

**ANILLOS DE BOOLE Y RELACIONES DE
LIGAZÓN**

ANGÉLICA MARÍA DUARTE ESPINOSA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2005**

**ANILLOS DE BOOLE Y RELACIONES DE
LIGAZÓN**

ANGÉLICA MARÍA DUARTE ESPINOSA

Trabajo presentado para optar el título de
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

Directora

SONIA MARLENI SABOGAL PEDRAZA

Doctora en ciencias matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2005

AGRADECIMIENTOS

Agradezco muy especialmente a:

Dios por darme valor y fortaleza para alcanzar mis metas.

Mis padres Héctor y Teresa por su amor, comprensión y apoyo en cada instante de mi vida.

Mis hermanos Javier, Carlos y Beatriz por su apoyo moral y afectivo.

La profesora Sonia Marleni Sabogal Pedraza porque además de ser una excelente directora de monografía, es una persona con mucha calidad humana.

El profesor Gilberto Arenas por su paciencia y colaboración.

Mis amigos Tilson Huertas y Diana Pinzón, por su apoyo y colaboración incondicional.

Mis profesores por orientarme a lo largo de mi carrera.

TÍTULO: ANILLOS DE BOOLE Y RELACIONES DE LIGAZÓN*

AUTOR: DUARTE ESPINOSA Angélica María**

PALABRAS CLAVES: Anillos de Boole, retículos de Boole, filtros y ultrafiltros, espectro de un anillo de Boole, relaciones de ligazón.

DESCRIPCIÓN

En este trabajo de monografía se analizan ciertas estructuras algebraicas llamadas **anillos de Boole con unidad**, enriquecidos con cierto tipo de relación llamada **relación de ligazón**. Los anillos de Boole con relación de ligazón representan cierta clase de espacios topológicos, estableciendo una extensión del bien conocido y muy importante Teorema de Representación de Stone. Sin embargo los anillos de Boole con relación de ligazón es un tema poco conocido y en esta monografía se pretende divulgar analizar y explorar las propiedades de estas estructuras algebraicas.

El trabajo consta de cuatro capítulos: Preliminares, generalidades de la teoría de anillos de Boole, espectro de un anillo de Boole y relaciones de ligazón. En el primer capítulo se recopilan los conceptos y resultados necesarios para el buen entendimiento de este trabajo. En el segundo capítulo se presentan los anillos de Boole, algunas propiedades básicas y diversos ejemplos, al final de este capítulo se muestra la relación que existe entre los anillos de Boole y los retículos de Boole. El tercer capítulo trata sobre los filtros y ultrafiltros, se dan algunos ejemplos y se cierra el capítulo con la noción de espectro de un anillo de Boole.

Finalmente en el cuarto capítulo se definen las relaciones de ligazón, se muestran y exploran algunas de sus propiedades ilustradas con varios ejemplos y para terminar se presenta una interesante equivalencia entre anillos de Boole finitos con relación de ligazón y conjuntos finitos con relación de equivalencia.

*Monografía

**Facultad de Ciencias. Escuela de matemáticas. Directora: Sonia Marleni Sabogal Pedraza.

TITLE: BOOLEAN RINGS AND LINK RELATIONS*

AUTHOR: DUARTE ESPINOSA Angélica María**

KEY WORDS: Boolean rings, Boolean lattices, filters and ultrafilters, spectrum of a Boolean ring, link relations.

DESCRIPTION

In this work, certain type of algebraic structures (named **Boolean rings with unit**), enriched with certain kind of relation (named **link relation**) are analyzed. Boolean rings with link relation represent certain kind of topological spaces, establishing an extension of the well known and very important Stone Representation Theorem. Nevertheless, Boolean rings with link relation is an unknown theme and the main purpose of this monograph is to make it public, analyze and explore the properties of these algebraic structures.

This work is divided by four chapters: Preliminaries, generalities of Boolean rings theory, spectrum of a Boolean ring and link relations. The first chapter compiles concepts and requirements to understand this work. The second chapter presents the Boolean rings, their basic properties and some examples; the end of this chapter presents the relations between Boolean rings and Boolean lattices. The third chapter is about filters and ultrafilters and some examples. Also, this chapter explains the notion of spectrum of a Boolean ring.

The fourth chapter presents the link relations and some of their properties explained with several examples. Finally, an interesting equivalence between finite Boolean rings with link relation and finite sets with equivalence relation, is presented.

*Monograph

**Faculty of sciences. Mathematics school. Director: Sonia Marleni Sabogal Pedraza.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1. PRELIMINARES	3
2. GENERALIDADES DE LA TEORÍA DE ANILLOS DE BOOLE	10
2.1. Definiciones y Ejemplos	10
2.2. Algunas propiedades básicas de los anillos de Boole	17
2.3. Anillos de Boole con unidad y retículos de Boole	20
2.4. Átomos en un anillo de Boole	22
3. ESPECTRO DE UN ANILLO DE BOOLE	30
3.1. Filtros y Ultrafiltros	30
3.2. Definición de Espectro	38
4. ANILLOS DE BOOLE Y RELACIONES DE LIGAZÓN	41
4.1. Definiciones y Ejemplos	41
4.2. Acerca de las relaciones α , R^α y R_α	52
4.3. Equivalencia entre anillos de Boole finitos con relación de ligazón y conjuntos finitos con relación de equivalencia	56
BIBLIOGRAFÍA	59

INTRODUCCIÓN

El tema de los anillos de Boole, no es nuevo. La teoría de las álgebras Booleanas (estructuras equivalentes a los anillos de Boole con unidad) tiene su origen en los trabajos de George Boole de 1847 [3] y 1854 [4]. En los años treinta M.H Stone presentó el famoso Teorema de Representación de Stone para anillos de Boole con unidad, a través de dos artículos: *The theory of representations for Boolean algebras* ([11]) y *Applications of the theory of Boolean rings to general topology* ([12]). En el primer artículo, los temas centrales son las álgebras Booleanas y los anillos de Boole, no necesariamente con unidad. En el segundo artículo relaciona la teoría desarrollada en su primer artículo con la topología general.

El teorema de Representación de Stone ha tenido una influencia enorme en el desarrollo de casi todas las ramas de la matemática y aún hoy continua inspirando investigaciones, como es el caso de las relaciones de ligazón que fueron presentadas en [10].

En [10] en lugar de omitir o debilitar condiciones en la definición de anillo de Boole con unidad para generalizar este concepto, lo que se hace es enriquecer este tipo de anillos con una relación compatible con la estructura del anillo, obteniendo de esta manera los anillos de Boole con relación de ligazón, tema central de estudio de la presente monografía.

En un principio se pretendía estudiar la categoría ABRL: Anillos de Boole con unidad enriquecidos con una relación de ligazón, pero a lo largo del trabajo surgieron varias inquietudes que nos llevaron a concentrarnos más en el estudio de los objetos de dicha categoría que en los morfismos de la misma.

El presente trabajo se ha organizado en cuatro capítulos. En el primer capítulo se recopilan algunas definiciones y resultados que se usarán en los capítulos posteriores. Es importante aclarar que varios conceptos que son también preliminares, no aparecen en dicho capítulo

porque o son “ampliamente conocidos” o porque en el momento de utilizarlos se prefirió incluirlos allí mismo.

En el segundo capítulo se presentan algunos aspectos generales de la teoría de anillos de Boole, se muestran varios ejemplos, se demuestran algunas propiedades básicas, se muestra la estructura de orden de los anillos de Boole, tan importante para el siguiente capítulo, algunas propiedades de dicho orden, los conceptos de anillo de Boole atómico y completo y una caracterización de este tipo de anillos, en términos de los anillos de partes.

Puesto que la definición de relación de ligazón involucra el concepto de espectro de un anillo, el capítulo tercero se dedica a este concepto. Finalmente en el capítulo cuarto se introduce la noción de relación de ligazón, iniciando con la definición de dos relaciones que notamos R^α y R_α , las cuales constituyen dos formas de “elevar” una relación α en un conjunto X , a una relación en el “hiperconjunto” de sus partes $P(X)$.

Buena parte de lo que aparece en el capítulo cuarto, es tomado de [10] aunque en [10] o no aparecen las demostraciones correspondientes o solo aparecen bosquejadas. En la presente monografía dichas demostraciones se desarrollan con todos los detalles. Por otra parte la sección 4.2 se puede considerar totalmente original y corresponde a respuestas que encontramos a algunas preguntas que surgen de manera natural al pensar en las relaciones α , R^α y R_α .

Para terminar el capítulo cuarto (y también terminar el trabajo), se presenta una bonita aplicación de los anillos de Boole con relación de ligazón: se demuestra que tener un conjunto finito con una relación de equivalencia, es equivalente a tener un anillo de Boole con unidad, finito y con relación de ligazón.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo se precisan varios conceptos y resultados que se usarán en los demás capítulos.

1.1. Relación binaria: una *relación binaria* en un conjunto X es un subconjunto de $X \times X$; si \mathcal{R} es la relación y el par $(a, b) \in \mathcal{R}$, se dice que a está relacionado con b por \mathcal{R} y se escribe $a\mathcal{R}b$, y en el caso contrario se escribe $\neg(a\mathcal{R}b)$.

1.2. Relación de equivalencia: una relación \mathcal{R} definida en un conjunto X se dice de *equivalencia* si cumple las propiedades

- *reflexiva:* para todo $a \in X$, $a\mathcal{R}a$;
- *simétrica:* si $a\mathcal{R}b$, entonces $b\mathcal{R}a$, para cualesquiera $a, b \in X$;
- *transitiva:* para cualesquiera $a, b, c \in X$, si $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ entonces $a\mathcal{R}c$.

1.3. Relación de orden: una relación binaria \mathcal{R} en X se dice de *orden* si además de las propiedades reflexiva y transitiva es también antisimétrica, esto es, si $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$ implica $a = b$.

1.4. Conjunto ordenado: un *conjunto ordenado* es un par (X, \leq) donde X es un conjunto no vacío y \leq es una relación de orden en X .

1.5. Conjunto totalmente ordenado: un conjunto ordenado (X, \leq) se dice que es *totalmente ordenado* si para todo par de elementos de X alguno de ellos se relaciona con el otro, esto es: para cada $a, b \in X$, $a \leq b$, ó, $b \leq a$.

1.6. Sea (X, \leq) un conjunto ordenado. En este caso un elemento $a \in X$ se dice

- *máximo* si $b \leq a$ para todo $b \in X$,
- *mínimo* si $a \leq b$ para todo $b \in X$,
- *maximal* si $a \leq b$ y $b \in X$ entonces $b = a$, y
- *minimal* si $b \leq a$ y $b \in X$ entonces $b = a$.

1.7. Cota superior y cota inferior: si (X, \leq) es un conjunto ordenado, y A es un subconjunto del conjunto ordenado X , una *cota superior* para A en X es un elemento k de X que esta “por encima” de todos los elementos de A es decir:

$$k \text{ es cota superior de } A \iff (x \in A \implies x \leq k.)$$

Análogamente se define una *cota inferior*,

$$m \text{ es cota inferior de } A \iff (x \in A \implies m \leq x.)$$

Si A admite al menos una cota superior, se dice que A esta *acotado superiormente*, si A admite al menos una cota inferior, se dice que A esta *acotado inferiormente*. A esta *acotado* si lo está superior e inferiormente.

1.8. Extremo superior o supremo de A ($\sup A$): dado el conjunto ordenado (X, \leq) y $A \subseteq X$ acotado superiormente, llamamos *extremo superior o supremo* de A a la menor de las cotas superiores. Es decir $\sup A$ es *extremo superior* de A si y solo si $\sup A$ es cota superior para A y para cada k cota superior de A , $\sup A \leq k$.

1.9. Extremo inferior o ínfimo de A ($\inf A$): dado el conjunto ordenado (X, \leq) y $A \subseteq X$ acotado inferiormente, llamamos *extremo inferior o ínfimo* de A a la mayor de las cotas inferiores. Es decir $\inf A$ es *extremo inferior* de A si y solo si $\inf A$ es cota inferior y para cada m cota inferior de A , $m \leq \inf A$.

Si el supremo o el ínfimo de A , pertenecen al propio subconjunto A , coincidirán, respectivamente, con el máximo o el mínimo de dicho conjunto.

Ejemplo 1.1. $(\mathbb{N}, |)$ es un conjunto ordenado, donde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ es el conjunto de los números naturales y $|$ es la relación “divide a”, es decir, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m|n$ si y solo si m es un divisor de n . En este caso $(\mathbb{N}, |)$ **no** es un conjunto totalmente ordenado (por ejemplo

$\neg(3|5)$ y $\neg(5|3)$.

$(\mathbb{N}, |)$ no tiene máximo pero si tiene mínimo pues claramente $1|n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; no tiene maximales ya que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n|2n$ y $n \neq 2n$; 1 es minimal ya que si $n|1$ entonces necesariamente $n = 1$ y es el único minimal dado que para cualquier $m \neq 1$ se tiene $1|m$. Sin embargo si “quitamos” el 1, es decir consideramos el conjunto ordenado $(\mathbb{N} - \{1\}, |)$ entonces todos los números primos serán minimales y serán exactamente todos los minimales.

Obsérvese que dado cualquier conjunto ordenado (X, \leq) y cualquier $A \subseteq X$, al restringir la relación de orden al subconjunto A , lo que notaremos $(A, \leq|_A)$, se obtiene que $(A, \leq|_A)$ también es un conjunto ordenado.

Tomemos por ejemplo $A = \{3, 5, 6, 9, 10, 180\} \subseteq \mathbb{N}$. La relación $|$ restringida a este conjunto A se puede representar como se muestra en la figura 1.

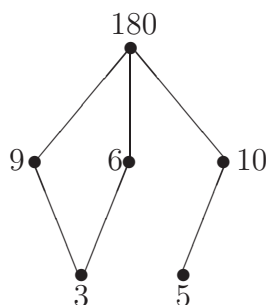


Figura 1: $|$ restringida a A

Analicemos los conceptos definidos para este conjunto A :

máximo: 180

mínimo: no tiene

maximales: 180

minimales: 3 y 5

cotas superiores para A en \mathbb{N} : todos los múltiplos de 180

cotas inferiores para A en \mathbb{N} : 1

$\sup A = 180$

$\inf A = 1$

1.10. Operación binaria cerrada: una *operación binaria cerrada* $*$ en un conjunto X , es una función de $X \times X$ en X .

Análogamente una *operación unaria cerrada* en X será una función $*$: $X \longrightarrow X$. Las operaciones que usaremos serán siempre cerradas por lo que escribiremos simplemente operación binaria u operación unaria.

1.11. Anillo: un conjunto A dotado de dos operaciones binarias que escribiremos $+$ (suma) y \cdot (producto) se llama *anillo* si se cumplen las siguientes propiedades:

- i) $(A, +)$ es un grupo abeliano.
- ii) El producto \cdot es asociativo.
- iii) Se cumplen las propiedades distributivas es decir,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

para cualesquiera $a, b, c \in A$.

1.12. Subanillo: un subconjunto S de un anillo $(A, +, \cdot)$ se dice que es un *subanillo* de A si $(S, +)$ es un subgrupo de $(A, +)$ y el producto \cdot restringido a S es cerrado; de forma equivalente, la suma y el producto son operaciones cerradas sobre S y $(S, +, \cdot)$ es un anillo.

1.13. Anillo con unidad: un anillo A se dice *anillo con unidad* si existe un elemento en A que simbolizaremos con $1 (\neq 0)$ y que se llama *unidad* del anillo tal que para todo $x \in A$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

1.14. Homomorfismo e Isomorfismo de Anillos: dados dos anillos A, A' , una función $f : A \longrightarrow A'$ se dice un *homomorfismo de anillos* si para todo par de elementos r, s de A se tiene que

$$f(r + s) = f(r) + f(s) \quad \text{y} \quad f(rs) = f(r)f(s)$$

Si además f es inyectiva y sobreyectiva se tiene un *isomorfismo de anillos*, en este último caso la notación usual es $A \approx A'$.

Si A y A' son anillos con unidad 1 y $1'$ respectivamente, un *homomorfismo de anillos con unidad* es un homomorfismo de anillos $f : A \longrightarrow A'$ tal que $f(1) = 1'$.

1.15. Kernel de un homomorfismo (Ker): el *Kernel* o *núcleo* de un homomorfismo f de un anillo A en un anillo A' es el conjunto de elementos de A cuya imagen, bajo f , es el elemento identidad de A' , es decir:

$\text{Ker}(f) = \{a \in A \mid f(a) = 0_{A'}\}$, donde $0_{A'}$ es el elemento identidad de A' .

1.16. Si $f : A \longrightarrow A'$ es un homomorfismo de anillos, se tienen las siguientes propiedades:

i) f es inyectiva si y solo si $\text{Ker}(f) = \{0_A\}$, donde 0_A es el elemento identidad de A .

ii) Si S es un subanillo de A entonces $f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$ es un subanillo de A' .

1.17. Sean A, R anillos y una función $f : A \longrightarrow R$. Si f es un homomorfismo de anillos y f es inyectiva entonces A es *isomorfo* a $f(A)$, es decir, $A \approx f(A) \subseteq R$.

Ejemplo 1.2. Es bien conocido que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ (con las operaciones usuales de suma y multiplicación) son anillos; \mathbb{Z} es subanillo de \mathbb{Q} , \mathbb{Q} subanillo de \mathbb{R} y \mathbb{R} subanillo de \mathbb{C} .

Para cualquier anillo A la función identidad $1_A : A \longrightarrow A$, definida por $1_A(a) := a \forall a \in A$, es un homomorfismo de anillos, que claramente es isomorfismo y cuyo núcleo es $\text{Ker}(1_A) = \{0_A\}$.

Ahora recordaremos algunos conceptos de la topología, que se van a usar en este trabajo.

1.18. Espacio topológico: sea X un conjunto y τ una familia de subconjuntos de X (es decir $\tau \subseteq P(X)$). Se dice que τ es una *topología* sobre X , si se cumplen los siguientes axiomas:

(ET_1) $\emptyset, X \in \tau$.

(ET_2) Si $A, B \in \tau$ entonces $A \cap B \in \tau$.

(ET_3) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos de τ , entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

en tal caso el par (X, τ) se llama *espacio topológico* y los elementos de τ se llaman *abiertos*.

Nota 1.1. (ET_2) significa que la intersección finita de abiertos es un abierto.

1.19. Topología usual de \mathbb{R} (τ_u): sea $X = \mathbb{R}$, se tiene que:

$\tau_u = \left\{ \bigcup (a, b) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ es una topología sobre \mathbb{R} , llamada la *topología usual*.

