

UN CONJUNTO DORADO DE CANTOR
Análisis de un artículo

DÚWAMG ALEXIS PRADA MARÍN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2006

UN CONJUNTO DORADO DE CANTOR

DÚWAMG ALEXIS PRADA MARÍN

Trabajo presentado para optar el título de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Directora

SONIA MARLENI SABOGAL PEDRAZA

Doctora en ciencias matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2006

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1. PRELIMINARES	5
1.1. Espacios métricos	5
1.2. El espacio de los códigos	6
1.3. Topología	7
2. RESEÑA HISTÓRICA	11
2.1. Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor	11
2.2. La razón áurea	14
3. EL CONJUNTO DE CANTOR	22
3.1. Construcción geométrica del conjunto de Cantor	22
3.2. Construcción analítica del conjunto de Cantor	23
3.3. ζ como espacio métrico	30
3.4. ζ como espacio topológico	33
4. UN CONJUNTO DORADO DE CANTOR	37
4.1. Traducción del artículo: “ <i>A golden Cantor set</i> ” [12]	37
4.2. Algunas observaciones sobre el artículo	49
5. CONCLUSIONES	59
BIBLIOGRAFÍA	60

Título: UN CONJUNTO DORADO DE CANTOR*

Autor: PRADA MARÍN Duwang Alexis**

Palabras claves:

Razón Áurea

Conjunto Dorado

Número Dorado

Conjunto cantor

Descripción y contenido:

El presente trabajo muestra la relación existente entre el conjunto de Cantor y la razón áurea, en donde se brinda solución a un simple pero interesante problema geométrico, del cual se construye un conjunto de Cantor especial que será denominado: “Un conjunto dorado de Cantor”.

Al contrario de lo que muchos piensan no solo existe un conjunto de Cantor; el conocido conjunto ternario de Cantor, sino que además se pueden hacer conjuntos de Cantor variando la longitud del intervalo hueco intermedio que se denomina α .

Este problema geométrico plantea si es posible intersecar dos α – *medios* conjuntos de Cantor, de tal forma que la longitud de los intervalos componentes, que se denomina β , de uno de dichos conjuntos quede entretejido en los intervalos huecos del otro, dejando así como único elemento de intersección a cero.

Existe un valor crítico de β para el cual el problema tiene solución, es en este valor donde se encuentra la razón áurea realizando el cociente entre el valor de los intervalos β y el valor del intervalo hueco intermedio α .

Además en el trabajo se muestra una forma análoga de construir el conjunto de Cantor utilizando notación binaria y números en base tres.

Como reseña histórica se realiza una breve pero interesante biografía de Cantor y se muestra una aplicación de la razón áurea en nuestra vida.

*Monografía

**Facultad de Ciencias, Escuela de matemáticas. Director: Sonia Marleni Sabogal Pedraza

Title: A GOLDEN CANTOR SET*

Author: PRADA MARÍN Duwang Alexis**

Keywords:

Golden Ratio

Golden Set

Golden Number

Cantor Set

Content:

The current work shows the relationship existing between the cantor set and the golden ratio in which a solution to a simple but interesting geometrical problem is given. From this we have made a special cantor set that will be called “a golden cantor set”.

Contrary to what many people think, there is not only one existing cantor set, the well-known tertiary cantor set, but also we can make cantor sets varying the length of the intermediate empty interval that we will call “alpha”.

What this geometrical problem suggests is if it is possible may intersect two half alpha cantor sets so that the length of the component intervals, that we will call “beta”, of one of the involved sets remains conjoined to one of the empty intervals of the other one, leaving zero as the only intersection element.

There is a critical value for “beta” in which the problem has a solution and it is in this value where we find the golden ratio making the quotient between the beta interval values and the intermediate empty interval alpha value.

Moreover in this work, it is shown an analogue way to make the cantor set using binary notation and three-based numbers.

As it reviews historical is made a brief but interesting biography of Cantor and it is also shown how the golden ratio is applied to our lives.

*Monograph

**Facultad de Ciencias, Escuela de matemáticas. Director: Sonia Marleni Sabogal Pedraza

INTRODUCCIÓN

La matemática a través de los tiempos ha ofrecido solución a muchos problemas que se han planteado. Dentro del campo matemático encontramos una serie de números maravillosos, conjuntos extraordinarios, distintas geometrías, y un sin fin de aplicaciones a las cosas que existen. Todos estos elementos de la matemática no son ajenos entre ellos. En este trabajo mostraremos, a partir del análisis del artículo “A golden Cantor set” [13], una interesante relación entre el *conjunto de Cantor* y la *razón dorada*, también llamada la *proporción divina* por Leonardo da Vinci. La construcción clásica del conjunto ternario de Cantor se basa en “suprimir” los **tercios medios** de los intervalos que van quedando, a partir del intervalo $[0, 1]$; esta construcción se puede generalizar suprimiendo en vez de los “tercios medios”, por ejemplo, los “cuartos medios” o los “quintos medios” o en general los “ α -medios” siendo $\alpha \in (0, 1)$, lo que generaría la versión *α -medio conjunto de Cantor*, notada ζ_α . El problema central que plantea el artículo en cuestión es determinar condiciones para que dos de tales conjuntos de Cantor generalizados se intersequen únicamente en cero (es decir, $\zeta_\alpha \cap \zeta_{\alpha'} = \{0\}$). Pues bien, la solución a este problema está íntimamente ligada a la proporción divina, y esto es lo que se muestra en el artículo [13].

El presente trabajo consta de cuatro capítulos. En el primer capítulo (“Preliminares”), recopilamos conceptos y resultados del análisis y topología que se usarán en los siguientes capítulos. Hemos dedicado el segundo capítulo (“Reseña histórica”) por una parte a la vida de Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, para conocer algunos detalles de sus estudios, sus ideas más brillantes, sus descubrimientos, su corriente filosófica y hasta la locura que padeció este gran matemático, y por otra parte, miraremos diferentes aplicaciones que ha tenido la razón dorada, como su utilización en construcciones importantes como el Partenón

y la pirámide de Giza; también su utilización en obras de arte como *la Mona Lisa*, *La última cena*, *el hombre de Vitrubio*, entre otros. Además, veremos algunas curiosidades interesantes, como una relación entre la razón dorada y la serie de Fibonacci.

En la mayoría de libros y clases de matemáticas se presenta el conjunto de Cantor a partir de su construcción geométrica, y de allí se empiezan a mostrar sus propiedades más importantes; en el capítulo tres de la presente monografía (“El conjunto de Cantor”), se presenta dicho conjunto desde diferentes puntos de vista; en particular, se muestra una construcción analítica, realizada por José Mateos Cortés [5], con lo cual se demuestra que el conjunto de Cantor es un espacio métrico (y topológico), compacto, no vacío, totalmente disconexo, perfecto y no numerable.

En el cuarto y último capítulo (“A golden Cantor set”), se muestra la traducción del artículo escogido para este trabajo y se continúa con su análisis, haciendo algunas observaciones al respecto, usando también las referencias bibliográficas encontradas, examinando nociones que intuitivamente podrían ser muy claras, pero que no son tan sencillas de formalizar, como por ejemplo, la diferencia de tamaño entre dos conjuntos de Cantor.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo se recopilan varios conceptos y resultados fundamentales que se utilizarán en este trabajo. La primera sección está dedicada a los espacios métricos, la segunda al espacio de los códigos y finalmente se estudiarán algunos conceptos topológicos. Las definiciones, conceptos y resultados que aparecen en este capítulo han sido tomadas principalmente de [1] y de [3].

1.1. Espacios métricos

Definición 1.1.1. Sean X un conjunto no vacío y $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface para cualesquiera $x, y, z \in X$:

- i) $d(x, y) \geq 0$;
- ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$;

entonces d se llama **métrica** sobre X , y la pareja (X, d) se llama **espacio métrico**.

Definición 1.1.2. Sean (X, d) espacio métrico, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Se define **bola** con centro en x y radio ε como el conjunto $B_d(x; \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.

Definición 1.1.3. Dado (X, d) espacio métrico y $A \subseteq X$, se dirá que A es **abierto** si y sólo si $\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0$, tal que $B_d(a; \varepsilon) \subseteq A$.

Definición 1.1.4. Dado (X, d) espacio métrico y $A \subseteq X$, se dirá que A es **cerrado** si y sólo si $X - A$ es abierto.

Definición 1.1.5. Sean X un conjunto no vacío y $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ una función; la función f se llama **sucesión** en X y se nota $f(n) = x_n$. Comúnmente se identifica la sucesión con el recorrido ordenado de la función de la siguiente forma: $f = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$.

1.2. El espacio de los códigos

Se presentará a continuación la definición del espacio de los códigos y resultados importantes relativos a dicho espacio, que se necesitarán en este trabajo.

Definición 1.2.1. Sea $\Sigma = \{1, \dots, N\}$ donde $N \in \mathbb{N}$. Se define $\Sigma^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma \mid f \text{ es función}\}$.

De la definición 1.1.5 presentada anteriormente, podemos concluir que los elementos de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ son sucesiones $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$, donde $\alpha_i \in \Sigma$, que escribiremos como $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots$, y a cada sucesión la llamaremos un **código**.

Definición 1.2.2. Se define $\forall \alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$,

$$d_c(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i}.$$

Proposición 1.2.1. La función $d_c : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ está bien definida.

Teorema 1.2.1. $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$ es espacio métrico.

La demostración de las dos anteriores afirmaciones son inmediatas.

Definición 1.2.3. El espacio $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d_c)$ se llama **espacio de los códigos**.

La siguiente proposición muestra qué forma tienen las bolas dentro de este espacio métrico.

Proposición 1.2.2. Sean $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces:

$$B_{d_c}(\alpha; \varepsilon) = \begin{cases} \Sigma^{\mathbb{N}}, & \text{si } \varepsilon \geq 1, \\ \{\beta \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \alpha_i = \beta_i, \forall i = 1, \dots, k\}, & \text{para algún } k \in \mathbb{N}, \text{ si } \varepsilon < 1. \end{cases}$$

Una prueba de esta proposición se puede encontrar en [3].

1.3. Topología

A continuación se enuncian algunas propiedades y los conceptos más importantes de topología que se usarán principalmente en el capítulo 3.

Definición 1.3.1. Espacio topológico: Sea X un conjunto y τ una familia de subconjuntos de X (es decir $\tau \subseteq P(X)$). Se dice que τ es una **topología** sobre X , si se cumplen los siguientes axiomas:

- i) $\emptyset, X \in \tau$.
- ii) Si $A, B \in \tau$ entonces $A \cap B \in \tau$.
- iii) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos de τ , entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

En tal caso el par (X, τ) se llama **espacio topológico** y los elementos de τ se llaman **abiertos**.

Nota 1.1. *ii* significa que la intersección finita de abiertos es un abierto.

Proposición 1.3.1. *Todo espacio métrico es también un espacio topológico.*

Posteriormente en el ejemplo 1.3.2 se muestra la relación mencionada entre un espacio métrico y un espacio topológico.

Definición 1.3.2. Base para alguna topología: Sean X un conjunto y $\mathfrak{B} \subseteq P(X)$; se dice que \mathfrak{B} es *base para alguna topología* sobre X , si se cumplen las siguientes condiciones:

- i) $\bigcup \mathfrak{B} = X$
- ii) Si B_1 y $B_2 \in \mathfrak{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. En tal caso, la familia

$$\langle \mathfrak{B} \rangle = \{G \subseteq X \mid (\forall x \in G)(\exists B_x \in \mathfrak{B})(x \in B_x \subseteq G)\}$$

es una **topología** sobre X , llamada la **topología generada** por \mathfrak{B} .

Definición 1.3.3. Base para una topología: Sean (X, τ) un espacio topológico y \mathfrak{B} una familia de abiertos (es decir $\mathfrak{B} \subseteq \tau$). Se dice que \mathfrak{B} es **una base para τ** , si todo elemento de τ es unión de elementos de \mathfrak{B} ; equivalentemente: si para cualquier $O \in \tau$ y $x \in O$, existe $B_x \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq O$.

Ejemplo 1.3.1. Topología ordinaria de \mathbb{R} (τ_u): sea $X = \mathbb{R}$, se tiene que:

$\tau_u = \left\{ \bigcup_{\alpha} (a_{\alpha}, b_{\alpha}) \mid a_{\alpha}, b_{\alpha} \in \mathbb{R} \right\}$ es una topología sobre \mathbb{R} , llamada la **topología ordinaria**.

Ejemplo 1.3.2. Topología generada por una métrica. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces la familia de todas las bolas (definición 1.1.2) es base para una topología τ_d sobre X , llamada la **topología generada por la métrica d** . En este caso se puede demostrar que los abiertos (es decir los elementos de τ_d) son exactamente los mismos abiertos de la definición 1.1.3.

Ejemplo 1.3.3. Topología discreta: Sean X un conjunto y $\tau = P(X)$; τ es una topología sobre X , llamada **topología discreta**.

Definición 1.3.4. Interior de un conjunto: Sean (X, τ) un espacio topológico, $A \subseteq X$, $x \in A$. Diremos que x es un **punto interior** de A si y solo si existe $O \in \tau$, tal que $x \in O \subseteq A$. El conjunto de los **puntos interiores** de A se llama el **interior** de A , y se nota A° ó $int(A)$.

Proposición 1.3.2. Una caracterización de los conjuntos abiertos: Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces A es abierto si y solo si $A = A^\circ$.

Definición 1.3.5. Conjuntos cerrados: Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Diremos que A es **cerrado** si y solo si $X - A \in \tau$, es decir, si $X - A$ es abierto.

Los conjuntos cerrados poseen las siguientes propiedades, que son “duales” de las propiedades de los abiertos: toda intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, y toda reunión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Ejemplo 1.1. En (\mathbb{R}, τ_u) los interiores de $[0, 1)$, $(0, 1) \cup (2, 3)$ y \mathbb{Q} son $(0, 1)$, $(0, 1) \cup (2, 3)$ y \emptyset respectivamente, de lo cual se puede afirmar que $(0, 1) \cup (2, 3)$ es abierto mientras que $[0, 1)$ y \mathbb{Q} no lo son. Los conjuntos $[0, 1]$, $(-\infty, 0] \cup [1, 2]$ son cerrados, mientras que $[0, 1)$ y \mathbb{Q} no lo son.

Definición 1.3.6. Conjunto acotado: Sea (X, d) un espacio métrico y $S \subseteq X$. Se dice que S es **acotado** si está contenido totalmente en una bola $B(a; r)$ para algún $r > 0$ y algún $a \in X$.

Teorema 1.3.1. Teorema de encaje de Cantor Sea $\{Q_1, Q_2, \dots\}$ una colección numerable de conjuntos, no vacíos, de \mathbb{R}^n tales que:

$$i) Q_{k+1} \subseteq Q_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots);$$

ii) Cada uno de los conjuntos Q_k es cerrado y Q_1 está acotado;

Entonces la intersección $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ es cerrada y no vacía.

Definición 1.3.7. Una colección de conjuntos F se denomina **recubrimiento** de un conjunto dado X si

$$X \subseteq \bigcup_{A \in F} A.$$

Se dice también que la colección F **recubre** a X . Si X es un espacio topológico y F es una colección de conjuntos abiertos, entonces F se denomina **recubrimiento abierto** de X .

