PROPUESTA PARA EL MEJORAMIENTO DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO EN LA NOCIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA

ALEXÁNDER HOYOS PORTELA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA
2009

PROPUESTA PARA EL MEJORAMIENTO DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO EN LA NOCIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA

ALEXÁNDER HOYOS PORTELA

Proyecto de Grado presentado como requisito para optar al
Título de Licenciado en matemáticas

Director
HÉCTOR ALBERTO HIGUERA MARÍN
Magíster en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2009

AGRADECIMIENTOS

A Dios por ser mi fortaleza y mi gran amor. A mis padres, Arielza Portela y Belmar Hoyos, por ser mí apoyo incondicional y el motor de mi fuerza interior que me ha impulsado a cumplir mis sueños. A mis hermanos por su apoyo y amistad, a mis dos y más grandes amigos de universidad, Germán Andrés Bautista y Edwing Yessid Salcedo, gracias por todo lo que me brindaron y por aguantarme durante este tiempo; a la familia Suárez Sámaca por todo el apoyo incondicional y moral que me brindaron, a Oscar Freddy Miranda, mi hermano gracias por creer en mí.

Por último, y no de menor importancia, agradezco a las personas que estuvieron conmigo durante los momentos difíciles; a cada uno de los profesores de la Universidad Industrial de Santander y compañeros de licenciatura, quiénes a través de sus enseñanzas y anécdotas, contribuyeron a mi formación personal y profesional, gracias y mil gracias a todos, nunca los olvidaré.

DEDICATORIA

A Dios mi padre celestial. Arielza Portela y Belmar Hoyos, mis padres terrenales, los cuales amo con el corazón; a mis hermanos que siempre han estado a mi lado, y a la mujer que Dios puso en mi vida y ha sido mi gran ayuda, Mónica.

Gracias por todo el apoyo y la fortaleza que me brindaron para lograr esta meta.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

TITULO:

PROPUESTA PARA EL MEJORAMIENTO DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LA NOCIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA.*

AUTOR: ALEXÁNDER HOYOS PROTELA**

Palabras claves:

1. Aprendizaje significativo 2. Construcción del concepto de integral 3. Resolución de problemas

DESCRIPCIÓN:

El estudio de las matemáticas, puede convertirse en un proceso rutinario para los estudiantes, si no se brindan fundamentos claros del tema y situaciones adecuadas para su estudio; por tal motivo, este proyecto de grado presenta una propuesta metodológica, que pretende convertirse en una alternativa para la enseñanza de cálculo integral que beneficie a los estudiantes de Ciencias e Ingeniería.

Este trabajo está orientado por dos enfoques principales: la construcción del concepto de integral definida, y la resolución de problemas; esto con el fin de involucrar significativamente al estudiante en el proceso de aprendizaje de un tema específico. Asimismo, se busca que el estudiante desarrolla la capacidad de pensar y analizar, de distinguir lo general de lo particular, y discriminar lo objetivo de lo subjetivo.

Por tanto, esta propuesta se plantea con la intención de motivar a los profesores para buscar aprendizajes significativos, partiendo de la construcción del concepto de integral definida y lo que ésta representa, dejando claro que no siempre es el área bajo la curva; de igual forma, se pretende llevar al estudiante a identificar problemas que son solubles mediante la integral definida, para así proporcionar análisis y razonamiento a la clase, y no solo limitarse, a resolver ejercicios con diferentes métodos de integración.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de ciencias-Escuela de matemáticas-licenciatura en Matemáticas-Director: Héctor Alberto Higuera Marín. Magister en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE:

PROPOSAL FOR IMPROVING THE MEANINGFUL LEARNING AT THE NOTION OF DEFINITE INTEGRAL.*

AUTHOR: ALEXÁNDER HOYOS PROTELA**

Key words:

1. Meaningful Learning 2. Meaningful Building of Definite Integral 3. Problem Solving

Description :

Studying mathematics may become a daily process for students whether fundamental basis for its study aren't given before, due these reasons, this project presents a methodological proposal, which will be useful for integral calculus teaching for sciences and engineers students.

This work is focused on two main approaches: meaningful building of definite integral and problem solving, with the purpose of involving students in a meaningful way at the moment of carrying out the learning process of specific scientific topics. On the other hand it is focus on developing analysis and thinking skills for distinguishing from general to specific, and discriminate from objective to subjective.

Another reason of this proposal is focused on motivating teachers to find meaningful learning, departing from meaningful building of definite integral and its characteristics, clarifying that definite integral mustn't be seen like the area under the curve, but also train students to identify problems that may be solved through this way, and propose the analysis and reasoning during the class, without limits at the moment of solving problems by different methods of integral.

---

* Graduation project

** Faculty of sciences-Mathematics Department – Bachelor in Mathematics - Director: Héctor Alberto Higuera Marín. Master in Mathematics.

INTRODUCCIÔN

Desde hace unas décadas, tal vez de los 70 o quizás un poco antes se ha tratado de buscar, de plantear y de mostrar el mejor método de enseñanza-aprendizaje que lleve al estudiante a desarrollar su máximo potencial en cuanto a asimilación, calidad, extensión y relación entre los conceptos ya antes aprendidos y los nuevos.

En diversas universidades del país se han trabajando diferentes propuestas de acuerdo a la enseñanza de las matemáticas, y la Universidad Industrial de Santander no ha sido la excepción. Podemos ver que en el programa de Licenciatura en Matemáticas se ha trabajado alrededor de propuestas de enseñanza de diferentes temas de matemáticas, entre ellos la enseñanza del cálculo, buscando aprendizajes significativos en conceptos como el del límite, la derivada entre otros. También es posible ver diversos trabajos alrededor del aprendizaje significativos en diferentes ramas del conocimiento. Aún en programas de especialización, en enseñanza de las matemáticas, como en docencia universitaria, encontramos trabajos de grado (monografías), alrededor de buscar aprendizajes significativos, muchos de ellos, en matemáticas, y algunas de estas en Cálculo que es donde queremos desarrollar esta propuesta.

Actualmente muchos estudiantes ni piensan, ni razonan cuando estudian las matemáticas, en especial me refiero al Cálculo, sea diferencial o integral. Por lo general, lo que hacen es desarrollar ciertas habilidades algorítmicas que les permiten resolver una cantidad de ejercicios que dan la impresión de que saben matemáticas y al profesor la falsa ilusión de haberles enseñado. Pero lo que queremos es un verdadero aprendizaje y esto va mucho más allá de solo resolver ejercicios.

Si se mira desde el punto de vista del aprendizaje significativo, se está haciendo el mejor trabajo con los estudiantes, se está logrando que el estudiante llegue a entender y asimilar todo lo que representa la integral definida. O quizás los largos contenidos programados no permiten que el profesor profundice en ciertos aspecto que ayudarían al desarrollar el contenido planteado, y a veces es mejor tocar un poquito de cada aspecto y seguir por que el tiempo no alcanza, será que así se lograra que el estudiante este en la capacidad de determinar cuándo una situación problema es aplicable para resolver por integral definida y cuando no.

Si bien, el aprendizaje en parte es constructivista, debemos lograr que el estudiante en verdad pueda aprender a reorganizar el aprendizaje que ya sabe, con lo nuevo que se le está proporcionando. A su vez el docente juega un papel muy importante, el cual es establecer un equilibrio en animar a los estudiantes a dar sus propias conclusiones e ideas y que llegue a aprender los conocimientos establecidos en la materia, así podrá, el estudiante asumir sus retos en lo que le exigirá la sociedad.

Esta propuesta permite a los docentes reflexionar acerca de cómo se está enseñando el cálculo integral, en especial el concepto de integral definida, si es coherente y aplicable la relación entre la práctica y la fundamentación teórica, además de motivar al docente a que debe ir mirando los cambios en la enseñanza y el aprendizaje.

"El hombre es grande solo cuando está de rodillas"

Albert Einstein

1. DIFICULTADES DEL CÁLCULO INTEGRAL AL REALIZAR APRENDIZAJES SIGNIFICATIVOS EN LA INTEGRAL DEFINIDA.

Debido a las transformaciones que se presentan diariamente en la educación, es importante que el docente tenga un espíritu investigador que le permita innovar en cuanto a los procesos de enseñanza y aprendizaje, adquiriendo los conocimientos propios de su área e involucrándolos, con los posibles cambios que se puedan presentar directamente en el aula de clase; esta combinación, le permitirá desenvolverse con mayor seguridad en el ámbito en que se encuentra y hacer un aporte verdadero a la enseñanza de su asignatura, logrando así un aprendizaje significativo de la misma.

Durante años, se ha dicho que el aprendizaje implica un cambio de conducta en el ser humano, sin embargo, actualmente se conoce que el aprendizaje de este va mucho más allá, que no se trata solo de un cambio de conducta como consecuencia del contexto en que se encuentra, sino que involucra un significado de las experiencias vividas; haciendo intervención, no solo en la parte cognoscitiva sino también en la moral y espiritual, al desarrollar su parte afectiva, creativa, y social. Sólo así, es cuando se capacita a un individuo para enriquecer su propia vivencia.

Muchas teorías de aprendizaje, han tratado de estudiar y entender el pensamiento humano en un mundo que cambia constantemente en sus habilidades de sobrevivir, en exigencias, necesidades, competencias y convivencia, haciendo de las actividades algo cada vez más complejo; es ahí donde el aprendizaje juega un papel importante, ya que se necesitan individuos que sean capaces de desenvolverse en un mundo cambiante, en el que se requieren personas idóneas en el manejo de diversas áreas del conocimiento, y donde es indispensable asumir nuevos retos pedagógicos, que orienten al individuo a desarrollar plenamente sus capacidades, optando por crear alternativas que mejoren su calidad de vida y las de su entorno. Ante esta situación, lo que se debe hacer como docente, es plantear situaciones problemas que puedan ser resueltas teniendo en cuenta el entorno, y no sólo garantizar la posesión del conocimiento, sino asegurar el desarrollo de competencias en su campo de formación.

Desde este contexto, es indispensable darle importancia a lo que el estudiante está aprendiendo y como lo está aprendiendo, para poder darle sentido a lo que está quedando como aprendizaje; es decir, darle **significado.** Este dar significado, implica relacionar el conocimiento que el estudiante posee y el nuevo conocimiento que está adquiriendo según lo afirma David Ausubel[1].

"*Aprendizaje significativo, es el proceso a través del cual una nueva información (un nuevo conocimiento) se relaciona de forma sustantiva y no arbitraria con lo que ya conoce quien aprende, es decir, con aspectos relevantes y preexistentes de su estructura cognitiva"*

Para Ausubel, el aprendizaje significativo es el mecanismo humano por excelencia, para adquirir y almacenar la inmensa cantidad de ideas e informaciones representadas en cualquier campo de conocimiento, es decir, el estudiante no solo acumula conocimientos si no que se apropia de los conceptos, los integra y los aplica de manera creativa y premeditada, en cualquier situación que se presenta a lo largo de su vida. Solo se logrará un aprendizaje realmente significativo, cuando exista una conexión entre lo que se sabe y el nuevo conocimiento que se está adquiriendo; esta relación de lo que se aprende con lo que constituye la estructura cognitiva del educando, es fundamental para Ausubel y trascendental en la forma de abordar la enseñanza.

1. Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. Sexta edición., Trillas 1993. Pág. 48

Muchas personas han escrito, discutido e investigado, acerca de las diferentes teorías del aprendizaje, y así mismo, han argumentado cosas como: el aprendizaje por recepción es invariablemente repetitivo y el hecho por descubrimiento es inherente y forzosamente significativo; pero de acuerdo con el trabajo planteado por Marco Antonio Moreira, *APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO: UN CONCEPTO SUBYACENTE*[2], *al decir, "Podemos imaginar la construcción cognitiva en términos de los subsumidores de Ausubel, de los esquemas de asimilación (acción) de Piaget, de la "internalización" de instrumentos y signos de Vygotsky, de los constructos personales de Kelly o de los modelos mentales de Johnson-Laird. Creo que en cualquiera de estas teorías tiene sentido hablar de aprendizaje significativo. No veo problema en pensar que el resultado de la equilibración mayorante es un aprendizaje significativo o que la conversión de relaciones personales en procesos mentales, mediada por instrumentos y signos y por la vía de la interacción social, desemboque en aprendizaje significativo. Tampoco veo dificultad en interpretar como aprendizaje significativo, la construcción de modelos mentales o de constructos personales; tanto unos como otros implican la asignación de significados a eventos u objetos. Todas estas teorías son constructivistas y el aprendizaje significativo subyace a la Construcción humana. ¡Ésta es la cuestión!".*

En el trabajo anterior el autor intenta mostrar, que se puede hablar de aprendizaje significativo en distintos referentes teóricos constructivistas. De igual manera, plantea que lo que se debe hacer es buscar darle sentido (significado), en el contexto que se encuentra a lo que el estudiante está aprendiendo, pues esto favorece el potencial intelectual del mismo.

---

2. Actas del encuentro internacional sobre Aprendizaje Significativo. pp. 19-44. Traducción de **Mª Luz Rodríguez Palmero**.

El deber de los docentes, es hacer mayor énfasis en la función de facilitar herramientas, que permitan a los estudiantes resolver problemas que se presentan en la vida diaria, y lograr estar en competencia con las necesidades reales.

Muchos factores han captado la atención de diferentes investigadores que a su vez, han planteado teorías de aprendizaje ofreciendo soluciones sistemáticas, coherentes y únicas, a varios problemas referentes a: ¿cómo se aprende?, ¿que alcance tiene el aprendizaje?, ¿por qué se olvida lo aprendido?, y ¿qué factores intervienen en el aprendizaje?

Cuando ocurre el aprendizaje este se convierte en un complemento de estas teorías, ya que estas a su vez se ocupan de que ocurra, y es aquí en donde se fundamentará la labor educativa. Para lograr esto, se debe tener en cuenta diversos factores, por ejemplo: los docentes y cuál es la manera de enseñanza; programa académico y estructura curricular; la manera en la que se produce y el contexto social en el que se desarrolla. Si el docente sigue esta dirección en su proceso de enseñanza, y se basa en principios bien establecidos, logrará encontrar nuevas estrategias de enseñanza y mejorar su labor como docente.

En psicología, se habla de psicología cognitiva, educativa, entre otras. Por ejemplo, la psicología cognitiva trata de proporcionar áreas de investigación que han sido olvidadas pero no poco importantes, ya que no solo busca predecir y controlar la conducta, sino también darle respuestas; opera con esquemas interpretativos alejados de la secuencia mecanicista: estimulo – respuesta, y enfatizando en el procesamiento de la información. Aportando así, significados psicológicos del cambio de conducta.

Notamos como la “psicología educativa, trata de explicar y dar respuesta a la naturaleza del aprendizaje en el salón de clases, y los factores que influyen; estos fundamentos psicológico proporcionan los principios, para que los profesores descubran por si mismos los métodos de enseñanza más eficaces, puesto que intentar descubrir métodos por ensayo y error es un procedimiento ciego y, por tanto innecesariamente difícil y antieconómicos”[3].

Hemos visto la importancia de la psicología cognitiva en la educación, ahora miraremos el talón de Aquiles de muchos estudiantes y de un gran número de instituciones educativas, que gastan mucho tiempo buscando estrategias para lograr una buena enseñanza en esta área. Las matemáticas, ciencia que ha sido estigmatizada por muchos como difícil, compleja y “poco útil”, pero la verdad, es el área más completa en el currículo de cualquier institución educativa. La matemática es una ciencia que se ha venido desarrollando a la par con la humanidad, y es tan antigua como ninguna otra. Se han buscado por siglos métodos diferentes de enseñanza, que puedan lograr captar la atención del estudiante y su comprensión, que es lo que hoy aún nos sigue preocupando. La matemática ha tenido muchos avances, y con estos las estrategias de enseñanza, como desde contar con los dedos, piedras y usar diferentes recursos de escritura como las tablas de arcilla, entre otros, han avanzado tanto, que hoy tenemos software muy sofisticados que han aportado a la enseñanza de esta ciencia, y ayudado al desarrollo de la misma e incluso de la sociedad.

Se han propuesto diversos métodos que han sido utilizados en la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo, la enseñanza tradicional donde el docente solo transmitía el conocimiento y el estudiante solo estaba atento a la trasmisión, en ocasiones indiferente y sin interés, ocasionando esto gran apatía hacia esta ciencia, donde no se ve, ni se nota la importancia de algo que no se entiende, o no se percibe en un mundo real. En este tipo de enseñanza, el profesor se limitaba a dar la teoría y el desarrollo de unos cuantos ejercicios, sin dar apertura al razonamiento; esto es lo que ha impulsado estudios interesados en la investigación didáctica, en busca de nuevas metodologías de enseñanza, donde

---

3. Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. Sexta edición., Trillas 1993 gPág. 17

se ha propuesto la resolución de problemas en matemáticas, ya que para los jóvenes es más interesante trabajar con situaciones que reflejen problemas que involucren eventos cotidianos de su entorno, que a su vez les permite ver las matemáticas están presentes en su mundo real; esto, de una u otra manera ayuda a formar personas con actitud científica, analítica desde el aula de clase. Esto se debería tomar en cuenta desde los primeros cursos donde se pueda inculcar y promover.

Aquellos docentes, que ven su labor sólo como un compromiso de ir a transmitir un conocimiento como algo ya acabado sin campo para explorar, toman una actitud expositiva y solo se interesan por dar una serie de definiciones, y de procedimientos algorítmicos que llevan al estudiante a que resuelva algunos cuantos ejercicios de manera mecánica, que en ocasiones no requieren ningún análisis, y sólo al final del tema proponen un problema contextualizado, donde sea aplicable el concepto antes visto. Después de esto, piensan que han cumplido bien su labor, y no tienen en cuenta lo que se ha aprendido, además la parte de resolución de problemas, queda en un taller para trabajar fuera de clase y muchas veces no se resuelve ni socializa.

