^1) se obtiene:

$$(\vec{F}_0(\vec{Z}, t) \cdot \vec{\nabla}) \vec{\zeta}_0 + \frac{\partial \vec{\zeta}_0}{\partial t} + \vec{F}_1(\vec{Z}, t) + \frac{\partial \vec{\zeta}_1}{\partial \tau} = (\vec{\zeta}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{f}(\vec{Z}, t, \tau). \quad (\text{A.13})$$

La condición de solubilidad de la Ec. (A.13) se obtiene de manera similar aplicando propiedades de las derivadas e integrales al calcular los promedios respecto a τ :

$$\vec{F}_1(\vec{Z}, t) = \langle (\vec{\zeta}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{f}(\vec{Z}, t, \tau) \rangle. \quad (\text{A.14})$$

Finalmente, al juntar las Ecuaciones (A.11) y (A.14) se obtiene el movimiento del centro de oscilación, es decir, el movimiento de deriva neto con un error de segundo orden en ϵ :

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} = \langle \vec{f}(\vec{Z}, t, \tau) \rangle + \langle (\vec{\zeta}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{f}(\vec{Z}, t, \tau) \rangle + O(\epsilon^2). \quad (\text{A.15})$$

Esto significa que el movimiento del centro de oscilación o el centro guía en este problema dinámico se determina en orden cero por el promedio del término de fuerza respecto a la variable periódica τ y, en primer orden, por la correlación entre la oscilación y la variación espacial de la fuerza.

A.2 La fuerza ponderomotriz

La dinámica de una partícula cargada bajo la influencia de un campo electromagnético en el régimen no relativista se describe mediante la ecuación de movimiento

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q[\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t)] \quad (\text{A.16})$$

donde m y q representan la masa y carga eléctrica de la partícula, respectivamente, y \vec{E} , \vec{B} son los campos eléctrico y magnético.

La expresión de la fuerza ponderomotriz en tres dimensiones se puede obtener a partir de la Ec. (A.16) al considerar la interacción de una carga eléctrica con un campo electromagnético no homogéneo que varía armónicamente en el tiempo

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos \omega t, \quad (\text{A.17})$$

donde $\vec{E}_0(\vec{r})$ contiene la dependencia espacial del campo. En el caso particular en que $\vec{E}(\vec{r}, t)$ representa un pulso electromagnético, $\vec{E}_0(\vec{r})$ contiene la envolvente del pulso y el término ondulatorio espacial. En general, la amplitud del campo puede tener una variación temporal lenta, bajo la restricción $\frac{d\vec{E}}{dt} \simeq \omega \vec{B}$, con $\vec{B} = \vec{B}_0(\vec{r}) \sin \omega t^*$, de modo que al usar la ley de Faraday la siguiente relación represente una buena aproximación

$$\vec{B}_0(\vec{r}) = -\omega^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{E}_0(\vec{r}). \quad (\text{A.18})$$

Con el fin de aplicar la técnica de promediado descrita en la sección previa, es necesario que el campo eléctrico sea aproximadamente constante durante una oscilación

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}, t) \ll \omega \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (\text{A.19})$$

Si la condición anterior se satisface, la ley de Faraday implica que la fuerza magnética es al menos un orden de magnitud menor que la fuerza eléctrica, lo que también implica que la frecuencia ciclotrónica Ω_c es mucho menor que la frecuencia del campo ω ($\Omega_c \ll \omega$, partícula no magnetizada).

Ahora, se aplica formalmente la técnica de promediado a la ecuación de movimiento con el campo eléctrico A.17 usando las siguientes sustituciones para la posición y la velocidad, con $t \rightarrow \tau$ en los términos periódicos,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{R}(t) + \vec{\xi}(\vec{R}, \vec{U}t, \tau), \\ \vec{v} &= \vec{U}(t) + \vec{u}(\vec{R}, \vec{U}t, \tau). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

El problema dinámico completo contiene la ecuación $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, que al ser lineal implica que $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{U}$ en todos los órdenes.

La “fuerza externa” $\vec{f}(\vec{Z}, t, \tau)$, que en este caso concreto corresponde a la fuerza electromagnética, debe ser expandida en sus diferentes órdenes, por lo que se expande el campo eléctrico:

$$\vec{E}(\vec{r}, t, \tau) = \vec{E}_0(\vec{R}) \cos \omega \tau + \left(\vec{\xi}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{E}_0(\vec{R}) \cos \omega \tau + \dots \quad (\text{A.21})$$

*El uso del término periódico $\cos \omega t$ para el campo magnético no altera el resultado final pero impide cancelar directamente los términos periódicos en la ley de Faraday (Ec. A.18), lo que lleva a una expresión menos simple.

El uso de la ley de Faraday sustituyendo la expansión del campo eléctrico y el valor de \vec{v} lleva a la siguiente expresión para la fuerza magnética en primer orden:

$$\vec{F}_{b1} = -\frac{q}{\omega} \left[\left(\vec{U}_0 + \vec{u}_0 \right) \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_0(\vec{R}) \right) \sin \omega \tau \right]. \quad (\text{A.22})$$

En orden cero la fuerza ejercida sobre el centro de oscilación viene dada por el promedio respecto a la variable τ de la fuerza de éste orden (Ec. A.15), que en este caso sería el promedio de la fuerza ejercida por el campo eléctrico de orden cero, cuyo promedio es nulo, es decir, $m \frac{d\vec{U}_0}{dt} = \vec{0}$ y $\vec{U}_0 = c\vec{t}e$. Por lo tanto, en orden cero el movimiento oscilatorio viene dado por:

$$\frac{\partial \vec{u}_0}{\partial \tau} = \frac{q}{m} \vec{E}_0(\vec{R}) \cos \omega \tau. \quad (\text{A.23})$$

La solución tomando en cuenta la condición de periodicidad sobre $\vec{\xi}$ y \vec{u} es:

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_0 &= -\frac{q}{m\omega^2} \vec{E}_0(\vec{R}) \cos \omega \tau, \\ \vec{u}_0 &= \frac{q}{m\omega} \vec{E}_0(\vec{R}) \sin \omega \tau. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