Definición 1.3.8. Conjunto compacto: Un espacio topológico X se llama **compacto** si, y sólo si, cada recubrimiento abierto de X contiene un subrecubrimiento finito; esto es, una subcolección finita que también recubra a X .

Teorema 1.3.2. Sea X un subconjunto de \mathbb{R} (considerando a \mathbb{R} con su topología ordinaria). Entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

- i) X es compacto;
- ii) X es cerrado y acotado;
- iii) Todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación en X .

Definición 1.3.9. Si (X, d) es un espacio métrico y $S \subseteq X$, se dice que S es **denso en sí mismo** si para cualesquiera $x \in S$ y $\varepsilon > 0$, existe $y \in S$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$.

En el caso particular de (\mathbb{R}, d_u) , $S \subseteq \mathbb{R}$ es denso en sí mismo, si para cualquier par de elementos $x, y \in S$ existe $z \in S$ tal que $x < z < y$.

Definición 1.3.10. Espacio disconexo y espacio conexo: Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que X es **disconexo** o **no conexo** si existen dos abiertos, disjuntos no vacíos, cuya unión es X . Es decir, si existen A y B tales que:

- i) A y B son abiertos;
- ii) $A \cap B = \emptyset$;
- iii) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$;

$$\text{iv) } A \cup B = X$$

En tal caso $\{A, B\}$ es una **disconexión** de X . Si no existe **disconexión** de X , entonces X se dice **conexo**.

Definición 1.3.11. Caracterización de los espacios conexos: un espacio topológico (X, τ) es **conexo** si y solo si los únicos subconjuntos de X que son simultáneamente abiertos y cerrados (abierto-cerrados) son \emptyset y X .

Definición 1.3.12. Espacio totalmente desconexo: Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que (X, τ) es **totalmente desconexo** si τ admite una base de abierto-cerrados.

Ejemplo 1.2. (\mathbb{R}, τ_u) es un espacio conexo; los subespacios $(0, 1) \cup [2, 3)$ y \mathbb{Q} son desconexos y \mathbb{Q} es además totalmente desconexo.

Definición 1.3.13. Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$, $V \subseteq X$ es una vecindad de x si existe un abierto O tal que $x \in O \subseteq V$.

Definición 1.3.14. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Un punto $x \in X$ se dice **punto de acumulación** de A si para toda vecindad V de x se tiene que:

$$(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Definición 1.3.15. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Diremos que A es **perfecto** si es cerrado y todo punto de A es punto de acumulación de A .

Definición 1.3.16. Un espacio topológico (X, τ) es llamado de **Hausdorff** si $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists A, B \subseteq X$ abiertos tales que $x \in A$, $y \in B$ y $A \cap B = \emptyset$.

Teorema 1.3.3. *Todo espacio métrico es de Hausdorff.*

CAPÍTULO 2

RESEÑA HISTÓRICA

2.1. Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor

Se entiende por conjunto la agrupación de un todo de objetos bien diferenciados de nuestra intuición o de nuestra mente.

CANTOR.

Esta sección dedicada a la vida de Cantor, está soportada principalmente en [2] y en [10].

Georg Cantor nació en San Petersburgo (Rusia) el 3 de marzo de 1845, hijo mayor de Georg Waldemar Cantor y María Bohm. Cuando su familia se trasladó a Alemania, asistió a escuelas privadas de Frankfort y de Damstadt, luego ingresó al Instituto de Wiesbaden en 1860, cuando tenía 15 años. Comenzó sus estudios universitarios en Zúrich, en 1862, pero al siguiente año pasó a la Universidad de Berlín, donde se especializó en matemáticas, filosofía y física; fue catedrático de la universidad de Halle en 1869. La primera contribución importante de Cantor a la matemática es una teoría de los números irracionales que expuso en 1872, año en que aparecieron teorías semejantes de Weierstrass, de Charles Méray y Dedekind.

En 1873 estudia problemas de equipotencia y la clasificación de los conjuntos “excepcionales”. Fueron los estudios acerca de los números reales, los que condujeron a Cantor a la teoría de conjuntos en el decenio 1874-1884. A partir de este último año, Cantor sufrió varias internaciones psiquiátricas, debido a las dificultades y a los esfuerzos infructuosos por tratar de demostrar la “hipótesis del continuo” (problema que planteaba la teoría).

Después de años de trabajo concentrado en el discurso de la matemática, en 1883 Cantor empieza a publicar consideraciones filosóficas sobre lo que implica su manera de entender la realidad de las nociones que introduce. En ese año publica su texto *Fundamentos de una teoría general de los conjuntos*, donde discute la realidad de los números finitos e infinitos. A ellos puede adjudicarse una realidad transubjetiva o trascendente, de la que puede ocuparse la metafísica, o bien una realidad intrasubjetiva o inmanente, que es la única que verdaderamente interesa a la matemática en tanto tal, es decir en tanto “matemática libre”. Cantor expresa en el texto:

La matemática es plenamente libre en su desarrollo, y no conoce sino una única obligación: sus conceptos deben ser no contradictorios en sí mismos y sostener por otra parte con los conceptos formados anteriormente, ya presentes y asegurados, relaciones fijas, reguladas por las definiciones. En particular, para poder introducir nuevos números, solamente se requiere dar definiciones que les confieran precisión y, llegado el caso, una relación tal con los antiguos números, que se puedan distinguir unos de otros de un modo determinado. Desde que un número satisface todas estas condiciones, puede y deber ser considerado como existente y real en la matemática.

Hacia 1887, volvió a ocuparse de la teoría de conjuntos. Además del progreso técnico que representa y de la importancia de sus conceptos, la teoría de conjuntos trae a primer plano la cuestión del infinito a la matemática. La cuestión venía de lejos: basta pensar que la distinción hoy corriente entre infinito potencial e infinito actual procede de Aristóteles. Aún sin ocuparse expresamente de matemática, los escritos de Aristóteles contienen numerosas referencias a esta ciencia, que él define como el aspecto continuo y cuantitativo de las cosas; de ahí que, al apartarla del mundo de la experiencia, reconozca que la lógica, legisladora de esa experiencia, no basta para explicar el mecanismo de la demostración matemática.

A este resultado, sin duda interesante, debe agregarse el que se desprende de las consideraciones aristotélicas acerca de la vinculación de la matemática con el infinito.

Aristóteles admite el infinito, ya hacia lo grande, por adición, ya hacia lo pequeño, por división, pero sólo en potencia, jamás en acto. Mas este infinito potencial actúa de modo distinto según se trate de los números o de las magnitudes.

Entre las ideas más brillantes y originales, simples, elegantes y poderosas de Cantor tenemos:

- Las cantidades infinitas no son absurdas o imposibles, sino números que requieren un álgebra nueva para entregar sus secretos.

- La propiedad de tener partes que son “iguales” que el todo es la propiedad determinante de los números infinitos.
- Se dice que dos conjuntos de objetos tienen el mismo número de elementos si estos pueden ser puestos en correspondencia uno-a-uno.
- Los números racionales son enumerables (contables), ya que de un modo sencillo se pueden poner en una relación uno-a-uno con los enteros positivos, a pesar de que parecen ser muchos más.
- Los números reales no son enumerables.

La lista de ideas novedosas de Cantor no se detuvo allí. Con igual desenvoltura demostró que la cantidad de los elementos de un conjunto es menor que los subconjuntos de dicho conjunto. De lo cual rápidamente dedujo la siguiente consecuencia: el conjunto de subconjuntos es un principio generador, para cualquier conjunto dado, de conjuntos mayores, (incluso si se tratara del conjunto de todos los conjuntos).

En 1891 se demuestra la existencia de los conjuntos infinitos no enumerables siguiendo el método diagonal, que ya no reposa sobre la idea del continuo en la recta infinita, sino en la escritura decimal de los números reales, es decir, en una pura sintaxis que prescinde de toda referencia exterior a sus propias reglas.

En 1895 Cantor desarrolla la teoría de conjuntos ordenados (aritmética de ordinales), y demuestra que la colección de todos los ordinales, que es una colección bien ordenada, no podría tratarse como un conjunto, pues sería a su vez un ordinal y por tanto sería equivalente a un segmento propio. Cantor reconoció que “clase” es un concepto intuitivo, y en este año la definió : entendemos por clase toda reunión en un sólo conjunto de objetos bien distinguidos de nuestra intuición o de nuestro pensamiento.

En 1897 la teoría de conjuntos recibe reconocimiento en el Congreso Internacional de Matemáticas en Zúrich. A partir de 1899 Cantor estuvo internado por varios periodos de varios meses, casi regularmente cada año, en alternancia con las etapas en que trabajaba en matemática y docencia universitaria.

Sus consideraciones acerca de Dios anticipan por el contrario la concepción de Dios como efecto real del lenguaje, efecto del que Lacan desprendió toda suposición, para aislar en él al

uno que hay. En 1908, es decir después de varias internaciones psiquiátricas, en respuesta a Poincaré, que le imputaba el sostén de un género supremo, Cantor afirma: jamás he derivado ningún “género supremo” del infinito actual. Por el contrario, he demostrado que no hay en absoluto “género supremo” del infinito actual. Lo que sobrepasa todo lo finito y transfinito no es ningún “género”; es la simple unidad en la cual todo está incluido, que incluye incluso el “absoluto” incomprensible para el entendimiento humano. Es el “actus purissimus” que por muchos es llamado “Dios”.

Georg Cantor falleció en Halle (ciudad del centro de Alemania), el 6 de enero de 1918.

2.2. La razón áurea

La razón áurea designa una relación de magnitud entre las diferentes partes de un todo. Su aplicación se extiende a todos los saberes cuantificables y dio lugar, en el transcurso de los siglos, a desarrollos en su mayoría de las veces místicos. La razón áurea está presente en las obras del Egipto antiguo. Su teoría es expuesta por primera vez en *Elementos de geometría* de Euclides, en el siglo III a.C.

Pitágoras parte de la idea de que el universo está constituido de una misma materia (materia prima) cuyos elementos, aunque estén separados, están unidos según un orden inmutable. Ninguna modificación, ningún cambio que afecte a uno de estos elementos puede producirse sin provocar una alteración en el conjunto. Una ley establecida por la divinidad suprema organizó este orden inmutable, creando de esta manera una armonía perfecta entre los distintos elementos. El concepto de proporción, o de razón áurea deriva entonces del concepto de orden, y este descansa sobre el principal axioma elaborado por Pitágoras: “Todo está bien ordenado según el número” (véase [11]). En efecto, la armonía perfecta se expresa en números. Por ejemplo, comparando el largo de las cuerdas con la altura de los sonidos de las siete notas de la escala musical griega, Pitágoras descubre relaciones que son el fundamento de los acordes musicales. Estas relaciones son matemáticas: los intervalos musicales pueden ser expresados en forma simple, combinando los cuatro primeros números cuya adición suma 10.

La ley del número áureo se generaliza entonces en las artes griegas y en la arquitectura. El número áureo es también aplicado a las proporciones del cuerpo humano. Encontramos el

origen de esta aplicación en el romano Vitruvio, autor del primer tratado importante sobre arquitectura. En el libro III de su obra *De architectura*, redactado el año 25 a.C., Vitruvio desarrolla la idea de que la proporción en materia de construcción debe aplicarse por analogía con el cuerpo humano, es decir, que la geometría de los edificios debe calcarse de la armonía del cuerpo humano [11].

Los rectángulos dorados son rectángulos que tienen una proporción entre su ancho y alto igual al cociente dorado. Podemos construir un rectángulo dorado de la siguiente manera: inicialmente construimos un cuadrado de lado 1, dividimos su base por la mitad y trazamos una perpendicular a ella que esté contenida dentro del cuadrado, es decir, tenemos dos rectángulos dentro del cuadrado cada uno de base $\frac{1}{2}$ y de altura 1; tomamos uno de los rectángulos, trazando una diagonal a partir del punto medio, y con ayuda del compás, trazamos un arco con centro en el punto medio del cuadrado y de radio la diagonal del rectángulo. El punto de corte entre el arco y la prolongación de la recta que es base de los dos rectángulos marcará el extremo de la base del rectángulo (*ver figura 2.1*), cuya longitud será, como se puede ver fácilmente, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (aproximadamente 1,618), número que denotaremos mediante la letra griega ϕ .

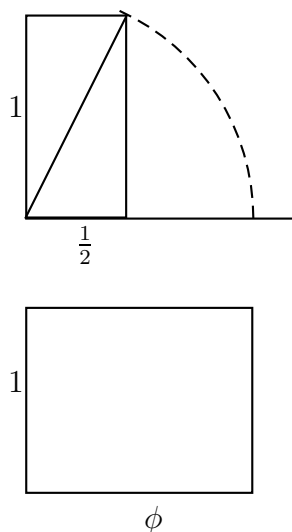
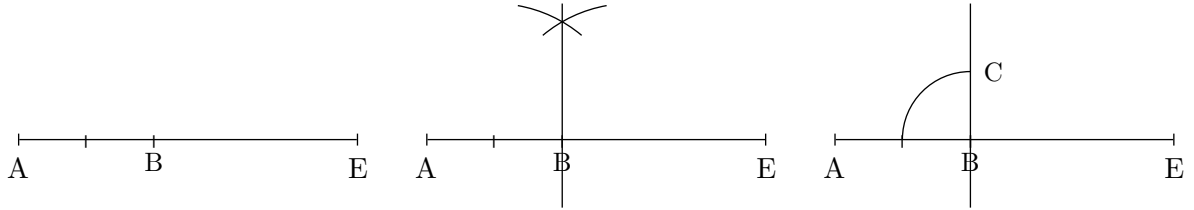


Figura 2.1: *Construcción de un rectángulo dorado*

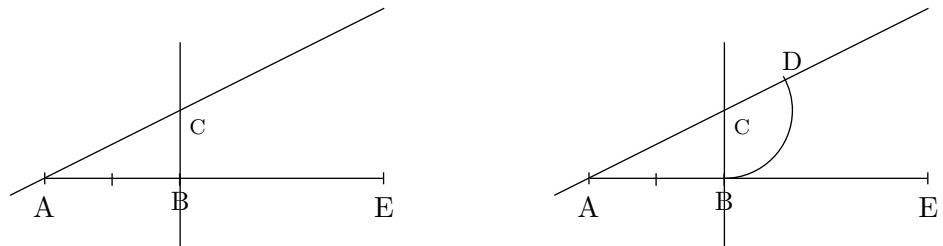
Veamos ahora como ese número ϕ aparece inesperadamente en la construcción del pentágono regular:

Se trata de construir un pentágono regular usando compás y regla no graduada. Para la construcción la clave está en construir una longitud de tamaño ϕ .