Si estos docentes, tomaran una actitud diferente en la cual mostraran que el conocimiento matemático es algo inacabado y en construcción, e impulsaran a los estudiantes a desarrollar destrezas de análisis y a conjeturar acerca de lo que se está haciendo en clase, mostrando al estudiante que no son solo conceptos de aplicación, sino que él pueda ver el desarrollo que esta ciencia ha obtenido; así no solo bastaría con la clase expositiva, si no que se involucraría al estudiante en su propio aprendizaje, y se llevaría a la forma más adecuada de hacerlo: dándole significado a todo lo que se enseña.

Hay que desarrollar en los estudiantes la habilidad de analizar, discutir, proponer y contextualizar, lo que se está trabajando en clase; es decir, que desarrolle el hábito de pensar. Pero, ¿cómo se puede lograr?: dejándolo que piense por si mismo, dándole las herramientas necesarias para que pueda desarrollar esta destreza y que pueda analizar a fondo las condiciones que se le están dando; hay que llevar al estudiante a ver que las matemáticas son para todos y que todos las podemos aprender, que no son única y exclusivamente para estudiantes aventajados, o mas “inteligentes” que otros. Por tal razón hay que mostrar las situaciones problemas y la teoría, dándoles su respectiva relevancia y llenándolas de significado para que puedan relacionarla en su campo de desempeño.

Como podemos ver si nuestro trabajo está ayudando al estudiante ha obtener un verdadero aprendizaje, la evaluación debe ser una herramienta que permita en gran manera, ver lo que el estudiante está obteniendo en el curso, ya que por medio de ésta, debe quedar clara la capacidad que tiene el estudiante de aplicar los diferentes algoritmos, para darle solución a una situación problema, contextualizándola y determinando el grado de aplicabilidad que pueden tener los diferente métodos vistos durante clases.

Hay que tener en cuenta que las actividades como trabajos y talleres que sean propuestos a los estudiantes, deben ser interesantes e involucrarlo en la observación y experimentación de hechos particulares, que les permitan relacionarse con el medio real en que se desenvuelven, logrando ver la naturaleza de las situaciones en la matemáticas, y permitiendo desarrollar la creatividad y el análisis en lo planteado en dichas actividades.

Vemos que la forma tradicional de enseñanza – aprendizaje, ha sido duramente criticada ya que lo estudiantes no encuentran una relación sustancial entre lo que se está enseñando, lo que se sabe y su medio; por lo cual no se ve un interés en el contenido de su enseñanza. Esto no ocurre solo en matemáticas sino en diferentes campos de desempeño, hay que buscar la manera de aumentar la comprensión en un tema, y esto se logra involucrando al estudiante por completo en el desarrollo del contenido.

Es mucho más provechoso involucrar al estudiante en la construcción del concepto de un tema, en este caso de la “integral definida” y motivarlo a que participe en dicha construcción e incentivarlos a que den sus propias conclusiones. No como algunas veces presentarles una serie de definiciones y símbolos como por ejemplo “∫” y decirles, que este símbolo definido así: $\int f(x)\,dx$ representa la integral, mostrar que se resuelve de diferentes maneras o métodos, y que a veces se convierten en procedimientos mecánicos sin sentido; a esto en ocasiones se añade, “si la función está definida en un intervalo “[a,b]” se denomina integral definida”. Por el contrario si se lograra construir el concepto, se invertirá más atención a lo que se hace en clase y se pondrá atención al tema, aportaria a que se retenga en la memoria algo importante del concepto, y esto nos facilitara encontrar un verdadero aprendizaje significativo.

Lo que se viene buscando en la educación son aprendizajes significativos, los cuales implican que el estudiante sea capaz de relacionar de manera no arbitraria y sustancial, la nueva información con los conocimientos ya obtenidos a causa de sus experiencias vividas. La motivación en el aula, también es un factor importante en este aprendizaje, esta depende de la interacción que haya entre el profesor y los estudiantes dentro del aula, implica que cada docente debe cautivar la atención de sus estudiantes mediante el uso de situaciones problema, situaciones que involucren aspectos de la realidad, investigación, deducción y construcción de conceptos, que lleven al estudiante a relacionarlos con su modelo de estructura cognitiva existente, y hacer del trabajo en el aula una herramienta primordial para el desarrollo de la clase.

Con este aprendizaje lo que se busca es dar significado a lo que el profesor está proponiendo en clase, se quiere que el estudiante sea capaz de aportar y construir su propio aprendizaje, que adquiera autonomía hasta el punto de que desarrolle su inteligencia, de manera que relacione lo que sabe y conoce con lo que se quiere aprender. En matemáticas lo que todo docente debe buscar, es desarrollar en el estudiante un interés por que trabaje en la construcción de sus propios aprendizajes; que busque la manera de analizar, pensar, es decir, que lleguen a ser autónomos, que relacionen experiencias y conceptos ya antes conocidos, para que lo que decida aprender tenga significado y sea valioso, lo cual aportara el interés en el trabajo y las experiencias vividas en el aula. Hay que tratar de alejarlos del uso memorístico, repetitivo y mecánico como alternativa de aprendizaje, ya que esto le ha hecho mucho daño a la educación.

Se debe tener en cuenta que si el aprendizaje se logra por medio de repeticiones tiende a olvidarse, más si es en matemáticas, ya que los nuevos conceptos se incorporan de manera arbitraria y aislados de lo ya antes aprendido, de acuerdo a la estructura cognoscitiva que el estudiante posee, por tal razón el estudiante debe hacer mucho esfuerzo por relacionar el nuevo concepto, con lo ya antes visto y no concede el valor requerido a los conceptos presentados por el profesor en clase, obligándose a estudiar para el momento, con el único fin de "aprobar" la materia.

En cuanto al aprendizaje significativo, este se construye sobre lo que el estudiante ya conoce, lo que le permite desarrollar habilidades y traer a memoria con facilidad tal actividad de aprendizaje, la cual relacionará con lo que está adquiriendo. De aquí el interés por aprender, ya que para él tiene un significado previo y por eso lo considera valioso para su estructura cognitiva.

Algunas ventajas del aprendizaje significativo para la enseñanza de la noción de la integral definida son:

- El estudiante tiene una retención más duradera del concepto de integral definida; este tipo de aprendizaje le permite modificar la estructura cognitiva del estudiante e integral lo nuevo que está aprendiendo.

- El estudiante puede adquirir con más facilidad el nuevo conocimiento sobre la integral definida y relacionar con los conceptos ya antes vistos.

- La nueva información sobre el concepto de integral definida se conserva y no se olvida fácilmente, ya que ha sido de gran importancia e interés para el estudiante.

- Es un aprendizaje que se construye mediante las acciones y actividades de aprendizaje de los estudiantes.

- Es autónomo, y le da al estudiante la opción de dar sentido a lo que el realmente quiere aprender, de acuerdo a lo que él necesita para su aprendizaje.

Para lograr un aprendizaje significativo en el concepto de integral definida, es necesario tener presente que en este tipo de aprendizajes no se debe forzar la experiencia de aprendizaje y el trabajo del estudiante, hacia lograr lo que como docentes queremos, sino a sus necesidades e intereses. Por lo tanto el aprendizaje de los conceptos anteriormente vistos son importante y relevante, ya que deben ser nuestro punto de partida en este proceso, y tener en cuenta que los conocimientos que tiene el estudiante, son fundamentales para adquirir un nuevo concepto he integrarlo con lo ya antes aprendido, ya que no se puede pretender que se construya un aprendizaje nuevo, si anteriormente no se ha adquirido conocimientos previos del tema para luego poder hacer la relación.

El docente debe ser un agente motivador, y tener en cuenta que las actividades propuestas deben tener una estructura interna y organizada, que le permita al estudiante dar significado y a su vez relacionar el conocimiento presentado, con los conocimientos previos ya incluidos en la estructura cognoscitiva.

1.1 ¿Qué significa aprender significativamente?

Es que los estudiantes sean personas autónomas, independientes y reguladores de su propio aprendizaje, es decir, que aprendan a aprender.

Esto es la capacidad de reflexionar acerca de lo que se aprende, y actuar consecuentemente con lo adquirido en el aprendizaje, auto regulando el propio aprendizaje mediante el uso de estrategias precisas y adecuadas, que se adopten a las nuevas situaciones y que permitan relacionarse con lo ya antes aprendidos.

Recordemos que el principal responsable del desarrollo y trabajo en el aula es el profesor, quién debe llevar las situaciones del aula a que evolucionen y lleguen a un aprendizaje, en un buen manejo de la información y actividades; que a su vez debe estar atento para ayudar al estudiante a desarrollar sus capacidades cognoscitivas y sociales.

Cada profesor debe poseer destrezas para dirigir un grupo más que tener una linda personalidad y ser un buen orador, ya que esto se convierte en un “arte”, el cual nos lleva a interpretar lo que ocurre en el aula teniendo en cuenta cada grupo en el cual se dicte el contenido de una materia, aunque este contenido sea el mismo, los que intervienen en él no. Cómo profesores, tenemos uno de los más grandes privilegios que tiene esta sociedad, el poder aportar algo para el desarrollo de ésta, y no solo en el conocimiento sino en la parte emocional, personal y social de un individuo, ya que somos personas a las cuales se nos ha dado el privilegio no solo de transmitir un conocimiento, sino de transmitir ideas, pensamientos, cultura y de enseñar acerca de lo que somos como sociedad.

Muchas veces se deja de lado cosas como estas en las aulas de clase a nivel universitario, porque tal vez nos parecen muy poco importantes e irrelevantes, y nos enfocamos solo a dar el contenido de lo que se quiere que el estudiante “aprenda” o conozca, ya que muchas veces ni el contenido se entiende. Pero más que enseñar a resolver algoritmos, y una gran cantidad de ejercicios de diferentes libros, debemos formar profesionales, que ante todo sean personas integras, éticas y dispuestas a aportar algo a esta sociedad; no solo individuos que se preocupan por entrar a clase, escuchar lo que el profesor habla, presentar exámenes, “aprobar” y pensar que ya saben matemáticas y que son capaces de devorar al mundo, sin tener claro lo que ha ocurrido en el aula de clases y la representación de los conceptos vistos.

MARCO TEÓRICO

2. CONSTRUCCIÓN DE CONCEPTOS EN MATEMÁTICAS, (INTEGRAL DEFINIDA), COMO PARTE DE LA ESTRATEGIA METODOLÓGICA.

Cada vez que se habla de matemáticas, detrás de esta, hay aportes valiosos de grandes hombres que dedicaron parte de sus vidas a la ciencia como: Leibniz, Galileo, Pitágoras, Euclides, Eratóstenes, entre otros; quienes se interesaron por hacer estudios que facilitaron la realización de cálculos y resolver problemas útiles para el desarrollo de la humanidad. Hoy día, estos aportes nos permiten calcular longitudes, áreas, volúmenes, utilizados en las grandes y pequeñas construcciones de ingeniería, ya que se puede calcular como y cuanto resistirá una estructura, el peso que puede soportar y hasta cuánta materia se gastará sin haber empezado la construcción.

Estos grandes matemáticos tardaron tiempo en poder encontrar una fórmula, definición o algoritmo, que permitieran la realización de cálculos sin tener que gastar tanto tiempo, pero será que la intención de estos hombre era ¿que no entendiéramos lo que calculábamos, y que solo aplicáramos dichas “formulas” sin entender lo que estas representan? !Creo que no¡, ¿Qué sería de las grandes construcciones si los hombres que están detrás de ellas, no entendieran dichos cálculos y lo que representan?

Cuando se enseña matemáticas, es conveniente contar por lo menos como se descubrió, quien lo descubrió y en qué tiempo lo hizo, mostrando algunos de los aportes más importantes del concepto a estudiar y de sus aplicaciones, para que este nuevo concepto no parezca algo mágico y poco real, sino que revele su importancia, por la cual muchas personas dedicaron parte de sus vidas a esos descubrimientos. A causa del tiempo, un semestre no es suficiente para introducirse del todo la historia de un concepto, pero se puede durante este lapso motivar al estudiante a investigar sobre el tema, partiendo de los conocimientos previos que tengan e involucrándolos con lo que se va a enseñar.

Teniendo en cuenta el aprendizaje significativo, es más provechoso que el estudiante sea un participante activo en la construcción de conceptos, mostrándoles paso a paso como se construyó, con qué fin, y qué utilidad tiene. Así se va involucrando al estudiante de forma activa y participativa en el desarrollo del curso y a su vez se va logrando, que el estudiante se interese y empiece a darle sentido (significado) a lo que se está construyendo, qué representa y cómo se relaciona con lo que se ha estudiado en cursos anteriores.

2.1 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO ESTRATEGIA METODOLÓGICA

En nuestro diario vivir vemos como la matemática está involucrada en muchas acciones que realizamos, por ejemplo, hacer cuentas para pagar un bus, sumar precios de diferentes artículos, tomar nuestro salario sacar deudas y gastos mensuales, comprar un artículo en el supermercado que nos cueste menos con más cantidad de contenido, situaciones como estas, donde diariamente se aplican los algoritmos de suma, resta, multiplicación, división, y haciendo cálculos de medición, donde logramos resolver problemas prácticos y útiles a nuestros bolsillos; volviéndonos sin darnos cuenta en expertos en estas operaciones, llegando a dominarlas y sacando el mejor provecho en ocasiones.

La matemática es un lenguaje como muchos otros, que consta de símbolos, reglas, modos de uso e interpretaciones, que son compartidos con diferentes grupos humanos; el estudiar este lenguaje implica un uso adecuado de sus reglas y signos, y como todo lenguaje, tiene su dificultad cuando alguien por primera vez lo estudia, como estudiar una lengua no materna.

Es interesante ver como cualquier situación rutinaria en nuestras vidas, incluso un lenguaje verbal, se puede plasmar en un lenguaje matemático, modelarlo y darle solución, es decir, matematizar la situación mediante datos e incógnitas, y hacer expresiones matemáticas para luego aplicar algunas operaciones que ya manejamos. Esto es algo rutinario para nosotros, pero es el carácter universal de las matemáticas. Conocer o saber matemáticas no puede limitarse a reconocer definiciones, teoremas, lemas y propiedades de los objetos matemáticos; debe implicar ser capaz de usar bien el lenguaje y el sistema conceptual matemático, para resolver problemas. Las matemáticas están estrechamente ligadas a la realidad natural y social que rodea a la humanidad, por eso se postula la necesidad de establecer puentes entre ellos.

Los docentes, deben utilizar la matemática y vincularla a la realidad del estudiante, teniendo como prioridad que les llama la atención y como puede despertar su interés, utilizando las situaciones que surjan en el aula; así se logrará un aprendizaje más significativo, y se podrá observar que tan atractiva es la matemática, viéndola ya, no como una ciencia exacta sino aplicada. Lo que se quiere, es superar el aprendizaje memorístico y mecanicista por un aprendizaje de calidad, en el que el estudiante entienda lo que se le habla, lo relacione con otros aprendizajes matemáticos y los aplique con expresiones de la vida social, de las artes, de la tecnología y de la ciencia. Si bien es cierto, que solo un aprendizaje significativo garantizara el éxito de la formación de un estudiante, este aprendizaje le permitirá relacionar conocimientos nuevos con los antes adquiridos, haciendo ver que el estudiante sabe matemáticas y que entiende, ya que, aplica y relaciona los conceptos no como algo mecánico, sino como todo un sistema en conjunto.

La resolución de problemas matemáticos, es un tema que ha sido abordado por muchos investigadores desde diferentes puntos de vista; tal vez, el dominio de la heurística y una buena estructuración de los conocimientos matemáticos, son los dos aspectos que se señalan como los de mayor incidencia a la hora de valorar las potencialidades de una persona, para enfrentar con éxito la resolución de un problema matemático. Es muy probable, que los problemas se enseñen como ejercicios por medio de algoritmos de rutina o cálculos numéricos, que solo enfatizan en el uso mecánico de formulas y situaciones de datos conocidos; en muchos casos, si los problemas no dejan ver explícitamente un algoritmo de rutina que se esté trabajando, suelen los estudiantes abandonar el ejercicio, ya que pocos usan el análisis cualitativo de factores que alimentan el ejercicio y fortalecen el aprendizaje. Es muy común encontrarse con estas situaciones, ya que hasta hace muy poco se consideraba que lo importante era desarrollar una serie de habilidades mecánicas, entendiendo que estas iban a despertar una inquietud matemática y la cognición aritmética, proporcionando la falsa ilusión de hacer creer al estudiante que sabia matemáticas, y al profesor (a) que les había enseñado; esto era lo que permitía los formalismos matemáticos, separados de lo particular y especifico, que involucraba nuestro mundo natural.

Todavía, hay muchos interrogantes sobre cuáles son los mecanismos, y procesos que subyacen en el aprendizaje matemático, pero hay principios muy aceptados que dan lugar a poder definir alguna estrategia de enseñanza, para fomentar un aprendizaje significativo en las matemáticas; uno de estos es: la ***resolución de problemas***.

En definitiva, aprender a resolver problemas, y aceptar que con frecuencia hay más de una respuesta a una pregunta y más de una forma de tratarla, constituye una parte fundamental tanto en la educación como en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Las ventajas del enfoque basado en la resolución de problemas en cuanto al proceso de enseñanza y aprendizaje son significativas por diversas razones:

i) Los alumnos tienen la posibilidad de pensar las cuestiones con detenimiento, hacer pruebas, equivocarse, “perder el tiempo” investigando.

ii) Existe una mayor participación y un mayor grado de comprensión por parte del alumnado.

iii) Es un tipo de ***conocimiento basado en la experiencia*** (es decir, el conocimiento obtenido mediante la experiencia de hacer algo), siendo más duradero y significativo para el alumno que el conocimiento transmitido por el profesor o el libro.

iv) Los alumnos se ven inmersos en ***la construcción de sus propios sistemas individuales*** de aprendizaje y de comprensión.

v) Incide directamente en el llamado aspecto formativo, creando así estructuras mentales que trascienden a las propias matemáticas.

vi) La resolución de problemas es el núcleo central de las matemáticas, hacer matemáticas no es otra cosa que resolver problemas.

vii) Hay que tener presente que el único camino que existe para aprender a resolver problemas, es enfrentarse a los problemas.