En primer orden la condición de solubilidad determina la fuerza sobre el centro de oscilación. Sin embargo, se debe tener en cuenta que el campo magnético también aporta a la fuerza en este orden:

$$m \frac{d\vec{U}_1}{dt} = \left\langle q \left[\left(\vec{\xi}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{E}_0(\vec{R}) \cos \omega \tau - \frac{1}{\omega} \vec{u}_0 \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_0(\vec{R}) \right) \sin \omega \tau \right] \right\rangle, \quad (\text{A.25})$$

donde se ha tomado en cuenta $\vec{U}_0 = \vec{0}$ por simplicidad. Esta aproximación es irrelevante para la fuerza sobre el centro de oscilación debido a que \vec{U} no depende de τ y el término del campo magnético es periódico. Así, sustituyendo los valores de $\vec{\xi}_0$ y \vec{u}_0 de la Ec. (A.24) en la Ec. (A.25):

$$m \frac{d\vec{U}_1}{dt} = -\frac{q^2}{m\omega^2} \left[\left(\vec{E}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{E}_0 \langle \cos^2 \omega \tau \rangle + \vec{E}_0 \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 \right) \langle \sin^2 \omega \tau \rangle \right]. \quad (\text{A.26})$$

Calculando los promedios se obtiene la ecuación:

$$m \frac{d\vec{U}_1}{dt} = -\frac{q^2}{2m\omega^2} \left[\left(\vec{E}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{E}_0 + \vec{E}_0 \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 \right) \right]. \quad (\text{A.27})$$

Ahora, se aplica la propiedad $\frac{\vec{\nabla} A^2}{2} = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ para obtener la expresión final de la fuerza ponderomotriz [45]:

$$\vec{F}_{pond} = -\frac{q^2}{4m\omega^2} \vec{\nabla} E_0^2(\vec{R}). \quad (\text{A.28})$$

El potencial eléctrico ponderomotriz correspondiente es:

$$\phi_{pond} = \frac{q}{4m\omega^2} E_0^2(\vec{\mathbf{R}}). \quad (\text{A.29})$$

La Figura A.1 muestra el potencial ponderomotriz de un electrón y un protón en el campo de un pulso gaussiano de microondas.

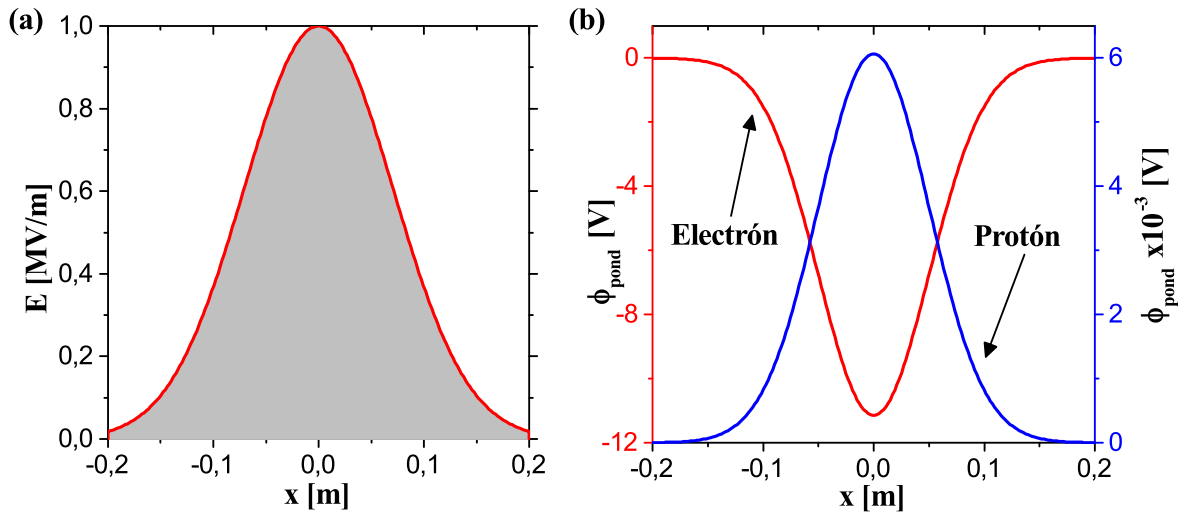


Figura A.1: (a) Envolvente de un pulso gaussiano con amplitud $E_0 = 1 \times 10^6$ [MV/m] y frecuencia $f = 10$ [GHz], (b) Potencial ponderomotriz del pulso gaussiano sobre un electrón (rojo) y un protón (azul).

APÉNDICE B

ALGORITMO RKF45

Este algoritmo hace parte de un conjunto de algoritmos publicados en 1969 en un reporte técnico de la NASA por Erwing Fehlberg [46]. El logro del trabajo es deducir una serie de fórmulas para integrar numéricamente ecuaciones diferenciales ordinarias con *tamaño del paso autoadaptable*. El algoritmo se basa en el uso de aproximaciones de cuarto y quinto orden (*error global*) para realizar una estimación del error local. Si el error excede la tolerancia permitida por el usuario, el tamaño del paso es reducido y el proceso es repetido hasta garantizar la tolerancia o determinar la ineficiencia del algoritmo para resolver el problema.

El algoritmo utiliza los valores K_i ($i = 1, 6$), que corresponden a estimaciones de la pendiente en diferentes puntos del intervalo $[t, t + h]$, para aproximar la solución del problema de valor inicial con ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$. Los valores K_i se definen como:

$$K_1 = f(t_k, y_k), \tag{B.1}$$

$$K_2 = f\left(t_k + \frac{1}{4}h, y_k + \frac{1}{4}K_1\right), \tag{B.2}$$

$$K_3 = f\left(t_k + \frac{3}{8}h, y_k + \frac{3}{32}K_1 + \frac{9}{32}K_2\right), \tag{B.3}$$

$$K_4 = f\left(t_k + \frac{12}{13}h, y_k + \frac{1932}{2197}K_1 - \frac{7200}{2197}K_2 + \frac{7296}{2197}K_3\right), \tag{B.4}$$

$$K_5 = f\left(t_k + h, y_k + \frac{439}{216}K_1 - 8K_2 + \frac{3680}{513}K_3 - \frac{845}{4104}K_4\right), \tag{B.5}$$

$$K_6 = f\left(t_k + \frac{1}{2}h, y_k - \frac{8}{27}K_1 + 2K_2 - \frac{3544}{2565}K_3 + \frac{1859}{4104}K_4 - \frac{11}{40}K_5\right). \tag{B.6}$$