1.20. Topología discreta: X conjunto y $\tau = P(X)$, τ es una topología sobre X llamada *topología discreta*.

1.21. Base para alguna topología: X conjunto y $\mathfrak{B} \subseteq P(X)$ se dice que \mathfrak{B} es *base para alguna topología* sobre X , si se cumplen las siguientes condiciones:

i) $\bigcup \mathfrak{B} = X$

ii) Si B_1 y $B_2 \in \mathfrak{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, entonces existe $B_3 \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. En tal caso, la familia

$$\langle \mathfrak{B} \rangle = \{G \subseteq X \mid (\forall x \in G)(\exists B_x \in \mathfrak{B})(x \in B_x \subseteq G)\}$$

es una *topología* sobre X , llamada la *topología generada* por \mathfrak{B} .

1.22. Base para una topología: (X, τ) espacio topológico y \mathfrak{B} una familia de abiertos (es decir $\mathfrak{B} \subseteq \tau$). Se dice que \mathfrak{B} es *una base para τ* , si todo elemento de τ es unión de elementos de \mathfrak{B} , equivalentemente si para cualquier $O \in \tau$ y $x \in O$, existe $B_x \in \mathfrak{B}$ tal que: $x \in B_x \subseteq O$.

1.23. Interior de un conjunto: (X, τ) espacio topológico, $A \subseteq X$, $x \in A$. Diremos que x es un *punto interior* de A si y solo si existe $O \in \tau$, tal que $x \in O \subseteq A$.

El conjunto de los *puntos interiores* de A se llama el *interior* de A y se nota $\overset{\circ}{A}$ o $int(A)$.

1.24. Una caracterización de los conjuntos abiertos: (X, τ) espacio topológico, $A \subseteq X$. Entonces A es abierto si y solo si $A = \overset{\circ}{A}$.

1.25. Conjuntos cerrados: (X, τ) espacio topológico $A \subseteq X$. Diremos que A es *cerrado* si y solo si $X - A \in \tau$, es decir, si $X - A$ es abierto.

Los conjuntos cerrados poseen las siguientes propiedades, “duales” de las propiedades de los abiertos: toda intersección de conjuntos cerrados, es un conjunto cerrado y toda reunión de finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

1.26. Topología de Subespacio: (X, τ) espacio topológico, $Y \subseteq X$, la familia:

$$\tau_Y =: \{O \cap Y \mid O \in \tau\}$$

es una topología sobre Y llamada la *topología de subespacio*, el par (Y, τ_Y) se llama *subespacio topológico* de (X, τ) .

Ejemplo 1.3. En \mathbb{R} la familia $\mathfrak{B} = \{(r, q) \mid r, q \in \mathbb{Q}\}$ es base para una topología y en este caso $\langle \mathfrak{B} \rangle$ es precisamente la topología usual de \mathbb{R} .

Ejemplo 1.4. En (\mathbb{R}, τ_u) los interiores de $[0, 1)$, $(0, 1) \cup (2, 3)$ y \mathbb{Q} son $(0, 1)$, $(0, 1) \cup (2, 3)$ y \emptyset respectivamente, de lo cual se puede afirmar que $(0, 1) \cup (2, 3)$ es abierto mientras que $[0, 1)$ y \mathbb{Q} no lo son. Los conjuntos $[0, 1]$, $(-\infty, 0] \cup [1, 2]$ son cerrados, mientras que $[0, 1)$ y \mathbb{Q} no lo son.

1.27. Espacio disconexo y espacio conexo: (X, τ) espacio topológico. Diremos que X es *disconexo* o *no conexo* si existen dos abiertos, disjuntos no vacíos, cuya unión es X , es decir si existen A y B tales que:

- A y B son abiertos;
- $A \cap B = \emptyset$;
- $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$;
- $A \cup B = X$

En tal caso $\{A, B\}$ es una *disconexión* de X ; si no existe *disconexión* de X , entonces X se dice *conexo*.

1.28. Caracterización de los espacios conexos: un espacio topológico (X, τ) es conexo si y solo si los únicos subconjuntos de X que son simultáneamente abiertos y cerrados (abierto-cerrados) son \emptyset y X .

1.29. Espacio totalmente disconexo: (X, τ) espacio topológico. Diremos que (X, τ) es *totalmente disconexo* si τ admite una base de abierto-cerrados.

Ejemplo 1.5. (\mathbb{R}, τ_u) es un espacio conexo; los subespacios $(0, 1) \cup [2, 3)$ y \mathbb{Q} son disconexos y \mathbb{Q} es además totalmente disconexo.

CAPÍTULO 2

GENERALIDADES DE LA TEORÍA DE ANILLOS DE BOOLE

2.1. Definiciones y Ejemplos

Definición 2.1.1. Se llama **anillo de Boole** a un anillo $(A, +, \cdot)$ en el cual todo elemento es idempotente, es decir para todo $x \in A$, $x^2 = x$.

Definición 2.1.2. Se llama **anillo de Boole con unidad** (o **anillo de Boole unitario**) a un anillo de Boole, en el cual existe un elemento que simbolizaremos mediante 1 , $1 \neq 0$, tal que para todo x del anillo,

$$x.1 = 1.x = x.$$

Es fácil probar que si un anillo de Boole tiene unidad 1 , esta es única.

Ejemplo 2.1.1. Dado un conjunto X , el conjunto $P(X)$, de las partes de X , dotado de las operaciones Δ (diferencia simétrica, es decir, dados $A, B \in P(X)$, $A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$) e \cap (intersección) es un anillo de Boole con unidad. En efecto:

1. Veamos que $(P(X), \Delta)$ es un grupo abeliano.

a) La operación Δ es asociativa.

Sean $A, B, C \in P(X)$, se debe mostrar que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Demostración.

Sea $x \in (A \triangle B) \triangle C$ entonces $x \in [(A \triangle B) - C] \cup [C - (A \triangle B)]$ es decir $x \in (A \triangle B) - C$ o $x \in C - (A \triangle B)$.

i) Si $x \in (A \triangle B) - C$ entonces $x \in (A \triangle B)$ y $x \notin C$ es decir $x \in [(A - B) \cup (B - A)]$ y $x \notin C$ luego $(x \in A - B$ o $x \in B - A)$ y $x \notin C$.

- Si $x \in A - B$ y $x \notin C$ entonces $x \in A$ y $x \notin B$ y $x \notin C$, por lo tanto $x \in A$ y $x \notin B - C$ y $x \notin C - B$ luego $x \in A$ y $x \notin (B \triangle C)$, de modo que $x \in [A - (B \triangle C)]$ entonces $x \in A \triangle (B \triangle C)$.

- Si $x \in B - A$ y $x \notin C$ entonces $x \in B$ y $x \notin A$ y $x \notin C$, por lo tanto $x \in B - C$ y $x \notin A$ luego $x \in B \triangle C$ y $x \notin A$, de modo que $x \in [(B \triangle C) - A]$ entonces $x \in A \triangle (B \triangle C)$.

ii) Si $x \in C - (A \triangle B)$ entonces $x \in C$ y $x \notin (A \triangle B)$, es decir $x \in C$ y $x \notin A - B$ y $x \notin B - A$, luego $x \in C$ y $(x \notin A$ o $x \in B$ y $x \notin B$ o $x \in A)$.

- Si $x \in C$ y $x \notin A$ y $x \notin B$ entonces $x \in C - B$ y $x \notin A$, por lo tanto $x \in B \triangle C$ y $x \notin A$, luego $x \in [(B \triangle C) - A]$ entonces $x \in A \triangle (B \triangle C)$.

- Si $x \in C$ y $x \in B$ y $x \in A$ entonces $x \in A$ y $x \notin B - C$ y $x \notin C - B$, luego $x \in A$ y $x \notin (B \triangle C)$ entonces $x \in [A - (B \triangle C)]$, por lo tanto $x \in A \triangle (B \triangle C)$.

De *i)* y *ii)* se tiene que $(A \triangle B) \triangle C \subseteq A \triangle (B \triangle C)$.

La otra contención se obtiene de manera análoga, luego

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C). \quad \blacksquare$$

b) La operación \triangle es conmutativa.

Se debe probar que $A \triangle B = B \triangle A$.

Demostración.

Sea $x \in A \triangle B$ entonces $x \in (A - B) \cup (B - A)$ es decir $x \in (A - B)$ o $x \in (B - A)$.

i) Si $x \in A - B$ entonces $x \in B \triangle A$.

ii) Si $x \in B - A$ entonces $x \in B \triangle A$.

De *i)* y *ii)* $A \triangle B \subseteq B \triangle A$.

La otra contención se obtiene de forma similar, luego $A \triangle B = B \triangle A$. ■

c) El conjunto vacío (\emptyset) es la identidad, ya que para todo $A \in P(X)$ se tiene que:

$$A \Delta \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A \cup \emptyset = A.$$

d) Para todo $A \in P(X)$, su inverso es A , ya que:

$$A \Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

2. La operación \cap es asociativa; esto es bien conocido.

3. Se cumplen las propiedades distributivas, es decir:

$$\text{a) } A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) \quad \text{b) } (B \Delta C) \cap A = (B \cap A) \Delta (C \cap A).$$

Demostración.

a) Sea $x \in A \cap (B \Delta C)$ entonces $x \in A$ y $[x \in (B - C) \text{ o } x \in (C - B)]$.

i. Si $x \in A$ y $x \in B - C$ entonces $x \in A$ y $x \in B$ y $x \notin C$, luego $x \in A \cap B$ y $x \notin C$

$$\implies x \in A \cap B \text{ y } x \notin A \cap C$$

$$\implies x \in (A \cap B) - (A \cap C)$$

$$\implies x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

ii) Si $x \in A$ y $x \in C - B$ entonces $x \in A$ y $x \in C$ y $x \notin B$, luego $x \in A \cap C$ y $x \notin A \cap B$

$$\implies x \in (A \cap C) - (A \cap B)$$

$$\implies x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

Por lo tanto de *i*) y *ii*) $A \cap (B \Delta C) \subseteq (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Inversamente si $x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ entonces $x \in (A \cap B - A \cap C)$ o $x \in (A \cap C - A \cap B)$.

i. Si $x \in (A \cap B - A \cap C)$ entonces $x \in A \cap B$ y $x \notin A \cap C$, luego $x \in A$ y $x \in B$ y $x \notin C$

$$\implies x \in A \text{ y } x \in B \text{ y } x \notin C$$

$$\implies x \in A \text{ y } x \in B - C$$

$$\implies x \in A \text{ y } x \in B \Delta C$$

$$\implies x \in A \cap (B \Delta C).$$

- ii. Si $x \in (A \cap C - A \cap B)$ entonces $x \in A \cap C$ y $x \notin A \cap B$, luego $x \in A$ y $x \in C$ y $x \notin A$ o $x \notin B$

$$\implies x \in A \text{ y } x \in C \text{ y } x \notin B$$

$$\implies x \in A \text{ y } x \in C - B$$

$$\implies x \in A \text{ y } x \in B \Delta C$$

$$\implies x \in A \cap (B \Delta C).$$

Luego de *i*) y *ii*) $(A \cap B) \Delta (A \cap C) \subseteq A \cap (B \Delta C)$.

Por lo tanto podemos concluir que $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

- b) Para esta prueba vamos a utilizar la parte a) demostrada anteriormente y que \cap es conmutativa, por lo tanto:

$$(B \Delta C) \cap A = A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) = (B \cap A) \Delta (C \Delta A). \quad \blacksquare$$

4. La propiedad de idempotencia se tiene fácilmente ya que:

$$A \cap A = A \text{ para todo } A \in P(X).$$

5. La unidad es X , ya que para todo $A \in P(X)$, $A \cap X = A$.

Luego de 1, 2, 3, 4, 5 se obtiene que $P(X)$ es un anillo de Boole con unidad.

Ejemplo 2.1.2. El conjunto $Pf(X)$, de las partes finitas de X , es un subanillo del anterior y por lo tanto es un anillo de Boole. Este anillo no tiene unidad en el caso en que X sea infinito.

Ejemplo 2.1.3. El conjunto $P*(X) = \{Y \subseteq X \mid Y \text{ es finito o } Y' \text{ es finito}\}$, de las partes finitas o de complemento finito, es un subanillo de $P(X)$ que comparte con este su unidad.

Ejemplo 2.1.4. \mathbb{Z}_2 es un anillo de Boole con unidad.

En efecto, sabemos que \mathbb{Z}_2 es un anillo (es más, es un cuerpo) y como: $\bar{0}^2 = \bar{0}$ y $\bar{1}^2 = \bar{1}$ entonces es un anillo de Boole.

Ejemplo 2.1.5. En el caso $X = \{\emptyset\}$, el anillo $P(X)$ no es otra cosa que el cuerpo \mathbb{Z}_2 .

Veamos:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

•	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Figura 2: $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

Δ	\emptyset	$\{\emptyset\}$
\emptyset	\emptyset	$\{\emptyset\}$
$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$	\emptyset

\cap	\emptyset	$\{\emptyset\}$
\emptyset	\emptyset	\emptyset
$\{\emptyset\}$	\emptyset	$\{\emptyset\}$

Figura 3: $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$$\begin{aligned} \text{Sea } f : \mathbb{Z}_2 &\longrightarrow P(\{\emptyset\}) \\ \bar{0} &\longrightarrow \emptyset \\ \bar{1} &\longrightarrow \{\emptyset\} \end{aligned}$$

Se tiene que:

- a. f es 1 - 1.
- b. f es sobre.
- c. f respeta las operaciones.
 - $f(\bar{0} + \bar{0}) = f(\bar{0}) = \emptyset = \emptyset \Delta \emptyset = f(\bar{0}) \Delta f(\bar{0})$.
 - $f(\bar{0} + \bar{1}) = f(\bar{1}) = \{\emptyset\} = \emptyset \Delta \{\emptyset\} = f(\bar{0}) \Delta f(\bar{1})$.
 - $f(\bar{1} + \bar{1}) = f(\bar{0}) = \emptyset = \{\emptyset\} \Delta \{\emptyset\} = f(\bar{1}) \Delta f(\bar{1})$.

- $f(\bar{0}.\bar{0}) = f(\bar{0}) = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = f(\bar{0}) \cap f(\bar{0})$.
- $f(\bar{0}.\bar{1}) = f(\bar{0}) = \emptyset = \emptyset \cap \{\emptyset\} = f(\bar{0}) \cap f(\bar{1})$.
- $f(\bar{1}.\bar{1}) = f(\bar{1}) = \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \cap \{\emptyset\} = f(\bar{1}) \cap f(\bar{1})$.

Por lo tanto de a, b, c se tiene que \mathbb{Z}_2 es isomorfo a $P(X)$.

Ejemplo 2.1.6. Dada una topología τ sobre un conjunto X , el conjunto de los abierto-cerrados de (X, τ) es un subanillo de $P(X)$. La unidad de este anillo es de nuevo X .

Sea $\mathcal{O} =: \{O \subseteq X \mid O \text{ es abierto-cerrado}\}$.

Entonces \mathcal{O} es un subanillo de $P(X)$. En efecto: claramente $\mathcal{O} \subseteq P(X)$ y $\mathcal{O} \neq \emptyset$ pues por ejemplo $\emptyset \in \mathcal{O}$.

Sean ahora $O, G \in \mathcal{O} \implies O$ y G son abierto-cerrados y tenemos:

$$O \Delta G = (O - G) \cup (G - O) = (O \cap G') \cup (G \cap O') \in \mathcal{O}.$$

(pues si un conjunto es abierto-cerrado, su complemento también es abierto-cerrado, la intersección finita de abiertos es abierto, la unión de abiertos es abierto, la intersección de cerrados es cerrado y la unión finita de cerrados es cerrado).

Por otra parte si $O \in \mathcal{O}$ entonces su inverso es el mismo $O \in \mathcal{O}$. Finalmente si $O, G \in \mathcal{O}$ es claro que $O \cap G \in \mathcal{O}$.

Ejemplo 2.1.7. Para (\mathbb{R}, τ_u) , $\mathcal{O} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} (\approx \mathbb{Z}_2)$ y en general para cualquier espacio topológico (X, τ) conexo se tendrá $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\} \approx \mathbb{Z}_2$.

Ejemplo 2.1.8. Para $X = [0, 1) \cup \{2\}$ visto como subespacio de (\mathbb{R}, τ_u) se tendrá $\mathcal{O} = \{\emptyset, [0, 1), \{2\}, X\}$. Se puede notar que entre más disconexo sea el espacio topológico, más elementos encontramos en su anillo de abierto-cerrados. Un caso extremo lo encontramos en los espacios totalmente disconexos, como los dos ejemplos que vienen a continuación:

Ejemplo 2.1.9. Para $(\mathbb{R}, \tau_{sorgenfrey})$ (recordamos: $\tau_{sorgenfrey} = \langle \mathcal{B} \rangle$ donde $\mathcal{B} =: \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$), obsérvese que cada abierto básico es cerrado:

$[a, b)' = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ y $(-\infty, a) \cup [b, \infty) = [\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a - n, a)] \cup [\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [b, b + n)]$ que es abierto $\implies \mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$.

Ejemplo 2.1.10. El espacio de Cantor:

recordemos la forma clásica de construir el conjunto de Cantor a partir de un segmento de recta mediante un proceso iterativo infinito. Es decir, el conjunto de Cantor es el objeto que está al final de dicho proceso. Los pasos básicos del proceso son los siguientes:

- i) extraemos la tercera parte central del intervalo cerrado $[0, 1]$, es decir, el intervalo abierto $(1/3, 2/3)$. Este primer paso nos deja con dos segmentos de recta, cada uno en escala tres veces menor al inicial.
- ii) Tomamos los segmentos de recta obtenidos en el paso anterior, esto es, los segmentos $[0, 1/3], [2/3, 1]$, y sobre cada uno de ellos efectuamos nuevamente el procedimiento indicado en (i).
- iii) Del paso anterior se obtienen cuatro intervalos sobre los cuales volvemos a efectuar el paso (i) para continuar indefinidamente.

Los puntos del intervalo inicial $[0, 1]$ que quedan “al final” de estas infinitas extracciones es el conjunto \mathcal{C} de Cantor (ver Figura 4). Si C_0, C_1, C_2, \dots denotan los conjuntos obtenidos en los pasos $0, 1, 2, \dots$ respectivamente, del proceso descrito anteriormente, entonces $\mathcal{C} =: \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \approx \{x_1x_2\dots \mid x_i \in \{a, b\}, \forall i = 1, 2, \dots\} \approx \Sigma^{\mathbb{N}}$ siendo $\Sigma = \{a, b\}$. Cada sucesión $x_1x_2\dots$ la llamaremos un código. (véase [2], capítulo 1). Para cada “palabra” w sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ (es decir $w \in \Sigma^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$), notemos $[w]$ el conjunto de todos los códigos que empiezan por la palabra w , es decir:

$$[w] =: \{wx_1x_2\dots \mid x_i \in \{a, b\}, \forall i = 1, 2, \dots\}.$$

Ilustración: $[abba] = \{abba x_1x_2x_3\dots \mid x_i \in \{a, b\}, \forall i = 1, 2, \dots\}$.