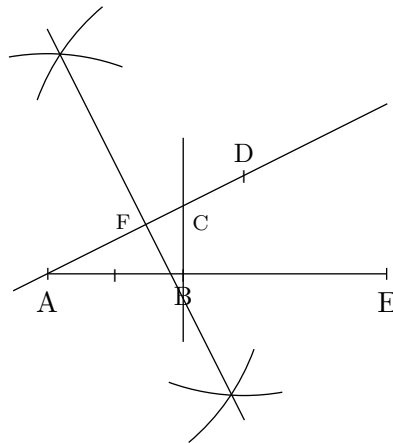
- i) Dibujar el segmento AE, con el compás determinamos el punto B situado a dos unidades del punto A. Se construye una perpendicular que pase por B y desde el punto B se lleva una unidad hasta la perpendicular para determinar la longitud BC.



- ii) Se une A con C y se prolonga la recta. De este modo, por el teorema de Pitágoras el segmento AC es la raíz cuadrada de 5. Posteriormente, usando el compás se señala el punto D en la recta que pasa por A y C a una unidad de longitud de C.



- iii) De esta manera, AD mide $1 + \sqrt{5}$ y nuevamente con el compás se determina el punto medio AF del segmento AD para obtener una longitud de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

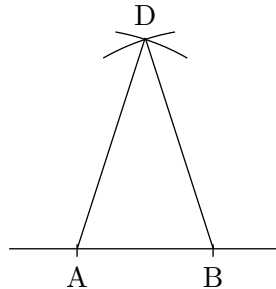


Conocidos los segmentos AB (lado del pentágono) y AD (la diagonal), hay varios métodos para la construcción del pentágono. Uno de ellos puede ser:

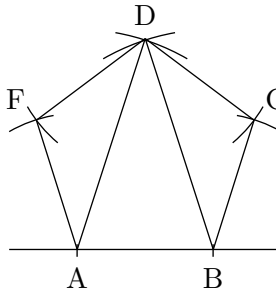
- i) Sobre una recta marcar con el compás el segmento AB, que es el lado.



- ii) Usando el compás, con amplitud AD y con centro en A y en B, trazar el arco que determina el punto D; los segmentos AD y BD son diagonales del pentágono.



- iii) Tomando con el compás la distancia AB y con centro en D, en A y en B, se trazan los arcos que determinan los vértices F y G del pentágono.



En el detalle de *La Leda atómica* de Dalí (ver figura 2.2) se nos muestra el patrón pentagonal que rige la forma y la disposición de los elementos en la pintura.

Este valor también se encuentra en las espirales de las conchas de ciertos animales marinos, como es el caso del *nautilus* (ver figura 2.3). A esta espiral se la conoce como espiral logarítmica, y tiene la característica de que cada 90° el radio de la circunferencia se incrementa en una proporción igual al valor del cociente dorado.

Figura 2.2: *Leda Atomica* de Dalí

Figura 2.3: *Nautilus*

Se dice que la proporción del rectángulo dorado es muy agradable al ojo humano, por lo cual grandes artistas la han empleado en sus obras. Los griegos bautizaron este número como Cociente Dorado, y a pesar de que ellos no creían en los números irracionales, lo utilizaron en una de sus más grandes obras: el Partenón.

Siglos más tarde, artistas y arquitectos del renacimiento italiano desarrollan esta idea: Piero della Francesca, Leonardo da Vinci y el alemán Alberto Durero reflexionaron sobre las proporciones ideales del cuerpo humano. En la época contemporánea, la razón áurea sigue fascinando: los espíritus románticos buscan una ley secreta y universal que explique la belleza de las obras maestras de la humanidad [6].

En *La Mona Lisa* de Da Vinci podemos observar el patrón de triángulos dorados que rige la composición de la obra. Los triángulos dorados son aquellos que están contruidos a razón de la proporción dorada, o sea, a razón de 0,618... . En la obra podemos notar que la altura del personaje, el ojo izquierdo y las dimensiones centrales están gobernadas por los puntos de cruce de los triángulos dorados.

La sección dorada fue usada extensivamente por Leonardo Da Vinci. Un caso particular puede observarse en las dimensiones del cuarto y la mesa en la pintura *La Última Cena* de Da Vinci que están basadas en la sección dorada, conocida en el período del renacimiento como la proporción divina.

Así mismo, en la famosa obra de Da Vinci *El vitrubio* el número dorado es el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia).

En la obra *perros* del pintor impresionista francés Georges Pierre Seurat (*ver figura 2.3*) se observa que las divisiones sucesivas de cada sección en la pintura por la sección dorada definen los elementos clave de la composición. El horizonte cae exactamente en la sección dorada de la altura de la pintura. Los árboles y las personas están situadas en la sección dorada, en regiones más pequeñas de la pintura.

En *El Sacramento de la Última Cena* Salvador Dalí enmarcó su pintura en un rectángulo dorado. Siguiendo la enseñanza de Da Vinci, Dalí posicionó la mesa exactamente en la sección dorada con respecto a la altura de su pintura. Posicionó los dos discípulos al lado de Cristo en las secciones doradas del ancho de la composición. Además, las ventanas en la parte de atrás están formadas por un largo dodecaedro. El dodecaedro consiste en 12 pentágonos, que exhiben su relación con ϕ en sus proporciones.

Otra sorprendente aparición la hace ϕ en la llamada sucesión de *Fibonacci* (1,1,2,3,5,8,13,21,...)

Figura 2.4: *perros de Seurat*

ya que al dividir un término de esta serie entre el anterior, el valor resultante se aproxima más al cociente dorado conforme los valores de la serie se van incrementando. Esto es:

$1/1 \mapsto 1$
 $2/1 \mapsto 2$
 $3/2 \mapsto 1,5$
 $5/3 \mapsto 1,6667$
 $8/5 \mapsto 1,6$
 $13/8 \mapsto 1,625$
 $21/13 \mapsto 1,615384615$
 $34/21 \mapsto 1,619047619$
 $55/34 \mapsto 1,617647059$
 $89/55 \mapsto 1,618181818$
 $144/89 \mapsto 1,617977528$
 $233/144 \mapsto 1,618055556$
 $377/233 \mapsto 1,618025751$
 $610/377 \mapsto 1,618037135$
 $987/610 \mapsto 1,618032787$
 $1597/987 \mapsto 1,618034448$
 $2584/1597 \mapsto 1,618033813.$

Se puede demostrar que si a_n y a_{n-1} son términos de la sucesión de fibonacci, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

En efecto, supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$ sea convergente y que L es su límite, entonces

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{L} \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $L^2 - L - 1 = 0$ y como nuestro límite debe ser positivo obtenemos que:

$$L = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618039$$

CAPÍTULO 3

EL CONJUNTO DE CANTOR

En este capítulo mostraremos la construcción clásica geométrica del conjunto de Cantor y una construcción realizada por José Mateos Cortés [5], donde se muestran algunas propiedades de este conjunto. Además, se presenta este conjunto como un espacio métrico y como un espacio topológico.

3.1. Construcción geométrica del conjunto de Cantor

Para realizar la construcción clásica del conjunto ternario de Cantor, tomaremos el intervalo unitario $[0, 1]$ de la recta real y la dividiremos en tres subintervalos de longitud $\frac{1}{3}$ de la siguiente manera: $[0, \frac{1}{3}]$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $[\frac{2}{3}, 1]$.

El primer paso para la construcción del conjunto de Cantor consiste en remover el subintervalo abierto intermedio, es decir, el subintervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Definamos el conjunto C_1 como la unión de los dos subintervalos restantes, es decir, $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

El segundo paso consiste en repetir el mismo proceso con cada uno de los intervalos que componen a C_1 , obteniendo así los subintervalos $[0, \frac{1}{9}]$, $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{7}{9}]$, $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, $[\frac{8}{9}, 1]$. Removemos ahora los subintervalos abiertos intermedios $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Definamos ahora el conjunto C_2 como la unión de los subintervalos que nos quedan, o sea, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Repitiendo este proceso, dividiendo cada uno de los intervalos que componen a C_2 en tres partes iguales y removiendo los tercios medios, obtenemos el tercer paso de la construcción que consiste en el conjunto $C_3 = [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{3}{27}] \cup [\frac{6}{27}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{9}{27}] \cup [\frac{18}{27}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{21}{27}] \cup [\frac{24}{27}, \frac{25}{27}] \cup$

La utilización de la construcción geométrica en este caso, para n muy grande, sería muy aburrida.

De la construcción geométrica podemos observar que los intervalos que conforman a C_n son 2^n intervalos cerrados y disjuntos. La prueba se realiza utilizando inducción matemática.

Para esta nueva forma de construir el conjunto de Cantor, el autor define una clase de números y subíndices que se relacionan entre sí; en otras palabras, define el conjunto de subíndices de la siguiente forma:

Sea $j \in \mathbb{N}^*$ ($\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$). Si $j = 0$, definimos $a_0 = 0$. Si $j \neq 0$ entonces escribimos j en su notación binaria, es decir:

$$j = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \dots + b_m \cdot 2^m$$

donde $b_m = 1$ y $b_0, b_1, \dots, b_{m-1} \in \{0, 1\}$. Definimos

$$a_j = 2 \cdot b_0 \cdot 3^0 + 2 \cdot b_1 \cdot 3^1 + \dots + 2 \cdot b_m \cdot 3^m.$$

Estos números a_j son utilizados para encontrar los extremos izquierdos y derechos de cada intervalo cerrado. Cada C_m es una unión finita de intervalos cerrados cuyo extremo izquierdo es de la forma $\frac{a_j}{3^m}$, y cuyo extremo derecho es de la forma $\frac{a_{j+1}}{3^m}$.

Por ejemplo si $j = 10$, entonces en notación binaria, $j = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3$.

Por construcción $a_j = a_{10} = 2 \cdot 0 \cdot 3^0 + 2 \cdot 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3^3 = 6 + 2(27) = 6 + 54 = 60$.

Es importante recalcar que lo que se busca con esta construcción alterna es conocer los intervalos que componen a cada uno de los C_m .

A continuación se presentan un lema y un teorema que nos muestran que la función a_j tiene algunas propiedades de linealidad; su prueba se encuentra en [5].

Lema 3.2.1. $a_{2^m} = 2 \cdot 3^m$ para cada $m \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 3.2.1. Sea $j \in \mathbb{N}$. Expresamos j en su notación binaria, esto es:

$$j = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \dots + b_m \cdot 2^m. \text{ Entonces}$$

$$a_j = a_{(b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + \dots + b_m \cdot 2^m)} = b_0 \cdot a_{2^0} + b_1 \cdot a_{2^1} + \dots + b_m \cdot a_{2^m} = 2 \cdot b_0 \cdot 3^0 + 2 \cdot b_1 \cdot 3^1 + \dots + 2 \cdot b_m \cdot 3^m.$$

A manera de ilustración, calcularemos a_j para $j = 0, 1, \dots, 10$.

Ejemplo 3.2.1. Expresando los siguientes números en su notación binaria tenemos:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
1 &= 1 \cdot 2^0 \longrightarrow a_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3^0 = 2 \\
2 &= 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 \longrightarrow a_2 = 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 = 0 + 6 = 6 \\
3 &= 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 \longrightarrow a_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 = 2 + 6 = 8 \\
4 &= 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 \longrightarrow a_4 = 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 = 18 \\
5 &= 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 \longrightarrow a_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 = 20 \\
6 &= 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 \longrightarrow a_6 = 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 = 24 \\
7 &= 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 \longrightarrow a_7 = 1 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 = 26 \\
8 &= 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 \longrightarrow a_8 = 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^3 = 54 \\
9 &= 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 \longrightarrow a_9 = 1 \cdot 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^3 = 56 \\
10 &= 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 \longrightarrow a_{10} = 0 \cdot 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^3 = 60
\end{aligned}$$

La siguiente tabla resume estos resultados.

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_j	0	2	6	8	18	20	24	26	54	56	60

Los siguientes lemas nos serán útiles para encontrar una expresión analítica para los conjuntos C_m ; su prueba se encuentra en [5].

Lema 3.2.2. $a_j + 1 < a_{j+1}$ para cada $m \in \mathbb{N}^*$.

Lema 3.2.3. Para toda $j \in \mathbb{N}^*$, $3a_j = a_{2j}$

Lema 3.2.4. Para toda $j \in \mathbb{N}^*$, $3a_j + 2 = a_{2j+1}$

Con lo anterior, estamos listos para observar la siguiente definición analítica de los conjuntos C_n .

Definición 3.2.1. La forma analítica para cada C_n con $n \in \mathbb{N}$ es:

$$C_n = \bigcup_{j=0}^{2^n-1} \left[\frac{a_j}{3^n}, \frac{a_j + 1}{3^n} \right]$$

Los siguientes ejemplos nos muestran los intervalos de C_1 y C_2 calculados a partir de la construcción analítica.

Ejemplo 3.2.2.

$$\begin{aligned} C_1 &= \bigcup_{j=0}^1 \left[\frac{a_j}{3^1}, \frac{a_j+1}{3^1} \right] = \left[\frac{a_0}{3}, \frac{a_0+1}{3} \right] \cup \left[\frac{a_1}{3}, \frac{a_1+1}{3} \right] = \left[\frac{0}{3}, \frac{0+1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{2+1}{3} \right] \\ &= \left[0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1 \right]. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.3.

$$\begin{aligned} C_2 &= \bigcup_{j=0}^3 \left[\frac{a_j}{3^2}, \frac{a_j+1}{3^2} \right] = \left[\frac{a_0}{3^2}, \frac{a_0+1}{3^2} \right] \cup \left[\frac{a_1}{3^2}, \frac{a_1+1}{3^2} \right] \cup \left[\frac{a_2}{3^2}, \frac{a_2+1}{3^2} \right] \cup \left[\frac{a_3}{3^2}, \frac{a_3+1}{3^2} \right] = \\ &= \left[\frac{0}{9}, \frac{0+1}{9} \right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{2+1}{9} \right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{6+1}{9} \right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{8+1}{9} \right] = \left[0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9} \right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1 \right]. \end{aligned}$$

El siguiente teorema nos garantiza que la construcción geométrica y la construcción analítica de C_n coinciden para toda $n \in \mathbb{N}$.

Distingamos la construcción analítica como B_m y comparémosla con C_m , para toda $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.2.2. *Para toda $m \in \mathbb{N}$, $B_m = C_m$.*

Demostración. Haremos esta demostración por inducción matemática. Con el ejemplo que acabamos de ver comprobamos que $B_1 = C_1$.

Ahora supongamos que $B_m = C_m$. Es decir, supongamos que

$$C_m = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j+1}{3^m} \right]$$

Del lema 3.2.2. se deduce que los intervalos $\left[\frac{a_0}{3^m}, \frac{a_0+1}{3^m} \right], \left[\frac{a_1}{3^m}, \frac{a_1+1}{3^m} \right], \dots, \left[\frac{a_{2^m-1}}{3^m}, \frac{a_{2^m-1}+1}{3^m} \right]$ son disjuntos entre sí. De acuerdo con la construcción geométrica, estos intervalos son los que tenemos que dividir en tres subintervalos de igual longitud para obtener a C_{m+1} .

Tomemos uno de estos intervalos, digamos el $\left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j+1}{3^m} \right]$. Al dividirlo en tres subintervalos de igual longitud obtenemos:

$$\left[\frac{3a_j}{3^{m+1}}, \frac{3a_j+1}{3^{m+1}} \right], \left(\frac{3a_j+1}{3^{m+1}}, \frac{3a_j+2}{3^{m+1}} \right), \left[\frac{3a_j+2}{3^{m+1}}, \frac{3a_j+3}{3^{m+1}} \right].$$

(ver figura 1).