Dada la condición inicial $y_k(t_k)$ en el punto t_k , se utilizan los valores K_i para calcular

las aproximaciones de cuarto (y_{k+1}^4) y quinto (y_{k+1}^5) orden en el punto t_{k+1} mediante las siguientes fórmulas:

$$y_{k+1}^4 = y_k + h \left[\frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2197}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5 \right] + O(h^5), \quad (\text{B.7})$$

$$y_{k+1}^5 = y_k + h \left[\frac{16}{135}K_1 + \frac{6656}{12825}K_3 + \frac{28561}{56430}K_4 - \frac{9}{50}K_5 + \frac{2}{55}K_6 \right] + O(h^6). \quad (\text{B.8})$$

B.1 Tolerancia al error y control del paso h

Los algoritmos tradicionales definen el error a partir del tamaño del paso, por ejemplo, en el método RK4 el error global es de cuarto orden ($O(h^4)$). Con el fin de controlar el tamaño del paso a partir del error, es necesario obtener dos soluciones al problema para compararlas y realizar una estimación del error. Algunos métodos integran la ecuación con un paso h y, posteriormente, repiten el cálculo con $h/2$, lo que resulta costoso computacionalmente. Por su parte, RKF45 utiliza la diferencia entre las aproximaciones de cuarto y quinto orden como un *estimado* del error local ($O(h^5)$)

$$\Delta = |y_{k+1}^5 - y_{k+1}^4| \simeq h^5. \quad (\text{B.9})$$

Al conocer el error estimado Δ y el paso h con el cual se produce, se puede utilizar la tolerancia al error TOL permitida por el usuario para estimar el tamaño óptimo del paso. De este modo, el paso h utilizado inicialmente se escala para estimar el nuevo paso $h \rightarrow s \times h$ que satisface la tolerancia del usuario [47]:

$$s = 0,9 \sqrt[5]{\frac{\Delta}{TOL}}. \quad (\text{B.10})$$

Dado que Δ es una aproximación del error, se incluye un factor de seguridad en la fórmula para garantizar con mayor certeza la tolerancia del usuario.

B.2 Subrutina RKF45 en lenguaje C++

La subrutina RKF45 utilizada en este trabajo fue originalmente escrita por *Herman Watts* y *Lawrence Shampine* y adaptada al lenguaje C++ por *John Burkardt*. Se distribuye con licencia *GNU LGPL* (libre con código abierto) e incluye dos versiones en el mismo código, una con precisión *float* y otra con precisión *double* [48]. La subrutina requiere, además de la ecuación diferencial, las variables de almacenamiento y las condiciones iniciales, los siguientes parámetros de entrada:

- **ABSERR**: Tolerancia al error absoluto.
- **RELERR**: Tolerancia al error relativo.

- ***t**: Valor inicial de la variable independiente.
- **t_out**: Valor de la variable independiente donde se requiere la solución.
- **NEQN**: Cantidad de ecuaciones a resolver. Si la ecuación diferencial original es no-lineal, éste parámetro incluye el orden de la ecuación antes de convertirla en un sistema lineal soluble por éste método. Además, se incorpora la cantidad de elementos que la satisfacen (por ejemplo, partículas) y las dimensiones en el caso de ecuaciones vectoriales.
- **flag**: Parámetro de entrada y salida que define el modo de operación y los códigos de error.

Con el fin de evitar dificultades con las cifras significativas y el redondeo, el código sugiere que los valores de **ABSERR** y **RELERR** no sean menores a 10^{-8} usando precisión *double*. Además, los errores estimados de cada ecuación en el sistema deben satisfacer simultáneamente la siguiente fórmula para cada paso h :

$$\Delta \leq RELERR \times |Y| + ABSERR, \quad (\text{B.11})$$

donde el error local Δ es estimado de la soluciones de cuarto y quinto orden (Ec. B.9), **RELERR** y **ABSERR** son definidos por el usuario y Y representa el promedio entre la aproximación de quinto orden y_{k+1}^5 y el valor de la función en el paso previo y_k ($Y = \frac{y_{k+1}^5 + y_k}{2}$). Este proceso se realiza para evitar inconvenientes en la prueba del error cuando la solución se anula.

B.3 Parámetro *flag*

La subrutina tiene dos modos de operación: el modo normal y el modo de un paso (“*Single-Step*”). En el modo normal, la solución a la ecuación es aproximada y reportada en **t_out** sin reportarle al usuario los cálculos intermedios. En el modo *single-step* la solución es avanzada un paso, determinado por el programa para garantizar la tolerancia, en la dirección de **t_out**, de modo que la subrutina debe ser llamada consecutivamente para seguir avanzando la solución hasta **t_out**. Los modos de operación se definen con el valor de entrada de **flag** en cada llamada a la subrutina. Asimismo, la subrutina redefine el valor de retorno de la variable para reportar si la ejecución se realizó correctamente o algún problema ha sido detectado. A continuación se describen brevemente los valores de **flag** que puede asignar el usuario (entrada) y los valores que puede retornar la subrutina (salida):

- **flag = -1**: Primera llamada al programa en modo de un sólo paso. La solución es avanzada un paso en la dirección de **t_out**. La subrutina debe ser llamada nuevamente para continuar la integración.
- **flag = -2**: Llamadas posteriores al programa en modo de un sólo paso. Este valor le informa al programa que algunos procesos de inicialización ya se realizaron y pueden ser omitidos.
- **flag = 1**: Primera llamada al programa en modo normal. La solución es dada en el punto **t_out** sin reportar los cálculos intermedios.
- **flag = -2**: Llamadas posteriores en modo normal omitiendo el proceso de inicialización.

- **flag = -2**: La ejecución en el modo de un paso transcurrió correctamente pero no alcanzó **t_out**. La subrutina debe ser llamada nuevamente con **flag=-2** para seguir avanzando la solución.
- **flag = 2**: En modo normal, este valor indica que la solución fue calculada correctamente en **t_out**. En modo de un paso, el valor de **flag** retornado es cambiado de **flag=-2** a **flag=2** cuando **t_out** es alcanzado y la ejecución transcurre sin problemas. Para volver a llamar la subrutina se debe definir un nuevo **t_out**.
- **flag = 3**: El parámetro **RELERR** definido por el usuario es muy pequeño y fue alterado por el programa. Si el usuario desea continuar con este valor debe llamar la subrutina nuevamente con **flag** igual a 2 o -2, dependiendo del modo de operación.
- **flag = 4**: Indica que muchas evaluaciones de la derivada fueron realizadas y, por lo tanto, muchos pasos han sido tomados. Al llamar nuevamente a la subrutina el contador es reseteado y se sigue con el proceso de cálculo.
- **flag = 5**: Este error indica comúnmente que el valor de **ABSERR** es muy pequeño. La solución se anula impidiendo realizar una prueba de error relativo pura.
- **flag = 6**: Los errores absoluto y relativo establecidos por el usuario no pueden ser satisfechos. Este código de error generalmente es una muestra de problemas serios, tales como discontinuidades y funciones con pendientes muy grandes. A menudo es conveniente no continuar la integración.
- **flag = 7**: Es probable que la subrutina sea ineficiente para resolver el problema debido a que éste restringe la selección del paso. El problema puede ser ignorado llamando nuevamente la subrutina.

