Procesos de objetivación emergentes de la actividad con generalización de patrones: Una experiencia con universitarios indígenas

Ivan Alfredo Saavedra Torres

Trabajo de Grado para Optar al título de Magister en Educación Matemática

Directora

Solange Roa Fuentes

Doctora en Ciencias de la Especialidad Matemática Educativa

Codirectora

Erika García Torres

Doctora en Ciencias de la Especialidad Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de ciencias

Escuela de matemáticas

Bucaramanga

2025

Dedicatoria

A mi amada esposa, cuya paciencia, amor y apoyo inquebrantable han sido mi mayor inspiración en este proyecto. Gracias por confiar en mí en cada etapa, por animarme en los momentos difíciles y por acompañarme en este viaje de aprendizaje y crecimiento. Este logro también te pertenece, porque sin ti, nada de esto habría sido posible.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios por permitirme alcanzar este logro, siendo siempre mi guía y mi luz en cada paso de este camino. Sin su fortaleza y sabiduría, este logro no sería posible.

A mi esposa Jenny Millan, mi compañera incondicional, por su apoyo, comprensión y amor en cada momento de este proceso. Gracias por ser mi motor, por motivarme a ser mejor y por brindarme esa estabilidad que me permitió avanzar con confianza y determinación.

A mis padres María Esther Torres Fuentes y Rufo Saavedra Duarte, por enseñarme el valor del esfuerzo y el sacrificio, recordándome siempre que todo se puede lograr con dedicación. Su preocupación, amor y empeño por brindarme una educación de calidad es un regalo invaluable que atesoraré siempre.

A la Doctora Solange Roa Fuentes, por su guía y dedicación incansable. Gracias por brindarme herramientas y enseñanzas que me formaron no solo como investigador, sino también como profesional comprometido con la educación matemática.

A todas las personas que, de una u otra forma, apoyaron mi proceso formativo, ofreciendo su apoyo, tiempo, conocimiento y palabras de aliento, les estaré eternamente agradecido.

Finalmente, a mi alma mater UIS, la universidad pública que me acogió y formó, otorgándome el espacio para desarrollarme como profesional. Mis más sinceros agradecimientos.

Tabla de Contenido

Lista de Tablas

Lista de Figuras

Lista de Apéndice

Resumen

Título: Procesos de objetivación emergentes de la actividad con generalización de patrones: Una experiencia con universitarios indígenas

Autor: Ivan Alfredo Saavedra Torres

Palabras Clave: Pensamiento algebraico, medios semióticos de objetivación, procesos de objetivación, estudiantes indígenas, generalización.

Descripción: Este documento presenta una investigación centrada en estudiar los procesos de objetivación que emergen en la actividad matemática de estudiantes universitarios pertenecientes a comunidades indígenas, mientras abordan tareas de generalización con secuencias figurativas. El estudio se fundamenta en la Teoría de la Objetivación de Radford (2023), la cual permite caracterizar el pensamiento algebraico sin la necesidad de recurrir a símbolos alfanuméricos. En este enfoque, la analiticidad facilita la deducción, permitiendo a los estudiantes explorar y argumentar sus ideas de diversas maneras, ya sea a través de gestos, el uso de palabras clave, deícticos lingüísticos, entre otros recursos. El objetivo es destacar las formas en que los estudiantes objetivan su conocimiento, específicamente su pensamiento algebraico, identificando recursos semióticos que les permitan atribuir significado a los términos de la secuencia.

En las tareas se evidencia un despliegue de los recursos semióticos de objetivación, entre los que destacan los deícticos espaciales, temporales y de modo, los cuales son complementados con gestos indexicales como señalamientos, deslizamientos y deícticos am phantasma, así como signos escritos que proporcionan una guía para la comunicación y expresión sobre la forma de objetivar la generalización de secuencias. También se incluye la actividad perceptual, el ritmo en sus expresiones y las formas de conteo rítmicas que denotan una comunalidad y una generalidad en los elementos de la secuencia matemática. Al finalizar las tareas, los estudiantes fueron capaces de generalizar algebraicamente la secuencia, a través de nodos semióticos y contracción semiótica, es decir, convergencias de diversos medios semióticos, que evolucionan a través de procesos de objetivación.

Abstract

Title: Emergent objectification processes of activity with pattern generalization: An experience with indigenous university students

Author: Iván Alfredo Saavedra Torres

Keywords: Algebraic thinking, semiotic means of objectification, objectification processes, indigenous students, generalization.

Description: This paper presents an investigation focused on studying the objectification processes that emerge in the mathematical activity of university students belonging to indigenous communities, while they approach generalization tasks with figurative sequences. The study is based on Radford's (2023) Theory of Objectification, which allows characterizing algebraic thinking without the need to resort to alphanumeric symbols. In this approach, analyticity facilitates deduction, allowing students to explore and argue their ideas in various ways, either through gestures, the use of key words, linguistic deictics, among other resources. The objective is to highlight the ways in which students objectify their knowledge, specifically their algebraic thinking, identifying semiotic resources that allow them to attribute meaning to the terms of the sequence.

In the tasks there is evidence of a deployment of semiotic resources of objectification, among which the spatial, temporal and mode deictics stand out, which are complemented with indexical gestures such as pointing, sliding and am phantasma deictics, as well as written signs that provide a guide for communication and expression on how to objectify the generalization of sequences. Also included are perceptual activity, rhythm in their expressions and rhythmic counting forms that denote a communality and generality in the elements of the mathematical sequence. At the end of the tasks, the students were able to generalize the sequence algebraically, through semiotic nodes and semiotic contraction, that is, convergences of diverse semiotic means, which evolve through objectification processes.

Introducción

Desde sus inicios, la educación matemática ha fomentado el desarrollo del pensamiento lógico, crítico y analítico. En las últimas décadas, la necesidad de acercar esta disciplina a todos los estudiantes, sin importar su contexto cultural o socioeconómico, ha impulsado la búsqueda de metodologías inclusivas. En particular, la educación superior para estudiantes de comunidades indígenas requiere abordar sus particularidades culturales y epistemológicas, elementos enriquecedores en la construcción de significados matemáticos (Corbetta et.al., 2018). No obstante, estos estudiantes enfrentan barreras conceptuales y metodológicas que limitan su acceso íntegro al conocimiento y al desarrollo de habilidades en el área (Meléndez et al., 2023).

Es por ello que el interés de esta investigación es identificar y describir los procesos de objetivación movilizados por estudiantes de comunidades indígenas al abordar tareas de generalización, dentro del marco de la Teoría de la Objetivación (TO) propuesta por Luis Radford. Esta teoría aporta herramientas interpretativas para analizar las acciones de los estudiantes en su interacción y resolución de tareas que fomentan el desarrollo del pensamiento algebraico (Radford, 2023). Con este fin, se diseñaron actividades basadas en secuencias de patrones figurales, dado que investigaciones previas (Radford, 2010; Vergel y Rojas, 2018; Vergel et al., 2020) evidencian que estos problemas impulsan el pensamiento algebraico desde la perspectiva de la TO, promoviendo conceptos clave como la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica (Radford, 2010).

Al trabajar con estudiantes pertenecientes a comunidades indígenas, se incorpora una perspectiva histórico-cultural y epistemológica única al proceso de aprendizaje, la cual enriquece la dinámica en el aula. Estos estudiantes enfrentan desafíos específicos en el ámbito académico, al adaptarse a los enfoques pedagógicos ajenos a su contexto cultural y la falta de recursos contextualizados en la enseñanza de la matemática. A través de este estudio, se busca no solo identificar y comprender las particularidades de su proceso de aprendizaje, sino también desarrollar estrategias que favorezcan su participación activa y efectiva en el ámbito matemático. Se espera que, al abordar sus necesidades y particularidades culturales, esta investigación logre un impacto positivo en su desempeño académico, así como en la creación de un entorno de aprendizaje inclusivo y enriquecedor que valore y respete su identidad cultural. Para ello se presentan seis capítulos que se describen a continuación.

En el primer capítulo se describen los antecedentes de la investigación y se divide en tres secciones: la primera aborda propuestas sobre el pensamiento algebraico en el contexto de la educación matemática; la segunda presenta los elementos específicos del pensamiento algebraico que serán trabajados en esta investigación; y la tercera se enfoca en el marco legal y en investigaciones previas sobre la formación de estudiantes pertenecientes a comunidades indígenas.

El segundo capítulo presenta el planteamiento del problema, que incluye la pregunta de investigación y los objetivos general y específicos que direccionarán el trabajo.

En el tercer capítulo se exponen los elementos teóricos relevantes desde la Teoría de la Objetivación (TO), la actividad, la labor conjunta, las tareas que promueven el pensamiento algebraico, los MSO y procesos de objetivación que dan sustento teórico y conceptual a esta investigación.

El cuarto capítulo describe el proceso metodológico cualitativo de tipo descriptivo e interpretativo, donde se presenta una caracterización de la población, la adaptación de las fases o el ciclo de investigación propuesto por Radford (2015), en las que se realiza el diseño, justificación e implementación de las tareas, la recolección y selección de datos y el análisis multimodal de los mismos.

El quinto capítulo expone el análisis multimodal de las producciones matemáticas de los estudiantes al abordar las dos tareas de generalización en relación a los MSO movilizados, las conexiones encontradas entre ellos y como esta vinculación lleva al surgimiento de procesos de objetivación al generalizar secuencias figurales.

Finalmente, el sexto y último capítulo presenta las conclusiones, respondiendo a la pregunta de investigación, además de proponer reflexiones generales y plantear posibles preguntas emergentes para investigaciones futuras.

1. Antecedentes

De acuerdo con la revisión de literatura se organizó el presente capítulo en tres apartados: en el primero se muestra un panorama general referente al pensamiento algebraico desde diversas interpretaciones haciendo énfasis en el enfoque que toma la investigación; en el segundo se muestra la pertinencia de realizar el trabajo enfocado en la generalización haciendo uso de secuencias de patrones. Y, por último, se realiza un breve marco legal sobre el derecho a la educación de los estudiantes pertenecientes a comunidades indígenas, finalizando este apartado con algunos estudios de autores interesados en trabajar la formación de esta población.

1.1 Pensamiento algebraico

En los inicios, las investigaciones relacionadas con el pensamiento algebraico se centraban en identificar los errores de los estudiantes y las limitaciones en su aprendizaje. Algunas de las conclusiones reportadas se refieren a dificultades que evidenciaban los estudiantes al tratar con el formalismo del álgebra, relacionadas, por ejemplo, con el uso de símbolos algebraicos y el rol de elementos de la lógica y teoría de conjuntos en la construcción de conceptos algebraicos, como se evidencia en Dorier (2000).

Sin embargo, debido a la influencia del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM por sus siglas en inglés) desde 1989 se ha dado una visión al álgebra como una línea de pensamiento y resolución de problemas que inicia en la escuela primaria y se extiende a lo largo de toda la formación matemática de los estudiantes (Kaput, 2017). Esto ha permitido el diseño y desarrollo de nuevas investigaciones que buscan potenciar el pensamiento algebraico desde los primeros años y a lo largo de toda la formación escolar de los estudiantes (Davis, 1995; Kieran, 2004; Radford, 2012; Vergel, 2016; Kaput, 2017; Kieran, 2022).

En particular, Kaput (2017) concibe el álgebra como una forma de razonamiento, donde considera fundamentales las formas en que el estudiante hace, piensa y habla de las matemáticas, es decir, el álgebra surge de la actividad humana. Además, considera que "el corazón del razonamiento algebraico se compone de complejos procesos de simbolización que sirven para la generalización y el razonamiento con generalizaciones" (Kaput, 2017, p.9). Así mismo, este autor propone dos aspectos centrales de este razonamiento: la generalización y la expresión de generalizaciones en sistemas de símbolos convencionales cada vez más sistemáticos, haciendo referencia a que el estudiante use sus propios recursos para notar regularidades y hacer generalizaciones. Por ejemplo, cuando se enseña la multiplicación por 10, el estudiante empieza a identificar que dicha multiplicación tiene el efecto de agregar 0 al multiplicando, aspectos que el estudiando puede generalizar para futuras respuestas.

Y el segundo, la acción guiada sintácticamente sobre símbolos dentro de sistemas organizados de símbolos, involucrando el uso de signos algebraicos (incógnitas, variables o parámetros) donde el estudiante realiza un análisis de la situación e incluye los signos en sus procesos; por ejemplo: al proponer haciendo uso de variables el término n-ésimo de una secuencia definida por un patrón de construcción. Este tipo de situaciones intentan generar en el estudiante nociones básicas de función, donde puede hacer uso de signos por medio de fórmulas para describir el cambio en los elementos de entrada y salida de una secuencia. Por último, estos aspectos centrales hacen énfasis en la conexión del álgebra con todas las matemáticas; de tal manera que el estudiante puede hacer uso de diferentes conceptos mientras razona algebraicamente para solucionar situaciones como las planteadas anteriormente; estas conexiones le permiten al álgebra desempeñar un papel clave en el desarrollo de pensamiento matemático (Kaput, 2017).

Algo que es central para Kaput es el uso de símbolos o signos algebraicos pues desde su planteamiento no se posibilita que un estudiante piense algebraicamente si no hace uso de ellos. No obstante, si se acepta este planteamiento como verdadero se estaría desconociendo la epistemología misma del álgebra, la cual surge sin hacer uso de una incógnita o variable, tal como lo expresa Dorier (2000), donde menciona que los babilónicos al resolver raíces de polinomios no hacían uso de incógnitas o variables, o los chinos con el problema de la diagonalización de matrices, y a partir de ello surgió toda el álgebra que se conoce actualmente.

Otra perspectiva que está en la línea de caracterizar el pensamiento algebraico es la expuesta por Kieran (2004), donde propone diferenciar el pensamiento aritmético del algebraico. Dado que el pensamiento aritmético le permite al estudiante realizar operaciones matemáticas (suma, resta, multiplicación y división) pero centrando su atención en el cálculo y no en los aspectos relacionales de la operación. El siguiente ejercicio propuesto por Kilpatrick et al. (2001) y citado por Kieran (2004) muestra una desconexión que se presenta en las aulas entre la aritmética y el álgebra:

> "Cuando 3 se suma con 5 por cierto número, la suma es 38; encuentre el número" los estudiantes que hacen uso de la aritmética restarán 3 de 38 y luego dividirán por 5, deshaciendo en orden inverso, como se les ha enseñado, las operaciones establecidas en el texto del problema. Por el contrario, en las clases de álgebra se les enseñará primero a representar las relaciones en la situación usando las operaciones establecidas $5x + 3 = 38$. (Kieran, 2004, p.2)

Lo anterior muestra una situación que ocasiona dificultades en los estudiantes al tener expresiones del tipo $15x - 4$ y operarlas como $15x - 4 = 11x$. Errores de este tipo fueron identificados por Fernández e Ivars (2016), donde expresan que el docente debe guiar a sus estudiantes dando sentido a la notación que se usa en el aula y comprendiendo las formas en que sus estudiantes las expresan.

En cuanto al pensamiento algebraico Kieran (2022), define un marco de tres dimensiones: pensamiento analítico, pensamiento estructural y pensamiento funcional. Un aspecto importante que se evidencia en las dimensiones es la generalización, que se percibe como el corazón del pensamiento algebraico. Además, propone que una persona puede pensar algebraicamente realizando un análisis de las relaciones entre cantidades, estudiando cambios, resolviendo problemas, modelando, justificando, probando y prediciendo. Dichos aspectos se pueden lograr sin la necesidad de hacer uso explícito del álgebra simbólica; además, estos aspectos pueden ser potenciados desde edades tempranas en las aulas de clase (Kieran, 2004).

Esta perspectiva hace énfasis en la actividad matemática desplegada por los estudiantes al momento de resolver problemas que involucren conceptos del álgebra, pues esto puede definir su forma de pensar. No obstante, su propuesta abarca diversos ámbitos muy generales de las matemáticas, por ejemplo: modelación, justificación, prueba y predicción, resolución de problemas, entre otros, y para identificar aspectos de cada ámbito se hace compleja la caracterización del pensamiento algebraico; por tanto, es pertinente centrar la visión en una de sus tres dimensiones.

Por otra parte, desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación (TO) el pensamiento matemático se diferencia de las otras formas de pensamiento en el énfasis que se da a la reflexión matemática "la relación del individuo con el mundo enfatiza ideas en torno a la forma, el número, la medida, el tiempo, el espacio, etc." (Radford, 2006, p.115).

Un tipo específico de pensamiento matemático es el pensamiento algebraico, enfocado en la dimensión analítica de Kieran (2018) puesto que, uno de los componentes se relaciona con el uso del simbolismo algebraico que "para caracterizar de forma significativa el pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, sino que se debe ser capaz también de expresarlo algebraicamente" (p.165, citado por Vergel y Rojas 2018). Sin embargo, Vergel y Rojas (2018) en acuerdo con las ideas de English y Warren (1998), proponen que un asunto central del pensamiento algebraico es la diferencia entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar verbalmente un cierto grado de generalidad y la habilidad para emplear la notación algebraica. Desde esta mirada, la generalización en matemáticas es crucial para definir las formas de pensar algebraicamente.

Asimismo, Vergel y Rojas (2018) hacen énfasis en que para pensar algebraicamente no es una condición necesaria, ni suficiente, el uso de las letras pues como lo afirma Radford (2012) "nuestro moderno simbolismo algebraico nos permite llevar a cabo transformaciones de expresiones que pueden ser difíciles o imposibles con otras formas de simbolismo" (p.677). Por esta razón, al momento de pensar algebraicamente se hace uso de deícticos especiales como "arriba, abajo" o expresiones a través de acciones como gestos, ritmos, miradas, palabras, las cuales se pueden interpretar como fórmulas corpóreas que se realizan en el espacio y tiempo (Vergel y Rojas, 2018) y que ayudan a los estudiantes a expresar ideas matemáticas con diversos grados de profundidad sin la obligación de hacer uso de símbolos matemáticos.

Esta postura, ofrece una alternativa de cómo pueden los estudiantes expresar sus ideas de tipo algebraico por medio de acciones físicas, verbales o escritas, sin necesidad de hacer uso de letras al resolver problemas. Una caracterización de este pensamiento que propone Radford (2010) es la siguiente:

> Se constituye de tres componentes estrechamente relacionados: el sentido de indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro) como aquello

opuesto a la determinancia numérica; (b) la analiticidad, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos que comporta procesos de deducción; y (c) la designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos. (citado por Vergel y Rojas 2018, p.51)

Además, Vergel y Rojas (2018), desde lo propuesto por Radford reconocen tres formas de pensamiento algebraico:

Pensamiento algebraico factual: tiene que ver con los Medios Semióticos de Objetivación (MSO) como gestos, movimientos, palabras, expresiones del estudiante al momento de resolver problemas. En este estrato de pensamiento la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, se puede afirmar que la indeterminancia queda implícita, en tanto que el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice "aquí", señala dos figuras en una secuencia y dice "más dos" (p. 52) centrando su explicación en el habla, gestos y deícticos que guíen su forma de expresar generalidad.

Pensamiento algebraico contextual: los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases "clave". En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explicita, se vuelve objeto del discurso. Por ejemplo, el estudiante dice "arriba quito uno" o "dos por la figura más uno", o "# de la figura más uno para la fila de arriba y # de la figura más dos para la de abajo. Sumar los dos para el total" (p. 52) además de percibirse una conexión entre los MSO para guiar su discurso el elemento indeterminado se hace explicito y hay un trabajo operativo con el mismo.

Pensamiento algebraico simbólico: las frases clave son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra, por ejemplo, mediante expresiones como: $n + (n - 1)$ ó $2n - 1$. En este estrato de pensamiento "hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso", a través de signos alfanuméricos del álgebra (p. 53).

Un aspecto central desde la TO, que se ha evidenciado en investigaciones previas (Radford, 2018b; Vergel y Rojas, 2018; Vergel et. al, 2020) es el papel de la analiticidad y cómo ésta influye en cada categoría, la cual se puede identificar por medio de los procesos de deducción que utilizan para solucionar tareas y las formas en que los estudiantes expresan dichas deducciones. Estas categorías del pensamiento algebraico proporcionan una visión más amplia valorando las diferentes formas de expresión de los estudiantes en el aula de clase, haciendo uso de diferentes MSO para expresar sus ideas matemáticas independientemente de su formación o nivel académico. Dichos medios semióticos son movilizados por los estudiantes en la actividad, que es vista como una labor conjunta entre estudiantes y docentes, la cual tiene el fin de transformar los saberes en conocimiento (Radford, 2017).

En este sentido, es de interés investigar qué tipo de pensamiento algebraico evidencian estudiantes universitarios indígenas luego de su formación inicial, básica y media, con el propósito de identificar qué formas de expresión usan al resolver tareas que involucren procesos de generalización. Es por ello, que al revisar en la literatura se encontró que una de las rutas de acceso para el pensamiento algebraico también apoyadas y reportadas por Butto y Delgado (2012), son los procesos de generalización, los cuales para términos de la presente investigación se abordarán por medio de secuencias de patrones figurales que, debido a algunos autores como Contreras (2023), Vergel et al. (2020) y Radford (2018b), se dedica un apartado reportando que el uso de éste es un MSO que puede ser usado en el aula por el docente para hacer notar regularidades, contribuyendo así a la evolución del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico (Vergel et al., 2022).

1.2 Generalización de patrones

La TO ha abordado el estudio del pensamiento algebraico por medio de tareas de generalización sobre secuencias de patrones figurales, haciendo uso del análisis multimodal del pensamiento humano (Radford et al., 2009). Este da importancia a identificar, describir y analizar los diferentes MSO que emergen y evolucionan en el proceso de dar sentido a los objetos matemáticos en el aula de clase.

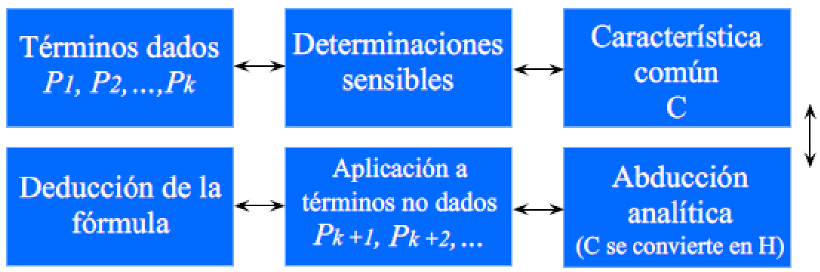
Autores como Radford (2010), Vergel y Rojas (2018), y Vergel et al. (2020), resaltan el trabajo con la generalización de patrones como un escenario propicio para el desarrollo del pensamiento algebraico. De esta manera, la exploración se da a través de secuencias figurales, la cual se presenta como un punto de partida para buscar evidencias que ayuden a identificar el surgimiento de formas de pensamiento algebraico en relación con la generalización. Realizándose desde el análisis de patrones en contextos más cercanos y accesibles para los estudiantes.

Además, se recalca que la generalización es uno de los procedimientos principales para la construcción del conocimiento y se constituye de tres problemas fundamentales: el fenomenológico donde se realizan determinaciones para definir aspectos en común; el epistemológico que son los criterios y formas de operar que se toman en cuenta para abstraer, inducir o generalizar; y el semiótico entendido desde las diversas formas de denotar los objetos entre ellas: gestual, lenguaje natural, uso de artefactos, símbolos o combinaciones entre ellos (Radford, 2013). A partir de allí, se propone una caracterización partiendo de (i) Identificar una comunalidad o característica común que se nota a partir del trabajo con algunos elementos particulares de la secuencia (por ejemplo: $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$); (ii) Generalizar o aplicar la comunalidad a todos los términos de la secuencia en consideración, es decir a los términos

$(p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, ...)$; y (iii) La capacidad de usar esa propiedad a fin de deducir una expresión directa que permita calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

La Figura 1 explica la estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales, las flechas bidireccionales indican que se puede transitar entre los diferentes elementos siempre que se requiera.

Figura 1 *Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales*



Nota. Tomado de Entorno a tres problemas de la generalización (p.7) por Radford (2013)

Un aspecto importante en los procesos de deducción que se dan a lo largo de la generalización es la manera analítica de generalizar la característica común. Es por ello que para Viéte "lo que es distintivamente algebraico […] es la forma analítica en la que pensamos cuando pensamos algebraicamente" (Radford, 2018b, p. 6). Además, es importante aclarar que en la deducción de la formula no es necesario hacer uso de símbolos alfanuméricos, esto debido al simbolismo moderno por medio del cual es posible expresar ideas o formas de generalización (Vergel, 2018).

Otros autores como Cañadas y Castro (2007) presentan un modelo de razonamiento inductivo que consta de cinco pasos, que se proponen como útiles para ayudar al estudiante a avanzar hacia la generalización, cabe recalcar que no necesariamente deben ser secuenciales. Estos pasos son: (i) Trabajar sobre casos particulares, casos concretos o ejemplos que sean fácilmente observables; (ii) Identificación de regularidades, es aquello común, repetido en diferentes situaciones que se espera que suceda de nuevo; (iii) Formulación de conjeturas, proposiciones que se suponen como ciertas pero que son sujetas a pruebas, dicha prueba puede resultar no valida y ser rechazada; (iv) Justificación de una conjetura, cualquier razón dada para convencer la veracidad de una afirmación. Hay justificaciones empíricas que utilizan ejemplos como medio para convencer y la validación de conjeturas se produce con nuevos casos particulares (diferentes de los anteriores), pero no para el general; (v) Generalización, implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares estudiados donde la conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos.

Cañadas y Castro (2007) también concluyen que la búsqueda de patrones es un paso relevante y necesario en el desarrollo del razonamiento inductivo en los primeros niveles universitarios; puesto que el trabajo con patrones puede proporcionar a los estudiantes una forma más significativa de encuentro con los procesos de generalización. Si los estudiantes no poseen habilidades mentales necesarias para identificar estructuras matemáticas a partir de casos particulares, será mucho más complejo el trabajar con estructuras matemáticas en cursos posteriores.

Por su parte, Contreras (2023) investigando sobre las características del cambio y la variación en estudiantes de grado octavo y a través del uso de tareas de generalización sobre secuencias de patrones figurales, reporta que los estudiantes materializan sus intenciones y coordinan la estructura numérica y espacial de la secuencia figural por medio de gestos idexicales, como: señalamientos, apuntamientos y deslizamientos. Asimismo, muestra que la coordinación de diferentes MSO en las acciones lingüística, perceptual, gestual, artefactual y escrita de los estudiantes revela los procesos de objetivación que usan al generalizar. Además, sugiere que los estudiantes construyan por medio de dibujos, elementos de la secuencia, pues al expresar sus ideas apoyadas de sus representaciones graficas se reflejan formas de pensamiento más sólidas apoyadas de diferentes expresiones semióticas.

Es así, como la investigación sobre el desarrollo del pensamiento algebraico, enmarcada en los estudios mencionados, ha revelado la importancia de abordar la generalización a través de secuencias figurales para comprender el surgimiento de formas de pensamiento algebraico en contextos educativos. La exploración detallada con patrones y la identificación de MSO han demostrado ser esenciales en este proceso, se destaca la relevancia de la generalización como un proceso y producto (Ayala y Molina, 2021) clave en la construcción del conocimiento matemático.

La propuesta de Viéte sobre la forma analítica de pensar algebraicamente y el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007) ofrecen perspectivas complementarias, consolidando la idea de que trabajar con patrones y estructuras matemáticas desde etapas tempranas y a lo largo de toda la formación académica de los estudiantes es crucial para el desarrollo académico futuro. A su vez, los hallazgos de Contreras (2023) aportan una dimensión multimodal al proceso, subrayando la coordinación de diferentes MSO a través de gestos, acciones lingüísticas y representaciones gráficas. Este enfoque integral en la investigación del pensamiento algebraico sienta las bases para explorar, en el siguiente apartado, la conexión entre estas perspectivas teóricas y la implementación efectiva en una etapa educativa poco estudiada desde el pensamiento algebraico en estudiantes universitarios pertenecientes a comunidades indígenas.

1.3 Formación de estudiantes pertenecientes a comunidades indígenas

De acuerdo con el interés de la presente investigación, se decide realizar una revisión de literatura acerca de cómo se han implementado políticas tanto nacionales como internacionales referentes a la formación de estudiantes pertenecientes a comunidades indígenas; además, se analizan estudios que se han centrado en dar relevancia a el desarrollo de procesos educativos de dicha población.

