UNA INTERPRETACIÓN UNIFICADA DE LOS COEFICIENTES BINOMIALES, LOS NÚMEROS DE STIRLING Y LOS COEFICIENTES GAUSSIANOS

JAIRO LOZADA RUIZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2006

UNA INTERPRETACIÓN UNIFICADA DE LOS COEFICIENTES BINOMIALES, LOS NÚMEROS DE STIRLING Y LOS COEFICIENTES GAUSSIANOS

JAIRO LOZADA RUIZ

Trabajo presentado para optar el título de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Director
EDILBERTO REYES GONZALEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2006

A Dios, mis padres, hermanos, esposa e hija.

Agradecimientos

Especialmente:

- **Dios**, por darme la fortaleza y la sabiduría para lograr todos mis propósitos.
- **Mis padres Luis y Hilda**, por brindarme su apoyo incondicional, comprensión, amor y porque sin ellos hoy este proyecto no sería una realidad.
- **Mis hermanos Luis, Juan, Jesús, Yaneth y Edgar**, por su apoyo moral, afectivo y ser quienes han compartido conmigo muy bellos momentos de mi vida.
- **Mi esposa Omaira e hija Yesenia**, quienes por su apoyo, compañía, comprensión y amor incondicional, me impulsaron para lograr este proyecto.
- Al profesor **EDILBERTO REYES**, quién además de su amistad, me brindó orientación y paciencia en el desarrollo del proyecto.
- Los **profesores**, por sus aportes en mi formación académica.
- Mis **compañeros de carrera, en especial a José Leonardo y Ligia**, por sus aportes y por que de una u otra manera me brindaron su amistad incondicional.

TITLE: A UNIFIED INTERPRETATION OF THE BINOMIAL COEFFICIENTS, THE STIRLING NUMBERS AND THE GAUSSIAN COEFFICIENTS *

AUTHOR: JAIRO LOZADA RUIZ**

KEY WORDS: Combinatorics, permutations, binomial coefficients, Stirling number, gaussian coefficients, pascal triangle, theorem the binomial, function generator, symmetry property and recurrence relations.

DESCRIPTION

The first two chapters contain detailed summaries of each one of these numbers standing out their diverse interpretations, this way as well as their more important properties which can be used in any combinatoria course and superior algebra.

In the chapter three carry out a revision of the similarities algebraic of these three types of numbers it stops later on to integrate them by means of an unified generalization, equally we demonstrate the recurrence relations of our generalization unified at the same time that we analyze the cases special in each one of them.

We conclude the chapter three giving some observations of the special cases of our generalization which take us to those numbers mentioned combinatorics previously (the binomial coefficients, the Stirling numbers and the gaussian coefficients).

---

*Monograph

** FACULTY OF SCIENCES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR EDILBERTO REYES GONZALEZ.

TITULO: UNA INTERPRETACIÓN UNIFICADA DE LOS COEFICIENTES BINOMIALES, LOS NÚMEROS DE STIRLING Y LOS COEFICIENTES GAUSSIANOS*

AUTOR: JAIRO LOZADA RUIZ**

PALABRAS CLAVES: Combinatoria, permutaciones, coeficientes binomiales, números de stirling, coeficientes gaussianos, triángulo de pascal, teorema del binomio, funciones generadoras, propiedad simétrica y relaciones de recurrencia.

DESCRIPCIÓN

En el presente trabajo se hace una revisión bibliográfica sobre una interpretación unificada de los coeficientes binomiales, los números de Stirling y los coeficientes gaussianos.

Los dos primeros capítulos contienen resúmenes detallados de cada uno de estos números, resaltando sus diversas interpretaciones, así como también sus propiedades más importantes los cuales pueden ser usados en cualquier curso de combinatoria y algebra superior.

En el capítulo tres realizamos una revisión de las similitudes algebraicas de estos tres tipos de números para posteriormente integrarlos mediante una generalización unificada, igualmente demostramos las relaciones de recurrencia de nuestra generalización unificada a la vez que analizamos los casos especiales en cada una de ellas.

Concluimos el capítulo tres dando algunas observaciones de los casos especiales de nuestra generalización los cuales nos llevan a los números combinatorios mencionados anteriormente (los coeficientes binomiales, los números de Stirling y los coeficientes gaussianos).

---

*Monografía

** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR EDILBERTO REYES GONZALEZ.

Índice general

Introducción

Los coeficientes binomiales, los números de Stirling y los coeficientes gaussianos son números combinatorios clásicos con diversas interpretaciones. Los coeficientes binomiales se pueden interpretar en términos de selecciones de subconjuntos no vacíos con o sin repetición. Los números de stirling de primera clase trabajan con ciclos específicos del ciclo de descomposición de permutaciones y los números de stirling de segunda clase calculan particiones de conjuntos. Los coeficientes gaussianos calculan subespacios de espacios vectoriales finitos y matrices en forma escalonada con filas reducidas.

En el siguiente trabajo se aprovechan las similitudes algebraicas de estas tres clases de números con el fin de integrarlas mediante una interpretación combinatoria unificada seleccionando objetos (bolas) apartir de conjuntos (cajas pesadas con o sin repetición) y generalizando las propiedades intrinsecas de ellos.

Por ejemplo, los coeficientes gaussianos son una extensión natural de los coeficientes binomiales, pero que los números de Stirling esten relacionados con los coeficientes gaussianos y binomiales no es del todo claro.

Tambien resumiremos varias interpretaciones clásicas de cada uno de ellos seguidas de la definición de la generalización de los coeficientes binomiales de la primera y segunda clase en términos de selecciones de objetos de cajas pesadas con o sin repetición de cajas; al variar el peso de las cajas (constante, lineal y exponencial), obtenemos los casos especiales de estos números combinatorios (coeficientes binomiales, números de Stirling y coeficientes gaussianos).

Capítulo 1

Coeficientes binomiales

1.1. Coeficientes binomiales de primera clase

Los coeficientes binomiales ordinarios $\binom{n}{k}$, los cuales son llamados, "coeficientes binomiales de primera clase" reciben este nombre por que son los coeficientes que aparecen en el desarrollo de la n-ésima potencia del binomio $(x+y)$. Estos se utilizan en muchas áreas de la matemática y tienen varias interpretaciones dependiendo del área de aplicación.

En este capítulo se presentará su definición y sus propiedades básicas.

1.1.1. Triángulo de Pascal

El llamado sistema de tabulación para calcular los coeficientes de binomios más comúnmente conocido como Triángulo de Pascal es uno de los modelos numéricos más famoso en la historia de la matemática; fácil de construir y maravilloso como fuente, ofrece una notable correspondencia entre su simple construcción, los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton y los conceptos básicos sobre principios de conteo y análisis combinatorio.

El triángulo de Pascal está formado por los coeficientes del desarrollo de $(x+y)^n$, conocidos como coeficientes binomiales. Efectuando algunas operaciones encontramos que el desarrollo para algunas potencias de $(x+y)$ es:

$$
\begin{gathered}
(x+y)^0 = 1 \\
(x+y)^1 = x+y \\
(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \\
(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Como se puede observar los exponentes de x y y van disminuyendo y aumentando en una unidad respectivamente en cada término, lo verdaderamente interesante es encontrar los respectivos coeficientes. Ordenando solamente los coeficientes tenemos que

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Figura 1.1: Triángulo de Pascal.

Si observamos este triángulo detenidamente, vemos que los números de los extremos siempre son $1's$ y cada uno de los otros resulta de sumar los dos números que se encuentran ubicados directamente encima. Si queremos encontrar los coeficientes de la potencia $(x+y)^7$ solo debemos seguir haciendo el triángulo hasta la fila correspondiente a $n = 7$.

Hay una manera sencilla de determinar los coeficientes del desarrollo de la n-ésima potencia de $(x+y)$: el primer término de $(x+y)^n$ es x^n, osea, el primer coeficiente es 1. El segundo término es $nx^{n-1}y$, osea, el segundo coeficiente es n. Para encontrar el coeficiente del tercer término multiplicamos el coeficiente del término anterior por el exponente de x, también del término anterior, y luego eso se divide por el exponente de y aumentado en 1, osea, el coeficiente del tercer término es$\frac{n(n-1)}{2}$. Este proceso se hace repetidamente hasta encontrar todos los coeficientes de $(x+y)^n$. Por la tanto, el desarrollo de $(x+y)^n$ es:

$$\begin{aligned}(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots 2\cdot 1}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)n}y^n.\end{aligned}$$

Este resultado se conoce como Teorema del Binomio, el cuál se va a utilizar más adelante.

El triángulo de Pascal tiene varias propiedades importantes. Algunas de esas propiedades se pueden determinar fácilmente al observar el triángulo, en cambio otras no se ven tan fácilmente. Una de las propiedades que se puede ver a simple vista es la simetría que se presenta con respecto al eje central del triángulo:

$$\begin{array}{ccccc|c|ccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & . & . & . & & & &
\end{array}$$

Figura 1.2: Propiedad de simetría del triángulo de Pascal.

1.1.2. Definición clásica y propiedades de los coeficientes binomiales

A continuación se presentará la definición más común de los coeficientes binomiales seguidos de algunas de sus propiedades más importantes:

Definición 1.1. *Sean* n, k *enteros no negativos, el coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$ *está definido por*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & n \geq k \\ 0 & n < k \end{cases}$$

donde $n!$ *es la función factorial y se define como* $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Utilizando la definición 1.1, podemos demostrar algunas propiedades de los coeficientes binomiales de primera clase de una manera sencilla, al igual que nos provee la posibilidad de utilizar el método de inducción en los casos donde sea necesario utilizarlo.

Primero veamos las dos propiedades principales de los coeficientes binomiales de primera clase, estas son la propiedad de simetría y la propiedad de la adición.

Propiedad 1.2. *(**Propiedad de simetría**).*
Sean n, k *enteros no negativos, entonces*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{n-k}. \end{aligned}$$

□

Propiedad 1.3. *(**Propiedad de la adición**).*
Sean n, k *enteros no negativos, entonces*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Demostración.

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \binom{n}{k}.$$

□

De la definición 1.1, se tiene que los números $\binom{n}{k}$, llamados coeficientes binomiales son efectivamente los coeficientes en el desarrollo de $(x+y)^n$, y por las dos Propiedades 1.2 y 1.3 se concluyen que estos generan el triángulo de pascal.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & . & . & . & & & &
\end{array}
$$

Figura 1.3: Triángulo de Pascal expresado con coeficientes binomiales.

Lo anterior nos conduce a expresar el teorema del binomio en términos de los coeficientes binomiales:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{r}x^{n-r}y^r + \cdots + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k. \quad (1.1)$$

La demostración de (1.1) se sigue mediante inducción matemática y se puede encontrar en cualquier texto de combinatoria o algebra lineal.

Como caso particular de (1.1) resulta la identidad en la cuál $y = 1$, con lo cuál obtenemos

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \tag{1.2}$$

fórmula que utilizaremos más adelante.

1.1.3. Principios de conteo y coeficientes binomiales

Hablaremos ahora de algunas herramientas básicas que permiten determinar el número de elementos de algunos conjuntos sin que sean necesario enumerar sus elementos.

Uno de los procedimientos más utilizados en la historia de la humanidad es el de contar. A raíz de esto surgieron y se desarrollaron los sistema de numeración los cuales contribuyeron al desarrollo de la aritmética, la geometría y en general de toda la matemática.

Cuando se habla de "contar" se habla de enumerar los elementos de un conjunto para determinar cuantos elementos tiene. Existen principios que permiten resolver este problema de una manera rápida sin necesidad de nombrar y enumerar los elementos del conjunto. Dos de estos principios son el de la Adición y el de la Multiplicación.

