ESTUDIO CUALITATIVO DEL SISTEMA DE DAVEY-STEWARTSON CON DATO INICIAL SINGULAR

JHEAN ELEISON PÉREZ LÓPEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2012

ESTUDIO CUALITATIVO DEL SISTEMA DE DAVEY-STEWARTSON CON DATO INICIAL SINGULAR

JHEAN ELEISON PÉREZ LÓPEZ

Trabajo de grado presentado para optar al título de Magister en Matemáticas

Director
DR. ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR ROA,

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2012

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, fuente de mi fortaleza e inspiración.

A la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander por brindarme la oportunidad de crecer profesionalmente pero sobre todo personalmente.

A todas las personas que intervinieron en este proceso y que me permitieron terminarlo satisfactoriamente, principalmente a mi director de tesis, el Doctor Élder Jesús Villamizar Roa por ser el guía en este camino.

Muchas gracias.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO CUALITATIVO DEL SISTEMA DE DAVEY-STEWARTSON CON DATO INICIAL SINGULAR[*]

AUTOR: JHEAN ELEISON PÉREZ LÓPEZ[**]

PALABRAS CLAVES: Davey, Stewartson, Punto fijo, Espacios de Lorentz, Scattering, Mild-solution

DESCRIPCIÓN: El sistema de Davey-Stewartson (DS) es una generalización a 2 dimensiones de la ecuación de schrödinger cúbica unidimensional $i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u$, y modela la evolución de ondas de agua débilmente no lineales que viajan predominantemente en una dirección, pero en las cuales la amplitud de onda es modulada lentamente en dos direcciones horizontales. El sistema fue propuesto inicialmente por Davey y Stewartson en [9] y en forma adimensional se escribe como

$$\begin{cases} i\partial_t u + \delta\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \chi u|u|^2 + \gamma u\partial_x v & (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad t\in\mathbb{R}, \\ \partial_x^2 v + m\partial_y^2 v = \partial_x(|u|^2) & (x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad t\in\mathbb{R}, \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

donde $u(x,y,t)$ representa la amplitud (compleja) y $v(x,y,t)$ representa la velocidad media potencial (real). Los parámetros $\delta,\ \chi,\ \gamma$ y m son reales y pueden asumir ambos signos.

En este trabajo se considera una generalización del sistema DS, y se demuestran resultados de existencia y unicidad de *"mild-solutions"* en espacios de Lorentz $L^{p,d}(\mathbb{R}^n)$, así como la existencia de soluciones auto-similares. Se estudia también el comportamiento asintótico de las soluciones globales, y se presentan resultados de *scattering*, *scattering inverso*, y estabilidad asintótica.

Todos los resultados aquí mostrados son novedosos para el sistema y constituyen el aporte central de este trabajo de tesis. Estos resultados se encuentran publicados en el artículo [24].

[*]Proyecto de Grado

[**]Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Dr. Élder Jesús Villamizar Roa

ABSTRACT

TITLE: QUALITATIVE STUDY OF THE DAVEY-STEWARTSON SYSTEM WITH SINGULAR INITIAL DATA*

AUTHOR: JHEAN ELEISON PÉREZ LÓPEZ**

KEYWORDS:Davey, Stewartson,Fixed point, Lorentz space, Scattering, Mild-solution

DESCRIPTION:

The de Davey-Stewartson system (DS) is a generalization to 2 dimensions of the cubic unidimensional Schrödinger equation $i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u$, and model the evolution of weakly nonlinear water waves that travel predominantly in one direction but for which the amplitude is modulated slowly in two horizontal directions.

The system was originally proposed by Davey and Stewartson in [9] and in dimensionless form is written as

$$\begin{cases} i\partial_t u + \delta\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \chi u|u|^2 + \gamma u\partial_x v & (x,y)\in\mathbb{R}^2, \ \ t\in\mathbb{R}, \\ \partial_x^2 v + m\partial_y^2 v = \partial_x(|u|^2) & (x,y)\in\mathbb{R}^2, \ \ t\in\mathbb{R}, \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

where $u(x,y,t)$ represents the amplitude (complex) and $v(x,y,t)$ represents the mean velocity potential (real). The parameters $\delta,\ \chi,\ \gamma$ y m are real and can take both signs.

In this work we consider a generalization of the DS-system, and we show results about existence and uniqueness of mild-solutions in Lorentz spaces $L^{p,d}(\mathbb{R}^n)$, as well as the existence of self-similar solutions. We also study the asymptotic behavior of global solutions, and we present results of *scattering*, *Inverse-scattering*, and asymptotic stability.

All results presented here are new to the system and are the central contribution of this thesis. These results are published in the article [24].

*Degree work

**Faculty of Science. Mathematics Department. Director: Ph.D Élder Jesús Villamizar Roa

INTRODUCCIÓN

El sistema de Davey-Stewartson (DS) es una generalización a 2 dimensiones de la ecuación de Schrödinger cúbica unidimensional $i\partial_t u + \Delta u = |u|^2\, u$, y modela la evolución de ondas de agua débilmente no lineales que viajan predominantemente en una dirección, pero en las cuales la amplitud de onda es modulada lentamente en dos direcciones horizontales. El sistema fue propuesto inicialmente por Davey y Stewartson en [9] y en forma adimensional se escribe como

$$\begin{cases} i\partial_t u + \delta\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \chi u|u|^2 + \gamma u\partial_x v & (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ t\in\mathbb{R}, \\ \partial_x^2 v + m\partial_y^2 v = \partial_x(|u|^2) & (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ t\in\mathbb{R}, \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), & \end{cases} \tag{3}$$

donde $u(x,y,t)$ representa la amplitud (compleja) y $v(x,y,t)$ representa la velocidad media potencial (real). Los parámetros δ, χ, γ y m son reales y pueden asumir ambos signos. Aunque en su deducción inicial, Davey y Stewartson no consideraron los efectos de la tensión superficial, conllevando a que m fuera una constante positiva, estudios posteriores realizados por Djordjevic y Redekopp [10] mostraron que m podría llegar a ser negativa cuando los efectos de la tensión superficial son importantes.

El sistema (3) ha sido estudiado ampliamente en el contexto de los espacios H^s. En 1990, Ghidaglia y Saut [16] clasificaron el sistema (3) como elíptico-elíptico, elíptico-hiperbólico, hiperbólico-elíptico e hiperbólico-hiperbólico cuando (δ, m) toma los signos $(+,+)$, $(+,-)$, $(-,+)$ y $(-,-)$ respectivamente. En los casos elíptico-elíptico e hiperbólico-elíptico, mostraron la existencia de solución local y global en el tiempo para ciertas condiciones de datos iniciales tomados en $L^2(\mathbb{R}^2)$, $H^1(\mathbb{R}^2)$ y $H^2(\mathbb{R}^2)$, así como la dependencia continua de la función dato-solución.

En 1997 Hayashi e Hirata [19] consideraron el caso elíptico-hiperbólico y probaron que para dato inicial u_0 en $H^{\frac{5}{2}}(\mathbb{R}^2)$ con norma L^2 pequeña, existe una solución local en el tiempo para el sistema DS.
En 1997 Hayashi [20], consideró el caso elíptico-hiperbólico y demostró que para dato inicial en H^s con $s \geq 2$, el sistema DS tiene una solución local en el tiempo. En este caso no es necesaria la condición de pequeñez utilizada en [19].
Por otro lado, Caixia y Boling [7] en 2006 trabajaron el caso elíptico-elíptico y demostraron que el sistema DS es globalmente bien puesto para dato inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ cuando $s > \frac{4}{7}$.

Existen trabajos sobre generalizaciones del sistema original DS, también llamados sistemas DS, entre ellas las de Baoxiang y Boling [2], que consideraron el problema en $\mathbb{R}^n$, y el término no lineal $\chi u|u|^2$ fue reemplazado por $\chi_1 u|u|^{p_1} + \chi_2 u|u|^{p_2}$. En su trabajo demostraron la existencia local y global de soluciones para dato inicial u_0 en un subespacio de H^s. Por otro lado, Caixia y Boling [8] en 2008 consideraron el problema en $\mathbb{R}^n$, y el exponente 2 en los términos no lineales fue reemplazado por p, con $p > 0$. En este caso demostraron que para p entero, y algunos valores de s, el problema de Cauchy esta mal puesto en H^s.

Como se mencionó, todos los modelos anteriores fueron estudiados en el contexto de los espacios H^s, referidos como espacios de energía finita. Sin embargo, se conocen pocos resultados del modelo DS fuera del contexto de los espacios H^s. Uno de ellos fue el trabajo de Zhao [26] quien consideró los casos elíptico-elíptico e hiperbólico-elíptico del sistema (3) en donde el exponente 2 de los términos no lineales fue reemplazado por un exponente ρ, y demostró que si u_0 pertenece al espacio de las distribuciones temperadas y es tal que $\sup_{t>0} t^{\alpha} \left\| S(t)u_0 \right\|_{\rho+2} < \epsilon$, donde $\alpha = \frac{1}{\rho} - \frac{n}{2(\rho+2)}$ y ϵ es suficientemente pequeño, entonces el sistema DS tiene una única solución u tal que $\|u\|_{E^{\alpha}} = \sup_{t>0} t^{\alpha} \left\| u(t) \right\|_{\rho+2} < 2\epsilon$.

También trabajando fuera de los espacios H^s, recientemente Barros en [3], consideró los casos elíptico-elíptico e hiperbólico-elíptico del siguiente sistema DS

$$\begin{cases} i\partial_t u + \delta \partial_{x_1}^2 u + \Sigma_{j=2}^n \partial_{x_j}^2 u = \chi u|u|^{\rho} + \gamma u \partial_{x_1} v, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \partial_{x_1}^2 v + m \partial_{x_2}^2 v + \Sigma_{j=3}^n \partial_{x_j}^2 v = \partial_{x_1}(|u|^{\rho}), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{4}$$

Usando una técnica que se basa esencialmente estimativas de Strichartz, Barros demostró que para $\frac{4(n+1)}{n(n+2)} < \rho < \frac{4(n+1)}{n^2}$ y u_0 es suficientemente pequeño en un subespacio del espacio de las distribuciones temperadas, el sistema (4) tiene una única solución global $u \in L^{\frac{\rho(n+2)}{2},\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Continuando con el trabajo fuera de los espacios H^s, en el desarrollo de este trabajo se considera el sistema DS generalizado (4) y se estudian los casos elíptico-elíptico e hiperbólico-elíptico, desde el punto de vista de la existencia y unicidad de solución (local y global) y comportamiento asintótico de soluciones globales en espacios mucho más generales que los espacios L^p, a saber, los espacios de Lorentz $L^{p,d}$, incluyendo los espacios $L^{p,\infty}$. A diferencia del trabajo de Barros [3], nuestros resultados se basan en las propiedades de decaimiento del grupo $S(t)$ generado por la parte lineal de la ecuación para la amplitud en (4) (véase también Lema 1); además, el espacio en donde establecemos la existencia de solución global (véase ecuación (2.13)) no es comparable con el espacio utilizado en [3]. En realidad, el espacio para nuestra solución global es determinado por la relación de escala de la ecuación.

Tanto en el caso elíptico-elíptico como en el caso hiperbólico-elíptico, el sistema (4) puede ser reducido al problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t u + \delta\partial_{x_1}^2 u + \Sigma_{j=2}^n \partial_{x_j}^2 u = \chi u|u|^\rho + \gamma u N(|u|^\rho), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{5}$$

donde $\widehat{N(\phi)}(\xi) = \xi_1^2[\xi_1^2 + m\xi_2^2 + \Sigma_{j=3}^n \xi_j^2]^{-1}\widehat{\phi}(\xi)$, $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Una técnica usada para obtener existencia de soluciones globales es usar argumentos de relación de escala inherentes a la EDP. En el caso del sistema DS, se puede verificar directamente que si $u(x,t)$ es una solución clásica de (5) entonces $u_\lambda := \lambda^{2/\rho}u(\lambda x, \lambda^2 t),\ \lambda > 0$ también es solución de (5). Las soluciones invariantes por la relación de escala $u \mapsto u_\lambda$, es decir, soluciones para las cuales $u(x,t) = \lambda^{2/\rho}u(\lambda x, \lambda^2 t),$ son llamadas soluciones auto-similares de la ecuación (5).

Suponiendo que u es auto-similar, tomando el límite cuando t tiende a cero, formalmente se tiene

$$u(x,0) = \lambda^{2/\rho} u(\lambda x, 0),$$

esto es,

$$u_0(x) = \lambda^{2/\rho} u_0(\lambda x),$$

por lo tanto $u_0(x)$ debe ser una función homogénea de grado $-2/\rho$. Infortunadamente estas funciones no pertenecen a los espacios $H^s(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto, si se desea buscar soluciones auto-similares, es necesario trabajar en espacios que contengan funciones homogéneas. Una clase de espacios de funciones que contienen funciones homogéneas, son los llamados espacios de L^p-débiles, también denotados por $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, y que hacen parte de los llamados Espacios de Lorentz (Véase Definición 12). Lo anterior nos motiva a realizar un estudio cualitativo del sistema DS en el contexto de Espacios de Lorentz.

Para el estudio de soluciones del PVI (5) notamos que este, como consecuencia del principio de Duhamel, es formalmente equivalente a la formulación integral

$$\begin{aligned} u(t) &= S(t)u_0 + i\int_0^t S(t-s)[\chi u(s)|u(s)|^\rho + \gamma u(s) N(|u(s)|^\rho)]ds \\ &\equiv S(t)u_0 + L(u), \end{aligned} \tag{6}$$

donde $S(t)$ es el grupo definido por $\widehat{S(t)u_0} = e^{-it\psi(\xi)}\widehat{u_0}$, con $\psi(\xi) = 4\pi^2\delta\xi_1^2 + 4\pi^2\Sigma_{j=2}^n \xi_j^2$. De esta forma, el problema de existencia de soluciones para (5) se convierte en un problema de existencia de un punto fijo para el operador definido por el lado derecho de (6).

Dada esta relación, las funciones que verifican la ecuación integral (6) son llamadas *"mild-solutions"* del PVI (5), y es sobre este tipo de soluciones, sobre las cuales haremos un desarrollo cualitativo.

En el desarrollo de este trabajo se demuestran resultados de existencia y unicidad de *"mild-solutions"* para el PVI (5) en espacios de Lorentz $L^{p,d}(\mathbb{R}^n)$, así como la existencia de soluciones auto-similares. Se presentan también algunos resultados de comportamiento asintótico, entre ellos, se presenta un resultado de *scattering*, es decir, dado un dato inicial u_0, y la correspondiente solución global u, encontrar un dato u_0^+, tal que la solución u^+ del problema lineal asociado, con dato inicial u_0^+, describe el comportamiento asintótico de la solución global u. Junto con el problema de *scattering*, se aborda el problema de *scattering inverso*, es decir, construir una solución con un estado *scattering* prescrito; más precisamente, dado un perfil f, encontrar una solución global u la cual converge, cuando $t \to \infty$, a la solución del problema lineal asociado con dato inicial f.

Todos los resultados aquí mostrados son novedosos para el sistema y constituyen el aporte central de este trabajo de tesis. Estos resultados se encuentran publicados en el artículo [24].