- **flag = 8**: Parámetros de entrada incoherentes. **NEQN** negativo o nulo, **ABSERR** o **RELERR** negativos, ***t=t_out**, entre otros.

B.4 Ventajas y desventajas

En principio, el algoritmo RKF45 calcula la solución al problema de valor inicial en una malla de paso variable generada por el programa. Sin embargo, las subrutinas suelen incorporar una forma de extrapolar la solución cuando ***t** está muy cerca a **t_out** garantizando la tolerancia definida. Además, si el paso óptimo determinado por el programa excede **t_out**, éste se reduce al valor justo para alcanzar **t_out**. Este procedimiento anula completamente la desventaja que tiene RKF45, como algoritmo de paso variable, respecto a los algoritmos de paso uniforme.

Tomando en cuenta que existen dos mallas; la generada por el usuario y la generada por el programa, se pueden presentar diversas situaciones: si el paso de la malla definida por el usuario es menor que el paso que necesita la subrutina para garantizar la tolerancia, se toma el paso definido implícitamente por el usuario, lo que implica una reducción significativa en el error. Esto también implica imponer restricciones sobre la selección del tamaño del paso, lo que puede generar que el programa realice demasiados cálculos. Por otra parte, si la malla generada por la subrutina es un poco más fina que la malla del usuario, se realizan cálculos intermedios, pero se debe reducir frecuentemente el tamaño natural del paso para alcanzar **t_out**, lo que nuevamente reduce el error. Por último, si la malla del usuario no restringe la selección del paso o simplemente no se define una malla, la subrutina se limita a resolver el problema en la malla no uniforme generada automáticamente por el programa a partir de la tolerancia. En este caso, se da la situación que maximiza el error aunque éste debe satisfacer la tolerancia (Ec. B.11).

La subrutina implementa diferentes condiciones que la hacen más eficiente:

- El tamaño del paso también es incrementado cuando el paso inicial es muy pequeño y garantiza la tolerancia con exceso de precisión. Esto evita reportar más datos de los necesarios y realizar cálculos en exceso. Sin embargo, el tamaño del paso puede ser restringido por la malla del usuario.
- El valor s que permite escalar el tamaño del paso está limitado a ser mínimo $s = 0,1$ y máximo $s = 5$.
- El algoritmo es de paso variable. Sin embargo, la solución de un sistema de ecuaciones se avanza en el mismo paso h y la prueba de error debe satisfacerse por todas las soluciones. De esta forma, la selección del paso se puede ver muy limitada, haciendo ineficiente la subrutina para resolver el problema.

APÉNDICE C

VALIDACIÓN DE LOS CÓDIGOS COMPUTACIONALES

En el desarrollo de este trabajo se resolvió la ecuación diferencial que describe la generación del wake (Ec. 3.9) utilizando dos métodos de integración numérica: el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) y el método de Runge-Kutta-Fehlberg de cuarto-quinto orden (RKF45). Los códigos computacionales generados en el desarrollo del proyecto fueron modificados para resolver el problema de valor inicial del oscilador armónico simple (sistema masa-resorte), lo que permite comparar las soluciones numéricas con la solución exacta. Este proceso permite, además de comparar la eficiencia de los métodos computacionales, validar los resultados del wakefield obtenidos numéricamente en ausencia de la solución exacta.

C.1 Algoritmos implementados: RK4 y RKF45

El algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden es uno de los métodos más ampliamente utilizados para integrar numéricamente ecuaciones diferenciales ordinarias y se ha convertido en un estándar para resolver problemas de valor inicial debido al balance entre la precisión y la facilidad de implementación. Es un algoritmo que aproxima y avanza la solución en la dirección deseada de la variable independiente en pasos uniformes de tamaño h definidos por el usuario, esto es, encuentra la solución en una malla *equidistante*. El error *global* de la aproximación es de cuarto orden $O(h^4)$.

Por su parte, el algoritmo RKF45 está basado en los métodos de Runge-Kutta tradicionales pero implementa un sistema de estimación del error *local* que le permite seleccionar el tamaño adecuado del paso para garantizar una tolerancia al error defini-

da por el usuario. En este sentido, es un método que mejora la relación entre precisión y trabajo computacional. Las características fundamentales de este algoritmo se describen en el Apéndice B.

C.2 Oscilador armónico simple

La elección del oscilador armónico para realizar esta comparativa entre métodos surge de manera natural debido a que la ecuación del wake tiene el mismo comportamiento que el oscilador armónico, con la diferencia de incorporar un término no-lineal y un término forzador con forma matemática compleja. Además, dado que la solución analítica de la ecuación del oscilador armónico es ampliamente conocida resulta adecuada para estimar los errores en las soluciones numéricas.

La ecuación del oscilador armónico simple para un sistema masa-resorte viene dada por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (\text{C.1})$$

donde k y m representan la constante del resorte y la masa conectada en el extremo libre, respectivamente. La solución exacta a esta ecuación es:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \phi), \\ v(t) &= -A\omega \sin(\omega t + \phi), \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

donde A , $\omega = \sqrt{k/m}$ y ϕ representan la amplitud de la oscilación, la frecuencia y la fase inicial, respectivamente. Estos parámetros se obtienen explícitamente al utilizar las condiciones iniciales y establecer los parámetros del sistema k y m . En este caso, se utilizan los parámetros $k = 1$ y $m = 1$ junto con las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $v(0) = 0$, de lo cual se obtiene $A = 1$ y $\phi = 0$. Todas las cantidades físicas se encuentran en unidades del sistema internacional, sin embargo, éstas se omiten en algunos casos por simplicidad numérica.

De lo anterior se obtiene la solución explícita:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos \omega t, \\ v(t) &= -\omega \sin \omega t. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Las soluciones calculadas numéricamente al implementar los métodos RK4 y RKF45 son comparadas con la solución exacta, que se incorpora explícitamente en una función de los códigos para evaluarla en el valor de entrada de la variable independiente. Todos los resultados se obtienen con precisión tipo *double*.