La resolución de problemas es una actividad primordial en la clase de matemáticas, no es únicamente un objetivo general a conseguir sino que además es un instrumento pedagógico de primer orden.

Así, se propone la resolución de problemas como uno de los pilares del aprendizaje significativo en matemáticas, pues es el vehículo esencial de dicho aprendizaje por ser una fuente motivadora en el trabajo en clase, que permite contextualizar y personalizar los conocimientos, y también permite que el estudiante tenga la oportunidad de investigar sobre problemas a su alcance, conjeturar, probar, construir modelos, conceptos, teorías e intercambiar sus ideas con otros, tomando aquellas que sean útiles y rechazando las que no aporten al desarrollo de dicha solución. Muchos docentes piensan que resolver ejercicios de límites, derivadas, o integrales en este caso, y saber hacer cálculos con la ayuda de algún algoritmo, es todo lo que necesita un estudiante y que solo así el aprende matemáticas, lo cual es un error, ya que estos ejercicios deben ir encaminados a que el estudiante resuelva problemas de su vida, entendiendo las matemáticas como algo práctico y real.

2.2 Definición: Problema.

Según George Polya

“problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no se consigue do forma inmediata, utilizando los medios adecuados”[4].

2.2.1 ETAPAS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

La resolución de problemas es una cuestión de gran importancia para el avance de las matemáticas y también para su comprensión y aprendizaje.

Hay que tener en cuenta que no es lo mismo hacer un ejercicio que resolver un problema. Una cosa, es aplicar un algoritmo que en muchas ocasiones se hace de forma mecánica, y otra es resolver un problema, dando una explicación coherente a un conjunto de datos relacionados dentro de un contexto. Aunque la respuesta suele ser única, la estrategia de solución está determinada por factores madurativos o de otro tipo.

En el aprendizaje por descubrimiento de Ausubel, el estudiante debe descubrir el contenido por sí mismo, generando proposiciones que representan, bien sean soluciones a los problemas que se plantean o pasos sucesivos para resolverlos.

---

4. Serie de las matemáticas. Tercera edición.

Este, es llamado también resolución de problemas y Ausubel considera los siguientes pasos[5] para su aprendizaje:

- Un estado de duda, de perplejidad cognoscitiva, de frustración o de conocimiento y de frustración.
- Un intento por identificar el problema, en el que se incluye una designación más bien inespecífica de los fines perseguidos, la laguna que debe llenarse o la meta que hay que alcanzar; todo esto definido por la situación que se plantea el problema.
- Una relación de proposiciones de planteamiento del problema con la estructura cognoscitiva, lo cual activa las ideas, antecedentes pertinentes y las soluciones dadas, a problemas anteriores que a su vez, son reorganizados (transformados) en forma de proposiciones de hipótesis.
- Comprobación sucesiva de las hipótesis, y replanteamiento del problema de ser necesario.
- Incorporar la solución acertada a la estructura cognoscitiva (comprenderla), y luego aplicarla tanto al problema presente, como a otros ejemplares del mismo problema.

Hay variedad en cuanto a las etapas que proponen diferentes autores en la resolución de un problema, sin embargo, en la mayoría de las propuestas está presente la que hizo el admirable pedagogo George Polya. En algunos casos se han subdividido algunas de las etapas propuestas por Polya y en otros, se han hecho ligeras variaciones.

5. Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. Sexta edición., Trillas 1993 Pág. 64-65

2.2.1.1 Concepto de problema (Polya, George)

Para George Polya (1887 – 1985), padre de las estrategias para la solución de problemas, el problema es:

"Hallar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrando la forma de salir de una dificultad, de superar un obstáculo, y conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata utilizando los medios adecuados"[6]

Los pasos que propuso Polya son los siguientes:

1) Comprender el problema.

2) Captar las relaciones que existen entre los diversos elementos. Ver lo que liga la incógnita con los datos, a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan.

3) Poner en ejecución el plan.

4) Volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla.

2.2.2 El método de los cuatro pasos Polya

Este método propuesto por Polya, está enfocado a la solución de problemas matemáticos, por tal razón es importante señalar algunas diferencias entre "ejercicio" y "problema". Para resolver un ***ejercicio***, usualmente se aplica un procedimiento rutinario que lleva a la respuesta, a diferencia de este, cuando se va a resolver un ***problema***, se hace una pausa, se reflexiona y muchas veces puede suceder que se ejecuten pasos originales que no se habían aprendido en clase, es decir no se había practicado para dar la respuesta.

---

6. Serie de las matemáticas. Tercera edición.

Esta característica de dar una serie de pasos creativos en la solución, sin importar que tan pequeños sean, es lo que distingue en gran manera un problema de un ejercicio. Es claro, que hacer ejercicios es muy valioso en el aprendizaje de las matemáticas, pues nos ayuda a comprender conceptos, propiedades y procedimientos, entre otras cosas; los cuales podremos aplicar cuando nos enfrentemos a la tarea de resolver problemas.

Dentro de los conocimientos matemáticos necesarios para la resolución de problemas, ocupan un lugar destacado los conceptos matemáticos, y dentro de los conceptos se encuentran aquellos que están vinculados con las operaciones matemáticas. Para cada una de las operaciones matemáticas que sean estudiadas, en cualquier nivel de enseñanza, existen dos importantes habilidades que los estudiantes deben desarrollar: la habilidad relacionada con el cálculo de la operación, y la habilidad relacionada con la aplicación de ésta en la resolución de problemas.

El aporte más grande de Polya en la enseñanza de las matemáticas, es su método de los cuatro pasos para la resolución de problemas. A continuación se presentará un breve resumen[7] de cada uno de ellos.

2.2.2.1 La comprensión del problema

La comprensión del problema pasa por una correcta interpretación del enunciado. Si se quiere desarrollar en nuestros estudiantes habilidades y destrezas para la resolución de problemas, en una de las facetas que hay que insistir, es en el análisis de enunciados:

---

7. Como plantear y resolver problemas. En POMEDA MEDINA, Claudia. Resolución de problemas como estrategia que motiva y apoya el aprendizaje significativo de las matemáticas en educación superior. Bucaramanga: UIS, 2004. pág. 29.

¿Cómo concretarlos?, con esto resulta obvio, que se tendrán que colocar problemas en los que no interese tanto la búsqueda de la solución, la estrategia utilizada y la visión retrospectiva final, sino el estudio profundo del enunciado dado, de forma que sea ésta una etapa de familiarización, exploración, etc. En esta etapa, se dan los primeros contactos con el problema, se lee el enunciado despacio y se responden estos interrogantes, ¿cuáles son los datos? (lo que conocemos) y ¿cuáles son las incógnitas? (lo que buscamos); hay que tratar de encontrar la relación entre los datos y las incógnitas, y si se puede hacer un esquema o dibujo de la situación, etc.

2.2.2.2 La concepción de un plan. Un plan de ejecución del problema. Es decir, cómo lo vamos a hacer.

Por lo general, las buenas ideas se basan en las experiencias previas y en los conocimientos adquiridos. El profesor puede mediante preguntas y sugerencias, ir acercando al estudiante a la situación, lo cual le permita trazar un plan de resolución.

Los comentarios que harán aflorar el plan de trabajo, en lo que se refiera a su totalidad como en lo que concierna a sus diversas partes, debe ser comentado como ocurrencia y descubrimiento de ellos; podrían ser de este estilo: ¿conoces algún problema relacionado con éste?, trata de pensar en algún problema familiar que tenga la misma incógnita. He aquí un problema relacionado con éste, y ya resuelto, ¿puedes hacer uso de él?, ¿puede enunciarse el problema de forma diferente? Si no puedes resolver el problema, trata de resolver alguno relacionado con él. Este tipo de orientaciones, los recuerdos de otros problemas ya resueltos, el entorno en el que se mueve el problema y la propia forma de ser del profesor, desembocarán en la elección de un plan de trabajo, de una estrategia de resolución.

2.2.2.3 La ejecución de un plan. Durante el proceso de resolución es conveniente evitar el hacer por hacer, hay que ser conscientes del por qué hacemos las cosas, de modo, que aún cuando la resolución nos implique afectivamente, debemos reservarnos la capacidad de tomar la suficiente distancia al mismo como para posibilitar la verificación de cada paso.

Para aquellas personas que entienden cada problema como un desafío, una aventura llena de misterio o un enigma a resolver, la ejecución del plan es la aventura en sí misma; hasta el punto que en algunos problemas, llegamos a darnos cuenta que la solución no es lo más interesante, ya que el proceso de resolución puede resultar apasionante y divertido.

Una persona imaginativa, llegará a creer que se adentra en una intrincada selva en la que le acechan todo tipo de peligros, y al ir avanzando, el camino se bifurcará una y mil veces. ¿Qué camino coger? En ocasiones, se verá muy claro cuál es el sendero que conviene seguir, pero el otro camino nos parecerá más atractivo, porque el paisaje que se intuye en su transcurso puede que sea más espectacular.

En cada encrucijada, nos asaltarán la duda y la angustia. La duda, porque no siempre es fácil saber que camino hay que seguir, y la angustia, porque elegir un camino supone dejar otro y nunca sabremos que había al final de un sendero no recorrido. Pero, ¿no queremos que las matemáticas no se alejen de la vida real? Pues, la vida consiste en eso: en elegir una cosa sabiendo que se dejan otras y que nunca sabremos cómo eran; pero la diferencia, es que en los problemas siempre podemos volver sobre los propios pasos, e investigar algunas líneas secundarias que nos hayan parecido interesantes.

En definitiva la ejecución del plan adoptado, va a requerir que tengamos claras y permanentemente presentes dos cosas: para qué hacemos lo que hacemos, y el notar que si un camino no lleva a ninguna salida, habrá que dejarlo e iniciar otro.

2.2.2.4 Visión Retrospectiva. Ya hemos llegado a la solución del problema. ¡Ya está resuelto! la dosis de satisfacción que se recibe es tan elevada, que podemos llegar a creer que hemos terminado, pero, no es así.

Resulta muy útil recordar el problema desde el principio. Volver a leer el enunciado, y considerar si se ha encontrado lo que se pedía, ayudará a evitar errores referentes a las desviación del objetivo; también puede ayudar a decidir si la respuesta puede ser la correcta o no.

Con preguntas como: ¿cuál era la información importante?, ¿presentaba contradicciones o redundancias?, ¿has seguido ese plan o te has desviado inconscientemente?, ¿puedes verificar el resultado?, ¿se puede obtener el resultado de otro modo?, ¿se puede utilizar este método para resolver algún otro problema?, ¿se ha empleado todos los datos?, ¿qué conocimientos has utilizado?, ¿qué has aprendido?, ¿qué aspectos de este problema se podrían aplicar a otras situaciones?; se puede realizar una visión retrospectiva que enseñará mucho, ya que pondrán de manifiesto las relaciones del problema con otras cuestiones, y los lugares en los que han surgido las dificultades.

Si la resolución de un problema es una aventura, los recuerdos de esa aventura es lo que irá quedando como bagaje de resolución, y cuantos más problemas se resuelvan, mayor práctica se tendrá y mejor preparado se estará para resolver nuevas situaciones.

2.3 APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO EN CÁLCULO INTEGRAL (INTEGRAL DEFINIDA)

La matemática misma es una ciencia interesante, dinámica y cambiante. Su cambio es rápido y constante, muchas veces hasta turbulenta en sus propios contenidos, y en su manera de enseñarla y aprenderla. Todo esto hace ver que la matemática no puede ser una realidad de abordaje sencillo, pero esto no quiere decir, que sea imposible de abordarla de una manera práctica y adecuada.

La complejidad de la matemática sugiere que los teóricos de la educación matemática, y los agentes de ella, deban estar atentos y dispuestos a los cambios tan repentinos y rápidos, que muchas veces se va efectuando en la tarea de dar a enseñar esta ciencia.

Para Ausubel, el aprendizaje significativo, es en donde el estudiante relaciona el nuevo conocimiento con lo que ya sabe, esto nos deja interpretar que sus experiencias representan un factor de mucha importancia; es por esto, que el docente debe enfocar su labor facilitadora y enseñar consecuentemente con lo que descubra que sabe el estudiante.

En matemáticas cada concepto es consecuente con otros, desde los primeros años escolares se puede ver como es necesario que el estudiante relacione los conceptos antes vistos, con los nuevos que se van presentando en el trascurso de su vida escolar. Este proceso, es algo inevitable e imposible de pasar por alto, por tal razón el docente debe explorar lo que el estudiante conoce sobre el tema, y solo así determinará si los conocimientos previos le permitirán construir con mayor facilidad, los nuevos conocimientos e integrarlos a su estructura cognitiva, lo cual le permitirá, desarrollar su inteligencia y ser capaz de relacionar de manera integral lo que sabe y conoce, respecto a lo que se quiere aprender.

Todo docente de matemáticas debe tratar que cada estudiante, trabaje y construya sus propios aprendizajes, que lleguen a ser autónomos y que tengan la capacidad de elegir que es lo que quieren aprender; y no buscar el desarrollo memorístico y mecánico, como una alternativa de aprendizaje. Lo que busca el aprendizaje significativo, es precisamente romper con el esquema tradicionalista que se ha estado planteando por muchos años, donde el uso de la memoria y la repetición parecía la mejor opción de aprendizaje, sin tener en cuenta, los intereses, necesidades y otros aspectos, que hacen que el estudiante desee aprender y obtenga de éste un significado valioso. De allí el interés por la clase y por el trabajo en el aula.

De los tipos de aprendizajes mencionados anteriormente, el aprendizaje memorístico y repetitivo, quedaron a la luz cuando se analizaron las respuestas que dieron los estudiantes, a la prueba aplicada (test), **Ver anexo 1**, como instrumento de recolección de datos, de la cual partiríamos para la presentación de esta propuesta, algunas de las preguntas propuestas en este test han sido analizadas a continuación.

Este test se aplico a 92 estudiantes de cálculo integral (cálculo II) de la Universidad Industrial de Santander, repartidos de la siguiente manera, grupo H1 de cálculo II de treinta y nueve (39) estudiantes, grupo H2 de treinta y seis (36) estudiantes, y otros 17 estudiantes de cálculo II de diferentes grupos tomados de forma aleatoria en la biblioteca de la UIS, este test se aplico en el mes de agosto del año 2008, entre los días 11 y 15 del mes antes mencionado; tiempo en el cual se había visto el tema, ya que se estaba cerrando semestre, al aplicar la prueba se partió del hecho que los estudiantes ya habían visto el tema y se les había evaluado, lo que se buscaba era ver que es lo que en realidad queda en el estudiante sobre la integral definida.

Algo de resaltar, es que de los ejercicios planteados en el test, algunos no eran aplicables al concepto de integral definida, es decir, no se resolvían por integral definida, los estudiantes fueron informados de este hecho antes de aplicar la prueba. Estas son algunas de las respuestas que se obtuvieron.

Al revisar las respuestas que dieron los estudiantes, se puede notar en diferentes casos, cuando el estudiante no hace ningún esfuerzo por analizar y debatir que, se le está pidiendo que resuelva, por ejemplo en este punto al estudiante se le pide que resuelva este problema:

Una bicicleta tuvo durante 4 horas una velocidad promedio equivalente a la velocidad mínima que alcanzó un auto en el mismo intervalo de tiempo. La velocidad del auto en km. por horas fue de $f(x) = 3{,}125x^2 - 25x + 60$ *siendo x las horas que iban transcurriendo (*$0 \leq x \leq 4$*) ¿cuál fue el espacio recorrido por la bicicleta durante las 4 horas?*

A continuación, se muestra una de las respuestas que dieron a este problema:

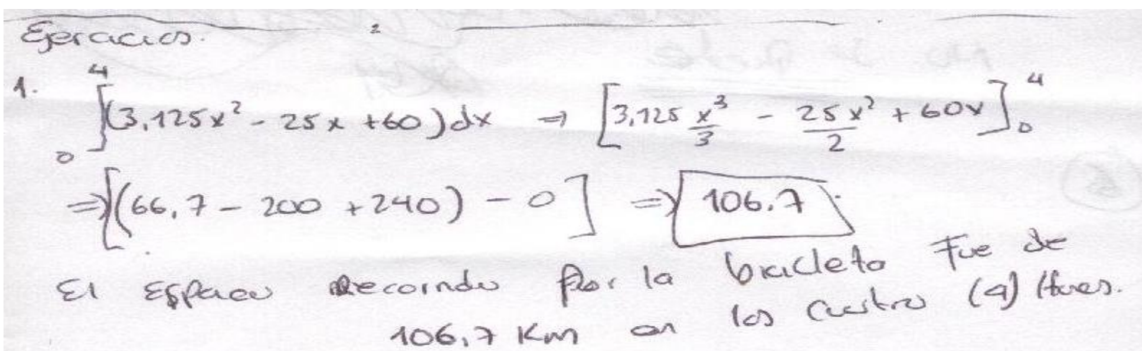


Imagen 1. Respuesta de un estudiante

Esta respuesta fue dada por un estudiante de ingeniería. Es un problema sencillo, y no se necesita el uso de la integral para solucionarlo, pero se observa claramente en este ejercicio que el estudiante lo resuelve por integrales sin darse cuenta que no es aplicable. La solución a este problema es la siguiente; $S = 10(4) = 40$ y no requiere el uso del concepto de integral definida.

Esta es otra respuesta dada, por otro estudiante al mismo ejercicio.

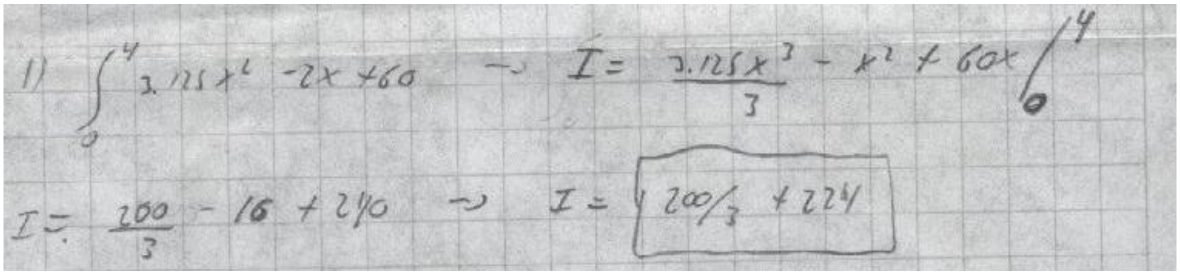


Imagen 2. Respuesta de un estudiante

Se puede ver que los estudiantes resuelven integrales definidas, hasta manejan diferentes métodos de integración, pero se observa claramente, que no reconocen cuando no es aplicable el concepto de integral definida en algunas situaciones. Esto demuestra, el aprendizaje memorístico y repetitivo que van adquiriendo los estudiantes.