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo se presenta la notación que se seguirá durante el trabajo, así como la definición y algunas de las propiedades de los espacios en lo que se establecen los resultados de existencia, unicidad y comportamiento asintótico de soluciones para el sistema DS.

1.1. Notación básica

Un punto de $\mathbb{R}^n$ es escrito como $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, y su norma viene dada por $\|x\|_{\mathbb{R}^n}$=$(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$. El producto interno de dos puntos x y y en $\mathbb{R}^n$ es dado por $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ es una $n-$upla de enteros no negativos α_i, se dice que α es un multi-índice de "longitud" $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ definimos x^α como $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Similarmente, si $D_j = \partial/\partial x_j$, entonces

$$D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

denota el operador diferencial de orden $|\alpha|$. Note que $D^{(0,0,\ldots,0)}u = u$.

Para $1 \leq p \leq \infty$, p' denotará su exponente conjugado, que para $1 < p < \infty$ viene dado por la relación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

y para $p = 1,$ entonces $p' = \infty$, o si $p = \infty$ entonces $p' = 1$.

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, la función $\bar{f}$ denotará la función compleja conjugada de f.

Por ultimo, dados m y n reales positivos, se define la función Beta como

$$B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1} dt.$$

1.2. Espacios de funciones

A continuación se definen algunos espacios de funciones, así como algunas de sus propiedades importantes en el desarrollo de este trabajo.

Espacios de funciones continuas

Para cualquier entero no negativo m, $C^m(\mathbb{R}^n)$ denotará el espacio de funciones f para las cuales, junto con todas sus derivadas parciales $D^{\alpha} f$ de orden $|\alpha| \leq m$, son continuas en $\mathbb{R}^n$. Se abrevia $C^0(\mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n)$.

Además $C^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\mathbb{R}^n)$. Los subespacios $C_0(\mathbb{R}^n)$ y $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ consisten de todas las funciones en $C(\mathbb{R}^n)$ y $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que tienen soporte compacto en $\mathbb{R}^n$.

Espacios de Lebesgue

Se denota por $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$ al espacio de Banach de las clases de funciones f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$, medibles, y con norma definida como

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde la integral es entendida en el sentido de Lebesgue. En particular, para $p = 2$, $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con producto interno dado por

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\bar{g}(x) \, dx.$$

Además $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ denotará el espacio de Banach de las clases de funciones f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$, medibles y esencialmente acotadas, esto es, existe K tal que, $|f(x)| \le K$ para casi todo punto (c.t.p) $x \in \mathbb{R}^n$, con norma definida como

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{ess sup}} \; |f(x)|.$$

Proposición 1.2.1. ***[15] (Desigualdad de Hölder).*** *Suponga que* $u = \prod_{j=1}^{n} u_j$ *donde* $u_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le j \le n$, *y* $1 \le p_j \le \infty$. *Si* $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p_j} = \frac{1}{q}$ *entonces* $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *y*

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le \prod_{j=1}^{n} \|u_j\|_{L^{p_j}(\mathbb{R}^n)}.$$

Espacios de funciones test

Los espacios considerados como de funciones test son $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definido a continuación.

Definición 1. *Una función $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de clase C^∞, es llamada una función de Schwartz, si para cada par de multi-índices α y β existe una constante positiva $C_{\alpha,\beta}$ tal que*

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right| = C_{\alpha,\beta} < \infty$$

El conjunto de todas las funciones de Schwartz en $\mathbb{R}^n$ es denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dicho de otra forma, el espacio de funciones de Schwartz consta de todas las funciones de clase C^∞ tales que la función y sus derivadas de todos los órdenes decaen más rápido que cualquier polinomio.

Los espacios $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, son considerados como espacios de funciones test y están encajados de la siguiente manera.

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Definición 2. *La convergencia en los espacios de funciones test se define a continuación.*

$$\begin{aligned} f_k \to f \quad en \quad C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad &\Longleftrightarrow \quad f_k,\, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ y \ \lim_{k\to\infty} \sup_{|x|\le N} |\partial^\alpha (f_k - f)(x)| = 0 \\ & \qquad \forall\alpha \ \textit{Multi-índice y todo}\, N = 1,2,..., \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_k \to f \quad en \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad &\Longleftrightarrow \quad f_k,\, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ y \ \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta (f_k - f)(x)\right| = 0 \\ & \qquad \forall\alpha,\, \beta \ \textit{Multi-índices}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_k \to f \quad en \quad C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad &\Longleftrightarrow \quad f_k,\, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ supp(f_k) \subset B,\ \forall k,\ B\, compacto, \\ & \qquad y \ \lim_{k\to\infty} \|\partial^\alpha (f_k - f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0,\ \forall\alpha\, \textit{multi-índice}. \end{aligned}$$

Se sigue de la definición que la convergencia en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ implica convergencia en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la que a su vez implica la convergencia en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Espacios de funcionales sobre funciones test

Los espacios duales, (estos es, los espacios de funcionales lineales y continuos) sobre los espacios de funciones test son denotados por

$$(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

$$(C^\infty(\mathbb{R}^n))' = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n).$$

Los elementos del espacio $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ son llamados *distribuciones*, los elementos del espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ son llamados *distribuciones temperadas* y los elementos del espacio $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ son llamados *distribuciones con soporte compacto.*

Observación 1.2.1. *Se demuestra fácilmente que para cualquier función f localmente integrable con crecimiento polinomial en el infinito define una distribución temperada vía la aplicación*

$$\Psi_f(\varphi) = \int\limits_{R^n} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

En particular se tiene que cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$, define una distribución temperada.

Una descripción detallada de los espacios de funciones test y de los espacios de distribuciones puede ser encontrada en Grafakos [17].

Transformada de Fourier y espacios de Sobolev

Definición 3. *Para una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la transformada de Fourier de f, denotada por $\hat{f}$, es definida por*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi(x\cdot\xi)} f(x)dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

A continuación se presentan algunas propiedades básicas de la transformada de Fourier.

Teorema 1. *[23, 17] Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces:*

1. *$f \mapsto \hat{f}$ define una transformación lineal de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ con*

$$\left\|\hat{f}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

2. *$\hat{f}$ es continua.*

3. *$\hat{f}(\xi) \to 0$ cuando $|\xi| \to \infty$.*

4. *Sea $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f * g$ la convolución de f y g. Entonces*

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

De la definición de la transformada de Fourier, se tiene la siguiente proposición que relaciona la transformada con la diferenciación.

Proposición 1.2.2. *[23, 17] Suponga que $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, donde x_k denota la $k-esima$ coordenada de x. Entonces $\hat{f}$ es diferenciable respecto a ξ_k y*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k}(\xi) = (-2\widehat{\pi i x_k f}(x))(\xi).$$

Para plantear el recíproco de este resultado es necesaria la siguiente definición.

Definición 4. *Una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ es diferenciable en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con respecto a la k-ésima variable si existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x+he_k)-f(x)}{h} - g(x) \right|^p dx \to 0 \quad cuando \quad h \to 0.$$

Si tal g existe (en cuyo caso es única) es llamada la derivada parcial de f respecto a la k-ésima variable en la norma $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2. *[23, 17] Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y g su derivada parcial respecto a la k-ésima variable en la norma $L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\hat{g}(\xi) = 2\pi i \xi_k \hat{f}(\xi)$.*

Observación 1.2.2. *Del resultado anterior se puede deducir fácilmente la fórmula*

$$\begin{aligned} P(D)\hat{f}(\xi) &= \widehat{P(-2\pi i x) f(x)}(\xi), \\ (\widehat{P(D)f})(\xi) &= P(2\pi i x)\hat{f}(\xi), \end{aligned}$$

donde P es un polinomio de n variables y $P(D)$ denota el operador diferencial asociado a P.

Utilizando el hecho de que $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y en $L^2(\mathbb{R}^n)$ se puede extender la definición de la transformada de Fourier para $L^2(\mathbb{R}^n)$. Los siguientes teoremas establecen este resultado.

Teorema 3. *[23, 17] Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\left\| \hat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Teorema 4. *[23, 17] La transformada de Fourier define un operador unitario en $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

La definición de la transformada de Fourier incluye de forma natural funciones $f \in \mathcal{S}$, además, para estas funciones se define la transformada inversa de Fourier de la siguiente forma:

Definición 5. *Dada una función $f \in \mathcal{S}$, se define*

$$f^{\vee}(x) = \hat{f}(-x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. La operación

$$f \mapsto f^{\vee}$$

es llamada la la transformada inversa de Fourier.

La transformada de Fourier está relacionada naturalmente con el espacio de funciones $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 5. *[17, 23] La función $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ es un isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en él mismo.*

Por otro lado, es posible definir la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier sobre distribuciones temperadas como se indica a continuación.

Definición 6. *Dada $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, su transformada de Fourier $\hat{\Psi}$ y su transformada inversa de Fourier $\Psi^{\vee}$ son definidas como*

$$\hat{\Psi}(\varphi) = \Psi(\hat{\varphi}) \quad y \quad \Psi^{\vee}(\varphi) = \Psi(\varphi^{\vee}), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Respecto a la transformada de Fourier sobre distribuciones se tiene el siguiente teorema.

Teorema 6. *La función $\Psi \mapsto \hat{\Psi}$ es un isomorfismo de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en él mismo.*

Dada la definición de la transformada de Fourier para una distribución se tiene el siguiente teorema análogo al Teorema 1.

Teorema 7. *[17]. Dadas u y v en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, b un número complejo y α un multi-índice, se tiene*

1. $\widehat{u+v} = \hat{u} + \hat{v}$,

2. $\widehat{bu} = b\hat{u}$,

3. *Si* $u_j \to u$ *en* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, *entonces* $\hat{u}_j \to \hat{u}$ *en* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

4. $(\hat{u})\check{} = u$,

5. $\widehat{f * u} = \hat{f}\hat{u}$,

6. $\widehat{fu} = \hat{f} * \hat{u}$.

Estamos ahora en posición de definir los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, que serán importantes para las referencias de nuestro trabajo.

Definición 7. *Sea $s \in \mathbb{R}$ y $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ se define como*

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,;\, ((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f})^\vee \in L^p(\mathbb{R}^n)\},$$

con norma

$$\|f\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} = \left\|((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f})^\vee\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

El espacio de Sobolev homogéneo $\dot{H}_p^s$ se define como

$$\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\,;\, (|\xi|^s\,\hat{f})^\vee \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$$

con norma

$$\|f\|_{\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)} = \left\|(|\xi|^s\,\hat{f})^\vee\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Se utiliza la notación $H_2^s = H^s$ y $\dot{H}_2^s = \dot{H}^s$.

Por otro lado, los espacios de Sobolev con peso, denotados como $H^{m,l}(\mathbb{R}^n)$, son definidos como sigue:

$$H^{m,l}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n)\,;\ \|f\|_{H^{m,l}(\mathbb{R}^n)} = \left\|(1-\Delta)^{m/2}(1+|x|^2)^{l/2} f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

donde $(1-\Delta)^{m/2} f = ((1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{f})^{\vee}$.

Así mismo, su versión homogénea se define como

$$\dot{H}^{m,l}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n)\,;\ \|f\|_{\dot{H}^{m,l}(\mathbb{R}^n)} = \left\|(1-\Delta)^{m/2}\,|x|^l\, f\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty\}.$$

1.3. El teorema de Calderón-Zygmund

En esta sección se enuncia el teorema de Calderón-Zygmund, el cual tiene relevancia en el desarrollo de este trabajo. Empezamos con una definición.

Definición 8. *Una distribución $f \in \mathcal{S}'$ se dice homogénea de grado μ, si $\langle f, \phi_r\rangle = r^{\mu}\langle f, \phi\rangle$ para todo $\phi \in \mathcal{S}$, donde ϕ_r es la función definida por $\phi_r(x) = r^{\mu}\phi(x/r)$.*

Observación 1.3.1. *La anterior definición concuerda con la definición usual de homogeneidad cuando f es una función localmente integrable.*

Para $u \in \mathcal{S}'$, se define

$$Pu = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} p(\xi)\hat{u}(\xi)d\xi.$$

Note que, si $p(\xi)$ es C^{∞} en $\mathbb{R}^n - \{0\}$ y homogénea de grado $-\lambda$, con $0 \le \lambda < n$, entonces, $p(\xi)$ define una distribución temperada $p^{\vee}(x)$ y

$$\begin{aligned} Pu &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} p(\xi)\hat{u}(\xi)d\xi = (p(\xi)\hat{u}(\xi))^{\vee} \\ &= p^{\vee}(x) * (\hat{u})^{\vee}(x) = p^{\vee}(x) * u(x). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Proposición 1.3.1. *Si f es una distribución temperada, que es homogénea de grado μ, entonces, $\hat{f}$ es homogénea de grado $-\mu - n$. Si f es también C^{∞} lejos del origen, entonces lo mismo es cierto para $\hat{f}$.*

Observación 1.3.2. *Si se denota $\tilde{K}(x) = p^{\vee}(x)$, donde $p^{\vee}(x)$ es dado en la ecuación (1.1), se tiene según la proposición anterior que la distribución temperada $\tilde{K}$ es C^{∞} lejos del origen y homogénea de grado $\lambda - n$.*

Definición 9. *Una distribución temperada K, que es homogénea de grado $\lambda - n$ y C^{∞} lejos del origen, es llamada un kernel de tipo λ. Si K es un kernel de tipo λ, el operador $Tf = K * f$ con $f \in \mathcal{S}'$, es llamado un operador de tipo λ.*

Teorema 8. *[14] [Calderon-Zygmund]. Operadores de tipo 0 son acotados en L^p, $1 < p < \infty$.*

1.4. Espacios de Lorentz y espacios de Marcinkiewicz

En esta sección se definen los espacios de Lorentz $L^{p,d}(\mathbb{R})$ y algunas propiedades que serán importantes para el estudio del problema (5). Para un estudio profundo de estos espacios, ver [4, 17].

Para definir los espacios $L^{p,d}(\mathbb{R})$ se requiere definir la función distribución y la función rearreglo asociada a una función medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

Definición 10. *Dada una función medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, la función distribución de f es la función $d_f : [0, \infty) \to [0, \infty]$ definida por*

$$d_f(s) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > s\}),$$

donde μ representa la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Definición 11. *Dada una función medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, la función rearreglo de f es la función $f^* : [0, \infty) \to [0, \infty]$ definida por*

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : d_f(s) \le t\}.$$

Se usa la convención de $\inf\emptyset = \infty$, así $f^*(t) = \infty$ siempre que $d_f(\alpha) > t$ para todo $\alpha \geq 0$.

Las próximas proposiciones establecen algunas propiedades básicas de las funciones d_f y f^*.