El principio de la Adición plantea:

> "Sean M y N dos conjuntos disyuntos, con a y b elementos respectivamente, entonces $M \bigcup N$ posee $a + b$ elementos".

Este principio de la adición también se puede definir en los siguientes términos: "Si un objeto M puede escogerse de a maneras y otro objeto N puede escogerse de b maneras, entonces el número de maneras de escoger el objeto M o el objeto N es $a + b$".

El principio de la multiplicación también es llamado Principio fundamental de enumeración y plantea:

> "Si un objeto M puede escogerse de a maneras y otro objeto N puede escogerse

de b maneras, entonces el número de maneras de escoger el objeto M y el objeto N es ab".

Estos principios dan origen a las permutaciones y combinaciones, los cuales son muy utilizadas en combinatoria. Las permutaciones se relacionan con el ordenamiento de objetos y las combinaciones con la escogencia de objetos.

Ejemplo 1.4. *Dados los objetos M, N, O. ¿De cuantas maneras se pueden ordenar estos?.*

Los tres elementos se pueden ordenar de 6 maneras distintas, así: $MNO, MON, NMO, NOM, OMN, ONM$.

Para el caso general de n objetos, hay n maneras de escoger un objeto para el primer lugar, $n-1$ maneras para el segundo lugar, $n-2$ maneras para el tercer lugar, y así sucesivamente hasta 1 para el último lugar. Por el principio de la multiplicación tenemos que el número de maneras de ordenar n objetos distintos es:

$$n(n-1)\cdots 1 = n!.$$

Cada ordenamiento de los n objetos se denomina una permutación simple de n objetos o simplemente una permutación.

Ejemplo 1.5. *Sea el conjuntos $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. ¿De cuantas maneras se pueden escoger 3 elementos del conjunto?.*

Se podría pensar que la respuesta fuera 5 maneras para escoger el primer objeto, 4 maneras para el segundo y 3 para el tercero, osea $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ maneras de escoger los tres objetos. Algunos ejemplos de esa escogencia serían $\{b_1, b_2, b_3\}\{b_1, b_3, b_2\}\{b_2, b_1, b_3\}$, etc ..., los cuales son todos iguales. Por lo tanto hay que quitar las elecciones que se repiten. Como en cada elección los elementos puede ser escritos en $3! = 6$ ordenes, cada escogencia fue contada 6 veces. Luego hay $\frac{60}{6} = 10$ maneras de escoger 3 objetos. Estas son:

$$\{b_1, b_2, b_3\}\{b_1, b_2, b_4\}\{b_1, b_2, b_5\}\{b_1, b_3, b_4\}\{b_1, b_3, b_5\}$$

$$\{b_1, b_4, b_5\}\{b_2, b_3, b_4\}\{b_2, b_3, b_5\}\{b_2, b_4, b_5\}\{b_3, b_4, b_5\}.$$

Para el caso general tenemos que el número de formas de escoger k objetos distintos de un conjunto de n objetos es:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \qquad 0 \leq k \leq n.$$

Si multiplicamos el numerador y el denominador por $(n-k)!$ obtenemos:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}, \qquad 0 \leq k \leq n. \tag{1.3}$$

Cada escogencia de los n objetos se denomina una combinación simple de n objetos o simplemente una combinación.

El número que resulta de la ecuación (1.3), se denomina un número combinatorio y coincide con la definición de los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ presentada en la sección anterior. Por lo tanto el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ representa el número de formas de escoger k objetos distintos de n objetos posibles. En términos de conjuntos tendríamos que $\binom{n}{k}$ es el número de subconjuntos de k elementos que se obtienen de un conjunto de n elementos. Entonces el número total de subconjuntos de un conjunto de n elementos es:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Esta es una de las propiedades importantes de los coeficientes binomiales.

1.2. Coeficientes binomiales de segunda clase

Definimos los coeficientes binomiales de segunda clase (combinaciones con repetición) denotados por $\left(\binom{n}{k}\right)$, como el número de subconjuntos de k-elementos de un conjunto S de n-elementos con la propiedad de que dichos subconjuntos se puede componer de elementos repetidos sin importar el orden.

Así, sea $S = \{1, 2\}$ queremos hallar el número de subconjuntos de tres elementos de S obtendremos que

$$\left(\binom{2}{3}\right) = 4,$$

dado que hay 4 combinaciones con repetición de tamaño 3 del conjunto $S = \{1, 2\}$, estos son 111, 112, 122, 222 (note que en los coeficientes binomiales de segunda clase k puede ser mayor o igual que n sin ningún problema). Los coeficientes binomiales de segunda clase, poseen una fórmula para calcularlos que los relaciona con los coeficientes binomiales de primera clase, de la siguiente manera

$$\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}, \tag{1.4}$$

la cuál se puede demostrar como sigue

Demostración.

a) Sea $x' = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k\}$ un subconjunto de k-elementos con repetición formado a partir del conjunto $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Creamos un nuevo conjunto a partir de x':
Sea $y_j = x_j + j - 1$ tal que $1 \leq j \leq k$, luego $1 \leq y_1 < y_2 < \ldots < y_k \leq n + k - 1$ (ya que $y_k = x_k + k - 1$ y $x_k + k - 1 \leq n + k - 1$) y el conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ es un subconjunto sin repetición de el conjunto $S = \{1, 2, 3, \ldots, n + k - 1\}$.

   El opuesto se sigue por un argumento similar.

b) Sea $x'' = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ un subconjunto del conjunto $S = \{1, 2, 3, \ldots, n + k - 1\}$ tal que para cada x_i se tiene que $1 \leq x_1 < x_2 < \ldots, x_k \leq n + k - 1$.
Sea $1 \leq j \leq k$, hagamos de $y_j = x_j - j + 1$ entonces $1 \leq y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_k \leq n$ (ya que $y_k = x_k - k + 1 \leq n$) y el conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ es un subconjunto de k-elementos con repetición del conjunto $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Entonces por *a*) y *b*) tenemos que (1.4) se cumple. □

Los coeficientes binomiales de segunda clase también satisfacen la propiedad simétrica.

$$\left(\binom{n-k+1}{k}\right) = \left(\binom{k+1}{n-k}\right). \tag{1.5}$$

Podemos comprobar la igualdad en (1.5) reemplazando cada término de la igualdad por su correspondiente término en (1.4) y comparando. De está manera obtenemos a)

$$\left(\!\!\binom{n-k+1}{k}\!\!\right) = \binom{n-k+1+k-1}{k} = \binom{n}{k};$$

b)

$$\left(\!\!\binom{k+1}{n-k}\!\!\right) = \binom{k+1+(n-k)-1}{n-k} = \binom{n}{n-k}.$$

Pero por la propiedad (1.2) de los coeficientes binomiales de primera clase tenemos que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

La relación de recurrencia para enumerar los coeficientes binomiales de segunda clase está dada por

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right). \tag{1.6}$$

Para probar (1.6) debemos demostrar que:

El número de subconjuntos de k-elementos de un conjunto con n-elementos con repetición, es igual	=	Al número de subconjuntos de k-elementos de un conjunto de $(n-1)$-elementos con repetición	+	El número de subconjuntos de $(k-1)$-elementos de un conjunto de n-elementos con repetición.

Supongamos que tenemos un conjunto $S = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ de n cajas con diferentes pesos. El número de maneras de escoger k cajas del conjunto admitiendo repetición de cajas es $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Exactamente $\left(\!\binom{n-1}{k}\!\right)$ de estas selecciones implican selecciones en las cuales no han sido escogidas la c_n y $\left(\!\binom{n}{k-1}\!\right)$ de estas selecciones contienen selecciones en las cuales la caja n ha sido seleccionada. Es de aclarar que el coeficiente binomial $\left(\!\binom{n}{k-1}\!\right)$ está representando los subconjuntos en los cuales la c_n ha sido seleccionada, pero es excluida haciendo cada subconjunto de $k-1$-elemento de n elementos esto es $\left(\!\binom{n}{k-1}\!\right)$.

Los coeficientes binomiales de segunda clase $\left(\binom{n}{k}\right)$, también se pueden interpretar como el número de maneras de distribuir k bolas idénticas dentro de n cajas diferentes o equivalentemente, como el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación lineal $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$.

Veamos cada uno de los casos gráficamente mediante un ejemplo: sean dadas 4 bolas iguales y si tenemos 3 cajas diferentes las posibles maneras de distribuir las bolas en las cajas son: (ver Figura 1.4)

Así vemos que $\left(\binom{3}{4}\right) = 15$.

De la misma manera y basándose en los mismos ejemplos anteriores vemos que $\left(\binom{n}{k}\right)$ se puede observar como una ecuación lineal en el cuàl $\left(\binom{n}{k}\right)$ representa el número de soluciones enteras no negativas de dicha ecuación.

Así si $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, entonces las soluciones positivas de dicha ecuación son:

$4,0,0$	$1,3,0$	$0,3,0$
$3,1,0$	$1,0,3$	$0,3,1$
$3,0,1$	$1,1,2$	$0,2,2$
$2,2,0$	$1,2,1$	$0,1,3$
$2,0,2$	$2,1,1$	$0,0,4$

$\boxed{\Longrightarrow 15 \quad \text{soluciones enteras}}$

En conclusión tenemos que los coeficientes binomiales de primera clase se pueden interpretar como una selección estricta ($1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leq n$), mientras los de la segunda clase como la selección débil ($1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k \leq n$).

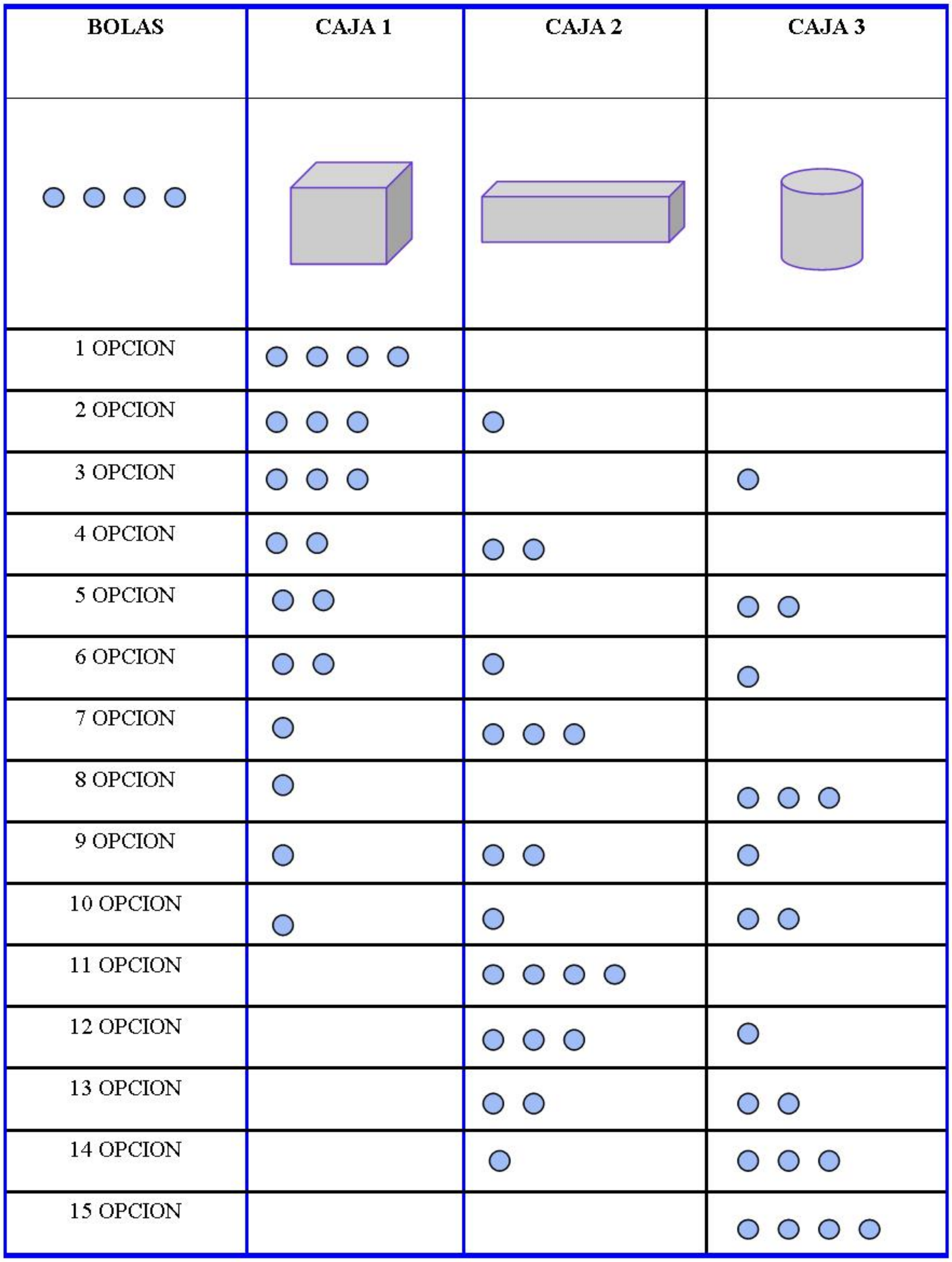

Figura 1.4: Distribución de coeficientes binomiales de la segunda clase.