Por ejemplo en este otro ejercicio, podemos ver que no se necesita el concepto de integral definida pero igual lo usan para resolver el ejercicio.

En una fila hay 10 personas ordenadas de acuerdo a sus estaturas de menor a mayor. Cada persona es 2 centímetros más alta que la anterior. Las estaturas en centímetros de estas personas se pueden expresar mediante la función $f(x) = 164 + 2x$ *, donde x representa el orden en la fila de cada persona. ¿Cuál es la suma de las estaturas de las 10 personas?*

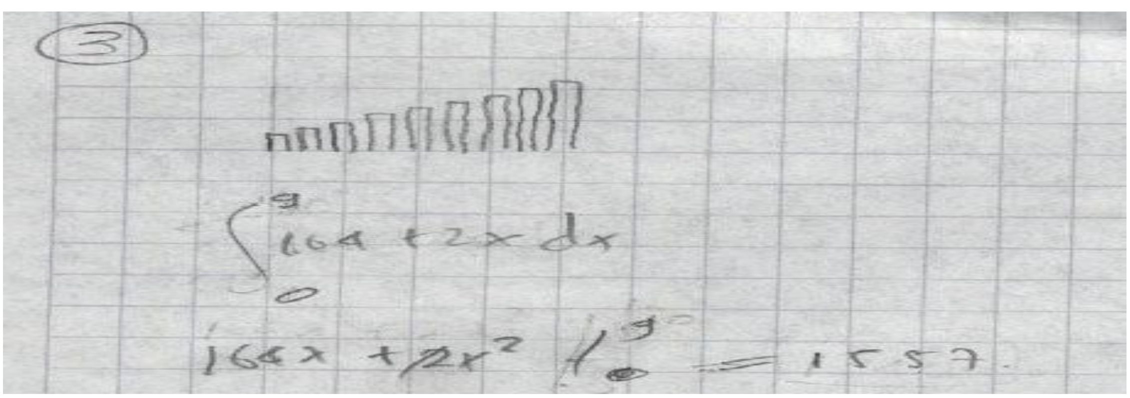


Imagen 3. Respuesta de un estudiante

Esta es una de las diferentes respuestas que dieron los estudiantes, aunque todas en cierta manera fueron similares, ya que ninguna de las respuestas obtenidas dan solución a este ejercicio; primero porque no se dieron cuenta que no era aplicable para resolver por integrales, y segundo, porque no analizaron el contexto. Solo una persona hizo algo un poco diferente, y determino lo siguiente:

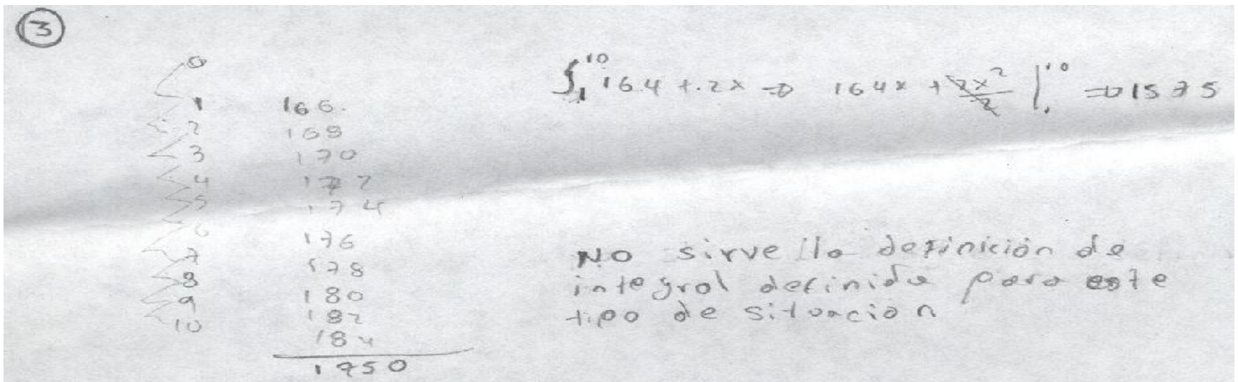


Imagen 4. Respuesta de un estudiante

Vemos que primero resuelve la integral y después afirma que no sirve el concepto de integral definida para dar solución a este ejercicio, y es verdad, no es aplicable al concepto de integral definida, pero el estudiante no da un argumento que sustente lo que afirma, o una explicación de por qué dice que no es aplicable el concepto, si se ve que la integral aparentemente quedó “resuelta”. Esto hace pensar, que el estudiante se dio cuenta que no era aplicable el concepto de integral definida por algún razonamiento que hizo en algún lugar, pero no lo incluyo en la evidencia o no fue capaz de argumentar con sus propias palabras, como también pudo ser, que simplemente determinó que no era aplicable el concepto por salir del paso.

¿Qué se podría decir a cosas como estas, donde claramente se ve que en el aprendizaje, siguen ganando la batalla la memorización y la repetición? Sí. Está bien, es muy válido que el estudiante resuelva muchos ejercicios de diferentes libros y que resuelva extensos talleres de ejercitación con diferentes métodos de integración; pero hay que evitar que esto, se haga como una simple repetición sin tener en cuenta qué se aprendió del concepto, y la aplicabilidad que tiene la integración en el mismo.

En las repuestas dadas por los estudiantes en el test de valoración, se nota claramente vacios en el concepto de integral definida, desde qué representa la integral, hasta cómo determinar si un ejercicio es aplicable para resolver por integrales.

A la siguiente pregunta que se hizo ¿Que representa la integral definida? Varios estudiantes respondieron que era solo el área bajo la curva.

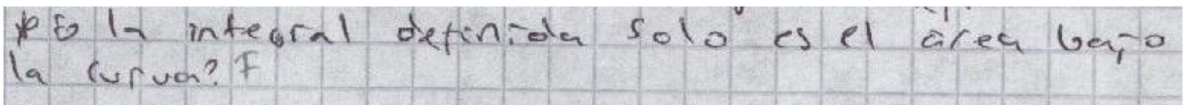

* Es la integral definida solo es el área bajo la curva? F

Imagen 5. Respuesta de un estudiante

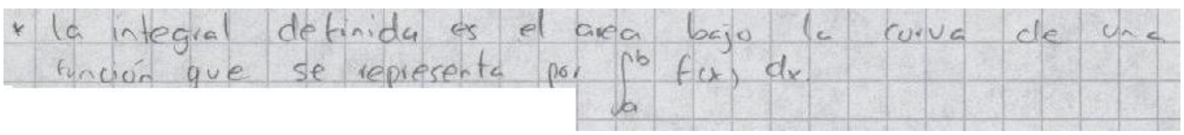

* la integral definida es el área bajo la curva de una función que se representa por $\int_a^b f(x)\, dx$

Imagen 6. Respuesta de un estudiante

Se debe aclarar que la integral definida representar el área bajo una curva, pero en ocasiones no lo es ya que también puede tomar valores negativos.

Otras respuestas que dieron a esta pregunta fueron las siguientes:

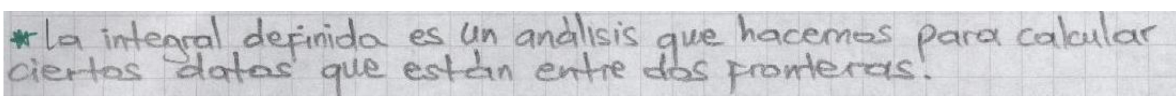

* la integral definida es un análisis que hacemos para calcular ciertos datos que están entre dos fronteras.

Imagen 7. Respuesta de un estudiante

Esto es un procedimiento que se hace para hallar la integral definida, vemos que aún no es claro que representa la integral definida para algunos estudiantes.

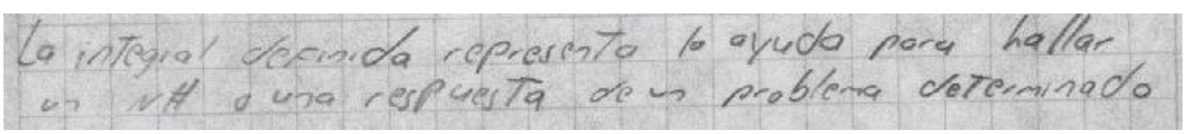
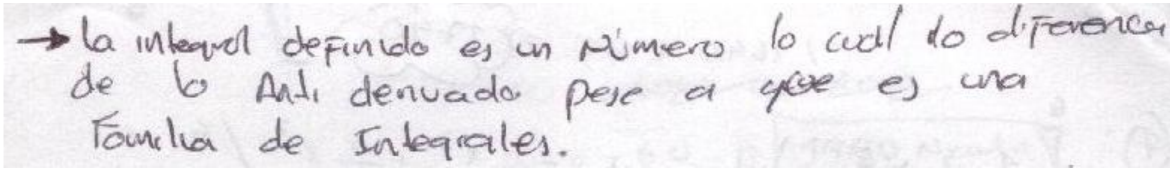

La integral definida representa la ayuda para hallar un N# o una respuesta de un problema determinado

Imagen 8. Respuesta de un estudiante

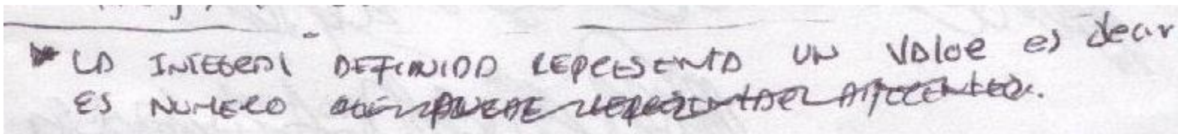
En la imagen anterior, se evidencia que el estudiante no comprende como tal el concepto de integral definida, ya que piensa o manifiesta que es una ayuda, u operación matemática que le permite dar respuesta a un problema.



→ la integral definida es un número lo cual la diferencia de la Anti derivada pese a que es una Formula de Integrales.

Imagen 9. Respuesta de un estudiante

La respuesta anterior, muestra que el estudiante aún no relaciona que es la integral y la anti derivada.



LA INTEGRAL DEFINIDA REPRESENTA UN VALOR es decir ES NUMERO ~~[illegible]~~.

Imagen 10. Respuesta de un estudiante

Para este estudiante, la integral definida no es más que un número, y no le representa nada.

Varias de las respuestas que dieron los estudiantes, dan a pensar que no tienen claro qué representa la integral definida. Allí, es donde la importancia de un aprendizaje con significado tiene valor, por eso con esta propuesta se espera generar la inquietud en el docente, por definir el concepto de integral definida y también, por emplear la resolución de problemas como un agente de gran importancia en el desarrollo de su clase, ya que así logrará que el estudiante piense en cómo obtener una respuesta a dicho problema; además de interpretar la aplicación que ésta ofrece en el contexto, y dejar de lado el modelo memorístico que tanto daño le ha hecho a la educación.

Es inquietante ver que muchos estudiantes universitarios, después de haber cursado en la Universidad Cálculo I, Cálculo II y Algebra superior, y así mismo, después de haber resuelto un sin número de ejercicios, aún no puedan determinar cuando un ejercicio es aplicable o no para resolver con integrales. A continuación, una muestra clara de ello:

Un depósito de cemento en forma de pirámide invertida tiene una compuerta en su parte inferior. Al abrirse la compuerta comienza a caer cemento en un camión de volteo. La cantidad de metros por minutos en que va disminuyendo la altura del volumen del cemento en el depósito está dado por la función $f(x) = 0{,}1x + 0{,}2, (0 \leq x \leq 10)$, donde x representa la cantidad de minutos transcurridos. ¿Cuántos metros disminuye en total la altura del volumen del cemento en los primeros 6 minutos?

Este ejercicio se puede resolver por integral definida, pero no lo resolvieron usando el concepto de integral, como por ejemplo.

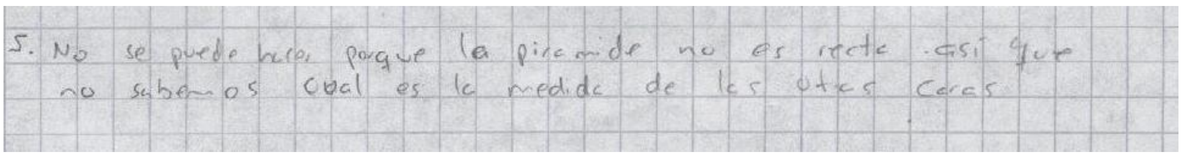

5. No se puede hacer porque la piramide no es recta así que no sabemos cual es la medida de las otras caras

Imagen 11. Respuesta de un estudiante

Esta es una respuesta de un estudiante a este ejercicio, donde ni siquiera presenta un argumento válido para decir que no se puede resolver por integrales.

Hay que tener en cuenta, que antes de desarrollar el test, se les advirtió a los estudiantes que algunos ejercicios no se resolvían por integral definida, que determinaran cuáles eran y explicaran el por qué de su apreciación. Esto se hizo con el objetivo, que los estudiantes analizaran los problemas y determinaran si cumplían o no con las condiciones necesarias para ser integrables, además de evitar que todos respondieran el test, resolviendo los problemas por integrales, evitando así el uso repetitivo y memorístico de los métodos de integración, obligándolos de cierta manera, a analizar antes de responder algún problema.

De este test, los resultados no sólo fueron los mencionados anteriormente, hubo una sorpresa más. Cuando algunos estudiantes dieron sus respuestas, donde escogieron los ejercicios que no se podían resolver por integrales y los resolvieron, y los que si se podían resolver por integrales, dijeron que no, es decir no acertaron en ningún caso, por ejemplo:

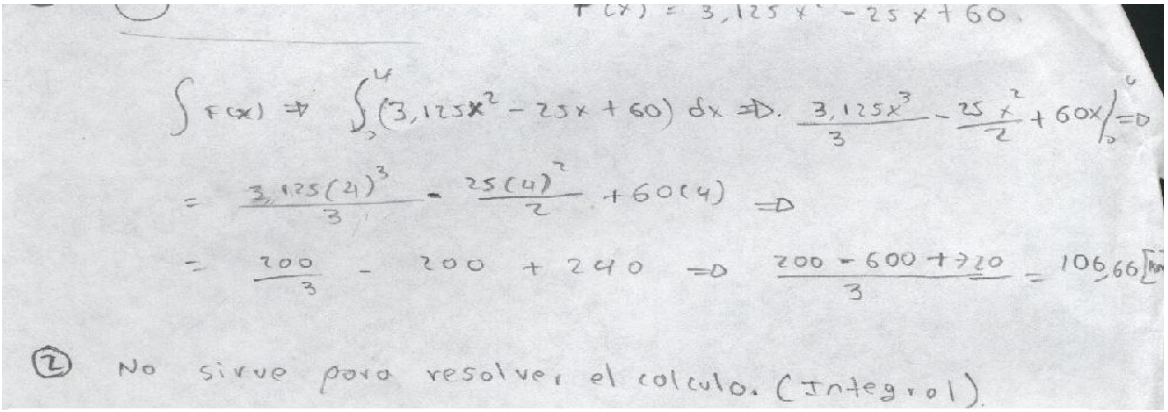


Imagen 12. Respuesta de un estudiante

Aquí se puede ver, que el estudiante no tiene claro cuando un problema es integrable y cuando no.

Algunos estudiantes intentaron resolver los problemas por integrales, y acertaron en que uno de los problemas que no se podían resolver por integral definida era el ejercicio número dos de la guía, lo cual es correcto, pero no fueron capaces de dar las razones por las cuales consideraban que este ejercicio no se resolvía por integral. La siguiente imagen, sustenta lo dicho anteriormente.

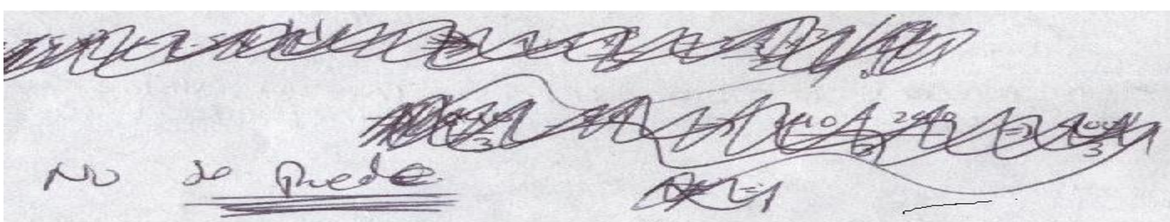


Imagen 13. Respuesta de un estudiante

Es común que los estudiantes al enfrentarse a un ejercicio, sea cual sea, sepan que método usar para darle solución. Sin embargo, se evidencia que hay poca claridad en el concepto, aún cuando se trata simplemente de determinar cuando un ejercicio es integrable.

Será que ésta problemática evidenciada, está seriamente ligada con que el estudiante no sea capaz de relacionar lo algorítmico con las aplicaciones y situaciones problema, y por ende, no es capaz de analizar y determinar cómo y cuándo usar los algoritmos. Ante esto es fácil concluir, que aún nos encontramos en un aprendizaje memorístico, en el cual los estudiantes solo aprenden a resolver integrales de forma mecánica, y donde lo único que hacen es ver el ejercicio y pensar que método sirve para solucionar la integral, sin antes observar si es necesario o no hacerlo por este medio.