Si consideramos \mathcal{C} como subespacio topológico de (\mathbb{R}, τ_u) se tendrá que cada conjunto $[w]$ es abierto-cerrado, (además tales conjuntos forman una base de la topología de subespacio de \mathcal{C}); así $\{[w] \mid w \in \Sigma^n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{O}$.

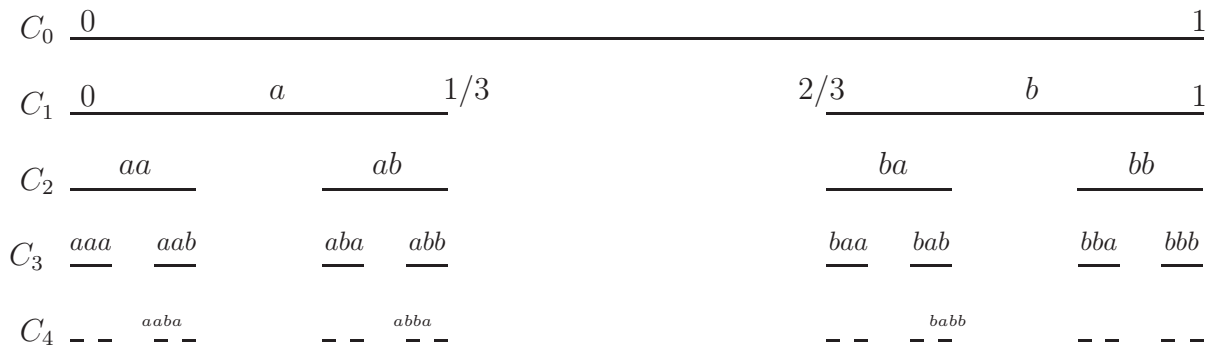


Figura 4: Conjunto de Cantor

2.2. Algunas propiedades básicas de los anillos de Boole

Como consecuencia de la propiedad de idempotencia aparece la conmutatividad del anillo y que todo elemento es inverso (aditivo) de si mismo.

Proposición 2.2.1. *Los elementos de un anillo de Boole satisfacen:*

$$(1) x + x = 0 \quad y \quad (2) x \cdot y = y \cdot x$$

Demostración.

Sean x, y que pertenecen al anillo Booleano entonces

$$\begin{aligned} x + y &= (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 \\ &= x + xy + yx + y \quad \text{luego } 0 = xy + yx. \end{aligned}$$

Tomando $x = y$ obtenemos $0 = x^2 + x^2 = x + x$ es decir $x = -x$. Además, como $xy + yx = 0$, $xy = -(yx) = yx$. ■

Teniendo en cuenta la estructura multiplicativa del anillo definimos la siguiente relación.

Definición 2.2.1. En un anillo de Boole se define $x \leq y$ (o $y \geq x$) si y solo $xy = x$.

Veamos que esta relación define un orden.

Proposición 2.2.2. *La relación de la definición anterior es una relación de orden.*

Demostración.

Sean x, y, z que pertenecen a un anillo Booleano,

1. reflexividad : como $xx = x$ se tiene que $x \leq x$;
2. antisimetría : si $x \leq y$ e $y \leq x$, esto es $xy = x$ e $yx = y$, como el anillo es conmutativo $xy = yx$ luego $x = y$;
3. transitividad : sean $x \leq y$ e $y \leq z$, es decir $xy = x$ e $yz = y$, entonces $x(yz) = xy = x$ y también $(xy)z = xz$, como el producto es asociativo $x(yz) = (xy)z$, esto es $xz = x$, que significa $x \leq z$. ■

Los anillos de Boole son entonces conjuntos ordenados. Obsérvese que para el anillo de Boole $(P(X), \Delta, \cap)$ el orden definido resulta ser el orden dado por la contención usual de conjuntos ya que se tendría:

$$A \leq B \iff A \cap B = A \iff A \subseteq B.$$

Enunciamos ahora la siguiente proposición que resume algunas propiedades importantes de este orden.

Proposición 2.2.3. *Sea A un anillo de Boole.*

1. $(\forall a, b, c \in A) (a \leq b \implies ac \leq bc)$.
2. $(\forall a, b, c, d \in A) (a \leq b \text{ y } c \leq d \implies ac \leq bd)$.
3. 0 es el mínimo de A .
4. A tiene máximo si y solo si tiene unidad.
5. $(\forall a, b \in A) (ab = \inf \{a, b\} \text{ y } a + b + ab = \sup \{a, b\})$.

Demostración.

1. Como $a \leq b$ entonces:

$$\begin{aligned} ab &= a, \\ abc^2 &= ac, \\ acbc &= ac, \\ ac &\leq bc. \end{aligned}$$

2. Como $a \leq b$ y $c \leq d$ se tiene que $ab = a$ y $cd = c$, entonces

$$\begin{aligned} abc &= ac, \\ abcd &= ac, \\ acbd &= ac, \text{ de donde } ac \leq bd. \end{aligned}$$

3. Se tiene que $\forall x \in A$

$$\begin{aligned} 0.x &= (0 + 0)x, \\ 0.x &= 0.x + 0.x, \\ 0.x &= 0. \end{aligned}$$

luego $0 \leq x$, $\forall x \in A$, por lo tanto 0 es el mínimo de A .

4. i) Sea x el máximo de A , por lo tanto $\forall y \in A \ y \leq x$, entonces $yx = xy = y$, luego x es unidad para el anillo, es decir A tiene unidad.
- ii) Supongamos que A tiene 1 , $1 \in A$ y $\forall y \in A \ y1 = y$ entonces $y \leq 1$, luego 1 es el máximo de A .

Por lo tanto de *i*) y *ii*) se tiene 4.

5. Veamos en primer lugar que $ab = \inf \{a, b\}$. Tenemos:

$aba = a^2b = ab$ entonces $ab \leq a$, y $abb = ab^2 = ab$ entonces $ab \leq b$, luego ab es una cota inferior de $\{a, b\}$.

Sea ahora c una cota inferior de $\{a, b\}$, por lo tanto $c \leq a$ y $c \leq b$ es decir $ca = c$ y $cb = c$. Como el producto es asociativo se tiene que $c(ab) = (ca)b = cb = c$ entonces $c \leq ab$, luego ab es la máxima cota inferior de $\{a, b\}$.

Ahora probemos que $a + b + ab = \sup\{a, b\}$. Tenemos:

$a(a+b+ab) = a^2+ab+a^2b = a+ab+ab = a$ ya que $ab+ab = 0$. Entonces $a \leq a+b+ab$.

Por otra parte, $b(a+b+ab) = ba+b^2+bab = ba+b+b^2a = ba+b+ba = b+ba+ba = b$.

Entonces $b \leq a + b + ab$, luego $a + b + ab$ es una cota superior de $\{a, b\}$.

Sea ahora c una cota superior de $\{a, b\}$, de donde $(a + b + ab)(c) = ac + bc + abc$, pero se tiene que $a \leq c$ y $b \leq c$, esto es $ac = a$ y $bc = b$.

Por lo tanto $(a + b + ab)(c) = ac + bc + abc = a + b + ab$ entonces $a + b + ab \leq c$, es decir $a + b + ab$ es la mínima cota superior de $\{a, b\}$. ■

Podemos preguntarnos por otras propiedades, por ejemplo:

- $\text{¿}a \leq b, c \in A \implies a + c \leq b + c\text{?}$

Esta propiedad no se cumple. Veamos un contraejemplo:

sea $X = \{a, b, c\}$ y $P(X) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$.

Se tiene que $\{a\} \subseteq \{a, b\}$ y $\{b, c\} \in P(X)$, luego:

$$\{a\} \Delta \{b, c\} = \{a\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\} \not\subseteq \{a, c\} = \{a\} \cup \{c\} = \{a, b\} \Delta \{b, c\}.$$

- $\text{¿Es orden total, es decir } \forall a, b \in A, a \leq b \text{ o } b \leq a\text{?}$

No. Por ejemplo sea X un conjunto con al menos dos elementos, el anillo $P(X)$ y B, C dos “singletons” diferentes de X , (es decir dos conjuntos unitarios distintos) se tiene que $B \not\subseteq C$ y $C \not\subseteq B$.

- $\text{¿}a \leq b \text{ y } c \leq d \implies a + c \leq b + d\text{?}$

No es cierto. Contraejemplo:

sea $X = \{a, b, c\}$ y $A = P(X)$, se tiene que $\{a\} \subseteq \{a, b\}$ y $\{c\} \subseteq \{a, c\}$ pero $\{a\} \triangle \{c\} = \{a\} \cup \{c\} = \{a, c\} \not\subseteq \{b, c\} = \{b\} \cup \{c\} = \{a, b\} \triangle \{a, c\}$.

2.3. Anillos de Boole con unidad y retículos de Boole

En esta sección se definen ciertas estructuras algebraicas (llamadas retículos de Boole), que constituyen otra manera de representar los anillos de Boole con unidad.

Definición 2.3.1. Un **retículo** es un conjunto parcialmente ordenado (A, \leq) en el cual para todo par de elementos x, y de A , el conjunto $\{x, y\}$ admite un supremo y un ínfimo.

Ejemplo 2.3.1. $(P(X), \subseteq)$ es un retículo. En efecto: para todo conjunto no vacío X y para cualquier $A, B \subseteq P(X)$ el $\sup\{A, B\}$ es justamente $A \cup B$ y el $\inf\{A, B\}$ es $A \cap B$.

Ejemplo 2.3.2. Sea $(\mathbb{Z}^+, |)$. Dados $a, b \in \mathbb{Z}^+$ siempre existen en \mathbb{Z} el mínimo común múltiplo $\text{mcm}(a, b)$ y el máximo común divisor $\text{mcd}(a, b)$ y es fácil ver que $\sup\{a, b\} = \text{mcm}(a, b)$ y que $\inf\{a, b\} = \text{mcd}(a, b)$ siendo pues $(\mathbb{Z}^+, |)$ un retículo.

Ejemplo 2.3.3. El conjunto ordenado $(D_{15}, |)$ de los divisores de 15 es un retículo, (ver Figura 5).

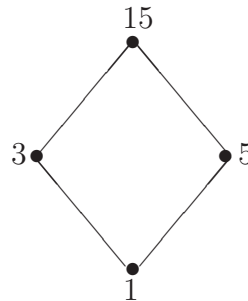


Figura 5: $(D_{15}, |)$

En un retículo A se definen las siguientes dos leyes de composición internas:

$$a \vee b =: \sup\{a, b\}, \quad a \wedge b =: \inf\{a, b\}.$$

Definición 2.3.2. Un **retículo distributivo** es un retículo en el cual se satisfacen las propiedades distributivas:

$$\begin{aligned} a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.4. El retículo $(\mathbb{Z}^+, |)$, con $a \vee b = \text{mcm}(a, b)$ y $a \wedge b = \text{mcd}(a, b)$ es distributivo.

En un retículo con elemento mínimo o y elemento máximo u , se llama **complemento** de un elemento x a todo elemento x^* que verifica: $x \wedge x^* = o$ y $x \vee x^* = u$.

Definición 2.3.3. Se llama **retículo complementado** un retículo con elementos máximo y mínimo en el cual todo elemento tiene al menos un complemento.

Ejemplo 2.3.5. El retículo $(D_{15}, |)$ del ejemplo 2.3.3 es complementado; 1, 3, 5 y 15 son complementos de 15, 5, 3 y 1 respectivamente.

Definición 2.3.4. Un retículo distributivo y complementado se llama un **retículo de Boole**.

Ejemplo 2.3.6. $(P(X), \subseteq)$ es un retículo de Boole.

Es posible demostrar que los conceptos anillos de Boole con 1 y retículos de Boole definen estructuras algebraicas equivalentes, las siguientes dos proposiciones establecen este hecho.

Proposición 2.3.1. Sea (A, \leq) un retículo de Boole. Definimos $+$ y \cdot en A por: $\forall x, y \in A$,

$$x + y =: (x \wedge y^*) \vee (x^* \wedge y)$$

$$xy =: x \wedge y$$

entonces $(A, +, \cdot, 1)$ es un anillo de Boole con 1 (el 0 y el 1 son el mínimo y el máximo del retículo respectivamente).

Proposición 2.3.2. Sea $(A, +, \cdot, 1)$ un anillo de Boole con 1; entonces (A, \leq) es un retículo de Boole donde \leq es la relación de orden de la definición 2.2.1. Además $\forall x, y \in A$, se tiene que,

$$x \vee y =: x + y + xy$$

$$x \wedge y =: xy$$

$$x^* =: 1 + x$$

Para las demostraciones de las proposiciones anteriores puede consultarse por ejemplo [5], capítulo 3.

2.4. Átomos en un anillo de Boole

Consideremos el anillo de partes $(P(X), \Delta, \cap)$; en este anillo los “singletons” $\{x\}$, $x \in X$, desempeñan un papel importante en el sentido de que cualquier elemento del anillo es el sup de un conjunto de singletons (si $S \in P(X)$, $S = \bigcup_{x \in S} \{x\}$). Obsérvese además que en el retículo $(P(X), \subseteq)$ los singletons $\{x\}$ son los minimales de $P(X) - \{\emptyset\}$.

Si A es un anillo de Boole, el único minimal (que además es mínimo) es 0, por lo tanto, lo que en realidad nos interesa son los minimales de $A - \{0\}$.

Definición 2.4.1. Dado un anillo de Boole A , llamaremos **átomos** de A , a los minimales de $A - \{0\}$. A se dice **atómico** si para todo $b \in A - \{0\}$ existe un átomo a tal que $a \leq b$. Notaremos

$$AT(A) =: \{a \in A \mid a \text{ es átomo}\}$$

y para cada $b \in A$

$$At(b) =: \{a \in AT(A) \mid a \leq b\}$$

Ejemplo 2.4.1. En $P(X)$, $AT(P(X)) = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Claramente $P(X)$ es atómico, pues dado $A \in P(X) - \{\emptyset\}$ y $a \in A$ entonces $\{a\} \subseteq A$.

Ejemplo 2.4.2. $Pf(X)$ y $P*(X)$ tienen los mismos átomos de $P(X)$ y por supuesto estos anillos son atómicos.

Ejemplo 2.4.3. En \mathbb{Q} con la topología usual, el anillo de los abierto-cerrados, $\mathcal{O} =: \{A \subseteq \mathbb{Q} \mid A \text{ es abierto-cerrado}\}$ es un anillo que no es atómico. Más aún, este es un anillo que no tiene átomos.

Demostración.

En efecto: sea $A \in \mathcal{O}$, $A \neq \emptyset$, debemos ver que existe $O \in \mathcal{O}$, $O \neq \emptyset$ tal que $O \subsetneq A$.

Sea $a \in A$, como A es abierto y como la familia $\mathcal{B} = \{(i, j) \cap \mathbb{Q} \mid i, j \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, i \leq j\}$ es una base para la topología usual de \mathbb{Q} , entonces existen i, j irracionales tales que:

$a \in (i, j) \cap \mathbb{Q} = [i, j] \cap \mathbb{Q} \subseteq A$. Sea $O = (i, j) \cap \mathbb{Q} (= [i, j] \cap \mathbb{Q})$; claramente O es abierto-cerrado en \mathbb{Q} y $O \neq \emptyset$, luego si $O \subsetneq A$ ya se tiene lo que se quería.

Si $O = A$ basta tomar i', j' irracionales tales que $i < i' < j' < j$ y entonces $O' = (i', j') \cap \mathbb{Q} = [i', j'] \cap \mathbb{Q} \in \mathcal{O}$ y $\emptyset \neq O' \subsetneq A$. ■

Ejemplo 2.4.4. Para el espacio de Cantor \mathcal{C} (ver ejemplo 2.1.10), el anillo \mathcal{O} de los abierto-cerrados de \mathcal{C} , no tiene átomos.

Demostración.

En efecto: si $A \in \mathcal{O}$, $A \neq \emptyset$, existe una palabra w tal que $[w] \subseteq A$.

Pero tenemos $[wa] \subsetneq [w] \subseteq A \implies [wa] \subsetneq A$. ■

Ejemplo 2.4.5. Sea $X = \mathcal{C} \cup (2, 3) \cup (4, 5)$ con la topología de subespacio que hereda de la topología usual de \mathbb{R} .

Los átomos del anillo de los abierto-cerrados $\mathcal{O} = \{A \subseteq X \mid A \text{ es abierto-cerrado}\}$ son $(2, 3)$ y $(4, 5)$, luego el anillo de Boole \mathcal{O} , no es atómico; por ejemplo para los abierto-cerrados de la forma $[w]$, no hay átomos “por debajo” de ellos, es decir: $At([w]) = \emptyset$ (como se vió en el ejemplo anterior). Sin embargo obsérvese que en este caso si hay elementos del anillo que tienen átomos “por debajo”, por ejemplo: $At([w] \cup (2, 3)) = \{(2, 3)\}$.

Los anillos de Boole atómicos y que además cumplen cierta propiedad de completez (definición 2.4.2) son muy importantes y por esto se caracterizarán en el Teorema 2.4.1.

Proposición 2.4.1. *Sea A un anillo de Boole, $a \in A$.*

$a \in AT(A)$ si y solo si $(\forall b \in A) (ab = 0 \text{ o } ab = a)$.

Demostración.

Supongamos que $a \in AT(A)$ y que b es un elemento cualquiera de A . En particular $a \neq 0$. Como

$$\begin{aligned} ab &= ab, \\ a^2b &= ab, \\ aba &= ab, \end{aligned}$$

entonces $ab \leq a$. Luego $ab = a$ o $ab < a$, pero si $ab < a$ por ser a minimal se tendría que ab debería anularse es decir $ab = 0$.

Entonces de lo anterior se tiene $ab = a$ o $ab = 0$.

Inversamente supongamos que se cumple que $(\forall b \in A) (ab = 0 \text{ o } ab = a)$. Veamos que $a \in AT(A)$:

si $c < a$ entonces $ca = c \neq a$, con lo cual $ca = 0$ (por hipótesis), y por tanto $c = 0$. Es decir no hay en $A - \{0\}$ elementos estrictamente menores que a , entonces $a \in AT(A)$. ■

Como consecuencia de la definición anterior tenemos una función $At : A \longrightarrow P(AT(A)) : a \mapsto At(a)$. Siendo ésta una función entre anillos de Boole, veamos que At es un homomorfismo.