Con el fin de garantizar el derecho a una educación con calidad para todos según lo reglamentado en la Declaración de los Derechos Humanos, desde 1948 se han venido estableciendo regulaciones, conferencias y decretos a nivel global y nacional. Entre ellas, se puede encontrar la constitución política de Colombia que establece en el artículo 67: “la educación es un derecho de toda persona”, mencionando que los principales actores involucrados son el Estado, la sociedad y la familia. Esta educación se formula como obligatoria para individuos entre cinco y quince años de edad garantizando un año de prescolar y 9 años de educación básica y media.

Con relación a la educación superior, el Consejo Nacional de Educación Superior (CESU) plantea en el acuerdo 2034 "Por lo superior" la promoción de la educación inclusiva a través de tres pilares fundamentales: acceso, permanencia y graduación. Este acuerdo aborda la problemática de la inequidad que enfrentan ciertos grupos sociales para acceder a la educación superior, siendo estas desigualdades de índole social, económica y cultural. De acuerdo con el artículo 7 de la Constitución política, que reconoce y protege la diversidad étnica y cultural, en Colombia se identifican cinco grupos poblacionales que encuentran obstáculos en el acceso a la educación superior: "comunidades negras, afrocolombianos, raizales y palenqueros, indígenas y Rom" (MEN, 2013, p. 94).

El estado tiene el compromiso de brindar cobertura y atención a quienes logran acceder a los diferentes niveles educativos. Asimismo, las universidades deben implicarse en la tarea de proporcionar una educación inclusiva, definida por el MEN (2013) como: “la capacidad de potenciar y valorar la diversidad, promover el respeto a ser diferente y garantizar la participación de la comunidad en una estructura intercultural de los procesos educativos” (p. 96).

Atendiendo a esta política de educación inclusiva el MEN (2018) decreta el Índice de Inclusión para Educación Superior (INES), como una herramienta que proporciona orientaciones para las Instituciones de Educación Superior (IES) hacia la búsqueda de la equidad, permanencia y calidad, potenciando y valorando la diversidad desde el reconocimiento y visibilización de la diferencia, como condición inherente al ser humano.

Según el MEN (2018) comprender la educación inclusiva se debe tener claridad sobre algunas características fundamentales, las cuales se muestran en la Figura 2.

Figura 2 *Características de una educación inclusiva definidas por el MEN*

Nota. Tomado de Índice de inclusión para la educación superior (INES) (p. 19) por MEN, 2018.

A continuación, se da una descripción de cada una de estas características que se tuvieron en cuenta para generar recomendaciones que permitan fomentar el diseño e implementación de las aulas inclusivas en los cursos de primer año de las IES a partir del MEN (2018):

Participación: “Hace referencia a la importancia de tener voz y ser aceptado por lo que uno es” y se relaciona con “experiencias compartidas y negociaciones que resultan de la interacción social al interior de una comunidad que tiene un objetivo en común” (p. 20).

Diversidad: Característica inherente al ser humano que hace que sus diferencias sean consustanciales a su naturaleza.

Interculturalidad: Es un conjunto de relaciones entre diferentes grupos culturales que conduce a un proceso dialéctico de constante transformación, interacción, diálogo y aprendizaje de los diferentes saberes culturales en el marco del respeto, promoviendo un diálogo abierto, reciproco, crítico y auto-crítico entre culturas.

Equidad: En el ámbito educativo significa pensar en términos de reconocimiento de la diversidad estudiantil. Es pensar en dar a cada estudiante lo que necesita en el marco de un enfoque diferencial; en educar de acuerdo con las diferencias y necesidades individuales. La equidad incluye generar condiciones de accesibilidad, entendida como una estrategia que permite que los entornos, los productos y los servicios puedan ser utilizados sin problema por todas las personas.

Calidad: Se refiere a las condiciones óptimas que permiten el mejoramiento continuo de la educación en todos los niveles.

Pertinencia: Se relaciona con la capacidad que tienen las IES de dar respuesta a las necesidades concretas de un entorno y de su incidencia en la comunidad.

Desde el ámbito local, la Universidad Industrial de Santander (UIS) por medio del Acuerdo 282 (2017) y considerando los decretos anteriormente nombrados, propone dentro de sus objetivos, estudiar y promover el patrimonio cultural de la humanidad, dando atención a la diversidad étnica, histórica, regional e ideológica y así contribuir a la conservación y enriquecimiento. Además, brinda disposiciones sobre el ingreso a la universidad de aspirantes bajo la modalidad de Admisión Especial (AE), otorgando a programas de pregrado presencial un sistema de cupos especiales asignando 2 por carrera, los cuales pueden acceder con la exigencia de un puntaje igual o superior al 80% del corte del programa al que aspira estudiar.

Según lo anterior, se reporta en la Oficina de Admisiones de la UIS desde el 2011-1 y hasta 2023-1 fueron admitidos 80 estudiantes pertenecientes a comunidades o resguardos indígenas de los cuales 48 ingresaron a carreras con asignaturas que ofrece la Escuela de Matemáticas. Esto es el 60% de los estudiantes admitidos tienen en su plan de estudio asignaturas como: cálculo y álgebra lineal, entre otras relacionadas con matemáticas.

Sin embargo, el cumplimiento de estas normativas solo está garantizando el acceso a diferentes niveles educativos, pero en la práctica se está dejando a un lado la permanencia, promoción y respeto a lo diferente como lo reportan González (2022) y Pineda (2018) investigaciones en las que se evidencia vivencias de estos estudiantes al enfrentar sus cursos iniciales en los que en algunos casos han tenido que cancelar sus semestres académico. Por ejemplo, Sierra (2005) entrevistando estudiantes y egresados de universidades de Antioquia y Chocó pertenecientes a comunidades indígenas, reporta que en todos los niveles educativos (primaria, secundaria y universidad) los estudiantes consideran que no se fortalece ni valora su cultura, pues se enseña de igual forma que en cualquier institución regular sin tener en cuenta sus orígenes o desarrollos históricos y culturales.

Por otro lado, Ávila (2014) propone recomendaciones que son de utilidad al trabajar actividades con estudiantes de comunidades indígenas; entre ellas plantean que a través de tareas "prácticas" concretas y contextualizadas se puede promover una mejor comprensión. Además, se ha demostrado que, "tienen mayor sensibilidad y éxito al tratar con información visual y espacial en comparación con la verbal" (Barnes, 2000, p.10) y "aprenden por observación y comunicación no verbal" (South Australia DETE, 1999, p. 10). Por tanto, es pertinente plantear actividades que sean más cercanas a los estudiantes, a su forma de comprender, y a su vez indagar las maneras como objetivan conceptos del álgebra, pues los medios semióticos que se espera usen los estudiantes pueden ser muy variados (gestual, verbal, interacción, entre otros) y ayudaran a enriquecer sus procesos de objetivación.

Respecto a la problemática observada en la Universidad Industrial de Santander, investigaciones como las de González (2022) y Echeverría (2022) han abordado la situación desde dos perspectivas complementarias. Echeverría (2022) enfatiza la presencia de estudiantes indígenas en las aulas de matemáticas, proponiendo que los docentes en formación reflexionen sobre las formas de atender las necesidades específicas de estos estudiantes. Esta propuesta busca dar visibilidad a las comunidades indígenas y destacar la necesidad de políticas no solo para el acceso a la educación superior, sino también para el diseño y desarrollo de estrategias que promuevan su permanencia y graduación, aspectos críticos que aún no están suficientemente cubiertos.

Por su parte, González (2022), en su esfuerzo por mejorar la permanencia de estudiantes indígenas en la universidad, sugiere implementar un curso de refuerzo preuniversitario dirigido específicamente a estudiantes que ingresan por admisión especial. Este curso busca fortalecer los conocimientos algebraicos y aritméticos de los estudiantes mediante la resolución de problemas contextualizados, lo que facilita un acercamiento significativo a los conceptos matemáticos. Además, el curso permite que los estudiantes exploren los problemas desde sus propios contextos culturales, lo cual no solo potencia sus habilidades matemáticas, sino que también enriquece sus formas de expresión y comprensión en el aula.

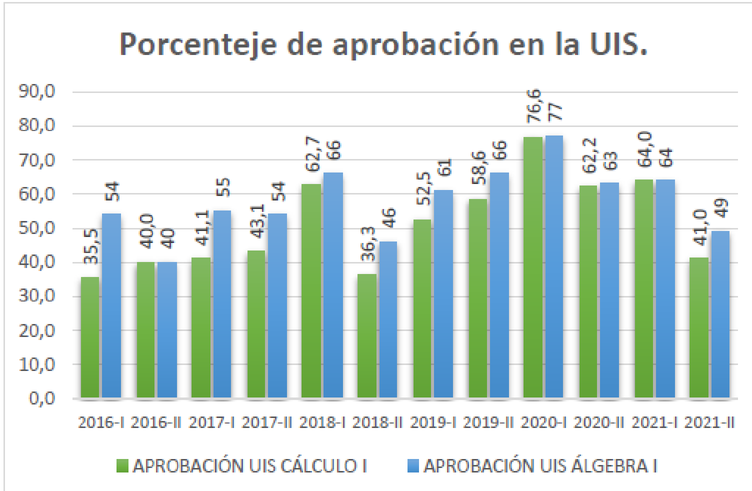
Estas investigaciones reflejan una problemática persistente en cuanto a las dificultades de acceso, permanencia y graduación de los estudiantes indígenas en la educación superior. Asimismo, subrayan la importancia de crear espacios dentro de las matemáticas que no solo faciliten el aprendizaje y la reflexión, sino que también consideren el contexto histórico y cultural de estos estudiantes, promoviendo así un proceso educativo inclusivo y enriquecedor.

2. Planteamiento del problema

El interés por esta investigación surge del deseo de conocer las modalidades de ingreso que ofrece la Universidad Industrial de Santander para promover la inclusión desde la educación superior. En particular se identifica el acuerdo 282 del consejo académico de la UIS, mediante el cual se asignan cupos por medio de un proceso de "admisión especial" para poblaciones con difícil acceso a la educación. Entre estas poblaciones se encuentran estudiantes pertenecientes a comunidades indígenas, para quienes la universidad ofrece dos cupos por programa académico. No obstante, investigaciones como las de Echeverria (2022) y González (2022) señalan que no se está contemplando la permanencia ni el índice de graduación de dicha población.

Por otra parte, la investigación en Educación Matemática muestra que el asunto de deserción en asignaturas como cálculo y álgebra lineal en los primeros años de universidad, es un problema general y que se presentan en diversos contextos (Artigue et al., 1995; Hit, 2003; López y Escribano, 2016). Como se evidencia en la Figura 3, este es un asunto que también afecta a los estudiantes de la Universidad Industrial de Santander pues se evidencia que solamente cerca del 60 % de los estudiantes aprueban las asignaturas de cálculo y álgebra lineal. Bajo este panorama, surgen las siguientes preguntas: ¿cómo se ven reflejados estos datos en estudiantes de comunidades indígenas teniendo en cuenta su acceso limitado a la educación universitaria? ¿qué acciones pueden ser tomadas por las instituciones para contribuir con la permanencia y graduación de estos estudiantes?

Figura 3 *Porcentaje de aprobación de asignaturas en la UIS*



Nota. Tomado de Curso de refuerzo en matemáticas para estudiantes de admisión especial universitaria: habilidades para la resolución de problemas (González, 2022, p.31)..

Diversas investigaciones han analizado las dificultades que presentan los estudiantes frente a los cursos de álgebra lineal autores como Dorier (2000), López y Escribano (2016) y Kop et al., (2019), por ejemplo, reportan que parte de las dificultades se relacionan con el uso de nociones, palabras, símbolos, definiciones y una amplia gama de nuevos teoremas que se presentan en esta área de las matemáticas. Además, se reporta que los estudiantes comenten errores al generalizar (Bautista et al., 2021), haciendo que sea mucho más complejo comprender las ideas fundamentales del álgebra lineal para quienes han tenido un acercamiento limitado al tipo de conceptos (incógnitas, variables, parámetros) y la forma de operar con ellos.

En relación con aspectos mencionados con el capítulo anterior y los señalados en este, en los últimos años se ha consolidado en Didáctica de las Matemáticas el estudio del álgebra temprana (Early algebra), el cual busca promover el desarrollo de pensamiento algebraico desde edades muy tempranas y a lo largo de toda la formación escolar (Radford, 2018b; Kaput, 2017; Kieran, 2022).

A partir de allí, surgen diversas investigaciones que resaltan la propuesta de trabajar el pensamiento algebraico mediante actividades que promuevan la capacidad de los estudiantes para analizar patrones, generalizar relaciones y expresar sus ideas haciendo uso de símbolos, es decir favorecer procesos de generalización propios de las matemáticas (Radford, 2013; Kaput, 2017; Vergel y Rojas, 2018, Contreras, 2023).

No obstante, partiendo de la desigualdad histórica por la que han pasado las comunidades indígenas (Corbetta et al., 2018) y agregando que en las aulas no se valoran sus saberes culturales (Sierra, 2005), este trabajo busca favorecer aspectos referentes al pensamiento algebraico como: el tipo de razonamiento que involucra generalizar, representar, justificar, percibir estructuras algebraicas, estudiar los cambios entre cantidades y operar de forma analítica cantidades indeterminadas (Kieran, 2004; Kaput, 2017; Radford, 2012). No solo centrados en el objeto matemático de estudio, sino también desde una perspectiva sociocultural de la educación matemática que puede proporcionar información que permita comprender el problema que se aborda, considerándolo como un contenido que representa el saber histórico-cultural y socialmente construido en un momento específico (Radford, 2020a).

En este sentido, es de interés para esta investigación estudiar: ¿Qué procesos de objetivación movilizan estudiantes de comunidades indígenas de la Universidad Industrial de Santander al resolver tareas de generalización? Con base en esta pregunta se proponen los siguientes objetivos:

Objetivo general: Identificar y describir los procesos de objetivación emergentes de la actividad matemática con tareas de generalización en estudiantes universitarios pertenecientes a comunidades indígenas.

Objetivos específicos:

1. Diseñar un conjunto de tareas que promueva en los estudiantes una actividad matemática donde se evidencie su pensamiento algebraico.
2. Identificar y describir los medios semióticos de objetivación que emergen al resolver tareas de generalización de patrones.

3. Marco teórico

En este capítulo se reportan elementos de la Teoría de la Objetivación que dan sustento a esta investigación, se explican los constructos teóricos, cuáles son sus bases y cómo se fundamentan. Además, se definen aspectos que se consideran adecuados y pertinentes para el desarrollo de la investigación, estos son: saber, conocimiento, actividad, medios semióticos de objetivación, procesos de objetivación y tareas.

3.1 Teoría de la Objetivación

La Teoría de la Objetivación (TO) es una teoría sociocultural que permite explicar los métodos de enseñanza y aprendizaje en el aula de clase, considerando a los estudiantes como sujetos culturales e históricamente situados que reflexionan sobre nuevas posibilidades de actuar y pensar al momento de realizar una labor conjunta entre estudiantes y maestros. Lo anterior parte de cuatro principios: 1) Epistemológico: reconoce que conocer hace parte del saber, 2) Ontológico: en el que se reconoce diferencias entre lo actual y lo potencial, el saber es pura posibilidad y el conocimiento es la actualización o materialización del saber, 3) Educativo: en el que la instrucción y el aprendizaje es un proceso cultural de objetivación, 4) Ético: en el que el estudiantes es considerado como el resultado de un conjunto de relaciones sociales (Radford, 2015, 2017, 2018a).

El saber es tomado como un “sistema de procesos corpóreos sensibles y materiales de acción y de reflexión construidos histórica y culturalmente” (Radford, 2020b, p.16) el cual se produce por la actividad humana. De esta manera el saber es una forma de reflexionar cultural e históricamente modificada que se presenta como pura posibilidad de hacer algo; se actualiza a través del proceso de actividad, se materializa y adquiere un contenido conceptual y a partir de ahí se adquiere el conocimiento. En otras palabras, el conocimiento es el contenido conceptual concreto en el que se actualiza el saber.

Asimismo, los sujetos, como los describe Radford (2017), construyen dicho saber en potencialidad a través de su propia labor por medio de sus acciones, reflexiones, sufrimientos y esperanzas, como individuos concretos que actúan en el mundo social y cultural. Estas acciones son construidas a través del cuerpo, de los sentidos y el uso de objetos físicos y artefactos culturales. De esta forma el estudiante es constructor del conocimiento y el profesor es participante activo de esa construcción, es decir, hay un trabajo conjunto en una sola e inseparable actividad. La Actividad es concebida por Radford (2017, 2018a) como una forma de vida que se compone de la energía que descargan los participantes y que es sensible y sensual, material e ideacional, discursiva y gestual, y que adicional incorpora componentes intelectuales, emocionales, y éticas.

3.1.1 La actividad mediadora entre saber y conocimiento

La actividad es el único medio por el cual se media el saber y el conocimiento a través de su contenido conceptual concreto, es decir, la actualización del saber es el conocimiento (Radford, 2017). De esta forma el conocimiento es siempre un resultado de una mediación y dicho conocimiento lleva una huella de la actividad que lo media, en otras palabras, la manera en que se llega a conocer algo (por ejemplo, solucionar sistemas de ecuaciones) está directamente relacionado con las especificidades del proceso de conocimiento. A su vez la actividad ejerce su mediación a través de artefactos, las formas de usar los artefactos, los modos de interacción, los cuales poseen raíces históricas y culturales (Radford, 2017).

El proceso central en la TO es la actividad, pues es quien trae a la vida el conocimiento, materializando el saber que poseen los estudiantes. Un ejemplo sencillo y epistemológico que propone Radford (2017) para entender la relación entre saber, actividad y conocimiento es el desarrollado en la antigua Babilonia donde una de las unidades de medida que se usaba era el pie. Este se puede ver como el saber de la época, por medio de la actividad de medir se dieron cuenta que no era suficiente con esta unidad para longitudes entre 1 y 2 pies. La actividad de medición los llevo a ampliar las formas codificadas de medida y a usar las subdivisiones del pie en fracciones, proceso en el cual se tuvo que actualizar el saber previo lo que llevo a un nuevo conocimiento y las prácticas de medición se convirtieron en un nuevo saber. Si no hubiera posibilidad de actualización (actividad) el saber no podría ser modificado.

De igual forma hay que tener en cuenta que el saber visto como entidad histórico cultural no permanece estático, está siempre en constante cambio y transformación gracias a la actividad que se promueva en el entorno de aprendizaje (Radford, 2017). Para alcanzar la actualización del saber al conocimiento la actividad debe poseer un objetivo concreto y para ello se deben formular tareas específicas con la intención didáctica de asimilar nuevos conocimientos y habilidades.

3.1.2 Tareas que promuevan el pensamiento algebraico

La TO ha promovido el diseño de tareas que buscan fomentar un tipo de actividad en el aula de matemáticas. De acuerdo con Vergel (2019):

> La tarea es una categoría didáctica, está revestida de una densidad epistemológica, por cuanto su abordaje, por parte de los estudiantes, implica la movilización, a través de signos y de operar con ellos, de ideas y procesos matemáticos, la conjeturación y formulación de hipótesis, el establecimiento de relaciones numéricas, el trabajo analítico con lo desconocido, entre otros aspectos. (p. 8)

La tarea no debe ser ajena al estudiante, es decir, debe involucrarlo e incentivarlo a su realización y su propósito es orientar la actividad. Radford et. al (2009b) proponen pautas y características que se deben tener en cuenta para el diseño de las tareas: a) que sean basadas en los conocimientos e intereses del estudiante; b) debe implicar el uso de un equipo manipulable; d) brindar espacio para la reflexión y el intercambio de ideas trabajando en grupos pequeños; e) centrarse en problemas que movilizan los conceptos matemáticos específicos a niveles de profundidad adecuados; f) proporcionan oportunidades para que los estudiantes piensen en múltiples niveles de abstracción; g) tienen una unidad conceptual que fomenta el cambio a lo abstracto.

Respecto a la unidad conceptual que deben incluir las tareas, se refiere por un lado, a la dimensión afectiva que implica la motivación del estudiante para resolver el problema donde se sugiere en trabajar con problemas que sean de interés o cercanos a ellos y que se movilice el concepto científico a trabajar, es decir, que aparezca de forma explícita o implícita el objeto principal del propósito de la actividad, en este caso que las tareas impliquen al estudiante y que en su solución emerjan procesos de generalización. Por otro lado, la dimensión cognitiva involucra la organización progresiva de la actividad donde se fomente preguntas cada vez con un grado mayor de dificultad y de esta forma crear condiciones que favorezcan la transición a lo abstracto.

No obstante, para que una tarea se considere de tipo algebraico debe promover formas de pensar algebraicamente. De esta forma, deben poseer un sentido de la indeterminancia (desde esta investigación se identifica en pasos lejanos de la construcción de la secuencia), para dar solución el estudiante puede operar con lo indeterminado, es decir, reconoce las operaciones que pueden ser usadas realizando procesos de deducción y además puede hacer uso de expresiones semióticas que se evidencian en la manera de nombrar o hacer referencia de los objetos o aspectos que vislumbren su analiticidad.

3.1.3 Medios semióticos de objetivación (MSO)

Para Radford "la objetivación es un proceso cuyo objetivo es mostrar algo (un objeto) a alguien" (2005, p.203). Para mostrarlo se hace uso de Medios Semióticos de Objetivación (MSO) que son objetos, artefactos, términos lingüísticos y signos en general que son usados con el propósito de volver clara una intención y llevar a cabo acciones. Además, se evidencia cómo todos los medios utilizados por los individuos en el proceso de producir su propio significado y lograr una forma estable de conciencia (Radford, 2003). Los MSO no son únicamente herramientas con las cuales manipulamos el mundo, también son mediadores de nuestros actos intencionales que poseen conciencia histórica que fue construida por las generaciones precedentes a partir de la actividad cognitiva y a su vez forman parte de las formas de pensar (Radford, 2008a; Vergel, 2016).

Además, estos medios pertenecen a una diversidad de sistemas simbólicos culturales (gestos, movimientos, palabras, tonos, etc.) propios del individuo y que van más allá de él. Por ejemplo, las formas de resolver algún tipo de problema, las formas de argumentar, validar, demostrar, cada una de ellas tiene una historia que se constituye por medio de las prácticas culturales (Vergel, 2016).

Del mismo modo, Vergel (2016) asume dos principios fundamentales en la TO, 1) los signos nos permiten reflexionar sobre el mundo, y 2) el mundo es reflejado y refractado en los signos y en la forma en que estos son usados. Estos principios se hacen operativos, por ejemplo "en el trabajo de aula de matemáticas, que los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación, es decir, tienen una historia y necesariamente influyen en nuestras estructuras psicológicas" (Vergel, 2016, p.55). Esto indica la importancia de los signos que movilizan los estudiantes, cómo les ayudan a reflexionar y al mismo tiempo interpretar el mundo. Debemos reconocer que los estudiantes pueden hacer uso de diversos signos debido a que son construcciones culturales e históricas propias.

Entre los MSO los gestos juegan un papel muy importante en el proceso de conceptualización, pues ayudan a los estudiantes a comunicar ideas o representaciones mentales que son difíciles de explicar por medio del habla (Kendon, 1987, citado por Vergel, 2016). Además, la coordinación de signos que pertenecen a diferentes sistemas semióticos (gestos, palabras, formulas, entre otros) al momento de argumentar se consolida como un nodo semiótico que vislumbra procesos de objetivación.

3.1.4 Procesos de objetivación

Los procesos de objetivación son definidos como procesos sociales, colectivos de toma de conciencia progresiva y crítica; que corresponden a un sistema de pensamiento y acción cultural e históricamente constituidos, sistema del cual somos conscientes y al mismo tiempo dotamos de sentido (Radford et al., 2020). Son procesos en los que se notan aspectos culturalmente significativos del entorno, aspectos que son revelados a la conciencia por medio de actividad corpórea, sensible, afectiva, emocional, artefactual y semiótica. Estos procesos tratan de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura y se pueden comprender como elaboraciones activas de significados (Radford, 2006).

La objetivación es un proceso de toma de conciencia progresiva en el que se plasma y expresa el sujeto a través del trabajo o esfuerzo por aprehender el objeto, así mismo, se familiarizan con las formas de acción y pensamiento históricamente constituidas. (Radford, 2006, 2018a). No se debe olvidar que el estudiante es un ser social que hace parte de una cultura, que posee conocimientos ancestrales históricamente constituidos en la que contribuye, reflexiona, es crítico y analítico, en la que trabaja en equipo, es receptivo, aporta y recibe ideas de los demás. Estos aspectos se pueden relacionar con procesos de objetivación propios de las actividades de su comunidad, los cuales el estudiante realiza frecuentemente de forma inconsciente.

4. Metodología

Esta investigación se enmarca en un enfoque cualitativo, de carácter descriptivo e interpretativo (Latorre et al., 2021). Desde este enfoque es posible construir una descripción del problema de estudio, el cual busca poner en evidencia las formas de expresión, reflexión y actuación que surgen de la labor conjunta con tareas algebraicas al trabajar con estudiantes universitarios pertenecientes a comunidades indígenas. Se toma como referente las fases metodológicas de la TO; en particular: el diseño de la tarea, la implementación de la tarea, la selección de datos y el análisis e interpretación de datos (Radford, 2010). En esta investigación se agrega una fase cero donde se identifican y caracterizan los participantes. A continuación, se describen y desarrollan cada una de las fases.

4.1 Fase 0: Caracterización de la población

El principal objetivo de esta fase es identificar a aquellos estudiantes que han ingresado a la universidad mediante admisión especial, conforme al Acuerdo 282 de 2017, y que pertenecen a comunidades indígenas. Los datos han sido proporcionados por la Vicerrectoría Académica de la Universidad Industrial de Santander, a través de un informe y listado que incluye a aquellos estudiantes que han sido admitidos de manera especial entre el año 2011 y el 2023.

En el período comprendido entre 2011 y 2021, un total de 61 estudiantes pertenecientes a comunidades indígenas se matricularon en programas académicos universitarios. De este grupo, se ha constatado que un 22% ya no se encuentra matriculado, debido a diversas razones: retiro voluntario (4,9%); cancelación definitiva de la matrícula (6,6%); exclusión de la universidad, debido al bajo rendimiento académico (6,6%); y el retiro definitivo (3,3%). Hasta 2022, el 4,9 % de los estudiantes se graduó y un 72% continúa su proceso académico de manera normal, avanzando en sus estudios.

Lo anterior ayudó a consolidar una muestra de 19 estudiantes pertenecientes a comunidades indígenas, que ingresaron en el periodo 2022-II y 2023-I. A este grupo de estudiantes se envió una invitación por medio del correo electrónico solicitando su participación voluntaria en el proyecto a cambio de algunas clases de refuerzo de las asignaturas de cálculo y álgebra lineal. De los cuales, aceptaron la invitación tres estudiantes, además, de un compañero de ingreso regular que se interesó en el proyecto.

Una vez definido el grupo de estudiantes se diligenciaron los consentimientos respectivos de la investigación. Dentro del proceso de identificación, se diseñó y aplicó una entrevista semiestructurada de veintitrés preguntas con el fin de recolectar datos sobre su formación académica, su entorno sociocultural y de su percepción sobre estos dos aspectos (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

La entrevista se realizó de manera individual, fue video grabada y transcrita para un mejor análisis de la información; en el **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, aparecen las preguntas planteadas del instrumento. Cabe mencionar que, para diferenciar las respuestas de los tres estudiantes en el posterior análisis se usan seudónimos.

A continuación, se realiza una descripción de las tres entrevistas, apoyadas en transcripciones de las videoconferencias.