1.3. Funciones generadoras de los coeficientes binomiales

Las funciones generadoras, que se introducen en esta sección constituyen una de las herramientas más versátiles para el tratamiento de problemas de enumeración. Al final de la sección haremos una revisión de los números combinatorios (coeficientes binomiales) bajo la óptica de las funciones generadoras.

En ocasiones, un problema combinatorio se puede interpretar como la determinación de una secuencia u_n de números, cada uno de los cuales es la solución del problema de tamaño n. El concepto de función generadora permite trabajar con la secuencia entera "almacenándola " en una función. Veamos de qué manera se hace esto y qué ventajas supone para la resolución de los problemas de enumeración.

Definición 1.6. *Dada una secuencia de números u_n, $n \geq 0$, se llama función generadora ordinaria de esta secuencia a la expresión*

$$U(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} u_n x^n.$$

La expresión anterior es lo que se llama una serie formal y la sucesión $\{u_0, u_1, \cdots\}$, es su sucesión de coeficientes. Las series formales son una extensión de los polinomios.

Definimos el producto de dos series formales $U(x) = \sum\limits_{n \geq 0} u_n x^n$ y $V(x) = \sum\limits_{n \geq 0} v_n x^n$, como

$$U(x)V(x) = \sum_{n \geq 0} c_n x^n,$$

donde $c_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0$.

También diremos que $U(x)$ es la inversa respecto del producto de $V(x)$ si el producto de las dos series es $1 = 1 + 0.x + 0.x^2 + \cdots$, y escribiremos

$$U(x) = \frac{1}{V(x)}.$$

Por ejemplo la inversa, respecto del producto, de

$$V(x) = 1 + x + x^2 + \cdots ,$$

(La serie asociada a la sucesión que tiene todos los términos iguales a 1), es la serie $U(x) = 1 - x$ ya que, de acuerdo con el producto que hemos definido, $(1-x)(1+x+x^2+\cdots) = 1$, y escribimos

$$1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n\geq 0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Esta última igualdad no se debe entender como una igualdad de funciones. Si sustituimos x por $\frac{1}{2}$, el valor numérico de los dos lados de la igualdad es el mismo. Pero, si sustituimos x por 2, a la izquierda de la igualdad obtenemos una serie numérica divergente y a la derecha -1. Este hecho, sin embargo, no nos impide considerar la igualdad anterior como una igualdad válida en el conjunto de las series formales. Desde este punto de vista, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.7. *Una serie formal* $U(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$ *es invertible si y sólo* $u_0 \neq 0$.

La demostración de la proposición (1.7) es fácil de realizar y se puede ver detalladamente en [5].

En lo que sigue veremos una primera ilustración de la versatilidad de las funciones generadoras revisando los coeficientes binomiales y algunos problemas combinatorios asociados a estos números en la perspectiva de las funciones generadoras.

Recordemos como obteníamos la fórmula del binomio al desarrollar el producto

$$\underbrace{(1+x)\cdots(1+x)}_{n}.$$

El coeficiente de x^k cuenta el número de maneras de escoger x en k de los paréntesis y 1 en los $n-k$ restantes. En otras palabras, el coeficiente de x^k es el número de combinaciones de n elementos tomados de k en k, $\binom{n}{k}$. Para n fijo, tenemos entonces que la función generadora de la secuencia $u_k = \binom{n}{k}$ (recordemos que $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$) es

$$U(x) = (1+x)^n = \sum_{k\geq 0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k. \tag{1.7}$$

En este caso la función generadora tiene sólo un número finito de sumandos, de manera que se puede interpretar también como una función de x. De aquí se obtienen por ejemplo, las relaciones

$$U_n(1) = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} = 2^n,$$

que da el número total de subconjuntos de un conjunto de n elementos, o

$$U_n(-1) = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k}(-1)^k = 0.$$

Estos son algunos ejemplos de cómo el uso de funciones generadoras proporciona resultados que de otro modo son difíciles de obtener y de demostrar.

Por otra parte la expresión, $V(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum\limits_{k\geq 0} x^k$, es la función generadora de la secuencia $v_k = 1$, $k \geq 0$. Recordemos que trabajamos esta ecuación anteriormente obteniendo una expresión más compacta de esta función como $V(x) = \frac{1}{1-x}$. Así entonces, la función generadora del número de combinaciones con repetición (coeficientes binomiales de segunda clase) de n elementos tomados de k en k, $u_k = \binom{n+k-1}{k} = \left(\binom{n}{k}\right)$, es

$$U(x) = \frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k\geq 0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k = \sum_{k\geq 0}^{\infty} \left(\binom{n}{k}\right) x^k. \tag{1.8}$$

Capítulo 2

Números de Stirling y Coeficientes Gaussianos

Los números de Stirling surgen frecuentemente en matemáticas, especialmente en el cálculo diferencial finito e interpolación. Estos números reciben su nombre en honor a James Stirling (1692-1770) quien trabajó con ellos durante el transcurso de su vida.

Los números de Stirling vienen dados en dos clases, llamados comúnmente "números de stirling de primera clase" y "Números de Stirling de segunda clase".

2.1. números de stirling de segunda clase

Estudiaremos primero los números de stirling de segunda clase ya que ellos aparecen con más frecuencia que los de la primera clase. El símbolo

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\},$$

se define combinatoriamente como el número de maneras de partir un conjunto de n objetos dentro de k subconjuntos no vacíos. Por ejemplo hay 7 maneras de partir un conjunto de 4 elementos en dos conjuntos no-vacíos a saber:

$\{1,2,3\}\bigcup\{4\}$, $\{1,2,4\}\bigcup\{3\}$, $\{1,3,4\}\bigcup\{2\}$, $\{2,3,4\}\bigcup\{1\}$, $\{1,2\}\bigcup\{3,4\}$, $\{1,3\}\bigcup\{2,4\}$, $\{1,4\}\bigcup\{2,3\}$, de está manera

$$\left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right\} = 7.$$

Está interpretación combinatoria es equivalente a distribuir 4 bolas diferentes en 2 cajas idénticas sin que quede caja vacía, así:(ver Figura 2.1)

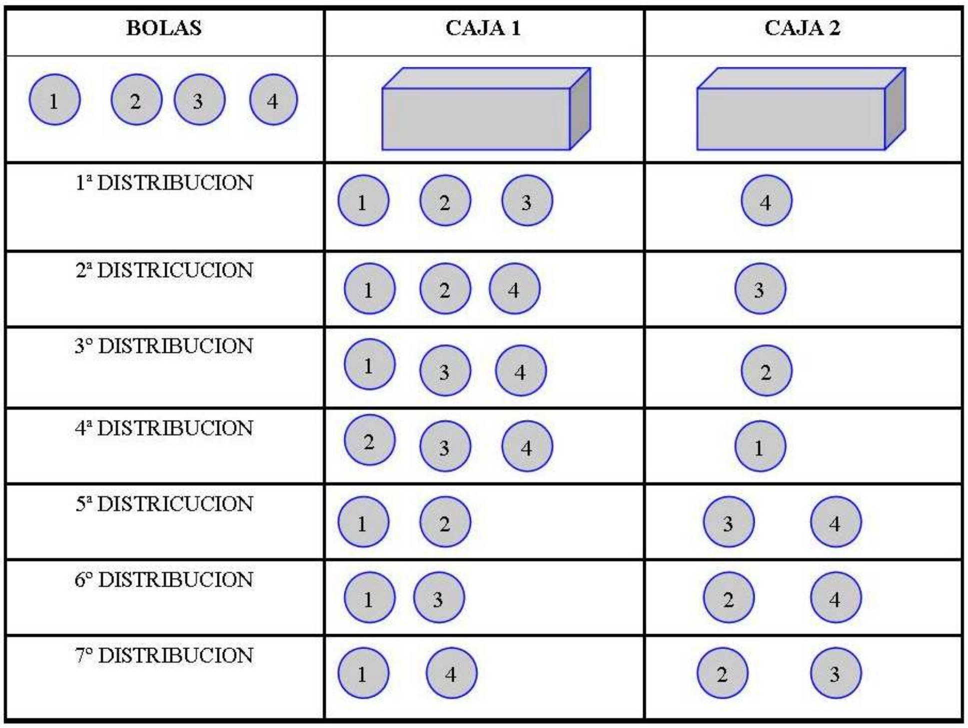

Figura 2.1: Distribución de Stirling de segunda clase.

Notemos que los corchetes son usados para denotar conjuntos, mientras que $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$, denota un número. Este parecido en la notación ayuda a recordar el significado de $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$, para n y k pequeños.

Hay exactamente una manera de colocar n elementos dentro de un único conjunto; por lo tanto $\left\{ \begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right\} = 1$, para todo $n > 0$. Por otra parte $\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\} = 0$, por que un conjunto

n	$\left\{ {n \atop 0} \right\}$	$\left\{ {n \atop 1} \right\}$	$\left\{ {n \atop 2} \right\}$	$\left\{ {n \atop 3} \right\}$	$\left\{ {n \atop 4} \right\}$	$\left\{ {n \atop 5} \right\}$	$\left\{ {n \atop 6} \right\}$	$\left\{ {n \atop 7} \right\}$	$\left\{ {n \atop 8} \right\}$	$\left\{ {n \atop 9} \right\}$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1
					$\vdots$					

Figura 2.2: Triángulo de Stirling de segunda clase para subconjuntos.

de cero elementos es vacío. En el caso de que $k = 0$ se presentan algunas complicaciones. Convendremos que hay exactamente una manera para partir un conjunto vacío en cero partes no vacías; por lo tanto, $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$.

Pero un conjunto no vacío necesita al menos una parte, así $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ para $n > 0$.

¿Qué sucede cuando $k = 2$?.

Primero que todo $\left\{ {0 \atop 2} \right\} = 0$. Si un conjunto de $n > 1$ objetos es dividido en dos partes no vacías, una de estas partes deberá contener el último objeto n y algún subconjunto los primeros $n-1$ objetos restantes. Hay 2^{n-1} maneras para escojer el último subconjunto luego para cada uno de los primeros $n-1$ objetos estan en él o fuera de él, pero no debemos colocar todos los objetos en él por que necesitamos que ambos conjuntos sean no vacíos. Por lo tanto restando 1:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1 \qquad \text{para} \qquad n > 0. \tag{2.1}$$

Esto corresponde con nuestro ejemplo anterior ya que $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7 = 2^3 - 1$ maneras.