Proposición 2.4.2. *Dado un anillo de Boole A , la función $At : A \longrightarrow P(AT(A))$ es un homomorfismo.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \text{Sea } At : A &\longrightarrow P(AT(A)) \\ a &\mapsto At(a) =: \{x \in AT(A) \mid x \leq a\}. \end{aligned}$$

Debemos probar que:

1. $At(a) \triangle At(b) = At(a + b)$.
 2. $At(a) \cap At(b) = At(a \cdot b)$.
1. i) Sea $x \in At(a) \triangle At(b)$ entonces $x \in At(a) - At(b)$ o $x \in At(b) - At(a)$.
 - Si $x \in At(a) - At(b)$ entonces x es átomo, veamos que $x \leq a + b$.
Tenemos $x \leq a$, $x \notin At(b)$ entonces $x \not\leq b$. Como $bx \leq x$ ($bx^2 = bx$) y x es átomo se tiene que $bx = 0$ o $bx = x$. Si fuera $bx = x$ entonces $x \leq b$, contradiciendo que $x \not\leq b$, por lo tanto $bx = 0$. Ahora:
 $x(a + b) = xa + xb = x + 0 = x$, entonces $x \leq a + b$, luego $x \in At(a + b)$.
 - Si $x \in At(b) - At(a)$ entonces x es átomo, además tenemos que $x \leq b$ y $x \notin At(a)$ luego $x \not\leq a$. Como $ax \leq x$ ($ax^2 = ax$) y x es átomo se tiene que $ax = 0$ o $ax = x$. Si fuera $ax = x$ entonces $x \leq a$, contradiciendo que $x \not\leq a$, de modo que $ax = 0$. Ahora: $x(a + b) = xa + xb = 0 + x = x$, entonces $x \leq a + b$, por lo tanto $x \in At(a + b)$.

Así que $At(a) \triangle At(b) \subseteq At(a + b)$.

- ii) Sea $x \in At(a + b)$ entonces x es átomo y $x \leq a + b$.
 - Si $x \in At(a)$ veamos que $x \notin At(b)$.
Si fuera $x \in At(b)$ se tendría que $x \leq b$, $x \leq a$ y $x \leq a + b$ entonces $bx = x$, $ax = x$ y $ax + bx = x$, por lo tanto $ax + bx = x + x = x$, de modo que $x = 0$, pero esto contradice que x sea átomo, luego:
 $x \in At(a) - At(b) \subseteq At(a) \triangle At(b)$.

- Si $x \notin At(a)$ veamos que $x \in At(b)$.

Como $x \in At(a + b)$, x es átomo y $x \leq a + b$ entonces $ax + bx = x$. Luego $ax \leq x$ ($ax^2 = ax$), entonces $ax = 0$ o $ax = x$. Si fuera $ax = x$ se tendría que $x \leq a$, luego $x \in At(a)$, lo que contradice que $x \notin At(a)$. Por lo tanto $ax = 0$ y se tiene: $ax + bx = x$ entonces $0 + bx = bx = x$, de modo que $x \leq b$, luego $x \in At(b)$. Así $x \in At(b) - At(a) \subseteq At(a) \triangle At(b)$.

Entonces de $i)$ y $ii)$ se tiene que $At(a) \triangle At(b) = At(a + b)$.

2.

$$\begin{aligned}
 At(a) \cap At(b) &= \{x \in AT(A) \mid x \leq a\} \cap \{x \in AT(A) \mid x \leq b\} \\
 &= \{x \in AT(A) \mid x \leq a \text{ y } x \leq b\} \\
 &= \{x \in AT(A) \mid xa = x \text{ y } xb = x\} \\
 &= \{x \in AT(A) \mid xab = x\} \\
 &= \{x \in AT(A) \mid x \leq ab\} \\
 &= At(a.b). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la proposición anterior, concluimos entonces:

Proposición 2.4.3. *Todo anillo de Boole atómico es un subanillo de un anillo de partes.*

Demostración.

Sea A un anillo de Boole atómico, veamos que el homomorfismo At de la proposición anterior es inyectivo. Como A es atómico, se tiene que para cada $b \neq 0$, existe por lo menos un átomo a de A tal que $a \leq b$. Por lo tanto $At(b) = \emptyset \iff b = 0$, lo que quiere decir que $Ker(At) = \{0\}$ entonces, usando 1.16 $i)$ del capítulo 1 At es inyectiva. Por 1.17 se tiene que $A \approx At(A)$ que es un subanillo de $P(AT(A))$, por lo cual podemos afirmar que A es un subanillo de un anillo de partes. \blacksquare

Una propiedad muy interesante que presentan algunos anillos de Boole con unidad es la de ser completos, veamos de que se trata:

Definición 2.4.2. Un anillo de Boole A con unidad, es **completo** si para todo subconjunto no vacío K de $AT(A)$ existe en A su extremo superior.

Ejemplo 2.4.6. $P(X)$ es un anillo de Boole completo. Dada $\mathcal{L} \subseteq P(X)$ (\mathcal{L} cualquier familia de subconjuntos de X), es fácil ver que $\bigcup \mathcal{L}$ es el extremo superior de \mathcal{L} (si $L \in \mathcal{L}$ entonces $L \subseteq \bigcup \mathcal{L}$ y si $S \in P(X)$ tal que $\forall L \in \mathcal{L}, L \subseteq S$ entonces $\bigcup \mathcal{L} \subseteq S$, luego $\bigcup \mathcal{L}$ es la mínima cota superior).

Ejemplo 2.4.7. $P^*(\mathbb{N})$ no es completo. En efecto, sea $K = \{\{2\}, \{4\}, \dots, \{2n\}, \dots\}$ es un conjunto no vacío, $K \subseteq AT(P^*(\mathbb{N}))$ y si existiera $B = \sup K$ entonces $\{2n\} \subseteq B \quad \forall n \in \mathbb{N}$ por lo tanto $2\mathbb{N} \subseteq B$. Pero además $\{2n\} \subseteq 2\mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ luego $2\mathbb{N}$ es cota superior de K , pero B es la mínima cota superior de K , de modo que $B \subseteq 2\mathbb{N}$ y se tendría $B = 2\mathbb{N} \notin P^*(\mathbb{N})$ pues $2\mathbb{N}$ no es finito y $(2\mathbb{N})' = 2\mathbb{N} + 1$ tampoco es finito.

Ejemplo 2.4.8. Si X es infinito $Pf(X)$ no es completo.

Sea $K = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \dots\} \subseteq AT(Pf(X))$, donde $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ es un subconjunto infinito de X . Si fuese $B = \sup K$ entonces $\{x_i\} \subseteq B$ para cada $i \in \mathbb{N}$ luego B es infinito por lo cual $B \notin Pf(X)$.

Un hecho interesante sobre anillos de Boole finitos se presenta a continuación:

Proposición 2.4.4. *Sea A un anillo de Boole con unidad. Si A es finito entonces A es atómico y completo.*

Demostración.

Veamos que A es atómico es decir que dado $a \in A, a \neq 0$, entonces $At(a) (= \{x \in AT(A) \mid x \leq a\}) \neq \emptyset$.

Si a es átomo, $a \in At(a)$ luego $At(a) \neq \emptyset$.

Si a no es átomo, existe $b_1 \in A$ tal que $b_1 < a$.

Si b_1 es átomo, $b_1 \in At(a)$ entonces $At(a) \neq \emptyset$.

Si b_1 no es átomo, existe $b_2 \in A$ tal que $b_2 < b_1 < a$.

Si b_2 es átomo, $b_2 \in At(a)$ así que $At(a) \neq \emptyset$.

Si b_2 no es átomo ...

El proceso anterior debe terminar porque A es finito entonces $At(a) \neq \emptyset$

Ahora debemos probar que A es completo.

Sea $K \subseteq AT(A)$ y $K \neq \emptyset$, como A es finito y $K \subseteq AT(A) \subseteq A$ se tiene que K es finito, por lo tanto $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. Utilizando la proposición 2.3.2 tenemos que (A, \leq) es un retículo de Boole entonces $\sup K = k_1 \vee k_2 \vee \dots \vee k_n$ luego $\sup K$ existe. ■

Ejemplo 2.4.9. \mathbb{Z}_2 es atómico y completo.

Ejemplo 2.4.10. Si X es un conjunto finito, el anillo $P(X)$ es finito, luego es atómico y completo.

Proposición 2.4.5. Sean A y A' anillos de Boole y $f : A \rightarrow A'$ un homomorfismo de anillos. Entonces:

i) $f(0) = 0'$;

ii) $\forall a, b \in A, a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$;

iii) si f es sobreyectiva y a es un átomo de A , entonces $f(a)$ es átomo de A' ;

iv) si f es isomorfismo, $S \subseteq A$ y $\sup S$ existe, entonces $f(\sup S) = \sup f(S)$.

Demostración.

i) Tenemos:

$$f(0) = f(0 + 0),$$

$$f(0) = f(0) + f(0),$$

$$f(0) + (-f(0)) = f(0) + f(0) + (-f(0)),$$

$$0' = f(0).$$

ii)

$$f(a)f(b) = f(ab) ; \text{ pero } ab = a \text{ pues } a \leq b, \text{ entonces:}$$

$$f(a)f(b) = f(a) \text{ lo que significa que } f(a) \leq f(b).$$

iii) Usaremos la proposición 2.4.1. Sea $y \in A'$ y supongamos que $yf(a) \neq 0'$. Veamos que $yf(a) = f(a)$. Como f es sobre, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Entonces:

$$f(x)f(a) \neq 0',$$

$$f(xa) \neq 0',$$

$$xa \neq 0 \text{ usando (i).}$$

Puesto que a es átomo de A se debe tener $xa = a$ y por tanto: $yf(a) = f(x)f(a) = f(xa) = f(a)$ como se quería ver.

- iv) Veamos en primer lugar que $f(\sup S)$ es cota superior de $f(S)$. Sea $s \in S$ y probemos que $f(s) \leq f(\sup S)$. Es claro que $s \leq \sup S$ y usando (ii) tenemos que $f(s) \leq f(\sup S)$. Ahora probemos que $f(\sup S)$ es la mínima cota superior de $f(S)$. Sea y una cota superior de $f(S)$ (debemos demostrar que $f(\sup S) \leq y$). Para todo $s \in S$ se tiene $f(s) \leq y$. Como f es sobre existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$, luego $f(s) \leq f(x)$, $\forall s \in S$. Como existe f^{-1} y es homomorfismo tenemos $s \leq x$, $\forall s \in S$, es decir x es cota superior de S y por tanto $\sup S \leq x$ lo que implica $f(\sup S) \leq f(x) = y$, como se quería ver. ■

De la proposición anterior se deduce fácilmente el siguiente corolario:

Corolario 2.4.1. *Sean A y A' anillos de Boole isomorfos, entonces:*

- i) *A es atómico si y solo si A' es atómico.*
- ii) *A es completo si y solo si A' es completo.*

El siguiente teorema establece condiciones necesarias y suficientes para que un anillo de Boole sea un anillo de partes.

Teorema 2.4.1. *Un anillo de Boole A es (isomorfo a) un anillo de partes, si y solo si, A es atómico y completo.*

Demostración.

Si un anillo es isomorfo a un anillo de partes entonces por los ejemplos 2.4.1, 2.4.6 y el corolario 2.4.1 tenemos que el anillo es atómico y completo.

Recíprocamente sea A un anillo de Boole atómico y completo. Sea

$$\begin{aligned} At : A &\longrightarrow P(AT(A)) \\ a &\mapsto At(a) =: \{x \in AT(A) \mid x \leq a\}. \end{aligned}$$

En la proposición 2.4.3 se probó que At es un homomorfismo de anillos y At es inyectiva; sólo falta probar que At sea sobre para que A sea isomorfo a un anillo de partes, por lo tanto: sea $K \in P(AT(A))$ es decir $K \subseteq AT(A)$; si $K \neq \emptyset$, como A es completo existe $b \in A$ tal que $b = \sup K$ entonces para todo $m \in K$, $m \leq b$. Veamos $At(b) = K$:

- i) sea $z \in At(b)$ entonces z es átomo y $z \leq b$. Si $z < b$ se tiene que z no es cota superior de K luego existe $x \in K$ tal que $z < x$, pero x es átomo de modo que $z = 0$, pero

esto nos lleva una contradicción pues $0 \notin At(b)$, por lo que se debe tener que $z = b$, entonces b es átomo y $x \leq b$ para todo $x \in K$ por lo tanto $x = b$ de modo que $b \in K$. Así se tiene $At(b) \subseteq K$.

ii) Sea $w \in K$ entonces $w \leq b$ luego $w \in At(b)$, de donde $K \subseteq At(b)$.

Entonces de *i*) y *ii*) se tiene que $At(b) = K$.

Ahora si $K = \emptyset$ entonces $At(0) = \emptyset = K$.

De lo anterior podemos concluir que At es sobre. ■

Corolario 2.4.2. *Si A es un anillo de Boole finito con unidad entonces A es (isomorfo a) un anillo de partes.*

Demostración.

Utilizando la hipótesis y la proposición 2.4.4 se tiene que A es atómico y completo, entonces según el teorema anterior A es (isomorfo a) un anillo de partes. ■

CAPÍTULO 3

ESPECTRO DE UN ANILLO DE BOOLE

La definición de relación de ligazón involucra el concepto de espectro de un anillo. Usualmente el espectro de un anillo se define en términos de ideales pero hay otras formas equivalentes de definirlo (ver por ejemplo [1], capítulo 2). En el presente trabajo se define el espectro usando la noción de ultrafiltro.

3.1. Filtros y Ultrafiltros

Definición 3.1.1. Sea A un anillo de Boole. Un subconjunto no vacío F de A se llama **filtro** en A si satisface:

- i. $(\forall a, b \in A) (a \in F \text{ y } b \in F \implies ab \in F)$.
- ii. $(\forall a \in F) (\{b \in A \mid a \leq b\} \subset F)$.

Nota 3.1.1. Al trabajar con filtros se debe tener en cuenta lo siguiente:

1. si A tiene 1 entonces $1 \in F$;
2. si $0 \in F$, entonces, por (ii) se tendría que $F = A$ que se llama *filtro impropio*, es decir:

si $F \subsetneq A$, F se dice *filtro propio*.

si $F = A$, F se dice *filtro impropio*.

Ejemplo 3.1.1. Todo anillo de Boole es un filtro.

1. Si $a, b \in A$, claramente $ab \in A$ (A es el anillo total).
2. Sea $a \in A$, $a \leq b$, nuevamente es claro que $b \in A$. (A es el anillo total)

Ejemplo 3.1.2. Sea a un elemento de un anillo de Boole A . El conjunto $\mathfrak{F}(a) = \{x \in A \mid a \leq x\}$ es un filtro en A llamado **filtro principal**.

Claramente $\mathfrak{F}(a) \neq \emptyset$ pues por ejemplo $a \in \mathfrak{F}(a)$.

- i. Sean $b, c \in \mathfrak{F}(a)$ luego se tiene $a \leq b$ y $a \leq c$ entonces $ab = a$ y $ac = a$, de donde $abc = a$, es decir $a \leq bc$.
Por lo tanto $\mathfrak{F}(a)$ es cerrado para \cdot .
- ii. Sea $d \in \mathfrak{F}(a)$ y $b \in A$, con $d \leq b$, como $a \leq d$ y $d \leq b$, por transitividad se tiene que $a \leq b$, entonces $b \in \mathfrak{F}(a)$.

Veamos un caso particular de este ejemplo.

Ejemplo 3.1.3. Sea $X = \{a, b, c\}$ de donde

$$P(X) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$

Como ya sabemos el conjunto $P(X)$, dotado de las operaciones Δ (diferencia simétrica) e \cap (intersección) es un anillo de Boole con unidad. El orden correspondiente es simplemente la inclusión.

Por el ejemplo anterior tenemos:

sea $\{a\} \in P(X)$, el conjunto $\mathfrak{F}(\{a\}) = \{A \in P(X) \mid \{a\} \subseteq A\}$ es un filtro en $P(X)$ donde $\mathfrak{F}(\{a\}) = \{X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$. También $\mathfrak{F}(\{b, c\}) = \{\{b, c\}, X\}$ es otro ejemplo de filtro en $P(X)$.

Ejemplo 3.1.4. $\mathcal{H} = \{Y \subseteq X \mid Y' \text{ es finito}\}$ es un filtro llamado **filtro de complementarios finitos**.

Se tiene que $X \in \mathcal{H}$ pues $X' = \emptyset$ es finito.

- i. Si $A, B \in \mathcal{H} \implies A', B'$ son finitos $\implies (A \cap B)' = A' \cup B'$ es finito $\implies A \cap B \in \mathcal{H}$.
- ii. Si $A \in \mathcal{H}$ y $A \subseteq B \implies A'$ es finito y $B' \subseteq A' \implies B'$ es finito $\implies B \in \mathcal{H}$.

La proposición 3.1.1 establecerá una condición suficiente para que F sea un filtro, pero antes de estudiarla daremos la definición de núcleo unífero.

Definición 3.1.2. Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos de Boole con unidad, se define el **núcleo unífero** de f como el conjunto de los $a \in A$ tales que $f(a) = 1$.

Proposición 3.1.1. Sean A y B anillos de Boole con unidad $F \subset A$ ($F \neq \emptyset$).

Si F es el núcleo unífero de un homomorfismo de anillos con unidad $f : A \longrightarrow B$ entonces F es un filtro.

Demostración.

Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos con unidad y sea F el núcleo unífero de f .

Veamos que F es un filtro:

como f es un homomorfismo de anillos con unidad $f(1) = 1 \implies 1 \in F$ y así $F \neq \emptyset$.

i. Si $a, b \in F$, $f(a) = 1 = f(b)$. Luego $f(ab) = f(a)f(b) = 1 \cdot 1 = 1$, entonces $ab \in F$.

ii. Si $a \in F$, $b \in A$ y $a \leq b$ entonces $ab = a$, por lo tanto:

$$1 = f(a) = f(ab) = f(a)f(b) = 1 \cdot f(b) = f(b), \text{ luego } b \in F.$$

De esta manera verificamos que el núcleo unífero de f es un filtro en el anillo A . ■

Pasemos ahora a estudiar los filtros maximales también llamados ultrafiltros.

Definición 3.1.3. Sea A un anillo de Boole y F un filtro de A con $F \neq A$. El filtro F se llama **ultrafiltro o filtro maximal** si no existe otro filtro G de A tal que $F \subsetneq G \subsetneq A$.