Proposición 1.4.1. *[17] si, $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ son funciones medibles, entonces*

1. *d_f y f^* son no-crecientes y continuas por derecha,*

2. *Si $|f(x)| \leq |g(x)|$ en c.t.p en $\mathbb{R}^n$, entonces $d_f(s) \leq d_g(s)$, $\forall s \geq 0$,*

3. *$d_{f+g}(s_1 + s_1) \leq d_f(s_1) + d_g(s_2)$, $\forall s_1, s_2 \geq 0$,*

4. *f y f^* tienen la misma función distribución,*

5. *$f^*(d_f(s)) \geq s$ y $d_f(f^*(t)) \leq t$,*

6. *$(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$.*

Observación 1.4.1. *Del ítem (5) de la proposición anterior, se tiene que si d_f es decreciente entonces f^* es la función inversa de d_f.*

Proposición 1.4.2. *La ecuación $f^*(t) = d_{d_f}(t)$ se cumple para toda $t > 0$.*

Observación 1.4.2. *La Proposición 1.4.2 muestra de manera más clara, cómo la función rearreglo de f hereda algunas propiedades de la función distribución de f, como por ejemplo el no crecimiento y continuidad por derecha mostrados en la Proposición 1.4.1.*

Del hecho que f y f^* tienen la misma función distribución, se sigue que si $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty (f^*(t))^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right]^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Esta propiedad sugiere la introducción de una nueva familia de espacios, en los cuales estén incluidos los espacios L^p. Estos espacios son llamados espacios de Lorentz y se definen de la siguiente manera:

Definición 12. *Sean* $0 < p, d \leq \infty$. *El espacio de Lorentz* $L^{p,d}$ *es el conjunto de todas las funciones medibles* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tales que el funcional* $\|\cdot\|^*_{(p,d)}$ *es finito, donde*

$$\|f\|^*_{(p,d)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^d \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{d}} & si\, d < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & si\, d = \infty. \end{cases}$$

De acuerdo a la definición del espacio $L^{p,d}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $L^{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $L^{p,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto, los espacios de Lorentz extienden la clase de los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$. Los espacios $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ son generalmente llamados *Espacios de Marcinkiewicz*, o espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$-*débiles*, y son también una generalización de los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ ya que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Una clase importante de funciones que pertenecen al espacio $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ son las funciones homogéneas de grado $-n/p$. En efecto, si f es una función homogénea de grado $-n/\rho$, entonces, f se puede escribir como $f(x) = |x|^{-n/\rho} g(x)$, donde g es una función homogénea de grado cero. Sin perdida de generalidad, suponga que $g(x) = 1$, entonces

$$d_f(s) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n; |x|^{-n/p} > s\}) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n;\ s^{-p/n} > |x|\}) = C_n s^{-p}.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \text{inf}\{s > 0;\ d_f(s) \leq t\} = \text{inf}\{s > 0;\ C_n s^{-p} \leq t\} \\ &= \text{inf}\{s > 0;\ C_n^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p}} \leq s\} = C_n^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|f\|^*_{(p,\infty)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} C_n^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p}} = C_n^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Observación 1.4.3. *Se deduce de la definición, que para* $0 < p, r < \infty$ *y* $0 < d \leq \infty$*, el funcional* $\|\cdot\|^*_{(p,d)}$ *verifica*

$$\||f|^r\|^*_{(p,d)} = \|f\|^{*r}_{(p,d)}.$$

El espacio de Lorentz $L^{p,d}$ es un espacio vectorial topológico, con la topología generada por $\|\cdot\|^*_{(p,d)}$. Infortunadamente, el funcional $\|\cdot\|^*_{(p,d)}$ no define una norma, ya que para éste se cumple

$$\|f + g\|^*_{(p,d)} \leq c_{p,d}\left(\|f\|^*_{(p,d)} + \|g\|^*_{(p,d)}\right),$$

donde $c_{p,d} = 2^{1/p}\mathrm{max}\{1, 2^{(1-d)/d}\}$, y que $\|f\|^*_{(p,d)} = 0$ implica que $f = 0$ c.t.p. Es decir, el funcional $\|\cdot\|^*_{(p,d)}$ define una cuasi-norma, respecto a la cual el espacio $L^{p,d}$ es completo, como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 9. *[17] Para todo* $0 < p, d \leq \infty$*, los espacios* $L^{p,d}(\mathbb{R}^n)$ *son completos respecto a su cuasi-norma y son por lo tanto espacios cuasi-Banach.*

Con el objetivo de dotar al espacio $L^{p,d}(\mathbb{R}^n)$ de una norma, se utiliza la función auxiliar $f^{**} = f^{**}(t)$ definida por

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds, \quad t > 0.$$

Se puede verificar que f^{**} cumple una propiedad de subaditividad, esto es, dadas $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se tiene que

$$(f + g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t).$$

Consideramos ahora el funcional $\|\cdot\|_{(p,d)}$ definido sobre $L^{p,d}$ como

$$\|f\|_{(p,d)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^d \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{d}} & si\, 1 < p < \infty,\ 1 \leq d < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) & si\, 1 < p \leq \infty,\ d = \infty. \end{cases}$$

La siguiente proposición muestra la equivalencia entre las cantidades $\|\cdot\|^*_{(p,d)}$ y $\|\cdot\|_{(p,d)}$.

Proposición 1.4.3. *[17] Sean $f \in L^{p,d}$, $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq d \leq \infty$. Entonces*

$$\|f\|^*_{(p,d)} \leq \|f\|_{(p,d)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|^*_{(p,d)} .$$

Se establece ahora que el funcional $\|\cdot\|_{(p,d)}$ es de hecho una norma.

Proposición 1.4.4. *[4, 17] Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq d \leq \infty$. El funcional $\|\cdot\|_{(p,d)}$ define una norma en $L^{p,d}(\mathbb{R}^n)$.*

Como consecuencia de las Proposiciones 9, 1.4.3 y 1.4.4 se tiene que los espacios $L^{p,d}$, con norma $\|\cdot\|_{(p,d)}$, son espacios de Banach.

Una propiedad importante de los espacios de Lorentz es que poseen la misma relación de escala que los espacios L^p, esto es, dado $\lambda > 0$ y una función medible $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, definimos f_λ como $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ y se cumple que

$$\|f_\lambda\|_{(p,d)} = \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{(p,d)}, \tag{1.2}$$

para $1 \leq p, d \leq \infty$.

El siguiente teorema muestra las relaciones de inclusión entre espacios $L^{p,d}$.

Teorema 10. *[17] Suponga $1 < p < \infty$ y $1 \leq d < r \leq \infty$. Entonces $L^{p,d} \subset L^{p,r}$ y*

$$\|f\|_{(p,r)} \leq \left(\frac{d}{p}\right)^{\frac{1}{d}-\frac{1}{r}} \|f\|_{(p,d)},$$

para toda $f \in L^{p,d}$.

Del teorema anterior se deduce que para $1 < p < \infty$ y $1 \leq d_1 \leq p \leq d_2 \leq \infty$, las inclusiones $L^{p,d_1} \subset L^p \subset L^{p,d_2} \subset L^{p,\infty}$ son continuas.

Una caracterización importante de los espacios de Lorentz, es que pueden ser construidos por interpolación como se establece en el siguiente teorema

Teorema 11. *[4] Suponga que* p_0, p_1, d_0, d_1 *y* d *son números positivos, posiblemente infinitos, y sea* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ *donde* $0 < \theta < 1$. *Entonces, si* $p_0 \neq p_1$,

$$\left(L^{p_0,d_0}, L^{p_1,d_1}\right)_{\theta,d} = L^{p,d},$$

donde $(\cdot,\cdot)_{\theta,d}$ *representa el espacio de interpolación construido vía el método* K. *Esta fórmula también es válida en el caso* $p_0 = p_1 = p$, *siempre que* $1/d = (1-\theta)/d_0 + \theta/d_1$.

Como una consecuencia del Teorema 11, se tiene el siguiente teorema de interpolación.

Teorema 12. *[4] Suponga que*

$$T:\, L^{p_0,r_0}(\mathbb{R}^n) \to L^{q_0,s_0}(\mathbb{R}^n),\ \textit{con norma}\ \|T\|_{p_0,r_0\to q_0,s_0} = M_0,$$

$$T:\, L^{p_1,r_1}(\mathbb{R}^n) \to L^{q_1,s_1}(\mathbb{R}^n),\ \textit{con norma}\ \|T\|_{p_1,r_1\to q_1,s_1} = M_1,$$

donde $p_0 \neq p_1$ *y* $q_0 \neq q_1$. *Entonces, si* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$ *y* $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$, *se tiene que*

$$T:\, L^{p,r}(\mathbb{R}^n) \to L^{q,r}(\mathbb{R}^n), \qquad 0 < r \leq \infty,$$

con norma

$$\|T\|_{p,r\to q,r} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

Para terminar, se establece ahora la generalización de la desigualdad de Hölder para espacios de Lorentz $L^{p,d}$. (Véase también Ferreira y Villamizar-roa [13] para una generalización de la desigualdad de Hölder en sumas de espacios de Lorentz).

Proposición 1.4.5. *[21] Sean* $1 < p_1, p_2, r < \infty$, $1 \leq d_1, d_2 \leq \infty$ *y* $s \geq 1$ *tales que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ *y* $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$*. Si* $f \in L^{p_1,d_1}$ *y* $g \in L^{p_2,d_2}$*, entonces* $h = fg \in L^{r,s}$ *y*

$$\|h\|_{(r,s)} \leq C(r) \|f\|_{(p_1,d_1)} \|g\|_{(p_2,d_2)}.$$

CAPÍTULO 2

NUEVOS RESULTADOS SOBRE EL SISTEMA DAVEY-STEWARTSON

El sistema de Davey-Stewartson (DS) modela la evolución de ondas de agua débilmente no lineales que viajan predominantemente en una dirección, pero en las cuales la amplitud de onda es modulada lentamente en dos direcciones horizontales. El sistema fue propuesto inicialmente por Davey y Stewartson en [9] y en forma adimensional se escribe como

$$\begin{cases} i\partial_t u + \delta\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \chi u|u|^2 + \gamma u \partial_x v & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \partial_x^2 v + m\partial_y^2 v = \partial_x(|u|^2) & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $u(x,y,t)$ representa la amplitud (compleja) y $v(x,y,t)$ representa la velocidad media potencial (real). Los parámetros $\delta,\ \chi,\ \gamma$ y m son reales y pueden asumir ambos signos. Estos sistemas son clasificados como elíptico-elíptico,

elíptico-hiperbólico, hiperbólico-elíptico e hiperbólico-hiperbólico cuando (δ, m) toma los signos $(+,+)$, $(+,-)$, $(-,+)$ y $(-,-)$ respectivamente.

En este capítulo se presentan algunos resultados conocidos sobre existencia y unicidad de soluciones para el sistema (2.1), así como los resultados de este trabajo tesis.

2.1. Resultados conocidos

El sistema (2.1) ha sido ampliamente estudiado en el contexto de los espacios H^s. A continuación presentamos algunos de los resultados relevantes en estos espacios.

En 1990 Ghidaglia y Saut [16] trabajaron el sistema (2.1) en los casos elíptico-elíptico, hiperbólico-elíptico y elíptico-hiperbólico. Para trabajar los dos primeros casos, demostraron que el sistema (2.1) se reduce al problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t u + \delta\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \chi u|u|^2 + \gamma u N(|u|^2), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $\widehat{N(\phi)}(\xi) = \xi_1^2[\xi_1^2 + m\xi_2^2]^{-1}\widehat{\phi}(\xi)$, $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$.

Nótese que, haciendo uso del Principio de Duhamel, el problema (2.2) es formalmente equivalente a la formulación integral

$$u(t) = S(t)u_0 + i\int_0^t S(t-s)[\chi u(s)|u(s)|^2 + \gamma u(s)N(|u(s)|^2)]ds, \tag{2.3}$$

donde $S(t)$ es el grupo definido por

$$\widehat{S(t)u_0}(\xi) = e^{-it\psi(\xi)}\widehat{u_0}(\xi)$$

con $\psi(\xi) = 4\pi^2\delta\xi_1^2 + 4\pi^2\xi_2^2$.

Por medio de técnicas de punto fijo para la ecuación (2.3) demostraron los siguientes resultados.

Teorema 13. *Sea $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Entonces existe $T^* > 0$, y una solución maximal de (2.1) en $[0.T^*)$, tal que*

$$u \in C\left([0,T^*), L^2\left(\mathbb{R}^2\right)\right) \cap L^4\left((0,t) \times \mathbb{R}^2\right),$$

$$\nabla v \in L^2\left((0,t) \times \mathbb{R}^2\right),$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \ y \quad \|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2},$$

para todo $t \in [0,T^*)$.

Además, si u_0 es suficientemente pequeño en $L^2(\mathbb{R}^2)$, entonces $T^* = \infty$.

Teorema 14. *Si $u_0 \in H^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, entonces la solución en el Teorema 13 satisface*

$$u \in C\left([0,T^*), H^1\left(\mathbb{R}^2\right)\right) \cap C^1\left([0,T^*), H^{-1}\left(\mathbb{R}^2\right)\right),$$

$$\nabla u \in L^4\left((0,t) \times \mathbb{R}^2\right), \qquad \nabla v \in C\left([0,T^*), L^p\left(\mathbb{R}^2\right)\right),$$

$$\nabla^2 v \in L^4\left((0,t), L^q\left(\mathbb{R}^2\right)\right),$$

para todo $t \in [0,T^*)$, $p \geq 2$ y $q \in [2,4]$. Si además $u_0 \in H^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ se tiene

$$u \in C\left([0,T^*), H^2(\mathbb{R}^2)\right) \cap C^1\left([0,T^*), L^2\left(\mathbb{R}^2\right)\right),$$

y

$$\nabla v \in C\left([0,T^*), H^2\left(\mathbb{R}^2\right)\right).$$

Para el caso elíptico-hiperbólico $(m<0)$, Ghidaglia y Saut impusieron las condiciones de radiación

$$v(x,y)\to 0 \quad \text{cuando} \quad \sqrt{-m}x\pm y\to\infty,$$

y utilizando el método de compacidad demostraron el siguiente teorema.

Teorema 15. *Para cada $u_0\in H^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ satisfaciendo*

$$\left[\frac{2\left|\gamma\right|}{\sqrt{-m}}+\max(-\chi,0)\right]\int_{\mathbb{R}^n}\left|u_0\right|^2dxdy<1$$

existen u y v con

$$u\in L^\infty\left(\mathbb{R}_+;H^1\left(\mathbb{R}^2\right)\right)\cap C\left(\mathbb{R}_+;H^1_w\left(\mathbb{R}^2\right)\right),$$

$$v\in L^\infty\left(\mathbb{R}_+;C_b\left(\mathbb{R}^2\right)\right)\qquad\nabla v\in L^\infty\left(\mathbb{R}_+;L^q_{Loc}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)\qquad 1\le q<2,$$

tal que u satisface $u(0)=u_0$ y el sistema (2.1), en el sentido de distribuciones.

Aquí H^1_w denota el espacio H^1 dotado con la topología débil, y C_b el espacio de las funciones continuas y acotadas.

En 1997 Hayashi e Hirata [19] trabajaron el caso elíptico-hiperbólico. Imponiendo las condiciones de radiación

$$\lim_{y\to\infty}v(x,y,t)=v_1(x,t)\qquad\lim_{x\to\infty}v(x,y,t)=v_2(y,t),$$

y después de hacer una rotación en el plano xy y realizar un escalado, mostraron que el sistema (2.1) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}i\partial_t u+\Delta u &= d_1u\left|u\right|^2+d_2u\int_y^\infty\partial_x\left|u\left(x,y',t\right)\right|^2dy'\\&\quad+d_3u\int_x^\infty\partial_y\left|u\left(x',y,t\right)\right|^2dx'+d_4u\partial_xv_1+d_5u\partial_yv_2,\end{aligned}\tag{2.4}$$

con condición inicial $u(x,y,0)=u_0(x,y)$. Aquí d_i, $i=1,...,5$ son constantes.