La figura 2.2 nos muestra los números de Stirling de segunda clase para los primeros casos en los cuales n y k son enteros pequeños. Unas pequeñas modificaciones de estas fórmulas lleva a una recurrencia con la cuál podemos calcular $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ para todo k;

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}. \tag{2.2}$$

Para demostrar esta relación, se sigue que: dado un conjunto con $n > 0$ objetos, se particiona en k partes no vacías si colocamos el último objeto n, en un subconjunto solo (en $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$ maneras), o bien junto con alguno de los primeros $n-1$ elementos, en algún subconjunto. Hay $k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$ maneras en el último caso, ya que cada una de las $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$ maneras de distribuir los primeros $n-1$ objetos en cada parte no vacías dará como resultado k subconjuntos con los que el n-ésimo objeto puede asociarse.

2.2. números de stirling de primera clase

Los números de stirling de primera clase se denotan $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ y tienen varias interpretaciones de acuerdo con el contexto en el que se trabaje.

Los números de stirling de primera clase tienen una interpretación combinatorial clásica que implica permutaciones. De esta manera, si denotamos a S_n como un grupo simétrico, es decir el grupo de todas las permutaciones del conjunto $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, cada permutación se puede representar como un producto de ciclos disyuntos (los ciclos de descomposición); por ejemplo en S_6 la permutación 216345 se puede expresar como un producto de dos ciclos disyuntos es decir $[1, 2][3, 6, 5, 4]$. Así se define los números de stirling de primera clase, denotados como $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, como el número de permutaciones en S_n que contiene exactamente k ciclos dentro de su ciclo de descomposición.

En otras palabras podemos decir que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ calcula el número de maneras de colocar n objetos en k ciclos en lugar de subconjuntos. Los expresaremos diciendo "k ciclos de n".

Los ciclos son ciclos ordenados, semejantes al collar que representa el ciclo "$[A, B, C, D]$" acordando que $[A, B, C, D] = [B, C, D, A] = [C, D, A, B] = [D, A, B, C]$.

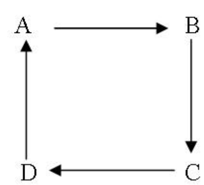

Figura 2.3: Representación del ciclos [A,B,C,D].

Un ciclo se puede decir que es una vuelta completa, ya que su terminación está unida con su comienzo. También es de aclarar que el ciclo

$$[A, B, C, D] \neq [A, B, D, C] \qquad \text{ó} \qquad [A, B, C, D] \neq [D, C, B, A].$$

Hay 11 maneras diferentes de formar 2 ciclos a partir de 4 elementos:
$[1, 2, 3][4]$, $[1, 3, 2][4]$, $[1, 2][3, 4]$, $[1, 2, 4][3]$, $[1, 4, 2][3]$, $[1, 3][2, 4]$, $[1, 3, 4][2]$, $[1, 4][2, 3]$, $[1, 4, 3][2]$, $[2, 3, 4][1]$, $[2, 4, 3][1]$.

Por lo tanto $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11$. La figura 2.4 nos muestra los números de Stirling de primera clase para los primeros casos con n y k pequeños.

n	$\left[{n \atop 0}\right]$	$\left[{n \atop 1}\right]$	$\left[{n \atop 2}\right]$	$\left[{n \atop 3}\right]$	$\left[{n \atop 4}\right]$	$\left[{n \atop 5}\right]$	$\left[{n \atop 6}\right]$	$\left[{n \atop 7}\right]$	$\left[{n \atop 8}\right]$	$\left[{n \atop 9}\right]$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

$$\vdots$$

Figura 2.4: Triángulo de Stirling de primera clase para subconjuntos.

Los números de stirling de primera clase también se pueden representar formalmente como los coeficientes en la expansión del polinomio:

$$x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1).$$

De esta manera cuando $n=4$ vemos que el polinomio $x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4+6x^3+11x^2+6x$ produce la secuencia de coeficientes "$6, 11, 6, 1$" la cuál coincide con la Figura 2.4.

2.3. Casos especiales

Un ciclo singulete (el cual es un ciclo con un único elemento) es en esencia lo mismo que un conjunto singulete (un conjunto con un único elemento). Similarmente, un 2-ciclo (un ciclo con 2 elementos) es parecido al conjunto con 2 elementos, ya que $[A, B] = [B, A]$ es exactamente lo mismo que $\{A, B\} = \{B, A\}$.

Pero en el 3-ciclo hay 2 ciclos diferentes $[A, B, C]$ y $[A, C, B]$.

Notemos por ejemplo que las 11 parejas de ciclos vistas anteriormente; se pueden obtener de las 7 parejas de conjuntos en los números de stirling de segunda clase obtenida en $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, pero formando 2 ciclos de cada uno de los conjuntos de 3 elementos, de está manera de los conjuntos $\{1, 2, 3\} \bigcup \{4\}$ obtenemos los ciclos $[1, 2, 3] \quad [4]$ y $[1, 3, 2] \quad [4]$.

Los ciclos se pueden obtener de cualquier conjunto de n-elementos, siempre que $n > 0$ (hay $n!$ permutaciones, y cada ciclo corresponde a n de ellas por que cualquiera de estos elementos puede ser listado primero). Por consiguiente tenemos

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)! \quad para \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.3}$$

Como podemos ver este valor es mucho mayor que $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$, que obtuvimos para el número de subconjuntos de Stirling.

De hecho, es fácil ver que el ciclo de números es por lo menos tan grande como el número de subconjuntos

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \geq \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \quad para \quad n, k \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.4}$$

Por que cada partición de subconjuntos no-vacíos conlleva por lo menos a un arreglo de ciclos.

La igualdad se obtiene en la ecuación (2.4), cuando todos los ciclos son necesariamente singuletes o dobletones, por lo que los ciclos son equivalentes a los subconjuntos en tales casos. Esto sucede cuando $k = n$ y cuando $k = n - 1$, por lo tanto

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}, \quad \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\}.$$

En realidad es fácil ver que

$$\left[\begin{matrix} n \\ n \end{matrix}\right] = \left\{\begin{matrix} n \\ n \end{matrix}\right\} = 1, \quad \left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix}\right] = \left\{\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix}\right\} = \binom{n}{2}. \tag{2.5}$$

El número de maneras de arreglar n objetos en $n-1$ ciclos, es igual al número de maneras de partir n objetos en $n-1$ subconjuntos y esto es a su vez igual al número de maneras de seleccionar 2 de los n objetos.

Podemos derivar una relación de recurrencia para $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right]$ modificando los argumentos usados para $\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}$. En todo arreglo de n objetos en k ciclos podemos colocar el último objeto n, en un ciclo soló (en $\left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right]$ maneras) o en uno de los $\left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right]$ ciclos arreglados de las primers $n-1$ objetos. En el último caso hay $n-1$ maneras diferentes para colocarlo. (No es dificíl verificar que hay j maneras de colocar un nuevo elemento en un j-ciclo para formar un $(j-1)$-ciclo. Cuando $j=3$, por ejemplo, el ciclo $[A, B, C]$ conduce a:

$$[A, B, C, D], \quad [A, B, D, C], \quad o, \quad [A, D, B, C],$$

cuando insertamos un nuevo elemento D y no hay otra posibilidad.

Sumando sobre todo j da un total de $n-1$ maneras para insertar un n-ésimo objeto en un ciclos de descomposición de $n-1$ objetos).

Por consiguiente, la relación de recurrencia deseada es:

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right] = (n-1)\left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right] \quad para \quad n \in \mathbb{Z}^{+}. \tag{2.6}$$

Si comparamos las ecuaciones (2.2) y (2.6), vemos que los primeros términos en el lado derecho son multiplicados por su indice superior $(n-1)$ en el caso de los números de Stirling por ciclos, pero por su indice inferior k en el caso de los números de Stirling por subconjunto.

Es de notar que cada permutación es equivalente a un subconjunto de ciclos. Por ejemplo consideremos la permutación que lleva 123456789 en 384729156. Ordenando en 2 filas

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \\ 3 & 8 & 4 & 7 & 2 & 9 & 1 & 5 & 6 \end{array}$$

veamos que 1 va a 3, 2 va a 8, etc. La estructura de ciclos sucede por que 1 va a 3, el cuál va a 4, el cuál va 7, el cuál posteriormente va a 1; es decir el ciclos $[1, 3, 4, 7]$.

Otro ciclo en está permutación es $[2, 8, 5]$; aún otro es $[6, 9]$. Por lo tanto la permutación 384729156 equivalente a el ciclo arreglado $[1, 3, 4, 7][2, 8, 5][6, 9]$.

De esta manera tenemos que en cualquier permutación $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ todo elemento está en un ciclo único.

Podemos comenzar con $m_0 = m$ y hagamos $m_1 = \pi_{m_0}$, $m_2 = \pi_{m_1}$, etc. debemos eventualmente regresar a $m_k = m_0$. (Los números deberán repetirse antes o después, y el primer número en reaparecer debe ser m_0) ya que consideramos el predecesor único de los otros números $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$. Por lo tanto, cada permutación define un ciclo arreglado, recíprocamente cada ciclo arreglado define obviamente una permutación si invertimos la construcción y la correspondencia uno a uno muestra que las permutaciones y los ciclos arreglados son esencialmente la misma cosa.

Según esto, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ es el número de permutaciones de n objetos que contiene exactamente k ciclos. Si sumamos $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ para todo k, debemos obtener el número total de permutaciones:

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!, \quad para \quad n \in \mathbb{Z}^+ \tag{2.7}$$

Por ejemplo, con $n = 4$ obtenemos

$$\sum_{k=0}^{4} \begin{bmatrix} 4 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= 0 + 6 + 11 + 6 + 1$$

$$= 24 = 4!$$

Los números de Stirling son útiles porque sus relaciones de recurrencia en las ecuaciones (2.2) y (2.6) aparecen en una variedad de problemas.

Por ejemplo si queremos representar la potencia ordinaria x^n, en forma de potencia $x^{\underline{n}}$, descendente, (tal que $x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))$, encontramos que los primeros casos son:

$x^0 = x^{\underline{0}}$

$x^1 = x^{\underline{1}}$

$x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$

$x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$

$x^4 = x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$.

Si miramos detenidamente estos coeficientes, notamos que se parecen a los números en la figura (2.2) reflejados de derecha a izquierda.

Por la tanto podemos estar seguros que la formula general es

$$x^n = \sum_{k}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}}, \quad para \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.8}$$

En otras palabras los subconjuntos de números de Stirling son los coeficientes en la potencia ordinaria que produce las potencias factoriales.

Podemos ir por otro camino también, por que los números de Stirling por ciclos son los coeficientes en las potencias ordinarias que produce las potencias factoriales (donde $x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-1)))$ y se obtiene

$x^{\overline{0}} = x^0$

$x^{\overline{1}} = x^1$

$x^{\overline{2}} = x^2 + x^1$

$x^{\overline{3}} = x^3 + 3x^2 + 2x^1$

$x^{\overline{4}} = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x^1.$

Como tenemos que $(x+n-1)x^{k} = x^{k+1} + (x-1)x^{k}$, así podemos probar como arriba para demostrar que

$$(x+n-1)x^{\overline{n-1}} = (x+n-1)\sum_k \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right] x^k = \sum_k \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] x^k.$$

Esto conduce a la fórmula general

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] x^k \quad para \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.9}$$

(Haciendo $x = 1$ dará (2.7) nuevamente.)