Definición 3.1.4. Sea A un anillo de Boole con unidad, $S \subseteq A$, diremos que S es **base de filtro** si $S \neq \emptyset$, $0 \notin S$ y para cualquier $x, y \in S$ existe $z \in S$ tal que $z \leq xy$.

Proposición 3.1.2. Si A es un anillo de Boole con unidad, $S \subseteq A$ y S es base de filtro entonces:

$$F_S =: \{x \in A \mid s \leq x \text{ para algún } s \in S\} \text{ es un filtro propio en } A.$$

Demostración.

Claramente $F_S \neq \emptyset$ pues $S \neq \emptyset$.

- i. Sean $x, y \in F_S$ entonces $s \leq x$ y $s' \leq y$ para algunos $s, s' \in S$ luego $ss' \leq xy$ (proposición 2.2.3). Como $s, s' \in S$, existe $z \in S$ tal que $z \leq ss' \leq xy$ luego $z \leq xy$ por lo tanto $xy \in F_S$.
- ii. Si $x \in F_S$ y $x \leq y$ entonces $s \leq x$ para algún $s \in S$ de modo que $s \leq x \leq y$ luego $s \leq y$ por lo tanto $y \in F_S$.

Entonces de *i*) y *ii*) F_S es un filtro. Además, si ocurriera que $0 \in F_S$ esto implicaría que $0 \in S$, lo cual no se tiene por la definición de base de filtro. Así F_S es un filtro propio en A . ■

En adelante siempre que usemos la palabra filtro asumiremos que se trata de un filtro propio. Ahora vamos a mostrar varias caracterizaciones de los ultrafiltros en anillos de Boole.

Proposición 3.1.3. *A un anillo de Boole con unidad, F un filtro en A . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) F es un ultrafiltro.*
- ii) $(\forall a \in A) (a \notin F \implies \exists f \in F \text{ tal que } af = 0)$.*
- iii) $(\forall a, b \in A) (a \vee b \in F \implies a \in F \text{ o } b \in F)$.*
- iv) $(\forall a, b \in A) (a \in F \implies b \in F \text{ o } a + ab \in F)$.*
- v) $(\forall a \in A) (a \in F \text{ o } 1 + a \in F)$.*
- vi) $(\forall a \in A) (a \in F \text{ o } (\forall b \in F)(b + ab \in F))$.*
- vii) a) $ab \in F \implies a \in F \text{ y } b \in F$, y*
b) $a + b \in F \implies a \in F \text{ o } b \in F$.

Demostración.

- (i) \longrightarrow (ii). Sea $a \in A$ con $a \notin F$. Supongamos que $\forall f \in F, af \neq 0$. Entonces $\{af \mid f \in F\} = S$ es base de filtro pues $0 \notin S$ y si $af, af_1 \in S$ entonces $(af)(af_1) = aff_1 \in S$. Tendríamos entonces que: $F \subsetneq \langle \{af \mid f \in F\} \rangle \subsetneq A$ (si $f \in F$ entonces $(af)f = af$ luego $af \leq f$ por lo tanto $f \in \langle \{af \mid f \in F\} \rangle$; además $a \in \langle \{af \mid f \in F\} \rangle$ pues $a1 = a \leq a$, pero $a \notin F$). Llegaríamos así a contradecir que F es un ultrafiltro.
- (ii) \longrightarrow (iii). Supongamos que $a \vee b \in F, a \notin F$ y $b \notin F$. Por hipótesis existen $f_1, f_2 \in F$ tales que $af_1 = bf_2 = 0$. Tendríamos $a \vee b \in F, f_1, f_2 \in F$ luego $(f_1f_2)(a \vee b) \in F$ entonces $(f_1f_2a) \vee (f_1f_2b) = (f_2af_1) \vee (f_1bf_2) = 0 \vee 0 = 0 \in F$, pero $0 \notin F$ por ser F un filtro, por lo tanto $a \in F$ o $b \in F$.
- (iii) \longrightarrow (iv). Sea $a \in F$, como $a(a + b + ab) = a$ es decir $a(a \vee b) = a$ por lo tanto $a \leq a \vee b$ y como F es filtro $a \vee b \in F$. Veamos que $a \vee b \leq b \vee (a + ab)$. Tenemos:

$$\begin{aligned} a + b + ab &\leq a + b + ab \\ a + b + ab &\leq b + a + ab + ab + ab \\ a + b + ab &\leq b + a + ab + b(a + ab) \end{aligned}$$

entonces (recuérdese la proposición 2.2.3, parte 5.) $a \vee b \leq b \vee (a + ab)$, puesto que $a \vee b \in F$ y F es filtro entonces $b \vee (a + ab) \in F$ y usando la hipótesis se concluye que $b \in F$ ó $a + ab \in F$.

- (iv) \longrightarrow (v). Dado $a \in A$, como $1 \in F$ entonces usando la hipótesis (con 1 y a) tenemos que $1 \in F$, luego $a \in F$ o $1 + 1a = 1 + a \in F$.
- (v) \longrightarrow (vi). Sea $a \in A$, si $a \notin F$ veamos que $(\forall b \in F)(b + ab \in F)$. Si $b \in F$, como $a \notin F$ entonces por hipótesis $1 + a \in F$ por lo tanto $b(1 + a) = b + ab \in F$.
- (vi) \longrightarrow (vii).
 - a) Si $ab \in F$ y si fuera $a \notin F$, luego por hipótesis $b + ab \in F$ entonces $ab(b + ab) = ab + ab = 0 \in F$, pero $0 \notin F$ por ser F un filtro, por lo tanto $a \in F$. Análogamente se prueba que $b \in F$.
 - b) Si $a + b \in F$ y $a \notin F$ veamos que $b \in F$. Como $a \notin F$ se tiene por hipótesis que $b + ab \in F$. Como $b + ab \leq b$ (pues $b(b + ab) = b + ab$) entonces $b \in F$.

- (vii) \longrightarrow (i). Supongamos que F no es ultrafiltro, entonces existe G filtro tal que $F \subsetneq G$. Sea $g \in G - F$, tenemos $g + (1 + g) = 1 \in F$, usando (b) y como $g \notin F$ entonces $1 + g \in F$; ya que $F \subsetneq G$, se tiene que $1 + g \in G$, por lo que se tendría: $g(1 + g) = g + g = 0 \in G$, pero $0 \notin G$ pues G es un filtro, por lo tanto F es un ultrafiltro. ■

Ejemplo 3.1.5. X conjunto y $A = P(X)$ el anillo de partes de X . Sea $a \in X$; entonces $\mathfrak{F}_a = \{S \subseteq X \mid a \in S\}$ es un ultrafiltro en A .

Obsérvese que usando la notación del ejemplo 3.1.2, tendríamos:

$\forall(\{a\}) = \{S \in P(X) \mid \{a\} \subseteq S\} = \{S \subseteq X \mid a \in S\} = \mathfrak{F}_a$, luego \mathfrak{F}_a es un filtro.

Para ver que es ultrafiltro usamos la proposición 3.1.3, (iii): si $S, T \in A$ y $S \cup T \in \mathfrak{F}_a$ entonces $a \in S \cup T \implies a \in S$, o, $a \in T \implies S \in \mathfrak{F}_a$, o, $T \in \mathfrak{F}_a$.

Definición 3.1.5. El ultrafiltro \mathfrak{F}_a definido en el ejemplo anterior se llama **ultrafiltro principal generado** por a .

En la siguiente proposición se establece una caracterización de los ultrafiltros no principales de un anillo de partes.

Proposición 3.1.4. X conjunto, $A = P(X)$, \mathcal{U} un ultrafiltro en A .

Entonces \mathcal{U} **no** es principal si y solo si para todo $\mathfrak{F} \in \mathcal{U}$, \mathfrak{F} es infinito.

Demostración.

\implies) Si \mathcal{U} no es principal y $\mathfrak{F} \in \mathcal{U}$, supongamos que \mathfrak{F} es finito, digamos $\mathfrak{F} = \{x_1, x_2, \dots, x_p\} = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_p\}$, lo cual usando varias veces la proposición 3.1.3 (iii), implica que $\{x_i\} \in \mathcal{U}$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, p\}$; pero esto a su vez implica que $\mathcal{U} = \mathfrak{F}_{x_i}$ (en efecto: si $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$, como $\{x_i\} \in \mathcal{U} \implies \mathcal{V} \cap \{x_i\} \in \mathcal{U} \implies \mathcal{V} \cap \{x_i\} \neq \emptyset \implies x_i \in \mathcal{V} \implies \mathcal{V} \in \mathfrak{F}_{x_i}$. Recíprocamente, si $\mathcal{V} \in \mathfrak{F}_{x_i} \implies x_i \in \mathcal{V} \implies \{x_i\} \subseteq \mathcal{V}$ y como $\{x_i\} \in \mathcal{U} \implies \mathcal{V} \in \mathcal{U}$) lo que contradice que \mathcal{U} no es principal.

\impliedby) Si \mathcal{U} fuese principal, $\mathcal{U} = \mathfrak{F}_a$ para algún $a \in X \implies \{a\} \in \mathcal{U}$ lo que claramente contradice la hipótesis. ■

Corolario 3.1.1. X conjunto, $A = P(X)$, \mathcal{U} ultrafiltro en A . Si existe $\mathfrak{F} \in \mathcal{U}$ tal que \mathfrak{F} es finito, entonces \mathcal{U} es principal.

Demostración.

Es inmediata por la proposición anterior. ■

Ejemplo 3.1.6. Sea A un anillo de Boole. Sea $A_1 = A \times \mathbb{Z}_2$ dotado de las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}(a, u) + (b, w) &= (a + b, u + w) \\ (a, u) \cdot (b, w) &= (ab + wa + ub, uw)\end{aligned}$$

Veamos que A_1 es un anillo de Boole con unidad.

Demostración.

1. $(A_1, +)$ es un grupo abeliano.

a. La operación es asociativa.

Sean $(a, b), (c, d), (e, f) \in A_1$ luego

$$\begin{aligned}[(a, b) + (c, d)] + (e, f) &= (a + c, b + d) + (e, f), \\ &= (a + c + e, b + d + f), \\ &= (a, b) + (c + e, d + f), \\ &= (a, b) + [(c, d) + (e, f)].\end{aligned}$$

b. $+$ es conmutativa.

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d), \\ &= (c + a, d + b), \\ &= (c, d) + (a, b).\end{aligned}$$

c. $(0, 0)$ es el elemento identidad, pues para $(a, b) \in A_1$ se tiene:

$$(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b).$$

d. Si $(a, b) \in A_1$ entonces (a, b) es su elemento inverso.

$$(a, b) + (a, b) = (a + a, b + b)$$

Como $a \in A$ (anillo de Boole), se tiene $a + a = 0$ y por ser $b \in \mathbb{Z}_2$, $b = \bar{1}$ o $b = \bar{0}$, luego si $b = \bar{1}$, $b + b = \bar{2} = \bar{0}$ y si $b = \bar{0}$, $b + b = \bar{0}$.

Por lo tanto $(a, b) + (a, b) = (a + a, b + b) = (0, 0)$.

2. El producto es asociativo.

$$\begin{aligned}
[(a, b)(c, d)](e, f) &= (ac + da + bc, bd)(e, f), \\
&= ((ac + da + bc)e + f(ac + da + bc) + bde, bdf), \\
&= (ace + dae + bce + fac + fda + fbc + bde, bdf), \\
&= (ace + afc + ade + dfa + bce + bfc + bde, bdf), \\
&= (a(ce + fc + de) + dfa + b(ce + fc + de), bdf), \\
&= (a, b)(ce + fc + de, df), \\
&= (a, b)[(c, d)(e, f)].
\end{aligned}$$

3. Se cumplen las propiedades distributivas.

i.

$$\begin{aligned}
(a, b)[(c, d) + (e, f)] &= (a, b)(c + e, d + f), \\
&= (a(c + e) + (d + f)a + b(c + e), b(d + f)), \\
&= (ac + ae + da + fa + bc + be, bd + bf), \\
&= (ac + da + bc + ae + fa + be, bd + bf), \\
&= (ac + da + bc, bd) + (ae + fa + be, bf), \\
&= (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f).
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
[(c, d) + (e, f)](a, b) &= (c + e, d + f)(a, b), \\
&= ((c + e)(a) + b(c + e) + (d + f)a, (d + f)b), \\
&= (ca + ea + bc + be + da + fa, db + fb), \\
&= (ca + bc + da + ea + be + fa, db + fb), \\
&= (ca + bc + da, db) + (ea + be + fa, fb), \\
&= (c, d)(a, b) + (e, f)(a, b).
\end{aligned}$$

4. Se cumple la propiedad de idempotencia ya que:

$$(a, b)(a, b) = (aa + ba + ba, bb) = (a + ba + ba, b) = (a + 0, b) = (a, b).$$

5. El elemento unidad es $(0, 1)$ ya que para todo $(a, b) \in A_1$:

$$(a, b)(0, 1) = (a0 + 1a + b0, b1) = (0 + a + 0, b) = (a, b) \text{ y}$$

$$(0, 1)(a, b) = (0a + b0 + 1a, 1b) = (0 + 0 + a, b) = (a, b)$$

Luego de 1, 2, 3, 4, 5 se tiene que A_1 es un anillo de Boole con unidad. ■

Además el conjunto $A \times \{1\}$ es un filtro maximal.

Demostración.

a. $A \times \{1\}$ es un filtro.

$A \times \{1\} \neq \emptyset$ pues por ejemplo $(0, 1) \in A \times \{1\}$.

i. Sean $(a, 1), (b, 1) \in A \times \{1\}$ entonces:

$$(a, 1)(b, 1) = (ab + 1a + 1b, 1.1) = (ab + a + b, 1) \in A \times \{1\}.$$

ii. Sea $(a, 1) \in A \times \{1\}$, $(b, c) \in A_1$ y $(a, 1) \leq (b, c)$, por lo tanto:

$$(a, 1)(b, c) = (ab + ca + 1b, 1c) = (a, 1) \implies 1c = 1, \text{ luego } (b, c) \in A \times \{1\} \text{ ya que } c = 1.$$

b. Usaremos la Proposición 3.1.3 (vii), para demostrar que $A \times \{1\}$ es un filtro maximal.

i. Tomemos $(a, b)(c, d) = (ac + da + bc, bd) \in A \times \{1\}$, lo que quiere decir que $bd = 1$, como $b, d \in \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, se tiene que $b = \bar{1} = d$, por lo tanto (a, b) y (c, d) pertenecen a $A \times \{1\}$.

ii. Si $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in A \times \{1\}$ se debe tener que:

$$b + d = 1 \text{ luego se tienen las siguientes posibilidades } b = \bar{1} \text{ y } d = \bar{0} \text{ o } b = \bar{0} \text{ y } d = \bar{1}, \text{ por lo tanto } (a, b) \in A \times \{1\} \text{ o } (c, d) \in A \times \{1\}. \quad \blacksquare$$

3.2. Definición de Espectro

Presentaremos ahora el espectro de un anillo de Boole, como una generalización natural del conjunto de átomos del anillo.

El homomorfismo $At : A \longrightarrow P(AT(A))$, presentado en el capítulo 2 puede generalizarse de la siguiente manera:

$D : A \longrightarrow P(FM) : a \longrightarrow D(a) =: \{F \mid F \text{ es un ultrafiltro de } A \text{ y } a \in F\}$, donde FM es el conjunto de los ultrafiltros de A .

Proposición 3.2.1. $\{D(a) \mid a \in A\}$ es una base para alguna topología en FM .

Demostración.

$$i) \bigcup_{a \in A} D(a) = \bigcup_{a \in A} \{F \mid F \text{ es ultrafiltro de } A \text{ y } a \in F\} = FM.$$

ii) Sean $D(b), D(c) \in \{D(a) \mid a \in A\}$, y $x \in D(b) \cap D(c)$, tenemos:

$$\begin{aligned} D(b) \cap D(c) &= \{F \mid F \text{ es ultrafiltro de } A \text{ y } b \in F\} \\ &\quad \cap \{F \mid F \text{ es ultrafiltro de } A \text{ y } c \in F\}, \\ &= \{F \mid F \text{ es ultrafiltro de } A \text{ y } b, c \in F\}, \\ &= \{F \mid F \text{ es ultrafiltro de } A \text{ y } b.c \in F\}, \\ &= D(b.c) \in \{D(a) \mid a \in A\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $x \in D(b.c) \subseteq D(b) \cap D(c)$.

Luego de *i)* y *ii)* $\{D(a) \mid a \in A\}$ es una base para alguna topología en FM . ■

Definición 3.2.1. Sea A un anillo de Boole, se llama **espectro de A** y se nota $Spec(A)$, al conjunto de los ultrafiltros de A dotado de la topología cuyos abiertos básicos son los conjuntos de la forma $D(a)$ con $a \in A$, es decir de la topología $\langle \{D(a) \mid a \in A\} \rangle$ (véase 1.21 de Preliminares).

Proposición 3.2.2. X conjunto finito, $A = P(X)$, en este caso $\mathcal{U} \in Spec(A) \iff \mathcal{U}$ es ultrafiltro principal, y hay tantos elementos en $Spec(A)$ como elementos en X .

Demostración.

Si $\mathcal{U} \in Spec(A)$, dado que X es finito es claro que para todo $\mathfrak{F} \in \mathcal{U}$, \mathfrak{F} es finito, entonces por el corolario 3.1.1, se tiene que \mathcal{U} es ultrafiltro principal. La implicación recíproca es inmediata. Por otra parte, es fácil ver $\mathfrak{F}_x = \mathfrak{F}_y$ si y solo si $x = y$, de donde la función $\varphi : X \longrightarrow Spec(A)$ definida por $\varphi(x) =: \mathfrak{F}_x, \forall x \in X$, es una biyección. ■

Ejemplo 3.2.1. $X = \{a, b, c\}$, $A = P(X) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. La proposición anterior nos permite deducir que $Spec(A) = \{\mathfrak{F}_a, \mathfrak{F}_b, \mathfrak{F}_c\}$, siendo $\mathfrak{F}_a = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$, $\mathfrak{F}_b = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$, y $\mathfrak{F}_c = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$.