Bajo estas condiciones Hayashi e Hirata probaron el siguiente teorema.

Teorema 16. *Sea* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$, *con* $s \geq 5/2$, $\partial_x v_1 \in C(\mathbb{R}; H^s_{(x)}(\mathbb{R}))$, $\partial_y v_2 \in C(\mathbb{R}; H^s_{(y)}(\mathbb{R}))$, *y* $\|u_0\|_{L^2} < 1/\sqrt{\text{máx}\{|d_2|, |d_3|\}}$. *Entonces existe una constante positiva* $T > 0$, *y una única solución* u *de (2.4) tal que* $u \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2))$. *Aquí* $H^s_{(x)}(\mathbb{R})$ *denota el espacio* $H^s(\mathbb{R})$ *teniendo en cuenta solo la variable* x.

Como continuación del trabajo en [19], en 1997 Hayashi [20] demostró el siguiente teorema

Teorema 17. *Sea* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $\partial_x v_1 \in C(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}))$ *y* $\partial_y v_2 \in C(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}))$, *donde* $s \geq 2$. *Entonces existe una constante positiva* $T > 0$ *y una única solución* u *de (2.4) tal que*

$$u \in C\left([0,T]; H^{s-1}(\mathbb{R}^2)\right) \cap L^\infty\left((0,T); H^s(\mathbb{R}^2)\right), \qquad \|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}.$$

Note que en este caso, la condición de pequeñez del dato inicial fue eliminada.

En 2006, Caixia y Boling [7] trabajaron el sistema (2.1) en el caso elíptico-elíptico. Como antes, redujeron el problema (2.1), al problema de valor inicial (2.2) y demostraron el siguiente teorema:

Teorema 18. *El problema de valor inicial (2.2) es globalmente bien puesto para dato* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ *cuando* $s > \frac{4}{7}$.

Existen trabajos sobre generalizaciones del sistema original DS, también llamados sistemas DS, a continuación se citan algunas importantes

Baoxiang y Boling [2] en 2001 consideraron el siguiente sistema

$$\begin{cases} i\partial_t u + Au = \lambda_1 u\,|u|^{p_1} + \lambda_2 u\,|u|^{p_2} + \mu u \partial_{x_1 v} & x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}_+, \\ Bv = \partial_{x_1}(|u|^2), & x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.5}$$

donde

$$A := \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}}, \qquad B := \sum_{1\le i,j\le n} b_{ij}\frac{\partial^2}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}},$$

y las (a_{ij}) y (b_{ij}) son matrices reales e invertibles, además asumen una condición de coercividad sobre B, es decir, se asume la existencia de una constante $C > 0$ tal que

$$\left|\sum_{1\le i,j\le n} b_{ij}\xi_i\xi_j\right| \ge C\,|\xi|^2\,,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

En los teoremas siguientes

$$s(p) = \frac{n}{2} - \frac{2}{p}, \quad \frac{2}{\gamma(r)} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right), \quad r(p) = \frac{2n(2+p)}{n(2+p)-4},$$

$$\alpha(n) = \begin{cases} \infty, & n = 2 \\ 2n/(n-2), & n > 2 \end{cases}.$$

$B^s_{p,q}$ denota el espacio de Besov definido como $(H^{s_0}_p, H^{s_1}_p)_{\theta,q}$, donde $s_0 \neq s_1$ y $1 \le p,q \le \infty$ y $0 < \theta < 1$ (véase Bergh y Löfstrom [4]). Además, para $0 \le s_0 \le s < \infty$, se define $\mathcal{B}^{s_0,s}_\delta = \{u \in H^s; \|u\|_{\dot{H}^{s_0}} < \delta\}$.

En su trabajo Baoxiang y Boling demostraron los siguientes teoremas:

Teorema 19. ***(Existencia Local)*** *Sea $n \ge 2$, $n/4 \le p_1 \le p_2 < \infty$, $\max\{s(2), s(p_2)\} \le s < \infty$, $[s] \le p_1$. Sea $u_0 \in H^s$. Entonces existe un $T^* > 0$ tal que el sistema (2.5) tiene una única solución local $u \in C_{loc}\left((0,T^*);H^s\right) \cap \left(\cap_{2<r<\alpha(n)} L^{\gamma(r)}_{loc}\left((0,T^*);B^s_{r,2}\right)\right)$. Además, si $T^* < \infty$, entonces*

$$\|u\|_{\cap_{p=2,p_1,p_2} L^{2+p}\left((0,T^*);B^{s(p)}_{r(p),2}\right)} = \infty.$$

Teorema 20. ***(Existencia Global)*** *Sea* $n \geq 2$, $n/4 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, $\max\{s(2), s(p_2)\} \leq s < \infty$, $[s] \leq p_1$. *Existe un* $\delta > 0$, *tal que si* $u_0 \in \cap_{p=2,p_1,p_2} \mathcal{B}_{\delta}^{s(p),s}$, *entonces el sistema (2.5) tiene una única solución global* $u \in C\left((0,\infty); H^s\right) \cap \left(\cap_{2<r<\alpha(n)} L^{\gamma(r)}\left((0,\infty); B_{r,2}^s\right)\right)$.

Teorema 21. ***(Scattering)*** *Sea* $S(t)$ *el semigrupo generado por el operador* $i\partial_t + A$. *Sea* $n \geq 2$, $n/4 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, $\max\{s(2), s(p_2)\} \leq s < \infty$, $[s] \leq p_1$. *Existe* $\delta > 0$ *tal que el operador Scattering* S *de (2.5) lleva a* $\cap_{p=2,p_1,p_2} \mathcal{B}_{\delta}^{s(p),s}$ *en* H^s. *Más precisamente, para cada* $\phi^- \in \cap_{p=2,p_1,p_2} \mathcal{B}_{\delta}^{s(p),s}$, *el sistema (2.5) tiene una solución* $u \in C\left((-\infty,\infty); H^s\right) \cap \left(\cap_{2<r<\alpha(n)} L^{\gamma(r)}\left((-\infty,\infty); B_{r,2}^s\right)\right)$ *tal que*

$$\left\| u(t) - S(t)\phi^- \right\|_{H^s} \to 0, \text{ cuando } t \to -\infty;$$

además, existe ϕ^+ *tal que la solución anterior verifica*

$$\left\| u(t) - S(t)\phi^+ \right\|_{H^s} \to 0, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Caixia y Boling [8] en 2008 consideraron el sistema

$$\begin{cases} -i\partial_t u + \Delta u = wu\,|u|^p + wuN\left(|u|^p\right), & x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0 & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.6}$$

y demostraron los siguientes teoremas sobre mala postura del problema (2.6).

Teorema 22. *Sea* $p > 0$ *un entero par,* $n \geq 1$, *y* $w = \pm 1$. *Para* $s < \max\{0, \frac{n}{2} - \frac{2}{p}\}$, *el problema de Cauchy (2.6) falla de ser bien puesto en* $H^s(\mathbb{R}^n)$. *Más precisamente, para cualquier* $0 < \delta, \epsilon < 1$, *y* $t > 0$, *existen soluciones* u_1 *y* u_2 *de (2.6) con dato inicial* $u_1(0)$ *y* $u_2(0) \in \mathcal{S}$ *tal que*

$$\|u_1(0)\|_{H^s}, \|u_2(0)\|_{H^s} \leq C\epsilon,$$

$$\|u_1(0) - u_2(0)\|_{H^s} \leq C\delta,$$

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^s} \geq c\epsilon.$$

Así, la función dato-solución falla de ser uniformemente continua en H^s.

Teorema 23. *Sea $p > 0$ un entero, $n \geq 1$, y $w = \pm 1$. Suponga que $0 < s < \frac{n}{2} - \frac{2}{p}$ o que $s \leq -\frac{n}{2}$. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, existe una solución u de (2.6) y $t \in \mathbb{R}_+$ tal que $u(0) \in \mathcal{S}$*

$$\|u(0)\|_{H^s} \leq \epsilon,$$

$$0 < t < \epsilon,$$

$$\|u(t)\|_{H^s} \geq \epsilon^{-1}.$$

En particular, para cualquier $t > 0$ la función dato-solución $u(0) \mapsto u(t)$ para el problema de Cauchy (2.6) falla de ser continua en 0 en la topología de H^s.

Como ya se mencionó, en su gran mayoría, los sistemas anteriores han sido estudiados en el contexto de los espacios H^s, referidos como espacios de energía finita. Se conocen pocos resultados del modelo DS fuera del contexto de los espacios de energía finita H^s. Uno de ellos fue el trabajo de Zhao [26] quien consideró el sistema

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = ku|u|^\rho + \mu u \partial_{x_1} v, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \Delta v = \partial_{x_1}(|u|^\rho), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.7}$$

donde $\rho > 1$ y $n \geq 2$. A través de técnicas de punto fijo Zhao demostró el siguiente teorema:

Teorema 24. *Suponga que $\rho_0 < \rho < \frac{4}{n-2}$, $\rho > 1$, sea u_0 una distribución temperada tal que*

$$\sup_{t>0} t^\alpha \|S(t)u_0\|_{L^{\rho+2}} \leq \epsilon. \tag{2.8}$$

Entonces existe una única solución global u de (2.7) tal que

$$\|u\|_{E^\alpha} = \sup_{t>0} t^\alpha \|u(t)\|_{L^{\rho+2}} \leq 2\epsilon.$$

Además, asumiendo que u_{01} y u_{02} verifican la condición (2.8) y siendo u_1 y u_2 las respectivas soluciones de (2.7), entonces

$$\|u_1 - u_2\|_{E^\alpha} \leq 2\,\|S(t)\,(u_{01} - u_{02})\|_{E^\alpha}\,.$$

En este teorema, $S(t)$ es el semigrupo generado por el operador $i\partial_t + \Delta$, ρ_0 es la raíz positiva de la ecuación $n\rho^2 + (n-2)\rho - 4 = 0$, $\alpha = (4-(n-2)\rho)\,/2\rho(\rho+2)$ y E^α representa el espacio de todas las funciones medibles $u : (0,\infty) \to L^{\rho+2}(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\|u\|_{E^\alpha} = \sup_{t>0} t^\alpha\,\|u(t)\|_{L^{\rho+2}} < \infty.$$

Es de recalcar que en Zhao [26] no se demuestran resultados de existencia local o comportamiento asintótico.

Recientemente, Barros en [3] consideró los casos elíptico-elíptico e hiperbólico-elíptico del siguiente sistema DS

$$\begin{cases} i\partial_t u + \delta\partial_{x_1}^2 u + \Sigma_{j=2}^n \partial_{x_j}^2 u = \chi u|u|^\rho + \gamma u\partial_{x_1} v, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \partial_{x_1}^2 v + m\partial_{x_2}^2 v + \Sigma_{j=3}^n \partial_{x_j}^2 v = \partial_{x_1}(|u|^\rho), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{2.9}$$

y usando estimativas de Strichartz y la técnica de punto fijo, demostró el siguiente teorema en el contexto de los espacios $L^{p,\infty}(\mathbb{R}; L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)) = L^{p,\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Teorema 25. *Existe $\delta > 0$ tal que si*

$$\frac{4(n+1)}{n(n+2)} < \rho < \frac{4(n+1)}{n^2},$$

y $u_0 \in Y$ con $\|u_0\|_Y < \delta$, entonces existe una única "mild-solution" $u \in L^{\frac{\rho(n+2)}{2},\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$ de (2.9), tal que $\|u\|_{L^{\frac{\rho(n+2)}{2},\infty}(\mathbb{R}^{n+1})} < 3\delta$. Donde

$$Y = \{\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); S(t)\varphi \in L^{\frac{\rho(n+2)}{2},\infty}(\mathbb{R}^{n+1})\},$$

$$\|\varphi\|_Y = \|S(t)\varphi\|_{L^{\frac{\rho(n+2)}{2},\infty}(\mathbb{R}^{n+1})}\,.$$

En Barros [3] tampoco se presentan resultados de existencia local y comportamiento asintótico.

Motivados en el trabajo de Zhao en espacios L^p, y de Barros en L^p-débil, deseamos estudiar el sistema de Davey-Stewartson fuera del contexto de los espacios H^s, más precisamente, en una clase de funciones más generales que los espacios L^p como lo son los espacios de Marcinkiewicz y los espacios de Lorentz. Probamos un resultado de existencia global que generaliza el resultado principal de [26] y que no es comparable con el resultado de existencia global de Barros [3]. Como consecuencia del resultado de existencia global obtenemos un resultado de existencia de solución auto-similar. Adicionalmente probamos un resultado de existencia local y hacemos un estudio cualitativo del comportamiento asintótico de las soluciones globales en espacios $L^{p,\infty}$.

2.2. Resultados del trabajo de investigación

En el desarrollo de este trabajo consideramos la siguiente generalización del sistema DS (2.1)

$$\begin{cases} i\partial_t u + \delta\partial_{x_1}^2 u + \Sigma_{j=2}^n \partial_{x_j}^2 u = \chi u|u|^\rho + \gamma u \partial_{x_1} v, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \partial_{x_1}^2 v + m\partial_{x_2}^2 v + \Sigma_{j=3}^n \partial_{x_j}^2 v = \partial_{x_1}(|u|^\rho), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{2.10}$$

y estudiamos los casos elíptico-elíptico e hiperbólico-elíptico, es decir, los casos en que (δ, m) toma los signos $(+,+)$ y $(-,+)$.

Resolviendo la segunda ecuación en (2.10) por medio de la transformada de Fourier, se tiene que en ambos casos, el sistema puede ser reducido al problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t u + \delta\partial_{x_1}^2 u + \Sigma_{j=2}^n \partial_{x_j}^2 u = \chi u|u|^\rho + \gamma u N(|u|^\rho), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.11}$$

donde $\widehat{N(\phi)}(\xi) = \xi_1^2[\xi_1^2 + m\xi_2^2 + \Sigma_{j=3}^n \xi_j^2]^{-1}\widehat{\phi}(\xi)$, $\phi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Nos planteamos inicialmente el problema de existencia de solución global, usando como base, técnicas de relación de escala propias de la EDP. Para ello, se puede verificar directamente que si $u(x,t)$ es una solución clásica de (2.11) entonces $u_\lambda := \lambda^{2/\rho}u(\lambda x, \lambda^2 t)$, $\lambda > 0$ también es solución. Por lo tanto, es natural plantear el problema de existencia de soluciones de (2.11), tal que $u = u_\lambda$. Las soluciones invariantes por la relación de escala $u \mapsto u_\lambda$ son llamadas soluciones auto-similares de la ecuación (2.11).

Suponiendo u auto-similar y tomando el límite cuando t tiende a cero, formalmente se tiene

$$u(x,0) \quad = \quad \lambda^{2/\rho}u(\lambda x, 0),$$

esto es,

$$u_0(x) = \lambda^{2/\rho}u_0(\lambda x),$$

por lo tanto, $u_0(x)$ debe ser una función homogénea de grado $-2/\rho$. Infortunadamente estas funciones no pertenecen a los espacios $H^s(\mathbb{R}^n)$, en consecuencia, si se desea buscar soluciones auto-similares, es necesario trabajar en espacios que contengan funciones homogéneas. Los espacios naturales para buscar soluciones auto-similares son los espacios L^p-débiles.