Pero detengámonos un momento; la ecuación (2.9) involucra elevar la potencia factorial $x^{\overline{n}}$, mientras la ecuación (2.8) involucra la caída de la potencia factorial $x^{\underline{n}}$.

¿Qué necesitaremos para expresar $x^{\underline{n}}$ en términos de potencias ordinarias o que necesitamos para expresar $x^{\underline{n}}$ en términos de elevación de potencias?. Es muy fácil solo nos deshacemos de algunos signos menos y obtendremos:

$$x^n = \sum_k \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}} \quad para \quad n \in \mathbb{Z}^+, \tag{2.10}$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] (-1)^{n-k} x^k \quad para \quad n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.11}$$

En realidad estas ecuaciones funcionan por que por ejemplo la fórmula:

$$x^{\underline{4}} = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x,$$

es análoga a la fórmula

$$x^{\overline{4}} = x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x,$$

pero con signos alternados.

La identidad general

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}}. \tag{2.12}$$

Convierte la ecuación (2.8) en la ecuación (2.10) y la ecuación (2.9) en la ecuación (2.11).

Si recordamos cuando pegamos el factor $(-1)^{n-k}$ en una fórmula como en la ecuación (2.10), hay un ordenamiento natural de potencias cuando x es grande:

$$x^{\overline{n}} > x^n > x^{\underline{n}} \qquad \forall \qquad x > n \tag{2.13}$$

Los números de Stirling $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ y $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ son positivos, así tenemos menos signos para usar cuando expandimos una potencia pequeña en términos de una más larga.

Podemos conectar la ecuación (2.9) a la ecuación (2.10) y obtendremos una suma doble:

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}} = \sum_{k,m} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^m.$$

Esto es válido para todo x, si los coeficientes de $x^0, x^1, \ldots, x^{(n-1)}, x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots$ en la derecha son todos cero obtendremos la identidad

$$\sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} = (m = n) \qquad \forall \qquad \text{enteros} \qquad n, m \geq 0. \tag{2.14}$$

La ecuación (2.14) es una identidad que combina los números de Stirling de primera clase y segunda clase.

2.4. Funciones generadoras de los números de Stirling

Sea n un número entero positivo fijo y una sucesión de números $\{a_k\}$ definida por

$$a_k = \begin{Bmatrix} n + k \\ n \end{Bmatrix},$$

tenemos entonces que la función generadora de la secuencia a_k o función generadora de los números de Stirling de la segunda clase es:

$$f_n(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-nx)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n+k \\ n \end{matrix} \right\} x^k. \tag{2.15}$$

Los números de stirling de segunda clase también se pueden expresar en términos de funciones simétricas homogéneas y aparecen en la expansión de la función racional

$$\frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)} = \sum_n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^n \tag{2.16}$$

expandiendo el lado izquierdo de (2.16), e igualando los coeficientes dados se obtiene

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_{n-k} \le k} i_1 i_2 \dots i_{n-k}. \tag{2.17}$$

Por otro lado, para los números de stirling de primera clase tendremos que:

Dados n un número entero positivo fijo y una sucesión de números $\{a_k\}$ definida por

$$a_k = \left[\begin{matrix} n-1 \\ n+1-k \end{matrix} \right],$$

tenemos entonces que la función generadora de la secuencia a_k o función generadora de los números de stirling de primera clase es:

$$f_n(x) = (1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots(1-nx) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\begin{matrix} n-1 \\ n+1-k \end{matrix} \right] x^k. \tag{2.18}$$

Además, si tenemos la función:

$$f_n(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^k, \tag{2.19}$$

donde $a_k = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$, es una función que también genera los números de Stirling de la primera clase.

Alternativamente, la ecuación (2.19) se puede expresar en términos de funciones simétricas elementales de sus ceros así tenemos $x(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n-1) = x^n + (1+2+3\dots+n-1)x^{n-1} + (1\cdot 2+2\cdot 3+\dots+(n-2)(n-1))x^{n-2}+\dots+(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\dots(n-1))x$. Igualando coeficientes obtenemos

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{1\leq i_1<i_2<\dots<i_{n-k}\leq n-1} i_1 i_2 \dots i_{n-k}. \tag{2.20}$$

Resumiendo, de las ecuaciones (2.17) y (2.20), los números de stirling de primera clase se puede interpretar como sumatorias mediante selecciones estrictas (combinaciones) mientras los de la segunda clase como sumatorias mediante selecciones suaves (combinaciones con repetición).

2.5. Coeficientes gaussianos

Los coeficientes gaussianos (o polinomios gaussianos) aparecen en teoría de números, combinatoria, algebra líneal y geometría finita. Gauss los introdujo como una función racional de una indeterminación q. Si se desea más información al respecto puede ver [2], [4].

Los coeficientes gaussianos estan definidos por

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}, \quad n,k\in\mathbb{Z}^+, \quad n\geq k>1 \quad y \quad q\geq 1. \tag{2.21}$$

Proposición 2.1. *Sea $q=1$,$n\geq k>1$ con $n,k\in\mathbb{Z}^+$, entonces*

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{k},$$

los coeficiente gaussianos son los mismos coeficientes binomiales de la primera clase cuando $q=1$; por ejemplo sea $n=5$ y $k=3$ entonces tenemos

$$\binom{5}{3}_q = \frac{(1-q^5)(1-q^4)(1-q^3)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)};$$

notemos que si reemplazamos a q por 1 en este momento no llegaríamos a nada ya que obtendríamos una determinación, pero si factorizamos en todos los términos el factor $(1-q)$ tanto en el numerador como en el denominador y simplificando obtenemos:

$$\binom{5}{3}_q = \frac{(1+q+q^2+q^3+q^4)(1+q+q^2+q^3)(1+q+q^2)}{1(1+q)(1+q+q^2)}.$$

Haciendo $q=1$

$$\binom{5}{3}_q = \frac{(1+1+1+1+1)(1+1+1+1)(1+1+1)}{(1+1)(1+1+1)}$$

$$\binom{5}{3}_q = \frac{5\times 4\times 3}{2\times 3} = \frac{5\times 4\times 3}{3!} = \binom{5}{3}.$$

Los coeficientes gaussianos (2.21), son un polinomio en q y guarda muchas propiedades con los coeficientes binomiales de la primera clase. De hecho podemos escribir:

$$\binom{n}{k}_q = \sum_{j=0}^{k(n-k)} a_j q^j. \tag{2.22}$$

Entonces la suma de los coeficientes a_j es el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$, retomando nuestro ejemplo de $\binom{5}{3}_q$ y desarrollando los productos tenemos que

$$\binom{5}{3}_q = \frac{1+2q+3q^2+4q^3+4q^4+3q^5+2q^6+q^7}{1+q},$$

si sumamos los coeficientes

$$\frac{1+2+3+4+4+3+2+1}{1+1} = \frac{20}{2} = 10,$$

que es el mismo resultado que obtenemos de

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{20}{2} = 10,$$

lo que nos confirma la ecuación (2.22) de manera práctica.

También podemos decir que la suma de los coeficientes a_j es el número de caminos diferentes en el plano cartesiano desde el origen $(0,0)$ hasta el punto (n-k,k), de esta manera, como $\binom{5}{3} = 10$ hay 10 caminos diferentes para llegar desde el origen hasta el punto $(2,3)$, gráficamente estos estan representados en la Figura (2.5).

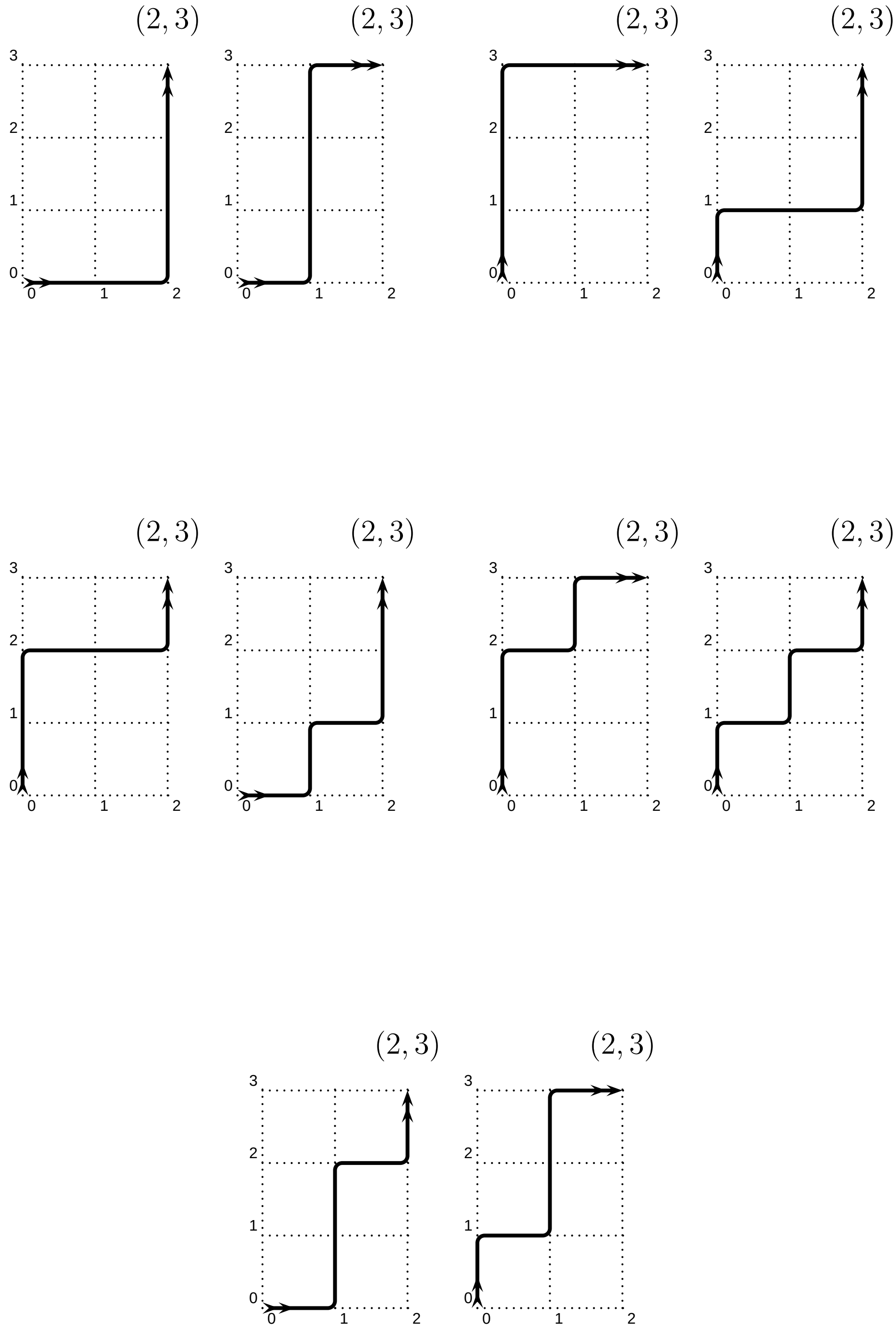

Figura 2.5: Caminos en la trayectoria de los coeficientes binomiales de primera clase.

Según nuestros comentarios anteriores podemos decir que los coeficientes gaussianos (2.21) son una extensión de los coeficientes binomiales de primera clase. Sin embargo, para nuestra interpretación unificada los coeficientes binomiales de la segunda clase llegan a ser más importantes. Por está razón desde ahora nos referiremos a los coeficientes gaussianos como los coeficientes gaussianos de la segunda clase, dichos coeficientes tienen una interpretación combinatoria clásica relacionada a subespacios; así $GF(q)$ denotará un campo finito de orden q (una potencia prima), y $V(n,q)$ denotará un espacio vectorial n-dimensional sobre $GF(q)$.