En la tabla (C.1) se muestran los parámetros utilizados en ambos códigos para resolver el problema, donde h representa el paso en el caso del método **RK4**, **ABSERR** y

RELERR son la tolerancia al error absoluto y relativo, respectivamente, t_{inicial} y t_{final} son los límites del intervalo en el que se resuelve la ecuación, $N_{p\text{-usuario}}$ define la malla (uniforme) del usuario, la cual tiene $N_{p\text{-usuario}}+1$ puntos, **flag** establece la forma en la que se utiliza el modo *single-step* de la subrutina **RKF45** (ver Apéndice B) y $\epsilon \approx 1,49 \times 10^{-8}$. La etiqueta se usa para relacionar los datos de las gráficas con los conjuntos de parámetros en la tabla.

Etiqueta	Método	h	ABSERR	RELERR	t_{inicial}	t_{final}	$N_{p\text{-usuario}}$	flag
I	RK4	10^{-3}	-	-	0,0	20,0	20000	-
II	RK4	10^{-4}	-	-	0,0	20,0	200000	-
III	RK4	10^{-4}	-	-	0,0	2000,0	20000**	-
IV	RKF45	-	ϵ	ϵ	0,0	20,0	20000	-1
V	RKF45	-	10^{-6}	10^{-6}	0,0	2000,0	-	-1
VI	RKF45	-	10^{-6}	10^{-6}	0,0	2000,0	-	-2

Tabla C.1: Conjunto de parámetros para resolver numéricamente la ecuación (C.1)

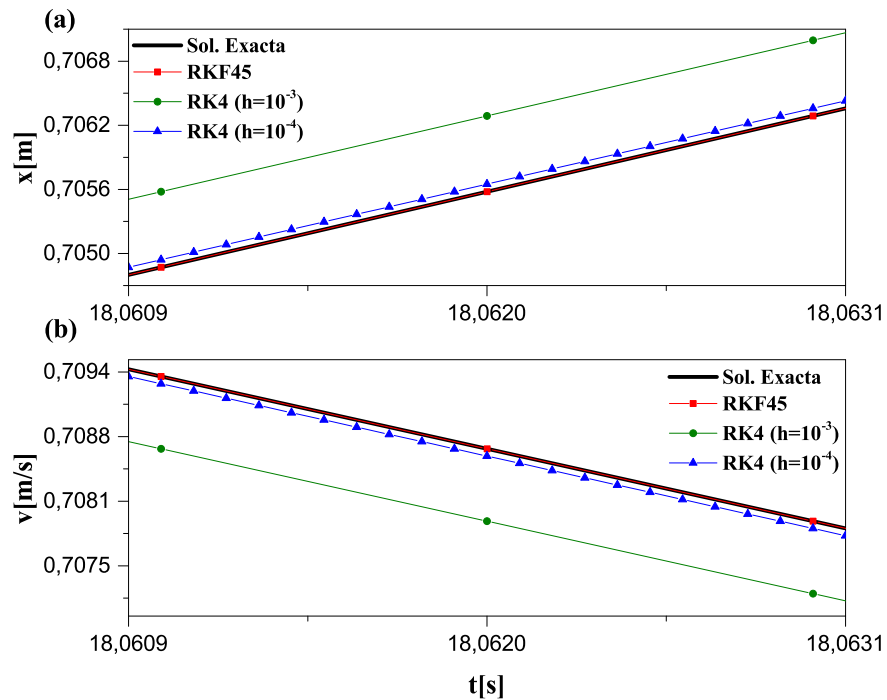


Figura C.1: Comparación de las soluciones numéricas respecto a la solución exacta. (a) Posición, (b) Velocidad.

* ϵ es una variable sugerida por la subrutina (precisión *double*) como valor apropiado para los errores. En la subrutina éste valor es retornado al evaluar la raíz cuadrada de la función `r8_epsilon()`. Ésta función también tiene su propio valor en la subrutina con precisión *float*.

** Pasos impresos. La cantidad de pasos utilizados por el programa es $N_{p\text{-usuario}} = \frac{t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}}}{h}$

Los métodos numéricos utilizados son muy precisos, de tal forma que representar los resultados en las escalas de la tabla (C.1) no aporta ninguna información relevante. En consecuencia, se grafican los resultados para la posición y la velocidad en una escala que permite apreciar las diferencias respecto a la solución exacta (ver Fig. C.1).

En la escala de la Figura C.1 se puede notar que las soluciones calculadas por el método RK4 son menos precisas que la solución calculada utilizando el método RKF45, cuyo error aún es inapreciable en esta escala. Al graficar los errores absoluto y porcentual para la posición (ver Fig. C.2-C.3), se puede notar que el método RKF45 presenta errores alrededor de doce órdenes de magnitud menores que los errores del método RK4. Sin embargo, es necesario aclarar que esta solución se calcula sobre una malla *definida por el usuario* con un paso $h = 10^{-3}$ y, en este caso, el tamaño del paso que necesita el algoritmo para garantizar la tolerancia es mucho mayor que h , por lo cual la subrutina es forzada a resolver el problema con un paso menor y el error se reduce drásticamente. Pese a que esto incrementa el proceso computacional, el tiempo de ejecución del programa no se altera de manera apreciable. Por último, es importante destacar que los máximos periódicos en las curvas de error se deben a puntos donde la solución se anula.