Usando el Principio de Duhamel, el PVI (2.11) es formalmente equivalente a la ecuación integral

$$\begin{aligned} u(t) &= S(t)u_0 + i\int_0^t S(t-s)[\chi u(s)|u(s)|^\rho + \gamma u(s)N(|u(s)|^\rho)]ds \\ &= S(t)u_0 + L(u), \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde $S(t)$ es el grupo definido por

$$\widehat{S(t)u_0} = e^{-it\psi(\xi)}\widehat{u_0},$$

con $\psi(\xi) = 4\pi^2\delta\xi_1^2 + 4\pi^2\Sigma_{j=2}^n\xi_j^2$.

De esta forma, el problema de existencia de soluciones para (2.11) es equivalente al problema de existencia de un punto fijo para el operador definido por la parte derecha de (2.12). Dada esta relación, las funciones que verifican la ecuación integral (2.12) son llamadas "mild-solutions" del PVI (2.11).

Iniciamos definiendo los espacios tiempo-dependientes en los cuales se van a establecer los resultados de existencia, unicidad y comportamiento asintótico para el sistema (2.1).

Sea $1 \leq d \leq \infty$. Denotamos por $\mathcal{X}_{\alpha,d}$ y $\mathcal{X}_{\beta,d}^T$, con $0 < T < \infty$, a los espacios de todas las funciones medibles y Bochner integrables $u : (-\infty,\infty) \to L^{\rho+2,d}$ y $u : (-T,T) \to L^{\rho+2,d}$ respectivamente, con normas

$$\|u\|_{\alpha,d} = \sup_{-\infty<t<\infty} |t|^\alpha \|u(t)\|_{(\rho+2,d)}, \qquad \|u\|_{\beta,d,T} = \sup_{-T<t<T} |t|^\beta \|u(t)\|_{(\rho+2,d)}, \tag{2.13}$$

donde $\beta = n(\frac{1}{2} - \frac{1}{\rho+2})$ es determinado por el decaimiento del grupo $S(t)$: $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty} \to L^{\rho+2,\infty}$ (véase Lema 1), y $\alpha = \frac{1}{\rho} - \frac{n}{2(\rho+2)}$ es el único valor que hace que la norma $\|\cdot\|_{\alpha,\infty}$ sea invariante por la relación de escala, esto es, $\|u\|_{\alpha,\infty} = \|u_\lambda\|_{\alpha,\infty}$. De hecho, utilizando la propiedad (1.2) se tiene que

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda(t,x)\|_{\alpha,\infty} &= \sup_{-\infty<t<\infty} |t|^\alpha \|u_\lambda(t,x)\|_{(\rho+2,\infty)} \\
&= \sup_{-\infty<t<\infty} |t|^\alpha \left\|\lambda^{2/\rho} u(\lambda x, \lambda^2 t)\right\|_{(\rho+2,\infty)} \\
&= \sup_{-\infty<t<\infty} |t|^\alpha \lambda^{2/\rho} \left\|u(\lambda x, \lambda^2 t)\right\|_{(\rho+2,\infty)} \\
&= \sup_{-\infty<t<\infty} |t|^\alpha \lambda^{2/\rho} \lambda^{-n/(\rho+2)} \left\|u(x, \lambda^2 t)\right\|_{(\rho+2,\infty)}.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = \lambda^2 t$, se concluye

$$\|u_\lambda(t,x)\|_{\alpha,\infty} = \sup_{-\infty<z<\infty} \left|\lambda^{-2} z\right|^\alpha \lambda^{2/\rho} \lambda^{-n/(\rho+2)} \|u(x,z)\|_{(\rho+2,\infty)}.$$

Por lo tanto, para que $\|u_\lambda(t,x)\|_{\alpha,\infty} = \|u(x,z)\|_{(\rho+2,\infty)}$, se debe tener, $-2\alpha + 2/p - n/(\rho+2) = 0$, es decir, $\alpha = 1/\rho - n/2(\rho+2)$.

En este trabajo probamos los siguientes resultados de existencia y unicidad, así como de comportamiento asintótico de soluciones para el sistema (2.10).

Teorema 26. ***[Solucion Local]***. *Asuma $\rho > 1$ tal que $n\rho(\rho+1) < 2(\rho+2)$ y $1 \leq d \leq \infty$. Si $u_0 \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1},d}$, entonces existe $0 < T < \infty$ tal que (2.10) tiene una solución $u \in \mathcal{X}^T_{\beta,d}$. La solución u es única en una bola de $\mathcal{X}^T_{\beta,d}$ y la función dato-solución $u_0 \mapsto u$ de $L^{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)}$ en $\mathcal{X}^T_{\beta,d}$ es localmente Lipschitz. Si además, $u_0 \in H^s$, $s > 0$, $\rho + 2 \leq \frac{2n}{n-2s}$ ($= \infty$ si $n \leq 2s$), la solución pertenece a H^s.*

Teorema 27. ***[Solución Global]***. *Asuma $\rho > 1$ tal que $2(\rho+2) < n\rho(\rho+1)$ y $n\rho < 2(\rho+2)$. (i) Existe $\epsilon > 0$ tal que si $\|S(t)u_0\|_{\alpha,\infty} < \epsilon/2$, entonces el problema de valor inicial (2.10) tiene una única solución global en el tiempo $u \in \mathcal{X}_{\alpha,\infty}$ satisfaciendo $\|u\|_{\alpha,\infty} \leq \epsilon$. Además, la función dato-solución $u_0 \mapsto u$ es localmente Lipschitz. (ii) Si el dato inicial u_0 es una función homogénea suficientemente* *pequeña de grado* $-2/\rho$*, entonces la solución* u *es auto-similar.* (iii) *Si adicional a las hipótesis de existencia asumimos que* $\|S(t)u_0\|_{\alpha+h,d} < \infty$ *para* $0 \leq h < 1-\alpha(\rho+1)$ *y algún* $1 \leq d \leq \infty$*, entonces existe un* ϵ_0 *tal que si* $\|S(t)u_0\|_{\alpha+h,d} < \epsilon_0$*, entonces la solución global* $u \in \mathcal{X}_{\alpha+h,d}$*. Aquí no necesitamos asumir una hipótesis de pequeñez en* $\|S(t)u_0\|_{\alpha+h,d}$*.*

Teorema 28. ***[Scattering]****. Suponga que* $0 \leq h(\rho+1) < 1-\alpha(\rho+1)$ *y sea* u *la solución de (2.10) dada en el Teorema 27 con dato* u_0*. Si* u_0 *es como en el ítem (iii) del Teorema 27 con* $d = \infty$*, entonces existe* $u_0^{\pm}$ *con* $\|S(t)u_0^{\pm}\|_{\alpha,\infty} < \infty$ *tal que* $\|u(t) - u^{\pm}(t)\|_{(\rho+2,\infty)} = O(t^{-\alpha-h(\rho+1)})$*, cuando* $t \to \pm\infty$*, donde* $u^{+}(t)$*,* $u^{-}(t)$ *representan las únicas soluciones globales del problema lineal asociado a (2.10) con dato inicial* u_0^{+} *y* u_0^{-}*, respectivamente.*

Teorema 29. ***[Scattering Inverso]****. Suponga* ρ *como en el Teorema 27 y sea* θ *tal que* $\theta \in (\alpha, \beta]$*. Para cualquier* $f \in L^{(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty)}$ *existe* $T_0 = T_0(f) > 0$ *y una solución* $u : (-\infty, \infty) \to L^{(\rho+2,\infty)}$ *de (2.12) con* $\|u\|_{T_0,\theta} \equiv \sup_{t \geq T_0} t^{\theta}\|u\|_{(\rho+2,\infty)} < \infty$ *y* $\lim_{t\to\infty} t^{\theta}\|u(t) - S(t)f\|_{(\rho+2,\infty)} = 0$*.*

Teorema 30. ***[Estabilidad Asintótica]****. Suponga* $0 \leq h < 1-\alpha(\rho+1)$*, y sean* u*,* $v \in \mathcal{X}_{\alpha,\infty}$ *dos soluciones globales de (2.10) dadas por el Teorema 27, con respectivos datos iniciales* u_0, v_0*. Si* $\lim_{|t|\to\infty} |t|^{\alpha+h} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{(\rho+2,\infty)} = 0$*, entonces* $\lim_{|t|\to\infty} |t|^{\alpha+h} \|u(t) - v(t)\|_{(\rho+2,\infty)} = 0$*.*

Observaciones

i). Para $n = 2$ se tiene la condición $\rho > \sqrt{2}$, así, el Teorema 27 cubre el sistema DS propuesto originalmente en [9].

ii). Tomando $h = 0$, y $d = \rho + 2$ en el Teorema 27 obtenemos el resultado principal de Zhao [26] sobre existencia global.

iii). Nuestros resultados no se pueden comparar directamente con los resultados obtenidos por Barros [3], ya que los espacios en los que se establece la existencia de solución global no son comparables; en todo caso, las condiciones sobre ρ son diferentes de las nuestras, a saber, el rango permitido para ρ en Barros [3] es $\frac{4(n+1)}{n(n+2)} < \rho < \frac{4(n+1)}{n^2}$ mientras que el nuestro es $1 < \rho_0 \leq \rho < 4/(n-2)$ ($= \infty$ si $n = 1$ o 2), donde ρ_0 es la raíz positiva de $n\rho^2 + (n-2)\rho - 4 = 0$. Note que $\rho_0 < \frac{4(n+1)}{n(n+2)} < \rho < \frac{4(n+1)}{n^2} < \frac{4}{n-2}$. Otra diferencia importante entre el trabajo de Barros [3] y el nuestro, es que para la demostración de su teorema de existencia, utiliza esencialmente estimativas de Strichartz, mientras que nosotros únicamente usamos propiedades de decaimiento del grupo de Schrödinger.

2.3. Estimativas lineales y no lineales

Con el objetivo de realizar las demostraciones de los teoremas de existencia local y global, serán necesarios los siguientes lemas.

Lema 1. *Sea $1 \leq d \leq \infty$ y $1 < r \leq 2$. Entonces, existe una constante positiva $C_1 := C_1(n, r)$ tal que*

$$\|S(t)f\|_{(r',d)} \leq C_1 |t|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{r}-1\right)} \|f\|_{(r,d)}, \ \ f \in L^{r,d}. \tag{2.14}$$

Demostración. Sea $t \neq 0$ fijo y $1 < r_0 < r < r_1 < 2$ tal que $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$ y $0 < \theta < 1$. En [16] fue probada la correspondiente estimativa para (2.14) en L^r. Entonces, $S(t) : L^{r_0} \to L^{r'_0}$ y $S(t) : L^{r_1} \to L^{r'_1}$, con norma del operador acotada por

$$\|S(t)\|_{r_0\to r_0'} \le C|t|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{r_0}-1\right)}, \quad \|S(t)\|_{r_1\to r_1'} \le C|t|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{r_1}-1\right)}.$$

Usando que $L^p(\mathbb{R}^n) = L^{p,p}(\mathbb{R}^n)$ y el Teorema 12, se tiene que $S(t) : L^{r,d} \to L^{r',d}$, y

$$\|S(t)\|_{(r,d)\to(r',d)} \le \left(C|t|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{r_0}-1\right)}\right)^{1-\theta}\left(C|t|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{r_1}-1\right)}.\right)^{\theta} = C|t|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{r}-1\right)},$$

de donde se obtiene la desigualad (2.14). ∎

Lema 2. *Sea* $1 < r < \infty$, $1 \le d \le \infty$. *Entonces* $\|N(\phi)\|_{(r,d)} \le C\|\phi\|_{(r,d)}$.

Demostración. Dado que $p(\xi) = \xi_1^2[\xi_1^2 + m\xi_2^2 + \Sigma_{j=3}^n \xi_j^2]^{-1}$ es homogénea de orden 0 y C^∞ lejos del origen, se tiene que $K(x) = \check{p}(x)$ es un kernel tipo 0, y $N(\phi) = K*\phi$ es un operador de tipo cero, entonces el Teorema de Calderón-Zygmund (Véase Teorema 8) implica que $\|N(\phi)\|_r \le C\|\phi\|_r$, con $1 < r < \infty$.
Considere ahora $0 < r_0 < r_1 < \infty$ tal que $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$ y $0 < \theta < 1$. Entonces,

$$N : L^{r_0} \to L^{r_0}, \qquad \|N\|_{r_0\to r_0} = M_0,$$

$$N : L^{r_1} \to L^{r_1}, \qquad \|N\|_{r_1\to r_1} = M_1.$$

Utilizando el Teorema 12, se concluye que

$$N : L^{r,d} \to L^{r,d}, \qquad \|N\|_{(r,d)\to(r,d)} \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta},$$

con lo que queda demostrado el lema. ∎

Lema 3. *Sea* $\rho > 1$.
Si $n\rho(\rho+1) < 2(\rho+2)$, *entonces existe una constante positiva* K_β *tal que si* $u, v \in \mathcal{X}_{\beta,d}^T$, *se cumple*

$$\|L(u) - L(v)\|_{\beta,d,T} \le K_\beta T^{1-\beta(\rho+1)}\|u-v\|_{\beta,d,T}(\|u\|_{\beta,d,T}^\rho + \|v\|_{\beta,d,T}^\rho). \qquad (2.15)$$

Si $2(\rho+2) < n\rho(\rho+1), n\rho < 2(\rho+2)$, *entonces existe una constante positiva* K_α *tal que si* $u, v \in \mathcal{X}_{\alpha,d}$, *se cumple*

$$\|L(u) - L(v)\|_{\alpha,d} \leq K_\alpha \|u - v\|_{\alpha,d}(\|u\|^\rho_{\alpha,d} + \|v\|^\rho_{\alpha,d}). \tag{2.16}$$

Demostración. Tomando la diferencia entre $L(u)$ y $L(v)$ se tiene

$$\begin{aligned}\|L(u) - L(v)\|_{(\rho+2,d)} \leq &\int_0^t \|S(t-s)[\chi\,(u|u|^\rho - v|v|^\rho)\\ &+ \gamma\,(uN(|u|^\rho) - vN(|v|^\rho))]\|_{(\rho+2,d)} ds.\end{aligned}$$