Jana: Es una estudiante de 17 años de la comunidad Inga de aponte, ubicada en el departamento de Nariño en el municipio de Gómez en el putumayo alto. Ella destaca de su cultura el esfuerzo por preservar la lengua nativa Inga, sus vestidos tradicionales "Pacha" (falda) y las artesanías que son significativas dentro de su comunidad; por ejemplo, el "chumbe" (faja), con símbolos con significados profundos (Ver Figura 4). Lo descrito, se presenta en el Episodio 1.[1]

> *I*: ¿Qué aspectos relevantes consideras que tiene tu comunidad?
> *Jana:* Pues creo que los aspectos que la comunidad tiene son como las tradiciones del vestido, la lengua que todavía se conserva, no en muy altos niveles, pero si todavía, también la cultura y eso sería.
> *I*: Me podrías hablar un poco más sobre los tipos de vestidos y lenguajes que se utilizan en tu comunidad.
> *Jana*: Si, en la comunidad Inga se habla inga, la lengua se llama inga […], el vestido yo pues uso la pacha, la falda se llama pacha y la camisa blanca. La pacha es tejida de lana de ovejo o pues de la otra lana, […]. Y la de los hombres también es la cusma [*Túnica negra de lana u otros materiales*], la camisa blanca y el calzoncillo. Ah y no se me puede olvidar, el chumbe, perdón.
> *I*: ¿qué es el chumbe?
> *Jana*: El chumbe es como un tipo de faja que es tejido a mano por las mujeres del pueblo con símbolos y los símbolos cada uno tiene su significado diferente.
> *I*: ¿Qué tipos de símbolos utilizan, por ejemplo?
> *Jana*: Por ejemplo, está el del Quinde que su significado es como él, como algo que ni lastima, como un ser que nos cuida y podemos tenerlo cerca, pero no nos va a lastimar. Ha visto que los Quindes llega y pica la florcita, pero ellos no la tocan no le hacen nada, es como un símbolo de paz de unión, más o menos. También está la rana, o sea es como un triangulito y significa que es el vientre de la mujer, significa fertilidad y cuando uno se lo amarra significa protección para esa parte de la mujer.
> También está la chagra que simboliza la madre tierra y todo lo que en ella podemos cultivar, está el sol, la luna y la naturaleza el agua y así diferentes significados.

Episodio 1

Lo anterior muestra las vivencias de Jana respecto a su comunidad y algunos aspectos relevantes, entre ellos: el vestido autóctono de la comunidad Inga ver Figura 4, y uno de los animales más representativos que es usado en el “chumbe” o faja y también en diversas artesanías de la comunidad como se muestra en la Figura 5.

[1] Los episodios que se citan de aquí en adelante son transcripciones textuales de las expresiones de los estudiantes; Se usan las siguientes convenciones: […] significa que se omiten diálogos que no son relevantes en la investigación; [ ] se usa para hacer aclaraciones de las intervenciones, I (investigador); los nombres son los seudónimos del estudiante que interviene en el diálogo.

Figura 4 *Vestimenta tradicional inga para hombres y mujeres.*

Nota. Tomado de Las formas de tejer la vida ¿cómo vivir una experiencia Inga a través del diseño, en el Museo de Trajes Regionales? (p.42) por Gómez, 2012.

Figura 5 *Artesanía de un animal sagrada para el pueblo inga.*

Nota. Tomado de Las manillas como tejido del pensamiento del pueblo Inga (p.163) por Muñoz, 2020.

Su formación educativa en la Institución Educativa Agropecuaria Inga de Aponte es descrita como un aspecto importante para mantener su conexión con la cultura Inga, así como la protección de la naturaleza. En cuanto a su formación matemática, menciona que su experiencia escolar le ha proporcionado algunas bases sólidas, en temas de funciones y estadística. Sin embargo, manifiesta algunos desafíos en su aprendizaje, como la necesidad de autodisciplina y la superación de momentos de confusión, destacando, además, la falta de profesores especializados en su comunidad y las dificultades causadas por la pandemia de COVID-19.

Por otro lado, su deseo de utilizar su formación profesional en pro de beneficiar a su comunidad; por ejemplo, trabajando en el sector del cultivo del café y las artesanías. Esto dado que su comunidad tenía una marca propia de café que exportaban, pero por la mala administración tuvo que cerrar; Jana espera que cuando sea Ingeniera Industrial pueda revivir esta empresa y apoyar a las artesanas locales a comercializar sus productos.

Para finalizar, una de las cosas que Jana recalcaba en la entrevista es que su comunidad presenta dificultades de acceso a la educación superior, debido a los bajos puntajes en las pruebas de estado (ICFES) y la falta de conocimiento sobre las oportunidades universitarias. Ella indica que es una de las pocas estudiantes de su comunidad que ingresaron a la UIS a través de la admisión especial, la cual, se enteró gracias a la divulgación que ofreció un profesor de la UIS en el Cabildo indígena. En cuanto a la universidad, comenta que le ha resultado difícil las asignaturas de matemáticas y que necesita fortalecer sus bases de trigonometría y álgebra puesto que, considera importante el conocimiento matemático en su vida, sobre todo en su trabajo artesanal viéndolo como una habilidad valiosa para su futuro desarrollo y el de su comunidad, esto se evidencia en el Episodio 2.

> *I:* ¿Cómo conociste a la UIS y por qué decidiste estudiar en ella? ¿Qué te motivó a estudiar en ella?
> *Jana:* Eh bueno yo la conocí porque un egresado de la Universidad fue al resguardo a hacer como un estudio. […] y bueno él diciéndonos, alentándonos y llevando a personas que eran de acá [*pertenecientes a la UIS*], creo que una vez fue el profesor Gonzalo [*Profesor UIS*][…] y nos habló y nos mostraba videos y fotos de cómo era la Universidad de las carreras que en ese momento la UIS tenía y pues, decidí estudiar acá, pues porque eh, bueno, me inscribí y no sé, cómo que dije yo tal vez no paso, pues porque mi ICFES [*Prueba estandarizada que presentan los estudiantes al finalizar sus estudios de bachillerato y que se tiene en cuenta para acceder a la educación superior*] no era tan bueno. […]
> *I:* ¿Sabes cuántos estudiantes de tu comunidad se han inscrito? ¿O cuántos ingresan más o menos a programas de pregrado? No solo en la UIS, sino en otras universidades también.
> *Jana:* La verdad, no sé. Porque hay veces que personas se inscriben, pero solamente duran el primer semestre y se salen. Entonces es difícil saber. Y también en el resguardo, en el colegio que hay ahí, no es que saquemos muy buenos ICFES, entonces es muy difícil entrar a una Universidad. Solamente son poquitos los que logran eso. […]
> *I:* ¿Cómo consideras que tu carrera aportaría aspectos valiosos a tu comunidad?
> *Jana:* Mmm, pues considero que la carrera que estoy cursando ahora colaboraría mucho en el resguardo, ya que el resguardo es un productor alto en café. Entonces ayudaría como decir en la economía de eso, hay una marca de café que se llama café cusine. Y ya lo exportaban, pero llegó a

> un punto donde quebró […] y dejaron tirando todo sin haber quién lo administre, quién vea todos los productos, quién maneje eso y lo cerraron y dejaron de hacer eso, y ese café lo estaban exportando a otros países como Estados Unidos, creo que China y Canadá. Y pues, o sea, como que se perdió ese lazo o se perdió eso y se quedó ahí, entonces a mí me gustaría otra vez retomar eso que se perdió y continuar. Y si no continúo con eso, ayudar a las mujeres artesanas de allá a sacar sus productos como las artesanías en shakiras en los tejidos. Todo lo que tiene que ver con artesanías.

Episodio 2

Samuel: Es un estudiante de 17 años que pertenece al resguardo indígena Zenú, el cual se encuentra ubicado en el departamento Córdoba en el municipio de Tuchin localizado en la parte norte del departamento. Él destaca de su cultura, el sobrero vueltiao (Ver Figura 6), el cual se presenta como una de las artesanías de Colombia más reconocida a nivel nacional e internacional, y es realizado por miembros de su comunidad a mano haciendo uso de la caña - flecha que es una planta de fibra muy flexible.

Figura 6 *Venta de Sombreros Vueltiaos en la calle principal de Tuchín.*

Nota. Tomado de Artesanía indígena en el caribe colombiano: el Sombrero Vueltiao Zenú (p.73) por Larraín, 2012

Sin embargo, al preguntar por otro aspecto de su comunidad, menciona que él creció en una zona municipal un poco alejado de los resguardos indígenas, lo que generó que no estuviese totalmente informado de las características o aspectos relevantes propios del resguardo. No obstante, su herencia indígena proviene por su mamá. Lo mencionado se muestra en el Episodio 3.

> *I:* ¿Qué aspectos consideras tú que son relevantes de tu comunidad?
> *Samuel:* Pues lo más tradicional o lo más destacado de ellos o que he reconocido tanto a nivel aquí nacional como puedo decir que internacional es el sombrero vueltiao, que eso es muy tradicional de allá. Es oriundo de allá. Es algo que se conserva esa tradición, ese sombrero es un emblema de esa tierra, de allá de la comunidad.
> *I:* ¿Qué caracteriza a las personas pertenecientes a tu comunidad? ¿Cómo podrías describir de forma general a una persona de tu comunidad o cómo te describirías?
> *Samuel:* Ahí hay una problemática y es que, por lo general, por ejemplo, por decirlo así, en el casco urbano de como tal el municipio, las personas, los pertenecientes a la comunidad andan como personas civiles normales, así como usted y yo. Es más que todo en la tradición o la costumbre de las vestimentas, la conservan los capitanes o los líderes que sí se encuentran como tal en el epicentro, en el centro del resguardo. Pero cómo le digo, si usted va por allá, las personas andan normalmente, porque ya como que prácticamente adaptamos al cambio de andar normal [*Sin el vestido tradicional*].
> *I:* ¿Tu no haces parte del resguardo como tal? Sino ¿tu estabas en la parte de la ciudad?
> *Samuel:* Exactamente, es más yo tengo algo, yo soy de allá, pero resulta que yo estudié en otro municipio aparte entonces no es que mi conexión con el resguardo sea la mejor que digamos.
> *I:* Sin embargo ¿tú te consideras perteneciente a la comunidad?
> *Samuel:* Exactamente, pero eso sí, no cumplo con ciertas tradiciones por decirlo así, ya que como le digo, yo me trasladé por los estudios

Episodio 3

Samuel realizó su formación académica en el colegio oficial Marco Fidel Suárez ubicado en ciénaga de oro, fuera del resguardo debido a su traslado a otro municipio por motivos de estudio. Con relación a las matemáticas considera que experimentó cambios significativos durante la pandemia, ya que la virtualidad y la pérdida de su profesor de matemáticas afectaron su aprendizaje y dejaron vacíos conceptuales. Sin embargo, reflexiona sobre sus fortalezas en aspectos del álgebra en los que se necesite factorizar, debido a su buen manejo de ello y también sus dificultades con el trabajo con trigonometría, el trabajo con raíces y logaritmos.

Samuel se proyecta como un Ingeniero Químico exitoso que aportará a su comunidad implementando técnicas que mejoren u optimicen algunos procesos que se den propiamente en ella.

Juan: Es un estudiante de 17 años proveniente de Sincelejo, Sucre, el cual pertenece a la Etnia Zenú en el resguardo Quebrada del sol, también conocido como Quebaba ubicado en el departamento de Córdoba, en la región de la Costa Caribe. Destaca de su cultura la identidad Zenú a través de símbolos culturales como: el reconocido sombrero vueltiao, la gastronomía tradicional como el mote de queso, las artesanías en piedra y la preservación de estas manifestaciones en los museos locales. Además, destaca festividades como el Día del Farol y el festival del fandango que es un baile tradicional de su comunidad. Sin obviar la historia marcada por el conflicto armado que dispersó los cabildos y llevó a la migración, pero, aun así, recalca el reconocimiento y certificación respaldados por el Ministerio del Interior que validan la identidad indígena de su comunidad.

En cuanto a su formación académica Juan culminó sus estudios en el colegio oficial Institución Educativa Técnico Industrial Antonio Prieto, ubicado en Sincelejo alejado un poco de los resguardos indígenas. En relación con las matemáticas, su formación fue regular, debido a que por situaciones medicas su docente siempre se ausentaba por mucho tiempo y no lograban cumplir la totalidad de la asignatura, además, no encontraba una aplicabilidad a los conceptos que veía. Es por ello, que en las clases de la universidad se siente perdido pues la gran cantidad de temas son nuevos para él.

Él planea ser Microbiólogo y enfatiza que sus conocimientos clínicos pueden ayudar a los miembros de su comunidad a mejorar los métodos de curación y diagnóstico de las enfermedades para evitar confusiones. Asimismo, plantea que podría llevar a cabo controles epidemiológicos sobre los casos de dengue u otras enfermedades que son muy comunes en esa zona y así contribuir a la salud de los miembros de su comunidad.

Camilo: Es un estudiante de 17 años proveniente del departamento de Córdoba del municipio de Ciénaga de oro, es estudiante de nuevo ingreso en la universidad en la modalidad de admisión regular, quien cursa la carrera de ingeniería química y es compañero de estudio de Samuel.

Se interesó por hacer parte del proyecto debido a que semanalmente se tenían clases de refuerzo en las asignaturas de cálculo y álgebra lineal. Sin embargo, es pertinente mencionar que su disposición fue completa en la realización de las tareas y su participación siempre fue activa. Además, María compañera de estudio de Jana y estudiante de nuevo ingresos de admisión regular, se interesó en participar del proyecto, pero solo participó en la primera tarea.

Esta caracterización de los participantes fue de utilidad para la creación y diseño de las tareas puesto que permitió conocer situaciones cercanas, familiares a sus contextos; además de caracterizar dificultades en su formación matemática que puedan ser reforzadas con la resolución de los problemas.

4.2 Fase I: Diseño de tareas

El diseño de las tareas toma en cuenta sugerencias de investigaciones previas sobre la relevancia de formas visuales y espaciales, así como la importancia de la comunicación no verbal en el trabajo con estudiantes pertenecientes a comunidades indígenas (Barnes, 2000; South Australia DETE, 1999). Además, se consideran los elementos conceptuales de la TO sobre la Actividad, el pensamiento algebraico y los MSO. Con las tareas se busca que los estudiantes hagan uso de gráficos, tablas y pictogramas, para promover una actividad que evidencie formas de pensamiento algebraico (De la Fuente, 2016).

También, para los diseños se contemplaron los presaberes que de acuerdo con los documentos nacionales e internacionales (MEN, 2006, 2016; NCTM, 2003) debe tener un estudiante al finalizar su educación media respecto al desarrollo de pensamiento matemático. Para ello, es de suma importancia indagar sobre qué aspectos del pensamiento algebraico son abordados en las aulas de clase, en vista de conocer aquello que debe saber un estudiante que haya finalizado sus estudios de educación media. Se tuvieron en cuenta documentos legales de matemáticas, como los Principios y Estándares para la educación matemática (NCTM, 2003), los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje en matemáticas (MEN, 2006, 2016).

Considerando lo propuesto a nivel internacional por el NCTM se proporcionan principios y estándares para la educación matemática. Respecto al Álgebra se proponen cuatro estándares desde la primaria (Prekindergarten desde los 6 años) hasta secundaria (Nivel 12 hasta los 18 años) estos son: i) comprender patrones, relaciones y funciones; en este estándar se propone como una de las expectativas que los estudiantes generalicen patrones usando funciones definidas explícita y recursivamente; ii) representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos; para ello el estudiante puede escribir formas equivalentes de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones, y resolverlas con fluidez mediante cálculo mental o papel y lápiz, en los casos sencillos, y, en todos los casos el uso de la tecnología; iii) hacer uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas; una expectativa que se propone es identificar relaciones cuantitativas fundamentales en una situación, y determinar la clase o clases de funciones que podrían modelizar estas relaciones; y, por último, se espera que un estudiante iv) analice el cambio en contextos diversos, es decir que aproximen e interpreten tasas de cambio a partir de datos gráficos o numéricos (NCTM, 2003).

Por otro lado, en el ámbito nacional se publicaron los Estándares básicos de competencias, el cual presenta parámetros sobre lo que un estudiante debe saber y saber hacer con lo que aprende. El propósito de este documento es formar ciudadanos matemáticamente competentes para enfrentarse a situaciones del día a día, resolviendo problemas, siendo analíticos, utilizando diferentes representaciones para crear, expresas y representar sus ideas, entre otras competencias (MEN, 2006). Los Estándares se clasifican por grupos de grados: 1°- 3°, 4°- 5°, 6°- 7°, 8°- 9°, 10°- 11° y por pensamientos. Respecto al pensamiento algebraico en los Estándares, se encuentra el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos en el cual se propone trabajar desde edades tempranas con los estudiantes sobre secuencias numéricas, geométricas, figurales, para que el estudiante visualice, explore y manipule los números y las figuras con el fin de construir un proceso de generalización, también destaca que los estudiantes se pueden expresar por medio de:

> […] representaciones como las gestuales, las del lenguaje ordinario o técnico, las numéricas (tablas), las gráficas (diagramas) y las icónicas, que actúan como intermediarias en la construcción general de los procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen el patrón y las respectivas reglas que permiten reproducirlo. (MEN, 2006, p.67)

Asimismo, se puede destacar que los estudiantes al finalizar su educación media pueden analizar relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.

Por otra parte, años después el MEN comparte los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) que tienen por objetivo explicitar los aprendizajes estructurales para cada grado y área de aprendizaje, entendiendo los aprendizajes como la unión de conocimientos, habilidades y actitudes que le dan un contexto cultural e histórico a quien aprende (MEN, 2016). Entre los aprendizajes de los estudiantes al finalizar la educación media en relación con el pensamiento algebraico son:

usar propiedades y modelos funcionales para analizar situaciones y para establecer relaciones funcionales entre variables que permiten estudiar la variación en situaciones intraescolares y extraescolares; una evidencia de este aprendizaje es relacionar características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.

Teniendo en cuenta las propuestas sobre los aprendizajes que puede lograr un estudiante al finalizar sus estudios, en el ámbito nacional se evidencia pocos aspectos relacionados con el pensamiento algebraico en comparación con la propuesta internacional, debido a que se da más énfasis en el pensamiento variacional y se tiene poco en cuenta las conexiones que pueden tener estos dos pensamientos, las cuales pueden ser muy útiles para los estudiantes.

Debido a que el pensamiento algebraico escolar proporciona bases y herramientas para abordar conceptos propios de cálculo diferencial y el álgebra lineal a nivel universitario, es necesario conocer las competencias que se necesitan en estos cursos para favorecer su comprensión. De esta forma, en la UIS se plantea como propósitos en el curso de álgebra lineal: propiciar en el estudiante el desarrollo de su capacidad para formalizar algebraicamente situaciones geométricas, de la ciencia y de la tecnología, y familiarizar al estudiante con los ejemplos básicos de las estructuras de espacio vectorial y del espacio vectorial euclidiano. Asimismo, para el curso de cálculo I propone: desarrollar capacidad de análisis y síntesis basados en las soluciones de los problemas y en la interpretación de los resultados obtenidos; adquirir capacidad para trabajar en grupo, aportando y analizando diferentes opciones para la resolución de problemas y toma de decisiones. La Tabla 1 consolida la información descrita.

A partir del estudio del pensamiento algebraico en edades tempranas surgen preguntas del tipo: ¿Cómo propiciar el desarrollo del pensamiento algebraico? Para responder esta pregunta se debe tener en cuenta el desarrollo histórico del álgebra. Según Radford (1996) la proporcionalidad aritmética jugó un papel muy importante en el álgebra de las civilizaciones antiguas, desde lo geométrico y lo numérico (p.57, citado por Butto y Delgado, 2012). En cuanto a lo geométrico se refería a los problemas del cálculo de áreas y perímetros de figuras y a lo numérico a resolver problemas de números dentro de un contexto. Sin embargo, en estas dos categorías para resolver los problemas se hacía uso del razonamiento proporcional; por ejemplo, en la antigua Mesopotamia al resolver problemas de hallar raíces de ecuaciones algebraicas se hacía uso del método de la falsa posición, de esta forma se evidencia que el pensamiento algebraico emerge del razonamiento con proporciones.

Tabla 1. *Competencias relacionadas con el pensamiento algebraico y variacional a nivel de educación media y universitaria.*

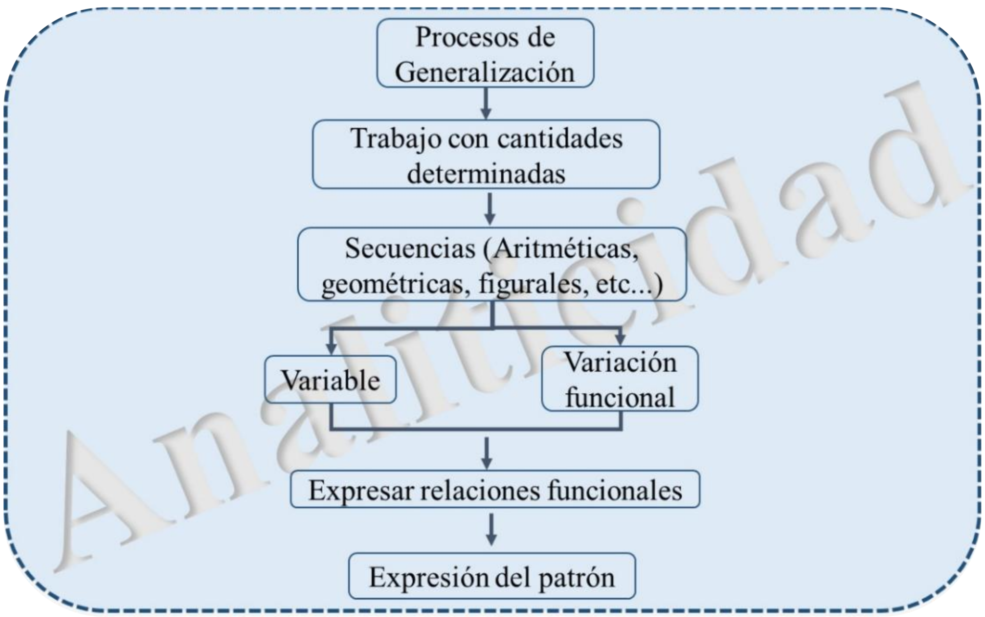
Principios y Estándares para Matemáticas 9-12 (NCTM, 2003)	Estándares Básicos de Competencias (2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje (2016) 10°-11°		Propósitos y Competencias de Álgebra lineal y Cálculo diferencial en la UIS
1) Comprender patrones, relaciones y funciones; generalizar patrones usando funciones definidas explícita y recursivamente. 2) Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos; escribir formas equivalentes de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones, y resolverlas con fluidez mediante cálculo mental o papel y lápiz, en los casos sencillos. 3) Hacer uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas; identificar relaciones cuantitativas fundamentales en una situación, y determinar la clase o clases de funciones que podrían modelizar estas relaciones. 4) Analice el cambio en contextos diversos; aproximen e interpreten tasas de cambio a partir de datos gráficos o numéricos.	1) Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos; analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas. 2) Usar propiedades y modelos funcionales para analizar situaciones y para establecer relaciones funcionales entre variables que permiten estudiar la variación en situaciones intraescolares y extraescolares; una evidencia de este aprendizaje es relacionar características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva.	Pensamiento Algebraico y Variacional	Propiciar en el estudiante el desarrollo de su capacidad para formalizar algebraicamente situaciones geométricas, de la ciencia y de la tecnología, y familiarizar al estudiante con los ejemplos básicos de las estructuras de espacio vectorial y del espacio vectorial euclidiano. Desarrolla capacidad de análisis y síntesis basados en las soluciones de los problemas y en la interpretación de los resultados obtenidos; adquirir capacidad para trabajar en grupo, aportando y analizando diferentes opciones para la resolución de problemas y toma de decisiones.

Nota. Elaboración del autor basado en los documentos del MEN (2006; 2016), NCTM (2003) y los programas de Cálculo y Álgebra lineal de la UIS.

Por otro lado, autores como Mason (1985), Radford (2010) y Vergel (2016) destacan la importancia del razonamiento sobre generalidades para el pensamiento matemático, específicamente para el pensamiento algebraico. Esto dado que la generalización en álgebra es de suma importancia para la abstracción matemática, este proceso puede abordarse por medio del trabajo con patrones y secuencias (figurales, numéricas, entre otros). Para comprender dicho lenguaje algebraico el estudiante debe percibir un patrón o regularidad y expresarlo o comunicarlo a alguien en las diversas formas posibles haciendo uso de diversos medios de expresión, por ejemplo: el leguaje, símbolos, deícticos, palabras clave, entre otros.

Por lo anterior, se destaca una de las grandes rutas de acceso al pensamiento algebraico realizando una adaptación de lo propuesto por Butto y Delgado (2012) valorando la diversidad de formas de expresión desde los procesos de deducción que los estudiantes evidencian al trabajar con tareas de patrones y secuencias. Para ello se propone el siguiente esquema ver Figura 7.

Figura 7 *Una ruta de acceso al pensamiento algebraico valorando las formas de expresión*



Nota. Adaptado de Rutas hacia el álgebra: actividades en Excel y Logo. (p. 113) por. Butto, C. M., y Delgado, J. (2012)

La variación funcional entendida como la relación de correspondencia uno a uno entre los pasos de una secuencia y la cantidad correspondiente, donde cada entrada (posición en la secuencia) se asocia directamente con una salida (valor resultante). A medida que los estudiantes reconocen estas regularidades y las expresan mediante una regla matemática, desarrolla lo que Radford (2008b) denomina "pensamiento algebraico emergente". Este enfoque destaca que la variación funcional no solo es la observación de cómo cambia una cantidad en relación con otra, sino la capacidad de formalizar esa correspondencia en una función matemática, como también lo señala Kaput (2017). Así, la variación funcional se centra en la comprensión y generalización de patrones a través del reconocimiento de dependencias regulares, que son expresadas y conceptualizadas en términos algebraicos.

De acuerdo con la Figura 7 se propone trabajar desde los procesos de generalización haciendo uso de secuencias figurales, operando con cantidades indeterminadas que pueden ser vistas como variables, a partir de preguntas que guiarán el proceso con pasos lejanos de la secuencia. Esto ayuda a los estudiantes a identificar elementos que varían, como varían y que permanecen constante en la secuencia con el fin de expresar relaciones entre ellas para llegar a la expresión general del patrón. Cabe mencionar que, toda la actividad estará permeada por procesos inductivos, abductivos y de deducción que realizan los estudiantes al trabajar con dichas cantidades indeterminadas, estos procesos son vistos como la analiticidad impresa a la tarea. Es decir, la forma en que trabajan con lo desconocido como si fuera conocido para resolver las tareas (Vergel y Rojas, 2018).

La estructura de las tareas en general tiene como propósito permitir visualizar el proceso de generalización de los estudiantes desde los tres componentes. Inicialmente, se busca que identifiquen la comunalidad presente en los elementos de una secuencia, lo cual les facilitará la construcción de los términos subsiguientes (ítem a). Posteriormente, se pretende que amplíen estas características identificadas para determinar tanto la estructura numérica como espacial de algunos términos no consecutivos dentro de la secuencia (ítem b, c y d). Finalmente, se les insta a establecer el término general de la secuencia (ítem e).

Teniendo en cuenta lo anterior y sumado a la caracterización de la población, las tareas fueron clasificadas como: tareas enfocadas al contexto de los estudiantes, abordando problemas que involucraran secuencias de patrones figurales de tipo lineal y cuadrático con apoyo tabular, las cuales se analizan a continuación.

4.2.1 Tareas enfocadas al contexto de manualidades indigenas

En este apartado se describen las tareas diseñadas y usadas en el estudio, además de un análisis a priori de cada una teniendo en cuenta el marco teórico. En cada tarea se explicita su propósito y las posibles soluciones que pueden dar los estudiantes de tal forma que den indicios de su pensamiento algebraico.

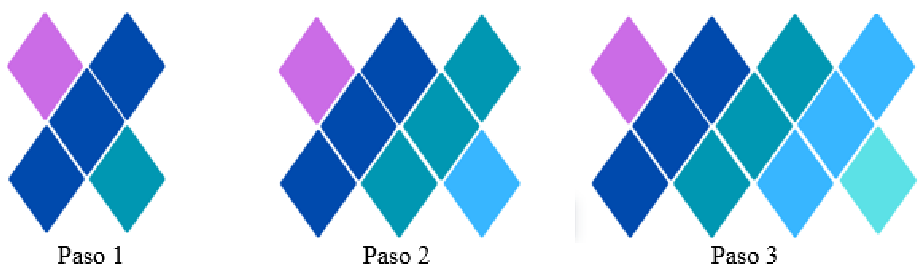
Partiendo de las sugerencias de Radford et al. (2009b) para el diseño de las tareas y teniendo en cuenta los datos de las entrevistas de los estudiantes, se elige un contexto cercano y de interés para los participantes, el cual fue destacado a lo largo de las entrevistas al mencionarse las manualidades realizadas por miembros de sus comunidades, entre ellas las manillas, ropa, sombreros, entre otros.