Los abiertos básicos de la topología del espectro, en este caso serían:

$$\begin{aligned}
D(\emptyset) &= \{\mathcal{U} \in \text{Spec}(A) \mid \emptyset \in \mathcal{U}\} = \emptyset. \\
D(\{a\}) &= \{\mathcal{U} \in \text{Spec}(A) \mid \{a\} \in \mathcal{U}\} = \{\mathfrak{F}_a\}. \\
D(\{b\}) &= \{\mathcal{U} \in \text{Spec}(A) \mid \{b\} \in \mathcal{U}\} = \{\mathfrak{F}_b\}. \\
D(\{c\}) &= \{\mathcal{U} \in \text{Spec}(A) \mid \{c\} \in \mathcal{U}\} = \{\mathfrak{F}_c\}. \\
D(\{a, b\}) &= \{\mathcal{U} \in \text{Spec}(A) \mid \{a, b\} \in \mathcal{U}\} = \{\mathfrak{F}_a, \mathfrak{F}_b\}. \\
D(\{b, c\}) &= \{\mathcal{U} \in \text{Spec}(A) \mid \{b, c\} \in \mathcal{U}\} = \{\mathfrak{F}_b, \mathfrak{F}_c\}. \\
D(\{a, c\}) &= \{\mathcal{U} \in \text{Spec}(A) \mid \{a, c\} \in \mathcal{U}\} = \{\mathfrak{F}_a, \mathfrak{F}_c\}. \\
D(\{a, b, c\}) &= \{\mathcal{U} \in \text{Spec}(A) \mid \{a, b, c\} \in \mathcal{U}\} = \{\mathfrak{F}_a, \mathfrak{F}_b, \mathfrak{F}_c\}.
\end{aligned}$$

Como cada conjunto unitario es abierto, entonces la topología del espectro de A , será la discreta.

Una propiedad importante de los anillos de Boole finitos se presenta a continuación:

Proposición 3.2.3. *Sea A un anillo de Boole con unidad. Si A es finito entonces $\mathfrak{F} \in \text{Spec}(A)$ si y solo si $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_a$ para algún $a \in AT(A)$ donde $\mathfrak{F}_a = \{x \in A \mid a \leq x\}$.*

Demostración.

Como A es un anillo de Boole con unidad y finito por el corolario 2.4.2 se tiene que A es un anillo de partes, digamos $A \approx P(X)$ para cierto conjunto finito X . Basta entonces aplicar la Proposición 3.2.2 ■

CAPÍTULO 4

ANILLOS DE BOOLE Y RELACIONES DE LIGAZÓN

En [10] se muestra que si los anillos de Boole con unidad se enriquecen con una relación que cumple ciertas propiedades (relación de ligazón), entonces se obtienen unas estructuras algebraicas importantes; ellas permiten por ejemplo obtener una generalización de un famoso teorema llamado teorema de representación de Stone, lo cual no estudiaremos aquí por estar fuera del alcance de este trabajo. Se mostrará sin embargo en la última sección de este capítulo, una bonita aplicación de los anillos de Boole con relación de ligazón.

4.1. Definiciones y Ejemplos

Antes de definir los anillos de Boole con relación de ligazón, que son el objeto principal de estudio de este trabajo, damos una definición previa, en la cual se establecen dos formas de “elevar” una relación en un conjunto X , al conjunto potencia o hiperconjunto $P(X)$.

Definición 4.1.1. Dados X un conjunto y α una relación en X , se definen en $P(X)$ las relaciones R_α y R^α por: dados C y D subconjuntos X ,

$$\begin{aligned} CR_\alpha D &\iff (\exists x \in C)(\exists y \in D)(x\alpha y) \\ CR^\alpha D &\iff (\forall x)(\forall y)(x \in C, y \in D \implies x\alpha y). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.1. Sean $X = \{a, b, c\}$, $\alpha_1 = \{(a, a)\}$, $\alpha_2 = \{(a, b), (b, a)\}$, $\alpha_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$, $\alpha_4 = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$, $\alpha_5 = \{(a, b), (a, c)\}$, $\alpha_6 = X \times X$ entonces:

$$\begin{aligned} R_{\alpha_1} = & \{(X, X), (X, \{a\}), (X, \{a, b\}), (X, \{a, c\}), (\{a\}, X), (\{a\}, \{a\}), (\{a\}, \{a, b\}), \\ & (\{a\}, \{a, c\}), (\{a, b\}, X), (\{a, b\}, \{a\}), (\{a, b\}, \{a, b\}), (\{a, b\}, \{a, c\}), \\ & (\{a, c\}, X), (\{a, c\}, \{a\}), (\{a, c\}, \{a, b\}), (\{a, c\}, \{a, c\})\}. \end{aligned}$$

$$R^{\alpha_1} = \{(\emptyset, A), (A, \emptyset) \mid A \in P(X)\} \cup \{(\{a\}, \{a\})\}.$$

$$\begin{aligned} R_{\alpha_2} = & \{(X, X), (X, \{a\}), (X, \{b\}), (X, \{a, b\}), (X, \{a, c\}), (X, \{b, c\}), (\{a\}, X), \\ & (\{a\}, \{b\}), (\{a\}, \{a, b\}), (\{a\}, \{b, c\}), (\{b\}, X), (\{b\}, \{a\}), (\{b\}, \{a, b\}), \\ & (\{b\}, \{a, c\}), (\{a, b\}, X), (\{a, b\}, \{a\}), (\{a, b\}, \{b\}), (\{a, b\}, \{a, b\}), \\ & (\{a, b\}, \{a, c\}), (\{a, b\}, \{b, c\}), (\{a, c\}, X), (\{a, c\}, \{b\}), (\{a, c\}, \{a, b\}), \\ & (\{a, c\}, \{b, c\}), (\{b, c\}, X), (\{b, c\}, \{a\}), (\{b, c\}, \{a, b\}), (\{b, c\}, \{a, c\})\}. \end{aligned}$$

$$R^{\alpha_2} = \{(\emptyset, A), (A, \emptyset) \mid A \in P(X)\} \cup \{(\{a\}, \{b\}), (\{b\}, \{a\})\}.$$

$$\begin{aligned} R_{\alpha_3} = & \{(X, X), (X, \{a\}), (X, \{b\}), (X, \{c\}), (X, \{a, b\}), (X, \{a, c\}), (X, \{b, c\}), \\ & (\{a\}, X), (\{a\}, \{a\}), (\{a\}, \{a, b\}), (\{a\}, \{a, c\}), (\{b\}, X), (\{b\}, \{b\}), \\ & (\{b\}, \{a, b\}), (\{b\}, \{b, c\}), (\{c\}, X), (\{c\}, \{c\}), (\{c\}, \{a, c\}), (\{c\}, \{b, c\}), \\ & (\{a, b\}, X), (\{a, b\}, \{a\}), (\{a, b\}, \{b\}), (\{a, b\}, \{a, b\}), (\{a, b\}, \{a, c\}), \\ & (\{a, b\}, \{b, c\}), (\{a, c\}, X), (\{a, c\}, \{a\}), (\{a, c\}, \{c\}), (\{a, c\}, \{a, b\}), \\ & (\{a, c\}, \{a, c\}), (\{a, c\}, \{b, c\}), (\{b, c\}, X), (\{b, c\}, \{b\}), (\{b, c\}, \{c\}), \\ & (\{b, c\}, \{a, b\}), (\{b, c\}, \{a, c\}), (\{b, c\}, \{b, c\})\}. \end{aligned}$$

$$R^{\alpha_3} = \{(\emptyset, A), (A, \emptyset) \mid A \in P(X)\} \cup \{(\{a\}, \{a\}), (\{b\}, \{b\}), (\{c\}, \{c\})\}.$$

$$\begin{aligned}
R_{\alpha_4} = & \{(X, X), (X, \{b\}), (X, \{c\}), (X, \{a, b\}), (X, \{a, c\}), (X, \{b, c\}), (\{a\}, X), \\
& (\{a\}, \{b\}), (\{a\}, \{c\}), (\{a\}, \{a, b\}), (\{a\}, \{a, c\}), (\{a\}, \{b, c\}), (\{b\}, X), \\
& (\{b\}, \{c\}), (\{b\}, \{a, c\}), (\{b\}, \{b, c\}), (\{a, b\}, X), (\{a, b\}, \{b\}), (\{a, b\}, \{c\}), \\
& (\{a, b\}, \{a, b\}), (\{a, b\}, \{a, c\}), (\{a, b\}, \{b, c\}), (\{a, c\}, X), (\{a, c\}, \{b\}), \\
& (\{a, c\}, \{c\}), (\{a, c\}, \{a, b\}), (\{a, c\}, \{a, c\}), (\{a, c\}, \{b, c\}), (\{b, c\}, X), \\
& (\{b, c\}, \{c\}), (\{b, c\}, \{a, c\}), (\{b, c\}, \{b, c\})\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^{\alpha_4} = & \{(\emptyset, A), (A, \emptyset) \mid A \in P(X)\} \cup \{(\{a\}, \{b\}), (\{a\}, \{c\}), (\{a\}, \{b, c\}), \\
& (\{b\}, \{c\}), (\{a, b\}, \{c\})\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\alpha_5} = & \{(X, X), (X, \{b\}), (X, \{c\}), (X, \{a, b\}), (X, \{a, c\}), (X, \{b, c\}), (\{a\}, X), \\
& (\{a\}, \{b\}), (\{a\}, \{c\}), (\{a\}, \{a, b\}), (\{a\}, \{a, c\}), (\{a\}, \{b, c\}), (\{a, b\}, X), \\
& (\{a, b\}, \{b\}), (\{a, b\}, \{c\}), (\{a, b\}, \{a, b\}), (\{a, b\}, \{a, c\}), (\{a, b\}, \{b, c\}), \\
& (\{a, c\}, X), (\{a, c\}, \{b\}), (\{a, c\}, \{c\}), (\{a, c\}, \{a, b\}), \\
& (\{a, c\}, \{a, c\}), (\{a, c\}, \{b, c\})\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^{\alpha_5} = & \{(\emptyset, A), (A, \emptyset) \mid A \in P(X)\} \cup \{(\{a\}, \{b\}), (\{a\}, \{c\}), (\{a\}, \{b, c\})\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\alpha_6} = & \{(X, X), (X, \{a\}), (X, \{b\}), (X, \{c\}), (X, \{a, b\}), (X, \{a, c\}), (X, \{b, c\}), \\
& (\{a\}, X), (\{a\}, \{a\}), (\{a\}, \{b\}), (\{a\}, \{c\}), (\{a\}, \{a, b\}), (\{a\}, \{a, c\}), \\
& (\{a\}, \{b, c\}), (\{b\}, X), (\{b\}, \{a\}), (\{b\}, \{b\}), (\{b\}, \{c\}), (\{b\}, \{a, b\}), \\
& (\{b\}, \{a, c\}), (\{b\}, \{b, c\}), (\{c\}, X), (\{c\}, \{a\}), (\{c\}, \{b\}), (\{c\}, \{c\}), \\
& (\{c\}, \{a, b\}), (\{c\}, \{a, c\}), (\{c\}, \{b, c\}), (\{a, b\}, X), (\{a, b\}, \{a\}), \\
& (\{a, b\}, \{b\}), (\{a, b\}, \{c\}), (\{a, b\}, \{a, b\}), (\{a, b\}, \{a, c\}), (\{a, b\}, \{b, c\}), \\
& (\{a, c\}, X), (\{a, c\}, \{a\}), (\{a, c\}, \{b\}), (\{a, c\}, \{c\}), (\{a, c\}, \{a, b\}), \\
& (\{a, c\}, \{a, c\}), (\{a, c\}, \{b, c\}), (\{b, c\}, X), (\{b, c\}, \{a\}), (\{b, c\}, \{b\}), \\
& (\{b, c\}, \{c\}), (\{b, c\}, \{a, b\}), (\{b, c\}, \{a, c\}), (\{b, c\}, \{b, c\})\} \\
= & \{(A, B) \mid A, B \in P(X) - \{\emptyset\}\} = (P(X) - \{\emptyset\}) \times (P(X) - \{\emptyset\}).
\end{aligned}$$

$$R^{\alpha_6} = R_{\alpha_6} = \{(A, B) \mid A, B \in P(X) - \{\emptyset\}\}.$$

Ejemplo 4.1.2. En \mathbb{N} consideremos la relación $\mid : m \mid n$ si y solo si m divide a n . Entonces por ejemplo: $\{1\}R_{\mid}A$ para todo $A \in P(X) - \{\emptyset\}$ y $\{1\}R^{\mid}A$ para todo $A \in P(X)$, $\{2, 7, 8\} R_{\mid}\{10, 7, 5\}$ pero $\neg(\{2, 7, 8\} R^{\mid}\{10, 7, 5\})$, $\{4, 16, 32\} R_{\mid}\{8, 20, 30\}$ pero $\neg(\{4, 16, 32\} R^{\mid}\{8, 20, 30\})$, $\{1, 3, 8\} R_{\mid}\{5, 15, 9\}$ pero $\neg(\{1, 3, 8\} R^{\mid}\{5, 15, 9\})$.

En la siguiente proposición se muestran algunas propiedades de las relaciones R_{α} y R^{α} .

Proposición 4.1.1. X conjunto y α relación en X . Entonces:

- i) Si $C, D \in P(X) - \{\emptyset\}$ y $CR^{\alpha}D$ entonces $CR_{\alpha}D$.
- ii) $(R^{\alpha})' = R_{\alpha'}$.
- iii) $\emptyset R^{\alpha}A$ y $AR^{\alpha}\emptyset$ para todo $A \in P(X)$.
- iv) $\neg(\emptyset R_{\alpha}A)$ y $\neg(AR_{\alpha}\emptyset)$ para todo $A \in P(X)$.

Demostración.

- i) Como $C \neq \emptyset$ y $D \neq \emptyset$, sean $x \in C$ y $y \in D$, como $CR^{\alpha}D$ se tiene que $x\alpha y$, luego $CR_{\alpha}D$.
- ii) En efecto:

$$\begin{aligned} C(R^{\alpha})'D &\iff \neg(CR^{\alpha}D), \\ &\iff (\exists x \in C)(\exists y \in D)(\neg(x\alpha y)), \\ &\iff (\exists x \in C)(\exists y \in D)(x\alpha'y), \\ &\iff CR_{\alpha'}D. \end{aligned}$$

- iii) Supongamos que $\exists A \in P(X)$ tal que $\neg(\emptyset R^{\alpha}A)$ o $\neg(AR^{\alpha}\emptyset)$, entonces $(\exists x \in \emptyset$ y $\exists y \in A$ tal que $\neg(x\alpha y))$ o $(\exists z \in A$ y $\exists w \in \emptyset$ tal que $\neg(z\alpha w))$, en cualquiera de los dos casos se tiene una contradicción pues \emptyset no tiene elementos por lo tanto $\emptyset R^{\alpha}A$ y $AR^{\alpha}\emptyset$ para todo $A \in P(X)$.

iv) Supongamos que $\exists A \in P(X)$ tal que $\emptyset R_\alpha A$ o $AR_\alpha \emptyset$, entonces ($\exists x \in \emptyset$ y $\exists y \in A$ tal que $x\alpha y$) o ($\exists z \in A$ y $\exists w \in \emptyset$ tal que $z\alpha w$), en cualquiera de los dos casos se tiene una contradicción pues \emptyset no tiene elementos por lo tanto $\neg(\emptyset R_\alpha A)$ y $\neg(AR_\alpha \emptyset)$ para todo $A \in P(X)$. ■

Definición 4.1.2. Sean A un anillo de Boole con 1 y α una relación en $A - \{0\}$ que satisfice:

L1: $(\forall a, b, c, d \in A)(cad, c \leq a, d \leq b \implies aab)$;

L2: $(\forall a, b, c \in A)(a \alpha b \vee c \implies a \alpha b, o, a \alpha c)$;

L3: α es simétrica ;

L4: α es reflexiva ;

L5: R^α es transitiva en $Spec(A)$,

entonces diremos que α es una **relación de ligazón** en A .

Nota 4.1.1. R^α es una relación en $P(A)$, puesto que $Spec(A) \subseteq P(A)$, podemos considerar R^α restringida a $Spec(A)$.

Proposición 4.1.2. La condición (**L2**) de la definición anterior se puede cambiar por:

L2': $(\forall a, b, c, d \in A)(c \vee d \alpha a \vee b \implies (c \alpha a) o (c \alpha b) o (d \alpha a) o (d \alpha b))$.

Más exactamente: (**L2'**) implica (**L2**) y (**L2**) junto con (**L3**) implican (**L2'**)

Demostración.

■ **L2' \implies L2.**

Sean $a, b, c \in A$, tales que $a \alpha b \vee c$, como $a \vee 0 = a$ se tiene que $(a \vee 0) \alpha (b \vee c)$, luego por hipótesis se tiene que $(aab) \vee (aac) \vee (0ab) \vee (0ac)$, pero como α es una relación en $A - \{0\}$, $\neg(0ab)$ y $\neg(0ac)$ por lo tanto $(aab) \vee (aac)$.

■ **L2 \wedge L3 \implies L2'.**

Sean $a, b, c, d \in A$ con $(c \vee d) \alpha (a \vee b)$, como α es simétrica se tiene que $(a \vee b) \alpha (c \vee d)$, luego por (**L2**) se tiene que $(a \vee b \alpha c)$, o, $(a \vee b \alpha d)$, aplicando nuevamente que α es simétrica se tiene que $(c \alpha a \vee b)$, o, $(d \alpha a \vee b)$ entonces por (**L2**) (caa) o (cab) o (dca) o (dcb) . ■

Ejemplo 4.1.3. Sea A un anillo de Boole con unidad y sea $\alpha_A = \{(c, d) \mid cd \neq 0\}$.

Veamos que α_A es una relación de ligazón en A .

En primer lugar obsérvese que α_A es una relación en $A - \{0\}$ pues ya que $0c = 0 = c0$ $\forall c \in A$, entonces $\neg(0 \alpha_A c)$ y $\neg(c \alpha_A 0) \quad \forall c \in A$.

L1 Sean $c, d \in A$ tal que $(c, d) \in \alpha_A$, además $c \leq a$ y $d \leq b$ entonces $cd \leq ab$ y $cd \neq 0$, luego $ab \neq 0$, por lo tanto $(a, b) \in \alpha_A$.

L2 Sean $a, b, c \in A$ y $(c, a \vee b) \in \alpha_A$, es decir $(c, a + b + ab) \in \alpha_A$ por lo tanto $c(a + b + ab) = ca + cb + cab \neq 0$. Si $ca \neq 0$ entonces $(c, a) \in \alpha_A$. Si $ca = 0$ entonces $ca + cb + cab = cb \neq 0$ luego $(c, b) \in \alpha_A$.

L3 α_A es simétrica:

Sean $a, b \in A$, si $(a, b) \in \alpha_A$ se tiene que $ab \neq 0$ y como $ba = ab \neq 0$ entonces $(b, a) \in \alpha_A$.