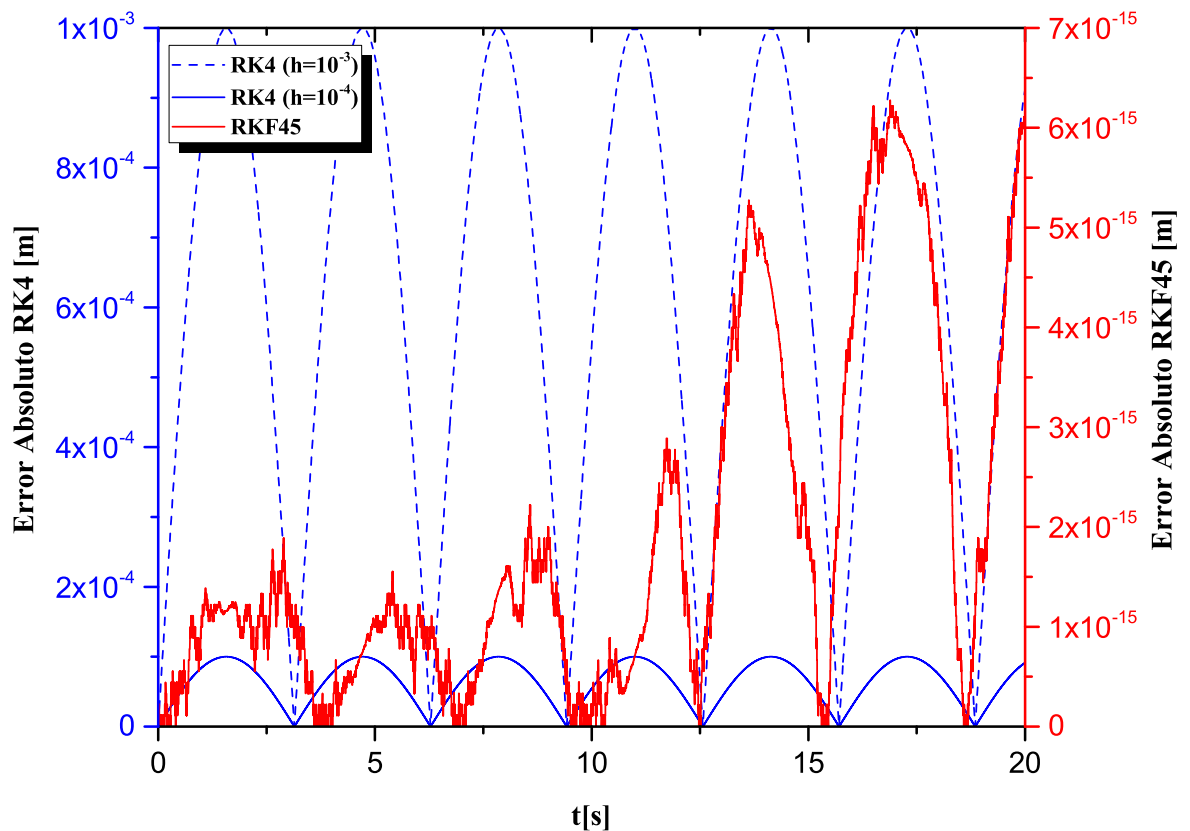


Figura C.2: Errores absolutos en la posición para los datos I, II y IV de la Tabla C.1.

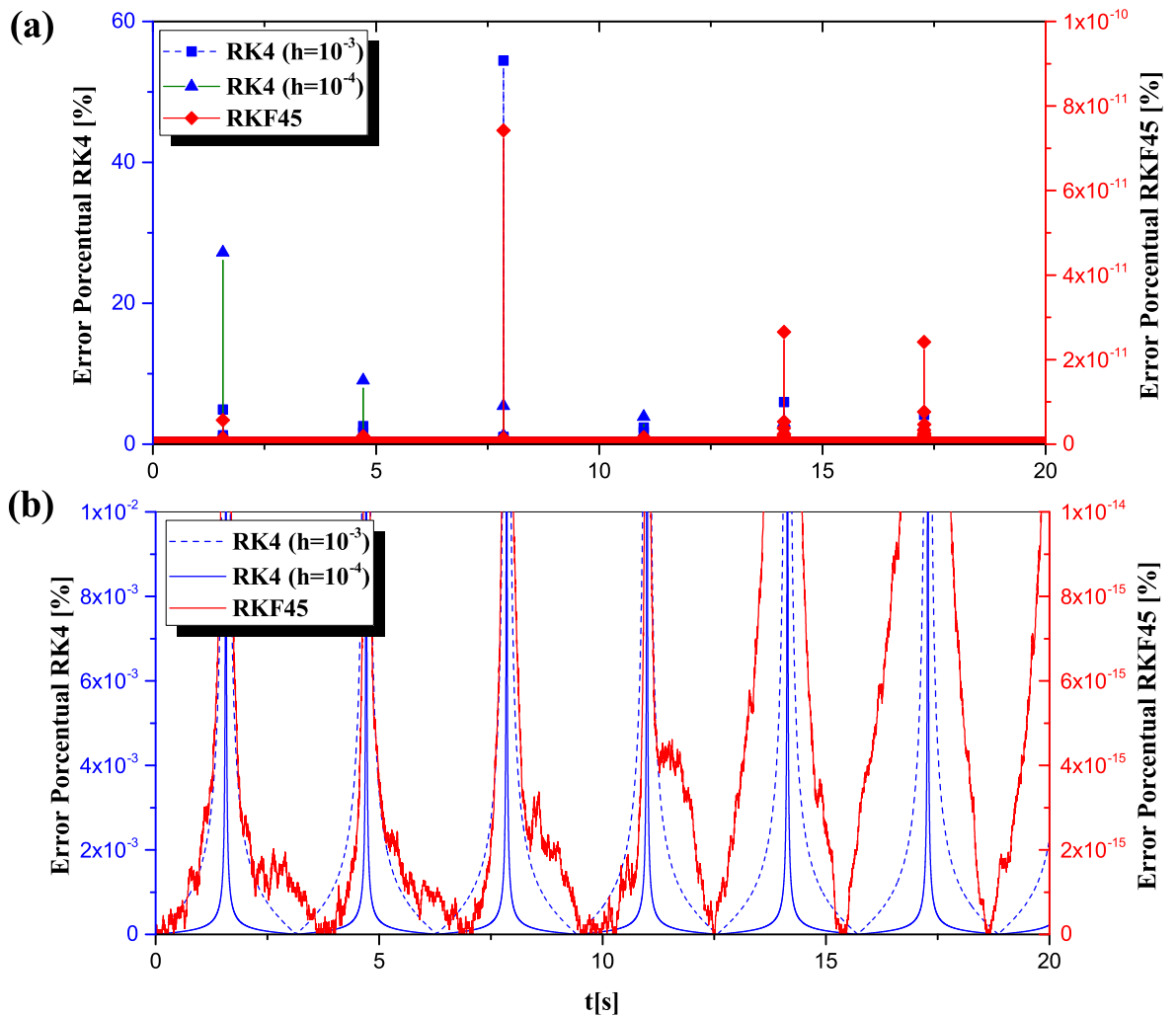


Figura C.3: Errores porcentuales en la posición para los datos **I**, **II** y **IV** de la Tabla C.1. (a) Escalas completas, (b) Zoom a las escalas verticales.