Es importante e indispensable, que el estudiante después de ver el curso de integral definida (cálculo II), este en la capacidad de determinar cuando un ejercicio es aplicable para resolver por integrales; no como quedó evidenciado, en el análisis hecho a las respuestas obtenidas mediante el test. De acuerdo a este análisis, ha tomado gran importancia la resolución de problemas y la identificación de los mismos, intentando lograr por medio de estos, un verdadero aprendizaje significativo.

Lo que se busca con el aprendizaje significativo en la integral definida, es lograr que los aprendizajes memorísticos adquiridos mediante la repetición, los cuales al poco tiempo se olvidan, sean dejados de lado; ya que estos tipos de conocimientos por repetición se incorporan en forma arbitraria en la estructura cognitiva del diciente, y éste realiza un esfuerzo muy grande para integrar los nuevos conocimientos, con sus conocimientos previos. Es por esto, que el aprendiz no concede el valor a los contenidos presentados por el profesor, y solo estudia para el momento.

Por otra parte, como el aprendizaje significativo se construye con base a lo que el estudiante conoce, y es una actividad en donde él puede desarrollar habilidades y recordar con manera activa tal actividad de aprendizaje, si logramos un aprendizaje significativo en nuestros estudiantes podremos lograr algunas características como estas:

- Que el nuevo conocimiento, se fije más fácilmente en las estructuras cognitivas del estudiante.
- Relacionar los conocimientos nuevos, con los que trae el estudiante.
- Tener en cuenta los intereses, necesidades y realidades del estudiante, para que demuestre interés en aprenderlo.

Lo que se debe lograr como docentes, es sacar definitivamente al estudiante del uso memorístico y repetitivo de las matemáticas, en este caso de los diferentes métodos de integración; teniendo en cuenta que todos son importantes, pero en ocasiones, se enfrasca a resolver ejercicios sin tener en cuenta si de verdad son aplicables, o si el ejercicio amerita la integración.

3 PROPUESTA PARA EL MEJORAMIENTO DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO EN LA NOCIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA

Se propone que a través de problemas y situaciones particulares y con un lenguaje claro, cercano y preciso, llevar al estudiante a experimentar el proceso de “hacer matemáticas”, de tal suerte que los estudiantes sientan que son parte activa y fundamental de le clase y lograr que el estudiante no se limite a imitar al profesor, entiéndase, a repetir lo que hace el profesor en el tablero a la hora de resolver un ejercicio, sino que pueda desarrollar las actividades que se planteen en clase y además pueda asimilar el concepto del tema de forma significativa, permitiendo aplicarlo a otras áreas del conocimiento.

Con esto se pretende cambiar la perspectiva que tienen los estudiantes acerca del cálculo, y en especial del concepto de integral definida, como algo complicado y alejado de la realidad, mostrándoles que las matemáticas no son algo mágico e irreal que está reservado solo para algunos, sino que –al contrario– es una ciencia que se puede manejar y entender siempre que se trabaje con dedicación y cuidado, no olvidando sustentar lo que se hace de una manera adecuada. De esta manera se puede hacer de la clase algo interesante y efectivo.

En esta propuesta, se plantea tener en cuenta algunos aspectos o puntos importantes que puede ayudar a mejorar el aprendizaje significativo de un concepto o noción matemático. Estos aspectos que se toman en cuenta son los siguientes: una construcción del concepto, (a través de situaciones particulares induciendo a la generalización); una representación del el concepto (que lo identifique en cualquier situación o ejercicio); y resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje, que servirá de evidencia para determinar que se alcanzo el objetivo.

Al tener en cuenta esta propuesta, se sugiere desarrollar paso a paso, los puntos que intervienen en ella, aunque no es una regla general, ni tampoco algo nuevo o novedoso, aportará al mejoramiento de un aprendizaje significativo ya que trae a la luz algunos aspectos que han sido olvidados en la enseñanza como mostrar que es el concepto, que representa y cómo se aplica

Se deben hacer algunas apreciaciones, como por ejemplo, la construcción planteada en esta propuesta sobre el concepto de integral definida, no es una regla de oro, el docente está en la libertad de trabajar la construcción que él crea conveniente.

En esta propuesta se plantea la manera de deducir el concepto de integral definida por medio de una construcción sencilla e intuitiva.

3.1 Construcción del concepto.

Este punto es muy importante, porque hay que motivar al estudiante a que descubra cómo surge el concepto y a partir de dónde se construye. Este momento histórico debe volver a intervenir en la enseñanza de cualquier concepto matemático, ya que aportará en gran manera a encontrar el aprendizaje significativo que tanto buscamos y así evitar que los estudiantes piensen que las matemáticas con algo mágico e irreal, o que simplemente alguien lo impuso y ya; es bueno que el estudiante se relacione con la construcción del concepto, ya que la construcción podrá, o no, contener pre-saberes que el estudiante ya ha estudiado y aprendido.

La construcción de cualquier concepto matemático, ayuda a conocerlo y entenderlo mejor, y permite ver cómo éste actúa o interviene en la vida cotidiana y qué función cumple; permite además mostrar que se fundamenta en estudios, que tiene-sustento y validez y que se puede generalizar.

Para enseñar el concepto de integral definida, se propone plantear una construcción sencilla que ayude al estudiante a comprender el concepto. Se propone partir de un ejercicio particular que dé una idea intuitiva de la integral, para luego llegar a un planteamiento general, por ejemplo, que podemos definirla mediante el área de una región limitada por curvas, continuas, arbitrarias, para lo cual partiremos de algunos saberes previos, como hacer la aproximación al área de una región curva usando áreas de polígonos ya conocidas (rectángulos), para luego buscar el límite de las áreas y hacer una aproximación al área deseada.

El siguiente ejemplo nos ayudara a ilustrar mejor el procedimiento.

Tenemos dos opciones para resolverlo puede ser construyendo rectángulos inscritos y circunscritos bajo el área que se desea. Miremos.

Calcular el área de la región limitada por la curva $y = x^2$, el eje X y la recta $X = 1.$

El área que buscamos esta bajo una parábola y entre el intervalo $[0,1]$.

Como veremos a continuación

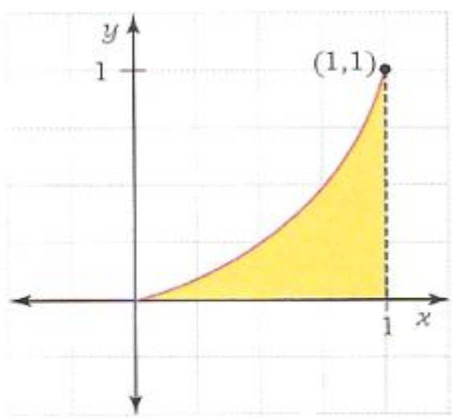


Figura 1.

Usaremos un método de aproximación para esta área que consiste en dividir $[0,1]$ en intervalos más pequeños sobre los cuales se construirá rectángulos de igual base. Es importante tener en cuenta que si la base de cada rectángulo tiene a ser muy pequeña, la aproximación del área pedida será más exacta.

Observemos un poco esta situación.

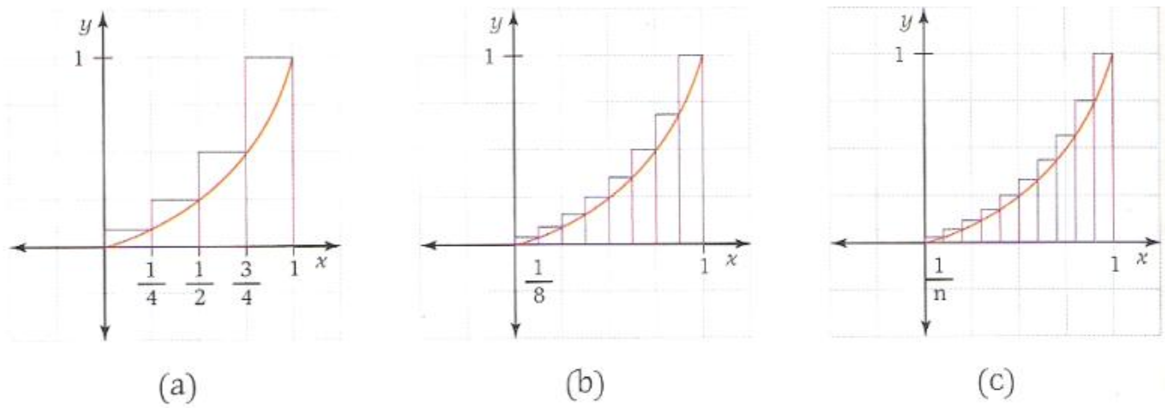


Figura 2.

En las figuras (a), (b) y (c) se muestra la aproximación de la región parabólica de cuatro, ocho y n rectángulos, se le muestra al estudiante que a medida que se aumentan el número de rectángulos, se va obteniendo una mayor precisión en el área deseada.

Si S_n es la suma de las áreas de los n rectángulos de la figura c . Cada rectángulo tiene de ancho $\frac{1}{n}$ y de alto los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$,….,$\frac{n}{n}$. Así las alturas son:

$\left(\frac{1}{n}\right)^2$, $\left(\frac{2}{n}\right)^2$, $\left(\frac{3}{n}\right)^2$,…..., $\left(\frac{n}{n}\right)^2$. De modo que:

$$S_n = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n} * \frac{1}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots \mathrm{n}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

Utilizando la fórmula de la suma de los cuadrados de los n primero enteros, se puede escribir

$$S_n = \frac{1}{n^3} * \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Por ejemplo, miremos la suma de las áreas de los cuatro rectángulos construidos en la figura 2.(a) es

$$S_4 = \frac{5(9)}{6(16)} \approx \frac{45}{96} = 0{,}46875$$

Y la suma de las áreas de los ocho rectángulos de la figura 2. (b) es

$$S_8 = \frac{9(17)}{6(64)} \approx 0{,}3984375$$

De igual manera,

$$S_{100} \approx 0{,}33835 \;\; y \;\; S_{1000} \approx 0{,}33383$$

S_n se vuelve más cercano a un $\frac{1}{3}$ cuando n aumenta. En este momento se muestra a los estudiantes la utilidad de un cálculo de límites, que para ellos es un conocimiento previo. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} * 1 * 2 = \frac{1}{3}$$

Así el área A se define como el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación, esto es,

$$A = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3}$$

Al aplicar una idea más general, a la región S, no se requiere usar rectángulos de anchuras iguales. Que se subdivide el intervalo $[1{,}2]$ en n subintervalos más pequeños, y se elige puntos de partición $x_0,\ x_1,\ x_2, \dots, x_n$ de manera que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Entonces los n sunintervalos son

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

Esta subdivisión se llama **partición** de $[a, b]$ y se denota P. Para indicar la longitud del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, así $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

El problema anterior se puede simplificar cuando se tenga el concepto de integral definida, pero antes de usarla se propone que se muestre a los estudiantes un proceso de cómo hallar áreas, mediante el uso de áreas conocidas para llegar al concepto. De esta manera se hace notar que para determinar el área bajo una curva, primero definimos la función que la define, para así calcular el área que se forma debajo de ella.

Al terminar el ejercicio se deben plantear preguntas como por ejemplo ¿será que con cualquier curva se cumple?, ¿es posible resolver otros ejercicios de igual forma? Así motivar al estudiante a ir un poco más allá de lo que se plantea en clase, que analicé, proponga, que se dé cuenta que aun se puede hacer mucho mas hasta el punto de generalizar para aquellas curvas especiales fáciles de detectar el máximo y el mínimo por ejemplo:

Para generalizar, se puede orientar a los estudiantes que inscriban bajo cualquier área que se quiere hallar, rectángulos, para ir haciendo una aproximación a un área deseada, por ejemplo.

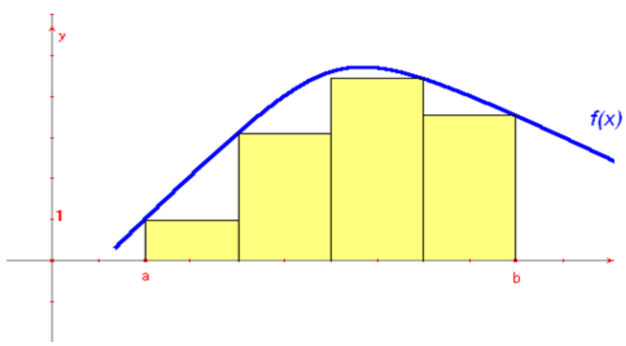


Figura 3.

Ó

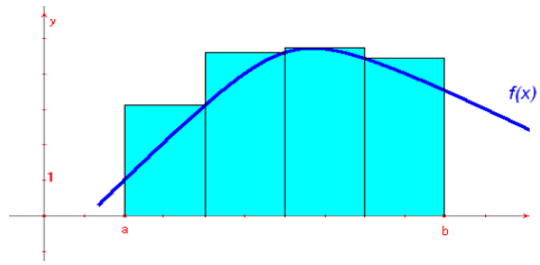


Figura 4.

Al graficar una función se muestra al estudiante que si se introducen rectángulos bajo la curva que está limitada por ella y otra función, se ve una ligera aproximación al área que deseamos saber, además que si introducimos una mayor cantidad de rectángulos (de igual área) bajo el área que se busca, la aproximación al área deseada es mucho mayor, así se muestra o se orienta al estudiante que note la necesidad e importancia de introducir una gran cantidad de rectángulos de tal manera que al aproximación sea muy precisa. Con esto se espera que el estudiante comprenda la necesidad de plantear un proceso al infinito por medio de límites, un concepto ya antes estudiado un (pre - saber) y manejado por ellos, para lograr con mayor exactitud posible el cálculo del áreas bajo una curva.

Recordemos que aquí en este instante los estudiantes con la ayuda del profesor han desarrollado un ejercicio de cálculos de áreas como el que vimos anteriormente en la página 50, lo que hacemos es un análogo al proceso que se debe seguir para poder generalizar.

Con la ayuda del cálculo de límites, se plantean las aproximaciones por defecto y exceso de la siguiente manera.

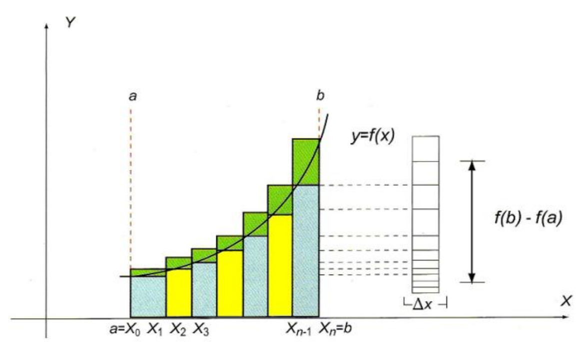


Figura 5.

Se parte de que una función F continua y no negativa tiene área bajo su gráfica si cuando la amplitud de su partición $\Delta\mathrm{x}$ tiende a cero, entonces el límite de las aproximaciones por exceso es igual al límite de las aproximaciones por defecto.

Mostrándoles que el rectángulo inscrito sobre el i-ésimo término, sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tiene altura$f(x_{i-1})$, mientras que el i-ésimo rectángulo circunscrito tiene una altura $f(x_i)$. Como la base de cada rectángulo tiene una longitud $\Delta\mathrm{x}$ las áreas de estos rectángulos son $f(x_{i-1})\Delta\mathrm{x}$ y $f(x_i)\Delta\mathrm{x}$.

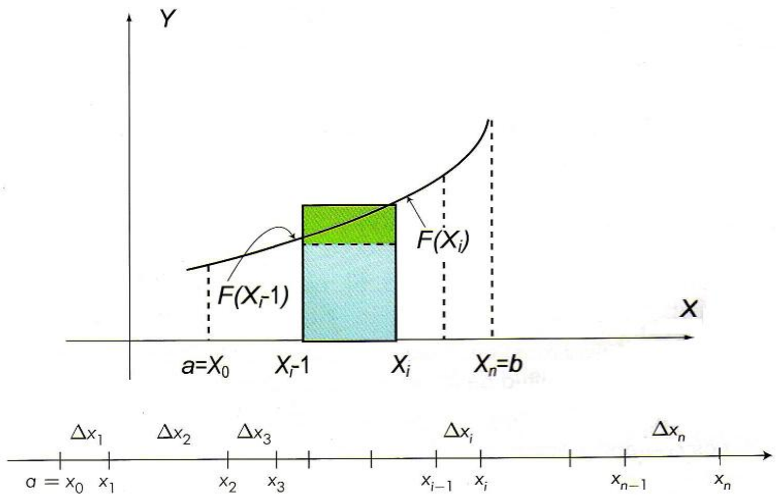


Figura 6.

Al sumar las áreas de los rectángulos inscritos para $i = 1, 2, 3, .., n$ obtenemos:

$An = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$, pero $\Delta X = \frac{(b-a)}{n} \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

La siguiente grafica muestra la región R que está bajo la grafica de una función creciente f con valores positivos, y por arriba del intervalo $[a, b]$. Para aproximar el área *A* de *R*, elegimos un entero fijo *n* y dividimos el intervalo $[a, b]$ en n intervalos. $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$,…, $[x_{n-1}, x_n]$ todos con la misma longitud $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, y en cada uno de estos intervalos, trazamos un rectángulo.

En general se puede partir del caso especial del área bajo la curva para llegar a la integral definida, de la siguiente manera.

Miremos,

ÁREA BAJO UNA CURVA

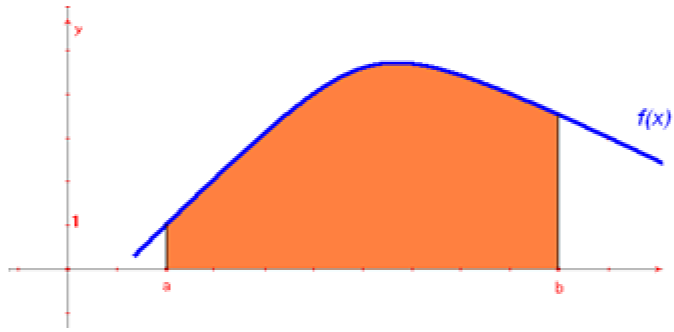


Figura 7.