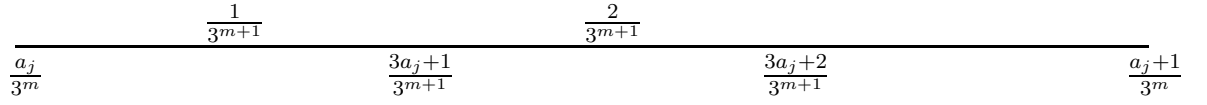


Figura 1

donde

$$\frac{3a_j + 1}{3^{m+1}} = \frac{a_j}{3^m} + \frac{1}{3^{m+1}} \quad \text{y} \quad \frac{3a_j + 2}{3^{m+1}} = \frac{a_j}{3^m} + \frac{2}{3^{m+1}}.$$

Le removemos el de en medio y de esta manera podemos decir que obtenemos los intervalos que conforman a C_{m+1} a partir de C_m , esto es:

$$C_{m+1} = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left(\left[\frac{3a_j}{3^{m+1}}, \frac{3a_j + 1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{3a_j + 2}{3^{m+1}}, \frac{3a_j + 3}{3^{m+1}} \right] \right). \quad (*)$$

Aplicando los lemas 3.2.3 y 3.2.4 tenemos:

$$\begin{aligned} C_{m+1} &= \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left(\left[\frac{a_{2j}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2j} + 1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_{2j+1}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2j+1} + 1}{3^{m+1}} \right] \right) \\ &= \left[\frac{a_{2 \cdot 0}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2 \cdot 0} + 1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_{2 \cdot 0+1}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2 \cdot 0+1} + 1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_{2 \cdot 1}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2 \cdot 1} + 1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_{2 \cdot 1+1}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2 \cdot 1+1} + 1}{3^{m+1}} \right] \cup \dots \\ &\quad \cup \left[\frac{a_{2(2^m-1)}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2(2^m-1)} + 1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_{2(2^m-1)+1}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2(2^m-1)+1} + 1}{3^{m+1}} \right] \\ &= \left[\frac{a_0}{3^{m+1}}, \frac{a_0 + 1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_1}{3^{m+1}}, \frac{a_1 + 1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_2}{3^{m+1}}, \frac{a_2 + 1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_3}{3^{m+1}}, \frac{a_3 + 1}{3^{m+1}} \right] \cup \dots \\ &\quad \cup \left[\frac{a_{2^{m+1}-2}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2^{m+1}-2} + 1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{a_{2^{m+1}-1}}{3^{m+1}}, \frac{a_{2^{m+1}-1} + 1}{3^{m+1}} \right]. \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{j=0}^{2^{m+1}-1} \left[\frac{a_j}{3^{m+1}}, \frac{a_j+1}{3^{m+1}} \right] = B_{m+1}.$$

■

Luego hemos demostrado que las dos construcciones coinciden. Por tanto,

$$C_m = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j+1}{3^m} \right]. \quad (**)$$

Corolario 3.2.1. *El conjunto de Cantor ζ está dado por:*

$$\zeta = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j+1}{3^m} \right].$$

Sabemos que se pueden demostrar propiedades del conjunto de Cantor mediante la construcción geométrica; el autor muestra la prueba de algunas de estas propiedades utilizando la construcción analítica. Dichas pruebas se encuentran en [5]. Algunas de estas propiedades son:

Proposición 3.2.1. *Los intervalos que componen a C_m tienen longitud $\frac{1}{3^m}$.*

Proposición 3.2.2. *La suma de las longitudes de los intervalos que componen a C_m es igual a $(\frac{2}{3})^m$.*

Proposición 3.2.3. *$C_{m+1} \subset C_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$.*

Para demostrar esta contención el autor utiliza los lemas 3.2.3 y , para concluir realiza dos casos prueba, el primero utilizando los subíndices pares y en el siguiente caso utiliza los subíndices impares, además del lema 3.2.2.

Otra manera más sencilla de mostrar esta contención es la siguiente demostración.

Demostración. Para cada m y cada j se tiene:

$$\left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j+1}{3^m} \right] = \left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{3a_j+1}{3^{m+1}} \right] \cup \left(\frac{3a_j+1}{3^{m+1}}, \frac{3a_j+2}{3^{m+1}} \right) \cup \left[\frac{3a_j+2}{3^{m+1}}, \frac{a_j+1}{3^m} \right],$$

luego

$$\left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{3a_j + 1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{3a_j + 2}{3^{m+1}}, \frac{a_j + 1}{3^m} \right] \subseteq \left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j + 1}{3^m} \right];$$

como $\frac{a_j}{3^m} = \frac{3a_j}{3^{m+1}}$ y $\frac{a_j + 1}{3^m} = \frac{3a_j + 3}{3^{m+1}}$, entonces

$$\bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left(\left[\frac{3a_j}{3^{m+1}}, \frac{3a_j + 1}{3^{m+1}} \right] \cup \left[\frac{3a_j + 2}{3^{m+1}}, \frac{3a_j + 3}{3^{m+1}} \right] \right) \subseteq \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j + 1}{3^m} \right],$$

de donde

$$C_{m+1} \subset C_m \text{ (usando (*) y (**))}$$

■

El siguiente lema muestra que tanto el extremo izquierdo como el extremo derecho de cada uno de los intervalos que componen a C_m pertenecen al conjunto de Cantor.

Lema 3.2.5. *Si $0 \leq k \leq 2^m - 1$ entonces $\frac{a_k}{3^m} \in C_n$ y $\frac{a_{k+1}}{3^m} \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

La prueba es muy sencilla; como

$$C_m = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j + 1}{3^m} \right],$$

para $k \in \{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$, los extremos que corresponden al k -ésimo intervalo son

$$\frac{a_k}{3^m}, \frac{a_{k+1}}{3^m} \in C_m.$$

Sabemos que por la proposición 3.2.4, los extremos izquierdo y derecho son elementos de $C_{m-1}, C_{m-2}, \dots, C_1$; utilizando el lema 3.2.3 y 3.2.4 encontramos que los extremos izquierdo y derecho también son elementos de $C_{m+1}, C_{m+2}, C_{m+3}, \dots$

Siguiendo con el procedimiento, para obtener a C_3 removemos los intervalos $(\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$, $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$ y $(\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$ de C_2 .

Igual que en el paso anterior nos quedamos con aquellos números cuyas tres primeras cifras en base 3 son 0 ó 2, excepto $\frac{1}{27}$, $\frac{7}{27}$, $\frac{19}{27}$ y $\frac{25}{27}$ que se pueden representar de la siguiente manera:

$$0,001 = 0,000\bar{2}$$

$$0,021 = 0,020\bar{2}$$

$$0,201 = 0,200\bar{2}$$

$$0,221 = 0,220\bar{2}$$

$$C_3 \quad \underline{,000} \quad \underline{,002} \quad \underline{,020} \quad \underline{,022} \quad \underline{,200} \quad \underline{,202} \quad \underline{,220} \quad \underline{,222}$$

Y así sucesivamente.

En conclusión el conjunto de Cantor se puede representar como el conjunto de todos los números de $[0, 1]$ que pueden desarrollarse en el sistema ternario sin el uso de la cifra 1.

Nota 3.3.1. Podríamos pensar que el conjunto de Cantor está constituido únicamente por los puntos extremos de los intervalos de C_n , $n \in \mathbb{N}$, pero podemos verificar que por ejemplo $\frac{1}{4} \in \zeta$ y sin embargo no es extremo de ninguno de esos intervalos.

El siguiente teorema es bastante mencionado en los textos de matemáticas, pero casi nunca se encuentra su demostración. En [5] se formaliza de la siguiente manera:

Teorema 3.3.1. $x \in \zeta$ si y sólo si existe una sucesión $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ con cada $e_m \in \{0, 2\}$ tal que

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m}.$$

Demostración. (\Rightarrow). Sea $x \in \zeta$; por la definición de ζ tenemos que $x \in C_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Haremos una construcción general de unos números $e_m^{(n)}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq m \leq n$.

Dada $n \in \mathbb{N}$, $x \in C_n$, entonces existe $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ tal que $x \in [\frac{a_k}{3^n}, \frac{a_k+1}{3^n}]$.

Escribimos el número natural k en notación binaria, esto es:

$$k = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + b_2 \cdot 2^2 + \dots + b_r \cdot 2^r \text{ con } b_r = 1.$$

Como

$$2^r \leq b_r \cdot 2^r + \dots + b_2 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2^1 + b_0 \cdot 2^0 = k$$

y $k \leq 2^n - 1$, por transitividad se obtiene

$$2^r \leq 2^n - 1 < 2^n.$$

Por tanto, $r < n$.

Completando con ceros, si hace falta, escribimos el número natural k así:

$$k = b_0 \cdot 2^0 + b_1 \cdot 2^1 + b_2 \cdot 2^2 + \dots + b_{n-1} \cdot 2^{n-1}.$$

Calculando a_k ,

$$a_k = 2 \cdot b_0 \cdot 3^0 + 2 \cdot b_1 \cdot 3^1 + 2 \cdot b_2 \cdot 3^2 + \dots + 2 \cdot b_{n-1} \cdot 3^{n-1}$$

(nótese que los ceros que pudimos haber añadido no afectan la definición de a_k). ■

Ejemplo 3.3.2. Sea $m = 5$, $x \in C_5$; entonces existe $k \in \{0, 1, \dots, 31\}$ tal que $x \in [\frac{a_k}{3^m}, \frac{a_k+1}{3^m}]$.
Tomemos $k = 10$; entonces $x \in [\frac{a_{10}}{3^5}, \frac{a_{10}+1}{3^5}]$,

$$\begin{aligned} k = 10 &= (1010)_2 \\ &= 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3; \end{aligned}$$

entonces $r = 3 < 5 = m$ y

$$\begin{aligned} a_{10} &= 2 \cdot 0 \cdot 3^0 + 2 \cdot 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 0 \cdot 3^4 = 60, \\ \frac{a_{10}}{3^5} &= \frac{2 \cdot 0}{3^5} + \frac{2 \cdot 1}{3^4} + \frac{2 \cdot 0}{3^3} + \frac{2 \cdot 1}{3^2} + \frac{2 \cdot 0}{3}. \end{aligned}$$

Luego C_5 es la unión de $2^5 = 32$ intervalos y el onceavo intervalo es $[\frac{60}{3^5}, \frac{61}{3^5}]$.

Así,

$$\frac{a_k}{3^n} = \frac{2b_0}{3^n} + \frac{2b_1}{3^{n-1}} + \frac{2b_2}{3^{n-2}} + \dots + \frac{2b_{n-1}}{3}. \quad (\diamond)$$

Ahora presentaremos una métrica asociada al conjunto de Cantor.

Sean $x, y \in \zeta$; entonces por el teorema 3.3.1. tenemos que:

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m}{3^m} \quad y \quad y = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m}{3^m} \quad \text{con } e_m \text{ y } g_m \in \{0, 2\}, \quad \forall m.$$

Se define la función: $d : \zeta \times \zeta \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$d(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|e_m - g_m|}{3^m}.$$

En primer lugar hay que verificar que la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|e_m - g_m|}{3^m}$ es convergente en \mathbb{R} .

Puesto que e_m y $g_m \in \{0, 2\}$, $\forall m = 1, 2, \dots$, entonces $|e_m - g_m| \leq 2 \forall m$, de modo que $\frac{|e_m - g_m|}{3^m} \leq \frac{2}{3^m}$, $\forall m$. Como la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{3^m} = 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m$ es convergente en \mathbb{R} , entonces, por el criterio de comparación se tiene que la serie $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|e_m - g_m|}{3^m}$ también es convergente.

Ahora demostraremos que d satisface las otras condiciones para ser una métrica.

- i) $d(x, y) \geq 0$, es obvio, por tratarse de una serie convergente de términos mayores o iguales a cero;
- ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|e_m - g_m|}{3^m} = 0 \Leftrightarrow |e_m - g_m| = 0, \forall m = 1, 2, \dots \Leftrightarrow e_m = g_m, \forall m = 1, 2, \dots \Leftrightarrow x = y$;
- iii) $d(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|e_m - g_m|}{3^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|g_m - e_m|}{3^m} = d(y, x)$;
- iv) $d(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(|e_m - h_m| + |h_m - g_m|)}{3^m} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(|e_m - h_m|)}{3^m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(|h_m - g_m|)}{3^m} \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Luego concluimos que ζ es un espacio métrico con la métrica d dada.

3.4. ζ como espacio topológico

En la sección anterior se definió una métrica para ζ . Como es bien sabido, toda métrica genera una topología (ver proposición 1.3.1.), de modo que ζ es también un espacio topológico, naturalmente con la topología τ_d .

En esta sección se mostrará, según [5], que el conjunto de Cantor es un espacio topológico no vacío de Hausdorff, compacto, perfecto y totalmente disconexo.

Proposición 3.4.1. ζ es un conjunto no vacío.

Demostración. Sabemos que la intersección anidada de compactos no vacíos es no vacía, y aquí podemos ver que 0 es un extremo de C_1 y por el lema 3.2.5, $0 \in C_m$, para cada $m \in \mathbb{N}$. De modo que $0 \in \mathcal{C}$, luego podemos concluir que ζ es no vacío. ■

Veamos que el conjunto de Cantor es un conjunto compacto

Proposición 3.4.2. Para cada $m \in \mathbb{N}$, C_m es un conjunto cerrado.

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sabemos que

$$C_m = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} \left[\frac{a_j}{3^m}, \frac{a_j+1}{3^m} \right].$$

Así que, C_m es la unión de 2^m intervalos cerrados. La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado. Por tanto, C_m es un conjunto cerrado, para cada $m \in \mathbb{N}$. ■

Observación 3.4.1. $C_m \subset [0, 1]$ para cada $m \in \mathbb{N}$. En efecto, por la proposición 3.2.4

$$C_m \subset C_1 \subset [0, 1].$$

Proposición 3.4.3. ζ es un conjunto compacto.

Demostración. Por la proposición 3.4.2, C_m es un conjunto cerrado, para cada $m \in \mathbb{N}$. Por definición

$$\zeta = \bigcap \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Esto es, \mathcal{C} es la intersección de conjuntos cerrados, entonces \mathcal{C} es un conjunto cerrado. Además, $[0, 1]$ es un espacio compacto. Como $\zeta \subset C_m$ y $C_m \subset [0, 1]$ para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces $\zeta \subset [0, 1]$. Finalmente, como los subconjuntos cerrados de conjuntos compactos, son compactos, se deduce que ζ es un conjunto compacto. ■

Ahora miremos que el conjunto de Cantor es un conjunto perfecto, es decir, que ζ es un conjunto cerrado y denso en sí mismo.

