ESPACIOS DE BANACH DE FUNCIONES CONTINUAS Y ÁLGEBRAS DE BANACH

RAÚL ARMANDO GÓMEZ TARAZONA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2015

ESPACIOS DE BANACH DE FUNCIONES CONTINUAS Y ÁLGEBRAS DE BANACH

RAÚL ARMANDO GÓMEZ TARAZONA

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de

Matemático

Director

RONALD EDUARDO PATERNINA SALGUEDO

Matemático, Ph.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2015

Agradecimientos

- ⋄ Agradezco a Dios por estar siempre cuidándome y protegiéndome en todo momento.
- ⋄ Agradezco al profesor Ronald por toda su colaboración e interés en mi proyecto, por todas sus recomendaciones y consejos y por su dedicación y empeño.
- ⋄ A mi familia, amigos y profesores de la escuela de matemáticas quienes hicieron posible éste gran logro el cual representa mucho para mi.

Índice general

Índice de figuras

RESUMEN

TITULO: ESPACIOS DE BANACH DE FUNCIONES CONTINUAS Y ÁLGEBRAS DE BANACH*
AUTOR: Raúl Armando Gómez Tarazona**

PALABRAS CLAVE: Espacios de Banach; Álgebras; Álgebras de Banach; Espacios isométricamente inyectivos.

DESCRIPCIÓN:

El contenido de este trabajo se basa principalmente en mostrar algunas técnicas fundamentales de la teoría de espacios de Banach de funciones continuas y de la teoría de las álgebras de Banach vistas en [2] para obtener un criterio que verifique si un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es un espacio $\mathcal{C}(K)$ y un método para saber cuándo un espacio $\mathcal{C}(K)$ es un espacio isométricamente inyectivo.

El presente trabajo lo hemos organizado de la siguiente manera. En el primer capítulo, se inicia dando un resumen sobre las principales definiciones y resultados relacionados a los espacios de Banach que serán utilizados en el desarrollo del trabajo incluyendo teoremas de Hahn-Banach, Banach-Steinhaus, Krein-Milman y Alaoglu. Luego se presentan algunos conceptos relativos a los conjuntos parcialmente ordenados junto con el Lema de Zorn. El capítulo termina definiendo las álgebras y subálgebras y con ello se destaca un gran resultado de Stone-Weierstrass.

En el segundo capítulo presentamos algunas propiedades de las álgebras de Banach y de los homomorfismos definidos sobre álgebras de Banach y demostramos que un álgebra de Banach real conmutativa $\mathcal{A}$ con identidad, es isométricamente isomorfa a un espacio $\mathcal{C}(K)$ para algún espacio Hausdorff compacto K si se satisface una desigualdad con la norma respecto a $\mathcal{A}$. Este hecho fue probado por Albiac y Kalton y da por lo tanto un criterio para verificar si un álgebra de Banach real es un espacio $\mathcal{C}(K)$.

Finalmente, en el tercer capítulo presentamos algunos resultados relacionados con las aplicaciones sublineales y el orden-completo en espacios $\mathcal{C}(K)$ y demostramos que si K es un espacio de Hausdorff compacto, una condición necesaria y suficiente para que el espacio de Banach $\mathcal{C}(K)$ sea un espacio isométricamente inyectivo, es que el espacio $\mathcal{C}(K)$ tenga un orden completo, el cual es un resultado conocido como el Teorema de Goodner-Nachbin.

*Proyecto de grado

**FACULTAD DE CIENCIAS, ESCUELA DE MATEMÁTICAS.
DIRECTOR Ph. D. Ronald Eduardo Paternina Salguedo

ABSTRACT

TITLE: BANACH SPACES OF CONTINUOS FUNCTIONS AND BANACH ALGEBRASs*
AUTOR: Raúl Armando Gómez Tarazona**

KEY WORDS: Banach spaces; Algebras; Banach algebras; Isometrically injective spaces.

DESCRIPTION:

The contents of this project is mainly based on showing some fundamental techniques of Banach spaces of continuos functions theory and Banach algebras seen in [2] to obtain a criterion which verifies if an Banach algebra $\mathcal{A}$ is an $\mathcal{C}(K)$ space and gives a method to know when an $\mathcal{C}(K)$ space is an isometrically injective space.