SUMAS INFERIORES

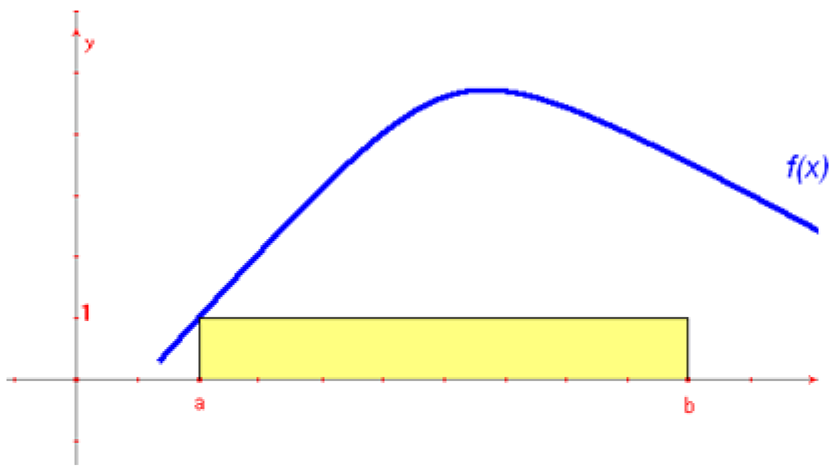


Figura 8.

$$S_{\inf}(f,1) = h \cdot m_1; \quad h = b - a$$

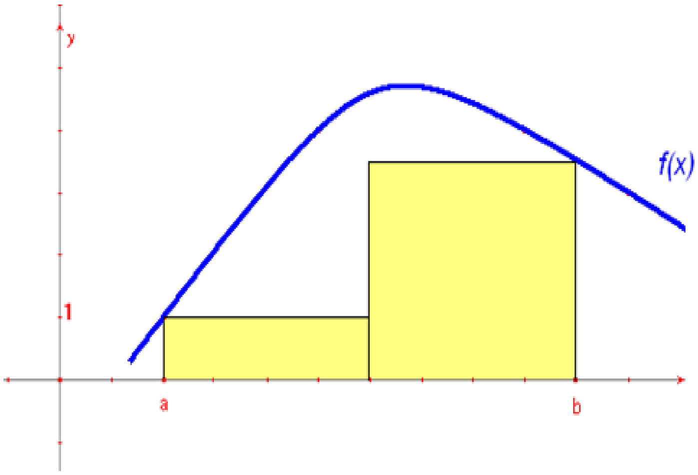


Figura 9.

$$S_{\inf}(f,2) = h \cdot m_1 + h \cdot m_2 \ ; \quad h = \frac{b-a}{2}$$

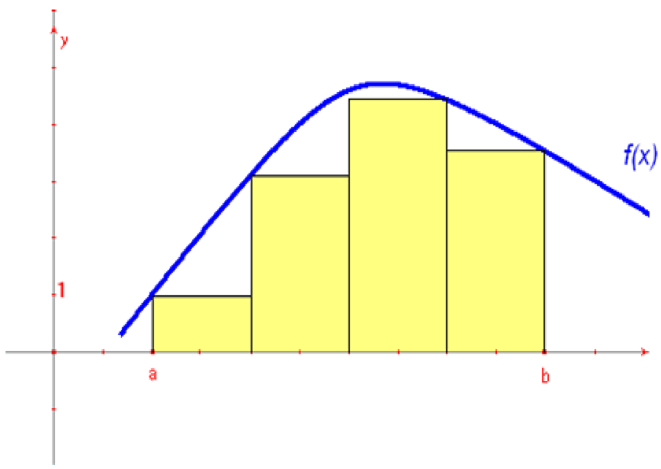


Figura 10.

$$S_{\inf}(f,4) = h \cdot m_1 + h \cdot m_2 + ... + h \cdot m_4 = \sum_{k=1}^{4} h \cdot m_k \ ; \quad h = \frac{b-a}{4}$$

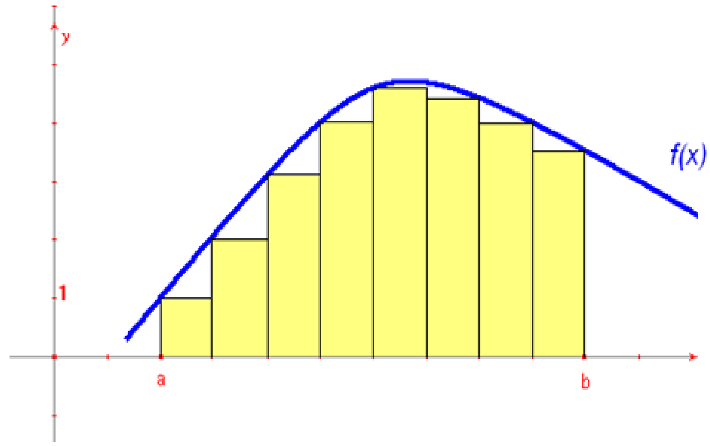


Figura 11.

$$S_{\inf}(f,16) = h \cdot m_1 + h \cdot m_2 + ... + h \cdot m_{16} = \sum_{k=1}^{16} h \cdot m_k \;;\quad h = \frac{b-a}{16}$$

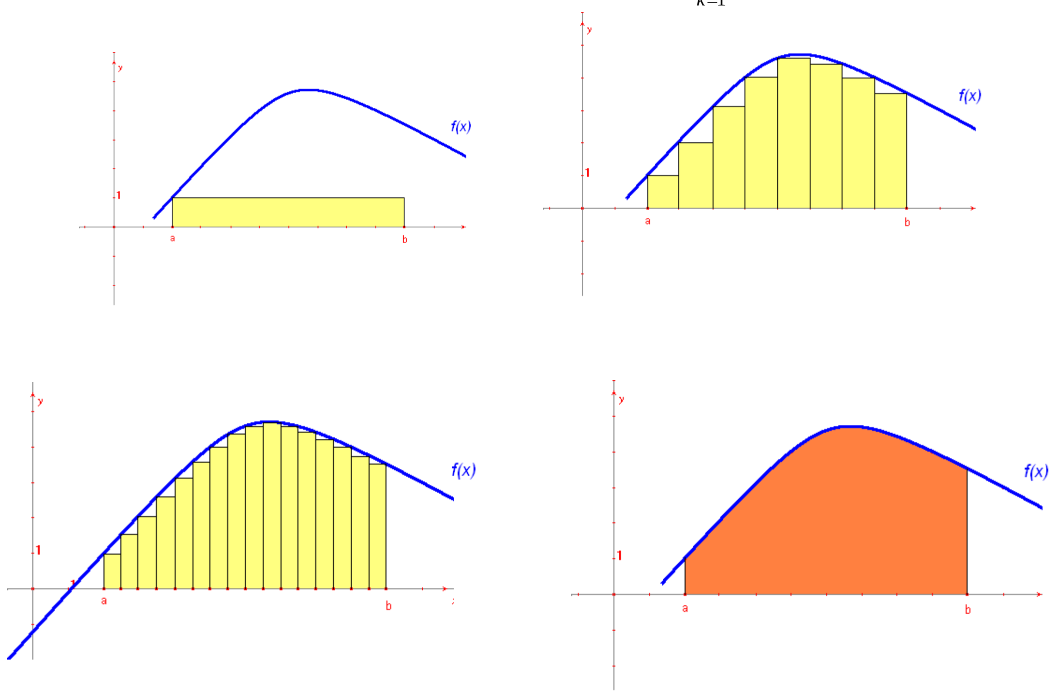


Figura 12.

$$S_{\inf}(f,n) = h \cdot m_1 + h \cdot m_2 + ... + h \cdot m_n = \sum_{k=1}^{n} h \cdot m_k \;;\; h = \frac{b-a}{n}$$

$$S_{\inf}(f,n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \text{Área bajo } f \text{ entre } x = a \text{ y } x = b$$

O de este otro modo.

SUMAS SUPERIORES

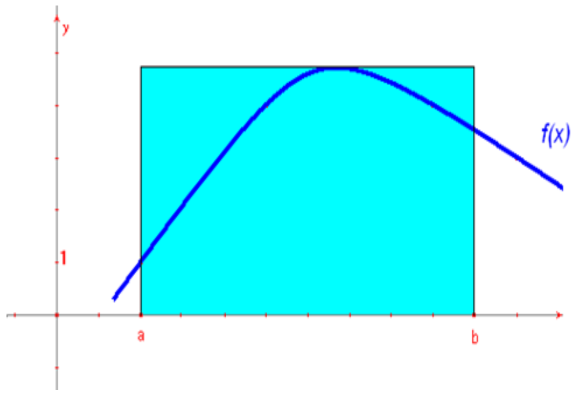


Figura 13.

$S_{\sup}(f,1) = h \cdot M_1;\ h = b - a$

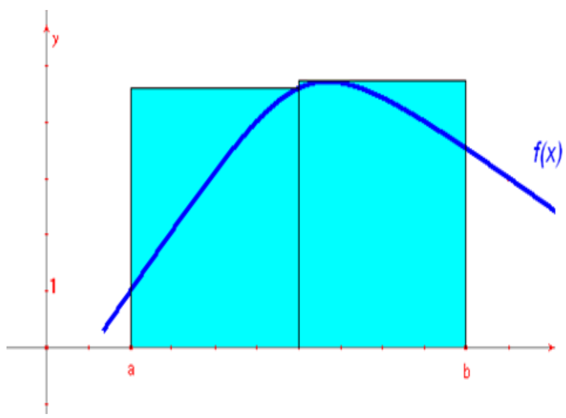


Figura 14.

$S_{\sup}(f,2) = h \cdot M_1 + h \cdot M_2;\quad h = \dfrac{b-a}{2}$

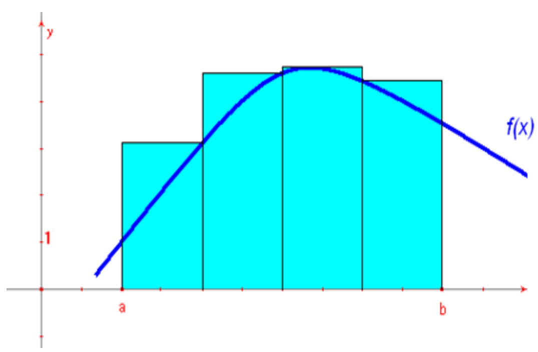


Figura 15.

$$S_{\sup}(f,4)=h\cdot M_1+h\cdot M_2+....+h\cdot M_4=\sum_{k=1}^{4}h\cdot m_k\ ;\quad h=\frac{b-a}{4}$$

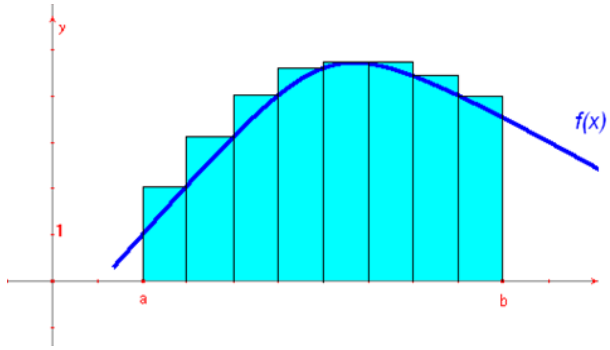


Figura 16.

$$S_{\sup}(f,8)=h\cdot M_1+h\cdot M_2+....+h\cdot M_8=\sum_{k=1}^{8}h\cdot M_k\ ;\quad h=\frac{b-a}{8}$$

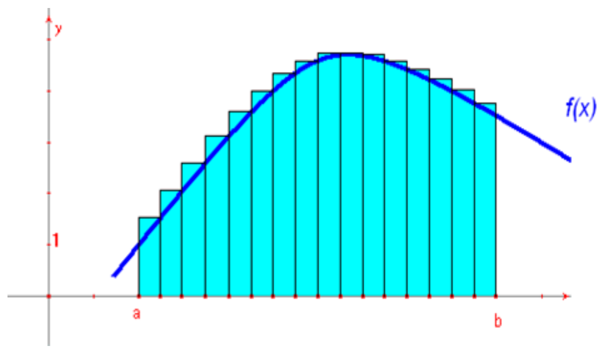


Figura 17.

$$S_{\sup}(f,16)=h\cdot M_1+h\cdot M_2+....+h\cdot M_{16}=\sum_{k=1}^{16}h\cdot M_k\ ;\quad h=\frac{b-a}{16}$$

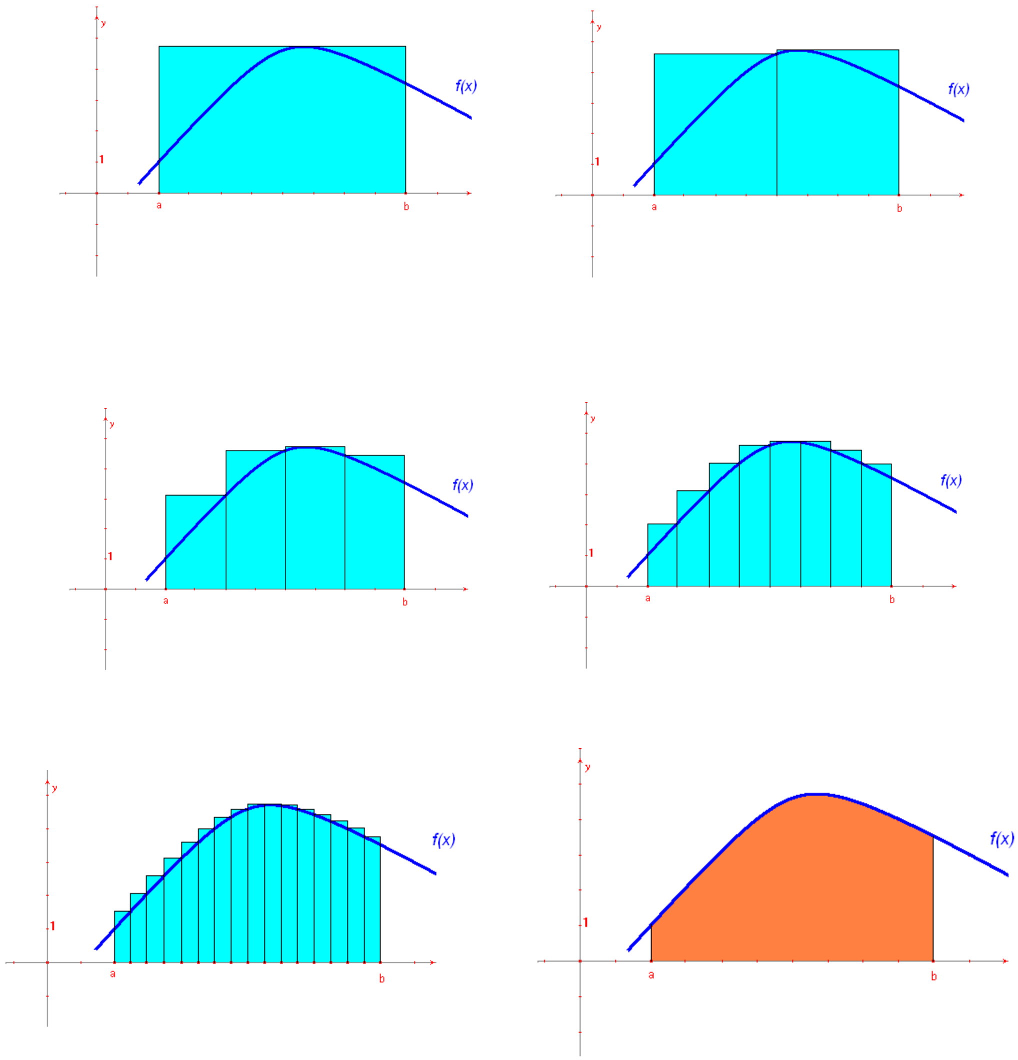


Figura 18.

$$S_{\sup}(f,n)=h\cdot M_1+h\cdot M_2+....+h\cdot M_n=\sum_{k=1}^{n}h\cdot M_k\ ;\ h=\frac{b-a}{n}$$

$$S_{\sup}(f,n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\acute{A}rea\ bajo\ f\ entre\ x=a\ y\ x=b$$

Así podemos concluir en clase, que la integral definida se puede dar así

INTEGRAL DEFINIDA

SUMAS INFERIORES, SUPERIORES Y ÁREA BAJO LA CURVA.

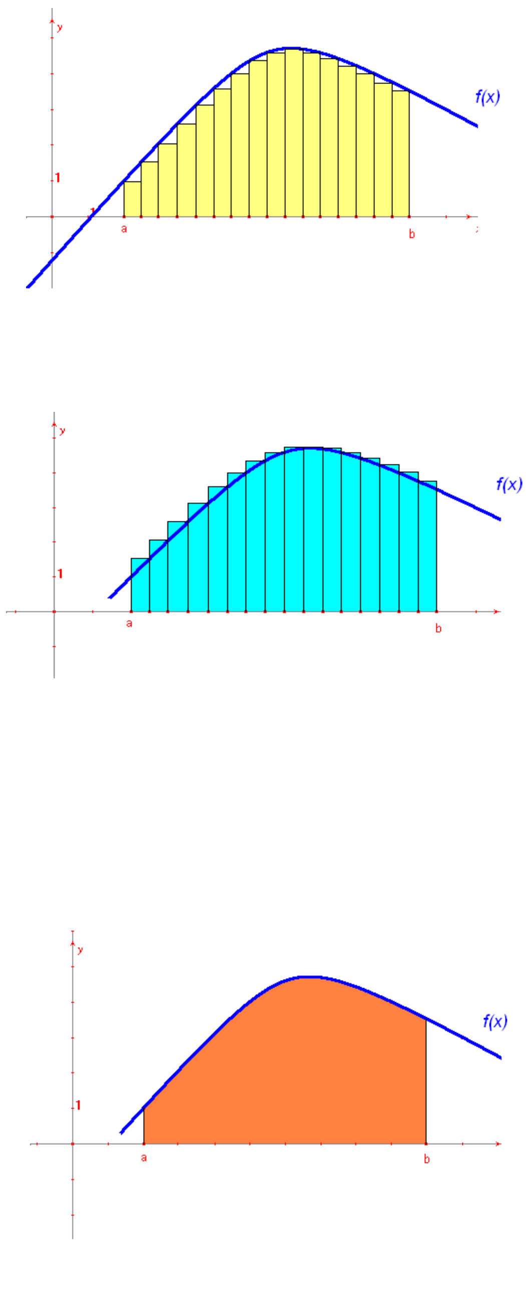


Figura 19.