Las imágenes iniciales fueron tomadas de internet, mientras que las secuencias de patrones figurales fueron construidas por el investigador con la finalidad de que los estudiantes dotaran de sentido los cambios en los elementos de la secuencia. Las preguntas tenían la finalidad de propiciar el proceso de generalización.

La primera tarea denominada "Realizando manillas" tiene como objetivo de involucrar a los estudiantes en un tipo de actividad conocida y destacada desde sus vivencias. Además de favorecer un espacio para la reflexión sobre el proceso de generalización haciendo uso de secuencias de patrones figurales. Estos tipos de actividades propician en los estudiantes la movilización de diversos MSO como: formas perceptivas de ver la secuencia, la gestualidad al expresar sus ideas y palabras clave para referirse a los elementos de la secuencia, entre otros. También, los elementos geométricos y espaciales de la secuencia están propuestos de tal forma que facilite la identificación de las características que determinan el patrón de construcción de la secuencia.

Tarea 1: Realizando Manillas

Las comunidades indígenas utilizan diferentes figuras para la elaboración artesanal de bolsos, mochilas, manillas, collares, entre otros. A continuación, se muestra una representación de los pasos seguidos en el tejido para elaborar una manilla formada por rombos.



De acuerdo con la anterior secuencia, responde las siguientes preguntas y comparte tus ideas con tus compañeros.

a) Dibuja e indica ¿cuántos rombos tiene el paso 4? ¿Cuántos rombos tiene el paso 5?

b) ¿Cuántos rombos tendrá el paso 20? ¿Cuántos rombos tendrá el paso 100?

Explica detalladamente en tu hoja de trabajo cómo llegaste a las respuestas de cada una de las preguntas en los ítems a. y b.

c) Lina se encuentra elaborando un tejido extenso para dividirlo en varias manillas y se encuentra en un paso que tiene 3704 rombos ¿A qué número de paso corresponde? Relata con detalles en tu hoja de trabajo cómo obtuviste la respuesta.

d) ¿En esta secuencia existe algún paso con 7035 rombos? Explica por qué Si o por qué No y escribe qué razonamientos utilizaste para encontrar la respuesta.

e) ¿Cómo podrías explicarle con claridad a un buen amigo de qué forma proceder para calcular rápidamente el número de rombos de cualquier paso? Escríbele un mensaje en donde le expliques de forma clara y con todos los detalles, cómo proceder para calcular rápidamente el número de rombos de cualquier manilla.

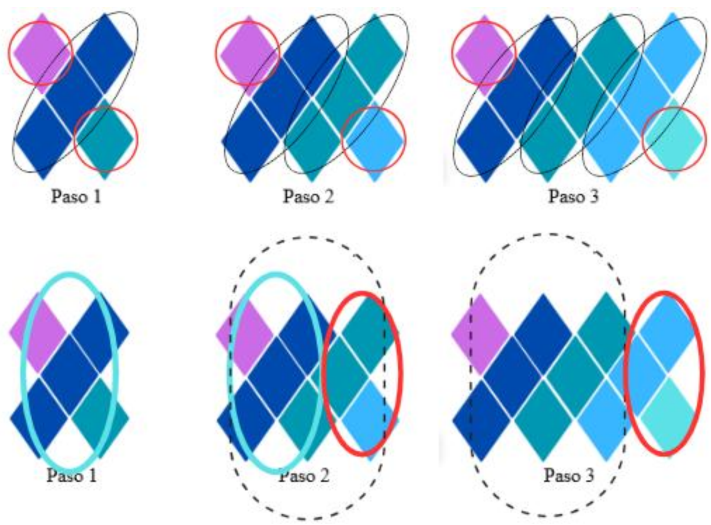
f) Si quieres construir una manilla para un buen amigo, siguiendo la misma secuencia ¿qué deberías conocer? ¿Qué datos te serian de utilidad para realizar una manilla que él pueda utilizar?
g) Si la medida de la muñeca de tu mejor amigo es aproximadamente 18 cm y cada rombo tiene un diagonal menor de 1cm. ¿Cuántos pasos deben realizarse para completar una manilla? ¿De cuántos rombos está conformada la manilla de tu amigo?
Explica detalladamente en tu hoja de trabajo cómo llegaste a las respuestas de cada una de las preguntas en los ítems f. y g.

Solución normativa: Se espera que los estudiantes exploren diferentes formas de abordar la construcción de la secuencia. Una regla de asignación que puede surgir es $P_n = 3n + 2,$ siendo P_n el número de rombos que tiene la manilla y n el paso en que se encuentra según el orden de la secuencia. Del trabajo de los estudiantes también pude surgir un patrón recurrente donde la solución de $P_n = P_{n-1} + 3$ identificando características de la secuencia basadas en las figuras tomando $P_1 = 5$. Basados en la ruta de accesos por medio de los procesos de generalización se debe tener en cuenta que los estudiantes identifiquen las variables involucradas en el problema (n: número del paso, P_n: número de rombos). Además del tipo de variación que pueden encontrar en la secuencia, es decir qué tipo de variación funcional pueden encontrar para expresarla en forma de relación funcional ($P_n = 3n + 2$ ó $P_n = P_{n-1} + 3$). Por otro lado, otra forma de trabajo con la secuencia tiene que ver con la identificación de los elementos de la secuencia como números que están cambiando, esto es: paso 1 – 5 rombos, paso 2 – 8 rombos, paso 3 – 11 rombos; esto para generalizar la secuencia por medio de un número general $P_n = 3n + 2$, donde R representa el número de rombos y n el paso de construcción en la secuencia.

Análisis teórico: El propósito de las preguntas planteadas es motivar la emergencia de medios semióticos de objetivación. Por ejemplo, a través de: recursos lingüísticos (palabras clave) "*siempre se agregan 3 rombos" o* "*a la figura anterior agrego 3*". Estas palabras clave acompañadas de actividad perceptual como movimientos de las manos de los estudiantes en las secuencias al dar sus argumentos y a su vez el ritmo con el cual lo realizan. Deícticos lingüísticos (espaciales, temporales y de modo) como "a la derecha, arriba o abajo, … *agrego 3 rombos*", "ahora, después o siempre *en el siguiente paso sumo 3 rombos*", "así mismo o de igual forma *se realiza el proceso para los demás términos*".

Además, interesa identificar las diferentes producciones de generalidad desde el trabajo con los elementos de la secuencia figural que los estudiantes pueden realizar con el fin de llegar a una generalización de la secuencia. Esto puede ser descrito por medio de gestos o marcaciones dentro de las figuras de tal manera que expresen una fórmula general que le permita al estudiante identificar lo invariante en la secuencias señalado en rojo (ver Figura 8, parte superior) y la identificación de la comunalidad del patrón en negro, que en este caso "*siempre se agregan 3*" a cada elemento de la secuencia señalado en negro, para obtener la primera solución normativa (cabe aclarar que no es la única forma de la que se puede ver la comunalidad en la secuencia). Al identificar que a la figura anterior siempre se agregan 3 rombos se puede obtener la segunda solución normativa vista en la Figura 8, parte inferior.

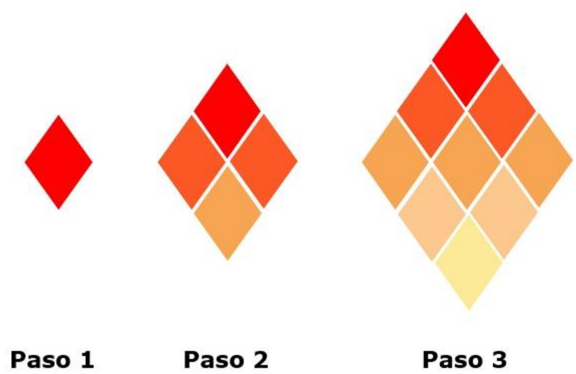
Figura 8 *Posibles formas de expresar comunalidad en el patrón de manillas*



Nota. Elaboración del autor

La segunda tarea llamada "Collares", tiene como objetivo guiar a los estudiantes a través de una secuencia figural, en la cual el cambio en los términos no es constante. Esto con el propósito de potenciar otras formas de generalización de los términos de la secuencia, además, los estudiantes pueden identificar qué posibles formas de expresión pueden surgir de este tipo de tareas. Incluso estas tareas propician la utilización de estrategias efectivas de cálculo al identificar la generalidad que sigue un patrón en su estructura. También se espera que emerjan aspectos geométricos y espaciales de la secuencia, de manera que los estudiantes hagan uso de cambios de representación del patrón a través de tablas o representaciones numéricas.

Tarea 2: Collares Entre las figuras más usadas para artesanías en las diferentes comunidades colombianas, las más comunes son los rombos, debido a que desde algunas comunidades simboliza la unión familiar o elementos de la naturaleza como: montañas, ríos, cultivos, entre otros. En algunas comunidades simboliza la conexión con la naturaleza. Estas formas se encuentran en diversos diseños en la ropa, los collares, manillas, mochilas, entre otros accesorios, los cuales se realizan a mano con diversos materiales. A continuación, se muestra una representación de los pasos seguidos para elaborar un collar formada por rombos.



De acuerdo con la anterior secuencia de un diseño artesanal, responde las siguientes preguntas y comparte tus ideas con tus compañeros.

a) Dibuja e indica ¿cuántos rombos tiene el tejido en el paso 4? ¿Cuántos rombos tiene el tejido en el paso 5?

b) ¿Cuántos rombos tiene el tejido en el paso 50? ¿Cuántos rombos tendrá el tejido en el paso 100?

Explica detalladamente cómo llegaste a las respuestas de cada una de las preguntas en los ítems a. y b.

c) Juan está elaborando un tejido y olvidó en qué paso iba, pero sabe que su tejido hasta el momento tiene 256 rombos ¿Es qué paso del tejido va Juan? Relata con detalles en tu hoja de trabajo como obtuviste la respuesta.

d) ¿En esta secuencia existe algún tejido con 1369 rombos? Explica por qué Si o por qué No y cómo procediste para encontrar la respuesta.

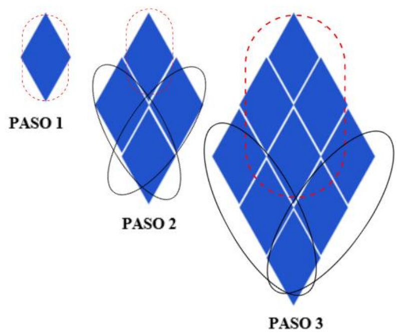
e) ¿Cómo podrías explicarle con claridad a un miembro de tu comunidad cómo debe proceder para calcular rápidamente el número de rombos de cualquier tejido? Escríbele un mensaje en donde le expliques de forma clara y con todos los detalles los pasos que debe realizar para calcular rápidamente el número de rombos de cualquier tejido.

Solución normativa: Se espera que los estudiantes durante el trabajo en grupo puedan explorar diferentes formas de solucionar las preguntas formuladas sobre la secuencia. A partir de la exploración sobre términos cercanos, pueden identificar la regla de asignación $P_n = n^2$ siendo P_n el número de rombos que posee el tejido y n el paso dentro de la secuencia. También podrían presentar la siguiente forma recurrente $P_n = P_{n-1} + (2n - 1)$ identificando características de la secuencia basadas en las figuras tomando $P_1 = 1$. Basados en la ruta de acceso por medio de los procesos de generalización se debe tener en cuenta que los estudiantes necesitan identificar las variables involucradas en el problema ((n) número del tejido, P_n número de rombos); además del tipo de variación que pueden encontrar en la secuencia, es decir qué tipo de variación funcional pueden encontrar para expresarla en forma de relación funcional ($P_n = n^2$ ó $P_n = P_{n-1} + (2n - 1)$ ó $P_n = P_{n-1} + (2(n-1) + 1\,)$. Por otro lado, otra forma de trabajo con la secuencia es la identificación de los elementos de la secuencia como números que están cambiando (ejemplo: tejido 1 – 1 rombos, tejido 2, 4 rombos, tejido 3 – 9 rombos…) y generalizar la secuencia por medio de un número general ($P_n = n^2$).

Análisis teórico: El propósito de las preguntas planteadas es motivar la emergencia de medios semióticos de objetivación. Por ejemplo: recursos lingüísticos (palabras clave) "siempre se agregan un número impar de rombos" "a la figura anterior agrego el número impar anterior" estas palabras clave acompañadas de actividad perceptual como movimientos de las manos de los estudiantes en las secuencias al dar sus argumentos y a su vez el ritmo con el cual lo realizan. Deícticos lingüísticos espaciales, temporales y de modo como: "a la derecha, arriba, abajo, agrego un número impar de rombos", "le sumo dos veces el número del tejido menos 1", "(ahora, después, siempre) en el siguiente tejido sumo $2n - 1$ rombos", "(así mismo, de igual forma) se realiza el proceso para los demás términos".

Además, es posible que emerja el uso de diferentes representaciones figurales icónicas del tejido, por medio del uso de gestos asociados el patrón que le permita a los estudiantes formular una generalización, donde identifique lo invariante en la secuencia señalado en rojo (ver Figura 9), así como la comunalidad. Que en este caso puede expresarse como: "siempre se agregan el doble del tejido menos 1 a cada elemento de la secuencia señalado en azul" para obtener la segunda solución normativa (cabe aclarar que no es la única forma de la que se puede ver la comunalidad en la secuencia). También es posible determinar que la figura tiene una forma de arreglo cuadrado e identificar que el número de rombos en cada paso es un número cuadrado o la suma repetida de números impares, para obtener la solución normativa (ver Figura 9)

Figura 9 *Posible forma de expresar comunalidad en el patrón de collares*

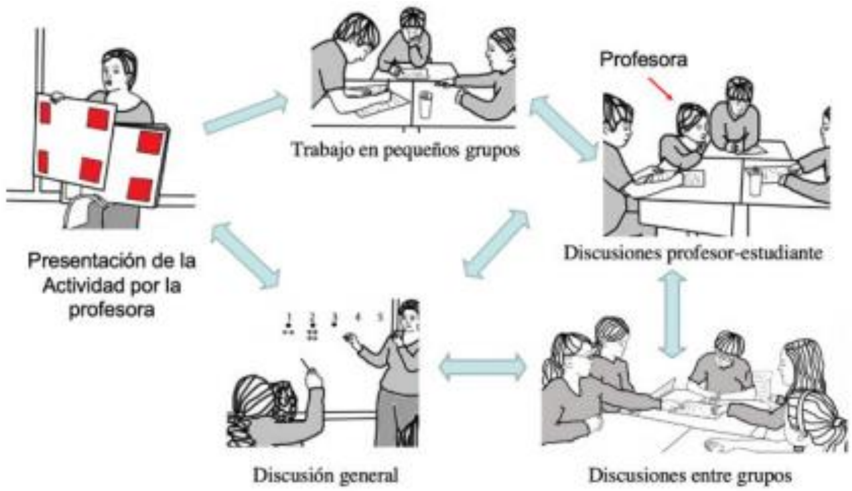


Nota. Elaboración del autor

4.3 Fase II. Implementación de las tareas

En la implementación se tuvo en cuenta la actividad en el aula como sistema emergente propuesto por Radford (2015) el cual se ilustra en la Figura 10 con relación con la actividad y la labor conjunta. El tiempo usado fue de 5 semanas donde se trabajaba 1 sesión semanal, es decir, un total de 5 sesiones de 120 minutos de acuerdo con la disponibilidad de los participantes. Cada sesión fue realizada en un salón prestado por la universidad para la recolección de datos.

Figura 10 *La actividad en el aula como sistema emergente*



Nota. Tomada de Methodological aspects of the theory of objectification (p. 556) por. Radford, 2015, *Perspectivas da Educação Matemática*, 8(18). 547-567

El investigador es el docente encargado de dirigir las sesiones y estar en constante intervención promoviendo la reflexión y argumentación por medio de preguntas y diálogo con los estudiantes. Además, se tuvo el apoyo de un investigador observador quien tenía una participación pasiva videograbando las clases y enfocando los momentos en donde se hacía uso de los MSO, los cuales, posteriormente se seleccionaron para transcribir y analizar.

En cada desarrollo de las tareas los estudiantes contaban con hojas de trabajo y el material impreso, donde se pedía realizar todo tipo de procedimientos y explicaciones que consideraran necesarias para resolver los problemas. Estas hojas se convirtieron en material complementario a los videos que permitieron ver las formas de objetivación emergentes en la actividad.

De esta forma la actividad inicia con la presentación de la tarea e indicaciones por parte del investigador, luego se propone el trabajo en parejas para la resolución de las tareas. En ciertos momentos el investigador intervenía en cada grupo para hacer preguntas que evidencian las formas de pensamiento utilizadas al momento de generalizar y que servían como retroalimentación de lo que los estudiantes han realizado.

Cuando se tenían propuestas diversas en los grupos se invitaba a una discusión entre todos los estudiantes con el fin de socializar sus ideas y soluciones unos con otros; las cuales a veces eran desafiadas o mejoradas por los demás compañeros. Así mismo, se desarrollaba una discusión general para afianzar las soluciones de los dos grupos y llegar a ideas en común, sin perder siempre el objetivo de la implementación que es propiciar en los estudiantes los procesos de objetivación.

Además, se consideraron las recomendaciones propuestas por Vergel y Rojas (2018), las cuales sugieren la observación de los signos y gestos utilizados por los estudiantes para expresar sus ideas. Se subraya la importancia de prestar especial atención a la semiótica de los movimientos manuales durante la ejecución de procesos de generalización, especialmente al trabajar con secuencias de patrones.

4.4. Fase III. Selección de los datos

La recolección de datos se llevó a cabo en la fase 0 y la fase 2 de la investigación de la siguiente manera:

Fase 0: Videograbaciones por la plataforma de Zoom de cada una de las respuestas de las entrevistas.

Fase 2: Videograbación de cada sesión desarrollada con una cámara que capturaba los momentos de socialización, participación, discusión y explicación que daban los estudiantes en sus grupos de trabajo. Esto con el fin de captar no solo las respuestas alfanuméricas sino aquellos gestos, señalamientos y justificaciones que daban los participantes. Asimismo, se recolectaron las hojas de trabajo.

Igualmente, para llevar a cabo la reducción, organización y análisis de los datos, se consideró el enfoque teórico propuesto por Vergel (2014). Este enfoque destaca la importancia de tener presente la pregunta de investigación, los objetivos, así como los conceptos y principios de la TO. Estos elementos contribuyen significativamente a "discernir y avanzar en el desarrollo de la habilidad de dar sentido a los datos" (p. 104), enfocándose en comprender y distinguir lo esencial de lo secundario. Por ello, se opta por una codificación inicial, inspirada en la metodología de Glaser y Strauss (1967; citado por Vergel, 2014), que implica resaltar y subrayar con colores las producciones escritas, frases clave, indicios y expresiones que reflejen aspectos vinculados a los recursos o MSO. Entre estos aspectos se incluyen la actividad perceptual, los signos deícticos, recursos lingüísticos, el ritmo, así como procesos de generalización, palabras y frases clave, y los símbolos o artefactos.

4.5 Fase IV. Análisis e interpretación de los datos

Una vez recolectados los datos, se realizó una selección teniendo en cuenta aquellos episodios significativos que identificaban una mayor cantidad de recursos semióticos movilizados. Es decir, de acuerdo con Radford (2015), se seleccionan segmentos sobresalientes, pasajes o enunciados que contenían la evidencia que se requiere, luego se transcriben de manera analítica. A este análisis se agregan imágenes de las sesiones o las hojas de trabajo donde se evidencien MSO haciendo señalaciones con flechas, círculos y otros recursos realizando una triangulación en la interpretación teórica de los datos seleccionados (Lasprilla, 2014). Los comentarios del investigador se colocan haciendo la descripción del MSO.

El análisis sigue el modelo multimodal usado por Miranda et al., (2007) en el cual se tiene en cuenta la relación de los diferentes MSO que se movilizan en la actividad (lenguaje escrito, lenguaje hablado, los gestos, las acciones, el ritmo, entre otros), es decir, los medios semióticos deben ser analizados en conjunto. Para ello, se resaltaron con colores algunas partes de las trascripciones que se identifican como indicios, frases relevantes, expresiones que evidencien recursos o MSO, entre ellos los recursos lingüísticos, la actividad perceptual, el ritmo, los signos deícticos, también las expresiones de generalidad, las frases clave, las palabras y los símbolos. Este análisis multimodal se evidencia en el capítulo 5 con más detalle.

Cabe mencionar que, cuando se presente más de un medio semiótico en una misma frase se hará uso del subrayado con el color asignado en la Figura 11. Por otro lado, se identificaron las líneas de dialogo como $(L1, L2, \dots, L_n)$ y se catalogaron agregando los nombres de los estudiantes y el ítem que se aborda en cada tarea. Se iniciaron los análisis reuniendo las respuestas de todos los estudiantes sobre el ítem a para identificar los diversos acercamientos a una misma tarea, posteriormente se analizó la producción de cada estudiante en los lapsos seleccionados de los otros ítems correspondientes.

Para seleccionar los episodios significativos se siguió un proceso en varias etapas. Primero, se identificaron y marcaron los fragmentos clave en los videos durante la implementación de las actividades. Luego, se revisaron los escritos de las hojas de trabajo de los estudiantes, comparando y relacionando estos registros con las grabaciones de video. Finalmente, se analizaron las videograbaciones ítem por ítem en paralelo con los escritos, destacando las partes más relevantes de cada video para llevar a cabo un análisis integral y coherente de los datos.

5. Análisis Multimodal

En este capítulo se aborda el análisis de cada tarea desde una concepción multimodal del pensamiento humano, en la cual se propone que, en la experiencia del conocimiento, los estudiantes movilizan y exploran una amplia gama de recursos físicos, cognitivos y perceptivos al abordar y expresar sus ideas matemáticas. Por ejemplo, los símbolos entrelazados en el cuerpo y la cognición, los gestos, el lenguaje natural, dibujos, manipulación de artefactos físicos y movimiento corporal los cuales son mediadores de una actividad sensible y reflexiva la cual dota de sentido a la pregunta y objetivo de investigación apoyados de la TO (Radford et al., 2009a).

En el análisis se hace uso de colores dentro de las transcripciones con la finalidad de mostrar los recursos o MSO evidenciados. Se destacó de color verde el contenido relacionado con los recursos lingüísticos; de color rojo todo lo que proporcionará información sobre el ritmo. Asimismo, se escribe en marrón lo concerniente a la actividad perceptual. Los signos deícticos lingüísticos espaciales, temporales o de modo, con colores distintos: azul, lila y naranja, respectivamente; mientras que los aspectos que involucrasen generalización en color fucsia y las palabras o frases clave junto con símbolos en negrita como se visualiza en la Figura 11.

Figura 11 *Colores utilizados para diferenciar los MSO*

5.1 Análisis Tarea 1

A continuación, se presentan las formas de reflexión y acción que emergen en la actividad desarrollada entre los estudiantes y el investigador. Se inicia la solución del **ítem (a)** en la tarea 1 donde se solicita dibujar e indicar cuántos rombos tiene el paso 4 y 5.

L1. I: ¿Cómo lo identificaron?

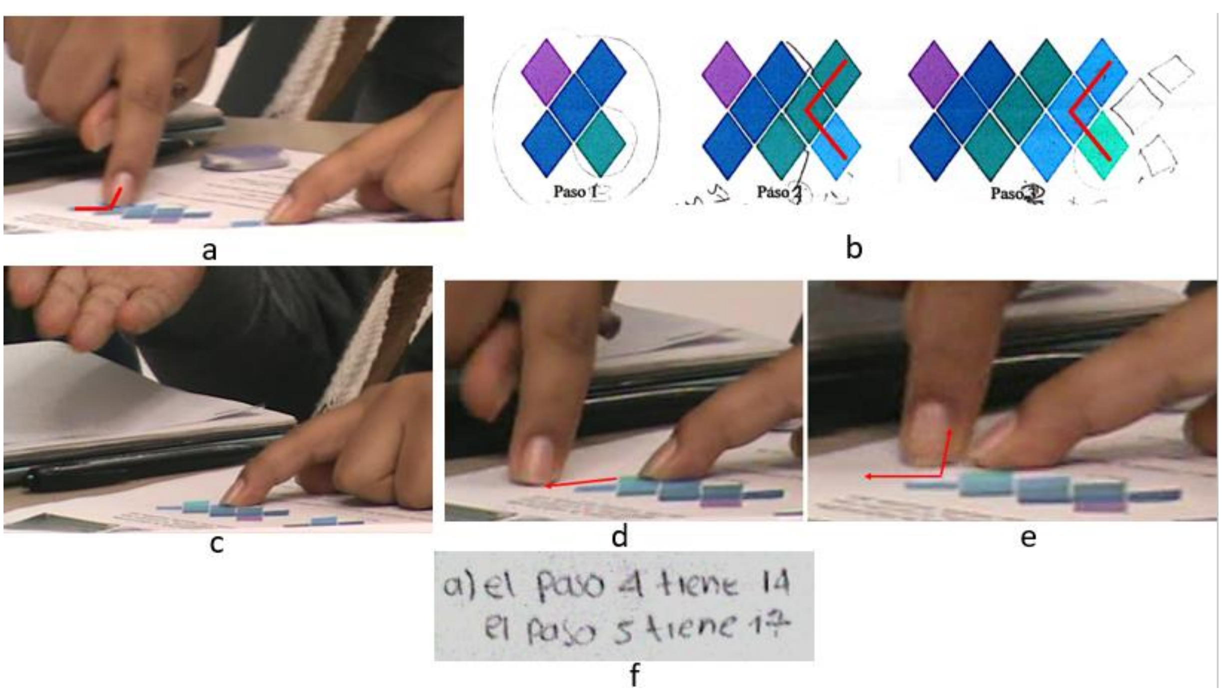
L2. **Jana (grupo 1)**: solamente mirando el número. O sea aquí [*señala el paso 1*] comienza con uno [*refiriéndose a los 5 rombos iniciales del paso 1*] y al formar la otra **vuelta** [*refiriéndose al paso 2*] forma éstos 3 [*señalando en forma de < ver* Figura 12 *a y b los rombos que fueron agregados*] entonces en la otra vuelta se forman éstos 3 [*refiriéndose al paso 3* y *señala con su dedo haciendo una forma de <*] y en la otra vuelta [*referencia al paso 4, realizando un gesto am phantasma con su mano derecha sobre la figura 3 explicando que en el siguiente paso se tendrá el paso 3 agregando una < de 3 rombos ver* Figura 12*c*] van a formar la parte de ésta [*haciendo referencia a los 2 rombos de la parte central y superior del < ver* Figura 12*d*] y la **partecita** de ésta [*señalando el rombo inferior de < ver* Figura 12*e*] […]

L3. Jana: Si, en el quinto paso hay 17 rombos.

L4. I: ¿Cómo llegaron a ese 17?

L5. Jana: Haciéndole solamente aumentándole otros tres rombos al paso 4 que teníamos [*De esa forma pueden llegar a la respuesta de la Figura 12f*]

Figura 12 *Producción semiótica de Jana en el ítem a de la tarea 1*



L6. I: ¿Cómo iniciaron? ¿Cómo partieron?