Proposición 3.4.4. Sea $\varepsilon > 0$. Si $x \in \zeta$, entonces existe $y \neq x$ tal que $|x - y| < \varepsilon$ y $y \in \zeta$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(\frac{1}{3})^m \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^N} < \varepsilon$. Por hipótesis, $x \in C_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$. En particular, $x \in C_N$ por lo cual, existe $k \in \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$ tal que $x \in [\frac{a_k}{3^N}, \frac{a_k+1}{3^N}]$. Por el lema 3.2.5, $\frac{a_k}{3^N} \in \zeta$ y $\frac{a_k+1}{3^N} \in \zeta$. Si $x = \frac{a_k}{3^N}$ escogemos $y = \frac{a_k+1}{3^N}$; si $x = \frac{a_k+1}{3^N}$ escogemos $y = \frac{a_k}{3^N}$, y si $x \notin [\frac{a_k}{3^N}, \frac{a_k+1}{3^N}]$ escogemos cualquiera de los dos, $y = \frac{a_k}{3^N}$ ó $y = \frac{a_k+1}{3^N}$. En cualquier caso se tendrá que $x, y \in \zeta$ y $y \neq x$. Entonces

$$|x - y| \leq \left| \frac{a_k + 1}{3^N} - \frac{a_k}{3^N} \right| = \frac{1}{3^N} < \varepsilon.$$

■

Teorema 3.4.1. ζ es perfecto.

Demostración. Por la proposición 3.4.2, C_m es un conjunto cerrado y por la proposición 3.4.4 es denso en sí mismo. ■

Hasta aquí hemos demostrado que el conjunto de Cantor ζ es compacto, perfecto y no vacío. Ahora veremos, que \mathcal{C} es totalmente desconexo, es decir, que las componentes conexas de ζ son sólo puntos. Para probar esto necesitamos los siguientes lemas:

Lema 3.4.1. Sean $x \in \zeta, r > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{2 \cdot 3^n} < r$; entonces $B_r(x) \cap (\mathbb{R} - C_n) \neq \emptyset$.

Demostración. Haremos esta prueba por reducción al absurdo. Supongamos, por el contrario, que $B_r(x) \subset C_n$. Por hipótesis, si $x \in \zeta$ entonces $x \in C_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Recordemos que

$$C_n = \bigcup_{j=0}^{2^n-1} \left[\frac{a_j}{3^n}, \frac{a_j+1}{3^n} \right].$$

Los intervalos $[\frac{a_0}{3^n}, \frac{a_0+1}{3^n}]$, $[\frac{a_1}{3^n}, \frac{a_1+1}{3^n}]$, ..., $[\frac{a_{2^n-1}}{3^n}, \frac{a_{2^n-1}+1}{3^n}]$, son cerrados y disjuntos dos a dos. Además $B_r(x)$ es un conjunto conexo, y como $B_r(x) \subset C_n$, entonces existe un $k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ tal que

$$B_r(x) \subset \left[\frac{a_k}{3^n}, \frac{a_k+1}{3^n} \right],$$

de aquí que, $2r = \text{diámetro}(B_r(x)) \leq \text{diámetro}([\frac{a_k}{3^n}, \frac{a_k+1}{3^n}]) = \frac{1}{3^n}$, de donde $r \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}$. Esta contradicción prueba que $B_r(x) \cap (\mathbb{R} - C_n) \neq \emptyset$. ■

Lema 3.4.2. Sean $x, y \in \zeta$, con $x < y$; entonces existe $z \in \mathbb{R} - \zeta$ tal que $x < z < y$.

Demostración. Supongamos, por el contrario, que $(x, y) \subset \zeta$. Elegimos un $p \in (x, y)$, entonces $p \in \zeta$. Sea $r > 0$ tal que $B_r(p) \subset (x, y)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2 \cdot 3^n} < r$. Por el lema 3.4.2, existe $q \in B_r(p) \cap (\mathbb{R} - C_n)$. Entonces $q \in B_r(p) \subset (x, y) \subset \zeta \subset C_n$ y $q \in \mathbb{R} - C_n$, lo cual es absurdo; luego el lema es cierto. ■

Teorema 3.4.2. ζ es un conjunto totalmente desconexo.

Demostración. Tenemos que probar que las componentes conexas del conjunto de Cantor son sus puntos. Supongamos que una componente no es un punto y la llamamos A , es decir, vamos a suponer que A es un conjunto conexo, $A \subset \zeta$ y que existen $x, y \in A$ tales que $x < y$. Por el lema 3.4.3, existe $z \in \mathbb{R} - \zeta$ tal que $x < z < y$.

Dada $p \in A$, $p \neq z$ pues $z \notin \zeta$. De modo que $p < z$ ó $p > z$. Esto muestra que

$$A = ((-\infty, z) \cap A) \cup ((z, \infty) \cap A).$$

Notemos que $x \in (-\infty, z) \cap A$ y $y \in (z, \infty) \cap A$. Entonces hemos escrito a A como la unión de dos conjuntos abiertos (en A), disjuntos y no vacíos. Esto contradice la conexidad de A . ■

Teorema 3.4.3. ζ es de Hausdorff

Demostración. Como mostramos anteriormente, ζ es un espacio métrico; por el teorema 1.3.1., ζ es de Hausdorff. ■

De esta manera se ha probado que ζ es un espacio topológico, compacto, de Hausdorff, perfecto y totalmente desconexo. En realidad estas propiedades caracterizan a ζ , es decir, ζ es el único (salvo homeomorfismos) espacio topológico que cumple con dichas propiedades. La demostración de esta unicidad puede encontrarse por ejemplo en [1].

CAPÍTULO 4

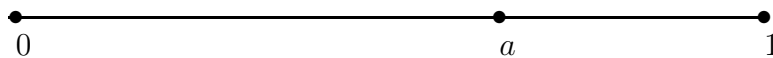
UN CONJUNTO DORADO DE CANTOR

4.1. Traducción del artículo: “A golden Cantor set” [12]

Este artículo muestra cómo la razón dorada resuelve un simple pero interesante problema geométrico que involucra conjuntos de Cantor. Construimos un conjunto Cantor especial que merece ser llamado “un conjunto dorado de Cantor”.

Antes de unir la razón dorada a un conjunto de Cantor, deberíamos encontrar qué tienen en común. Vemos que lo que ambos brindan a esta relación, lo que está en el centro de ellos, es la noción de autosimilitud. Tomaremos ventaja de esto, usando la idea de renormalización para la prueba rigurosa de nuestro resultado. La renormalización es una técnica usada a menudo en situaciones que envuelven la autosimilitud, y es usada extensivamente en la teoría de sistemas dinámicos y física matemática. La renormalización que usaremos aquí corresponde a simples ilustraciones de esa técnica sofisticada. Para otros ejemplos elementales de cómo se puede usar la renormalización ver [2] .

La razón dorada es el número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, comúnmente denotado por ϕ . Veremos cómo se obtiene este número. Escogemos un número a del intervalo $(0,1)$.



El intervalo $[0,1]$ es dividido por a en dos subintervalos, y tenemos varias razones de longitudes que podemos comparar. Si escogemos a de tal manera que la razón de la longitud de todo el intervalo $[0,1]$ con la longitud de la parte izquierda $[0,a]$ es equivalente a la razón de la longitud de la parte izquierda $[0,a]$ con la longitud de la parte derecha $[a,1]$, entonces esa razón común es la razón dorada. Si a es escogido de este modo, entonces tenemos

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a}; \quad (1)$$

pero por definición, $\phi = \frac{1}{a}$, y sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos

$$\phi = \frac{1}{\phi - 1}.$$

Esto nos proporciona la ecuación cuadrática

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

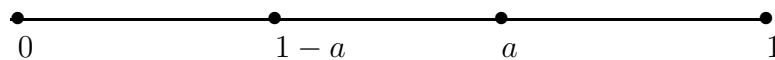
cuya raíz positiva es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; la negativa es $\phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Note que $\phi' = -\phi^{-1}$.

¿Qué es lo que hace que la razón dorada sea interesante?

Algunos sienten que este valor es estético cuando es usado en trabajos de arte, ver [5 pp. 124-125] y [11], para contrastar puntos de vista acerca de esto.

Para los matemáticos la razón dorada obtiene su interés de su asombrosa colección de propiedades autoreproductivas [13 p. 51]. Aquí hay un simple pero importante ejemplo. Si el número a divide a $[0,1]$ de acuerdo con la razón dorada, entonces, por simetría, también lo hace el número $1 - a$; por la definición de la razón dorada (1), $1 - a$ también divide el intervalo $[0,a]$ de acuerdo con la razón dorada. Luego

$$\phi = \frac{a}{1-a}.$$



Por lo tanto $1 - a$ divide simultáneamente dos intervalos diferentes de acuerdo con la razón dorada, $[0,1]$ y $[0,a]$. Una vez un intervalo ha sido dividido en dos subintervalos de acuerdo con la razón dorada, la longitud del más corto de los dos subintervalos divide al subintervalo largo de acuerdo con la razón dorada. Hay otra forma de pensar acerca de esto. Suponga que usted usa una construcción con regla y compás para dividir un intervalo de acuerdo con la razón dorada [3, p. 161]. Entonces dividir el más largo de los dos subintervalos de acuerdo con la razón dorada se hace trivial, justamente usando el compás para copiar el subintervalo más corto dentro del más largo. La razón dorada se autoreproduce.

Otros ejemplos de la habilidad de la razón dorada para reproducirse ella misma son los rectángulos dorados, triángulos dorados, el pentágono regular, la expansión de la fracción continua de ϕ y la expansión de la raíz cuadrada continua de ϕ . Para una mayor información de los aspectos de autosimilaridad y sus aplicaciones a una gran variedad de problemas físicos, ver [13].

Ahora es el turno para los conjuntos de Cantor. Nos concierne aquí una familia de conjuntos llamados los α -medios conjuntos de Cantor; un miembro de esta familia sera relacionado con la razón dorada. Estos conjuntos de Cantor son una generalización del clásico conjunto ternario de Cantor.

Escoja un número $\alpha \in (0,1)$, sea $I_0=[0,1]$, y sea I_1 la unión de los dos intervalos cerrados que quedan después de remover el intervalo abierto de longitud α del medio de I_0 .

Cada uno de los intervalos cerrados de I_1 tiene longitud $\frac{1-\alpha}{2}$; sea β que denota $\frac{1-\alpha}{2}$. Note que $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ y $\alpha = 1 - 2\beta$. Ahora se hace en cada intervalo de I_1 lo que se hizo en I_0 . Removemos la mitad de cada intervalo abierto cuya longitud es α veces la longitud del intervalo cerrado.

Esto nos deja 4 intervalos, cada uno de longitud β^2 ; la unión de estos intervalos la llamamos I_2 .

Sea I_n la unión de los 2^n intervalos cerrados de longitud β^n que quedan después de que el intervalo abierto de longitud $\alpha\beta^{n-1}$ es removido de la mitad de cada uno de los componentes de I_{n-1} .

La figura 4.1 proporciona una imagen de I_0 hasta I_4

Figura 4.1: *Conjunto de Cantor*

El α -medio conjunto de Cantor en el intervalo $[0, 1]$ es

$$C_\alpha \equiv \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$$

Cuando $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$, obtenemos el clásico conjunto ternario de Cantor. Para un α -medio conjunto de Cantor, β es más útil para nosotros que α . Una de las más importantes propiedades de un α -medio conjunto de Cantor es la propiedad de autosimilitud descrita por β ; β es un factor escala para el conjunto de Cantor. Para ver lo que entenderemos por autosimilitud y factores de escala, sea C_α^L que denota a $C_\alpha \cap [0, \beta]$ y sea C_α^R que denota a $C_\alpha \cap [1 - \beta, 1]$; entonces C_α^L es la mitad izquierda de C_α y C_α^R es la mitad derecha. Por tanto la imagen de C_α bajo la función $T_L(x) = \beta x$ es C_α^L y la imagen de C_α bajo la función $T_R(x) = \beta x + (1 - \beta)$ es C_α^R . Esto muestra que la mitad izquierda y derecha de C_α son duplicados exactos de C_α a escala más pequeña. Usted debe convencerse que las potencias β^n , para todos los enteros positivos y negativos n , son también factores de escala para C_α .

Como α decrece hacia cero (de igual manera, como los β crecen hacia $\frac{1}{2}$), los α -medios conjuntos de Cantor se vuelven “más grandes”. Esta idea, que no es tan obvia, se puede precisar usando una de las diferentes “dimensiones fractales” (ver [4, pp. 105-107]), pero nosotros daremos una sugerencia de esto desde la solución de nuestro problema geométrico establecido más abajo (ver también [8]).

¿Qué es lo que hace a los conjuntos de Cantor tan interesantes?

La mayoría de matemáticos diría que es su increíble versatilidad y utilidad para la construcción de ejemplos y contraejemplos en topología y análisis.

Sin embargo, muchas de estas construcciones poseen ricas ideas. Tomemos por ejemplo “la tienda agujereada de Cantor.”^{en} [14, p. 145]. Esto puede dejar la impresión en algunas mentes de que los conjuntos de Cantor son cualquier materia hecha de modelos de los fenómenos del mundo real, pero últimamente los conjuntos de Cantor han sido usados con exactitud particularmente dentro del campo de los sistemas dinámicos.

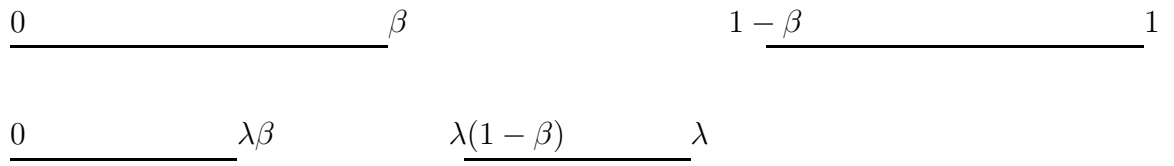
Un uso de los conjuntos de Cantor en los sistemas dinámicos y el estudio de las bifurcaciones homoclínicas, han conducido a muchas preguntas acerca de cómo dos conjuntos de Cantor se pueden intersecar [12, capítulo 4]. Este trabajo conlleva al problema propuesto en [15], de encontrar todas las formas en que dos conjuntos de Cantor se pueden intersecar en un punto, y ese problema motivó el problema geométrico que lleva al conjunto dorado de Cantor.

Necesitamos una definición más antes de establecer nuestro problema geométrico. Si A es un subconjunto de la recta real y λ es un número real positivo, entonces $\lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}$. El conjunto λA es una versión alargada o comprimida de A si $\lambda > 1$ ó $\lambda < 1$, respectivamente.

Problema Geométrico Dado $\beta \in (0, \frac{1}{2})$, ¿es posible encontrar un $\lambda \in (0, 1)$ tal que $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha = \{0\}$?