L4 α_A es reflexiva:

Sea $a \in A - \{0\}$, luego $aa = a \neq 0$, por lo tanto $(a, a) \in \alpha_A$.

L5 Veamos $UR^{\alpha_A}G \iff U = G, \forall U, G \in Spec(A)$. (así la relación R^{α_A} restringida a $Spec(A)$ será simplemente la relación de igualdad, que claramente es transitiva).

\implies) Sean $U, G \in Spec(A)$, por hipótesis se tiene que $\forall u \in U$ y $\forall g \in G$, $u\alpha_A g$ entonces $ug \neq 0$. Sea $B =: \{ug \mid u \in U \text{ y } g \in G\}$, B es una base de filtro. En efecto:

i) $B \neq \emptyset$ pues $U \neq \emptyset$ y $G \neq \emptyset$. Como $ug \neq 0 \forall u \in U$ y $\forall g \in G$ entonces $0 \notin B$.

ii) Dados $ug, u'g' \in B$ ($u, u' \in U$ y $g, g' \in G$), tenemos: $(ug)(u'g') = (uu')(gg') \in B$, ya que $uu' \in U$ y $gg' \in G$.

Por lo tanto según la proposición 3.1.2:

$F_B =: \{x \in A \mid ug \leq x, \text{ para algún } u \in U \text{ y algún } g \in G\}$ es un filtro. Como puede verse $U \subseteq F_B, G \subseteq F_B$ y $F_B \neq A$ (si $F_B = A, 0 \in F_B$ y $ug \leq 0$, para algún u, g que pertenecen a U y G respectivamente, luego $ug = 0$, pero $ug \neq 0$, entonces $F_B \neq A$), por lo tanto utilizando la definición 3.1.3, $U = F_B = G$.

\impliedby) Sean $u \in U, g \in G$, como $U = G$ se tiene que $g \in U$, entonces $ug \in U$ (U, G ultrafiltros), luego $ug \neq 0$, es decir $u\alpha_A g$ y como u, g son elementos cualesquiera de U y G respectivamente, se tiene que $UR^{\alpha_A}G$.

Ejemplo 4.1.4. Sea A un anillo de Boole con unidad, $\alpha^A = (A - \{0\}) \times (A - \{0\})$ es una relación de ligazón en $A - \{0\}$.

En efecto: en primer lugar es claro que α^A es una relación en $A - \{0\}$.

L1 Sean $c, d \in A$ tal que $(c, d) \in \alpha^A$, con $c \leq a$ y $d \leq b$. Como $c \leq a$ y $c \in A - \{0\}$ entonces $a \in A - \{0\}$. Análogamente como $d \leq b$ y $d \in A - \{0\}$ entonces $b \in A - \{0\}$, así $(a, b) \in (A - \{0\}) \times (A - \{0\}) = \alpha^A$.

L2 Sean $a, b, c \in A$ y $(c, a \vee b) \in \alpha^A$, por lo tanto $(c, a + b + ab) \in \alpha^A$ entonces $c \in A - \{0\}$ y $a + b + ab \in A - \{0\}$, lo que quiere decir que $a + b + ab \neq 0$, luego $a \neq 0$ o $b \neq 0$ (pues si fuera $a = 0$ y $b = 0$ entonces $a + b + ab = 0$), con lo cual $a \in A - \{0\}$ o $b \in A - \{0\}$, de donde se tiene que $(c, a) \in \alpha^A$ o $(c, b) \in \alpha^A$.

L3 α^A es simétrica:

Si $(a, b) \in \alpha^A$, se tiene que $a \neq 0$ y $b \neq 0$, luego $(b, a) \in \alpha^A$.

L4 α^A es reflexiva:

Para todo $a \in A - \{0\}$, es claro que $(a, a) \in \alpha^A$.

L5 Sean $C, D, E \in \text{Spec}(A)$, tales que $CR^{\alpha^A}D$ y $DR^{\alpha^A}E$, sean $a \in C$, $b \in D$ y $c \in E$, por lo tanto $(a, b) \in \alpha^A$ y $(b, c) \in \alpha^A$ luego $a, b, c \in A - \{0\}$ entonces $(a, c) \in \alpha^A$, como a y c son elementos cualesquiera de C y E respectivamente, se tiene que $CR^{\alpha^A}E$.

Proposición 4.1.3. *Para todo A anillo de Boole con unidad las relaciones $\alpha_A = \{(c, d) \mid cd \neq 0\}$ y $\alpha^A = (A - \{0\}) \times (A - \{0\})$ son respectivamente la menor y la mayor relación de ligazón que se pueden definir en A , es decir α_A y α^A son relaciones de ligazón y para cualquier α relación de ligazón en A se tiene que $\alpha_A \subseteq \alpha \subseteq \alpha^A$.*

Demostración.

Ya se demostró que α_A y α^A son relaciones de ligazón en A .

Sea α una relación de ligazón en A , tal que $\alpha_A \neq \alpha \neq \alpha^A$; veamos que $\alpha_A \subseteq \alpha$: si $(a, b) \in \alpha_A$ se tiene que $ab \neq 0$. Como α es reflexiva en $A - \{0\}$, entonces $(ab, ab) \in \alpha$, pero $ab \leq a$ y $ab \leq b$ luego por (L1), aab es decir $(a, b) \in \alpha$, así $\alpha_A \subseteq \alpha$.

Ahora se debe ver que $\alpha \subseteq \alpha^A = (A - \{0\}) \times (A - \{0\})$ pero esto es inmediato porque α es una relación en $A - \{0\}$. ■

Ejemplo 4.1.5. Sean $\mathcal{A} = P(X)$ donde $X = \{a, b, c\}$ y

$$\alpha = \alpha_{\mathcal{A}} \cup \{ (\{a\}, \{b\}), (\{b\}, \{a\}), (\{a, c\}, \{b\}), (\{b\}, \{a, c\}), (\{b, c\}, \{a\}), (\{a\}, \{b, c\}) \}$$

donde $\alpha_{\mathcal{A}} = \{(C, D) \mid C \cap D \neq \emptyset\}$.

Veamos que α es una relación de ligazón en \mathcal{A} .

L1 Sea $(A, B) \in \alpha$ entonces $(A, B) \in \alpha_{\mathcal{A}}$ o $(A, B) \in \beta$ donde:

$$\beta = \{ (\{a\}, \{b\}), (\{b\}, \{a\}), (\{a, c\}, \{b\}), (\{b\}, \{a, c\}), (\{b, c\}, \{a\}), (\{a\}, \{b, c\}) \}.$$

Si $(A, B) \in \alpha_{\mathcal{A}}$ entonces $A \cap B \neq \emptyset$ y si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$ se tiene que $A \cap B \subseteq C \cap D$ luego $C \cap D \neq \emptyset$, por lo tanto $(C, D) \in \alpha_{\mathcal{A}}$ entonces $(C, D) \in \alpha$.

Si $(A, B) \in \beta$ hay seis casos posibles:

- 1) Si $(A, B) = (\{a\}, \{b\})$ y $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ entonces $C \in \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ y $D \in \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$ y para cualquier escogencia de C y D se puede verificar fácilmente que $(C, D) \in \alpha$.
- 2) Si $(A, B) = (\{b\}, \{a\})$ es análogo al caso anterior.
- 3) Si $(A, B) = (\{a, c\}, \{b\})$ y $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ entonces $C \in \{\{a, c\}, X\}$ y $D \in \{\{b\}, \{a, b\}, \{c, b\}, X\}$ y para cualquier escogencia de C y D se puede verificar que $(C, D) \in \alpha$.
- 4) $(A, B) = (\{b\}, \{a, c\})$ es análogo al caso anterior.
- 5) Si $(A, B) = (\{b, c\}, \{a\})$ y $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ entonces $C \in \{\{b, c\}, X\}$ y $D \in \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ y para cualquier escogencia de C y D se ve que $(C, D) \in \alpha$.
- 6) Si $(A, B) = (\{a\}, \{b, c\})$ es análogo al caso anterior.

L2 Si $(A, B \cup C) \in \alpha$ veamos que $(A, B) \in \alpha$ o $(A, C) \in \alpha$. Tenemos que $(A, B \cup C) \in \alpha_{\mathcal{A}}$ o $(A, B \cup C) \in \beta$.

Si $(A, B \cup C) \in \alpha_{\mathcal{A}}$ entonces $A \cap (B \cup C) \neq \emptyset$, luego $(A \cap B) \cup (A \cap C) \neq \emptyset$, por lo tanto $A \cap B \neq \emptyset$ o $A \cap C \neq \emptyset$, de modo que $(A, B) \in \alpha_{\mathcal{A}} \subseteq \alpha$ o $(A, C) \in \alpha_{\mathcal{A}} \subseteq \alpha$.

Si $(A, B \cup C) \in \beta$, consideramos los seis casos posibles:

- 1) Si $(A, B \cup C) = (\{a\}, \{b\})$ entonces $(B = C = \{b\})$ o $(B = \{b\}, C = \emptyset)$ o $(B = \emptyset, C = \{b\})$ y en cualquiera de los tres casos se tiene que $A\alpha B$ o $A\alpha C$.
- 2) Si $(A, B \cup C) = (\{b\}, \{a\})$ es análogo al caso anterior.
- 3) Si $(A, B \cup C) = (\{a, c\}, \{b\})$ entonces $(B = C = \{b\})$ o $(B = \{b\}, C = \emptyset)$ o $(B = \emptyset, C = \{b\})$ y en cualquiera de los tres casos se tiene que $A\alpha B$ o $A\alpha C$.

- 4) Si $(A, B \cup C) = (\{b\}, \{a, c\})$ entonces $(B = C = \{a, c\})$ o $(B = \{a, c\}, C = \emptyset)$ o $(B = \emptyset, C = \{a, c\})$ o $(B = \{a\}, C = \{c\})$ o $(B = \{c\}, C = \{a\})$ y en cualquiera de los cinco casos se puede verificar que $A\alpha B$ o $A\alpha C$.
- 5) Si $(A, B \cup C) = (\{b, c\}, \{a\})$ entonces $(B = C = \{a\})$ o $(B = \{a\}, C = \emptyset)$ o $(B = \emptyset, C = \{a\})$ y en cualquiera de los tres casos se tiene que $A\alpha B$ o $A\alpha C$.
- 6) Si $(A, B \cup C) = (\{a\}, \{b, c\})$ entonces $(B = C = \{b, c\})$ o $(B = \{b, c\}, C = \emptyset)$ o $(B = \emptyset, C = \{b, c\})$ o $(B = \{b\}, C = \{c\})$ o $(B = \{c\}, C = \{b\})$ y en cualquiera de los cinco casos se puede verificar que $A\alpha B$ o $A\alpha C$.

L3 Es claro que α es simétrica.

L4 Sea $B \in \mathcal{A}$, $B \neq \emptyset$, se tiene $B \cap B \neq \emptyset$, luego $(B, B) \in \alpha$, entonces α es reflexiva.

Finalmente antes de probar (L5), veamos quienes son $Spec(\mathcal{A})$ y R^α .

En el ejemplo 3.2.1 ya se estableció que $Spec(\mathcal{A})$ es el espacio discreto de tres puntos, $Spec(\mathcal{A}) = \{\mathfrak{F}_a, \mathfrak{F}_b, \mathfrak{F}_c\}$, de donde $\mathfrak{F}_a = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$, $\mathfrak{F}_b = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$, y $\mathfrak{F}_c = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$, de donde podemos deducir que:

$$R^\alpha = \{(\mathfrak{F}_a, \mathfrak{F}_a), (\mathfrak{F}_b, \mathfrak{F}_b), (\mathfrak{F}_c, \mathfrak{F}_c), (\mathfrak{F}_a, \mathfrak{F}_b), (\mathfrak{F}_b, \mathfrak{F}_a)\}.$$

y por tanto,

L5 R^α es transitiva en $Spec(\mathcal{A})$.

Observe que en el ejemplo anterior (\mathcal{A}, α) es un anillo de Boole unitario, (es decir con 1) finito, con relación de ligazón, mientras que $(Spec(\mathcal{A}), R^\alpha)$ es un conjunto finito con la relación R^α , que resulta ser, como es fácil observar una relación de equivalencia. Esta situación, se generaliza más adelante en la proposición 4.3.1.

Ejemplo 4.1.6. $A = P(\mathbb{N})$ y $\alpha = \{(C, D) \mid C \cap D \neq \emptyset\} \cup \{(C, D) \mid C, D \text{ son infinitos}\}$.

Probemos que α es una relación de ligazón.

En primer lugar, por la definición de α , es claro que α es una relación en $P(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$.

L1 Sean $B, C \in A$ tales que $(B, C) \in \alpha$, $B \subseteq D$ y $C \subseteq E$. Como $(B, C) \in \alpha$, se tiene que $B \cap C \neq \emptyset$ o B, C son infinitos.

- Si $B \cap C \neq \emptyset$, $B \subseteq D$, $C \subseteq E$, se tiene que $\emptyset \neq B \cap C \subseteq D \cap E$ entonces $D \cap E \neq \emptyset$, luego $(D, E) \in \alpha$.

- Si B, C son infinitos, $B \subseteq D$, $C \subseteq E$, se tiene que D, E son infinitos luego $(D, E) \in \alpha$.

L2 Sean $B, C, D \in A$ con $(B, C \cup D) \in \alpha$, luego $B \cap (C \cup D) \neq \emptyset$ o $B, C \cup D$ son infinitos.

- Si $B \cap (C \cup D) \neq \emptyset$, se tiene que $(B \cap C) \cup (B \cap D) \neq \emptyset$ entonces $B \cap C \neq \emptyset$ o $B \cap D \neq \emptyset$ luego $(B, C) \in \alpha$ o $(B, D) \in \alpha$.
- Si $B, C \cup D$ son infinitos se tiene que B es infinito y $C \cup D$ es infinito, por lo tanto C es infinito o D es infinito entonces $(B, C) \in \alpha$ o $(B, D) \in \alpha$.

L3 Sean $C, D \in A$ tales que $(C, D) \in \alpha$ luego $C \cap D \neq \emptyset$ o C, D son infinitos.

- Si $C \cap D \neq \emptyset$, $D \cap C \neq \emptyset$ entonces $(D, C) \in \alpha$.
- Si C, D son infinitos, D, C son infinitos entonces $(D, C) \in \alpha$.

L4 Si $C \in P(\mathbb{N})$ y $C \neq \emptyset$ se tiene que $C \cap C = C \neq \emptyset$ luego $(C, C) \in \alpha$, por lo tanto α es reflexiva.

Para probar que R^α es transitiva en $Spec(P(\mathbb{N}))$, probaremos primero que:

$$R^\alpha = \{(\mathcal{U}, \mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \in Spec(P(\mathbb{N}))\} \cup \{(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \mid \mathcal{U} \text{ y } \mathcal{G} \text{ son ultrafiltros no principales}\}.$$

En efecto: si $\mathcal{U} R^\alpha \mathcal{G}$ y $\mathcal{U} \neq \mathcal{G}$ veamos que entonces \mathcal{U} y \mathcal{G} son no principales. Si por ejemplo \mathcal{U} fuese principal, digamos $\mathcal{U} = \mathfrak{F}_n$ entonces $\{n\} \alpha \mathfrak{H}$ para todo $\mathfrak{H} \in \mathcal{G}$ pero ésto implicaría que $\mathcal{U} = \mathcal{G}$ (si $\{n\} \alpha \mathfrak{H}$ se tendría que $n \in \mathfrak{H} \forall \mathfrak{H} \in \mathcal{G}$ luego $\mathfrak{H} \in \mathcal{U} \forall \mathfrak{H} \in \mathcal{G}$ por lo tanto $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}$ y como \mathcal{G} es ultrafiltro entonces $\mathcal{U} = \mathcal{G}$). Análogamente no puede ocurrir que \mathcal{G} sea principal.

Recíprocamente por la definición de α es inmediato que si $\mathcal{U} = \mathcal{G}$ entonces $\mathcal{U} R^\alpha \mathcal{G}$ y si \mathcal{U} y \mathcal{G} son no principales se tiene que todo elemento de \mathcal{U} es infinito y todo elemento de \mathcal{G} es infinito (proposición 3.1.4) luego $\mathfrak{F} \alpha \mathfrak{H}$ para todo $\mathfrak{F} \in \mathcal{U}$ y para todo $\mathfrak{H} \in \mathcal{G}$ entonces $\mathcal{U} R^\alpha \mathcal{G}$.

L5 Si $\mathcal{U} R^\alpha \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} R^\alpha \mathcal{D}$ entonces:

($\mathcal{U} = \mathcal{G}$ o \mathcal{U} y \mathcal{G} son ultrafiltros no principales) y ($\mathcal{G} = \mathcal{D}$ o \mathcal{G} y \mathcal{D} son ultrafiltros no principales). Por lo tanto:

- i) Si $\mathcal{U} = \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} = \mathcal{D}$, se tiene que $\mathcal{U} = \mathcal{D}$ entonces $\mathcal{U} R^\alpha \mathcal{D}$.

- ii) Si $\mathcal{U} = \mathcal{G}$ y \mathcal{G} y \mathcal{D} son ultrafiltros no principales, se tiene que \mathcal{U} y \mathcal{D} son ultrafiltros no principales, entonces $\mathcal{U}R^\alpha\mathcal{D}$.
- iii) Si \mathcal{U} y \mathcal{G} son ultrafiltros no principales y $\mathcal{G} = \mathcal{D}$, se tiene que \mathcal{U} y \mathcal{D} son ultrafiltros no principales luego $\mathcal{U}R^\alpha\mathcal{D}$.
- iv) Si \mathcal{U} y \mathcal{G} son ultrafiltros no principales y \mathcal{G} y \mathcal{D} son ultrafiltros no principales entonces $\mathcal{U}R^\alpha\mathcal{D}$.

Luego de *i*), *ii*), *iii*) y *iv*) se tiene que R^α es transitiva en $\text{Spec}(P(\mathbb{N}))$.

En la siguiente proposición se establecen condiciones suficientes (pero no necesarias), para que una relación sea de ligazón:

Proposición 4.1.4. *Sea A un anillo de Boole con unidad y α una relación en $A - \{0\}$, si $\forall a, b, c, d \in A$ se cumplen las siguientes condiciones:*

- i) $cad, c \leq a, d \leq b \implies aab$.*
- ii) $c \alpha (a \vee b) \implies cxa, \text{ ó, } cab$.*
- iii) α es de equivalencia.*

entonces α es una relación de ligazón en A .

Demostración.