L7. **Samuel (grupo 2):** Contando la cantidad de rombos que se van formando aquí [*señalando en forma de diagonal los rombos del paso 2 ver Figura 13a*] en cada uno de los pasos y llegue a la conclusión de que aquí [*señala el paso 1*] hay 5, aquí [*señala el paso 2*] hay 8, aquí [*señala el paso 3*] hay 11, hay como que **un patrón**, va aumentando 3 en 3 [*señalando en forma de cadeneta los pasos mientras explica su argumento, ver Figura 13b*], entonces se puede decir que en el cuarto paso tendría [*haciendo un gesto am phantasma señalando donde iría el siguiente paso, ver Figura 13c*] 11 y 3, tendría 14 [*Escribe los valores del paso 4 y 5 ver Figura 13d*]

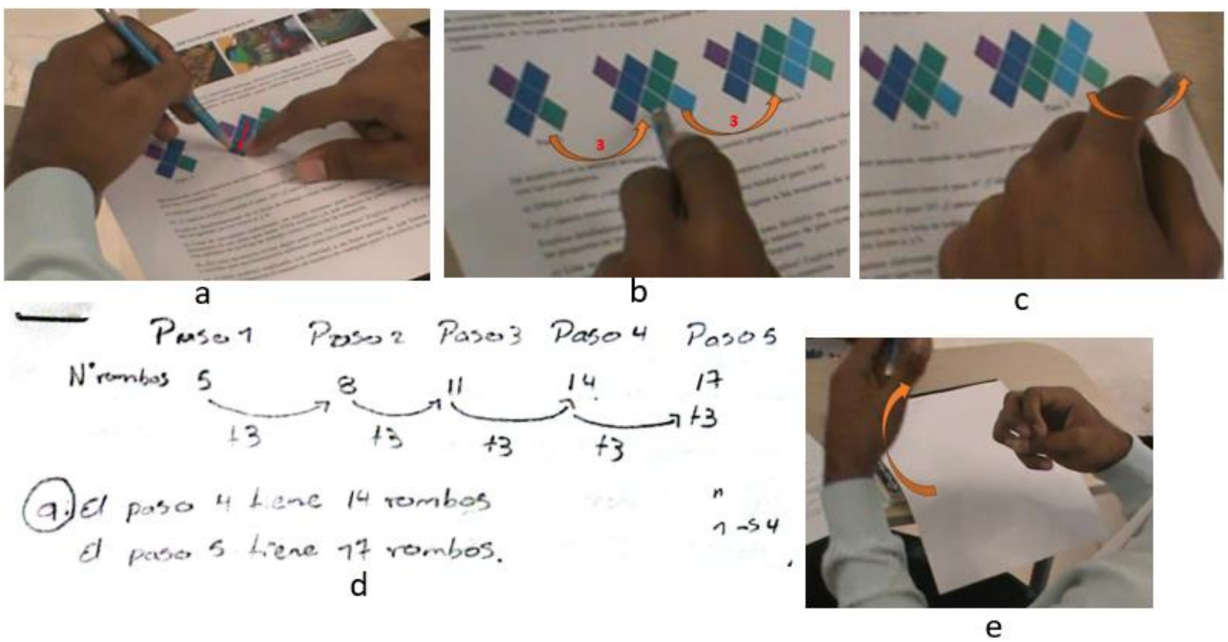
L8. I: ¿Ustedes lo tomaron con números?

L9. Samuel: Si.

L10. I: Okey, ¿Por qué con números?

L11. Samuel: Porque ya que me están dando una cantidad cuantitativa de rombos, entonces puedo **asociarla** y calcular el número de cantidades que se forman más allá [*realiza un gesto de tipo am phantasma con la mano, ver Figura 13e*].

Figura 13 *Producción semióticas de Samuel en el ítem a de la tarea 1*



L12. I: ¿Cómo van por acá? ¿Qué identificaron? ¿Qué han encontrado?

L13. **Camilo (grupo 3):** Bueno, primero conté los rombos y habían 5 [*señala uno a uno los rombos en forma de conteo del paso 1*], luego volví a contar los otros rombos [*señala el paso 2*] y habían 8 y luego 11, entonces me di cuenta de que seguía una secuencia lógica [*haciendo referencia al patrón de aumento de los elementos de la secuencia*] es decir […]

L14. Juan: Va aumentando de 3 en 3.

L15. I: Okey una secuencia que va aumentando de 3 en 3, ¿pero lo tomaron con números?

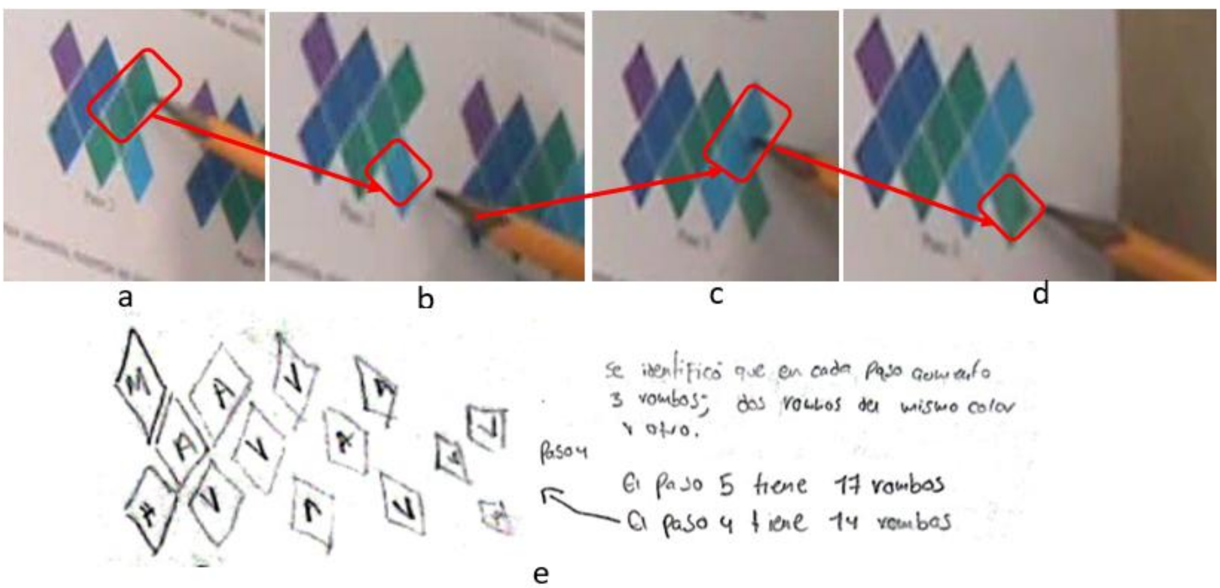
L16. Camilo: Si, pues lo encontré.

L17. Juan: Y ahorita estaba identificando que en las figura está exactamente igual entonces en el paso 2 [*señala el paso 2*] otros 2 verdes y 1 azul [*hace un gesto señalando los rombos que se completan respecto a los colores del paso 2 ver* Figura 14 *a y b*] y luego acá cambiamos, luego tenemos 1 azul y aparecieron 2 azules y 1 verde [*señalando los rombos del paso 3 que se completan respecto a los colores del paso 2 ver* Figura 14 *c y d*] entonces también ese **patrón** se repite, dos del mismo color y uno de otro [*señalando los rombos del paso 3*].

L18. I: ¿Entonces cómo seguiría? ¿Como sería el siguiente? [*usando un gesto am phantasma señalando donde estaría el siguiente termino]*.

L19. Juan: Eh… otros dos verdes [*señala el cómo se completarían los 3 rombos azules en forma de diagonal*] y **creería** yo uno azul [*señalando el primer el rombo inferior de la manilla suponiendo que la secuencia de colores luego de paso 3 se repite para la manilla*].

Figura 14 *Producciones semióticas de Juan y Camilo en el ítem a de la tarea 1*



Se ha evidenciado que, desde el inicio de la tarea 1, hay una gran variedad de recursos semióticos que apoyan las participaciones de los estudiantes, de las cuales surgen signos deícticos lingüísticos espaciales “aquí”, “acá”, “ésta”, “éstos”, temporales “ahorita”, “luego”, de modo “igual”, complementados de gestos idexicales como: señalamientos (Figura 14 a-d), deslizamientos (Figura 13 a-c) y deícticos am phantasma usando los dedos y objetos (Figura 13 c y e), signos escritos (Figura 12f, Figura 13d, Figura 14e), actividad perceptual, el ritmo, el conteo rítmico y en zigzag (Figura 12 a-e) y el uso de una tabla de forma horizontal (Figura 13d) como artefacto histórico-cultural.

Este último es usado por Samuel para determinar la cantidad de rombos en los pasos 4 y 5 (ver Figura 13d). Su uso como MSO facilita la mediación de su pensamiento y reflexión (Radford, 2018b), otorgando sentido tanto numérico como espacial a los elementos de la secuencia (Asenova et al., 2020). Esto le guía hacia la identificación de una recurrencia común, como se menciona en (L7) “[…] hay como que un patrón, va aumentando 3 en 3 […]”. A través de la palabra clave “patrón”, Samuel reconoce una regularidad que puede ser generalizada a cualquier término de la secuencia, interpretando el incremento de tres en tres como un comportamiento recurrente. En este contexto, Samuel utiliza la relación aditiva entre términos consecutivos de la secuencia, donde cada término aumenta en tres unidades. Esto indica una generalización de tipo aritmética, ya que sus hipótesis están basadas en la recurrencia entre términos consecutivos.

De esta forma, en acuerdo con Radford (2018b) los signos deícticos espaciales como "aquí, acá, ésta, éstos" asignan a las variables un significado profundo relacionado con las pistas espaciales o contextuales de los términos de la secuencia, tal como se observa en la declaración de (L2): "aquí comienza con uno y al formar la otra vuelta forma estos 3; luego, en la siguiente vuelta, se forman éstos 3, y así sucesivamente." En este mismo sentido en (L7), se menciona: "aquí hay 5, aquí hay 8, aquí hay 11, mostrando un patrón evidente [...]." Los gestos indexicales, considerados como signos escritos en el aire según Vygotsky (1997) (ver Figura 12 a, d, e y Figura 14 a, b y c), complementan estas expresiones verbales que resultan esenciales para guiar la comunicación y materializar las intenciones al referirse a la estructura espacial y/o numérica; además para percibir, identificar y relacionar la regularidad de la secuencia. Por consiguiente, el contexto se vuelve más comprensible cuando se amplía con la ayuda de gestos (Moreno, 2018).

De igual forma los adverbios “ahorita” y “luego” en (L13) “Primero conté los rombos y habían 5, luego volví a contar los otros rombos y habían 8 y luego 11 […]”, y en (L17) “ahorita estaba identificando que en las figura está exactamente igual entonces en el paso 2 otros 2 verdes y 1 azul y luego acá cambiamos, luego tenemos 1 azul y aparecieron 2 azules […]” le ayudan a Camilo y Juan a describir acciones y procedimientos que utiliza de forma reiterada y potencial (Contreras, 2023), además el deíctico de modo “igual” evidenciado en (L17) indica la forma, la manera o el modo en que se estructura la recurrencia numérica en todos los términos de la secuencia y la forma en que permanece igual en cada elemento (Radford, 2020a). Estos deícticos y su forma de vincularse ayudan a identificar y explicitar la comunalidad presente en la secuencia.

También, la actividad perceptiva juega un papel importante en la identificación de las regularidades en los términos de la secuencia, como se puede apreciar en (L2) “solamente mirando que […] y al formar la otra vuelta […] van a formar […]”, en (L7) “contando la cantidad de rombos […]”, en (L11) “me están dando […]”, en (L13) “conté los rombos […] “me di cuenta de que […]” en (L14) “va aumentando […], en (L17) “[…] estaba identificando […] ese patrón se repite […]” este MSO dota de sentido las explicaciones y la forma de identificar y describir la comunalidad de la secuencia. En acuerdo con Moreno (2018) no solo en el dibujo y en el leguaje escrito se puede constatar la actividad perceptiva, también en el habla y los gestos usados por Camilo y Juan para expresar sus ideas.

En cuanto al ritmo como MSO se evidencia en (L2) “ […] comienza con uno y al formar la otra vuelta forma […] en la otra vuelta se forman […] y en la otra vuelta […] van a formar […]”, en (L7) “[…] aquí hay 5, aquí hay 8, aquí hay 11 […] el cuarto paso tendría 11 y 3 tendría 14” y en (L13) “[…] habían 5, […] habían 8 y luego 11” Estos fragmentos muestran como el ritmo es un MSO clave en todos los grupos de trabajo al momento de describir lo percibido, debido a que permite destacar "la monotonía de sus acciones de contar, pausar y adicionar" (Vergel, 2014, p.177) y, por medio de sus acciones al momento de contar rítmicamente (Lasprilla, 2014) presente en cada intervención ayuda a materializar sus pensamientos. Además de mostrar el cambio en los rombos de la secuencia haciendo uso de relaciones numéricas entre los términos que presentan una característica común a los elementos, dándole un orden que va más allá de las figuras (Radford, 2010) y proporcionando conjuntamente elementos claves para deducir la comunalidad en la secuencia.

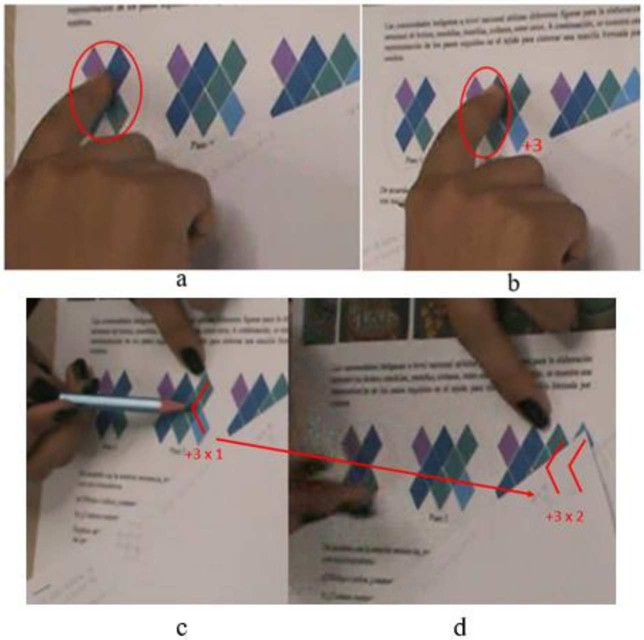
Para responder al ítem a, las parejas de estudiantes identificaron una regularidad aditiva en la secuencia, evidenciada en las intervenciones: (L2) "en la otra vuelta se forman éstos 3", (L7) "va aumentando 3 en 3" y (L14) "Va aumentando de 3 en 3". En el primer caso, Jana y María se guiaron por la estructura geométrica de la secuencia, reconociendo que en cada nuevo paso se agrega una figura en forma de " < ". En el segundo caso, Samuel empleó la relación geométrico-numérica de los términos, contando los rombos y organizando los datos en una tabla conforme aumentaban los elementos de la secuencia. Finalmente, Camilo y Juan, además de identificar la estructura geométrica, consideraron la característica de completar los colores en la secuencia. Este proceso de cuantificación y tabulación, entendido como un artefacto histórico-cultural, refuerza la forma en que los estudiantes objetivan la regularidad a través de la relación funcional. Según Kieran et al. (2016), estas herramientas son fundamentales para que los estudiantes comprendan mejor las relaciones algebraicas, ya que organizar y analizar datos numéricos facilita la identificación de patrones y apoya su transición del pensamiento aritmético al algebraico.

En los fragmentos destacados anteriormente, se observa cómo los estudiantes no solo utilizan una variedad de MSO, sino que también coordinan estos elementos de manera fluida y coherente, similar a una orquesta donde cada elemento cumple un papel crucial. Cada MSO se integra de manera esencial en la construcción colectiva del conocimiento, facilitando la emergencia de una comprensión compartida sobre la regularidad de la secuencia. Esta interacción entre diferentes sistemas semióticos da lugar a lo que la Teoría de la Objetivación denomina un "nodo semiótico". Los nodos semióticos permiten conectar diferentes formas de representación y comprensión, evidenciando cómo los estudiantes piensan y estructuran su razonamiento en torno a la figura (Vergel et al., 2020). Esta mediación a través de MSO no solo enriquece la comprensión matemática, sino que también resalta cómo el conocimiento es construido de manera colaborativa y culturalmente situada.

Se prosigue al ítem b, donde se solicitaba calcular la cantidad de rombos en los pasos 20 y 100.

L20. **Jana (grupo 1):** Al tener pues la figura los cinco que siempre van a estar, constante, constante [*Con su mano realiza un movimiento en forma de círculo al momento de repetir constante, constante, haciendo referencia que en cualquier termino se encontrará]* L21. I: ¿Por qué siempre está ahí cinco constantes? ¿Los puedes indicar dónde? L22. Jana: Pues van a estar aquí mire cinco [*Señala el paso 1 encerrando en circulo los cinco rombos ver figura*] que van a estar aquí [*Señala en circulo los primeros cinco rombos del paso 2*] más 3 que se vayan sumando [*ver* Figura 15 *a, b]*, pues aquí están los cinco, no perdón no es constante [*al momento de llegar al paso 3 la estudiante posee una confusión con su expresión de lo constante y el cambio*]

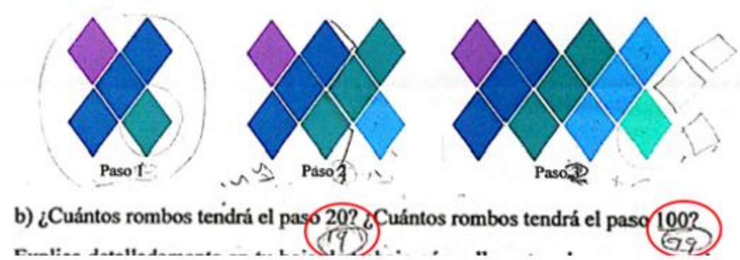
Figura 15 *Producciones semióticas de María y Jana al ítem b de la tarea 1*



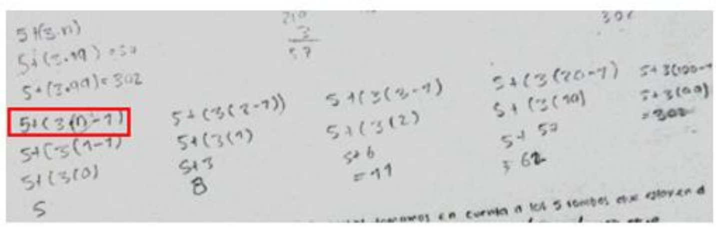
L23. I: ¿No es constante? Por ejemplo, aquí hay cinco [*señalando como ella lo había hecho en forma circular el paso 1*] ¿acá cuales están? [*señalando el paso 2*] los cinco y ¿se agregan?
L24. Jana: 3 [*respondiendo de forma coordinada al ritmo en el que se realizar la pregunta*]
L25. I: ¿Acá están los cinco? [*señalando el paso 3*] ¿y se agregan?
L26. María: 6 [*respondiendo de forma coordinada al ritmo en el que se realizar la pregunta*]
L27. I: En la siguiente habría cinco y ¿se agregarían cuantos?
L28. María: 3 por n y n va a estar variando, si ¿no?
L29. Jana: ¡Creo que sí! […]
L30. I: ¿Cómo lo podrían expresar?
L31. María: Cinco más tres por una constante, una constante que va a variar de a uno. Me surgió la idea digamos acá tres [*señalando el paso 2 ver* Figura 15*c*] ya le sume tres entonces seria como 3 por 1, [*pausa y luego dice*] 5 más 3 por 1 luego acá [*señalando el paso 3 ver* Figura 15*d*] que es cuando se suman 6 sería como 5 más 3 por 2, luego 5 más 3 por 3 que serían 9, 5 más 3 por 4. Si, porque 3 por 4, 12 más 5, 17, ¡SI! […]
L32. María: Tengo el paso 1 que acá lo cambie y coloque como el paso base [*señala el paso uno y modifica el número 1 del paso por una B ver* Figura 16*a*] porque eso es lo que me dan, me dan 5 rombos y yo desde ahí empiezo, yo sé que desde ahí le voy a estar sumando 3
L33. I: ¿y como sabes que se suma de a 3?
L34. María: O sea acá [*señalando con su lápiz el paso 2*] le suma 3 da 8 y acá [*señalando con su lápiz el paso 3*] le suma otros 3 es 11, o sea acá [*señalando con su lápiz el paso 3 en forma circular*] se ve que se suma de a 3. Yo había tomado la idea mala de que no estaba sumando 5 más 3 más 3 más 3 más 3 […] entonces me surgió la idea que era 5 más 3 por 1, 5 más 3 por 2

y así entonces en ese orden de ideas esto [*haciendo referencia al paso 1 señalando y remarcando con el lápiz la B ver* Figura 16 *a*] y a partir de acá empecé llamando el paso 1 [*cambia sobrescribiendo al paso 2 como paso 1 ver* Figura 16 *a*] y paso 2 [*cambia sobrescribiendo al paso 3 como paso 2*] y acá [*renombra y encierra los números de las preguntas del ítem b ver* Figura 16 *a*] lo nombré paso 19 y paso 99 entonces 5 más 3 por 19 y 5 más 3 por 99 y se descubrió de esto que teníamos [*haciendo referencia a los ejemplos con los primeros 3 pasos*]

Figura 16 *Producciones semióticas de María y Jana al ítem b de la tarea 1.*



a



b

L35. **Samuel (grupo 2)**: Le dimos la vuelta a la figura [*muestra su hoja volteándola de forma diagonal*] entonces nos dimos cuenta, que aquí hay una, voy a llamarla así una lámina por colores, si se da cuenta aquí hay una en el paso 1[*señalando de arriba abajo de forma diagonal ver* Figura 17*a*], aquí aparecen 2 en el paso 2 [*ver* Figura 17*b*], entonces tenemos que tener en cuenta que cada laminita está formada por 3 rombos, entonces seria 3 [*mientras va expresando verbalmente va escribiendo en su hoja de trabajo ver* Figura 17*c*, *además en dicha figura se evidencia el análisis previo a la explicación del estudiantes*] que es el número de rombos que hay en cada lámina, **n** que viene siendo la lámina cualquiera

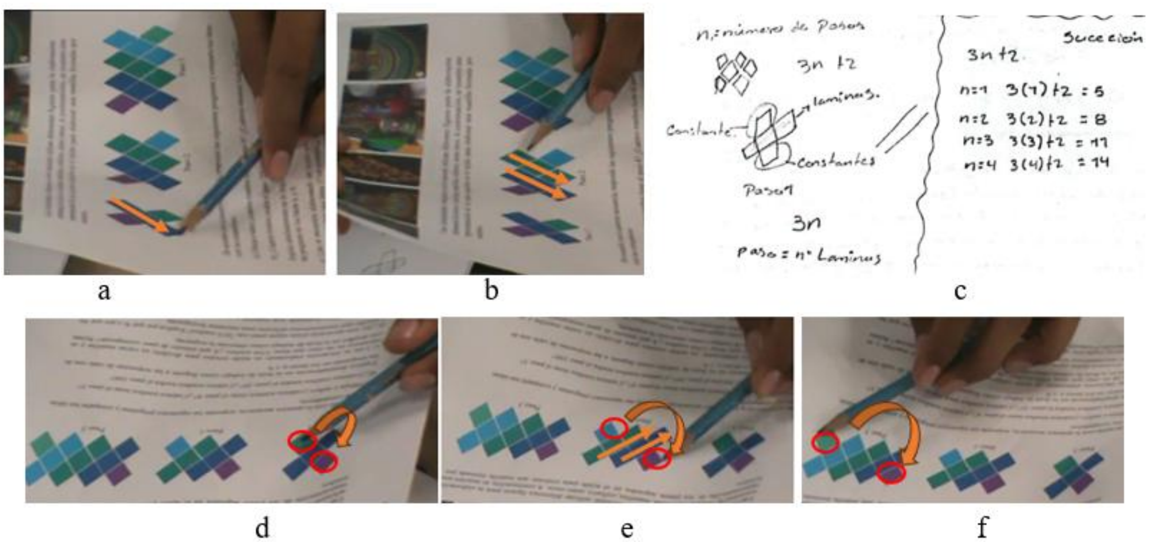
L36. I: ¿n que sería?

L37. Samuel: el número de paso o bueno si … el número de paso voy a decirlo así. Paso igual al número de lámina, donde ya yo había dicho que esto eran las láminas [*señalando la lámina del paso 1 ver* Figura 17*a*] […] ahora pero no podemos olvidarnos de esto, aquí hay 2 [*señalando los 2 rombos que no son considerados en la "lámina" ver* Figura 17*c*,*d*] y si se da cuenta aquí hay 2 láminas y aquí están estas 2 [*señalando el paso 2 ver* Figura 17*e*], o sea este es un valor constante, este siempre va a salir estas dos [*señala con el lápiz e identifica los elementos que son constantes en la secuencia ver* Figura 17*c*]

L38. I: ¿por qué son constante?

L39. Samuel: Porque, o sea siempre van a salir y no van a variar […] Este [*encierra de forma circular el rombo inferior derecho del paso 3 ver* Figura 17*f]* y este [*encierra de forma circular el rombo superior izquierdo del paso 3, ver* Figura 17*f*] son constantes, estas dos de aquí [*señalando de nuevo los rombos encerrados del paso 2 ver* Figura 17*e*]. Lo único que varía es el número de laminitas que avanza en **n** [*hace referencia a que el número de láminas depende del número del paso que lo llama n como expresa en su notación de la* Figura 17*c*]. Ahora esas laminitas hay que multiplicarle 3 que son la cantidad de rombos por la que está conformada cada laminita más 2 [*usando su lápiz señala uno a uno los rombos de la lámina del paso 1*] y si quiere hacemos la prueba, por ejemplo, en este, en el paso 1 seria n igual a 1 seria 3 por 1 más 2 que son estos 2 [*señala con su índice izquierdo los rombos que para el son constantes*] 3 por 1 3 más 2 igual 5, para el **n** igual a 2 entonces sería 3 por 2 6 más 2, 8 [*expresa cada ecuación de forma verbal*] **n** igual a 3 entonces seria 3 por 3, 9 más 2, 11 entonces y así sucesivamente. [*ver* Figura 17*c*]

Figura 17 *Producciones semióticas de Samuel en el ítem b de la tarea 1*



Acerca de los recursos semióticos emergentes de las respuestas al ítem b de los grupos de Jana y Samuel se puede afirmar que surgen deícticos lingüísticos espaciales “aquí”, “ahí”, “acá”, “estas”, “este”, temporales “ahora”, “luego”, “siempre”, de modo “así”, recursos lingüísticos “láminas”, “avanza”, además del ritmo, la actividad perceptual, el uso de gestos indexicales (deslizamientos, señalamientos o apuntamientos), el uso de signos (palabras escritas, simbolismo alfanumérico) y la posición de la figura en la secuencia usada como un artefacto identificado como recurso icónico (ver Figura 17c, e).

Desde el inicio del dialogo en (L20) "Al tener pues la figura los cinco que siempre van a estar, constante […]" se evidencia cómo la actividad perceptual, a través de la observación, manipulación y representación de la secuencia, contribuye a una comprensión más profunda de la comunalidad en la secuencia (Radford, 2013). Esta comprensión se expresa al identificar lo invariante de la secuencia, coordinando con otros medios semióticos de objetivación (MSO), como los gestos indexicales de señalamiento y encerramiento usados por Jana y María (ver Figura 15 a y b), que son escritos en el aire (Vygotsky, 1997). Estos gestos materializan las intenciones de Jana y María para describir lo que para ella es invariante en la secuencia. Además, se complementan con el deíctico lingüístico temporal "siempre", el cual describe acciones o procedimientos potenciales que se realizan de forma reiterada e imaginaria (Radford, 2003).

Por otro lado, en las líneas (L23) a (L29) "L23. I: Por ejemplo, aquí hay cinco ¿acá cuales están? los cinco y ¿se agregan?

L24. Jana: 3
L25. I: ¿Acá están los cinco? ¿y se agregan?
L26. María: 6
L27. I: En la siguiente habría cinco y ¿se agregarían cuantos?
L28. María: 3 por n y n va a estar variando
L29. Jana: ¡Creo que sí! […]"

El diálogo anterior revela un aspecto clave en los procesos de enseñanza y aprendizaje: la actividad conjunta en el aula, concebida como una colaboración activa entre el profesor y los estudiantes (Radford, 2023). Esta interacción compartida es fundamental para la identificación de regularidades en la secuencia, un proceso que se refuerza mediante el ritmo y la sincronización observados cuando los estudiantes coordinan sus respuestas al ser cuestionados sobre los cambios en los términos de la secuencia. La coordinación de los MSO en este contexto proporciona claves esenciales para el reconocimiento de patrones, lo que, en la intervención L28, culmina en la formulación de una generalización sobre los elementos de la secuencia por parte de los estudiantes. Este proceso de objetivación refleja cómo el conocimiento emerge colectivamente a través de la interacción mediada por los MSO, subrayando el carácter social y cultural del aprendizaje matemático (Radford, 2023).