Definiremos los coeficientes Gaussianos de la segunda clase denotados por $\binom{n}{k}_q$, como el número de subespacios k-dimensionales de $V(n,q)$, (para ver más detalles se puede consultar [2]).

Los coeficientes gaussianos también se pueden interpretar combinatoriamente para todo entero positivo $q > 1$ como el número de matrices $k \times n$ en forma escalonada por reducción de filas y sin filas nulas con enteros del conjunto $Q = \{0, 1, \ldots, q-1\}$. Para la interpretación de esta matriz, es necesario que q no sea una potencia prima.

Nuestra interpretación unificada demostrará que interpretando los coeficientes gaussianos como una generalización de los coeficientes binomiales de la segunda clase obtendremos una interpretación combinatorial para todo $q \geq 1$.

Los coeficientes gaussianos satisfacen la propiedad simétrica

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q, \tag{2.23}$$

y las relaciones de recurrencia

$$\binom{n}{k}_q = q^k \binom{n-1}{k}_q + \binom{n-1}{k-1}_q, \tag{2.24}$$

y,

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k}_q + q^{n-k} \binom{n-1}{k-1}_q. \tag{2.25}$$

Las cuales demostraremos posteriormente usando nuestra interpretación unificada.

Se definen los coeficientes gaussianos de primera clase como los coeficientes en el teorema

q-binomial

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)\dots(1+q^{n-1}x)=\sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}}\binom{n}{k}_q x^k. \tag{2.26}$$

Proposición 2.2. *Sea $q=1$, $n,k\geq 1$ y $n,k\in\mathbb{Z}^+$ entonces*

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)\dots(1+q^{n-1}x)=\sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}}\binom{n}{k}_q x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n.$$

El teorema q-binomial es igual al teorema del binomio (1.1) (haciendo $y=1$).

En nuestro contexto los coeficientes gaussianos de primera clase, que son $q^{\binom{k}{2}}\binom{n}{k}_q$ en (2.26), son una extensión de los coeficientes binomiales de primera clase $\binom{n}{k}$; expandiendo el lado izquierdo de (2.26) e igualando los coeficientes dados obtenemos que

$$q^{\binom{k}{2}}\binom{n}{k}_q=\sum_{0\leq i_1<i_2<\dots<i_k\leq n-1} q^{i_1+i_2+\dots+i_k}. \tag{2.27}$$

A manera de ejemplo, si $n=3$ y $k=2$ entonces

$$q^{\binom{2}{2}}\binom{3}{2}_q=q\left[\frac{(1-q^3)(1q^2)}{(1-q)(1-q^2)}\right]=q(1+q+q^2)=q+q^2+q^3,$$

por otro lado

$$\sum_{0\leq i_1<i_2\leq 2} q^{i_1+i_2}=q^{0+1}+q^{0+2}+q^{1+2}=q^1+q^2+q^3.$$

Que nos deja ver la igualdad entre las notaciones.

La función generadora de los coeficientes gaussianos de segunda clase está definida de la siguiente manera:

Sea n un número entero positivo fijo y una sucesión de números $\{a_k\}$ definida por:

$$q^{\binom{k}{2}}\binom{n}{k}_q,$$

tenemos entonces que la función generadora de los coeficientes gaussianos de la primera clase es:

$$f_n(x)=(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{n-1}x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\binom{n}{k}_q x^k. \tag{2.28}$$

De igual manera, los coeficientes gaussianos de segunda clase (los cuales son coeficientes gaussianos ordinarios) aparecen como coeficientes en la extensión del teorema q-binomial (que hace a su vez el papel de función generadora de coeficientes gaussianos de la segunda clase):

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)(1-q^3x)\dots(1-q^{n-1}x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k}_q x^k, \tag{2.29}$$

expandiendo el lado izquierdo de (2.29) e igualando los coeficientes dados obtenemos

$$\binom{n+k-1}{k}_q = \sum_{0 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n-1} q^{i_1+i_2+\cdots+i_k},$$

y reemplazando n por $n-k+1$ tenemos que

$$\binom{n}{k}_q = \sum_{0 \le i_1 \le i_2 \le \cdots < i_k \le n-k} q^{i_1+i_2+\cdots+i_k}. \tag{2.30}$$

Ejemplo si $n=3$ y $k=2$ entonces

$$\binom{3}{2}_q = 1+q+q^2,$$

y por otro lado tenemos

$$\sum_{0 \le i_1 \le 1} q^{i_1+i_2} = q^{0+0}+q^{0+1}+q^{1+1} = 1+q+q^2$$

lo que nos muestra la igualdad.

Las identidades (2.27) y (2.30) indican que los coeficientes gaussianos de primera clase se pueden interpretar como sumatorias a través de selecciones estrictas (combinaciones), mientras que las de segunda clase se pueden interpretar como sumatorias a través de selecciones débiles (combinaciones con repetición).

Capítulo 3

Una interpretación unificada

Ahora estamos preparados para definir nuestra interpretación combinatoria unificada como una generalización de los coeficientes binomiales de primera y segunda clase.

De esta manera si asumimos que dadas n cajas diferentes en donde la caja i $(1 \leq i \leq n)$, contiene $\mathbf{w}_i$ bolas diferentes, con $\mathbf{w}_i \geq 1$. El número $\mathbf{w}_i$ es llamado el peso de la caja i, también haremos que $\mathbf{w}$ denote el vector de pesos, así $\mathbf{w} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \ldots, \mathbf{w}_n\}$.

La generalización de los coeficientes binomiales de primera clase con el vector peso $\mathbf{w}$, es denotado por $\binom{n}{k}_{\mathbf{w}}$, es el número total de maneras de seleccionar k bolas de las n cajas, pero primero escogiendo k cajas diferentes (sin importar el orden) y posteriormente seleccionando una bola de cada una de las cajas escogidas.

Supongamos que escogemos k cajas diferentes $\{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k\}$ con $c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c_k$, (refiriendonos al peso de cada caja).

Entonces hay $\mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_2}\cdots\mathbf{w}_{c_k}$ posibles maneras para seleccionar las k bolas resumiendo sobre todas las maneras de escoger las k cajas distintas obtendremos

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}} = \sum_{1 \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_k \leq n} \mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_2}\cdots\mathbf{w}_{c_k}; \tag{3.1}$$

que es la generalización de los coeficientes binomiales de la primera clase.

Por ejemplo, si tomamos 4 cajas de tamaños diferentes tal que la caja 1 tiene 2 bolas diferentes, la caja 2 tiene 3 bolas diferentes, la caja 3 tiene 4 bolas diferentes, la caja 4 tiene 5 bolas diferentes, entonces el número de maneras diferentes de seleccionar 3 bolas diferentes de las 4 cajas será:

$$\binom{n}{k}_{\mathbf{w}} = \binom{4}{3}_{\mathbf{w}=(2,3,4,5)}$$

$$\binom{4}{3}_{\mathbf{w}} = \sum_{1\leq c_1<c_2<c_3\leq 4} \mathbf{w_{c_1}} \ldots \mathbf{w_{c_3}}$$

$$\begin{aligned}\binom{4}{3}_{\mathbf{w}} &= \mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_2}\mathbf{w}_{c_3} + \mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_2}\mathbf{w}_{c_4} + \mathbf{w}_{c_2}\mathbf{w}_{c_3}\mathbf{w}_{c_4} + \mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_3}\mathbf{w}_{c_4}\\ &= (2\times 3\times 4) + (2\times 3\times 5) + (3\times 4\times 5) + (2\times 4\times 5)\\ &= 24 + 30 + 60 + 40\\ &= 154 \quad \text{maneras diferentes.}\end{aligned}$$

La generalización de los coeficientes binomiales de segunda clase con el vector peso $\mathbf{w}$ denotado por $\left(\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}\right)_{\mathbf{w}}$, es el número total de maneras de seleccionar k bolas de las n cajas, pero primero escogemos k cajas (permitiendo la repetición de cajas), y luego seleccionando una bola de cada una de las cajas escogidas.

Notemos que con la repetición de cajas una bola seleccionada es retornada a su caja original, y puede nuevamente volver a ser seleccionada.

Supongamos que escogemos k cajas (permitiendo cajas repetidas) $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ con $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_k \leq n$, entonces hay $\mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_2}\cdots\mathbf{w}_{c_k}$ posibles maneras para seleccionar las k bolas.

Resumiendo sobre todas las maneras de escoger las k cajas con repetición obtenemos

$$\left(\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}\right)_{\mathbf{w}} = \sum_{1\leq c_1\leq c_2\leq\cdots\leq c_k\leq n} \mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_2}\cdots\mathbf{w}_{c_k}; \tag{3.2}$$

que es la generalización de los coeficientes binomiales de segunda clase.

Retomando nuestro ejemplo con $n = 4$ y $k = 3$ pero admitiendo la repetición de cajas llegamos a

$$\left(\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}\right)_{\mathbf{w}=(2,3,4,5)} = \sum_{1\leq c_1\leq\cdots\leq c_3\leq 4} \mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_2}\mathbf{w}_{c_3}.$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_1} + \mathbf{w}_{c_2}\mathbf{w}_{c_2}\mathbf{w}_{c_2} + \mathbf{w}_{c_3}\mathbf{w}_{c_3}\mathbf{w}_{c_3} + \mathbf{w}_{c_4}\mathbf{w}_{c_4}\mathbf{w}_{c_4}+\\
&\mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_2} + \mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_3} + \mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_4} + \mathbf{w}_{c_2}\mathbf{w}_{c_2}\mathbf{w}_{c_1}+\\
&\mathbf{w}_{c_2}\mathbf{w}_{c_2}\mathbf{w}_{c_3} + \mathbf{w}_{c_2}\mathbf{w}_{c_2}\mathbf{w}_{c_4} + \mathbf{w}_{c_3}\mathbf{w}_{c_3}\mathbf{w}_{c_1} + \mathbf{w}_{c_3}\mathbf{w}_{c_3}\mathbf{w}_{c_2}+\\
&\mathbf{w}_{c_3}\mathbf{w}_{c_3}\mathbf{w}_{c_4} + \mathbf{w}_{c_4}\mathbf{w}_{c_4}\mathbf{w}_{c_1} + \mathbf{w}_{c_4}\mathbf{w}_{c_4}\mathbf{w}_{c_2} + \mathbf{w}_{c_4}\mathbf{w}_{c_4}\mathbf{w}_{c_3}+\\
&\mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_2}\mathbf{w}_{c_3} + \mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_2}\mathbf{w}_{c_4} + \mathbf{w}_{c_2}\mathbf{w}_{c_3}\mathbf{w}_{c_4} + \mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_3}\mathbf{w}_{c_4}\\
&= (2\times 2\times 2) + (3\times 3\times 3) + (4\times 4\times 4) + (5\times 5\times 5)+\\
&(2\times 2\times 3) + (2\times 2\times 4) + (2\times 2\times 5) + (3\times 3\times 2)+\\
&(3\times 3\times 4) + (3\times 3\times 5) + (4\times 4\times 2) + (4\times 4\times 3)+\\
&(4\times 4\times 5) + (5\times 5\times 2) + (5\times 5\times 3) + (5\times 5\times 4)+\\
&(2\times 3\times 4) + (2\times 3\times 5) + (3\times 4\times 5) + (2\times 4\times 5)\\
&= 8+27+64+125+12+16+20+18+36+45+32+48+80+50+75+100+24+30+60+40\\
&= 910 \quad \text{maneras diferentes.}
\end{aligned}
$$

Proposición 3.1. *Si $n \geq k \geq 1$ con $n, k \in \mathbb{Z}^+$ y $\mathbf{w}_i = 1$ $\forall$ i con $1 \leq i \leq n$, entonces*

$$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}_{\mathbf{w}=\underbrace{(1,1,1\ldots,1)}_{\mathbf{n-veces}}} = \sum_{1\leq c_1\leq\cdots\leq c_k} \mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_2}\cdots\mathbf{w}_{c_k} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}.$$

La generalización de los coeficientes binomiales de primera clase es igual a los coeficientes binomiales de primera clase si las n cajas contienen exactamente una única bola.