Para que α sea una relación de ligazón se deben satisfacer **(L1)** a **(L5)**; en *i*) se tiene **(L1)**, en *ii*) se tiene **(L2)** y en *iii*) se tiene **(L3)** y **(L4)**, por lo tanto solo falta probar **(L5)** es decir que R^α es transitiva en $\text{Spec}(A)$, entonces:

sean $B, C, D \in \text{Spec}(A)$, tales que $BR^\alpha C$ y $CR^\alpha D$. Sean $b \in B, c \in C$ y $d \in D$, entonces bac y cad , como α es transitiva en A y $B, C, D \subseteq A$, se tiene que bad , luego $BR^\alpha D$. De modo que se cumple **(L5)** y así α es una relación de ligazón en A . ■

Lo recíproco de la proposición anterior no se cumple:

Contraejemplo. Sean $X = \{a, b, c\}$ y $A = P(X)$. Usando el ejemplo 4.1.3 tenemos, que $\alpha_A = \{(C, D) \mid C \cap D \neq \emptyset\}$ es una relación de ligazón en A , pero por ejemplo $\{a, b\}\alpha_A\{b, c\}$ y $\{b, c\}\alpha_A\{c\}$ pero $\neg(\{a, b\}\alpha_A\{c\})$, luego α_A no es transitiva.

4.2. Acerca de las relaciones α , R^α y R_α

Al observar la definición 4.1.1, podríamos decir que R^α y R_α constituyen dos formas de “elevar” o “extender” una relación en un conjunto X , a su conjunto de partes $P(X)$. De esta manera surgen de manera natural varias preguntas del siguiente estilo: ¿si α cumple una determinada propiedad, entonces R^α también la cumple? y ¿ R_α también la cumple?, o recíprocamente, ¿si R^α (o R_α) cumple cierta propiedad, entonces α también la cumple?. En esta sección respondemos varias de esas preguntas.

Proposición 4.2.1. X conjunto y α relación en X .

- i)* α es reflexiva en X no implica R^α reflexiva en $P(X)$.
- ii)* R^α reflexiva en $P(X)$ implica α reflexiva en X .
- iii)* α reflexiva en X no implica R_α reflexiva en $P(X)$.
- iv)* R_α reflexiva en $P(X)$ implica α reflexiva en X .

Demostración.

- i)* *Ejemplo.* Sea $X = \{a, b, c\}$ y α la relación reflexiva en X dada por:
 $\alpha = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ entonces

$$R^\alpha = \{(\emptyset, A), (A, \emptyset) \mid A \in P(X)\} \cup \{(\{a\}, \{a\}), (\{b\}, \{b\}), (\{c\}, \{c\})\}$$

no es reflexiva en $P(X)$.

- ii)* Sea $a \in X \in P(X)$, como R^α es reflexiva en $P(X)$ se tiene que $XR^\alpha X$, luego $a\alpha a$ entonces α es reflexiva en X .
- iii)* Se puede afirmar algo más fuerte: R_α **nunca** es reflexiva en $P(X)$, pues $\emptyset \in P(X)$ y por la proposición 4.1.1, parte *iv)*, $\neg(\emptyset R_\alpha \emptyset)$.
- iv)* Sea $x \in X$, luego $\{x\} \in P(X)$ entonces $\{x\}R_\alpha\{x\}$ de modo que $x\alpha x$, por lo tanto α es reflexiva en X . ■

Una condición suficiente para que α reflexiva en X , implique R^α reflexiva en $P(X)$, es que en X existan una operación binaria interna \cdot y una relación de orden \leq con elemento mínimo y “compatible” con α en el sentido de **(L1)**, (es decir cad , $c \leq d$, $d \leq b \implies a\alpha b$). Veamos:

Proposición 4.2.2. *Si (X, α, \cdot, \leq) donde α es reflexiva en X , \cdot es una operación binaria interna en X y \leq una relación de orden con elemento mínimo, tal que α satisface **(L1)**, entonces R^α es reflexiva en $P(X)$.*

Demostración.

Sea $S \in P(X)$, veamos que $SR^\alpha S$. Si $S = \emptyset$, por la proposición 4.1.1, (iii), tenemos que $\emptyset R^\alpha \emptyset$. Si $S \neq \emptyset$ sean $x, y \in S$; sea m el mínimo de (X, \leq) , como α es reflexiva en X , entonces $m\alpha m$ y como m es mínimo entonces $m \leq x$ y $m \leq y$, luego usando **(L1)** se tiene que $x\alpha y$ y por tanto $SR^\alpha S$. ■

En particular, si (A, α) es un anillo de Boole en el cual α es reflexiva y satisface **(L1)**, entonces R^α es reflexiva en $P(A)$.

Con respecto a la parte (iii) de la proposición 4.2.1 si tenemos lo siguiente:

Proposición 4.2.3. *Si α es reflexiva en X entonces R_α es reflexiva en $P(X) - \{\emptyset\}$.*

Demostración.

Sea $B \in P(X) - \{\emptyset\}$ y sea $b \in B$, como α es reflexiva en X y $B \subseteq X$ se tiene que $b\alpha b$, entonces por definición se tiene que $BR_\alpha B$. ■

En la siguiente proposición se observa como la propiedad de simetría si se “transmite” muy bien entre las relaciones α, R^α y R_α .

Proposición 4.2.4. *X conjunto y α relación en X .*

i) α es simétrica en X si y solo si R^α es simétrica en $P(X)$.

ii) α simétrica en X si y solo si R_α es simétrica en $P(X)$.

Demostración.

i) \implies)

Sean $A, B \in P(X)$ con $AR^\alpha B$. Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$ entonces $BR^\alpha A$, por la proposición 4.1.1, parte (iii).

Si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, sean $a \in A$ y $b \in B$. Como $AR^\alpha B$ entonces $a\alpha b$, como α es simétrica en X se tiene que $b\alpha a$, luego $BR^\alpha A$, por lo tanto R^α es simétrica en $P(X)$.

\impliedby)

Sean $c, d \in X$ tales que $c\alpha d$ entonces $\{c\}R^\alpha\{d\}$. Como R^α es simétrica en $P(X)$, $\{d\}R^\alpha\{c\}$ por lo tanto $d\alpha c$, de modo que α es simétrica en X .

ii) \implies)

Sean $D, E \in P(X)$, si $DR_\alpha E$ entonces existen $d \in D$ y $e \in E$ tales que $d\alpha e$, como α es simétrica en X , se tiene que $e\alpha d$ luego $ER_\alpha D$, así R_α es simétrica en $P(X)$.

\impliedby)

Sea $f, g \in X$ con $f\alpha g$, entonces $\{f\}R_\alpha\{g\}$. Como R_α es simétrica en $P(X)$, $\{g\}R_\alpha\{f\}$, por lo tanto $g\alpha f$, luego α es simétrica en X . ■

Con la transitividad y la antisimetría ocurre algo similar a lo que ocurre en la reflexividad. Veamos:

Proposición 4.2.5. X conjunto y α relación en X .

- i) α es transitiva en X no implica R^α transitiva en $P(X)$.
- ii) R^α transitiva en $P(X)$ implica α transitiva en X .
- iii) α transitiva en X no implica R_α transitiva en $P(X)$.
- iv) R_α transitiva en $P(X)$ implica α transitiva en X .

Demostración.

- i) *Ejemplo.* Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\alpha = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$ entonces α es transitiva en X . Además $\{b\}R^\alpha\emptyset$ y $\emptyset R^\alpha\{a\}$ pero $\neg(\{b\}R^\alpha\{a\})$.
- ii) Sean $a, b, c \in X$ tales que $a\alpha b$ y $b\alpha c$. Entonces $\{a\}R^\alpha\{b\}$ y $\{b\}R^\alpha\{c\}$ y como R^α es transitiva, $\{a\}R^\alpha\{c\}$ lo que implica $a\alpha c$, por lo tanto α es transitiva en X .
- iii) *Ejemplo.* Sea $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $\alpha = \{(a, b), (b, e), (a, e), (c, d)\}$ entonces α es transitiva en X . Como puede verse $\{a\}R_\alpha\{b, c\}$ y $\{b, c\}R_\alpha\{d\}$ pero $\neg(\{a\}R_\alpha\{d\})$.
- iv) Sean $f, g, h \in X$ con $f\alpha g$ y $g\alpha h$, entonces $\{f\}R_\alpha\{g\}$ y $\{g\}R_\alpha\{h\}$ y como R_α es transitiva en $P(X)$, $\{f\}R_\alpha\{h\}$ por lo tanto $f\alpha h$, luego α es transitiva en X . ■

Con respecto a la parte (i) de la proposición anterior, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.2.6. *Si α transitiva en X entonces R^α es transitiva en $P(X) - \{\emptyset\}$.*

Demostración.

Sean $H, I, J \in P(X) - \{\emptyset\}$ con $HR^\alpha I$, e, $IR^\alpha J$, sean $h \in H$, $i \in I$ y $j \in J$ luego se tiene que $h\alpha i$ e $i\alpha j$, como α es transitiva en X , $h\alpha j$ entonces $HR^\alpha J$, por lo tanto R^α es transitiva en $P(X) - \{\emptyset\}$. ■

Proposición 4.2.7. *X conjunto y α relación en X .*

- i) α es antisimétrica en X no implica R^α antisimétrica en $P(X)$.*
- ii) R^α antisimétrica en $P(X)$ implica α antisimétrica en X .*
- iii) α antisimétrica en X no implica R_α antisimétrica en $P(X)$.*
- iv) R_α antisimétrica en $P(X)$ implica α antisimétrica en X .*

Demostración.

- i) Ejemplo.* Para cualquier conjunto $X \neq \emptyset$ y cualquier α relación en X , se tiene que si $B \in P(X)$ y $B \neq \emptyset$ entonces $\emptyset R^\alpha B$ y $BR^\alpha \emptyset$ pero $\emptyset \neq B$. Obsérvese que se ha demostrado algo mucho más fuerte: para cualquier conjunto $X \neq \emptyset$ y cualquier α relación en X , la relación R^α **no** es antisimétrica en $P(X)$.
- ii)* Sean $c, d \in X$ con $c\alpha d$ y $d\alpha c$, entonces $\{c\}R^\alpha\{d\}$ y $\{d\}R^\alpha\{c\}$ y como R^α es antisimétrica en $P(X)$, $\{c\} = \{d\}$, luego $c = d$, de modo que α es antisimétrica en X .
- iii) Ejemplo.* Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\alpha = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$, claramente α es antisimétrica. Como puede verse $XR_\alpha\{b\}$ y $\{b\}R_\alpha X$ pero $X \neq \{b\}$, por lo tanto R_α no es antisimétrica en $P(X)$.
- iv)* Sean $a, b \in X$ tales que $a\alpha b$ y $b\alpha a$, entonces $\{a\}R_\alpha\{b\}$ y $\{b\}R_\alpha\{a\}$ y como R_α es antisimétrica en $P(X)$, $\{a\} = \{b\}$ por lo tanto $a = b$, así que α es antisimétrica en X . ■

Con respecto a las partes *i)* y *iii)* de la proposición anterior tenemos:

Proposición 4.2.8. *X conjunto y α relación en X .*

- i) Si α es antisimétrica en X , entonces R^α es antisimétrica en $P(X) - \{\emptyset\}$.*
- ii) Si $\alpha = \emptyset$ entonces R_α es antisimétrica.*
- iii) Si $X = \{a\}$ entonces R_α es antisimétrica.*

Demostración.

- i) Sean $A, B \in P(X) - \{\emptyset\}$ tales que $AR^\alpha B$ y, $BR^\alpha A$, sean $a \in A$ y $b \in B$; si $AR^\alpha B$ y $BR^\alpha A$ entonces aab y $b\alpha a$, como α es antisimétrica X se tiene que $a = b$, por lo tanto para todo $a \in A$, se tiene $a \in B$ entonces $A \subseteq B$ y recíprocamente, luego $A = B$ y R^α es antisimétrica $P(X) - \{\emptyset\}$.*
- ii) Si $\alpha = \emptyset$ (\emptyset es antisimétrica) entonces $R_\alpha = \emptyset$ es antisimétrica.*
- iii) Si $X = \{a\}$, las únicas relaciones en X son $\alpha = \emptyset$ o $\alpha = \{(a, a)\}$ y ambas son antisimétricas. Si $\alpha = \emptyset$, se tiene que R_α es antisimétrica por el caso anterior. Si $\alpha = \{(a, a)\}$ entonces $R_\alpha = \{(X, X)\}$ es antisimétrica. ■*

4.3. Equivalencia entre anillos de Boole finitos con relación de ligazón y conjuntos finitos con relación de equivalencia

Como se anunció al inicio de este capítulo, presentaremos en esta última sección una aplicación de las estructuras que hemos estudiado: los anillos de Boole finitos con relación de ligazón, constituyen una forma de representar los conjuntos finitos, con relación de equivalencia.

Proposición 4.3.1. *Si (A, α) es un anillo de Boole unitario, finito y con relación de ligazón α entonces $(\text{Spec}(A), R^\alpha)$ es un conjunto finito con relación de equivalencia. Recíprocamente, si (X, \sim) es un conjunto finito con una relación de equivalencia, entonces $(P(X), R_\sim)$ es un anillo de Boole unitario, finito y con relación de ligazón.*

Demostración.

\implies)

Como A es finito se tiene que $P(A)$ es finito y como $\text{Spec}(A) \subseteq P(A)$ entonces $\text{Spec}(A)$ es finito.

Veamos que R^α es una relación de equivalencia en $\text{Spec}(A)$.

- i) Sea $C \in \text{Spec}(A)$ y sean $a, b \in C$, queremos ver que $a \alpha b$; como $ab \neq 0$ ($ab \in C$ y C es filtro) y α es reflexiva en $A - \{0\}$ se tiene que $ab \alpha ab$, además $ab \leq a$ y $ab \leq b$ entonces por $L1$, $a \alpha b$, por lo tanto R^α es reflexiva.
- ii) Sean $C, D \in \text{Spec}(A)$ tales que $CR^\alpha D$. Sean $a \in C$ y $b \in D$, entonces $a \alpha b$, como α es simétrica, $b \alpha a$, ya que a y b son elementos cualesquiera de C y D respectivamente, se tiene que $DR^\alpha C$, luego R^α es simétrica.
- iii) Por hipótesis R^α es transitiva en $\text{Spec}(A)$.

Por lo tanto de *i*), *ii*) y *iii*) se tiene que R^α es una relación de equivalencia en $\text{Spec}(A)$.

\impliedby)

Por el ejemplo 2.1.1 se tiene que $P(X)$ es un anillo de Boole con unidad, además como X es finito, $P(X)$ es finito.

Probemos que R_\sim es una relación de ligazón en $P(X)$. En primer lugar, obsérvese que por la proposición 4.1.1, parte (*iv*), se tiene que R_\sim es una relación en $P(X) - \{\emptyset\}$.

L1 Sean $C, D \in P(X) - \{\emptyset\}$ con $CR_\sim D$ y $C \subseteq E$, $D \subseteq F$, por lo tanto existen $a \in C$ y $b \in D$ tales que $a \sim b$, además $a \in E$ y $b \in F$, entonces $ER_\sim F$.

L2 Sean $C, D, E \in P(X) - \{\emptyset\}$ donde $ER_\sim C \cup D$ entonces existen $c \in E$ y $d \in C \cup D$ tales que $c \sim d$, como $d \in C$ o $d \in D$, se tiene que $ER_\sim C$ o $ER_\sim D$.

L3 Sean $B, D \in P(X) - \{\emptyset\}$ con $BR_\sim D$ entonces existe $a \in B$ y existe $c \in D$, tales que $a \sim c$; como \sim es simétrica se tiene que $c \sim a$ entonces $DR_\sim B$, luego R_\sim es simétrica.

L4 Sea $a \in B \subseteq X$, como \sim es reflexiva se tiene $a \sim a$, luego $BR_\sim B$ entonces R_\sim es reflexiva.

L5 Finalmente debemos ver que R^{R_\sim} es transitiva en $\text{Spec}(P(X))$. Como X es un conjunto finito entonces los ultrafiltros son de la forma \mathfrak{F}_a . (proposición 3.2.2). Sean entonces $\mathfrak{F}_a, \mathfrak{F}_b, \mathfrak{F}_c \in \text{Spec}(P(X))$ tales que: $\mathfrak{F}_a R^{R_\sim} \mathfrak{F}_b$ y $\mathfrak{F}_b R^{R_\sim} \mathfrak{F}_c$ (debemos probar que $\mathfrak{F}_a R^{R_\sim} \mathfrak{F}_c$).

Sean $A \in \mathfrak{F}_a$ y $C \in \mathfrak{F}_c$ entonces $a \in A$ y $c \in C$. Tenemos que $\{a\}R_{\sim}\{b\}$ y $\{b\}R_{\sim}\{c\}$, por lo tanto $a \sim b$ y $b \sim c$ y como \sim es transitiva, $a \sim c$ de modo que $AR_{\sim}C$ y así $\mathfrak{F}_aR^{R_{\sim}}\mathfrak{F}_c$. ■

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ACOSTA, Lorenzo. *Una demostración algebraica de la unicidad del Conjunto de Cantor*. Bogotá, 1988. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias.
- [2] BARNSLEY, Michael. *Fractals Everywhere*. Academic Press, 1988.
- [3] BOOLE, George. *The Mathematical Analysis of Logic*, Macmillan, Barclay and Macmillan Cambridge, 1847.
- [4] ----- *An Investigation of the Laws of Thought*, Walton and Marberley, London, 1854.
- [5] CORTES, Jhon J. *Equivalencia entre álgebras Booleanas, anillos Booleanos y retículos*. Bucaramanga, 2003. Trabajo de Monografía. Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias.
- [6] DORRONSORO, José, y HERNANDEZ, Eugenio. *Números, grupos y anillos*. Madrid: Addison-Wesley Iberoamericana España, 1996.
- [7] FRALEIGH, John B. *Algebra Abstracta: Primer Curso*. Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- [8] OSPINA, Margarita. *Características generales de los anillos de Boole*. En: RUIZ, Carlos J et al. Una aproximación Booleana a la topología. IV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 1987. p. 15-26.
- [9] RUIZ, Carlos. *Anillos de Boole*. En: Revista de la Facultad de Ciencias: Universidad Javeriana. Vol. 1, No. 1. (jul-dic. 1987); p 101-132.

-
- [10] SABOGAL, Sonia. *Autosemejanza en Topología y algunas extensiones de la dualidad de Stone*. Bogotá, 2000. Tesis de Doctorado. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias.
- [11] STONE, M.H. *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 40. (1936); p. 37-111.
- [12] ----- *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 41. (1937); p. 375-481.