Dicho proceso continúa en donde el ritmo se convierte en una herramienta clave para mediar y materializar el pensamiento del estudiante, como se observa en el conteo rítmico: (L31) "5 más 3 por 1 luego acá que es cuando se suman 6 sería como 5 más 3 por 2, luego 5 más 3 por 3 que serían 9, 5 más 3 por 4. Si, porque 3 por 4, 12 más 5, 17, ¡SI! […]". Este ritmo no solo estructura el pensamiento en torno a las relaciones numéricas que gobiernan los cambios en la secuencia, sino que también organiza sus acciones y proporciona un sentido de anticipación respecto al siguiente elemento. De esta manera, el ritmo actúa como un MSO que facilita la objetivación de la regularidad en la secuencia, complementando el trabajo conjunto mencionado anteriormente. Así, se establece un flujo de comprensión colectiva que permite a los estudiantes superar las figuras individuales y avanzar hacia una generalización matemática más profunda (Radford, 2010).

Después de identificar la regularidad en la secuencia, el grupo de Jana y María procede a formular una generalización que les permita calcular el número de rombos en los pasos 20 y 100. En (L32), María reconstruye la secuencia a partir de un "paso base", una expresión clave en su diálogo que le permite clasificar y organizar los elementos de la secuencia de manera efectiva. A través de este enfoque, externaliza su comprensión y ejemplifica un claro acto de objetivación: comienza definiendo un paso inicial como "base" y, a partir de ahí, identifica la regularidad en la secuencia que describe como "voy a estar sumando 3". Esta regularidad se transforma en una operación de multiplicación que facilita el cálculo de los rombos de los pasos 20 y 100. A medida que avanza el diálogo, la representación de María evoluciona del lenguaje verbal a una forma simbólica alfanumérica, tal como se observa en la Figura 16b. Este proceso no solo demuestra la aplicación de artefactos histórico-culturales en el análisis de secuencias, sino que también refleja una práctica profundamente arraigada en la enseñanza de las matemáticas. Como destacan Kieran et al. (2016), el concepto de un "paso base" sirve para facilitar la transición del pensamiento aritmético al algebraico, evidenciando un proceso en la construcción del conocimiento matemático.

En (L34), se hace notoria la conexión intrínseca de los MSO utilizados: deícticos espaciales como “acá”, de modo como “así”, junto con el ritmo y la actividad perceptiva en expresiones como “O sea acá le suma 3, da 8, y acá le suma otros 3, es 11; o sea, acá se ve que se suma de a 3” y “era 5 más 3 por 1, 5 más 3 por 2 y así”. La manera en que estos elementos se complementan constituye un nodo semiótico (Vergel et al., 2020), caracterizando la actividad mediada por dichos recursos y evidenciando su forma de pensar sobre la secuencia.

Se puede observar un claro proceso de deducción que parte de la identificación de una regularidad en la secuencia y se transforma en una hipótesis aplicable a términos más lejanos. Esto se evidencia cuando Jana y María expresan en la línea 34: “me surgió la idea que era 5 más 3 por 1, 5 más 3 por 2 y así entonces en ese orden de ideas […] acá lo nombré paso 19 y paso 99 entonces 5 más 3 por 19 y 5 más 3 por 99 y se descubrió de esto que teníamos”. Este enfoque muestra cómo utilizar una estructura recurrente para calcular valores de pasos más alejados en la secuencia, sin recurrir aún al simbolismo algebraico formal. La expresión se puede describir matemáticamente como $P_n = 5 + 3(n-1)$ lo que indica un proceso de generalización basado en patrones identificados a partir de operaciones previas.

La forma en que Jana y María operan analíticamente con los términos de la secuencia refleja una capacidad para adaptar el esquema de la secuencia a nuevos contextos y valores, demostrando un trabajo matemático más abstracto. Al definir el nombre de cada paso y conectarlo con la estructura de la secuencia, emplean elementos histórico-culturales y se apoyan en la comunalidad como fundamento para la generalización. Este enfoque permite que, partiendo de la regularidad observada, construyan una representación que trasciende lo particular para aplicar a términos más generales, evidenciando un proceso analítico de transición hacia el pensamiento algebraico, tal como lo describe Radford (2013).

También se observa una evolución en el proceso de generalización a través de la contracción semiótica, que constituye un proceso de objetivación. Este proceso implica una transición desde el uso inicial de MSO como palabras, gestos y deícticos en un contexto oral y espacial, hacia la formulación de expresiones alfanuméricas que representan términos de la secuencia de manera más abstracta y precisa. Esta evolución refleja un movimiento hacia la formalización y sistematización del pensamiento, en el que los estudiantes no solo identifican patrones, sino que también desarrolla una justificación paso a paso que valida sus hipótesis. En este contexto, la abducción analítica desempeña un papel clave, ya que permite a los estudiantes deducir una regla general.

El grupo de Jana y María evidencia una coordinación compleja y rica de medios semióticos que refractan su conocimiento y revelan una forma histórico-cultural de entender la secuencia. Se puede apreciar cómo integran diversos MSO como el ritmo, la percepción visual, los deícticos (espaciales, temporales y modales) y el uso de palabras clave que sugieren generalización. Estos elementos se entrelazan y convergen para formar nodos semióticos, que a su vez catalizan la actividad reflexiva de los estudiantes. Esta coordinación semiótica es esencial, ya que permite a Jana y María consolidar sus observaciones.

Este proceso de generalización no es meramente un reconocimiento de patrones; es un acto consciente de objetivación, en el que los estudiantes transitan desde representaciones concretas hasta una expresión más abstracta y simbólica. Como señala Radford (2013), la generalización en el contexto del aprendizaje matemático implica una forma de abducción analítica en la que se formulan hipótesis que se someten a prueba y validación a través de la actividad conjunta. Así, el proceso se caracteriza por la presencia continua de abducción analítica al operar con lo desconocido como si se conociera (Radford, 2018b), lo que permiten a los estudiantes avanzar desde la percepción inicial de patrones específicos hacia la formulación de generalidades aplicables a toda la secuencia, evidenciando una transición exitosa del pensamiento aritmético al algebraico.

Por otro lado, en el grupo de Samuel y Ricardo, se observa cómo la actividad perceptual (ver Figura 17) actúa como un MSO clave cuando mencionan en (L35) “Le dimos la vuelta a la figura entonces nos dimos cuenta, que aquí hay una, voy a llamarla así una lámina por colores, si se da cuenta aquí hay una en el paso 1, aquí aparecen 2 en el paso 2 […]”. Esta observación revela que la percepción visual no solo facilita la identificación del patrón de la secuencia, sino que también establece una conexión entre la estructura numérica y espacial, guiando a los estudiantes a reconocer una relación funcional uno a uno entre las láminas y el número de cada paso (Vergel, 2014; Moreno, 2018). Este proceso perceptual actúa como un primer paso hacia la formulación de una hipótesis que luego se valida con los términos conocidos de la secuencia.

Así, se manifiesta una manera particular de interpretar la secuencia, confirmando la idea de que "la mirada con la que cada uno de nosotros percibe el mundo no es una mirada desinteresada" (Radford, 2013, p.5). Esta forma de visualizar la secuencia proporciona recursos esenciales para la formulación de una comunalidad, la cual se expresa a través de diferentes MSO que complementan su discurso verbal en (L35), gestual y espacial (ver Figura 17). Los deícticos (espaciales, temporales y de modo), los recursos lingüísticos y el ritmo se integran para reforzar la comprensión del patrón, mostrando cómo la actividad perceptual guía la manera en que los estudiantes abordan y comprenden la tarea.

Los deícticos espaciales como "aquí", "estas" y "este" se utilizan inicialmente para destacar aspectos perceptivos de los elementos de la secuencia, tal como se observa en (L35): “aquí hay una […] lámina […] aquí hay una en el paso 1, aquí aparecen 2 en el paso 2 […]”. Estos medios semióticos facilitan la identificación de la comunalidad al ayudar a conectar elementos específicos de la secuencia. La expresión lingüística "lámina", combinada con gestos que recorren diagonalmente los rombos en la secuencia (ver Figura 17 a y b), permite establecer una relación clara entre el número de cada paso y la cantidad de "láminas" identificadas. De este modo, se logra una coordinación entre la estructura numérica y la disposición espacial, que resulta esencial para identificar cómo y cuánto cambian las cantidades o variables en cada paso. Esta relación integrada es clave para la identificación de comunalidades en la secuencia (Radford, 2013).

En este fragmento del diálogo, la generalización se mantiene implícita, ya que no se verbaliza directamente. Las acciones de los estudiantes se centran en el manejo de números concretos y sus operaciones, lo que indica una forma de razonamiento que aún no se ha formalizado en términos algebraicos (Radford, 2018b). Sin embargo, esta interacción inicial sienta las bases para la transición hacia una generalización más clara y abstracta.

En la misma línea de los MSO previamente mencionados, el ritmo también se vincula como una pieza clave en el proceso de transformar la comunalidad identificada en una hipótesis aplicable a situaciones con pasos más lejanos (Vergel, 2019). Como se observa en (L35), cuando Samuel expresa "aquí hay una en el paso 1, aquí aparecen 2 en el paso 2 […]", y nuevamente en (L37) cuando dice "ahora, pero no podemos olvidarnos de esto, aquí hay 2 y […] aquí hay 2 láminas y aquí están estas 2", se percibe una cadencia en su discurso que enfatiza la secuencialidad y repetición. Esta cadencia se convierte en una herramienta para reforzar el patrón que está describiendo, sugiriendo una lógica de repetición y continuidad que facilita la predicción de términos futuros.

La misma estructura rítmica se manifiesta de forma clara en (L39) cuando Samuel introduce la regla general de asignación: "sería 3 por 1 más 2 que son estos 2, 3 por 1, 3, más 2 igual 5, para el n igual a 2 entonces sería 3 por 2, 6, más 2, 8, n igual a 3 entonces sería 3 por 3, 9, más 2, 11, entonces y así sucesivamente." Esta forma de enunciado revela cómo el ritmo en su lenguaje no solo marca un patrón de repetición, sino que también guía la forma de organizar y procesar la información. La periodicidad en su discurso permite ver una regularidad que refleja una estructura ordenada y predecible en los elementos de la secuencia, facilitando así la abstracción de una regla general aplicable a pasos más distantes.

El uso del ritmo como MSO ayuda a establecer una estructura rítmica que crea una cadencia perceptible, ayudando a refractar el pensamiento del estudiante y sugerir un orden subyacente. Este ritmo no es solo una forma de expresión verbal, sino que actúa como un recurso para generalizar, guiando el razonamiento y estableciendo una continuidad que Samuel usa para describir y prever la evolución de la secuencia a medida que se incrementan los pasos. Como señala Radford et al. (2017), este tipo de ritmo es crucial porque ayuda a estabilizar las nociones de comunalidad y periodicidad en el pensamiento matemático, facilitando así la transición hacia formas más abstractas y generalizables de razonamiento.

Además, esta estructura rítmica se complementa con el uso de deícticos temporales como “ahora” y “siempre” en el diálogo de Samuel (L37 y L39). Frases como “ahora no podemos olvidarnos de esto”, “Ahora esas laminitas hay que multiplicarle 3” y “siempre van a salir y no van a variar” enfatizan la consistencia de sus observaciones y fortalecen la construcción de una regla general que aplica a todos los términos de la secuencia. Según Radford (2003), estos deícticos temporales permiten describir acciones potenciales e imaginarias, ayudando a Samuel a reiterar y reafirmar su hipótesis en un marco temporal que facilita la comprensión de la recurrencia.

Con respecto al proceso de generalización de la secuencia fue mediado por acciones corpóreas (Vergel y Rojas, 2018), al momento de coordinar los gestos indexicales ver Figura 15 y Figura 17, la actividad perceptual, el lenguaje mediante palabras y el ritmo tal como indica Radford (2013) dicha coordinación se transforma en un nodo semiótico. Esto significa que diferentes sistemas de signos se integran y se manifiestan para que juntos contribuyan a la toma de conciencia sobre cómo abordar la tarea desde una perspectiva algebraica. De acuerdo con Radford y Sabena (2015), este proceso se realiza de manera sincrónica, permitiendo que sus acciones adquieran significado y puedan identificar una de las posibles relaciones y estructuras matemáticas entre las cantidades (número de pasos y número de rombos), las cuales puedan ser deducidas y generalizadas.

Cuando Samuel menciona en (L35) “entonces sería 3 que es el número de rombos que hay en cada lámina, n que viene siendo la lámina cualquiera”, introduce el término "n", inicialmente de manera intuitiva, asociándolo a cualquier lámina de la secuencia. Este uso inicial revela un intento de operar con un elemento indeterminado, aunque en un principio no esté totalmente definido. Sin embargo, a medida que el diálogo progresa, Samuel aclara esta notación cuando en (L37) explica: “Paso igual al número de lámina”. Con esta declaración, empieza a tratar "n" como una variable que representa el número del paso en la secuencia, permitiéndole realizar operaciones con ella al multiplicar por tres. Así, fórmula la expresión alfanumérica $P_n = 3n + 2$ donde "$\boldsymbol{n}$" denota el número del paso" y P_n representa el número de rombos de cada paso de la secuencia (ver Figura 17c).

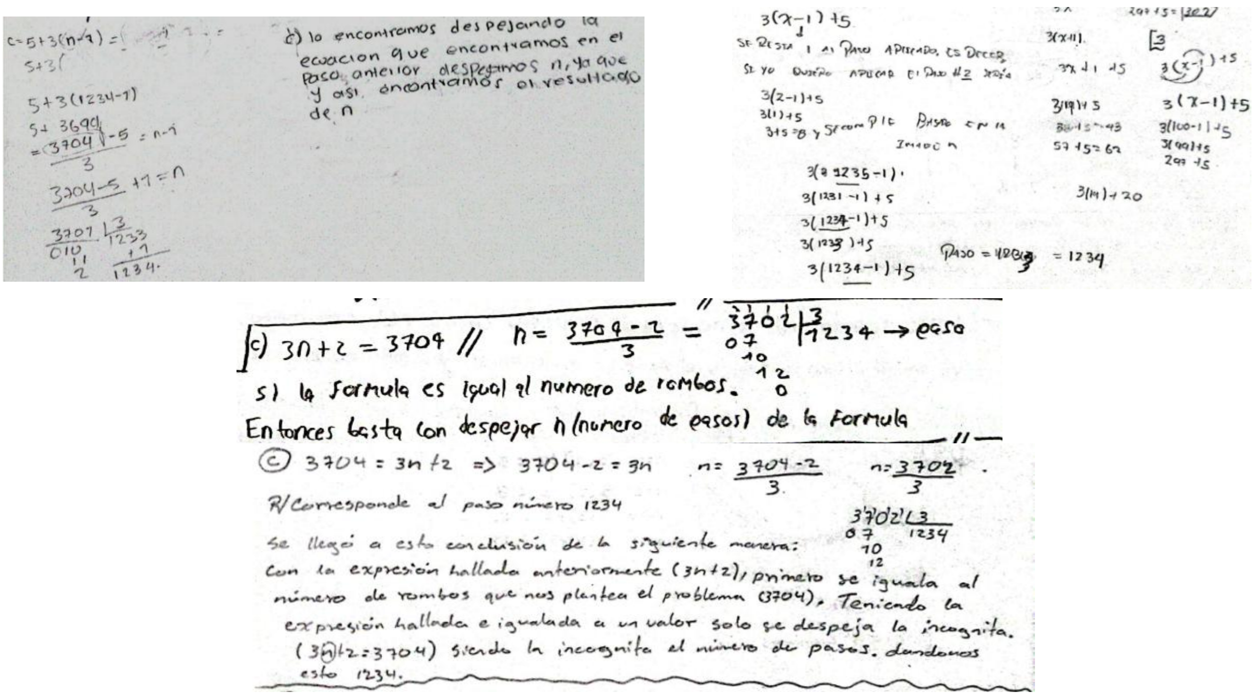
Este proceso evidencia un avance significativo en el proceso de objetivación, ya que Samuel reduce la cantidad de MSO que utiliza para expresar los términos de la secuencia. Esta simplificación refleja su capacidad para abstraer y seleccionar los elementos más relevantes, conduciendo a una "contracción de la expresión", que Radford (2008b) describe como un indicador de un "nivel más profundo de conciencia e inteligibilidad" (p. 90). Al consolidar su pensamiento de forma alfanumérica, Samuel demuestra no solo una mayor comprensión funcional de la relación, sino también la habilidad de generalizar su conocimiento, haciendo explícitas las conexiones entre los pasos de la secuencia y su representación algebraica.

De esta forma, Samuel demuestra su capacidad para comprender patrones geométricos de manera generalizada, arraigada en un contexto histórico y cultural que le permite extrapolar términos distantes de la secuencia (Radford, 2011). Su enfoque para mediar y materializar el conocimiento, junto con el uso de diversos medios semióticos de objetivación, facilita la construcción de un "significado multisemiótico que da sentido al proceso a través del cual aparece una forma algebraica de pensar la secuencia" (Radford, 2020a, p. 23). Este proceso de generalización conecta el número de cada paso con diferentes componentes de la secuencia, descomponiendo los elementos en partes clave que revelan relaciones algebraicas subyacentes. Ejemplos de ello son términos como "lámina" y la identificación de elementos invariantes, como se observa en la intervención (L39), donde Samuel expresa: "siempre van a salir y no van a variar

[…] Este y este son constantes”. Así, múltiples recursos semióticos convergen y se complementan para alcanzar el objetivo central: la generalización.

Teniendo en cuenta que los grupos formados dedicaron gran parte de la sesión para dar respuesta al ítem b por medio de una forma generalizada de describir la secuencia, para los siguientes ítems c, d, y e, los estudiantes hicieron uso de sus generalizaciones para dar respuesta.

Figura 18 *Producciones semióticas sobre el ítem c del Grupo 1 (Jana y María) izquierda, 3 (Juan y Camilo) derecha y 2 (Ricardo y Samuel) centro.*



A partir de la experiencia descrita en los ítems a y b, especialmente en el fragmento señalado en (L39), se observa que Samuel desarrolla un procedimiento donde afirma: "en el paso 1 sería n igual a 1, entonces 3 por 1 más 2, que son estos 2; 3 por 1 es 3, más 2 igual a 5. Para n igual a 2 sería 3 por 2, que es 6, más 2, dando 8. Para n igual a 3, sería 3 por 3, que es 9, más 2, obteniendo 11, y así sucesivamente". Esta observación le permite a Samuel abordar otros ítems, como se muestra en la Figura 17, formulando la expresión general $P_n = 3n + 2$. En este proceso, utiliza signos lingüísticos escritos, que en ocasiones funcionan como un "gesto fijo" (Vygotsky, 1997, p. 133). De este modo, aprovecha la característica identificada para aplicarla en la resolución de nuevos casos (ver Figura 18), evidenciando la presencia de iconicidad como proceso de objetivación, es decir, una forma de reconocer aspectos similares en experiencias anteriores que facilitan el desarrollo de nuevos procedimientos (Lasprilla, 2014).

Las soluciones propuestas por los estudiantes muestran cómo relacionan el número de cada paso con la cantidad de rombos, utilizando una relación funcional. Además, aplican un proceso inverso para determinar el número del paso correspondiente a una cantidad dada de rombos. Estos elementos son destacados en otras investigaciones como aspectos cruciales para el desarrollo del pensamiento algebraico (Radford, 2011; Vergel, 2014; Contreras, 2021). Este tipo de razonamiento refleja la capacidad de los estudiantes para reconocer patrones y formular generalizaciones, lo cual es fundamental para la transición del pensamiento aritmético al algebraico.

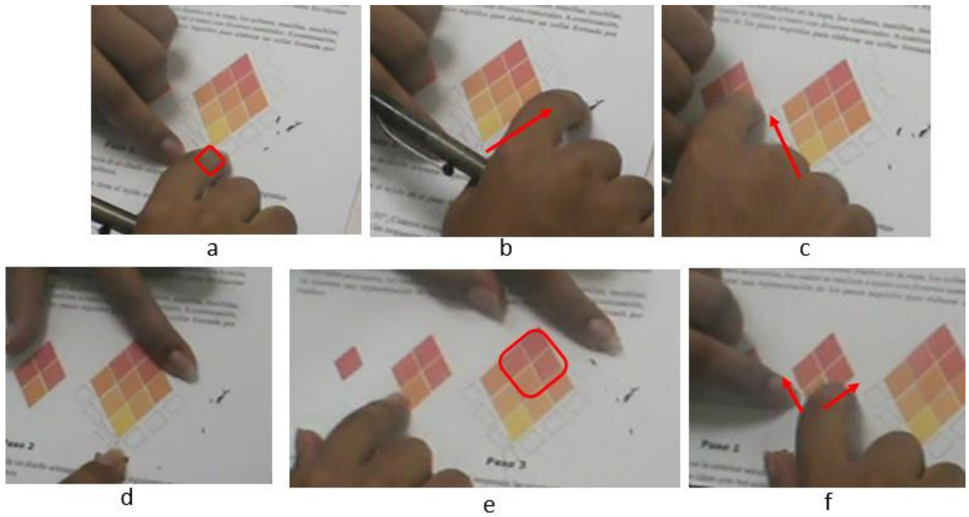
Al utilizar estrategias que implican la identificación de regularidades y la construcción de expresiones generales, los estudiantes no solo aplican conocimientos previos, sino que también desarrollan habilidades analíticas que les permiten resolver problemas de manera más eficiente y flexible. Como se ha señalado en estudios previos, la habilidad para conectar representaciones numéricas, gráficas y simbólicas contribuye significativamente al fortalecimiento del pensamiento algebraico (Kieran, 2006; Radford, 2013). Por lo tanto, estos procesos de generalización y análisis funcional evidencian un entendimiento más profundo de las relaciones matemáticas y favorecen el desarrollo de competencias clave para abordar conceptos algebraicos más avanzados en etapas posteriores de aprendizaje.

5.2 Análisis Tarea 2:

Para la aplicación de la segunda tarea se contó con la participación de cuatro de los estudiantes los cuales trabajaron en parejas de la siguiente forma Jana junto a Camilo y Juan junto a Samuel, los siguientes diálogos hacen parte de las respuestas de los estudiantes al ítem a.

L40. **Jana (grupo 1 ítem a):** Bueno aquí comienza con uno [*señalando y haciendo referencia al paso 1*], y al segundo paso se aumenta los 3, que serían 4, o sea los 4 rombos, y acá en el siguiente paso hay 9, entonces quiere decir que al 4 se le aumentaron 5 pero. Estaba pensando que va a bajar, este rombito de aquí [*señalando el rombo inferior de la columna central ver Figura 19 a*], va a bajar otro hacia acá, y se van a aumentar 3 a los lados, 3 hacia los lados [*señalando los rombos que se agregan a derecha e izquierda de forma diagonal ver Figura 19b,c*], hacia acá no [*ocultado con su índice la parte superior del rombo ver Figura 19 d*] porque este sería como el rombito [*Utilizando el diminutivo para hacer referencia al elemento del paso anterior ver Figura 19e*] de, creo que, del **inicio**, entonces solamente se iría hacia abajo [*señalando en forma de V los rombos dibujados en lápiz que son agregados ver Figura 19b,c*]
L41. I: ¿Puedes subrayar el del inicio?
L42. Jana: Este, el que tengo ya aquí ya subrayado [Señala encerrándola *Ver Figura 19 e*], que serían los 4 que se forman ya en el segundo paso [*Señalando el paso 2 con su índice ver Figura 19 e*]
L43. I: Ah ok, y para el tercer paso, ¿qué se hace respecto al segundo?
L44: Jana: Se aumentan dos en los lados [*señalando con sus dedos índices ver Figura 19 f*] y uno en la parte de abajo
L45. I: Entonces tú dices que, para el siguiente, ¿cuál sería?
L46. Jana: Se aumentaría otro, como decir, en la parte de abajo [*Con su lápiz dibuja un rombo en la parte inferior de la columna central*], y 3 hacia los lados [señalando con sus índices en forma de “V” *Ver Figura 19f*]

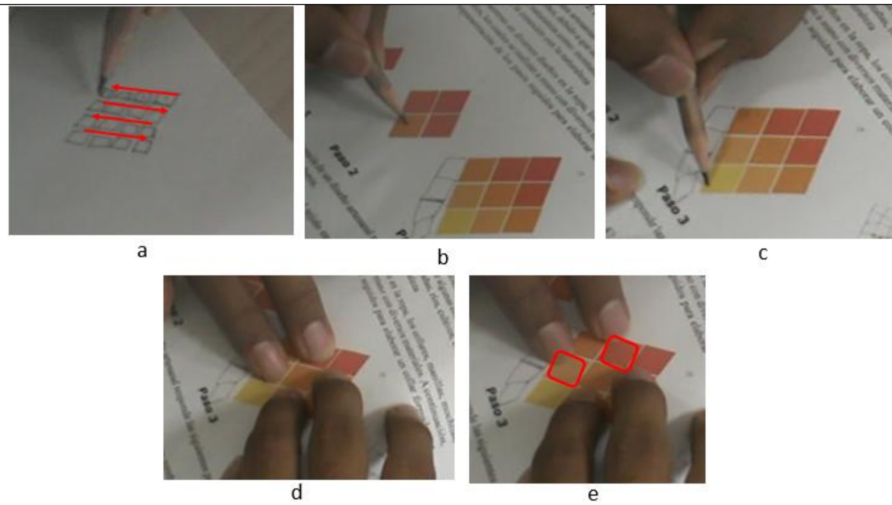
Figura 19 *Producciones semióticas de Jana en el ítem a de la tarea 2*



L47. **Samuel (grupo 2 ítem a):** La forma más bonita que quedo, ahora si puedo saber la que sigue 1, 2, 3, 4 (*pausa un momento y continua su conteo*), 5, 6, 7, 8 (*pausa un momento y continua su conteo*), 9, 10, 11, 12 (*pausa un momento y continua su conteo*), 13, 14, 15 y 16 [*Realizando el conteo de forma rítmica y en zigzag ver Figura 20a*]
L48. I: ¿Cómo supiste que seguía esa figura?

L49. Samuel: Pues... fácil, o sea si me doy cuenta, eh acá está el primer rombo, a este rombo se le añade uno abajo, que es este de aquí [*Señala con su lápiz el rombo inferior del paso 2 ver Figura 20 b]*, después a este se le añade otro, aquí abajito, 1, 2, 3 [*Señala con su lápiz el rombo inferior del paso 3 realizando un conteo rítmico ver Figura 20c]* al que sigue se le añade otro en la fila madre [*Haciendo referencia a la columna central donde el número del paso se relaciona con el número de rombos*], al paso 4 se le añade otro rombito aquí abajo, y ¿qué hace uno?, uno después complementa llenando aquí en los vacíos [*Ocultando con sus dedos los elementos vacíos que se deben rellenar ver Figura 20d*], por ejemplo, si solamente está esta [*Haciendo referencia a la columna central*], aquí hay un vacío [Q*uitando sus dedos uno a uno ver Figura 20e*], llena con uno y así vamos llenando todo hasta formar la figura como tal del rombo completo. Ahora, sabiendo cuál es la que sigue ya uno puede sacar ya.

Figura 20 *Producciones semióticas de Samuel en el ítem a de la tarea 2*



L50. Juan: Yo hice el paso 5 y me dio 25

L51. Samuel: ¿25?

L52. Juan: Si o sea… no sé si está bien.

L53. I: ¿Cómo llegaste a tu respuesta?