¿Qué hace que este problema sea interesante?. Los conjuntos de Cantor tienen la propiedad de ser totalmente desconexos. Esto es, entre dos puntos de un conjunto de Cantor hay puntos que no pertenecen al conjunto de Cantor, es decir, el conjunto de Cantor está lleno de infinitos huecos; en [10, capítulo 8], los conjuntos de Cantor son apropiadamente llamados “polvareda de Cantor”. El problema geométrico pregunta si es posible tomar 2 α -medios conjuntos de Cantor, C_α y λC_α , y entretejer todos los puntos de cada uno de ellos en los agujeros del otro excepto por su punto final común 0. ¿Que tan difícil es hacer esto? Nosotros mostramos que existe un valor crítico β bajo el cual el problema tiene solución, pero por encima de él no hay solución; los conjuntos no pueden ser entretejidos. El valor crítico es una ayuda para demostrar que el “tamaño” de los α -medios conjuntos de Cantor cambia con β . Para β por debajo del valor crítico los α -medios conjuntos de Cantor son “suficientemente pequeños” para que el problema tenga una solución, para β por encima del valor crítico los α -medios conjuntos de Cantor son “muy grandes” para que el problema tenga solución. El valor crítico es $\beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ y por supuesto este número tiene algo que ver con la razón áurea.

Mostraremos que el problema geométrico puede resolverse cuando $\beta < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Considérese el dibujo I_1 y λI_1 en la figura 4.2.

Figura 4.2: I_1 y λI_1 Figura 4.3: I_2 y λI_2

Necesitamos determinar aquellos valores β y λ para los cuales la relación de los componentes de I_1 y de λI_1 mostrados en la figura 4.2 es posible. Si podemos encontrar tales valores de β y λ , entonces tendremos la solución del problema geométrico, debido a que la situación mostrada en la figura 4.2 se repite ella misma, en una escala menor, en el intervalo $[0, \beta]$ y $[0, \lambda\beta]$, cuando construimos I_2 y λI_2 (en la figura 4.3), y, en general, en los intervalos $[0, \beta^n]$ y $[0, \lambda\beta^n]$ cuando construimos I_{n+1} y λI_{n+1} . Nótese cómo estamos usando aquí autosimilitud.

Tenemos así que $I_n \cap \lambda I_n = [0, \lambda\beta^n]$, lo cual implica que $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha = \{0\}$.

Para obtener dibujos como los de las figuras 4.2 y 4.3, necesitamos $\beta < \lambda(1-\beta)$ y $\lambda < (1-\beta)$; en otros términos, necesitamos

$$\frac{\beta}{(1-\beta)} < \lambda < 1-\beta,$$



Figura 4.4:

así que β satisface la desigualdad $0 < 1 - 3\beta + \beta^2$, lo que significa que

$$\beta < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Así, para $\beta < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ podemos resolver el problema geométrico. Nótese que cuando $\beta = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, si tomamos $\lambda = 1 - \beta$ entonces la intersección $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha$ es igual a 0 y un número contable de puntos finales comunes. Ver figura 4.4.

Ahora podemos ver dónde entra la razón dorada. Cuando $\beta = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, si miramos la razón de la longitud de los componentes de I_1 (i.e., β) a la longitud del hueco en I_1 (i.e., α), obtenemos

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{1 - 2\beta} = \frac{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}{1 - (3 - \sqrt{5})} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Esto significa que β divide al intervalo $[0, 1 - \beta]$ (y también a $[0, 1]$) según la razón dorada. Usted puede verificar que esto también significa que $\beta = \frac{1}{\phi}$. Y si tomamos $\lambda = 1 - \beta$, entonces dado que $1 - \beta$ divide a $[0, 1]$ según la razón dorada, tenemos $\lambda = \frac{1}{\phi}$. Después volveremos al caso en el que $\beta = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ y miraremos desde un punto de vista diferente, pero primero mostraremos que el problema geométrico no tiene solución cuando $\beta \geq \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Necesitamos mostrar que si $\beta \in (\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$, entonces para algún $\lambda \in (0, 1)$, 0 no es el único punto en $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha$. Para probar esto necesitamos considerar la intersección de C_α con una copia contraída y trasladada de él mismo. Si A es un subconjunto de la recta real y t es un número real, sea $A + t = \{x + t | x \in A\}$, esto es, $A + t$ es un traslado de A .

Lema 1 *Escojamos $\beta \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Sea $\alpha = 1 - 2\beta$; si $\lambda \in [\alpha, 1]$, entonces para todo $t \in [-\lambda, 1]$, $C_\alpha \cap (\lambda C_\alpha + t) \neq \emptyset$.*



Figura 4.5:

Nota. Este lema declara aproximadamente que si un α -medio conjunto de Cantor es suficientemente “grande” (i.e., $\beta \geq \frac{1}{3}$), y si se sobrepone con una copia contraída y trasladada de sí mismo (i.e., $\lambda \geq \alpha$ y $-\lambda \leq t \leq 1$), entonces el α -medio conjunto de Cantor interseca la copia contraída y trasladada de sí mismo.

Prueba: La prueba usa un argumento de inducción y un resbalamiento (o renormalización). Nosotros mostramos que para cada $n \geq 1$, $I_n \cap (\lambda I_n + t) \neq \emptyset$. Dado que la intersección anidada de una sucesión de conjuntos compactos no vacíos es no vacía, $\bigcap_{n=0}^{\infty} [I_n \cap (\lambda I_n + t)] \neq \emptyset$. Pero $\bigcap_{n=0}^{\infty} [I_n \cap (\lambda I_n + t)]$ es lo mismo que $C_\alpha \cap (\lambda C_\alpha + t)$.

Antes de argumentar la inducción, reexaminaremos la estructura autosimilar de un α -medio conjunto de Cantor C_α . Sea J un componente de I_n para algún $n \geq 0$; llamaremos $J \cap C_\alpha$ un segmento de C_α . La autosimilitud de C_α significa que un segmento de C_α es justamente una copia a menor escala de C_α , esto es, para una transformación afín (i.e., una transformación de la forma $f(x) = mx + b$ con $m = \beta^{-n}$) podemos trazar un segmento de C_α sobre C_α . Transformar afínmente un segmento de C_α sobre C_α es lo que queremos decir por rescalamiento.

Para empezar la inducción, necesitamos mostrar que $[I_1 \cap (\lambda I_1 + t)] \neq \emptyset$. Siempre que $\lambda \geq \alpha$, no podemos tener $\lambda I_1 + t$ contenido en el hueco abierto en el medio de I_1 , i.e., no podemos tener el dibujo de la figura 4.5.

Como $\beta \geq \frac{1}{3}$, tenemos $\beta \geq \alpha$, y como $\lambda \leq 1$, tenemos $\beta \geq \lambda\alpha$; así, ningún componente de I_1 está contenido en el hueco abierto en el medio de $\lambda I_1 + t$ i.e., no tenemos el dibujo de la figura 4.6.

Por consiguiente, $I_1 \cap (\lambda I_1 + t) \neq \emptyset$.

Ahora supongamos que $I_n \cap (\lambda I_n + t) \neq \emptyset$. Necesitamos mostrar que $I_{n+1} \cap (\lambda I_{n+1} + t) \neq \emptyset$. Sea

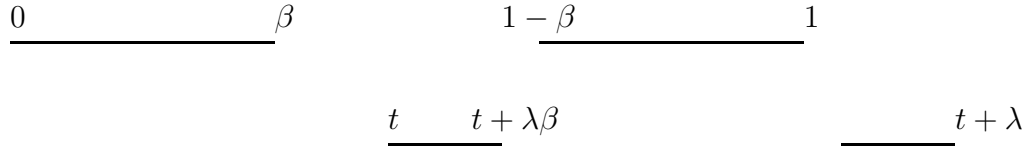


Figura 4.6:

J_n y J'_n que denotan cualquier componente de I_n y $\lambda I_n + t$ respectivamente, que se intersecan. Usando una transformación afín podemos transformar el segmento de C_α contenido en J_n dentro de C_α ; esta misma transformación afín toma el segmento de $\lambda C_\alpha + t$ contenido en J'_n dentro de $\lambda C_\alpha + t_n$ para algún $t_n \in [-\lambda, 1]$. Esto muestra que el primer paso en la prueba del lema (el paso con $n = 1$), puede aplicarse para $J_n \cap I_{n+1}$ y $J'_n \cap (\lambda I_{n+1} + t)$ para concluir que $(J_n \cap I_{n+1}) \cap (J'_n \cap (\lambda I_{n+1} + t)) \neq \emptyset$. Hemos renormalizado el paso de inducción anterior al paso original. Por lo tanto $I_{n+1} \cap (\lambda I_{n+1} + t) \neq \emptyset$. ■

Para mostrar que el problema geométrico no tiene solución cuando $\beta \in [\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}]$, usamos el lema 1 y otro argumento de rescalamiento para probar la existencia de un punto diferente de 0 en $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha$. Primero probamos nuestro resultado con $\lambda \in [\beta, 1)$. Entonces usando rescalamiento de nuevo, se extiende el resultado para $\lambda \in (0, 1)$.

Lema 2 *Escojamos $\beta \in [\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}]$. Si $\lambda \in [\beta, 1)$, entonces $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha \neq \{0\}$.*

Prueba. Primero, nótese que con nuestras hipótesis, $I_1 \cap \lambda I_1$ debe tener dos componentes por lo menos, una con el 0, como lo hemos mostrado antes, si $\lambda \geq \beta$; entonces para que $I_1 \cap \lambda I_1$ tenga una sola componente (la que contiene al 0) es necesario que $\beta < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Sea J y J' las componentes que se intersecan de I_1 y λI_1 , respectivamente, de tal suerte que $0 \notin J \cap J'$. Hay una transformación afín que transforma el segmento de C_α contenido en J sobre C_α ; esta misma transformación afín toma el segmento de λC_α contenido en J' sobre $\lambda C_\alpha + t$ para algún $t \in [-\lambda, 1]$. Entonces el lema 1 implica que el segmento de C_α contenido en J tiene intersección no vacía con el segmento de λC_α contenido en J' (nótese que $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ es más grande que $\frac{1}{3}$). Luego, $C_\alpha \cap (\lambda C_\alpha)$ contiene un punto, que no es el 0. ■

Teorema 3 *Escojamos $\beta \in [\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}]$. Si $\lambda \in (0, 1)$, entonces $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha \neq \{0\}$.*

Prueba. Sabemos que el teorema es verdadero para $\lambda \in [\beta, 1)$. Supongamos que $\lambda \in [\beta^{n+1}, \beta^n)$ para algún entero $n \geq 1$. Entonces $T(x) = \beta^n x$ transforma el segmento de C_α contenido en $[0, \beta^n]$ sobre C_α y también transforma λC_α sobre $(\frac{\lambda}{\beta^n})C_\alpha$. A partir de $\beta^{n+1} \leq \lambda < \beta^n$, tenemos $(\frac{\lambda}{\beta^n}) \in [\beta, 1)$, y de esta manera se aplica el lema 2 y así se puede concluir que $(C_\alpha \cap [0, \beta^n]) \cap \lambda C_\alpha \neq \{0\}$. ■

Nota. En realidad hemos probado un poquito más de lo que se establece en el teorema 3. Hemos mostrado que si $\beta \in [\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$ y $\lambda \in (0, 1)$, entonces $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha$ es de cardinalidad infinita.

Ahora retornemos al caso $\beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda = 1 - \beta$. Recordemos que tenemos entonces $\beta = \frac{1}{\phi^2}$, $\lambda = \frac{1}{\phi}$ y $\frac{\beta}{\alpha} = \phi$. Nuestro objetivo ahora es dar a $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha$ una mejor interpretación geométrica. Para esto necesitamos usar el conjunto producto $C_\alpha \times C_\alpha$ y la gráfica de la función $f(x) = \lambda x$; la idea de nuestra construcción viene desde [1, p. 135]. Nótese que $y \in C_\alpha \cap \lambda C_\alpha$ si y solo si $y \in C_\alpha$, y $y = \lambda x$ para algún $x \in C_\alpha$ si y solo si existe un punto (x, y) contenido en ambos conjuntos: $C_\alpha \times C_\alpha$ y el grafo de f . Esto muestra que existe una biyección entre los puntos en $(C_\alpha \cap \lambda C_\alpha)$ y la intersección de $C_\alpha \times C_\alpha$ con el grafo de f ; la biyección proyecta a $(C_\alpha \times C_\alpha) \cap grafo(f)$ horizontalmente sobre el eje Y, dando $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha$. Así, esto reemplaza nuestra visualización 1-dimensional de $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha$ con una visualización bidimensional de $C_\alpha \times C_\alpha \cap grafo(f)$. La figura 4.8 es un dibujo de $(I_2 \times I_2) \cap grafo(f)$, que representa análogamente a $I_2 \cap \lambda I_2$ en la figura 4.7.

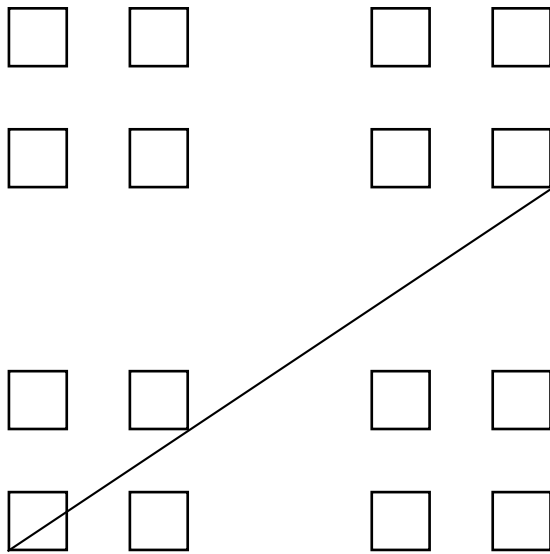


Figura 4.8

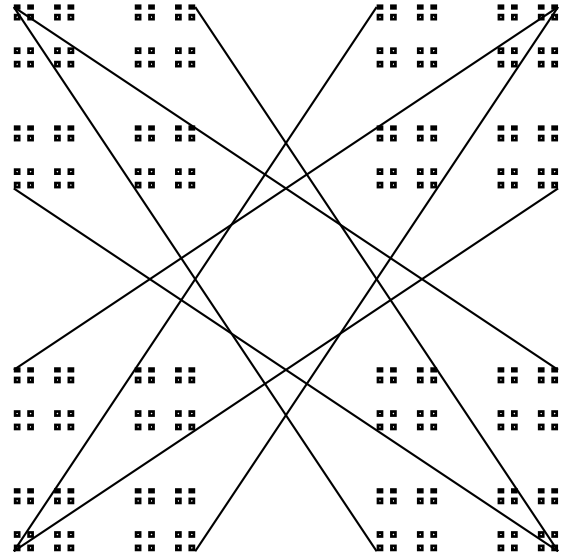


Figura 4.9

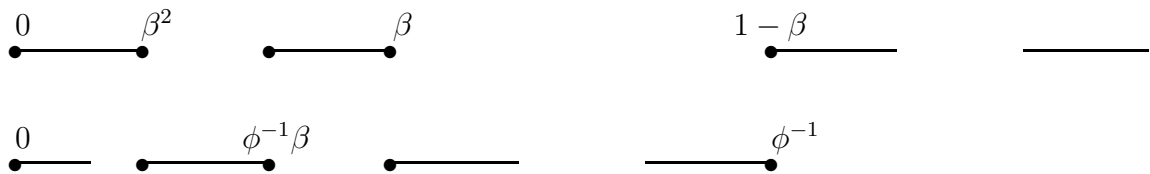


Figura 4.7

Como en la simetría de $C_\alpha \times C_\alpha$ hay otras 7 líneas que juegan un mismo papel con respecto a $C_\alpha \times C_\alpha$, como lo hace el gráfico de $f(x) = \lambda x$, en la figura 4.9 estas líneas son adicionadas para un dibujo de $I_4 \times I_4$. Cada una de las 8 líneas en la figura 4.9 tiene pendiente igual a $\pm\phi$ ó $\pm\phi'$. Cualquier rectángulo con una diagonal a lo largo de una de estas líneas es un rectángulo dorado, es decir, un rectángulo donde la razón de las longitudes de sus lados es ϕ . Así, la figura 4.9 está llena de rectángulos dorados. La figura 4.9 es la lámina LVI de [5, p. 137], como un ejemplo de una “descomposición armónica del cuadrado en el tema de la razón dorada”. También aparece en la lámina LXXVII de [5, p. 166].