Note que

$$u|u|^\rho - v|v|^\rho = u|u|^\rho - v|u|^\rho + v|u|^\rho - v|v|^\rho = |u|^\rho(u-v) + v(|u|^\rho - |v|^\rho),$$

y

$$\begin{aligned} uN(|u|^\rho) - vN(|v|^\rho) &= uN(|u|^\rho) - vN(|u|^\rho) + vN(|u|^\rho) - vN(|v|^\rho)\\ &= N(|u|^\rho)(u-v) + vN(|u|^\rho - |v|^\rho).\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad triangular, la desigualdad de Hölder y el Lema 2 se concluye que

$$\begin{aligned}&\|u|u|^\rho - v|v|^\rho\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)} \leq \||u|^\rho(u-v)\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)} + \|v(|u|^\rho - |v|^\rho)\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)}\\ &\leq \||u|^\rho\|_{(\frac{\rho+2}{\rho},d)} \|u-v\|_{(\rho+2,d)} + \|v\|_{(\rho+2,d)} \||u|^\rho - |v|^\rho\|_{(\frac{\rho+2}{\rho},d)}\\ &\leq \|u\|^\rho_{(\rho+2,\rho d)} \|u-v\|_{(\rho+2,d)} + \|v\|_{(\rho+2,d)} \||u|^\rho - |v|^\rho\|_{(\frac{\rho+2}{\rho},d)}\\ &\leq \|u\|^\rho_{(\rho+2,d)} \|u-v\|_{(\rho+2,d)} + \|v\|_{(\rho+2,d)} \||u|^\rho - |v|^\rho\|_{(\frac{\rho+2}{\rho},d)}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}&\|uN(|u|^\rho) - vN(|v|^\rho)\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)} \leq \|N(|u|^\rho)(u-v)\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)} + \|vN(|u|^\rho - |v|^\rho)\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)}\\ &\leq \|N(|u|^\rho)\|_{(\frac{\rho+2}{\rho},d)} \|u-v\|_{(\rho+2,d)} + \|v\|_{(\rho+2,d)} \|N(|u|^\rho - |v|^\rho)\|_{(\frac{\rho+2}{\rho},d)}\\ &\leq C\,\||u|^\rho\|_{(\frac{\rho+2}{\rho},d)} \|u-v\|_{(\rho+2,d)} + C\,\|v\|_{(\rho+2,d)} \||u|^\rho - |v|^\rho\|_{(\frac{\rho+2}{\rho},d)}\\ &\leq C\,\|u\|^\rho_{(\rho+2,d)} \|u-v\|_{(\rho+2,d)} + C\,\|v\|_{(\rho+2,d)} \||u|^\rho - |v|^\rho\|_{(\frac{\rho+2}{\rho},d)}\,.\end{aligned}$$

Del teorema del valor medio aplicado a la función $g(u) = |u|^\rho$ ($\rho > 1$ es necesario para la diferenciabilidad de g) se obtiene la desigualdad

$$||u|^\rho - |v|^\rho| \leq C\left(|u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1}\right)|u - v|.$$

Ahora, utilizando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
\||u|^\rho - |v|^\rho\|_{(\frac{\rho+2}{\rho},d).} &\leq C\left\|\left(|u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1}\right)|u-v|\right\|_{(\frac{\rho+2}{\rho},d)} \\
&\leq C\left\||u|^{\rho-1} + |v|^{\rho-1}\right\|_{(\frac{\rho+2}{\rho-1},d)}\|u-v\|_{(\rho+2,d)} \\
&\leq C\left(\|u\|^{\rho-1}_{(\rho+2,d)} + \|v\|^{\rho-1}_{(\rho+2,d)}\right)\|u-v\|_{(\rho+2,d)}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|v\|_{(\rho+2,d)}\||u|^\rho - |v|^\rho\|_{(\frac{\rho+2}{\rho},d)} \leq C\left(\|v\|_{(\rho+2,d)}\|u\|^{\rho-1}_{(\rho+2,d)} + \|v\|^{\rho}_{(\rho+2,d)}\right)\|u-v\|_{(\rho+2,d)}$$

De la desigualad de Young se tiene que

$$\|v\|_{(\rho+2,d)}\|u\|^{\rho-1}_{(\rho+2,d)} \leq C_1\|v\|^{\rho}_{(\rho+2,d)} + C_2\|u\|^{\rho}_{(\rho+2,d)}\,,$$

y como consecuencia

$$\|u|u|^\rho - v|v|^\rho\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)} \leq C\left(\|v\|^{\rho}_{(\rho+2,d)} + \|u\|^{\rho}_{(\rho+2,d)}\right)\|u-v\|_{(\rho+2,d)}$$

y

$$\|uN(|u|^\rho) - vN(|v|^\rho)\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)} \leq C\left(\|v\|^{\rho}_{(\rho+2,d)} + \|u\|^{\rho}_{(\rho+2,d)}\right)\|u-v\|_{(\rho+2,d)}$$

Se concluye entonces que

$$\begin{aligned}
&\|L(u) - L(v)\|_{(\rho+2,d)} \leq C\int_0^t (t-s)^{-\beta}\left(\|u-v\|_{(\rho+2,d)}\left(\|u\|^{\rho}_{(\rho+2,d)} + \|v\|^{\rho}_{(\rho+2,d)}\right)\right)ds \\
&\leq C\int_0^t (t-s)^{-\beta}s^{-(1+\rho)\beta}s^{\beta}\|u-v\|_{(\rho+2,d)}\left(s^{\rho\beta}\|u\|^{\rho}_{(\rho+2,d)} + s^{\rho\beta}\|v\|^{\rho}_{(\rho+2,d)}\right)ds \\
&\leq C\|u-v\|_{\beta,d,T}\left(\|u\|^{\rho}_{\beta,d,T} + \|v\|^{\rho}_{\beta,d,T}\right)\int_0^t (t-s)^{-\beta}s^{-(1+\rho)\beta}ds
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = ut$, la desigualdad anterior se escribe como

$$\begin{aligned}
&\|L(u) - L(v)\|_{(\rho+2,d)} \\
&\leq Ct^{-\beta+1-(1+\rho)\beta}\|u - v\|_{\beta,d,T}(\|u\|^{\rho}_{\beta,d,T} + \|v\|^{\rho}_{\beta,d,T}) \int_0^1 (1 - z)^{-\beta} z^{-(1+\rho)\beta} dz.
\end{aligned}$$

Ahora, dado que si $\frac{n\rho}{2} < \frac{\rho+2}{\rho+1} < \rho + 2$ entonces $1 > \beta$ y $1 > (\rho + 1)\beta$, y la última integral es una función Beta, por lo tanto

$$\|L(u) - L(v)\|_{(\rho+2,d)} \leq K_{\beta} t^{-\beta} t^{1-(1+\rho)\beta} \|u - v\|_{\beta,d,T}(\|u\|^{\rho}_{\beta,d,T} + \|v\|^{\rho}_{\beta,d,T}).$$

Multiplicando la desigualdad anterior por t^{β} y tomando el supremo para $0 < t < T$ se obtiene la desigualdad (2.15).

Por otro lado, si $\frac{\rho+2}{\rho+1} < \frac{n\rho}{2} < \rho + 2$, entonces $1 > \alpha(\rho + 1)$ y $1 > \beta$. Usando los Lemas 1, 2, la desigualdad de Hölder y la inmersión continua $L^{(\rho+2,d)} \subset L^{(\rho+2,\rho d)}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|L(u) - L(v)\|_{(\rho+2,d)} &\leq C \int_0^t (t - s)^{-\beta} \Big(\|(|u - v|)(|u|^{\rho} + |v|^{\rho})\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)} \\
&+ \|N(|u|^{\rho})u - N(|v|^{\rho})v\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)} \Big) ds \\
&\leq K_{\alpha} t^{-\alpha} \|u - v\|_{\alpha,d} \left(\|u\|^{\rho}_{\alpha,d} + \|v\|^{\rho}_{\alpha,d} \right),
\end{aligned}$$

lo que prueba la desigualdad (2.16). ■

2.4. Demostración de los teoremas

Esta sección está dedicada a las demostraciones de los teoremas que son resultado de este trabajo de tesis.

Demostración del Teorema 26. Considere la bola $B_{\epsilon} = \left\{u \in \mathcal{X}^T_{\beta,d} : \|u\|_{\beta,d,T} \leq \epsilon\right\}$ dotada con la métrica completa $k(\cdot, \cdot)$, definida por $k(u, \tilde{u}) = \|u - \tilde{u}\|_{\beta,d,T}$. El objetivo es mostrar que para algún $\epsilon > 0$, la función $\Phi(u) = S(t)u_0 + L(u)$ es una contracción en (B_ϵ, k).

Del Lema 1 se tiene $\|S(t)u_0\|_{\beta,d,T} \leq C\|u_0\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)}$. Tomando $\epsilon = 2C\|u_0\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)}$ y T tal que $K_\beta T^{1-(\rho+1)\beta}\epsilon^{\rho+1} < \epsilon/2$. Entonces, del Lema 3 (con $v = 0$) se tiene

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{\beta,d,T} &\leq C\|u_0\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)} + K_\beta T^{1-(\rho+1)\beta}\|u\|^{\rho+1}_{\beta,d,T} \\
&\leq \epsilon/2 + K_\beta T^{1-(\rho+1)\beta}\epsilon^{\rho+1} \\
&< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,
\end{aligned}$$

para todo $u \in B_\epsilon$. Consecuentemente $\Phi(B_\epsilon) \subset B_\epsilon$. Usando el Lema 3 también se tiene que la función Φ es una contracción en B_ϵ, y entonces, el teorema de punto fijo de Banach asegura la existencia de una única solución $u \in \mathcal{X}^T_{\beta,d}$ para (2.12).

Observamos ahora que $u(t) \to u_0$ cuando $t \to 0$, en el sentido de las distribuciones. Esto se sigue a través de un argumento estándar (véase [12, 5]). De hecho, considere $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$|\langle S(t)u_0 + L(u) - u_0, \varphi\rangle| \leq |\langle S(t)u_0 - u_0, \varphi\rangle| + |\langle L(u), \varphi\rangle|\,.$$

Pero

$$|\langle S(t)u_0 - u_0, \varphi\rangle| = |\langle u_0, S(t)\varphi - \varphi\rangle| \leq \|u_0\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty)}\|S(t)\varphi - \varphi\|_{(\rho+2,1)}$$

De la continuidad del grupo $S(t)$ se concluye que

$$|\langle S(t)u_0 - u_0, \varphi\rangle| \to 0, \qquad \text{cuando} \qquad t \to 0.$$

Para la prueba de la convergencia a cero de la parte no lineal, nótese que si $f(u) = \chi u(s)|u(s)|^\rho + \gamma u(s)N(|u(s)|^\rho)$, entonces

$$\begin{aligned}
&\|S(t-s)f(u)\|_{H^{\frac{-n\rho}{2(\rho+2)}}} = \|f(u)\|_{H^{\frac{-n\rho}{2(\rho+2)}}} \leq \|f(u)\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty)} \leq \|u\|^{\rho+1}_{(\rho+2,\infty)} \\
&\leq Ct^{-\beta(\rho+1)}.
\end{aligned}$$

Como $1 > \beta(\rho+1)$ se tiene que

$$|\langle L(u), \varphi\rangle| \leq Ct^{-\beta(\rho+1)} \to 0, \qquad \text{cuando} \qquad t \to 0,$$

y entonces $u(t) \to u_0$ cuando $t \to 0$ en el sentido de las distribuciones.

Por otro lado, considere u_1 y u_2 soluciones de (2.12) con dato u_{01} y u_{02} respectivamente. Entonces

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{(\rho+2,d)} \leq \|S(t)(u_{01} - u_{02})\|_{(\rho+2,d)} + \|L(u_1) - L(u_2)\|_{(\rho+2,d)}.$$

Usando los Lemas 1 y 3

$$\begin{aligned}
&\|u_1 - u_2\|_{\beta,d,T} \\
&\leq C\|u_{01} - u_{02}\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)} + K_\beta T^{1-\beta(\rho+1)}\|u_1 - u_2\|_{\beta,d,T}(\|u_1\|^\rho_{\beta,d,T} + \|u_2\|^\rho_{\beta,d,T}), \\
&\leq C\|u_{01} - u_{02}\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)} + K_\beta T^{1-\beta(\rho+1)}\|u_1 - u_2\|_{\beta,d,T}(\epsilon^\rho + \epsilon^\rho),
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|u_1 - u_2\|_{\beta,d,T} \leq \frac{C}{1 - 2\epsilon^\rho K_\beta T^{1-\beta(\rho+1)}}\|u_{01} - u_{02}\|_{(\frac{\rho+2}{\rho+1},d)},$$

lo que prueba la Lipschitz continuidad.

El Teorema 26 cubre datos iniciales $u_0 \in H^{s,p}$ para $p \geq 1$, $p \leq (\rho+2) \leq \frac{np}{n-sp}$ $(= \infty$ si $n \leq sp)$, debido a la inmersión continua $H^{s,p} \subset L^{(\rho+2,\infty)}$ (véase Bergh y Löfstrom [4]). Finalmente, de la teoría para H^s, se tiene que si $u_0 \in H^s$, entonces existe $T_0 > 0$ y una "mild-solution"$\widetilde{u} \in C([-T_0, T_0]; H^s)$ ([16]). Por otro lado, también tenemos una mild solution $u \in \mathcal{X}^{T_0}_{\beta,\infty}$ dada por el Teorema 26. Debido a la inmersión de Sobolev se deduce que, $\|\widetilde{u}\|_{\beta,\infty,T_0} \leq CT_0^\beta \sup_{-T_0<t<T_0} \|\widetilde{u}\|_{H^s}$, y por unicidad, se tiene que para T_0 suficientemente pequeño, $u = \widetilde{u}$ en $[-T_0, T_0]$.

■

Demostración del Teorema 27. Sea $B_\epsilon = \{u \in \mathcal{X}_{\alpha,\infty} : \|u\|_{\alpha,\infty} \leq \epsilon\}$. Del Lema 3 y la hipótesis para el dato inicial, se tiene

$$\|\Phi(u)\|_{\alpha,\infty} \leq \|S(t)(u_0)\|_{\alpha,\infty} + \|L(u)\|_{\alpha,\infty} \leq \epsilon/2 + K_\alpha \|u\|_{\alpha,\infty}^{\rho+1} \leq \epsilon/2 + K_\alpha \epsilon^{\rho+1} < \epsilon,$$

siempre que $2K_\alpha \epsilon^\rho < 1$. Así $\Phi(B_\epsilon) \subset B_\epsilon$.

Ahora, tomando $u,\ \tilde{u} \in B_\epsilon$, y nuevamente por el Lema 3 se tiene que la función Φ es una contracción en B_ϵ y consecuentemente se tiene un único punto fijo en B_ϵ, el cual es la única solución u de la ecuación integral (2.12) satisfaciendo $\|u\|_{\alpha,\infty} \leq \epsilon$.