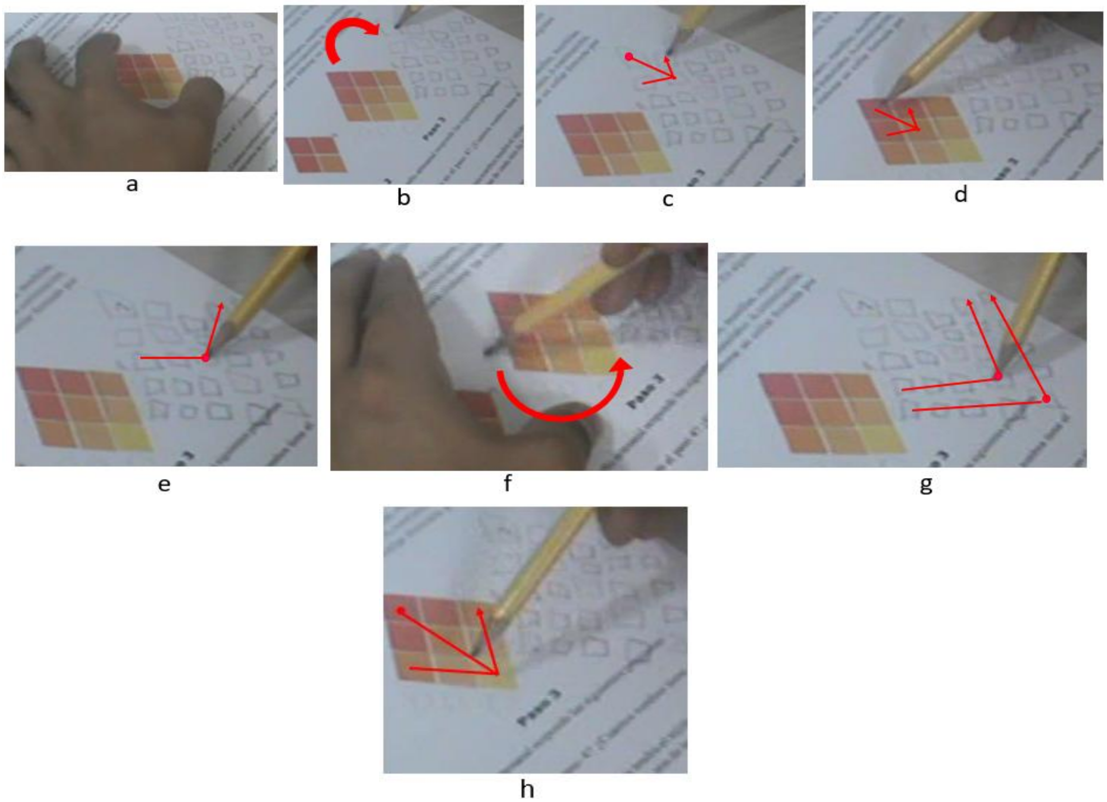
L54.Juan: Bueno, partiendo de acá de esta figura que son 9 [*Señala con sus dos dedos haciendo referencia al tamaño y numerosidad de el paso 3 ver* Figura 21*a*] , bueno básicamente o sea esta [*indica con su lápiz el rombo superior del paso 3 ver* Figura 21*b*] sería esta [*Traslada su lápiz al rombo superior de su dibujo ver* Figura 21*b*]es 1, 2, 3 y 4 [*Realiza un conteo sincronizado para los elementos del paso 3 y los elementos del dibujo ver* Figura 21*c*,*d*], 1, 2, 3 y 4, eh luego bajo, básicamente las que me van indicando como son, es esta hilera madre como lo dijo mi compañero, entonces yo lo que hice fue hacer los 5 rombos principales [*Señala con su lápiz de forma vertical la columna central de su dibujo*] y luego ir rellenando, entonces aquí llevo qué, 1, 2, 3, 4 [*señalando de la misma manera que en la*

Figura 21*c*], 5, 6, 7, 8, 9 [*Contando de forma diagonal del centro a izquierda y luego a la derecha* ver Figura 21*e*], que sería ya toda esta figura [*encerrando en forma de ovalo la figura del paso 3 ver* Figura 21*f*], eh, voy por acá, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 [*Contando de forma diagonal de izquierda a derecha ver* Figura 21*g subrayado superior]*, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 [*ver* Figura 21*g subrayado inferior*].

L55. I:¿Por qué las cuentas en ese orden, así formando esa figura?

L56. Juan: Ehh para digamos ir ubicándome en el orden de los rombos [*Señalando con su lápiz de arriba hacia abajo la columna central del paso 3 ver* Figura 21*h*] porque digamos siempre voy a contar de esta hilera [*Señalando la columna central de la figura dibujada ver* Figura 21*h*] y voy a subir acá [*Señalando con su lápiz la diagonal a la izquierda ver* Figura 21*h*] y subir acá [*Señala con su lápiz la diagonal derecha e izquierda ver* Figura 21*h*] los que le siguen a esta.

Figura 21 *Producciones semióticas de Juan en el ítem a de la tarea 2*



En cuanto a los recursos semióticos emergentes, es evidente que Jana utiliza una variedad de elementos para expresar y desarrollar su comprensión de la secuencia. Desde el habla, emergen deícticos lingüísticos espaciales como: "aquí", "acá", y "este"; temporales como: “ahora”, “luego”, de modo “así”; así como el recurso lingüístico "rombito", que emplea para describir su percepción de los elementos geométricos de la secuencia. También recurre al lenguaje matemático, usando símbolos y palabras clave que facilitan su razonamiento. Además, el ritmo al hablar, junto con la actividad perceptual (que se manifiesta tanto en la cuantificación de los elementos de la secuencia como en la estructura geométrica de la figura), complementan su discurso y resaltan la monotonía de sus acciones al contar y el orden que va más allá de las figuras particulares (Radford, 2010). Los gestos indexicales, como apuntamientos, señalamientos y deslizamientos con el lápiz (ver

Figura 20 y Figura 21), son utilizados estratégicamente para guiar la conversación y dar forma tangible a sus intenciones de formular una generalización.

De acuerdo con Radford (2018) los deícticos lingüísticos espaciales “aquí”, “acá” y “este” proporcionan a las variables un significado profundo relacionado con las pistas espaciales o contextuales de los términos de la secuencia; además de hacer parte de su repertorio lingüístico, complementándose en su diálogo se evidencia el uso del recurso lingüístico “rombito” que es un medio por el cual Jana expresa su pensamiento y produce significados que ayudan a evidenciar una fórmula encarnada, identificando una regularidad y relacionándola con la forma geométrica de los términos de la secuencia.

La actividad perceptual de Jana mediante las sentencias (L40): “aquí comienza con uno, y al segundo paso se aumenta los 3, que serían 4, o sea los 4 rombos, y acá en el siguiente paso hay 9, entonces quiere decir que al 4 se le aumentaron 5”, emerge como recurso semiótico (Vergel, 2014; Moreno 2018) que ayuda a notar una regularidad en el cambio de los rombos. Sin embargo, Jana transita entre notar una regularidad aditiva de los elementos de la secuencia y vincularla con la forma geométrica de la secuencia, mediante las frases (L44) “Se aumentan dos en los lados y uno en la parte de abajo”, a su vez el ritmo se hace explícito al replicar el mismo comportamiento para el otro paso como se evidencia en (L40) “va a bajar otro hacia acá, y se van a aumentar 3 a los lados”, esto le permite a Jana “resaltar la monotonía de sus acciones de contar, pausar y adicionar” (Vergel, 2014, p. 177).

De esta forma surge el ritmo como un medio semiótico que complementa el discurso de Jana y es fundamental para el encuentro con el conocimiento (Radford y Sabena, 2015), su uso supone conocer cuál será su próxima acción, creando la expectativa de los términos siguientes. Además de ayudarle a proponer una expresión verbal para identificar los términos de la secuencia en pasos cercanos, esta relación matemática como se ha evidenciado por Lasprilla (2014), Moreno (2018), Radford (2020a) la cual es dirigida a la numeración. Así mismo, Jana establece la relación de recurrencia, para el siguiente paso se debe agregar un rombo [+1] y el doble de rombos que hay en ese mismo paso que se quiere hallar [2n], la cual podemos escribir de la forma$[P_{n+1} = P_n + 2(n+1) + 1]$, dicha expresión sin hacer uso del simbolismo alfanumérico del algebra (Radford, 2020a).

La forma de expresión usada por Jana para encontrar elementos cercanos de la secuencia ha sido reportada por Radford y Vergel (2020) como una proto-forma de pensamiento algebraico la cual se basa en una proto-analiticidad aproximándose al cálculo de los términos generales puesto que no se evidencia un proceso de deducción claro, no hay materialización de lo indeterminado y por tanto no es materializada la generalización.

La forma de expresión utilizada por Jana para encontrar elementos cercanos en la secuencia ha sido descrita por Radford y Vergel (2020) como una proto-forma de pensamiento algebraico. Este tipo de pensamiento se caracteriza por una proto-analiticidad que, aunque se aproxima al cálculo de términos generales, no involucra un proceso de deducción formal ni la materialización de lo indeterminado. Aunque no se logra una generalización algebraica completa, su expresión sugiere que el estudiante se encuentra en el tránsito de una generalización factual a una de tipo contextual, vinculada al entorno y a los significados que atribuye Jana a los elementos de la secuencia.

En cuanto a los medios semióticos usados por Samuel y Juan se destacan deícticos lingüísticos de tipo espacial “aquí”, “acá”, “este”, “esta”, temporales “ahora”, “después” y de modo “así” y recursos lingüísticos como “fila madre”, “rombito”, acompañados de señalamientos o apuntamientos y deslizamientos con los dedos u otros objetos (ver Figura 20), además del conteo rítmico en Zigzag (ver Figura 20ª), la actividad perceptual, el ritmo y el dibujo.

Los deícticos temporales “ahora” y “después” permiten a los estudiantes describir acciones y procedimientos que pueden ser repetidos o imaginados de manera potencial (Radford, 2003). Por otro lado, los deícticos espaciales “aquí”, “acá”, “este” y “esta” ayudan a Samuel y Juan a centrar su atención en la posición de los rombos y la cantidad de los elementos de la secuencia. Esta percepción se refleja en las frases (L49): “al paso 4 se le añade otro rombito aquí abajo, y ¿qué hace uno?, uno después complementa llenando aquí en los vacíos […] y así vamos llenando todo hasta formar la figura como tal del rombo completo” y en (L54): “yo lo que hice fue hacer los 5 rombos principales y luego ir rellenando”. Así, su actividad perceptual se centra en la estructura geométrica de la figura y su comportamiento descendente respecto a la fila central, como mencionan Samuel y Juan y se evidencia en sus gestos señalando las figuras (ver Figura 20d, e y Figura 21c-h). Este proceso se puede describir como ($P_n = n + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k$) donde la sumatoria representa los elementos que “se rellenan” de la figura, tanto a izquierda como a derecha, como lo muestra Samuel en el paso 3 (ver Figura 20e).

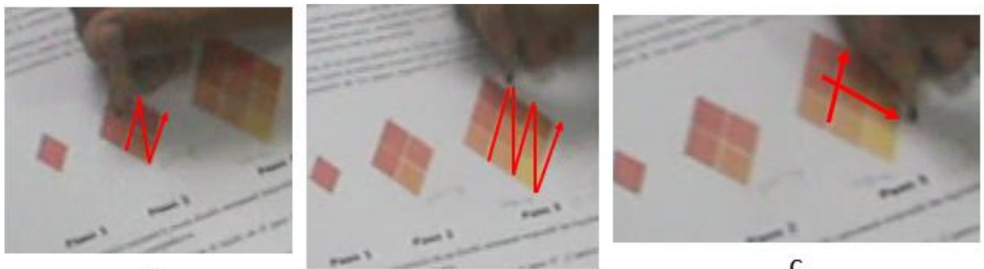
El ritmo acompañado del conteo en Zigzag y en forma de “V” surge de manera clara en los diálogos de los estudiantes. En su intervención (L47) Samuel realiza un conteo de forma segmentada “sigue 1, 2, 3, 4 (*pausa*), 5, 6, 7, 8 (*pausa*), 9, 10, 11, 12 (*pausa*), 13, 14, 15 y 16”. De forma similar, Juan en (L54) “1, 2, 3 y 4, eh luego bajo […] 5, 6, 7, 8, 9 [*Contando de forma diagonal de izquierda a derecha ver Figura 21e*], […] 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 [*Contando de forma diagonal del centro a la izquierda y luego a la derecha ver Figura 21g subrayado superior*], 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 [*ver Figura 21g subrayado inferior*].”

Este proceso evidencia cómo Juan y Samuel resaltan la repetición y la continuidad en sus acciones de contar, pausar y adicionar rombos en la secuencia (Vergel, 2014). Así, el ritmo se convierte en un recurso semiótico adicional que, junto con los deícticos lingüísticos, la actividad perceptiva, los gestos y la escritura, conforma lo que Radford (2013) denomina un nodo semiótico. Este nodo es un momento clave en la actividad semiótica, donde signos de diferentes sistemas semióticos se integran y coordinan para lograr una toma de conciencia sobre cómo abordar la tarea.

El desarrollo numérico de una estructura ofrece pistas perceptuales que pueden ser generalizadas, permitiendo que se establezcan relaciones descritas de manera verbal mediante el uso de palabras clave que aportan una visión más amplia. A medida que estas relaciones se hacen más evidentes, las variables y sus conexiones se tornan claras. En este proceso, el lenguaje natural juega un papel crucial, ya que su riqueza conceptual proporciona las herramientas semióticas necesarias para expresar estas ideas. Gradualmente, la atención se desplaza hacia las variables y su interrelación, convirtiéndose en el foco principal del discurso (Radford, 2018).

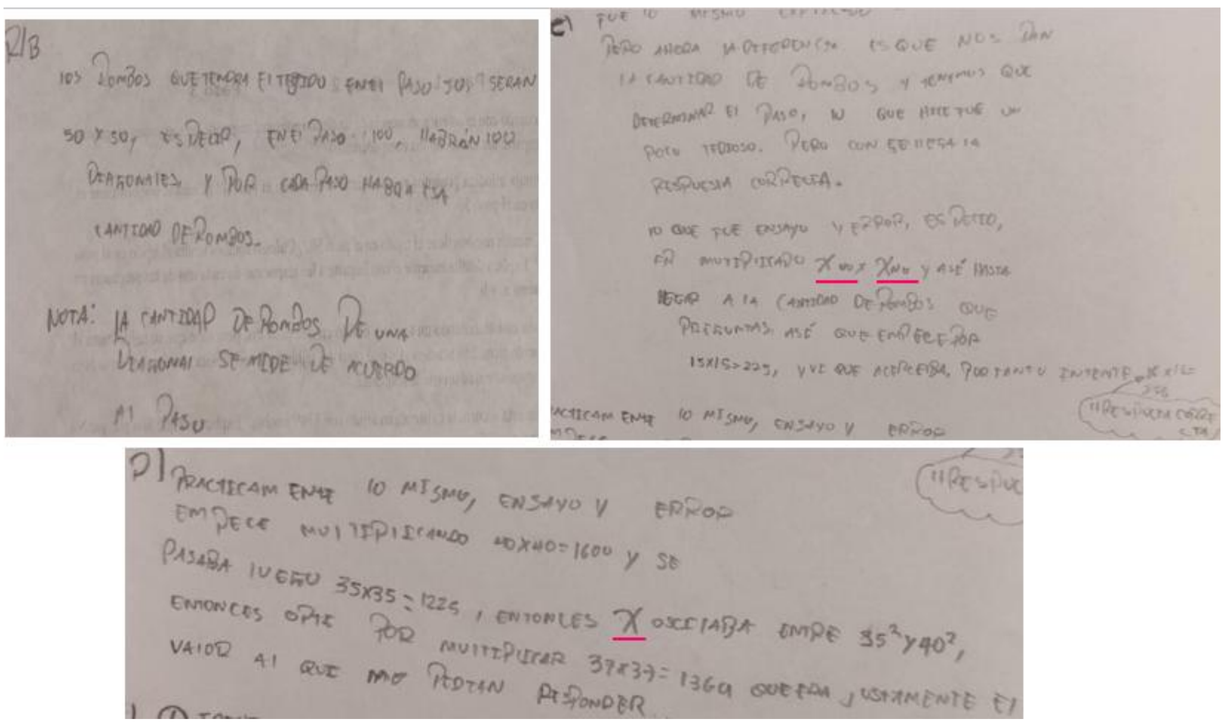
L57. **Camilo (grupo 1 ítem b):** En el paso 2 hay 2 diagonales y están completas [*Realizando un conteo en zigzag de izquierda a derecha y de arriba abajo ver* Figura 22 *a*], en el paso 3, hay 3 diagonales y están las 3 completas [*Realizando de la misma forma el conteo en zigzag ver* Figura 22*b*], supongo que en el paso 4 van a haber 4 diagonales [“Y c*ompletas” menciona Jana coordinando con el ritmo de su compañero*] y completas las 4 [*Realiza un trazo en el aire que representa el paso 4 ver* Figura 22*c*], luego, supuse que en el paso 4 habrían 16 porque aquí [*Señala y realiza el conteo en forma de diagonal con su lápiz ver* Figura 22*a*] hay 2, y 2, o sea 2 por 2, 4 [*Realizando el conteo de nuevo en forma de zigzag ver* Figura 22*a*], luego aquí [*Señala y realiza el conteo con su lápiz en forma de diagonal ver Figura 22b*] hay 1, 2, 3 por 3, 9 [*Realiza el conteo de la diagonal superior y la columna del medio ver* Figura 22*c*],en el paso 4, plantee el dibujito algo así, sabiendo que 4x4 es igual a 16 y así se van haciendo con las otras 25, 36, 49[…] si vamos por el paso 20000 se multiplica 20000 que son la cantidad de diagonales que van a haber en determinado paso, y estamos en el paso 20000 es decir 20000 por 20000.

Figura 22 *Producciones semióticas de Camilo en el ítem b de la tarea 2*



a b c

Figura 23 *Producciones de Camilo a los ítems a, b, c de la tarea 2.*



R/B

los rombos que tendría el tejido en el paso 50 serán 50 x 50, es decir, en el paso 100, habrán 100 diagonales y por cada paso habrá esa cantidad de rombos.

NOTA: la cantidad de rombos de una diagonal se mide de acuerdo al paso

C) fue lo mismo

pero ahora la diferencia es que nos dan la cantidad de rombos y tenemos que determinar el paso, lo que hice fue un poco tedioso. Pero con eso llegaba la respuesta correcta.

lo que fue ensayo y error, es decir, en multiplicando X por X y así hasta llegar a la cantidad de rombos que preguntas así que empecé por 15x15=225, y vi que acercaba, por tanto intenté

!!Respuesta correcta

D) Practicamente lo mismo, ensayo y error empecé multiplicando 40x40=1600 y se pasaba luego 35x35=1225, entonces X oscilaba entre 35^2 y 40^2, entonces opté por multiplicar 37x37=1369 que era justamente el valor al que me pedían responder

!!Respuesta

De estas producciones semióticas que expresa Camilo, se logra constatar que hace uso del habla y la escritura como recursos semióticos mediante sus argumentos en (L57 y ver Figura 23), de las cuales emerge el deíctico lingüístico espacial “aquí”, temporal “luego”, “siempre” y de modo “así”, también el recurso lingüístico “diagonal”, además, en el lenguaje escrito aparecen signos (palabras escritas, símbolos matemáticos), la actividad perceptual, el ritmo, aspectos de generalidad y actividad reflexiva (Asenova et al., 2020), complementado a ello el uso de gestos indexicales como señalar o apuntar con sus manos o el lápiz (ver Figura 22) usados para guiar su comunicación y materializar sus intenciones al momento de expresar aspectos de generalización en los elementos de la secuencia.

El deíctico lingüístico espacial "aquí" usado por Camilo le permite dirigir su atención a la numerosidad de los elementos pertenecientes a cada paso, este deíctico facilita la visualización de forma global. Además, el adverbio "luego" le permite describir y organizar pasos lógicos de forma ordenada y comprensible, así mismo, permite hacer predicciones entre diferentes términos como se evidencia en (L57) "[…] luego, supuse que en el paso 4 habrían 16". Al mismo tiempo el adverbio "así" destaca la monotonía de los elementos de la secuencia guiándolo a caracterizar la regularidad implícita como surge en (L57) "y así se van haciendo con las otras 25, 36, 49, […]" dicha comunalidad ayuda al estudiante a indicar el número de rombos en los pasos 5, 6 y 7 respectivamente. Es así como estos aspectos cruciales en la identificación de la generalización dan soporte a la transición de lo concreto a lo abstracto (Radford, 2013b).

La actividad perceptual es evidente desde el inicio de su explicación pues expresa en (L57) "En el paso 2 hay 2 diagonales y están completas, en el paso 3, hay 3 diagonales y están las 3 completas, supongo que en el paso 4 van a haber 4 diagonales y completas las 4", su manera de ver los elementos de la secuencia le ayuda a identificar una comunalidad en la secuencia la cual puede ser descrita de la forma $P_n = n * n$ aunque aún sin acudir al simbolismo alfanumérico propio del algebra.

En este sentido, Camilo se ha encontrado con algo que siempre estuvo en frente de ellos desde el inicio en las discusiones con Jana en la línea 40, sin embargo, no era relevante en su momento. Pero, que ahora se ha hecho evidente a sus ojos y que se empieza a constituir en un objeto de conciencia, es desde este momento en el que se empieza a constituir un proceso de objetivación, el cual es un proceso “social a lo largo del cual el individuo se hace progresivamente consciente de manera crítica de las formas histórico-culturales de pensar y hacer; durante este proceso se forma y *trans*-forma la consciencia” (Radford, 2023, p.102).

Dicho objeto de conciencia se comprende y expresa mediante el recurso lingüístico “diagonal” que aporta tanto un sentido geométrico como numérico. Así lo señala Camilo en (L57) “En el paso 2 hay 2 diagonales y están completas, en el paso 3, hay 3 diagonales y están las 3 completas, supongo que en el paso 4 van a haber 4 diagonales y completas las 4”. Este término le permite a Camilo dotar de significado a cada elemento de la secuencia y se constituye como un MSO fundamental para identificar la regularidad y expresar la generalidad de la secuencia. Además, el conteo rítmico, presente en el mismo fragmento, surge como un recurso semiótico crucial para el encuentro con el conocimiento (Radford y Sabena, 2015). Su uso sugiere que Camilo tiene claridad sobre el siguiente paso a seguir, mediando y materializando su comprensión de los elementos de la secuencia mediante la estructura multiplicativa, lo que le facilita la identificación de términos más lejanos.

Este proceso de toma de conciencia esta permeado por el uso de diversos recursos semióticos ya mencionados, en el momento en que Camilo hace uso de recursos lingüísticos, escritos, actividad perceptiva y gestos. En (L57) se logra revelar la coordinación de esta variedad de MSO además de ser complementados con los gestos y símbolos matemáticos. En sus diálogos Camilo coordina cada MSO utilizado en el momento adecuado para dar claridad a sus ideas, esta forma de vincular cada recurso semiótico ligústico, perceptivo, gestual y escrito se denomina desde la teoría como un nodo semiótico, en el cual distintos signos y artefactos se integran y emergen para obtener una toma de conciencia de la forma en que la tarea puede ser abordada desde el ámbito algébrico (Radford, 2013).

La forma en que Camilo y Jana abordan la secuencia refleja un encuentro intencional y consciente con lo indeterminado, un aspecto crucial en el desarrollo del pensamiento algebraico según la TO (Radford, 2013). Su trabajo no se limita a reconocer patrones visibles, sino que se enfrenta al desafío de determinar el número de pasos a partir de una cantidad desconocida de rombos. En la Figura 23c, Camilo menciona: “Fue lo mismo explicado, pero ahora la diferencia es que nos dan la cantidad de rombos y tenemos que determinar el paso [...]. Lo que fue ensayo y error, es decir es multiplicando $\boldsymbol{X_{No}} \times \boldsymbol{X_{No}}$ y así hasta llegar a la cantidad de rombos que preguntas”, mostrando un proceso de ensayo y error que refleja la toma de conciencia y la manipulación del elemento indeterminado. Este proceso evidencia cómo la conciencia se transforma y se enfoca en lo indeterminado, transitando de una comprensión concreta a una más abstracta, un indicio claro de pensamiento algebraico emergente con secuencias. En términos de la TO, este momento representa la progresiva formación de conceptos algebraicos, donde el uso de términos y procesos repetidos ayuda a consolidar el pensamiento analítico en torno a lo desconocido, lo que permite que Camilo y Jana operen de forma más sistemática y estructurada con la secuencia (Radford, 2018).

En el fragmento anteriormente citado, es evidente una reducción considerable de recursos semióticos que son usados para dar una expresión de generalidad ,como se puede ver en Figura 23c, donde menciona en una nota “La cantidad de rombos de una diagonal se mide de acuerdo al paso” y luego su forma reducida de expresión “$\boldsymbol{X_{No}} \times \boldsymbol{X_{No}}$” que depende del número de paso “$\boldsymbol{X_{No}}$”; esta forma reducida de expresión sugiere pensar en la idea de contracción semiótica como proceso de objetivación puesto que se presenta una evolución de nodos semióticos (Lasprilla, 2014).

En el análisis anterior, se destacó cómo estos estudiantes manejan la indeterminancia de manera analítica, acercándose al pensamiento algebraico. Este proceso es evidente también en el fragmento actual, donde se observa una evolución hacia la contracción semiótica. En Figura 25b, menciona en una nota: “La cantidad de rombos de una diagonal se mide de acuerdo al paso”, y luego emplea la expresión reducida “$\boldsymbol{X_{No}} \times \boldsymbol{X_{No}}$” para describir la secuencia, indicando que ésta depende directamente del número de paso, “$\boldsymbol{X_{No}}$”.

Esta simplificación en la expresión refleja un proceso de objetivación clave, donde la reducción de recursos semióticos demuestra un acercamiento hacia la abstracción. Como se mencionó previamente, la contracción semiótica implica una evolución de nodos semióticos, permitiendo a los estudiantes operar con conceptos abstractos de forma más eficiente (Radford, 2013; Lasprilla, 2014). Esta transición de expresiones más verbales y explícitas a formas reducidas y simbólicas indica que los estudiantes están internalizando los conceptos matemáticos y reorganizando su pensamiento para dar respuestas más precisas y eficientes, facilitando así la manipulación de lo indeterminado en el contexto de las secuencias.

La forma en que se reduce la cantidad de recursos semióticos refleja la capacidad de simplificar y condensar significados complejos, que le permiten a Camilo conectar los pasos específicos con una generalidad matemática que es crucial para la comprensión algebraica de las secuencias. Este fenómeno no solo simplifica la comunicación, sino que marca un punto crucial en el proceso de transición del pensamiento concreto al abstracto, tal como lo resaltan Radford (2018b) y otros estudios sobre la objetivación (Lasprilla, 2014; Contreras, 2023).

Además, Camilo demuestra un uso cada vez más estructurado de la comunalidad que identifica en los elementos de la secuencia. Al decir en (L57) "En el paso 2 hay 2 diagonales y están completas, en el paso 3, hay 3 diagonales y están las 3 completas, supongo que en el paso 4 van a haber 4 diagonales y completas las 4, luego, supuse que en el paso 4 habrían 16 […] y así se van haciendo con las otras 25, 36, 49[…] si vamos por el paso 20000 se multiplica 20000 que son la cantidad de diagonales que van a haber en determinado paso, y estamos en el paso 20000 es decir 20000 por 20000", muestra como una característica identificada se convierte en base para calcular términos lejanos de la secuencia. Este razonamiento se evidencia también en la Figura 23b donde realiza cálculos para responder al número de rombos de los pasos 50 y 100, expresados como "50×50 y 100×100". Siguiendo la perspectiva de Radford (2013), este proceso refleja una transición hacia un pensamiento algebraico que emerge de la identificación y aplicación de patrones para determinar términos generales de la secuencia.

La capacidad de Camilo para extender el patrón a términos más distantes, basada en la estructura similar observada previamente, evidencia un proceso de objetivación, donde los recursos semióticos (como el uso de "diagonales") permiten al estudiante conectar elementos concretos con conceptos más abstractos. Esta evolución semiótica se alinea con el concepto de iconicidad descrito por Lasprilla (2014), que se refiere a cómo los estudiantes identifican aspectos similares en experiencias previas para aplicarlos en nuevos contextos. De esta forma, Camilo no solo reconoce una regularidad visual en la secuencia, sino que también la utiliza para proyectar cálculos hacia términos no observados previamente, sugiriendo una comprensión de la estructura general inherente a la secuencia.

Adicionalmente, la interacción con Samuel y su contribución en la tarea 1 complementan este proceso. Samuel introduce términos como "lámina" en sus explicaciones, sugiriendo en (L39)

"Ahora esas laminitas hay que multiplicarle 3 que son la cantidad de rombos por la que está conformada cada laminita más 2". Esta explicación se apoya en representaciones gráficas (ver Figura 17c), donde la "lámina" se posiciona en forma de diagonal. La conexión entre el término de "diagonal" usado por Camilo y "lámina" compartido por Samuel refleja un proceso colaborativo de construcción de significados, que le permiten a Camilo estructurar su comprensión de la secuencia a partir de estas interacciones sociales y semióticas. Esto ejemplifica cómo la iconicidad se manifiesta mediante la transferencia de recursos semióticos en contextos colaborativos, contribuyendo así al proceso de objetivación descrito por Radford (2013).