Llamada de la subrutina RKF45 En la forma típica de llamar la subrutina RKF45 en modo *single-step* se utiliza la variable $flag = -1$ en la primera llamada y $flag = -2$ en las llamadas posteriores. Esto le permite a la subrutina omitir procesos de inicialización y realizar un monitoreo de la cantidad de trabajo realizado. Alternativamente, la subrutina puede ser llamada en cada nuevo paso con $flag = -1$ como si se tratara de un nuevo problema de valor inicial cuyas condiciones iniciales se definen como la solución calculada por el programa en el paso anterior. Este modo de uso implica que el proceso de inicialización se realiza en cada paso y el monitoreo de la cantidad

de cálculos realizados se reinicia en cada nueva llamada, lo que requiere de cuidado al utilizarlo. No obstante, este proceso puede ser beneficioso en algunas circunstancias; la subrutina incorpora condiciones que impiden al paso incrementar o reducir su tamaño excesivamente respecto al paso utilizado previamente con el fin de garantizar cierta estabilidad en la malla en llamadas consecutivas. Por su parte, el uso consecutivo de $flag = -1$ no sólo se salta estas restricciones sino que permite al programa calcular *sin limitaciones* el paso óptimo en cada nueva llamada, lo que aumenta la cantidad de puntos de malla (en este caso particular), generando una reducción alrededor de *tres órdenes de magnitud* en el error (ver Figuras C.4-C.5).

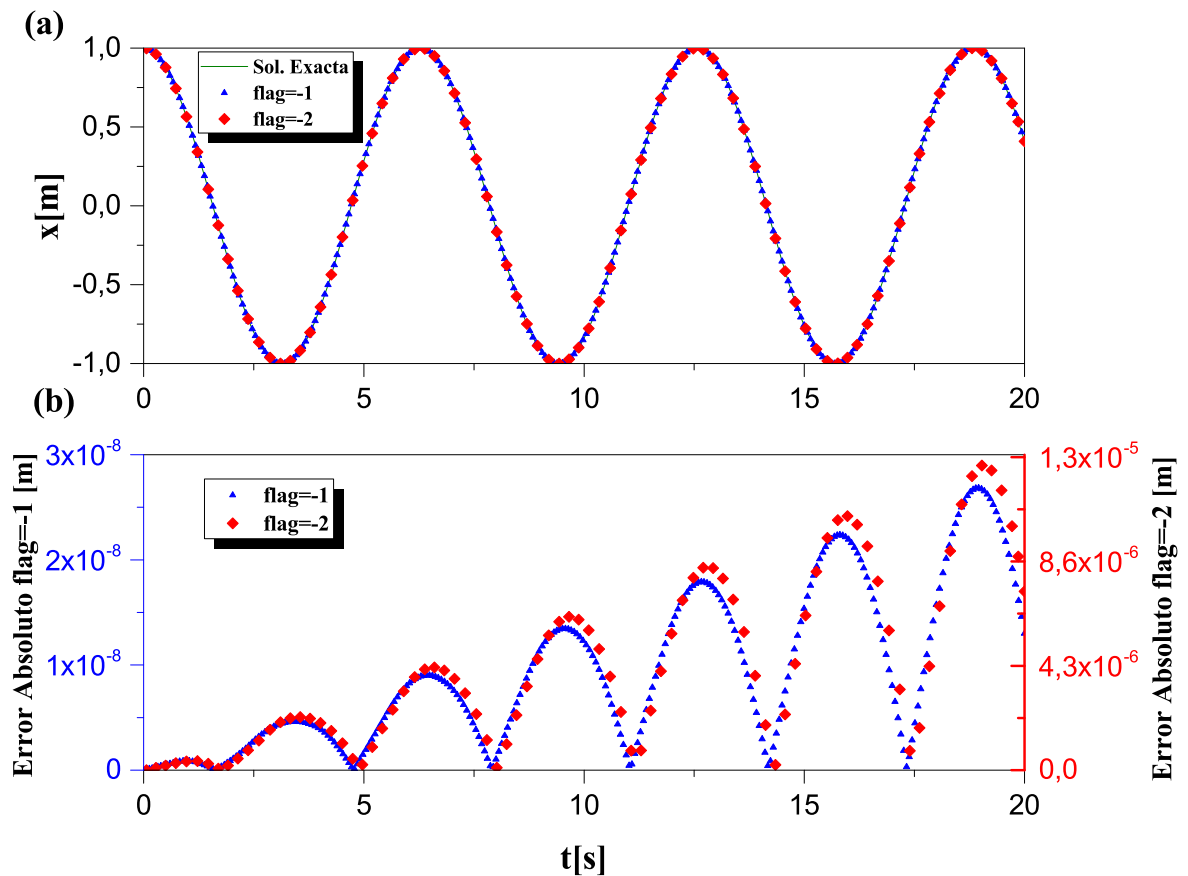


Figura C.4: Resultados numéricos del método RKF45 utilizando $flag=-1$ y $flag=-2$ en el intervalo de $t = 0$ a $t = 20$ (parámetros **V** y **VI** en la Tabla C.1). (a) Posición, (b) Errores absolutos en la posición.