Tres notas finales: Primero. Nosotros hemos visto que en nuestro valor crítico de β , el α -medio conjunto de Cantor tiene a ϕ como el valor del cociente $\frac{\beta}{\alpha}$; esta razón es llamada el *espesor* del α -medio conjunto de Cantor. La idea de espesor puede generalizarse a cualquier conjunto de Cantor sumergido en la recta real, y esta es una forma de medir el tamaño del conjunto de Cantor que ha demostrado ser útil en el estudio de los sistemas dinámicos [6, pp. 332-336], el valor crítico del espesor es ϕ . Lo que hace este resultado especialmente atractivo sobre todo es que realmente no depende de la estructura especial del α -medio conjunto de Cantor: en efecto, ϕ es un valor crítico “universal” (arbitrario) para el conjunto de Cantor sumergido en la recta real. Si nosotros damos un número real τ , con $\tau < \phi$, entonces existen los conjuntos de Cantor C_1 y C_2 , definidos en los intervalos $[0, b_1]$ y $[0, b_2]$ respectivamente, tales que, C_1 y C_2 tienen ambos espesor τ y $C_1 \cap C_2 = \{0\}$. Si $\tau > \phi$, entonces no pueden existir tales conjuntos C_1 y C_2 de Cantor con espesor τ . La prueba de esto y una generalización a pares de conjuntos de Cantor con diferente espesor puede encontrarse en [7, capítulo 4].

Segundo. El lema 1 es un caso especial de un resultado útil en los sistemas dinámicos que es a menudo llamado el Lema del Hueco. El Lema del Hueco da las condiciones bajo las cuales dos conjuntos de Cantor suficientemente espesos tienen intersección no vacía [6, pp. 333-334].

Tercero. El α -medio conjunto de Cantor con $\beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ y espesor igual a ϕ no es el único candidato para el título “el conjunto dorado de Cantor”. Otro contendor puede ser el subcambio dorado del 2-cambio lleno en dinámica simbólica, ver [9, pp. 100-102].

Referencias

- [1] R. P. Boas, Jr., *A Primer on Real Functions*, Fourth ed., Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1996.
- [2] S. Bullett and J. Stark, “Renormalizing the simple pendulum”, *SIAM Review* 35 (1993), 631-640.
- [3] H. S. M. Coxeter, *Introduction To Geometry*, 2nd ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, 1969.
- [4] G. A. Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [5] M. Ghyka, *The Geometry of Art and Life*, Dover Publications, Inc., New York, 1977.
- [6] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [7] R. Kraft, “Intersections of thick Cantor sets”, *Mem. Amer. Math. Soc.* 97(1992), no.468.
- [8] R. Kraft, “What’s the difference between Cantor sets?”, *Amer. Math. Monthly* 101 (1994), 640-650.
- [9] D. Lind and B. Marcus, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [10] M. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., New York, 1983.

- [11] G. Markowsky, “Misconceptions about the Golden Ratio”, *College Math. J.* 23(1992), 2-19.
- [12] J Palis and F. Takens, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [13] M. Schroeder, *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinity Paradise*, W. H. Freeman and Co., New York, 1991.
- [14] L. A. Steen and J. A. Seebach, *Counterexamples in Topology*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1978.
- [15] R. Williams, “How big is the intersection of two thick Cantor sets?”, *Continuum theory and dynamical systems* (M. Brown. eds.), Proc. Joint Summer Reswearch Conference on Continua and Dynamics (Arcata, CA., 1989), Am. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

4.2. Algunas observaciones sobre el artículo

En el capítulo 2, observamos varias aplicaciones del cociente dorado o razón dorada, su uso en la arquitectura, obras de arte, y como patrón en la naturaleza, entre otras.

En este artículo, se quiere mostrar una relación existente entre este cociente y el célebre conjunto de Cantor ζ .

Notemos que β y α son los principales valores que encierran esta particularidad; como antes lo mencionamos α representa la longitud del intervalo abierto que será removido en el primer paso de la construcción geométrica de ζ , y β la longitud de cada intervalo cerrado que queda. A manera de ilustración presentaremos el siguiente ejemplo para observar que los diferentes conjuntos de Cantor son una generalización del clásico ternario de Cantor.

Ejemplo 4.2.1. Escojamos un número $\alpha \in (0, 1)$, por ejemplo $\alpha = \frac{1}{4}$, $I_0 = [0, 1]$, y sea I_1 la unión de los dos intervalos cerrados que quedan después de remover el intervalo abierto de longitud α del medio de I_0 .

Calculemos β ; como $\alpha = \frac{1}{4}$ entonces:

$$\beta = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1-\frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}.$$

De lo anterior, podemos construir I_1 de la siguiente manera:

$$I_1 = [0, \beta] \cup [(1 - \beta), 1] = [0, \frac{3}{8}] \cup [\frac{5}{8}, 1]$$

Repitiendo el paso anterior podemos construir I_2 , pero la longitud de los intervalos cerrados ahora será

$$\beta^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64},$$

luego

$$I_2 = [0, \beta^2] \cup [(\beta - \beta^2), \beta] \cup [(1 - \beta), (1 - \beta) + \beta^2] \cup [(1 - \beta^2), 1] = [0, \frac{9}{64}] \cup [\frac{15}{64}, \frac{3}{8}] \cup [\frac{5}{8}, \frac{49}{64}] \cup [\frac{55}{64}, 1]$$

Y así sucesivamente podemos construir I_n para cualquier $n \in \mathbb{N}$, conformado por 2^n intervalos cerrados cada uno de longitud $\beta^n = \left(\frac{3}{8}\right)^n$.

Si intersecamos todos los intervalos I_n para todo $n \in \mathbb{N}$, obtendremos uno de los conjuntos de Cantor, denotado por

$$\zeta_\alpha = \zeta_{\frac{1}{4}} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

ζ_α es el llamado α -*medio conjunto de Cantor*

Para ver que relación hay entre autosimilitud y factor escala, sigamos trabajando con el valor de α del ejemplo anterior, es decir, $\alpha = \frac{1}{4}$, entonces:

$$\zeta_\alpha^L = \zeta_{\frac{1}{4}}^L = \zeta_{\frac{1}{4}} \cap [0, \frac{3}{8}].$$

Este conjunto $\zeta_{\frac{1}{4}}^L$ es una copia contraída de $\zeta_{\frac{1}{4}}$ que está encajada dentro del intervalo $[0, \frac{3}{8}]$; en otras palabras, $\zeta_{\frac{1}{4}}^L$ será el conjunto de puntos del $\frac{1}{4}$ -*medio conjunto de Cantor*, que están en el intervalo $[0, \frac{3}{8}]$ y corresponde por tanto a la primera copia reducida de $\zeta_{\frac{1}{4}}$ que queda “a la izquierda” (la letra L hace referencia a “left” que significa izquierda en inglés).

Análogamente, para

$$\zeta_\alpha^R = \zeta_{\frac{1}{4}}^R = \zeta_{\frac{1}{4}} \cap [\frac{5}{8}, 1]$$

tenemos que el conjunto $\zeta_{\frac{1}{4}}^R$ es también una copia contraída de $\zeta_{\frac{1}{4}}$ que está encajada dentro del intervalo $[\frac{5}{8}, 1]$, es decir, $\zeta_{\frac{1}{4}}^R$ será el conjunto de puntos del $\frac{1}{4}$ -*medio conjunto de Cantor*, que están en el intervalo $[1 - \beta, 1]$, y corresponde por tanto a la primera copia reducida de $\zeta_{\frac{1}{4}}$ que queda “a la derecha” (la letra R hace referencia a “right” que significa derecha en inglés).

Para todo $x \in \zeta_{\frac{1}{4}}$ se tiene que la imagen de $\zeta_{\frac{1}{4}}$ bajo la función $T_L(x) = \beta x$ es $\zeta_{\frac{1}{4}}^L$, y la imagen de $\zeta_{\frac{1}{4}}$ bajo la función $T_R(x) = \beta x + (1 - \beta)$ es $\zeta_{\frac{1}{4}}^R$.

Ejemplo 4.2.2. Si $\frac{1}{4} \in \zeta_{\frac{1}{4}}$, entonces

$$T_L(\frac{1}{4}) = \beta \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \frac{1}{4} = \frac{3}{32} \in \zeta_{\frac{1}{4}}^L$$

y

$$T_R(\frac{1}{4}) = \beta \frac{1}{4} + (1 - \beta) = \frac{3}{8} \frac{1}{4} + (1 - \frac{3}{8}) = \frac{23}{32} \in \zeta_{\frac{1}{4}}^R.$$

En este momento podríamos hacernos la pregunta: ¿son algunos α -*medios conjuntos de Cantor* “más largos” que otros?; la idea de esta solución no es tan sencilla, y la desarrollaremos según [4]. Como lo hemos mencionado antes, los α -*medios conjuntos de Cantor* son una generalización directa del clásico conjunto ternario de Cantor. Sabemos que al elegir $\alpha \in (0, 1)$ tenemos $\beta = \frac{1-\alpha}{2}$, y con las transformaciones $T_L = \beta x$ y $T_R = \beta x + (1 - \beta)$ inductivamente se define

$$I_n = T_L(I_{n-1}) \cup T_R(I_{n-1}) \text{ para } n \geq 1.$$

Comparemos el $\frac{9}{10}$ -*medio conjunto de Cantor* y el $\frac{1}{10}$ -*medio conjunto de Cantor*; uno parece más largo que el otro, es decir, si decimos que ζ_α es “más largo” que $\zeta_{\alpha'}$, significa que $\alpha < \alpha'$; si esto sucede, los intervalos cerrados que “van quedando” en la construcción ζ_α son de mayor longitud que los correspondientes en $\zeta_{\alpha'}$. ¿Pero como podríamos demostrar esto?

Si comparamos el número de puntos de cada α -*medio conjunto de Cantor* llegaremos a la conclusión de que tienen la misma cardinalidad (la cardinalidad de \mathbb{R}).

Otra forma de comparar las longitudes de dos conjuntos de Cantor, es utilizando la medida de *Lebesgue*.

En efecto, la suma de las longitudes de los intervalos suprimidos de $\zeta_{\frac{1}{3}}$ es 1:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots + \frac{2^{j-1}}{3^j} + \dots = \frac{1}{3} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

Otra manera de ver esto es la siguiente. Si se elige $\alpha \in (0, 1)$ cada conjunto I_n contiene 2^n componentes, cada uno de longitud β^n ; en total la suma de las longitudes de I_n es igual a $2^n \cdot \beta^n = (2 \cdot \beta)^n$; de esto la longitud de ζ_α es menor o igual a $(2 \cdot \beta)^n$ para todo n . Ahora bien, si $\alpha \in (0, 1)$, tenemos:

$$0 < \alpha < 1 \implies -1 < -\alpha < 0 \implies 0 < 1 - \alpha < 1 \implies 0 < \frac{1-\alpha}{2} < \frac{1}{2} \implies \beta \in (0, \frac{1}{2}),$$

por lo cual $0 < 2\beta < 1$, así que $(2\beta)^n$ tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Puesto que cualquier par de α -medio conjuntos de Cantor tiene cardinalidad \mathcal{C} (la cardinalidad de \mathbb{R}) y la medida de Lebesgue cero, no podemos utilizar la cardinalidad ni la medida de Lebesgue para distinguir entre diferentes conjuntos de Cantor, aunque intuitivamente percibimos que el conjunto $\frac{1}{10}$ -medio conjunto de Cantor es más largo que el $\frac{9}{10}$ -medio conjunto de Cantor, y esto es precisamente lo que vamos a tratar de hacer.

Definición 4.2.1. Sean ζ_{α_i} y ζ_{α_j} conjuntos de Cantor, con $i, j \in \mathcal{I}$; entonces

$$\zeta_{\alpha_i} - \zeta_{\alpha_j} = \{x - y \mid x \in \zeta_{\alpha_i}, y \in \zeta_{\alpha_j}\}.$$

Un camino más dinámico para definir la diferencia de estos conjuntos es

$$\zeta_{\alpha_i} - \zeta_{\alpha_j} = \{t \mid \zeta_{\alpha_i} \cap (\zeta_{\alpha_j} + t) \neq \emptyset\},$$

donde $(\zeta_{\alpha_j} + t) = \{x + t \mid x \in \zeta_{\alpha_j}\}$ es una copia trasladada de ζ_{α_j} .

Observemos que para cualquier elección de $\alpha \in (0, 1)$, $\zeta_{\alpha_i} - \zeta_{\alpha_j} \subset [-1, 1]$.

¿Cómo puede ser usada esta diferencia para mirar si un α -medio conjunto de Cantor es más largo que otro?

Intuitivamente, el conjunto más largo a menudo debe intersectarse con el trasladado de él mismo.

De esta manera lo que haremos será aplicar la medida de Lebesgue y cardinalidad para diferenciar los conjuntos $\zeta_{\alpha_i} - \zeta_{\alpha_j}$ y para las intersecciones $\zeta_{\alpha_i} \cap (\zeta_{\alpha_j} + t)$; además, veremos que si α disminuye entonces la medida de Lebesgue aumenta.

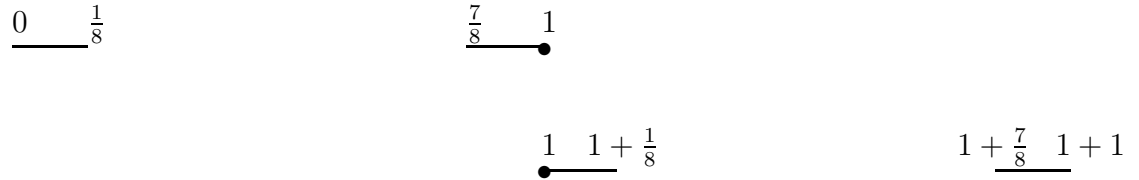
Los siguientes teoremas y lemas nos dicen algo más acerca de los diferentes valores que puede tomar β , y qué influencia tiene este en la medida de estos conjuntos; las pruebas se encuentran en [4].

Teorema 4.2.1. Si $\beta < \frac{1}{3}$, entonces $\zeta_{\alpha_i} - \zeta_{\alpha_j}$ es un conjunto de Cantor de medida cero. Si $\beta \geq \frac{1}{3}$ entonces $\zeta_{\alpha_i} - \zeta_{\alpha_j} = [-1, 1]$.