En conclusión, la evolución de los recursos semióticos y la interacción entre conceptos previamente identificados y nuevos procedimientos muestran cómo los procesos de objetivación permiten a Camilo y Samuel avanzar de lo concreto a lo abstracto, logrando generalizar patrones que antes solo eran reconocidos en términos específicos. Este enfoque, apoyado por la interacción social y el uso compartido de recursos lingüísticos y visuales, demuestra la riqueza de la teoría de la objetivación en el aprendizaje de conceptos algebraicos.

6. Resultados de investigación y reflexiones

En este capítulo se presentan las conclusiones y resultados derivados del análisis multimodal de la actividad matemática, realizada por estudiantes pertenecientes a comunidades indígenas de la Universidad Industrial de Santander, enfocándose en las dos tareas de generalización aplicadas. Estas conclusiones responden a la pregunta de investigación: *¿Qué procesos de objetivación movilizan estudiantes de comunidades indígenas de la Universidad Industrial de Santander al resolver tareas de generalización?* Para dar estructura y claridad a los resultados, el capítulo se divide en tres secciones.

En primer lugar, se identifican y analizan los medios semióticos de objetivación (MSO), que emergen en la actividad desarrollada por los estudiantes, permitiéndoles comprender cómo expresan y materializan su pensamiento matemático. En segundo lugar, se describen los procesos de objetivación que emergen de la interacción de estos MSO, destacando cómo dichas interacciones evocan formas de pensamiento algebraico al trabajar con las secuencias, proporcionando una respuesta concreta al problema de investigación. Finalmente, se presentan reflexiones que abordan las limitaciones del estudio, así como las posibilidades que se abren para futuras investigaciones en esta línea, lo que permite plantear recomendaciones y sugerencias que podrían enriquecer el entendimiento de la actividad matemática en contextos educativos interculturales.

6.1 Medios semióticos emergentes

En este apartado se realiza una descripción de los MSO movilizados por los estudiantes de comunidades indígenas, al abordar tareas de generalización con secuencias figurales. Estos son descritos de manera general de acuerdo al proceso de generalización evidenciados en los estudiantes durante la investigación. Se identificó: el habla, gestos indexicales, la actividad perceptual, uso de signos escritos, el conteo, el ritmo y el uso de artefactos.

Los estudiantes utilizaron diversos términos y frases clave para dar un sentido propio a sus declaraciones, así como para identificar y describir las regularidades encontradas en los elementos de la secuencia. Expresiones como: "*siguiente vuelta*", "*avanza*", y "*hay un patrón*", fueron empleadas para articular cómo percibían e interpretaban los cambios en la secuencia, refractando sus observaciones en palabras. Además, términos como "*variar*" y "*asociarle*" ayudaron a destacar aspectos clave en la forma en que los estudiantes enfocaban su atención en los elementos cruciales de la secuencia, proporcionando pistas esenciales para formular generalizaciones.

Frases como: "*constante*", "*paso base*", "*fila madre*", "*hilera madre*", "*diagonales*" y "*láminas*", fueron utilizadas para proponer conjeturas sobre las características de los elementos de la secuencia, guiando a los estudiantes en el reconocimiento de las comunalidades y regularidades presentes en los patrones. Estos términos no solo reflejan la forma en que los estudiantes verbalizaban sus observaciones, sino que también eran esenciales para la construcción de su comprensión matemática.

El vínculo entre estos signos verbales y los gestos indexicales, como señalar, apuntar o deslizar los dedos sobre objetos, son conocidos por Vygotsky (1997) como "escritos en el aire", y promueven la materialización de las intenciones de los estudiantes, ayudando a estructurar sus hipótesis durante el proceso de generalización.

En cada diálogo de los estudiantes era común el uso de deícticos lingüísticos espaciales como: "*aquí*", "*acá*", "*este*", "*esta*". "*ahí*", "*estas*", "*estos*", los cuales permiten a los estudiantes señalar de forma precisa elementos específicos de la secuencia, reforzando la observación de regularidades y patrones en la actividad matemática. Su uso facilitó la creación de un lenguaje común y compartido que ayudó a externalizar su comprensión y contribuyó a la transición desde la observación concreta de las figuras hacia una generalización más abstracta y simbólica (Radford, 2018b).

Asimismo, el uso de deícticos lingüísticos temporales como "*luego*", "*ahora*" y "*siempre*" jugaron un rol en la organización del pensamiento de cada estudiante. El uso de estos términos resalta una continuidad y recurrencia de forma reiterada e imaginaria de los elementos de la secuencia (Radford, 2003).

Además, expresiones lingüísticas de modo como "*igual*" y "*así*", ayudaron a los estudiantes a explicar la forma en que visualizaban y reproducían patrones en la secuencia. Su manejo proporciona claridad sobre cómo aplicar un procedimiento específico de forma reiterada, permitiéndoles establecer una regla general para describir cualquier término de la secuencia. De igual forma, estos deícticos evidenciaron un tránsito entre observaciones intuitivas a la formalización de sus ideas, estableciendo conexiones entre la forma de realizar operaciones repetitivas y la estructura general del patrón.

Con respecto al uso del conteo rítmico que tuvieron los estudiantes, en el cual repetían patrones de números en intervalos, se facilitó la identificación de regularidades y ayudaron a percibir un patrón en el crecimiento de los términos. Este ritmo permitió que las regularidades se internalizaran, contribuyendo a la transición de observaciones concretas a expresiones más abstractas. Por otro lado, los conteos en zigzag reflejaron cómo los estudiantes exploraban las relaciones entre términos no consecutivos basados en la estructura espacial, destacando una comprensión más dinámica y global de la secuencia, lo cual permitió conectar elementos distantes y anticipar reglas de crecimiento más complejas.

Igualmente, la subitización o la habilidad de reconocer rápidamente pequeñas cantidades sin contar individualmente, se manifestó cuando los estudiantes identificaron patrones visuales repetitivos en la secuencia. Por ejemplo, Samuel utilizó la expresión “lámina” para referirse a un elemento recurrente en la estructura, mientras que Camilo mencionó las “diagonales” al observar la disposición de los términos. Estas expresiones reflejan cómo los estudiantes pudieron conceptualizar la organización de la secuencia de manera más rápida e intuitiva, permitiéndoles captar la regularidad y formular una generalización sin necesidad de procesos de conteo explícitos.

En resumen, los MSO identificados a través del habla, gestos indexicales, la actividad perceptual, uso de signos escritos, el conteo, el ritmo y el uso de artefactos, permitieron a los estudiantes expresar y compartir su modo de ver la secuencia, y guiaron la evolución de sus ideas hacia una forma más abstracta y generalizada. Este proceso refleja cómo los estudiantes lograron objetivar conceptos matemáticos al emplear un lenguaje que conecta lo concreto y visual con lo simbólico y abstracto, apoyando la transición hacia una generalización algebraica de las secuencias.

6.2 Procesos de objetivación de la actividad con tareas de generalización

En relación con los procesos de objetivación emergentes de las actividades, se identificaron nodos semióticos, contracción semiótica e iconicidad, tal como lo proponen Radford (2013, 2018b), Radford y Sabena (2015), y Lasprilla (2014) entre otros. Estos conceptos permiten comprender cómo los estudiantes, al involucrarse en la generalización de secuencias, logran atribuir significados históricos y culturales a los objetos matemáticos. Mediante el uso de múltiples signos y representaciones, los estudiantes pueden hacer visible su pensamiento, objetivar el objeto de estudio y construir significados compartidos que reflejan un proceso de comprensión profundo y contextualizado de las secuencias.

El uso del lenguaje y la mediación cultural se hizo evidente en ambas tareas, cuando el grupo de estudiantes describió la secuencia de manera general utilizando palabras clave como "lámina" o “diagonal”. Estos términos fueron cruciales en sus procesos de generalización, reflejando la mediación cultural que los estudiantes integraron en su análisis. Este proceso ilustra la transición del pensamiento concreto, basado en ideas intuitivas y observaciones directas, hacia una formulación matemática más estructurada. A medida que los estudiantes avanzaron, apoyaron sus ideas con símbolos y números específicos, otorgándoles un significado contextual y personal, lo que enriqueció su trabajo con la secuencia. De esta forma se evidencia una transición por los pensamientos factual y contextual hasta situarse en el pensamiento simbólico en el cual el sentido de la indeterminancia es evidente en su trabajo con los elementos de la secuencia.

Respecto a los nodos semióticos como elementos que integran la amplia gama de MSO mediante su acción lingüística, gestual, artefactual y escrita identificada en L35, L37 y L39 complementado con la Figura 17, son movilizados por Samuel como una orquesta que refracta su pensamiento y ayudan a realizar una toma de conciencia de cómo abordar la tarea desde el ámbito algebraico. Igualmente, Camilo al expresar en sus sentencias en L57, las formas escritas de expresión, sus gestos y actividad perceptiva en Figura 22 y Figura 23 se coordinan y reorganizan sus recursos semióticos ayudándolos a dirigir la atención a aspectos que para ellos son más significativos (Radford, 2018b). Constatando en ambos casos formas de pensamiento algebraico contextual al reducir los gestos y señalamientos por las palabras clave “diagonal” y “lámina” que guiaron sus diálogos a generalizaciones de tipo contextual.

En su intento de generalizar los elementos de la secuencia los estudiantes toman conciencia de las características importantes, centrando su atención a los aspectos más significativos realizando una reducción de sus signos y recursos (Radford, 2018b) sin dejar a un lado su objetivo de generalizar. De esta manera, emerge el proceso de objetivación denominado contracción semiótica en donde hay una evolución de los nodos semióticos y se trasforman sus acciones histórico-culturales para llegar a objetivar; por ejemplo, en los casos de Samuel y Camilo sus expresiones iniciales en palabras acompañadas de gestos son condensados a símbolos alfanuméricos del algebra al expresar de la forma "$\boldsymbol{P_n = 3n + 2}$" y "$\boldsymbol{P_{N_0} = X_{N_0}} \times \boldsymbol{X_{N_0}}$". Al guiar sus diálogos de forma simbólica "hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso" (Vergel y Rojas, 2018), es por ello que como resultado de la contracción semiótica hay una evolución en su pensamiento a la generalización de tipo simbólica, gracias a su notación es evidente el sentido explícito de la indeterminancia en la secuencia pasando de lo concreto a lo abstracto en sus diálogos.

Finalmente, el proceso de objetivación a través de la iconicidad se manifiesta como una manera de reconocer y aplicar aspectos similares observados en experiencias previas para abordar nuevos procedimientos (Lasprilla, 2014). Esto se hace notorio en la experiencia de Samuel, quien, tras resolver los ítems a. y b. de la primera tarea, emplea el saber adquirido para enfrentarse a otros ítems de la misma tarea, como se observa en sus intervenciones en L7, L35 y L39, así como en los signos escritos y gestuales presentes en las Figura 13, Figura 17 y Figura 18.

De manera similar, Camilo muestra indicios de iconicidad al generalizar la secuencia en la segunda tarea, utilizando la disposición espacial de los elementos y enfatizando las "diagonales", un recurso que previamente su compañero había identificado como "lámina" en la primera tarea. Este enfoque potenció la forma en que Camilo expresó su generalización, demostrando cómo la repetición de patrones visuales facilita la transición hacia la abstracción algebraica. Este proceso subraya la importancia de la labor conjunta entre estudiantes y docente, ya que permite la construcción cooperativa de saberes histórico-culturales. Además, pone de relieve los valores de la ética comunitaria que emergen cuando los estudiantes intentan asegurarse de que sus compañeros comprendan las ideas que están proponiendo.

En conclusión, las tareas diseñadas para esta investigación demostraron ser efectivas en la facilitación de procesos de objetivación relacionados con la generalización de secuencias. A través de actividades contextualizadas que conectaron con las creencias y experiencias culturales de los estudiantes. Este enfoque permitió que los estudiantes desplegaran una amplia gama de MSO, integrándolos y completándolos para expresar y dar sentido a las regularidades identificadas en las secuencias. Las tareas, al estar profundamente vinculadas con su realidad cotidiana y cultural, propiciaron la construcción de saberes algebraicos y guiaron un encuentro significativo con el saber de la generalización, conectando sus vivencias propias con conceptos abstractos. Esto destaca la importancia de considerar el contexto y la cultura en el diseño de actividades educativas, especialmente en entornos de aprendizaje diversos.

6.3 Algunas reflexiones

Esta investigación pone de manifiesto la importancia y el valor de trabajar con comunidades indígenas, destacando cómo la adaptación de actividades matemáticas a contextos culturales específicos puede enriquecer significativamente los procesos de enseñanza y aprendizaje. Permitiendo la creación de tareas que promueven procesos de objetivación en la generalización de secuencias, y que además, propician una conexión más profunda entre los estudiantes, docentes y el contenido matemático. Esta conexión, al estar alineada con las vivencias y perspectivas culturales de los estudiantes, favoreció una participación más activa y un compromiso continuo con las actividades propuestas.

La labor conjunta y la relación directa con los estudiantes también resultaron cruciales para fomentar un ambiente de aprendizaje colaborativo. Al sentirse comprendidos y respetados en sus contextos culturales, los estudiantes participaron de forma más genuina y mostraron un mayor interés en el desarrollo de las tareas, lo que a su vez enriqueció los procesos de objetivación, ya que lograron expresar sus formas de pensar y comprender mediante una variedad de medios semióticos de objetivación que incluían elementos de su vida diaria y entorno cultural.

En relación con las tareas formuladas es pertinente en la primera tarea realizar una reducción de las preguntas f .y g. dado que el tiempo de trabajo en las sesiones fue una limitante para la mayoría de estudiantes.

Por último, considerando que la Universidad Industrial de Santander ofrece cada semestre un curso de refuerzo en matemáticas para estudiantes que ingresan a través de admisión especial, según lo reportado en la investigación de González (2022), sería pertinente explorar en estos cursos las siguientes cuestiones: ¿Qué procesos de objetivación y subjetivación emergen al abordar tareas de generalización? y ¿Cómo dichos procesos de objetivación contribuyen a una comprensión más profunda del cambio y la variación en contextos cercanos a los estudiantes? Investigar estos aspectos podría proporcionar información valiosa sobre las formas en que los estudiantes logran internalizar conceptos fundamentales a través de prácticas de enseñanza contextualizadas y culturalmente relevantes.

Referencias

Consejo Académico de la Universidad Industrial de Santander (2017). *Acuerdo 282, por el cual se dictan disposiciones sobre el ingreso a la universidad de aspirantes por la modalidad de Admisiones Especiales*. https://uis.edu.co/wp-content/uploads/2022/09/normatividad-ad.esp_.pdf

Asamblea Nacional Constituyente. (1991). *Constitución Política de Colombia* https://www.funcionpublica.gov.co/eva/gestornormativo/norma.php?i=4125

Asenova, M., D´Amore, B., Fandiño, M. I., Iori, M., y Santi, G. (2020). Análisis de algunos aspectos de la teoría de la objetivación. *RECME- Revista Colombiana de Matemática Educativa, Número especial de la Teoría de la Objetivación*, *5* (2), 33-50.

Artigué, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, (1), 97-140.

Ávila, A. (2014). La etnomatemática en la educación indígena: así se concibe, así se pone en práctica. *Revista Latinoamericana De Etnomatemática Perspectivas Socioculturales De La Educación Matemática*, *7* (1), 19 - 49. https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/104

Ayala-Altamirano, C., & Molina, M. (2021). El proceso de generalización y la generalización en acto. Un estudio de casos. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *15*(3), 211-241. https://doi.org/10.30827/pna.v15i3.18109

Barnes, A. L. (2000). Learning preferences of some Aboriginal and Torres Strait Islander students in the Veterinary Program. *The Australian Journal of Indigenous Education*, *28*(1), 8-16.

Bautista, J., Bustamante, M. y Amaya, T. (2021). Desarrollo de razonamiento algebraico elemental a través de patrones y secuencias numéricas y geométricas. *Educación Matemática*, *33*(1), 125-152. https://doi.org/10.24 844/em3301.05

Butto, C., Delgado, J. (2012). *Rutas hacia el álgebra. Actividades en Excel y Logo.* UPN, CONACYT, México, Horizontes Educativos.

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2007). *A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning*. *PNA*, *1*(2), 67–78.

Contreras Griego, A. A. (2023). Características del cambio y la variación asociadas al uso de recursos semióticos en la generalización de patrones figurales: una mirada desde la teoría de la objetivación. *Noria Investigación Educativa*, (*Especial*), 34–47. https://geox.udistrital.edu.co/index.php/NoriaIE/article/view/caracteristicas-del-cambio

Corbetta, S., Bonetti, C., Bustamante, F., Vergara Parra, A., & Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL). (2018). *Educación intercultural bilingüe y enfoque de interculturalidad en los sistemas educativos latinoamericanos: Avances y desafíos*. In Publicaciones De La CEPAL. Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL). https://repositorio.cepal.org/bitstream/handle/11362/44269/1/S1800949_es.pdf

Davis, R. B. (1995). Why are they changing school algebra and who's doing it? *Journal of Mathematical Behavior*, *1(14), 1-3*.

De la Fuente Pérez, J. A. (2016*). Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas. El rol del conocimiento del profesor* [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona] *Barcelona, España*. https://ddd.uab.cat/record/173975

Dorier, J. L. (Ed.). (2000). *On the teaching of linear algebra (Vol. 23)*. Springer Science & Business Media.

Echeverría, C. (2022). *Enseñanza del cálculo a personas con características diferenciadas: Reflexiones de una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación* [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander] Bucaramanga, Colombia. https://noesis.uis.edu.co/handle/20.500.14071/9857

English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The mathematics teacher*, *91*(2), 166-170.

Fernández, C. e Ivars, P. (2016). Pensamiento relacional en primaria: el papel del maestro. Uno *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *73*, 14-22.

González, A. (2022). *Curso de refuerzo en matemáticas para estudiantes de admisión especial universitaria: habilidades para la resolución de problemas* [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander] Repositorio de la Universidad Industrial de Santander. https://noesis.uis.edu.co/handle/20.500.14071/11813

Gómez, H. I. R. (2012). *Las formas de tejer la vida ¿cómo vivir una experiencia Inga a través del diseño, en el Museo de Trajes Regionales?* [Tesis de pregrado, Universidad Javeriana]

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo.[Conferencia] *In XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers*, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico).

Kaput, J. (2017). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–18). Routledge.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The mathematics educator*, *8*(1), 139-151.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra: A broadening of sources of meaning. *In Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 11-49). Brill.

Kieran, C. (2018). The early learning of algebra: A structural perspective. *In Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 33-56). Routledge.

Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM–Mathematics Education, 54(6)*, 1131-1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer Nature.

Kop, P., Janssen, F., Drijvers, P., & van Driel, J. (2019). Graphing formulas to give meaning to algebraic formulas. [Conferencia] In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (No. 9). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Larraín, A. (2012). *Artesanía Indígena en el Caribe colombiano: el sombrero vueltiao zenú* [Tesis de Doctorado, Universidade Federal de Santa Catarina] Brasil.

Lasprilla, A. (2014). *Generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de 9 y 10 años*. [Tesis de maestría. Universidad Distrital Francisco José de Caldas] Bogotá, Colombia. Repositorio UD.

Latorre, A., Del Rincón, D., y Arnal, J. (2021). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Ediciones experiencia.

López, W., Escribano, E. (2016). Los problemas de comprensión del álgebra en estudiantes universitarios. *Ciencia e interculturalidad*, *19*(2), 54-64.de Navarra.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. & Gower, N. (1985). *Routes to Roots of Algebra*. Gran Bretaña: The Open University Press.

Moreno, G. (2018). *La dimensión gestual en la generalización de patrones en estudiantes de cuarto grado de educación primaria*. [Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas] Bogotá, Colombia. Repositorio UD.

Muñoz Burbano, F. A. (2020). Las manillas como tejido del pensamiento del pueblo Inga. *Revista Historia De La Educación Colombiana*, *24*(24), 155–180. https://doi.org/10.22267/rhec.202424.77

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Colombia-Bogotá http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf

MEN (2013). Acuerdo por lo superior 2034, *Propuesta de política pública para la excelencia de la Educación Superior en Colombia en el escenario de la paz.* http://www.dialogoeducacionsuperior.edu.co/1750/articles-319917_recurso_1.pdf

MEN (2016) *Derechos Básicos de Aprendizaje V2*. Colombia-Bogotá https://wccopre.s3.amazonaws.com/Derechos_Basicos_de_Aprendizaje_Matematicas_1.pdf

MEN (2018) *Índice de Inclusión para superior (INES).* Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-357277_recurso_1.pdf

Meléndez Grijalva, P., Carrera Hernández , C., Madrigal Luna, J., & Lara García, Y. I. (2023). La inclusión de estudiantes indígenas y sus resultados escolares: percepción docente. *Revista Colombiana De Educación*, *(89)*, 105–125. https://doi.org/10.17227/rce.num89-14124

Miranda, I., Radford, L. y Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, *19* (3), 5-30. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40511587002

Naciones Unidas. (1948). *Declaración Universal de Derechos Humanos.* https://www.un.org/en/universal-declaration-human-rights/

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática [Traducción de Manuel Fernández Reyes]*. Sevilla: Sociedad Andaluza para la Educación Matemática "THALES".

Pineda, S. (2018). *Formación inicial de profesores de matemáticas alrededor de la atención a la diversidad.* [Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander] Santander, Colombia. https://noesis.uis.edu.co/home

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective. *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching*, 39-53.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Studens´ Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 191–213.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 9(Extraordinario 1),* 103-129.

Radford, L. (2008a). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture*, 215-234.

Radford, L. (2008b). Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education.*

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA 4*(2), 37–62.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En Ubuz, B. (Ed.). [Conferencia]. *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 93. 17-24.

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. [Conferencia]. *icme-12 Regular Lecture. Seoul, South Korea.* 209-227

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro (p. 3-12).* Granada, España: Comares

Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, *8*(18). 547-567

Radford, L. (2017). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. [Conferencia] *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*, 97-114.

Radford, L. (2018a). Saber, aprendizaje y subjetivación en la Teoría de la Objetivación.[Conferencia] *Anais do 5o Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática: 5º SIPEMAT. Belém*, 1-22.

Radford, L. (2018b). *The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school.* In C. Kieran (Ed.), Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12- year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice *(p. 3-25)*. New York: Springer.

Radford, L. (2020a). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza- aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación. *RECME - Revista Colombiana de Matemática Educativa, Número especial de la Teoría de la Objetivación*. *5*(2), 15-31.

Radford, L. (2020b). *Un recorrido a través de la teoría de la objetivación.* En S. Takeco Gobara & L. Radford (Eds.), Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática (págs. 15-42). São Paulo, Brasil: Librería da Física.

Radford, L. (2023). *La teoría de la objetivación: una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, (Ed.) Bogotá: Uniandes http://funes.uniandes.edu.co/31573/1/Radford2023_La.pdf

Radford, L., Arzarello, F., Edwards, L. y Sabena, C. (2017). *La mente material multimodal: la encarnación en la educación matemática. En J. Cai (Ed.)*, Primer compendio para la investigación en educación matemática (pp. 700-721). Reston, VA: NCTM.

Radford, L., Edwards, L. y Arzarello, F. (2009a) Beyond words. *Educational studies in mathematics*, *70*(3), 91-95. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9172-y.

Radford, L., Miranda, I. y Demers, S. (2009b). *Processus d'abstraction en mathématiques. Ottawa:* Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Radford, L., Schubring, G., & Seeger, F. (2020). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática*, 15-42.

Radford, L., y Sabena, C. (2015). *The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach.* In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), Approaches to qualitative research in mathematics education (p. 157–182). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_7

Sierra, Z. (2005). Reseñas de investigaciones Estudiantes indígenas en la universidad: ¿Qué modelo educativo caracteriza su formación? *Revista Colombiana de Educación*, (48). 176-193 https://doi.org/10.17227/01203916.7722

South Australia Dapartment of Education, Training and Employment. (1999). *Aboriginal Perspectives on the early years of learning*. Adelaide, *SA: DETE*

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).* [Tesis de doctorado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio UD. http://hdl.handle.net/11349/2608

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria.* Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vergel, R. (2019). *Una posible zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico.* [Conferencia] En XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

Vergel, R., González, L., & Miranda, I. (2020). La relación de dependencia entre variables: Un análisis desde la teoría de la objetivación. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *5*(2), 67-81.

Vergel, R., Radford, L., y Rojas, P. J. (2022). Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico: una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *36*, 1174-1192.

Vergel, R., y Rojas, P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula.* Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vygotsky, L. S. (1997). *Collected works, Vol. 4 (R. Rieber, Ed.)*. New York: Plenum.

Apéndice A

Buenos días __________, inicialmente agradezco haber aceptado contestar esta entrevista. Te comparto que tenemos interés en apoyar el proceso de formación matemática de estudiantes de comunidades indígenas. Es por ello que hemos venido reflexionando sobre la educación superior inclusiva. Además, hemos visto que, aunque la universidad admite a estudiantes con diferentes características no necesariamente les está ofreciendo el apoyo que necesitan.

Por ello considero que es importante potenciar las habilidades que poseen los estudiantes de comunidades indígenas respecto a matemáticas. De esta forma, decidí adelantar una investigación que tiene por objetivo: Identificar y describir los procesos de objetivación emergentes de la actividad matemática con tareas algebraicas en estudiantes universitarios pertenecientes a comunidades indígenas.

Para adelantar esta investigación es necesario conocer tu formación académica y cultural de forma general y específicamente tu formación en matemáticas, para ello se realizarán las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es tu edad?
2. ¿A qué comunidad indígena perteneces?
3. ¿Dónde se encuentra ubicada tu comunidad?
4. ¿Qué aspectos relevantes consideras que tiene tu comunidad?
5. ¿Cómo es la educación en tu comunidad?
6. ¿En qué institución educativa te formaste?
   - ¿Qué principios tiene la institución?
7. ¿Cómo fue tu formación matemática en tu comunidad?
8. ¿Hubo algún cambio en la educación de tu comunidad debido a la pandemia del Covid-19? ¿Qué cambios se realizaron?
9. ¿Recuerdas algún docente que te haya marcado positiva o negativamente? ¿Por qué?
10. ¿Qué te motivo a seguir tus estudios?
11. ¿Consideras que la educación que tuviste fue pertinente de acuerdo con tu identidad cultural?
    - Respuesta Si ¿Qué aspectos consideras que fueron pertinentes?
    - Respuesta No ¿Por qué consideras que no fue pertinente?
12. ¿Crees que la educación que recibiste te formó buenas bases para las asignaturas que involucran matemáticas?
    - Respuesta Si ¿De qué forma te serán de utilidad esas bases?
    - Respuesta No ¿Por qué no? ¿En qué aspectos consideras que tienes dificultades?
13. ¿Cómo conociste la universidad?
14. ¿Sabes aproximadamente cuántos jóvenes de tu comunidad ingresan a programas de pregrado?
15. ¿Qué te motivó a estudiar en una Universidad?

16. ¿Cómo consideras que tu carrera aportaría a tu comunidad?
17. ¿Tienes apoyo familiar para continuar con tus estudios? ¿Qué tipo de apoyo tienes? (económico, social, afectivo, etc…)
18. ¿Qué condiciones te ha brindado la universidad para apoyarte en tus dificultades?
19. ¿Los docentes de la universidad han tenido una formación diferenciada teniendo en cuenta tu cultura?

Para terminar y teniendo en cuenta el tiempo que llevas en la universidad como estudiante:

20. ¿Qué es lo que más se te ha dificultado en tu carrera?
21. Respecto a conceptos matemáticos ¿Qué conceptos o temas se te han dificultado en tu formación?
22. ¿Consideras importante las matemáticas para tu vida? ¿En qué ámbitos te podría ser de utilidad?
    - ¿Cómo pueden las matemáticas contribuir a tu desarrollo cultural o al de tu comunidad?
23. ¿Cómo te visualizas luego de terminar tus estudios?

Eso es todo, muchas gracias por tu colaboración. ¿Tienes alguna pregunta o algún otro aporte que quieras realizar a esta entrevista?