De está manera en nuestro ejemplo si $\mathbf{w}_i = 1$ para todo i

$$
\begin{aligned}
\binom{4}{3}_{\mathbf{w}=(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})} &= 1\times 1\times 1 + 1\times 1\times 1 + 1\times 1\times 1 + 1\times 1\times 1\\
&= 1+1+1+1 = 4 = \binom{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Proposición 3.2. *Si* $n \geq k \geq 1$ *con* $n, k \in \mathbb{Z}^+$ *y* $\mathbf{w}_i$ *con* $1 \leq i \leq n$*, entonces*

$$\left(\!\!\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}\!\!\right)_{\mathbf{w}=\underbrace{(1,1,1\ldots,1)}_{\mathbf{n-veces}}} = \sum_{1\leq c_1\leq\cdots\leq c_k\leq n} \mathbf{w}_{c_1}\mathbf{w}_{c_2}\cdots\mathbf{w}_{c_k} \leq n = \left(\!\!\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}\!\!\right).$$

La generalización de los coeficientes binomiales de segunda clase es igual a los coeficientes binomiales de segunda clase cuando las n *cajas contienen una única bola cada una.*

Además si nosotros hacemos $\mathbf{w}_i = i$ y denotamos el vector de pesos por $S = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ entonces (2.17) y (2.20) muy seguramente serán la generalización de los coeficientes binomiales reducidos a los números de Stirling de primera y segunda clase, así (2.20) dará

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{1\leq\mathbf{w}_1<\mathbf{w}_2<\cdots<\mathbf{w}_{n-k}\leq n-1} \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\cdots\mathbf{w}_{n-k} = \binom{n-1}{n-k}_S. \tag{3.3}$$

Que son los números de stirling de primera clase $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, los cuales se pueden interpretar como el número de maneras de seleccionar $n-k$ bolas diferentes (una bola seleccionada por caja) escogiendo las cajas de un total de $n-1$ cajas, y donde la caja i tiene un peso i.

También de (2.17) obtenemos

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \sum_{1\leq\mathbf{w}_1\leq\mathbf{w}_2\leq\cdots\leq\mathbf{w}_{n-k}\leq k} \mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\cdots\mathbf{w}_{n-k} = \left(\!\!\binom{k}{n-k}\!\!\right)_S. \tag{3.4}$$

De esta manera los números se Stirling de segunda clase $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$, se pueden interpretar como el número de maneras de seleccionar $n-k$ bolas de $n-k$ cajas permitiendo la repetición de cajas (seleccionando una bola por caja) y escogiendo las cajas de un total de k cajas, donde la caja i tiene peso i.

Supongamos que q es un entero positivo y $\mathbf{w}_i = q^{i-1}$ para $1 \leq i \leq n$. Denotando el vector de pesos por $q = (1, q, q^2, \ldots, q^{n-1})$, entonces (2.26) y (2.27) muy seguramente son la generalización de los coeficientes binomiales reducidos a los coeficientes gaussianos de primera y segunda clase.

De está forma (2.27) dará

$$q^{\binom{k}{2}}\binom{n}{k}_q = \sum_{0\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n-1} q^{i_1+i_2+\cdots+i_k} = \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} q^{(i_1-1)+(i_2-1)+\cdots+(i_{k-1})} = \binom{n}{k}_q,$$

y (2.30) dará

$$\binom{n}{k}_q = \sum_{0\leq i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_k\leq n-k} q^{i_1+i_2+\cdots+i_k} =$$

$$\sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_k\leq n-k+1} q^{(i_1-1)+(i_2-1)+\cdots+(i_k} - 1) = \left(\binom{n-k+1}{k}\right)_q. \tag{3.5}$$

De está manera los coeficientes gaussianos ordinarios $\binom{n}{k}_q$ se pueden interpretar como el número de maneras para seleccionar k bolas de k cajas admitiendo repeticiones de cajas (seleccionando una bola por caja) y escogiendo las cajas de un total de $n-k+1$ cajas, donde la caja i tiene un peso q^{i-1}.

Proposición 3.3. *Sea $q = 1$ $n \geq k \geq 1$, $n, k \in \mathbb{Z}^+$, entonces*

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-k+1}{k}_q.$$

Los coeficientes binomiales de primera clase se expresan en términos de los coeficientes binomiales de segunda clase cuando $q = 1$. (Esto se deduce de las proposiciones 3.1, 3.2 y 3.3).

3.1. Generalización de las relaciones de recurrencia

Ahora demostraremos que las relaciones de recurrencia para los coeficientes binomiales, los números de Stirling y los coeficientes gaussianos se siguen inmediatamente de nuestra generalización de las relaciones de recurrencia.

Teorema 3.4. *Si* $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$ *con* $1 \le \mathbf{w}_1 \le \mathbf{w}_2 \le \ldots \le \mathbf{w}_n$*, entonces*

$$\binom{n}{k}_{\mathbf{w}} = \binom{n-1}{k}_{\mathbf{w}} + \mathbf{w_n}\binom{n-1}{k-1}_{\mathbf{w}}. \tag{3.6}$$

La generalización de los coeficientes binomiales de primera clase con vector de peso $\mathbf{w}$ satisface la relación de recurrencia (2.27).

Demostración.
Dada una k-selección de bolas de n distintas cajas, en donde la ultima caja (caja n), no fue escogida, entonces tenemos una k-selección de $(n-1)$ cajas, $\binom{n-1}{k}_{\mathbf{w}}$. Si la caja n es escogida, entonces hay $\mathbf{w}_n$ posibilidades para escoger la bola y el resto es una $(k-1)$-selección de $(n-1)$ cajas $\mathbf{w_n}\binom{n-1}{k-1}$. □

Teorema 3.5. *Si* $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$ *con* $1 \le \mathbf{w}_1 \le \mathbf{w}_2 \le \ldots \le \mathbf{w}_n$*, entonces*

$$\left(\binom{n}{k}\right)_{\mathbf{w}} = \left(\binom{n-1}{k}\right)_{\mathbf{w}} + \mathbf{w_n}\left(\binom{n-1}{k-1}\right)_{\mathbf{w}}. \tag{3.7}$$

La generalización de los coeficientes binomiales de segunda clase con vector de peso $\mathbf{w}$ satisface la relación de recurrencia anterior.

Demostración.
Dada una k-selección de bolas aceptando la repetición de cajas, en donde la última caja (caja n), puede o no ser escogida. Si la caja n no es escogida entonces tenemos una k-selección de $(n-1)$ cajas, sin olvidar que aceptamos la repetición de cajas. Si la caja n es escogida entonces hay $\mathbf{w}_n$ posibilidades para escoger la bola y el resto es una $(k-1)$-selección de (n) cajas, puesto que la repetición de cajas es permitida. □

Las relaciones de recurrencia de la propiedad (1.3) y la ecuación (1.6) para los coeficientes binomiales ordinarios se siguen inmediatamente de los teoremas (3.4) y (3.5) haciendo $\mathbf{w_i} = 1$.

Corolario 3.6. *Si* $\mathbf{w}_i = 1$ *y* $1 \le i \le n$*, entonces*

$$\binom{n}{k}_{\mathbf{w}} = \binom{n-1}{k}_{\mathbf{w}} + \binom{n-1}{k-1}_{\mathbf{w}}.$$

La generalización de la relación de recurrencia de los coeficientes binomiales de la primera clase con $\mathbf{w}_i = 1$ es igual a la relación de recurrencia de los coeficientes binomiales de la primera clase.

Corolario 3.7. *Si $\mathbf{w}_i = 1$ y $1 \leq i \leq n$, entonces*

$$\left(\binom{n}{k}\right)_{\mathbf{w}} = \left(\binom{n-1}{k}\right)_{\mathbf{w}} + \left(\binom{n}{k-1}\right)_{\mathbf{w}}$$

La generalización de la relación de recurrencia de los coeficientes binomiales de la segunda clase con $\mathbf{w}_i = 1$ es igual a la relación de recurrencia de los coeficientes binomiales de la segunda clase.

Si $\mathbf{w}_i = i$, entonces de la ecuación (3.3) aplicada en la ecuación (3.6) produce que $\mathbf{w} = S$ y $S = (1, 2, 3, \cdots, n)$, donde $n, k \in \mathbb{Z}^+$ con $n \geq k \geq 1$, entonces

$$\binom{n-1}{n-k}_S = \binom{n-1-1}{n-k}_S + (n-1)\binom{n-1-1}{n-k-1}_S$$

$$\binom{n-1}{n-k}_S = \binom{n-2}{n-k}_S + (n-1)\binom{n-2}{n-k-1}_S. \tag{3.8}$$

Igualando cada término de la ecuación (3.8) con la ecuación (3.3) obtendremos

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

Lo cuál se reduce a la ecuación (2.6), que es la relación de recurrencia de los números de Stirling de primera clase.

De la misma manera la ecuación (3.4) aplicada a la ecuación (3.7) produce:

$$\left(\binom{k}{n-k}\right)_S = \left(\binom{k-1}{n-k}\right)_S + k\left(\binom{k}{n-k-1}\right)_S. \tag{3.9}$$

Igualando cada término de la ecuación (3.9) con la ecuación (3.4) obtenemos

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix},$$

lo cuál se reduce a la ecuación (2.2), que es la relación de recurrencia para los números de stirling de segunda clase.

Finalmente si $\mathbf{w}_i = q^{i-1}$, entonces la ecuación (3.5) aplicada a la ecuación (3.7) produce

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)_{\mathbf{w}} = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right)_{\mathbf{w}} + \mathbf{w}_n \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right)_{\mathbf{w}}$$

$$\left(\!\binom{n-k+1}{k}\!\right)_q = \left(\!\binom{n-k}{k}\!\right)_q + q^{n-k} \left(\!\binom{n-k+1}{k-1}\!\right)_q . \tag{3.10}$$

Igualando cada término de la ecuación (3.10) con la ecuación (3.5) obtenemos que

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k}_q + q^{n-k}\binom{n-1}{k-1}_q .$$

Lo cuál se reduce a la ecuación (2.25), que es la relación de recurrencia para los coeficientes gaussianos.

Observemos que los coeficientes $(n-1)$, $\quad k \quad$ y $\quad q^{n-k}$ que ocurren en las relaciones de recurrencia de las ecuaciones (3.8), (3.9) y (3.10), (o las ecuaciones (2.2), (2.6) y (2.25)), respectivamente tiene una interpretación unificada como el peso de las últimas cajas en la respectiva selección.

3.2. Funciones generadoras

Las propiedades más formales de la generalización de los coeficientes binomiales se pueden estudiar en términos de funciones generadoras. Los coeficientes de la generalización de la primera clase $\binom{n}{k}_w$ se pueden representar formalmente como funciones simétricas elementales. De esta manera si $w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ y

$$f(x) = (1-w_1x)(1-w_2x)\cdots(1-w_nx) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sigma_k x^k,$$

donde $\sigma_0 = 1$ y para $k \geq 1$,

$$\sigma_k = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_k},$$

denota la k-ésima función simétrica elemental. Pero por la ecuación (3.1), $\binom{n}{k}_w = \sigma_k$

así $f(x)$ es una función generadora para $\binom{n}{k}_w$

$$f(x) = (1-w_1x)(1-w_2x)\cdots(1-w_nx) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}_w x^k. \tag{3.11}$$

La función generadora para la generalización de los coeficientes binomiales de la segunda clase es la función recíproca de $f(x)$, así:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(1-w_1x)(1-w_2x)\cdots(1-w_nx)} = \prod_{j=1}^{n}\sum_{i=0} w_j^i x^i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

donde $a_k = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} w_1^{i_1}w_2^{i_2}\cdots w_n^{i_n}$ con $i_1 \geq 0$, $i_2 \geq 0$, $\cdots$,$i_n \geq 0$.