The present project has been organized of the following way. The first chapter starts giving the main definitions and results related to Banach spaces which will be used later on. It is included also the Hahn-Banach, Banach-Steinhaus, Krein-Milman and Alouglu theorems. Moreover, some concepts relative to parcially ordered sets and Zorn's Lemma are given. The chapter finishes defining algebras and sublgebras, with focus on a great result due to Stone-Weierstrass.

On the second chapter some properties of Banach algebras and their homomorphisms are introduced and it is shown that a commutative Banach algebra $\mathcal{A}$ with unit is isometrically isomorph to an $\mathcal{C}(K)$ space for any compact Hausdorff Space K if it satisfied and inequality with the norm from $\mathcal{A}$. This fact was proved for Albiac and Kalton and therefore gives an criterion to verify if an Banach algebra is an $\mathcal{C}(K)$ space.

Finally, the third chapter begins with some results related to sublineal aplications and the complete order on $\mathcal{C}(K)$ spaces and it is shown that if K is an compact Hausdorff space, a necessary and suficient condition for the Banach space $\mathcal{C}(K)$ be an isometricallly injective space, is that $\mathcal{C}(K)$ has got a complete order, which is a result known as the Goodner-Nachbin Theorem.

*Degree Project
**FACULTY OF SCIENCES, SCHOOL OF MATHEMATICS.
DIRECTOR Ph. D. Ronald Eduardo Paternina Salguedo

Introducción

Actualmente, la teoría de los espacios de Banach es una de las ramas del Análisis Funcional que más rápidamente se ha desarrollado en los últimos 50 años y es un tema que todavía sigue muy vivo debido a sus conexiones en distintas áreas de las matemáticas, como por ejemplo la teoría de Probabilidad, el Análisis Armónico, la Dinámica Topológica, la Geometría Integral, Ecuaciones Diferenciales Parciales, entre otros.

Esta teoría comenzó “oficialmente” a consolidarse como parte del Análisis Funcional con la aparición del libro de Stefan Banach (ver [3]) en 1932 y se ha desarrollado con la intensión de responder preguntas muy naturales con respecto a la estructura de los espacios de Banach, donde muchas de estas preguntas se remontan a los trabajos de Banach y de su escuela en la universidad de Lvov donde Banach era profesor. Desde la aparición de [3], una enorme cantidad de investigaciones fueron hechas sobre la estructura de espacios de Banach. Uno de los objetos de estudio más importante de la teoría de los espacios de Banach son los espacios de funciones continuas $\mathcal{C}(K)$; de hecho, se puede argumentar que el espacio $\mathcal{C}[0,1]$ fue el primer espacio de Banach estudiado (ver [6]) en 1903, además, antes del desarrollo de la medida de Lebesgue, los espacios de funciones continuas eran los únicos espacios de Banach con los cuales trabajaban.

Una de las estructuras subyacentes del análisis funcional la cual relaciona los espacios de Banach y las álgebras son las álgebras de Banach, y ha existido durante las últimas décadas un gran interés en el estudio de algunas álgebras que parecen ser espacios $\mathcal{C}(K)$.

Un cuestionamiento que surge inmediatamente es si existen álgebras de Banach que no parecieran que fueran espacios $\mathcal{C}(K)$. En general, han aparecido en la literatura algunos trabajos con resultados que garantizan cuando cierta álgebra de Banach es un espacio $\mathcal{C}(K)$. Estos trabajos recurren al Análisis complejo y a métodos generales de álgebras de Banach que dependen en gran medida de la utilización de escalares complejos, pero en [1] Albiac y Kalton obtuvieron un resultado similar que va enfocado en evitar el Análisis Complejo y utilizar solamente la teoría de álgebras de Banach.

Lo anterior motiva a estudiar las álgebras de Banach y con ello conocer algunos resultados en la literatura que versen sobre espacios de Banach de funciones continuas, propiedades y aplicaciones; entre otras razones, como etapa previa para el entendimiento y desarrollo de resultados en otros temas de la teoría de espacios de Banach, como es el caso de los espacios isométricamente inyectivos.