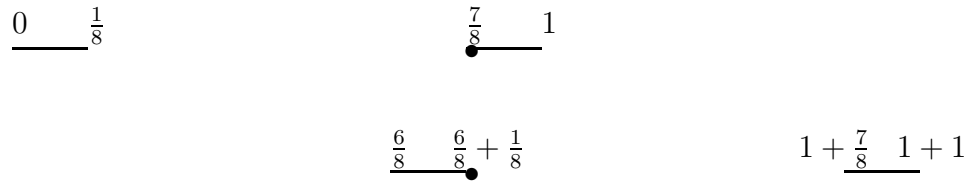
En otras palabras lo que el teorema nos dice es que si $\beta < \frac{1}{3}$, entonces $\zeta_{\alpha_i} \cap (\zeta_{\alpha_j} + t)$ es vacío para un conjunto numerable de t con $t \in [-1, 1]$, y si $\beta \geq \frac{1}{3}$, así que $\zeta_{\alpha_i} \cap (\zeta_{\alpha_j} + t)$ es no vacía para todo $t \in [-1, 1]$, así que hay un cambio importante cuando β (ó α) cruce por $\frac{1}{3}$.

Ejemplo 4.2.3. Si tomamos $\beta < \frac{1}{3}$, por ejemplo $\beta = \frac{1}{8}$, tenemos entonces que $\alpha = \frac{3}{4}$ y que $I_1 = [0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{7}{8}, 1]$; observemos para qué valores de t ($t \in [-1, 1]$) se tiene que $I_1 \cap (I_1 + t) = \emptyset$;

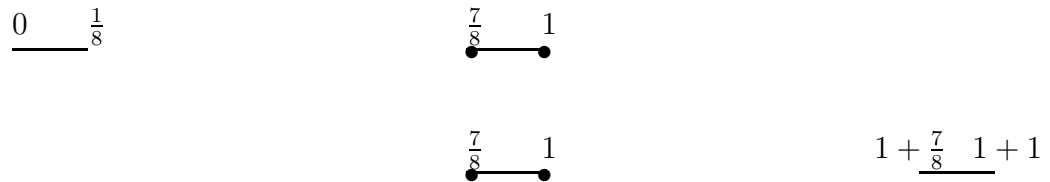
i) Si $t = 1$, tenemos que $I_1 \cap (I_1 + t) = \{1\}$;



ii) Si $t = \frac{6}{8}$, tenemos que $I_1 \cap (I_1 + t) = \{\frac{7}{8}\}$;



iii) Si $t \in [\frac{6}{8}, 1]$, tenemos que $I_1 \cap (I_1 + t) = [\frac{7}{8}, 1]$;



Aplicando simetría obtenemos:

- iv) Si $t = -1$, tenemos que $I_1 \cap (I_1 + t) = \{0\}$;
- v) Si $t = -\frac{6}{8}$ tenemos que $I_1 \cap (I_1 + t) = \{\frac{1}{8}\}$;
- vi) Si $t \in [\frac{6}{8}, 1]$ tenemos que $I_1 \cap (I_1 + t) = [0, \frac{1}{8}]$.

Podemos concluir entonces que si $t \in (-\frac{6}{8}, \frac{6}{8})$, tendremos $I_1 \cap (I_1 + t) = \emptyset$. Análogamente se sigue este proceso en $I_n \cap (I_n + t) = \emptyset$, para todo n ; así, $\zeta_\alpha \cap (\zeta_\alpha + t)$ es vacío para un conjunto numerable de t con $t \in [-1, 1]$.

Ejemplo 4.2.4. si $\beta \geq \frac{1}{3}$ implica que $\zeta_\alpha \cap (\zeta_\alpha + t)$ es no vacía para todo $t \in [-1, 1]$, esto es una conclusión directa, ya que la medida de los intervalos componentes (es decir, β), es mayor que la longitud del hueco abierto, así, nunca tendremos ninguno de los intervalos componentes contenido en el hueco abierto; por lo tanto dicha intersección es no vacía para todo $t \in [-1, 1]$.

Definición 4.2.2. Para algún $\alpha \in (0, 1)$, sea Λ_α que denota el α -medio conjunto de Cantor definido en el intervalo $[-1, 1]$ de la siguiente manera:

$$\Lambda_\alpha = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} u_i \beta^i (1 - \beta) \mid u_i \in \{-1, 1\} \quad \forall i \right\}.$$

El siguiente lema muestra que Λ_α contiene todos los puntos de $\zeta_{\alpha_i} - \zeta_{\alpha_j}$ por lo cual $\zeta_{\alpha_i} \cap (\zeta_{\alpha_j} + t)$ es un simple punto. Si $\beta \geq \frac{1}{3}$, entonces para casi todo $t \in [-1, 1]$, $\zeta_{\alpha_i} \cap (\zeta_{\alpha_j} + t)$ contiene más de un punto.

Lema 4.2.1. *Escojamos $\beta \in (0, \frac{1}{2})$. Si $\zeta_{\alpha_i} \cap (\zeta_{\alpha_j} + t)$ es un simple punto, entonces $t \in \Lambda_\alpha$.*

Teorema 4.2.2. *Si $\beta \geq \frac{1}{3}$, entonces $\zeta_\alpha \cap (\zeta_\alpha + t)$ es un conjunto de Cantor para casi todo $t \in [-1, 1]$.*

Nota: $\zeta_{\alpha_i} \cap (\zeta_{\alpha_j} + t)$ es vacío generalmente cuando $\beta < \frac{1}{3}$, y es casi siempre un conjunto de Cantor cuando $\beta \geq \frac{1}{3}$.

Esto muestra que el cambio en la diferencia de conjuntos descrita por el teorema 4.2.1. es aún más interesante que el indicado por este teorema.

En el siguiente teorema encontramos un intervalo de mayor confianza para β , en donde la intersección del α -medio conjunto de Cantor con una copia trasladada de él mismo contiene un conjunto de Cantor.

Teorema 4.2.3. *Si $\beta \in (\sqrt{2} - 1, \frac{1}{2})$, entonces $\zeta_{\alpha_i} \cap (\zeta_{\alpha_j} + t)$ contiene un conjunto de Cantor para todo $t \in (-1, 1)$.*

Finalmente, encontramos varios intervalos para β en los cuales la diferencia de dos conjuntos de Cantor tiene diferentes características, que se mostrarán brevemente a continuación.

- i) Si $\beta < \frac{1}{3}$, entonces $\zeta_{\alpha_i} - \zeta_{\alpha_j}$ es un conjunto de Cantor con medida de *Lebesgue* cero.
- ii) Si $\beta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, entonces $\zeta_{\alpha_i} - \zeta_{\alpha_j} = [-1, 1]$.
- iii) Si $\beta \in [\frac{1}{3}, \sqrt{2} - 1)$, entonces para casi todo $t \in [-1, 1]$, $\zeta_{\alpha_i} \cap (\zeta_{\alpha_j} + t)$ es un conjunto de Cantor, pero para algún $t \in (-1, 1)$, es tan pequeña como un punto.
- iv) Si $\beta = \sqrt{2} - 1$, entonces $\zeta_{\alpha_i} \cap (\zeta_{\alpha_j} + t)$ es un conjunto de Cantor, pero con un subconjunto infinito contable de $[-1, 1]$, y para $t \in (-1, 1)$ la cardinalidad más pequeña que puede tener $\zeta_{\alpha_i} \cap (\zeta_{\alpha_j} + t)$ es infinitamente contable.
- v) Si $\beta \in (\sqrt{2} - 1, \frac{1}{2})$, entonces $\zeta_{\alpha_i} \cap (\zeta_{\alpha_j} + t)$ contiene un conjunto de Cantor para todo $t \in (-1, 1)$.

El uso de los conjuntos de Cantor en los sistemas dinámicos y el estudio de las bifurcaciones, en especial las homoclínicas, han generado interrogantes acerca de cómo dos conjuntos de Cantor se pueden intersecar. Antes de esto recordemos que la teoría de las bifurcaciones estudia el comportamiento (macroscópico) del sistema cuando es perturbado, y se quiere saber cómo varía el comportamiento de todo el sistema cuando alguna o varias variables de ajuste se modifican, por ejemplo la tasa de natalidad o la aparición de un nuevo cuerpo en los movimientos planetarios.

Se modifican los parámetros del sistema de la misma forma que se mueve el dial de un radio para cambiar de sintonía en forma continua. Esta teoría estudia especialmente qué tipos de inestabilidades preceden al caos y como son los sistemas globalmente inestables que se hallan en el límite entre el orden y el caos.

Formalmente un sistema dinámico es una estructura $\{X; f\}$, donde X es un conjunto no vacío y $f : X \rightarrow X$.

Para la solución a nuestro problema geométrico en particular, lo que necesitamos es que cada uno de los intervalos derechos de la copia contraída (λI_n para todo n) quede totalmente encajado en el “intervalo hueco abierto” de I_n para todo n .

En los teoremas anteriores mostramos que existen valores críticos para β , pero necesitamos encontrar el valor crítico de β en la solución de nuestro problema geométrico. Gráficamente podemos observar que si queremos que se cumpla la condición de los intervalos de las copias contraídas, necesariamente debemos tener las desigualdades $\beta < \lambda(1 - \beta)$ y $\lambda < (1 - \beta)$; en otros términos,

$$\frac{\beta}{(1-\beta)} < \lambda < 1 - \beta;$$

resolviendo esta desigualdad, tenemos que β satisface la desigualdad $0 < 1 - 3\beta + \beta^2$. Utilizando la ecuación cuadrática obtenemos que $\beta = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Entonces se debe cumplir que:

$$0 < (\beta - \frac{3+\sqrt{5}}{2})(\beta - \frac{3-\sqrt{5}}{2}),$$

por lo que:

- i) $\beta > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ y $\beta > \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, luego $\beta > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, pero claramente debemos omitir este valor de β , ya que la longitud de los intervalos cerrados no puede ser mayor a 1.
- ii) Si $\beta < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ y $\beta < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ entonces $\beta < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Luego nuestro valor crítico es $\beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Para $\beta < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ el problema geométrico puede resolverse.

Cuando empezamos a utilizar la noción de autosimilitud encontramos que $I_n \cap \lambda I_n = [0, \lambda\beta^n]$ lo cual implica que $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha = \{0\}$. En efecto, tenemos por definición que

$$C_\alpha \equiv \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \implies \lambda C_\alpha \equiv \lambda \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n,$$

entonces

$$C_\alpha \cap \lambda C_\alpha = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \cap \lambda \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left(I_n \cap \lambda I_n \right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} [0, \lambda\beta^n].$$

Como $\lambda < 1$ y $\beta < 1$, entonces cuando n tiende a infinito, β^n tiende a cero, y $\lambda\beta^n$ tiende a cero. Por lo tanto $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha = \{0\}$.

Conclusiones finales

A la pregunta de nuestro problema geométrico: Dado $\beta \in (0, \frac{1}{2})$, ¿es posible encontrar un $\lambda \in (0, 1)$ tal que $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha = \{0\}$?, la respuesta no es única, ya que dependiendo el valor de $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ podemos encontrar o no valores para $\lambda \in (0, 1)$, como se mostrará a continuación.

- Sean $\beta \in (0, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$, $\alpha \in (\frac{1}{3}, 1)$; podemos escoger cualquier valor de λ , tal que

$$\frac{\beta}{(1-\beta)} < \lambda < 1 - \beta,$$

luego para este valor el problema geométrico SÍ tiene solución.

- Si $\beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, vemos que:

1. $\lambda = 1 - \beta$, entonces la intersección $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha$ es igual a cero y a un número contable de puntos finales comunes.
2. Si $\lambda > 1 - \beta$, entonces la intersección $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha$ es igual a cero y a un número contable de intervalos finales comunes.
3. Si $\lambda < 1 - \beta$, entonces $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha = \{0\}$.

Nota: Es con este valor de β donde se muestra la relación con la razón dorada, mirando la proporción de la longitud de los componentes a la longitud del hueco, es decir, $\frac{\beta}{\alpha}$.

- Sea $\beta \in [\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$. Si $\lambda \in (0, 1)$, entonces $C_\alpha \cap \lambda C_\alpha \neq \{0\}$. Este es el teorema 3 antes utilizado; como hemos comprobado anteriormente, para los valores de β en este intervalo no es posible encontrar $\lambda \in (0, 1)$ para la solución de nuestro problema geométrico.

- Cuando la longitud de uno de los intervalos componentes es igual a β en el valor crítico y se fracciona con la longitud del hueco intermedio, es decir, el intervalo de longitud α que es removido, obtenemos de este cociente el número ϕ ó número de oro; en otras palabras, la razón entre la longitud de uno de los intervalos componentes con el hueco es precisamente una proporción divina.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

- El conjunto de Cantor no solo se puede construir de forma geométrica. Una de las ventajas de la construcción analítica es que podemos calcular rápidamente con la ayuda de una simple calculadora los intervalos componentes de ζ_n para n muy grande, algo que geoméricamente sería muy engorroso.
- Cuando la longitud de uno de los intervalos componentes es igual a β y se fracciona con la longitud del hueco intermedio, es decir, el intervalo de longitud α que es removido, obtenemos de este cociente el número ϕ ó número de oro; en otras palabras, la razón entre la longitud de uno de los intervalos componentes con el hueco es precisamente una proporción divina.
- Aunque dos conjuntos de Cantor tengan igual cardinalidad, igual medida 0 de *Lebesgue*, podemos diferenciar cuándo un conjunto de Cantor es más largo que otro analíticamente.
- Finalmente, el conjunto ζ tiene una propiedad notable, pero nada evidente. Dado cualquier número real x del intervalo $[0, 1]$, existen dos elementos de ζ , y, z , tales que $x = y - z$. En otras palabras, las sumas $y + z$ de dos elementos y y z del conjunto ζ llenan el intervalo $[0, 2]$.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] WILLARD Stephen. *General Topology*. Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.
- [2] Organización de los Estados Americanos (O.E.A.) *Historia de las ideas modernas en matemática*. Buenos Aires, Organización de los Estados Americanos, 1967.
- [3] ESTÉVEZ Édgar. *El espacio de los códigos*. Monografía de grado, Licenciatura en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, 1994.
- [4] KRAFT Roger “What’s the difference between Cantor Sets?”. *American Mathematical Monthly* 101, 1994.
- [5] www.red-mat-unam.mx/foro/volumenes/vol006/vdsix.html *Propiedades del conjunto de Cantor*.
- [6] <http://azul.cicese.mx/~glopez/proyectos/Numeros/Formas/Dorado/cociente.html> *El cociente dorado*.
- [7] www.Psicogeometria.com/cursos.html *Psicogeometria*.
- [8] <http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/poliregs.html> *Construcción del pentagono regular*
- [9] www.explora.cl/otros/metro/fibonacci.html
- [10] www.librosgratis.com/cantorlalibertad.html
- [11] www.transparencia.org.pe/enigmas/ciencia

-
- [12] KRAFT Roger “A golden Cantor set”. *American Mathematical Monthly* 105, 1998.