Se concluye que:

$$\lim_{n\to\infty} S_{\inf}(f,n) = \lim_{n\to\infty} S_{\sup}(f,n) = \acute{A}rea = \int_a^b f(x)\,dx$$

Entonces, si f es **positiva** en [a,b], representa el área bajo f entre a y b

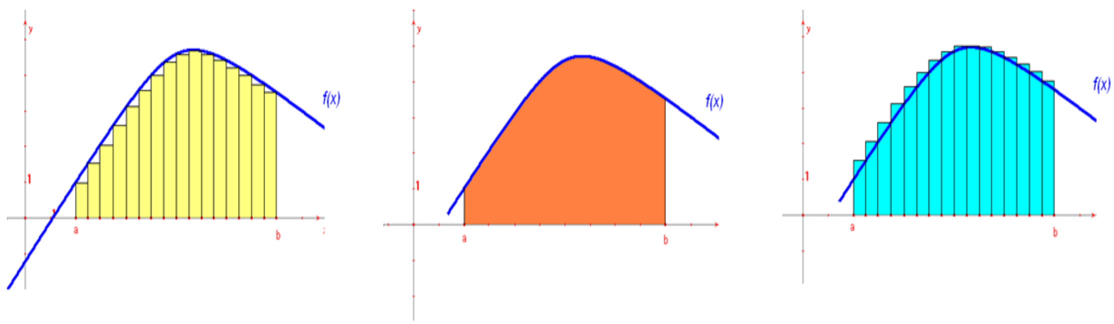


Figura 20.

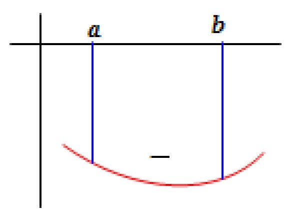
De esta manera se puede llevar al estudiante a “hacer matemáticas” de un modo sencillo, el cual es involucrarlo en la construcción del concepto, así sea de forma intuitiva, esperando que esto ayude a incentivar la motivación en clase y aumentar el interés por la materia, ya que los estudiantes sienten que forman parte de lo que se está construyendo. Esta intervención de ellos con el aprendizaje, permitirá relacionar lo que han aprendido en cursos anteriores con la nueva información obtenida. En clase se deben plantear algunos ejercicios para que sean resueltos por los estudiantes. **Ver anexo 2**

3.1 Identificar que representa el concepto.

En este punto se busca motivar a los docentes a que no solo presente el concepto, sino que lo enseñe, aclare y qué muestre que representa; es decir, que ayude a los estudiantes a identificarlo, que logren que ellos tengan una clara interpretación del concepto matemático, reconociéndolo y siendo capaz, de determinar cómo se puede utilizar y en qué momento.

En ocasiones los estudiantes saben usar algoritmos, los calculan bien, sacan resultados y los operan entre ellos, ¿pero será que saben argumentar, que es lo que representan esos números que han encontrado al hacer cierto algoritmo?, ¿Qué ocurre cuando algo diferente pasa a lo que ellos pensaban que representaba el concepto? Es ahí donde se pierde la idea de lo que realmente representa el concepto, por ejemplo, en nuestro caso tomando la integral indefinida claramente sabemos que es un conjunto, de todas las antiderivadas de $f(x)$, con respecto a x. Si vamos más allá la identificamos con una suma, que en **ocasiones** representa el área bajo la curva y no siempre. ¿Qué pasa cuando la integral da como resultado números negativos o cero?, ¿Será que siempre es el área bajo la curva? miremos.

La función es negativa en el intervalo $[a,b]$.



f

Consideremos una función *f* continua en $[a,b]$ tal que $f(x) \leq 0$ para todo valor *x* del intervalo. La región delimitada por la gráfica de la función y las rectas $x = a,\ \ x = b$ e $y = 0$ queda situada por debajo del eje de abscisas.

El área de la región es la del trapecio mixtilíneo, pero ya **no** nos viene dada por la integral definida $\int_a^b f(x)\,.dx,$ puesto que al ser f negativa, la integral definida es negativa. Que pasa en este caso. ¿Está mal el ejercicio?, ¿Siguen representando el área bajo la curva?, ¿será que hay áreas negativas y de valor cero? es válido decir, que si se toma el valor absoluto de dicho valor encontrado al integrar, este representara el área bajo la curva. Ejercicios como estos hay mucho pero se debe cambiar la concepción de que la integral definida es solo el área bajo la curva, que es lo que ocurre cuando se hace la siguiente pregunta ¿Qué es la integral definida?, y la gran mayoría responde es el “área bajo la curva”, lo será siempre, que pasa cuando se les presentan ejercicios donde el resultado es negativo o cero, y argumentan cosas como estas, ejemplo:

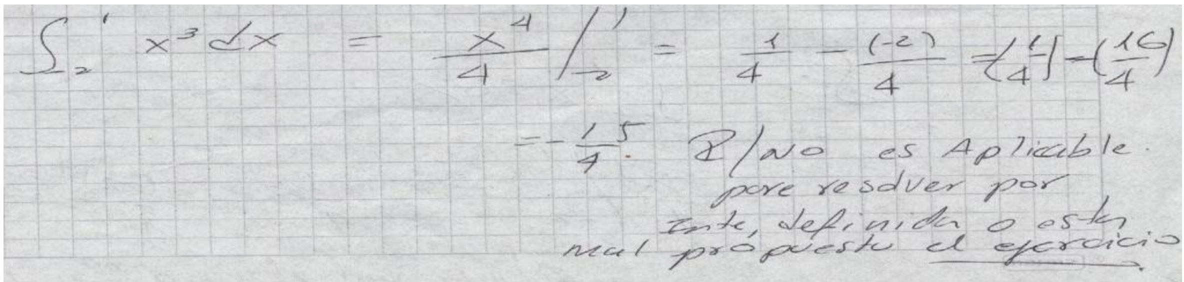


Imagen 14. Respuesta de un estudiante

¿Será que esta es la noción que tienen los estudiantes sobre lo que representa la integral definida? Sí está bien, la integral definida representa el área bajo la curva, pero, ¿siempre lo es? ¡No! Verdad.

Esto es algo que se debe considerar. Si recordamos bien, aquí se propone llegar al concepto de integral definida mediante el cálculo de área bajo la curva, que nos permite ver de una forma intuitiva que la integral es una suma, pero cabe aclarar que en ocasiones es el área bajo la curva, pero no se puede seguir permitiendo que los estudiantes digan que la integral definida, es solamente el área bajo la curva; hay que dejarles claro que es una aplicación y que en gran mayoría representa el área bajo una curva.

Es claro que este error se debe corregir y la forma más clara y precisa de hacerlo, es inducir al estudiante a que identifique y reconozca el concepto. Es necesario hacer ejercicios donde la integral representa el área bajo la curva, pero también mostrar a los estudiantes que en el cálculo de las integrales, no siempre esto va a ocurrir, porque hay casos donde la integral es negativa o cero, y no hay áreas que sean negativas o de valor cero. Hacer esta aclaración tiene sentido, ya que cuando a los estudiantes un ejercicio les de cero o negativa no argumentarán "está mal hecha la integral", sino que podrán pensar que representa en ese caso el concepto de integral definida.

3.3 Resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje.

La resolución de problemas matemáticos, es un tema que ha sido abordado por muchos investigadores, desde diferentes puntos de vista. Tal vez, el dominio de la heurística y una buena estructuración de los conocimientos matemáticos, son los dos aspectos que se señalan como los de mayor incidencia, a la hora de valorar las potencialidades de una persona para enfrentar con éxito la resolución de un problema matemático.

Dentro de los conocimientos matemáticos necesarios para la resolución de problemas, ocupan un lugar destacado los conceptos matemáticos, y dentro de los conceptos se encuentran aquellos que están vinculados con las operaciones matemáticas. Para cada una de las operaciones matemáticas que sean estudiadas en cualquier nivel de enseñanza, existen dos importantes habilidades que los estudiantes deben desarrollar: la habilidad relacionada con el cálculo de la operación, y la habilidad relacionada con la aplicación de ésta en la resolución de problemas. Estas habilidades están relacionadas pero son muy diferentes. Un estudiante puede tener habilidad en el cálculo de una operación matemática, y no tener habilidad para identificar cuándo tiene que aplicar esa operación en la resolución de un problema.

La anterior situación puede suceder desde la enseñanza primaria, con cualquiera de las cuatro operaciones aritméticas fundamentales, hasta en la enseñanza universitaria con las derivadas y las integrales definidas. Un alumno puede ser muy bueno calculando, por ejemplo, multiplicaciones y divisiones, y no tener la habilidad necesaria para identificar cuándo debe aplicar una de estas operaciones, en la resolución de un problema. Análogamente, un estudiante universitario puede ser capaz de calcular derivadas e integrales con un elevado grado de dificultad, y no ser capaz de identificar cuándo se debe aplicar en la modelación de un problema.

Hay muchos puntos de vista, acerca de la mejor estrategia para poder dar soluciones a situaciones problemas, pero todas se relacionan o entrelazan con la propuesta del pedagogo George Polya, que trata sobre los cuatro pasos para resoluciones de problemas, que han sido planteados y tomados en cuenta en el marco teórico de esta propuesta, en la cual se basará a la hora de encaminar a los estudiantes en la fabulosa experiencia de dar solución a situaciones problemas planteados.

La resolución de problemas, es una herramienta útil para buscar aprendizajes significativos en nuestros estudiantes, por eso aquí se ha tomado como un mecanismo eficaz y primordial. Este mecanismo se propone desde la primera clase, donde se da a conocer el concepto matemático, como una estrategia de fortalecimiento en los conceptos; además que permitirá al estudiante, ver en qué momentos y cuando es útil usar el concepto matemático en nuestro caso la integral definida, e ir aplicándolo a hechos reales y de su entorno. Pero se debe tener en cuenta algo, no basta solo con presentar en el aula situaciones problemas donde el concepto es siempre aplicable, es necesario formular problemas donde no lo sea, para que así el estudiante vaya identificando cuando un problema es o no aplicable, para resolver mediante el uso del concepto presentado por el profesor, en nuestro caso la integral definida.

En general lo que se busca, es que el estudiante sea capaz de determinar cuándo una situación problema es aplicable o no, para resolver por integral definida; ya que ésta dificultad, fue puesta en evidencia al observar las respuestas que dieron los estudiantes al test de validación hecho para la propuesta. Una observación que llamó mucho la atención, fue que los estudiantes no fueron capaces de identificar, cuando un problema era aplicable o no, para resolver por integral definida, además de no tener claridad en lo que representa este concepto.

Estas dificultades no son ajenas a un solo lugar, ni a una sola institución, mediante un trabajo investigativo realizado, por el doctor Reinaldo Hernández Camacho,

" Doctor en Ciencias Pedagógicas por la Comisión de Grados Científicos del Ministerio de Educación Superior, Cuba. Profesor de Matemática en Enseñanza Media y Profesor de Matemática de Nivel Superior, títulos obtenidos en el Instituto Superior Pedagógico Juan Marinillo, Matanzas, Cuba. Actualmente se desempeña como Profesor de Análisis Matemático y de Álgebra Lineal, Investigador en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Matanzas, Cuba. Recibió la distinción "Orden Rafael María Mendive".

Durante varios años, quedó al descubierto que estas problemáticas, también son presentadas por varios estudiantes de cursos superiores en diversos lugares, como por ejemplo en Cuba y Costa Rica. Con ese trabajo investigativo salió a la luz, que los estudiantes universitarios y los egresados de ese nivel de enseñanza, no adquieren las habilidades necesarias para identificar problemas nuevos que pueden ser resueltos mediante una integral definida, cuando son utilizados los métodos tradicionales de enseñar el cálculo integral.

Claramente se logro observar esta situación en el análisis del test de validación, ya que, aunque los estudiantes fueron informados que podrían haber algunos ejercicios no aplicables para resolver por integral, hicieron caso omiso a esa información, e intentaron resolver los problemas aplicando la integral definida.
Entonces, por tal situación, se ha decidido citar la investigación hecha por el doctor Hernández Camacho, que como resultado, ha logrado precisar un conjunto de propiedades que representan condiciones necesarias y suficientes, para que la solución de un problema pueda ser obtenida directamente mediante el cálculo de una integral definida. Se proponen algunos ejercicios que se dejan como **anexo 3,** estos ejercicios se proponen, para que sean resueltos en elaboración conjunta con los estudiantes.

¿Qué suele hacerse por tradición en clase y qué puede hacerse para lograr que los estudiantes desarrollen habilidades que les permitan identificar que problemas se resuelven mediante una integral definida? Lo que suele hacerse tradicionalmente, para que los estudiantes desarrollen habilidades en la aplicación de la integral definida en la resolución de problemas, es mostrarles ejemplos de problemas que se resuelven mediante esa operación matemática, estos ejemplos se muestran como aplicaciones aisladas de la operación, sin que se destaquen propiedades comunes entre ellos, que sirvan para identificar otros problemas que puedan presentarse posteriormente. Lo que puede y debe hacerse, es trabajar con el concepto asociado a la integral definida, teniendo en cuenta que los componentes que distinguen a un concepto, son su contenido y su extensión; el contenido, expresa las propiedades esenciales que tienen en común todos los elementos que pertenecen al concepto, y la extensión, es el conjunto de todos esos elementos. Dos conceptos son equivalentes si tienen la misma extensión, aunque el contenido puede variar de una definición a otra. En conclusión, los conjuntos de propiedades que se utilicen para definir un mismo concepto, pueden ser diferentes en dos definiciones que se den de ese concepto, pero tienen que ser equivalentes, tienen que generar la misma extensión.

Ahora bien, para cada operación matemática existe un conjunto de propiedades esenciales que tienen en común todos los problemas que pueden resolverse mediante esa operación. Ese conjunto de propiedades esenciales, representan el contenido del concepto asociado a la operación y el conjunto de todos esos problemas conforman la extensión del concepto.

Es necesario mostrar a los estudiantes, una caracterización general de todos los problemas que pueden resolverse mediante una integral definida, y lograr que la interpreten y la apliquen en la identificación de los problemas que pueden resolverse mediante esa operación, y que sean capaces de justificar por qué un determinado problema no puede ser resuelto aplicando la integral definida. A continuación, se presenta un conjunto de propiedades que conforman el contenido del concepto de integral definida. Si un estudiante desarrolla habilidades en el análisis del cumplimiento de estas propiedades en un problema, estará en posibilidad de identificar cuándo un problema puede resolverse o no mediante una integral definida.

3.3.1 Caracterización de los problemas que pueden resolverse mediante una integral definida.

Miremos una definición didáctica, utilizando matemáticas.

Sean: P un conjunto de problemas que pertenecen a un mismo tipo de problemas, S el conjunto de las soluciones de dichos problemas y F un conjunto de funciones reales, definidas en puntos de un intervalo $[a, b]$, donde, para cada problema $p \in P$ su solución $s \in S$ está relacionada con una función $f \in F$.

Entonces, la solución **s** de un problema $p \in P$, que está relacionada con una función $f \in F$ en $[a, b]$, es equivalente a $\int_a^b f(x)dx$ si se cumplen las siguientes propiedades:

Esto en palabras más sencillas quiere decir como identificar los problemas que pueden ser resueltos mediante la integral definida, estos deben cumplir las siguientes propiedades

a) f está definida y es continua en todo punto de $[a, b]$. (continuidad en un intervalo)

b) En ese tipo de problemas, si la función asociada fuera constante en $[a, b]$; es decir, si fuera una función g tal que $g(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$, entonces la solución sería $s = c(b - a)$. (en problemas integrables, la función constante tiene su solución en $c(b - a)$).

c) La solución s de un problema de ese tipo, en un intervalo $[a, b]$, no se altera si se realiza cualquier partición de $[a, b]$, y se toma como solución la suma de las soluciones del problema en cada uno de los sub-intervalos en que se ha dividido $[a, b]$. (la solución de un problema integrable, no se altera si se realiza cualquier partición de $[a, b]$).

d) En ese tipo de problemas, cuanto mayor sea la imagen de la función asociada, mayor será la solución s del problema.

Observaciones:

- En este trabajo, la expresión **tipo de problemas**, se utiliza con el significado siguiente: conjunto de problemas, cuyas soluciones están asociadas cada una de ellas a una función real en un intervalo [a, b], y todos los problemas tienen exactamente las mismas características, con la única excepción de la función asociada, que puede ser diferente de un problema a otro.

- Es recomendable, que se presenten a los estudiantes tanto problemas que puedan ser modelados mediante una integral definida, como otros que no puedan serlo, porque incumplan alguna de las propiedades necesarias y suficientes.

- Para que una persona, pueda analizar si en un problema se cumplen o no cada una de las propiedades que componen la caracterización anterior, es necesario que comprenda el contexto del problema desde el punto de vista extra-matemático.

3.3.2 Aplicación de la caracterización en la solución de problemas.

Los ejemplos que serán presentados a continuación, pueden ser útiles para abordarlos en clase con el objetivo que los estudiantes aprendan a identificar, como reconocer problemas que se pueden resolver mediante integral definida. Estos problemas deben ser resueltos en elaboración conjunta con los estudiantes.

Analizar si los siguientes problemas pueden resolverse o no mediante la integral definida de la función f en el intervalo indicado.

Ejemplo 1

A partir de los 40 días de nacido y hasta cumplir un año, el aumento en kilogramos por días de un cerdo es, $f(x) = 0{,}001x + 0{,}2$ donde x indica la edad en días. ¿Cuántos kilogramos aumenta el cerdo entre los 40 y los 100 días de nacido?