Los espacios isométricamente inyectivos son algunos espacios de Banach, que permiten ciertas extensiones de operadores lineales dados. Entre las décadas de los 40 y 50 Goodner y Nachbin demostraron una condición para que los espacios de Banach $\mathcal{C}(K)$ sean isométricamente inyectivos, dando origen a una teoría que hoy en día ha cobrado mucha importancia, la clasificación de los espacios isométricamente inyectivos (ver [8, 11]).

Con base en lo anterior, el objetivo principal de este trabajo consiste en estudiar algunas técnicas fundamentales de la teoría de espacios de Banach de funciones continuas y de la teoría de las álgebras de Banach para demostrar cuando un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es un espacio $\mathcal{C}(K)$ y cuando los espacios $\mathcal{C}(K)$ son espacios isométricamente inyectivos. Con este trabajo, se espera generar interés en la comunidad matemática iniciante en el tema, y de igual manera, motivar el avance de estos a niveles de cursos de posgrado.

El presente trabajo lo hemos organizado de la siguiente manera. En el primer capítulo, presentamos algunos conceptos y resultados relevantes del análisis funcional que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Iniciamos con una revisión sobre los espacios de Banach y algunos resultados relacionados con estos espacios, como el Teorema de Banach-Steinhaus, el Teorema de Hahn-Banach para espacios normados, el Teorema de la aplicación abierta y ciertas propiedades de la topología débil*. Adicionalmente, estudiaremos la definición de conjuntos convexos y punto extremo para presentar el Teorema de Krein-Milman y la primera forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach. Posteriormente, se hace una revisión de los conjuntos parcialmente ordenados donde se destaca el Lema de Zorn; definiremos las álgebras y subálgebras para presentar el Teorema de Stone-Weierstrass y finalmente haremos una estimación para calcular el coeficiente binomial $\binom{1/2}{n}$.

En el segundo capítulo presentamos algunas propiedades de las álgebras de Banach y de los homomorfismos definidos sobre álgebras de Banach. Adicionalmente, se da una caracterización de las álgebras de Banach reales que son isométricamente isomorfas a los espacios reales $\mathcal{C}(K)$ de funciones continuas sobre un espacio de Hausdorff compacto K y finalmente, mostramos ejemplos de algunas álgebra de

Banach que son isométricamente isomorfas a un espacio $\mathcal{C}(K)$ y otras que no lo son.

Finalmente, en el tercer capítulo definimos los espacios isométricamente inyectivos y el orden-completo para los espacios $\mathcal{C}(K)$ usando el concepto del axioma de completitud en los números reales, y después demostramos algunos teoremas sobre aplicaciones sublineales necesarios para probar cuando los espacios $\mathcal{C}(K)$ son isométricamente inyectivos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo haremos una revisión de algunos conceptos y resultados relevantes del análisis funcional que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Iniciamos con una revisión sobre los espacios de Banach y algunos resultados relacionados con estos espacios, como el Teorema de Banach-Steinhaus, el Teorema de Hahn-Banach para espacios normados, el Teorema de la aplicación abierta y ciertas propiedades de la topología débil*. Adicionalmente, estudiaremos la definición de conjuntos convexos y punto extremo para presentar el Teorema de Krein-Milman y la primera forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach. Posteriormente, se hace una revisión de los conjuntos parcialmente ordenados donde se destaca el Lema de Zorn; definiremos las álgebras y subálgebras para presentar el Teorema de Stone-Weierstrass y finalmente haremos una estimación para calcular el coeficiente binomial $\binom{1/2}{n}$.

1.1. Espacios de Banach

En esta sección iniciamos recordando algunos preliminares sobre la teoría de los espacios de Banach. Comenzamos estableciendo la definición de un espacio de Banach.

Definición 1.1.1. *Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado y completo; es decir, es un espacio vectorial normado en el cual toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Una propiedad importante que verifica los subespacios cerrados de un espacio de Banach, se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.2. [10, pág. 67]. *Sea X un espacio Banach, y sea A un subespacio de X. Entonces A es cerrado si y sólo si A es completo.*

El siguiente resultado garantiza la convergencia de una serie en un espacio de Banach a partir de la convergencia absoluta.