Pero a_k es justamente $\left(\binom{n}{k}\right)_w$:

$$a_k = \sum w_1^{i_1}w_2^{i_2}\cdots w_n^{i_n} = \sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_k\leq n} w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_k} = \left(\binom{n}{k}\right)_w.$$

De esta manera obtenemos que

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(1-w_1x)(1-w_2x)\cdots(1-w_nx)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\binom{n}{k}\right)_w x^k. \tag{3.12}$$

Haciendo $w_i = 1, i$ ó q^{i-1} en las ecuaciones (3.11) y (3.12), obtenemos las funciones generadoras para los coeficientes binomiales, los números de Stirling y los coeficientes gaussianos respectivamente.

Los coeficientes binomiales $w_i = 1$

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k,$$

función generadora de los coeficientes binomiales de la primera clase.

$$\frac{1}{(1-x)}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\binom{n}{k}\right)_w x^k,$$

función generadora de los coeficientes binomiales de la segunda clase

Los números de Stirling ($w_i = 1$):

$$(1-x)(1-2x)\cdots(1-nx) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1-k \end{bmatrix} x^k,$$

función generadora de los números de stirling de primera clase.

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-nx)} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} n+k \\ n \end{Bmatrix} x^k,$$

función generadora de los números de stirling de segunda clase.

Los coeficientes gaussianos ($w_i = q^{i-1}$):

$$(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{n-1}x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q x^k,$$

función generadora de los coeficientes gaussianos de la primera clase.

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{n-1}x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k}_q x^k,$$

función generadora de los coeficientes gaussianos de la segunda clase.

3.3. Observaciones y conclusiones

Las interpretaciones clásicas de los coeficientes gaussianos en términos de subespacios y matrices estan mal definidas cuando $q = 1$. Pero si interpretamos los coeficientes gaussianos como extensiones de los coeficientes binomiales de segunda clase se les puede dar más significado ya que entre ellos comparten muchas propiedades. Por ejemplo, la propiedad simétrica (1.2) de los coeficientes gaussianos se puede probar combinatoriamente notando que las rejillas de los subespacios de un espacio vectorial finito $V(n,q)$ cada subespacio k-dimensional de V se puede unificar asociándolo con un subespacio $(n-k)$ dimensional de su espacio V^* dual.

Sin embargo, en está interpretación q debe ser una potencia prima. Formalmente la propiedad simétrica de los coeficientes gaussianos se sigue de la ecuación (2.21) y se reduce a la propiedad simétrica de los coeficientes binomiales de la primera clase (1.2) cuando $q = 1$.

¿Es posible dar una prueba combinatoria de la propiedad simétrica de los coeficientes gaussianos para $q \geq 1$?

La interpretación de los coeficientes gaussianos como generalización de los coeficientes binomiales de segunda clase con $\mathbf{w}_i = q^{i-1}$, reduce la propiedad simétrica a demostrar que

$$\left(\binom{n-k+1}{k}\right)_q = \left(\binom{k+1}{n-k}\right)_q. \tag{3.13}$$

Teorema 3.8. *(Prueba combinatoria de la propiedad simétrica de los coeficientes gaussianos)*

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q \qquad \text{para todo } q \geq 1.$$

Demostración.
Debemos demostrar que

$$\left(\binom{n-k+1}{k}\right)_q = \left(\binom{k+1}{n-k}\right)_q$$

por (3.5) tenemos que

$$\binom{n}{k}_q = \left(\binom{n-k+1}{k}\right)_q \qquad \text{para cualquier entero } q \geq 1,$$

y de la misma manera para

$$\binom{n}{n-k}_q = \left(\binom{k+1}{n-k}\right)_q \qquad \text{para cualquier entero } q \geq 1,$$

es decir (por (2.22))

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n-k+1} q^{(i_1-1)+(i_2-1)+\ldots+(i_k-1)} = \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_{n-k} \leq k+1} q^{(j_1-1)+(j_2-1)+\ldots+(j_{n-k}-1)}.$$

Si reemplazamos k en el lado izquierdo por $n-k$ obtenemos el coeficiente dual del lado derecho.

También cuando $q = 1$, obtenemos la propiedad simétrica para las combinaciones con repetición de números (1.5).

Ahora haremos la prueba combinatoria detalladamente: una selección de k cajas con repetición del conjunto $\{1, 2, \cdots, n-k+1\}$, donde $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n-k+1$, se puede asociar únicamente con una $n-k$ selección (el dual o selección conjugada) del conjunto $\{1, 2, \cdots, k+1\}$, donde $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_{n-k} \leq k+1$, por una secuencia de k ceros y $(n-k)$ unos como sigue. El número de ceros entre dos unos representa el número de veces que una respectiva caja es escogida de el conjunto $\{1, 2, \cdots, n-k+1\}$.

En otras palabras los unos actuan como separadores por ejemplo: si $n = 7$ y $k = 4$ entonces la secuencia (leida de izquierda a derecha) (0110010) representa la selección $\{1, 3, 3, 4\}$.

De está manera, el número de ceros de la izquierda del primer 1 es el número de veces que la caja 1 es seleccionada, mientras que el número de ceros entre el primero y el segundo 1 es el número de veces que la caja 2 es seleccionada, etc.

La selección dual es definida por un intercambio de papeles de 0 y 1 y entonces leyendo la secuencia de derecha a izquierda. De está forma, en la selección dual los ceros actuan como separadores. En nuestro ejemplo la selección dual con $(n-k) = 3$ es $\{2, 4, 4\}$.

Ahora demostraremos que una selección y su dual tienen el mismo q-peso.

Consideremos nuestra representación binaria de una k-selección general con repetición de $\{1, 2, \cdots, n-k+1\}$, donde hemos agrupado los bloques consecutivos de ceros y unos.

$$\underbrace{00\cdots0}_{a_1}\underbrace{11\cdots1}_{b_1}\underbrace{00\cdots0}_{a_2}\underbrace{11\cdots1}_{b_2}\cdots\underbrace{00\cdots0}_{a_{r-1}}\underbrace{11\cdots1}_{b_{r-1}}\underbrace{00\cdots0}_{a_r}.$$

Y donde $a_1 \geq 0$, $a_r \geq 0$ y $b_i \geq 1$, $a_j \geq 0$ para $1 \leq i \leq r-1$ y $2 \leq j \leq r-1$.

Tenemos $\sum_{i=1}^{r} a_i = k$ para la selección y $\sum_{i=1}^{r-1} b_i = n-1$ para la dual. Observe que a_1 es el número de veces que la caja 1 es escogida, mientras que a_2 es el número de veces que la caja $b_1 + 1$ es escogida, y en general a_i es el número de veces que la caja $(b_1 + b_2 + \cdots b_{i-1} + 1)$ es escogida (note que el peso de estas cajas es $q^{b_1+b_2+\cdots b_{i-1}}$ con la convención de que $b_0 = 0$). En el dual b_{r-1} es el número de veces que la caja $a_r + 1$ es escogida, mientras b_{r-2} es el número de veces que la caja $a_r + a_{r-1} + 1$ es escogida, y en general b_i es el número de veces que la caja $(a_r + a_{r-1} + \cdots + a_{i+1} + 1)$ es escogida.

Así

$$S_1 = \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{j=1}^{i-1} b_j \qquad \text{y}$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{r-1} b_i \sum_{j=i+1}^{r} a_j .$$

Pero $S_1 = \sum_{1 \le j < i \le r} a_i b_j = \sum_{1 \le i < j \le r} b_i a_j = S_2$, así el q-peso de una selección y su dual son lo mismo; esto es $q^{S_1} = q^{S_2}$. Por lo tanto, resumiendo todas las k-selecciones tenemos:

$$\sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n-k+1} q^{(i_1-1)+(i_2-1)+\cdots+(i_k-1)}$$

$$= \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n-k+1} q^{S_1}$$

$$= \sum_{1 \le j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_{n-k} \le k+1} b_i a_j = q^{S_2}$$

$$= \sum_{1 \le j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_{n-k} \le k+1} b_i a_j = q^{(j_1-1)+(j_2-1)+\cdots+(j_{n-k}-1)}$$

$\square$

Las identidades de los coeficientes gaussianos se pueden probar formalmente usando la definición y son q-análogas a las identidades de los coeficientes binomiales. Muchas identidades tienen pruebas combinatorias usando la interpretación unificada.

Por ejemplo, la q-identidad

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \binom{m+k}{m}_q = \binom{n+m+1}{m+1}$$

ó

$$\sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} \left(\!\binom{k}{m}\!\right)_q = \left(\!\binom{n+1}{m+1}\!\right).$$

Se puede probar como sigue.

El lado derecho se puede interpretar como el número de $(m+1)$-selecciones con repetición de cajas de el conjunto $\{1, 2, \cdots, n+1\}$. Para el lado izquierdo, si k es la última caja seleccionada ($1 \leq k \leq n+1$); entonces hay q^{k-1} selecciones para la última bola (el peso de la caja k es q^{k-1}) y el resto es una m-selección con repetición de cajas de el conjunto $\{1, 2, \cdots, k\}$.

Podemos concluir que la generalización de los coeficientes binomiales provee una interpretación combinatorial unificada de los coeficientes binomiales, los números de Stirling y los coeficientes gaussianos. La interpretación unificada está definida en términos de objetos (bolas) seleccionadas de cajas pesadas con o sin repetición de cajas. La notable similitud de las relaciones de recurrencia usadas para generar estas 3 clases de números son consecuencia inmediata de las relaciones de recurrencia para la generalización de los coeficientes binomiales. Los coeficientes gaussianos definidos como extensiones de los coeficientes binomiales de primera clase son interpretados como extensiones de los coeficientes binomiales de la segunda clase (combinaciones con repetición).

Bajo esta interpretación combinatoria muchas identidades de los coeficientes gaussianos se pueden probar para todo $q \geq 1$. La generalización de los coeficientes binomiales revela otra perspectiva para extender las relaciones entre los coeficientes binomiales, los números de Stirling y los coeficientes gaussianos.

Bibliografía

[1] M. Aigner. *Whitney number, in Combinatorial Geometris*. N. White (editor), Cambridge Univ. Press. Cambridge, UK, 1987. pp $139-160$.

[2] G.E Andrews *Theory of partitions* . Addison-Wesley, Reading. MA. 1976.

[3] J. Konvalina. *Generalized binomial coefficients and the subset-subspace problem, Adv, Appl Math* 21, 1998. pp $228-240$.

[4] H. Rademachet. *Lectures on Elementary Number Theory*. Blaisdell, New York, 1964.

[5] K.H Rosen. *Matemática discreta y sus aplicaciones*. Mc Graw Hill,5ª edición, 2003.

[6] G.C Rota. *On the foundations of combinatorial theory I, Theory of Möbius functions*. Z. Warsch. Venv. Gebiete 2, 1964. pp $340-368$.

[7] G.C Rota. *Gian-Carlo Rota on combinatories, J Kung (editor)*. Birkhauser, 1995.

[8] R. Graham, D. Knuth, and O. Patashnik. *"Concrete Mathematics: A Foundation for computer Science"*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

[9] R.P. Stanley. *Emamerative Combinatories, Wadsworth & Brooks/Cole*. Belmont, CA, 1986.