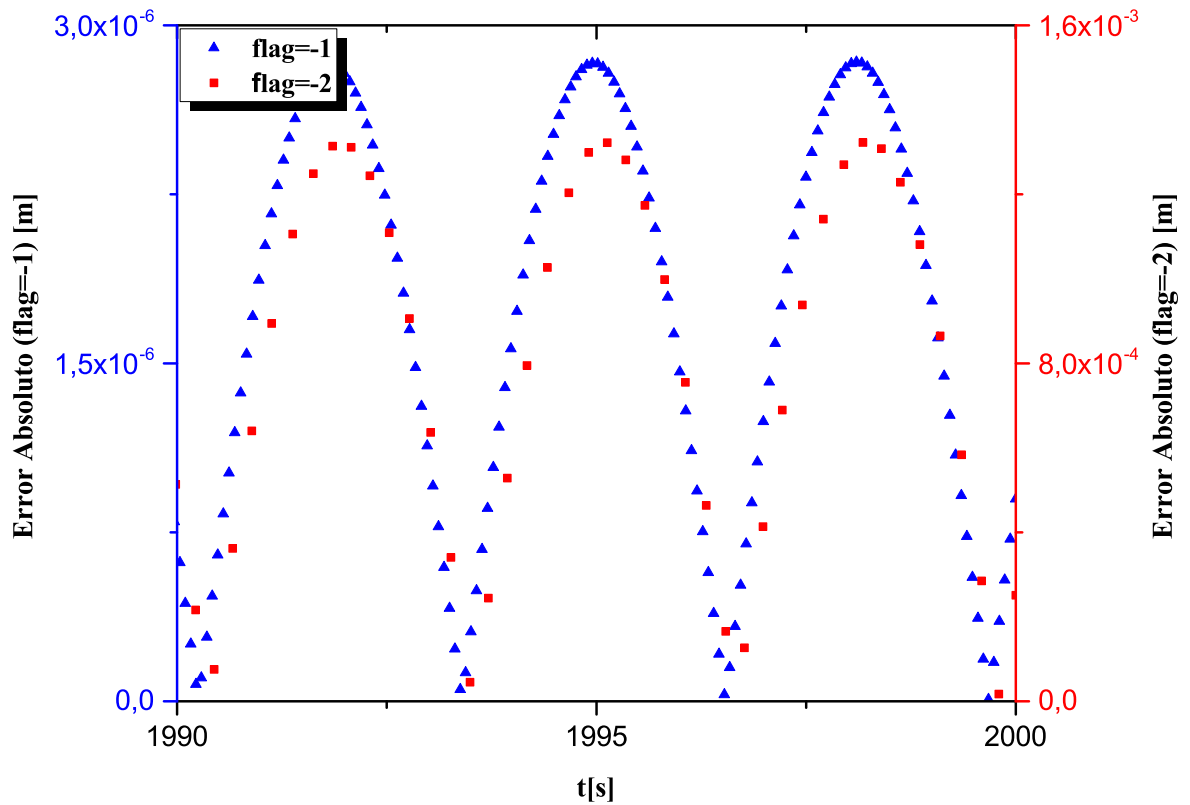


Figura C.5: Comparación de errores absolutos en el intervalo de $t = 1990$ a $t = 2000$ (parámetros **V** y **VI** en la Tabla C.1).

De las Figuras C.4 y C.5 se puede notar que la solución con $flag = -1$ incluye alrededor del triple de puntos de malla respecto a la solución del modo tradicional, lo que implica una reducción significativa del error. Esta opción reduce el error en el modo normal y en el modo *single-step*. Sin embargo, el modo normal reporta la solución *únicamente en los puntos de malla definidos por el usuario*, de modo que la información de las gráficas se limitaría a los puntos inicial y final.

Precisión de los algoritmos De la Figura C.1 se observa que el método RKF45 es mucho más preciso que el método RK4 cuando se calcula la solución en una malla de dimensiones similares. Sin embargo, los errores de la solución de RK4 son estables en todos los intervalos resueltos. Por su parte, los errores en el método RKF45 crecen de forma monótona. Esto implica que existe un punto, en un intervalo de solución suficientemente amplio, en el que la precisión del algoritmo RK4 es superior. Para ilustrar esto, se resuelve el problema utilizando los conjuntos de parámetros **III**, **V** y **VI** de la Tabla C.1 (ver Figura C.6).

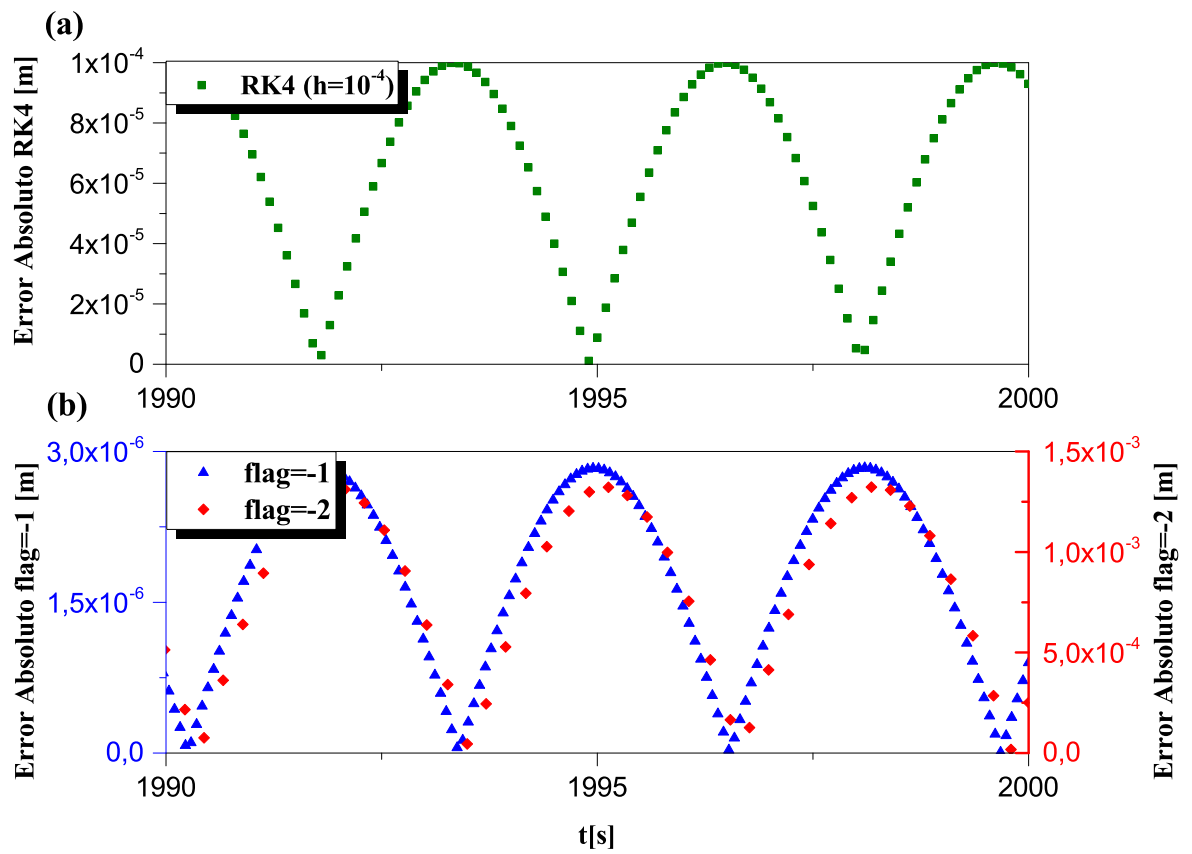


Figura C.6: Comparación de errores absolutos entre RK4 y RKF45 (parámetros III, V y VI en la Tabla C.1). (a) RK4 con $h = 10^{-4}$, (b) RKF45 con flag=-1 y flag=-2.