Con el fin de mostrar la existencia de una solución auto-similar, si $u_0(x)$ es una función homogénea de grado $-\frac{2}{\rho}$, entonces $S(t)u_0(x)$ satisface la propiedad de auto-similaridad $u(t,x) = \lambda^{\frac{2}{\rho}} u(\lambda^2 t, \lambda x)$. En efecto,

$$S(t)u_0(x) = (e^{-it\psi(\xi)})^{\vee} * u_0(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} e^{-it\psi(\xi)} d\xi \right) u_0(y)dy.$$

Por tanto,

$$S(\lambda^2 t)u_0(\lambda x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(\lambda x-y)\cdot\xi} e^{-i\lambda^2 t\psi(\xi)} d\xi \right) u_0(y)dy.$$

Haciendo el cambio de variable $y = \lambda z$, se obtiene

$$\begin{aligned} S(\lambda^2 t)u_0(\lambda x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(\lambda x-\lambda z)\cdot\xi} e^{-i\lambda^2 t\psi(\xi)} d\xi \right) u_0(\lambda z)\lambda^n dz \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-z)\cdot\lambda\xi} e^{-i\lambda^2 t\psi(\xi)} d\xi \right) u_0(\lambda z)\lambda^n dz. \end{aligned}$$

Haciendo ahora el cambio de variable $j = \lambda\xi$, utilizando que $u_0(\lambda z) = \lambda^{-2/\rho}u_0(x)$ y que $\psi(\xi) = \lambda^{-2}\psi(j)$ se obtiene

$$S(\lambda^2 t)u_0(\lambda x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-z)\cdot j}e^{-it\psi(j)}\lambda^{-n}dj\right)\lambda^{-2/\rho}u_0(z)\lambda^n dz = \lambda^{-2/\rho}S(t)u_0(x)$$

Así,

$$t^\alpha\|S(t)u_0(x)\|_{(\rho+2,\infty)} = t^\alpha t^{\frac{n}{2(\rho+2)}-\frac{1}{\rho}}\|S(1)u_0(x)\|_{(\rho+2,\infty)} = \|S(1)u_0(x)\|_{(\rho+2,\infty)}.$$

Además, $\|S(1)u_0(x)\|_{L^{\rho+2}}$ es finito, y ya que $L^{\rho+2} \hookrightarrow L^{(\rho+2,\infty)}$, se tiene $\|S(1)u_0(x)\|_{(\rho+2,\infty)} \leq \|S(1)u_0(x)\|_{L^{\rho+2}} < \infty$. Por lo tanto, si $\|S(1)u_0(x)\|_{(\rho+2,\infty)}$ es suficientemente pequeño, entonces la solución $u(t,x)$ obtenida es auto-similar, ya que es el limite en $\mathcal{X}_{\alpha,\infty}$ de la sucesión auto-similar de Picard $u_1 = S(t)(u_0),\ \ u_k = u_1 + L(u_{k-1}), k \geq 2$. Esta parte generaliza el principal resultado de Zhao en [26].

Para la prueba de (iii) primero note que

$$\begin{aligned}
\|L(u)\|_{(\rho+2,d)} &= C_1\int_0^t (t-s)^{-\beta}\,\|\chi u|u|^\rho + \gamma u N(|u|^\rho)\|_{(\rho+2,d)}\,ds \\
&\leq C_1\int_0^t (t-s)^{-\beta}\left(|\chi|\,\|u|u|^\rho\|_{(\rho+2,d)} + |\gamma|\,\|uN(|u|^\rho)\|_{(\rho+2,d)}\right)ds.
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Hölder y el Lema 2 se tiene

$$\begin{aligned}
&\|L(u)\|_{(\rho+2,d)} \leq C_1\int_0^t (t-s)^{-\beta}\,\|u\|_{(\rho+2,d)}\,\|u\|^\rho_{(\rho+2,\infty)}\,ds \\
&\leq C_1\int_0^t (t-s)^{-\beta}s^{-(\alpha+h)}s^{\alpha+h}\,\|u\|_{(\rho+2,d)}\,s^{-\alpha\rho}s^{\alpha\rho}\,\|u\|^\rho_{(\rho+2,\infty)}\,ds \\
&\leq \left(C_1\sup_{s>0}s^{\alpha+h}\,\|u\|_{(\rho+2,d)}\right)\left(\sup_{s>0}s^{\alpha\rho}\,\|u\|^\rho_{(\rho+2,\infty)}\right)\int_0^t (t-s)^{-\beta}s^{-(\alpha+h)}s^{-\alpha\rho}ds \\
&\leq C_1\left(\sup_{s>0}s^{\alpha+h}\,\|u\|_{(\rho+2,d)}\right)\epsilon^\rho\int_0^t (t-s)^{-\beta}s^{-(\alpha+h)}s^{-\alpha\rho}ds \\
&\leq C_1\left(\sup_{s>0}s^{\alpha+h}\,\|u\|_{(\rho+2,d)}\right)\epsilon^\rho t^{-(\alpha+h)}\int_0^1 (1-s)^{-\beta}s^{-(\alpha+h+\alpha\rho)}ds.
\end{aligned}$$

Dada la condición $0 \leq h < 1 - \alpha(\rho + 1)$, la integral es una función Beta. Por lo tanto, al multiplicar la desigualdad por $t^{(\alpha+h)}$ y tomar el supremo para todo $s > 0$, se deduce que

$$\|L(u)\|_{\alpha+h,d} \leq K\epsilon^{\rho} \sup_{s>0} s^{\alpha+h} \|u\|_{(\rho+2,d)} .$$

Considere ahora la sucesión de Picard (u_n) tal que $u_n \to u$, donde u es la solución de (2.12) dada en la parte (i) del teorema. De la hipótesis en el dato inicial y de la desigualdad anterior se obtiene

$$\begin{aligned}
\|u_1\|_{\alpha+h,d} &= \|S(t)u_0\|_{\alpha+h,d} \leq C, \\
\|u_2\|_{\alpha+h,d} &\leq \|u_1\|_{\alpha+h,d} + \|L(u_1)\|_{\alpha+h,d} \leq C + K\epsilon^{\rho}C, \\
\|u_3\|_{\alpha+h,d} &\leq \|u_1\|_{\alpha+h,d} + \|L(u_2)\|_{\alpha+h,d} \leq C + K\epsilon^{\rho}\left(C + K\epsilon^{\rho}C\right), \\
&\leq C + K\epsilon^{\rho}C + \left(K\epsilon^{\rho}\right)^2 C.
\end{aligned}$$

Procediendo inductivamente

$$\|u_n\|_{\alpha+h,d} \leq C(1 + K\epsilon^{\rho} + (K\epsilon^{\rho})^2 + \cdots + (K\epsilon^{\rho})^n).$$

Por lo tanto, para ϵ suficientemente pequeño (por ejemplo $\epsilon^{\rho} < \frac{1}{2K}$) la serie es convergente y $\|u_i\|_{\alpha+h,d} \leq C$ para todo $i = 1, 2, ...$ y por lo tanto $\|u\|_{\alpha+h,d} \leq C$, con lo que la parte (iii) queda demostrada. ■

Demostración del Teorema 28. Consideramos únicamente el caso $t \to \infty$. El caso $t \to -\infty$ puede ser probado análogamente. Para la demostración, considere u_0^+ definido por:

$$u_0^+ = u_0 + i\int_0^{\infty} S(-s)[|u(s)|^{\rho}u(s) + N(|u(s)|^{\rho})u(s)]ds,$$

donde u es la solución global obtenida en el Teorema 27. Sea u^+ la solución del problema lineal asociado a (2.10) with data u_0^+, esto es $u^+(t) = S(t)u_0^+$.

Note que u^+ puede ser expresado como

$$u^+(t) = S(t)u_0 + i\int_0^\infty S(t-s)(\chi|u(s)|^\rho u(s) + \gamma N(|u(s)|^\rho)u(s))ds. \qquad (2.17)$$

Primero mostramos que, para cada $t>0$ se tiene que $\|u^+(t)\|_{(\rho+2,\infty)} < \infty$. De hecho

$$\begin{aligned}\left\|u^+\right\|_{(\rho+2,\infty)} &\leq \|S(t)u_0\|_{(\rho+2,\infty)} + \left\|S(t)\int_0^\infty S(-s)[\chi u|u|^\rho + \gamma uN(|u|^\rho)]ds\right\|_{(\rho+2,\infty)} \\ &\leq \|S(t)u_0\|_{(\rho+2,\infty)} + \left\|\int_0^\infty S(t-s)[\chi u|u|^\rho + \gamma uN(|u|^\rho)]ds\right\|_{(\rho+2,\infty)}.\end{aligned}$$

Usando el Lema 1, la desigualdad de Hölder y la propiedad $\||u|^\rho\|_{(\frac{\rho+2}{\rho},\infty)} \leq C\|u\|^\rho_{(\rho+2,\infty)}$, se tiene

$$\begin{aligned}&\left\|u^+\right\|_{(\rho+2,\infty)} \leq \|S(t)u_0\|_{(\rho+2,\infty)} + C\int_0^\infty (t-s)^{-\beta}\|u\|^{\rho+1}_{(\rho+2,\infty)}ds \\ &\leq \|S(t)u_0\|_{(\rho+2,\infty)} + C\int_0^\infty (t-s)^{-\beta}s^{-(\alpha+h)(\rho+1)}s^{(\alpha+h)(\rho+1)}\|u\|^{\rho+1}_{(\rho+2,\infty)}ds \\ &\leq \|S(t)u_0\|_{(\rho+2,\infty)} + C\int_0^\infty (t-s)^{-\beta}s^{-(\alpha+h)(\rho+1)}\sup_{s>0}s^{(\alpha+h)(\rho+1)}\|u\|^{\rho+1}_{(\rho+2,\infty)}ds \\ &\leq \|S(t)u_0\|_{(\rho+2,\infty)} + C\|u\|^{\rho+1}_{\alpha+h,\infty}\int_0^\infty (t-s)^{-\beta}s^{-(\alpha+h)(\rho+1)}ds.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $s = zt$, la desigualdad anterior toma la forma

$$\begin{aligned}&\left\|u^+(t)\right\|_{(\rho+2,\infty)} \leq \|S(t)u_0\|_{(\rho+2,\infty)} \\ &+ C_2\|u\|^{\rho+1}_{\alpha+h,\infty}t^{-\beta-(\alpha+h)(\rho+1)+1}\int_0^\infty (1-z)^{-\beta}z^{-(\alpha+h)(\rho+1)}dz.\end{aligned}$$

Para probar que la última integral es finita, considere

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty (1-z)^{-\beta}z^{-(\alpha+h)(\rho+1)}dz = \int_0^1 (1-z)^{-\beta}z^{-(\alpha+h)(\rho+1)}dz \\ &+ \int_1^2 (1-z)^{-\beta}z^{-(\alpha+h)(\rho+1)}dz + \int_2^\infty (1-z)^{-\beta}z^{-(\alpha+h)(\rho+1)}dz \\ &= I + II + III.\end{aligned}$$

De las hipótesis se tiene $\beta < 1$ y $(\alpha + h)(\rho + 1) < 1,$ entonces I es una función Beta y por lo tanto finita. Para II, primero note que

$$\int_1^2 (1-u)^{-\beta} u^{-(\alpha+h)(\rho+1)} du \leq \int_1^2 (1-u)^{-\beta} du.$$

Haciendo el cambio de variable $s = 1 - z,$ se obtiene

$$\int_1^2 (1-z)^{-\beta} dz = -\int_0^{-1} (s)^{-\beta} ds = \int_{-1}^0 s^{-\beta} ds = \lim_{b \to 0^-} \int_{-1}^b s^{-\beta} ds$$
$$= \lim_{b \to 0^-} \left. \frac{s^{1-\beta}}{1-\beta} \right|_{-1}^b < \infty.$$

Para III se tiene

$$\int_2^\infty (1-z)^{-\beta} z^{-(\alpha+h)(\rho+1)} dz = \int_2^\infty \left(\frac{z}{1-z} \right)^{\beta} z^{-\beta-(\alpha+h)(\rho+1)} dz$$
$$\leq \sup_{z>2} \left(\frac{z}{1-z} \right)^{\beta} \int_2^\infty z^{-\beta-(\alpha+h)(\rho+1)} dz$$
$$\leq \sup_{z>2} \left(\frac{z}{1-z} \right)^{\beta} \lim_{b \to \infty} \left. \frac{z^{1-\beta-(\alpha+h)(\rho+1)}}{1-\beta-(\alpha+h)(\rho+1)} \right|_2^b < \infty.$$

Finalmente, tomando la diferencia entre la integral (2.12) y (2.17), y calculando la norma $\|\cdot\|_{(\rho+2,\infty)}$, se obtiene

$$\left\| u(t) - u^+(t) \right\|_{(\rho+2,\infty)} = \left\| i \int_0^t S(t-s)[\chi u(s)|u(s)|^\rho + \gamma u(s) N(|u(s)|^\rho)] ds \right.$$
$$\left. - i \int_0^\infty S(t-s)[\chi |u(s)|^\rho u(s) + \gamma N(|u(s)|^\rho) u(s)] ds \right\|_{(\rho+2,\infty)}$$
$$= \left\| \int_t^\infty S(t-s)[\chi u(s)|u(s)|^\rho + \gamma u(s) N(|u(s)|^\rho)] ds \right\|_{(\rho+2,\infty)}$$
$$\leq C \left\| u \right\|_{\alpha+h,\infty}^{\rho+1} \int_t^\infty (t-s)^{-\beta} s^{-(\alpha+h)(\rho+1)} ds$$
$$\leq C_2 \left\| u \right\|_{\alpha+h,\infty}^{\rho+1} t^{-\beta-(\alpha+h)(\rho+1)+1} \int_1^\infty (1-z)^{-\beta} z^{-(\alpha+h)(\rho+1)} dz.$$

Debido a que $(\alpha + h)(\rho + 1) < 1$, la ultima integral es finita, y usando que $1 - \beta - \alpha\rho = 0$ se concluye

$$\left\| u(t) - u^{+}(t) \right\|_{(\rho+2,\infty)} \leq K t^{-\alpha - h(\rho+1)},$$

lo cual prueba el teorema. ■

Demostración del Teorema 29. Para $T > 0$ consideramos el conjunto $E_{T,\theta}$ de $w : [T, \infty) \to L^{(\rho+2,\infty)}$ tales que $\|w\|_{E_{T,\theta}} \equiv \sup_{t \geq T} t^{\theta} \|w\|_{(\rho+2,\infty)} < \infty$. Let $R > 0$ y denotamos por $B_T(0, R)$ la bola cerrada de radio R en $E_{T,\theta}$.