Análisis:

a) La función f está definida y es continua en el intervalo [40, 100].

b) Si la función asociada fuera constante (si fuera constante la cantidad de kilogramos por días que aumenta el cerdo), la solución del problema (la cantidad de kilogramos que aumenta el cerdo en el intervalo [40, 100]), podría obtenerse multiplicando esa constante C por la longitud del intervalo. Es decir, la solución sería: $S = C\ (100 - 40)$.

c) Cuanto mayor sea la imagen de la función asociada (la cantidad de libras por días que aumenta el cerdo), mayor será la solución del problema (la cantidad de libras que aumenta entre los 40 y los 100 días de nacido).

d) Si se realiza cualquier partición del intervalo [40, 100], y se calcula el aumento en libras del cerdo en cada uno de los sub-intervalos obtenidos mediante esa partición, la suma de los aumentos producidos en cada uno de los sub-intervalos, será siempre igual al aumento total en el intervalo [40, 100].

Viendo todo lo anterior, en este problema se cumplen todas las propiedades necesarias y suficientes para que su solución pueda obtenerse mediante una integral definida.

$$\therefore S = \int_{40}^{100} (0{,}001x + 0{,}2)dx = 16{,}2$$

La respuesta es: el cerdo aumenta 16,2 kilogramos entre los 40 y los 100 días de nacido.

Ejemplo 2

Un hombre debe dar 10 viajes, para recoger 10 sacos de malanga que se encuentran alineados a igual distancia en un surco. La función, $f(x) = 20x$ representa la cantidad de metros que debe recorrer el hombre para recoger el saco número x, donde x representa el número de orden del saco. ¿Cuántos metros en total debe recorrer el hombre para recoger los primeros 6 sacos?

Análisis:

a) La función f no es continua en el intervalo [0, 6], porque está definida sólo para $x = 1, 2, \ldots 6$ y no está definida para los restantes puntos del intervalo [0, 6]. Basta que se incumpla una de las propiedades para que la solución no pueda obtenerse mediante la integral definida de la función f en el intervalo dado. Por lo tanto, la solución de este problema no es equivalente a la integral: $\int_0^6 20x$ No obstante, para las restantes propiedades se tiene lo siguiente:

b) Considerando, por ejemplo, el intervalo [2, 2], en donde la función f es constante e igual a 40. La solución del problema en este intervalo (la cantidad de metros que debe recorrer el hombre para recoger el saco número dos, que es el único que está en ese intervalo), es precisamente 40. Pero esa solución no puede obtenerse multiplicando la constante 40 por la longitud del intervalo, pues esa longitud es cero. No se cumple, entonces, esa propiedad.

c) Cuanto mayor sea la imagen de la función asociada, mayor es la solución de este tipo de problema. Se cumple.

d) Si se realiza una partición del intervalo [0, 6] en los sub-intervalos [0, 3] y [3, 6], la suma de las soluciones en estos dos sub-intervalos, no es igual a la solución en el intervalo [0, 6] completo, pues en el primer caso se toma dos veces la solución en el punto x=3; es decir, los 60 metros que se deben recorrer para recoger el tercer saco.

En realidad, la solución de este problema es equivalente a

$$S = \sum_{x=1}^{6} 20x$$

Ejemplo 3

La función $f(x) = 50x - x^2$, representa el total de arrobas de caña cortada que fue acumulando un machetero durante 8 horas, siendo x las horas que iban transcurriendo. ¿Cuántas arrobas de caña por horas estaba cortando el machetero al cumplirse las 7 horas de iniciarse la jornada?

Análisis:

a) La función f está definida y es continua en [0, 7].

b) Pero si f fuera constante (si fuera constante la cantidad de arrobas de caña cortada que se iban acumulando), la solución del problema (la cantidad de arrobas de caña que se iban cortando por horas) no se obtendría multiplicando esa constante por la longitud del intervalo.

Por lo tanto, la solución de este problema no se obtiene mediante el cálculo de la integral definida de la función $f(x) = 50x - x^2$.

En realidad la solución es equivalente a $f'(6)$.

Los anteriores, entre otros, son algunas clases de problemas que se pueden y deben trabajar en clase con los estudiantes. Se dejan propuestos unos como anexos.

La resolución de problemas es el vehículo que nos llevara a encontrar las evidencias que determinaran que se alcanzo del objetivo. Ya que cuando un estudiante sea capaz de determinar un problema, plantearlo y además pueda aplicarlo a otras áreas del conocimiento, esto nos permitirá concluir que el estudiante asimilo el concepto forma significativa.

La resolución de problemas y la identificación de los mismo son herramienta útil que sin lugar a dudas toman un lugar privilegiado a la hora de hablar de aprendizaje en la educación.

CONCLUSIONES

- La propuesta didáctica presentada en este trabajo de grado, está basada en la necesidad que los estudiantes interpreten el contenido de los conceptos matemáticos y se apropien de ellos.

- El aprendizaje basado en problemas, es una estrategia que apoya el aprendizaje significativo, ya que proporciona a los estudiantes la oportunidad de incorporar las matemáticas en la práctica diaria, fortaleciendo las relaciones que hay entre esta y el mundo que los rodea.

- El aprendizaje significativo presenta ventaja sobre la metodología tradicional, porque refuerza los contenidos del tema y ayuda a que el estudiante aprenda, mediante la construcción del concepto, la resolución de problemas y la identificación de los mismos, sean o no aplicables.

- Aunque en este trabajo se ha desarrollado una propuesta, específicamente para la forma de enseñar a los estudiantes, a identificar el contenido del concepto de integral definida en un problema, ideas similares a estas pueden ser aplicadas para otros conceptos matemáticos. Pueden citarse, como ejemplo, un trabajo semejante a este relacionado con el concepto de derivada de una función real en un punto, u otro, en proceso de realización, vinculado con la aplicación de los conceptos de integrales dobles y triples.

Bibliografía

- AUSUBEL, David, P., NOVAK, Joseh, HANESIAN Helen. *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. Sexta edición. México: Trillas. 1993.

- HERNÁNDEZ CAMACHO Reinaldo (2007). *"Propuesta didáctica para identificar cuándo la integral definida es aplicable para resolver un problema".* Manuscrito publicado, en mayo-agosto 2007, *Lecturas matemáticas,* pp. 1-20, Volumen 7, Número 2
  Recuperado 14 de abril de 2009
  Disponible en página web en http://revista.inie.ucr.ac.cr

- HERNÁNDEZ, Reinaldo. (1998). *Cómo enseñar a identificar los problemas que se resuelven mediante derivada o integral definida. III. Taller internacional: la enseñanza de la Matemática y la computación*. Matanza, Cuba: Instituto Superior Pedagógico Juan Marinello.

- HERNÁNDEZ, Reinaldo. (2000). *Propuesta didáctica para identificar y resolver los problemas que requieren del cálculo de una integral definida o de la derivada de una función real en un punto*. Tesis de Doctorado en Ciencias Pedagógicas, Universidad de la Habana, Ciudad de la Habana, Cuba. .

- MOREIRA, M. A. e MASINI, E. A. F. S. (1982). *Aprendizagem significativa : a teoria de David Ausubel.* São Paulo, Editora Moraes.

- MOREIRA M. A. (1997). "Aprendizaje significativo: un concepto subyacente". En M.A. Moreira, C. Caballero Sahelices y M.L. Rodríguez Palmero, Eds. *Actas del II Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo.* Servicio de Publicaciones, Universidad de Burgos, págs. 19-44.

- PALOMINO W. (1996). *Teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel.* Recuperado el 25 de septiembre de 2008, de http://www.monografias.com/trabajos6/apsi/apsi.shtml

- POLYA G. *Cómo plantear y resolver problemas. Serie de las Matemáticas*. 3ed. México: Trillas. 1972

Anexo 1

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
PROYECTO DE GRADO II
TEST de validación.

PROPUESTA PARA EL MEJORAMIENTO DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO EN LA NOCIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA

Conteste falso o verdadero y argumente su respuesta.

La integral definida no se relaciona con la anti derivada.

Todos los ejercicios de áreas y longitudes se pueden resolver mediante integrales definidas.

La integral definida solo es el área bajo la curva.

ESCRIBA CON SUS PALABRAS

¿Que representa la integral definida?

.
Resuelva. Los siguientes ejercicios.

1. $\int_2^4 x^2 dx$;
2. $\int_{-2}^1 x^3 dx$;

Problemas

De los siguientes problemas escoja cinco para que los resuelva.

Analice si los siguientes problemas pueden resolverse o no, mediante la integral definida de la función f en el intervalo que corresponda, si su respuesta es sí, resuelva la integral de lo contrario explique por qué no se puede aplicar el concepto de integral definida.

1. Una bicicleta tuvo durante 4 horas una velocidad promedio equivalente a la velocidad mínima que alcanzó un auto en el mismo intervalo de tiempo. La velocidad del auto en km. por horas fue de $f(x) = 3{,}125x^2 - 25x + 60$ siendo

x las horas que iban transcurriendo ($0 \leq x \leq 4$) ¿Cuál fue el espacio recorrido por la bicicleta durante las 4 horas?

2. La cantidad de vueltas por minutos que iban dando las ruedas de una bicicleta al bajar una loma, puede expresarse mediante la función, $f(x) = \frac{20}{3}x^2 - \frac{40}{3}x$, siendo x la cantidad de minutos transcurridos a partir del inicio de la bajada ($0 \leq x \leq 4$). ¿Cuántas vueltas dieron las ruedas de la bicicleta durante los 4 minutos que duró la bajada de la loma?

3. En una fila hay 10 personas ordenadas de acuerdo a sus estaturas de menor a mayor. Cada persona es 2 centímetros más alta que la anterior. Las estaturas en centímetros de estas personas se pueden expresar mediante la función $f(x) = 164 + 2x$, donde x representa el orden en la fila de cada persona. ¿Cuál es la suma de las estaturas de las 10 personas?

4. Un obelisco tiene la forma de una pirámide (pero no recta). Una de las caras laterales del obelisco es de forma triangular con el vértice hacia arriba. Está situada perpendicularmente a la base y tiene una altura de 6 metros. La cantidad de litros de pintura que se iban utilizando por cada metro de altura, para pintar la superficie de esa cara, puede expresarse mediante la función $f(x) = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{8}{7}x$, donde x expresa la altura en metros ($0 \leq x \leq 6$). ¿Cuántos litros de pintura se necesitaron para pintar toda la superficie de esa cara del obelisco?

5. Se ha puesto un jarro con agua a calentar en un fogón durante 8 minutos. El aumento por minutos de la temperatura del agua en grados celsio lo expresa la función $f(x) = 1{,}25x^2 - 2{,}5x$. ¿Cuánto aumenta la temperatura del agua durante los 8 minutos?

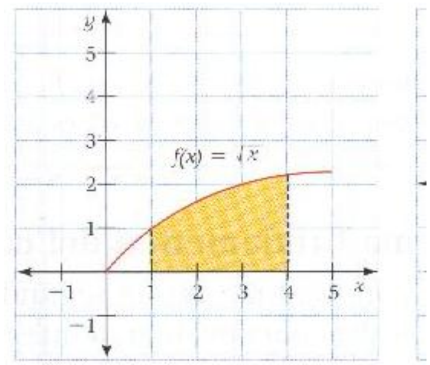
6. Un depósito de cemento en forma de pirámide invertida tiene una compuerta en su parte inferior. Al abrirse la compuerta comienza a caer cemento en un camión de volteo. La cantidad de metros por minutos en que va disminuyendo la altura del volumen del cemento en el depósito está dado por la función $f(x) = 0{,}1x + 0{,}2$, ($0 \leq x \leq 10$), donde x representa la cantidad de minutos transcurridos. ¿Cuántos metros disminuye en total la altura del volumen del cemento en los primeros 6 minutos?

7. Cuando se estaba fundiendo una placa en un segundo piso, una pequeña porción del concreto contenido en un depósito que se utilizaba para subirlo, se iba derramando poco a poco mientras era ascendido a 10 metros de altura; por lo que su peso disminuía ligeramente; pudiéndose expresar el peso total en newton del depósito con el concreto aproximadamente como $p(x) = 200 - 1{,}2x$, siendo x la altura en metros que iba alcanzando el depósito. Hallar el trabajo realizado para subir el depósito los 10 metros.

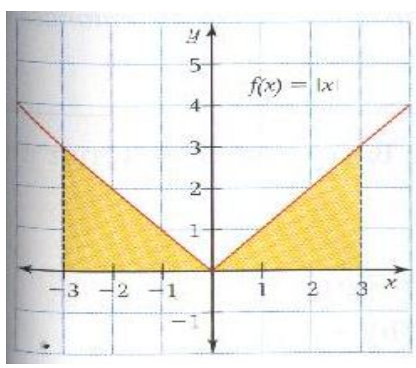
Anexo 2

Se pueden proponer ejercicios de este modo, los cuales se resolverán usando la áreas conocida, y después se plantean por integrales.

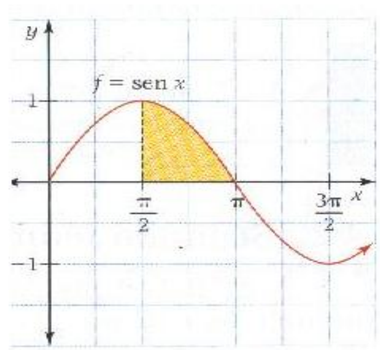
1.



2.



3.



Anexo 3

Ejercicios propuestos para trabajar en clase:

Analice si los siguientes problemas pueden resolverse o no mediante la integral definida de la función f en el intervalo que corresponda.

1. La función$f(x) = 50x - x^2$ representa el total de arrobas de caña cortada que fue acumulando un machetero durante 8 horas, siendo x las horas que iban transcurriendo. ¿Cuántas arrobas de caña por horas estaba cortando el machetero al cumplirse las 7 horas de iniciarse la jornada?

2. Una bicicleta tuvo durante 4 horas una velocidad promedio equivalente a la velocidad mínima que alcanzó un auto en el mismo intervalo de tiempo. La velocidad del auto en km. por horas fue de $f(x) = 3{,}125x^2 - 25x + 60$ siendo x las horas que iban transcurriendo ($0 \leq x \leq 4$) ¿Cuál fue el espacio recorrido por la bicicleta durante las 4 horas?

3. En una fila hay 10 personas ordenadas de acuerdo a sus estaturas de menor a mayor. Cada persona es 2 centímetros más alta que la anterior. Las estaturas en centímetros de estas personas se pueden expresar mediante la función
4. $f(x) = 164 + 2x$, donde x representa el orden en la fila de cada persona. ¿Cuál es la suma de las estaturas de las 10 personas?

5. La cantidad de quintales de papas recolectados, que fue acumulando una brigada en una jornada de 8 horas de trabajo, se puede expresar mediante la función $f(x) = 10x + 0{,}2x^2$,$0 \leq x \leq 8$, donde x representa la cantidad de horas que iban transcurriendo. ¿Cuántos quintales de papas por horas, como promedio, recogió la brigada durante las 8 horas de trabajo?

6. La cantidad de vueltas por minutos que iban dando las ruedas de una bicicleta al bajar una loma, puede expresarse mediante la función,$f(x) = \frac{20}{3}x^2 - \frac{40}{3}$x, siendo x la cantidad de minutos transcurridos a partir del inicio de la bajada ($0 \leq x \leq 4$). ¿Cuántas vueltas dieron las ruedas de la bicicleta durante los 4 minutos que duró la bajada de la loma?

7. Un obelisco tiene la forma de una pirámide (pero no recta). Una de las caras laterales del obelisco es de forma triangular con el vértice hacia

arriba. Está situada perpendicularmente a la base y tiene una altura de 6 metros. La cantidad de litros de pintura que se iban utilizando por cada metro de altura, para pintar la superficie de esa cara, puede expresarse mediante la función $f(x) = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{8}{7}$x, donde x expresa la altura en metros $(0 \leq x \leq 6)$. ¿Cuántos litros de pintura se necesitaron para pintar toda la superficie de esa cara del obelisco?

8. Se ha puesto un jarro con agua a calentar en un fogón durante 8 minutos. El aumento por minutos de la temperatura del agua en grados celsio lo expresa la función $f(x) = 1{,}25x^2 - 2{,}5x$. ¿Cuánto aumenta la temperatura del agua durante los 8 minutos?

9. En un establo hay 6 vacas, a las cuales se les suministra pienso en el horario de 8 a.m. a 6 p.m. La cantidad de Kg. de pienso por hora que va consumiendo una vaca va disminuyendo y puede expresarse aproximadamente por $f(t) = 4 - 0{,}32t$, siendo t las horas transcurridas a partir de las 8 a.m. y hasta las 6 p.m. ¿Qué cantidad de pienso consume una vaca de las 12 m.d. a las 4 p.m.?

10. La función f definida por $f(x) = 0{,}5x + 3{,}5$, representa aproximadamente el por ciento de pérdida por meses del peso de la cebolla “Red Creole C-5”, por almacenamiento a una temperatura entre 20 y 25 grados centígrados, siendo x la cantidad de meses transcurridos a partir de su almacenamiento y hasta los 6 meses. ¿Qué por ciento del peso de la cebolla se ha perdido cuando han transcurrido los primeros 75 días de almacenada?

11. Cuando se estaba fundiendo una placa en un segundo piso, una pequeña porción del concreto contenido en un depósito que se utilizaba para subirlo, se iba derramando poco a poco mientras era ascendido a 10 metros de altura; por lo que su peso disminuía ligeramente; pudiéndose expresar el peso total en newton del depósito con el concreto aproximadamente como $p(x) = 200 - 1{,}2x$, siendo x la altura en metros que iba alcanzando el depósito. Hallar el trabajo realizado para subir el depósito los 10 metros.

12. Un depósito de cemento en forma de pirámide invertida tiene una compuerta en su parte inferior. Al abrirse la compuerta comienza a caer cemento en un camión de volteo. La cantidad de metros por minutos en que va disminuyendo la altura del volumen del cemento en el depósito está dado por la función $f(x) = 0{,}1x + 0{,}2$, $(0 \leq x \leq 10)$, donde x representa la cantidad de minutos transcurridos. ¿Cuántos metros disminuye en total la altura del volumen del cemento en los primeros 6 minutos?