Definimos la función $\Upsilon : B_T(0, R) \to B_T(0, R)$ por

$$\begin{aligned} \Upsilon(w) =& i \int_t^{\infty} S(t-s) \left(\chi |S(s)f - w|^{\rho} (S(s)f - w) \right. \\ & \left. + \gamma N(|S(s)f - w|^{\rho})(S(s)f - w) \right) ds. \end{aligned}$$

Definiendo $J(u) = \chi u \left| u \right|^{\rho} + \gamma u N \left(\left| u \right|^{\rho} \right)$. Para $w \in B_T(0, R)$ se tiene

$$\begin{aligned} & \left\| \Upsilon(w(t)) \right\|_{(\rho+2,\infty)} \leq \int_t^{\infty} \left\| S(t-s) J(S(s)f - w(s)) \right\|_{(\rho+2,\infty)}) ds \\ & \leq C \int_t^{\infty} (t-s)^{-\beta} \left\| J\left(S(s)f - w(s) \right) \right\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1}, \infty \right)} ds \\ & \leq C \int_t^{\infty} (t-s)^{-\beta} \left\| S(s)f - w(s) \right\|_{(\rho+2,\infty)}^{\rho+1} ds \\ & \leq C \int_t^{\infty} (t-s)^{-\beta} s^{-\theta(\rho+1)} \left(s^{\theta} \left\| w(s) \right\|_{(\rho+2,\infty)} + C_1 s^{\theta-\beta} \left\| f \right\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1}, \infty \right)} \right)^{\rho+1} ds. \end{aligned}$$

Tomando el supremo para $t \geq T$, y las hipótesis se obtiene

$$\begin{aligned} & \left\| \Upsilon(w) \right\|_{(\rho+2,\infty)} \\ & \leq C \left(R + C_1 T^{\theta-\beta} \left\| f \right\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1}, \infty \right)} \right)^{\rho+1} t^{1-\beta-\theta(\rho+1)} \int_1^{\infty} (1-z)^{-\beta} z^{-\theta(\rho+1)} dz. \end{aligned}$$

Debido a que $\theta \in (\alpha, \beta]$ y $1-\beta-\alpha\rho = 0$ se tiene $1-\beta-\theta(\rho+1) < 1-\beta-\theta\rho < 0$, y por tanto la integral es finita. Por otro lado, multiplicando por t^{θ} y tomando el supremo para $t \geq T$

$$\|\Upsilon(w)\|_{E_{T,\theta}} \leq C\left(R + C_1 T^{\theta-\beta} \|f\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty\right)}\right)^{\rho+1} T^{1-\beta-\theta\rho},$$

y entonces, para $T \gg 1$ obtenemos

$$\|\Upsilon(w)\|_{E_{T,\theta}} \leq R. \tag{2.18}$$

Consideramos ahora $w_1,\, w_2 \in B_T\,(0, R)$, entonces

$$\|\Upsilon(w_1) - \Upsilon(w_2)\|_{(\rho+2,\infty)} \leq \int_t^{\infty} \|S(t-s)\left[J(Sf-w_1) - J(Sf-w_2)\right]\|_{(\rho+2,\infty)} ds$$
$$\leq C_1 \int_t^{\infty} (t-s)^{-\beta} \|J(Sf-w_1) - J(Sf-w_2)\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty\right)} ds. \tag{2.19}$$

Pero

$$\|J(Sf-w_1) - J(Sf-w_2)\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty\right)}$$
$$\leq \|\chi(Sf-w_1)\,|Sf-w_1|^{\rho} - \chi(Sf-w_2)\,|Sf-w_2|^{\rho}\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty\right)}$$
$$+ \|\gamma(Sf-w_1)N\left(|Sf-w_1|^{\rho}\right) - \gamma(Sf-w_2)N\left(|Sf-w_2|^{\rho}\right)\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty\right)}$$
$$\leq C\,\|(Sf-w_1)-(Sf-w_2)\|_{(\rho+2,\infty)} \left[\|Sf-w_1\|^{\rho}_{(\rho+2,\infty)} + \|Sf-w_2\|^{\rho}_{(\rho+2,\infty)}\right]$$
$$\leq C\,\|w_1-w_2\|_{(\rho+2,\infty)} \left[\left(\|w_1\|_{(\rho+2,\infty)} + \|Sf\|_{(\rho+2,\infty)}\right)^{\rho} + \left(\|w_2\|_{(\rho+2,\infty)} + \|Sf\|_{(\rho+2,\infty)}\right)^{\rho}\right]$$
$$\leq C\,\|w_1-w_2\|_{(\rho+2,\infty)} \left[\left(\|w_1\|_{(\rho+2,\infty)} + C_1 s^{-\beta} \|f\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty\right)}\right)^{\rho}\right.$$
$$\left. + \left(\|w_2\|_{(\rho+2,\infty)} + C_1 s^{-\beta} \|f\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty\right)}\right)^{\rho}\right],$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
&\|\Upsilon(w_1)-\Upsilon(w_2)\|_{(\rho+2,\infty)}\\
&\leq C\int_t^{\infty}(t-s)^{-\beta}\|w_1-w_2\|_{(\rho+2,\infty)}\left[\left(\|w_1\|_{(\rho+2,\infty)}+C_1s^{-\beta}\|f\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty\right)}\right)^{\rho}\right.\\
&\left.+\left(\|w_2\|_{(\rho+2,\infty)}+C_1s^{-\beta}\|f\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty\right)}\right)^{\rho}\right]ds\\
&\leq C\int_t^{\infty}(t-s)^{-\beta}s^{-\theta}s^{-\theta\rho}s^{\theta}\|w_1-w_2\|_{(\rho+2,\infty)}\left[\left(s^{\theta}\|w_1\|_{(\rho+2,\infty)}+C_1s^{\theta-\beta}\|f\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty\right)}\right)^{\rho}\right.\\
&\left.+\left(s^{\theta}\|w_2\|_{(\rho+2,\infty)}+C_1s^{\theta-\beta}\|f\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty\right)}\right)^{\rho}\right]ds.
\end{aligned}$$

Debido a que $w_1-w_2\in E_{T.\theta}$ y $u,w\in B_T\left(0,R\right)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\|\Upsilon(w_1)-\Upsilon(w_2)\|_{(\rho+2,\infty)}\\
&\leq C\|w_1-w_2\|_{E_{T,\theta}}\left(R+C_1T^{\theta-\beta}\|f\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty\right)}\right)^{\rho}\int_t^{\infty}(t-s)^{-\beta}s^{-\theta}s^{-\theta\rho}ds\\
&\leq C\|w_1-w_2\|_{E_{T,\theta}}\left(R+C_1T^{\theta-\beta}\|f\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty\right)}\right)^{\rho}t^{1-\beta-\theta-\theta\rho}\int_1^{\infty}(1-z)^{-\beta}z^{-\theta(\rho+1)}dz.
\end{aligned}$$

Multiplicando por t^{θ} y tomando el supremo para $t>T$

$$\|\Upsilon(w_1)-\Upsilon(w_2)\|_{E_{T,\theta}}\leq C\left(R+C_1T^{\theta-\beta}\|f\|_{\left(\frac{\rho+2}{\rho+1},\infty\right)}\right)^{\rho}T^{1-\beta-\theta\rho}\|w_1-w_2\|_{E_{T,\theta}}.$$

Ahora, para $T\gg 1$ concluimos que

$$\|\Upsilon(w_1)-\Upsilon(w_2)\|_{E_{T,\theta}}\leq\|w_1-w_2\|_{E_{T,\theta}}. \tag{2.20}$$

Sea T_0 el menor valor de T tal que (2.18) y (2.20) son verificadas, entonces por el teorema de punto fijo de Banach, Υ tiene un único punto fijo w, con $\|w\|_{E_{T,\theta}}\leq R$.

Definimos ahora $u(t)=S(t)f-w(t)\in E_{T_0,\theta}$, donde w es el único punto fijo de Υ. Mostraremos que $u(t)$ es una solución del problema integral

$$u(t)=S\left(t-T_0\right)u(T_0)+i\int_{T_0}^{t}S\left(t-s\right)\left[\chi u\left|u\right|^{\rho}+\gamma uN\left(\left|u\right|^{\rho}\right)\right]ds, \tag{2.21}$$

en $[T_0, \infty)$. Para esto, notemos que

$$w(t) = \Upsilon(w(t)) = i\int_t^{\infty} S(t-s)J(S(s)f - w(s))ds = i\int_t^{\infty} S(t-s)J(u(s))ds,$$

para todo $t \geq T_0$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
&S(T_0 - t)w(t) = iS(T_0 - t)\int_t^{\infty} S(t-s)J(S(s)f - w(s))ds \\
&= i\int_t^{\infty} S(T_0 - s)J(u(s))ds \\
&= i\int_{T_0}^{\infty} S(T_0 - s)J(u(s))ds - i\int_{T_0}^{t} S(T_0 - s)J(u(s))ds \\
&= w(T_0) - i\int_{T_0}^{t} S(T_0 - s)J(u(s))ds,
\end{aligned}$$

Aplicando ahora $S(t - T_0)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
w(t) &= S(t-T_0)w(T_0) - iS(t-T_0)\int_{T_0}^{t} S(T_0 - s)J(u(s))ds \\
&= S(t-T_0)w(T_0) - i\int_{T_0}^{t} S(t-s)J(u(s))ds,
\end{aligned}$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned}
&u(t) = S(t)f - w(t) \\
&= S(t-T_0)\left(S(T_0)f\right) - \left(S(t-T_0)w(T_0) - i\int_{T_0}^{t} S(t-s)J(u(s))ds\right) \\
&= S(t-T_0)\left(S(T_0)f - w(T_0)\right) + i\int_{T_0}^{t} S(t-s)J(u(s))ds
\end{aligned}$$

con lo que se obtiene (2.21). Por otro lado

$$\begin{aligned}
&t^{\theta}\left\|u(t) - S(t)f\right\|_{(\rho+2,\infty)} = t^{\theta}\left\|-w(t)\right\|_{(\rho+2,\infty)} = t^{\theta}\left\|w(t)\right\|_{(\rho+2,\infty)} \\
&= t^{\theta}\left\|\Upsilon(w(t))\right\|_{(\rho+2,\infty)} \leq Ct^{1-\beta-\theta\rho},
\end{aligned}$$

y debido a que $1-\beta-\theta\rho<0$, concluimos que $t^{\theta}\left\|u(t)-S(t)f\right\|_{(\rho+2,\infty)}\to 0$ cuando $t\to\infty$. ■

Demostración del Teorema 30 Asuma únicamente el caso $t>0$. Siguiendo las ideas de [5, 12], tomando la diferencia de las ecuaciones integrales satisfechas por u and v, usando que $\|u\|_{\alpha,\infty},\|v\|_{\alpha,\infty}\leq\epsilon$, después de un cambio de variable se puede obtener

$$\begin{aligned}&t^{\alpha+h}\|u(t)-v(t)\|_{(\rho+2,\infty)}\leq t^{\alpha+h}\|S(t)(u_0-v_0)\|_{(\rho+2,\infty)}\\&+C2\epsilon^{\rho}\int_0^1(1-s)^{-\beta}s^{-\alpha(\rho+1)-h}(ts)^{\alpha+h}\|u(ts)-v(ts)\|_{(\rho+2,\infty)}ds,\end{aligned}$$

para todo $t>0$.

Ahora, defina $\Lambda:=\limsup_{t\to\infty}t^{\alpha+h}\|u(t)-v(t)\|_{(\rho+2,\infty)}<\infty$. Notando que

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\int_0^1(1-s)^{-\beta}s^{-\alpha(\rho+1)-h}(ts)^{\alpha+h}\|u(ts)-v(ts)\|_{(\rho+2,\infty)}ds\\&\leq\Lambda\int_0^1(1-s)^{-\beta}s^{-\alpha(\rho+1)-h}ds.\end{aligned}$$

Así, tomando $\limsup_{t\to\infty}$ se tiene

$$\Lambda\leq\left(C2\epsilon^{\rho}\int_0^1(1-s)^{-\beta}s^{-\alpha(\rho+1)-h}ds\right)\Lambda.$$

Escogiendo $\epsilon>0$ suficientemente pequeño, el valor en el paréntesis de la desigualdad anterior es menor que uno, y entonces $\Lambda=0$. ■

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se presentaron resultados de existencia y unicidad de soluciones locales y globales en el tiempo para el sistema (2.10) en los casos en que $m > 0$. También se probaron resultados de *Scattering* y estabilidad asintótica. Los casos en que $m < 0$ no pueden ser tratados de la misma forma (véase [16, 19]) debido al cambio en la naturaleza de la ecuación para la velocidad media potencial en (2.10), en particular, ya que $p(\xi) = \xi_1^2[\xi_1^2 + m\xi_2^2 + \Sigma_{j=3}^n \xi_j^2]^{-1}$ no es C^∞ lejos del origen, el teorema de Calderón-Zygmund no puede ser utilizado para acotar el operador N como en el Lema 2. Aunque existen trabajos para estos casos [16, 19], estos trabajos se desarrollan en el contexto de los espacios H^s, y no se conocen resultados en espacios de Lorentz $L^{p,d}$, incluyendo los espacios L^p y L^p-débiles. Esto deja la puerta abierta para explorar futuros trabajos sobre el sistema DS en estos espacios.

Por otro lado, la técnica de relación de escala aquí utilizada podría ser aplicada a otros modelos dispersivos de la física-matemática para demostrar resultados de buena colocación.

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Adams, J. Fournier, Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] W. Baoxiang, G. Boling, On the initial value problem and scattering of solutions for the generalized Davey-Stewartson systems, Sci. China. Ser A, 44 (2001), 994-1002.

[3] V. Barros, The Davey-Stewartson system In Weak L^p spaces, Differential and Integral Equations, Aceptado para publicacion, Abril 2012.

[4] J. Bergh, J. Löfstrom, Interpolation Spaces. An introduction, Springer, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[5] P. Braz, L. Ferreira, E. Villamizar-Roa, On the existence of infinite energy solutions for nonlinear Schrödinger equations, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 1977-1987.

[6] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, New York, 2010.

[7] S. Caixia, G. Boling, Almost conservation law and global rough solutions to a nonlinear Davey-Stewartson equation, J. Math. Anal. Appl. 318 (2006), 365-379.

[8] S. Caixia, G. Boling, Ill-posedness for the nonlinear Davey-Stewartson equation, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 28 (2008), 117-127.

[9] A. Davey, K. Stewartson, On Three-Dimensional Packets of Surface Waves, Proc. R. Soc. Lond. A. 338 (1974), 110-110.

[10] V. Djordjevic, L. Redekopp, On two-dimensional packets of capillary-gravity waves, J. Fluid Mech 79 (1977), 703-714.

[11] G. Ebadi, E. Krishnan, M. Labidi, E. Zerrad, A. Biswas, Analytical and numerical solutions to the Davey-Stewartson equation with power-law nonlinearity, Waves Random Complex Media 21 (2011), 559-590.

[12] L. Ferreira, E. Villamizar-Roa, Self-similarity and asymptotic stability for coupled nonlinear Schrodinger equations in high dimensions, Physica D 241 (2012), 534-542.

[13] L. Ferreira, E. Villamizar-Roa, On the existence of solutions for the Navier-Stokes system in a sum of weak-L^p spaces, Discrete and Continuous Dynamical Systems. 27 (2009), 171 - 183.

[14] G. Folland, Lectures on Partial Differential Equations, Tata Intitute of Fundamental Research Bombay, Springer-Verlag, New York, 1983.

[15] G. Galdi, An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Springer, New York, 2011.

[16] J-M. Ghidaglia, J-C. Saut, On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems, Nonlinearity, 3 (1990), 475-506.

[17] L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, Second Edition, Springer, New York, 2008.

[18] L. Grafakos, Modern Fourier Analysis, Second Edition, Springer, New York, 2009.

[19] N. Hayashi, H. Hirata, Local existence in time of small solutions to the elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson system in the usual Sobolev space, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 40 (1997), 563-581.

[20] N. Hayashi, Local existence in time of solutions to the elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson system without smallness condition on the data, J. Analysé Mathématique 73 (1977), 133-164.

[21] R. Hunt, On $L^{p,q}$ spaces, LÉnseignement Mathématique, (2) 12, (1996), 249-276.

[22] X. Li, J. Zhang, S. Lai, Y. Wu, The sharp threshold and limiting profile of blow-up solutions for a Davey-Stewartson system, J. Differential Equations 250 (2011), 2197-2226.

[23] F. Linares, G. Ponce, Introduction to Nonlinear Dispersive Ecuations, Springer, New York, 2009.

[24] E. Villamizar-Roa, J. Pérez-López, On the Davey-Stewartson system with singular initial data, Aceptado para publicación en Comptes rendus - Mathématique, 2012.

[25] Y. Wang, it The Cauchy problem for the elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson system in Sobolev space, J. Math. Anal. Appl. 367 (2010), 174-192.

[26] X. Zhao, it Self-similar solutions to a generalized Davey-Stewartson system, Math. Compu. Modelling 50 (2009), 1394- 1399.