Teorema 1.1.3. [10, pág. 68]. *Sea X un espacio normado. Los siguientes enunciados son equivalentes.*
(i) X es un espacio de Banach.
(ii) Si $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en X, es decir $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$.

El próximo teorema garantiza la existencia del inverso de un operador definido entre espacios de Banach.

Teorema 1.1.4. [10, pág 88]. *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal, entonces*
(i) El operador inverso $T^{-1} : Y \longrightarrow X$ existe si y sólo si $T(x)$ implica que $x = 0$.
(ii) Si T^{-1} existe, entonces es un operador lineal.

El Teorema de la Aplicación abierta afirma cuándo un operador lineal acotado definido entre espacios Banach es una aplicación abierta. Antes de establecer ese resultado, es necesario dar la definición de operador lineal acotado y aplicación abierta.

Definición 1.1.5. *Sean X e Y dos espacios de Banach. Un operador lineal $T : X \longrightarrow Y$ se dice que es acotado, si existe una constante $c > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq c \|x\|_X$ para todo $x \in X$.*

Observación 1.1.6. [10, pág. 97]. *Un operador lineal T es continuo si y sólo si es acotado.*

Definición 1.1.7. *Si X e Y son espacios de Banach, un operador T definido de X en Y es una aplicación abierta, si para cada conjunto abierto U de X, el conjunto $T(U)$ es abierto en Y.*

A continuación presentamos el Teorema de la Aplicación de la abierta

Teorema 1.1.8 (Teorema de la aplicación abierta). [10, pág. 286]. *Sean X, Y espacios de Banach , si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal acotado y sobreyectivo, entonces T es una aplicación abierta.*

El siguiente resultado es un corolario del Teorema de la aplicación abierta y garantiza la continuidad del operador T^{-1}, además permite relacionar las normas de los espacios X e Y de manera que sean equivalentes por medio del operador T.

Corolario 1.1.9. [13, pág. 48]. *Sean X e Y espacios de Banach. Si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal acotado biyectivo, entonces T^{-1} es continuo, además existen números reales positivos a y b tales que $a\|x\| \leq \|T(x)\| \leq b\|x\|$ para todo $x \in X$.*

El siguiente resultado es conocido como el Teorema de Banach-Steinhaus, el cual caracteriza una familia de operadores lineales y continuos definidos entre espacios de Banach que están puntualmente acotados. Este teorema lo usaremos en el capítulo 2.

Teorema 1.1.10 (Teorema de Banach-Steinhaus). [4, pág. 32]. *Sea* $(T_i)_{i\in I}$ *una familia de operadores lineales acotados definidos de un espacio de Banach* X *en un espacio de Banach* Y*. Si* $\sup\{\|T_i(x)\| : i \in I\}$ *es finito para cada* x *en* X*, entonces* $\sup\{\|T_i\| : i \in I\}$ *es finito, es decir, existe una constante* $c > 0$ *tal que* $\|T_i(x)\| \leq c\|x\|$ *para todo* $x \in X$ *y todo* i *en* I *y además* $c = \sup\{\|T_i\| : i \in I\}$.

Ahora presentamos dos resultados de Hahn-Banach los cuales serán usados en los capítulos 2 y 3.

Teorema 1.1.11 (Teorema de Hahn-Banach para espacios normados). [10, pág. 221]. *Sea* f *un funcional lineal acotado definido sobre un subconjunto* Y *de un espacio normado* X*. Entonces existe un funcional lineal acotado* $\tilde{f}$ *definido sobre* X *el cual es una extensión de* f *a* X *y tiene la misma norma que* f*, es decir,* $\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Y$.

El siguiente resultado garantiza la existencia de un funcional lineal sobre un espacio normado X a partir de un elemento no nulo de X.

Teorema 1.1.12. *(Corolario del teorema de Hahn-Banach).* [10, pág. 223]. *Sea* X *un espacio normado y sea* $x \in X$ *tal que* $x \neq 0$*. Entonces existe* $f \in X^\star$ *tal que* $\|f\| = 1$ *y* $f(x) = \|x\|$.

1.2. Topología débil*

En esta sección definiremos la topología débil* y presentamos algunas propiedades. Iniciamos estableciendo la definición de topología débil*.

Definición 1.2.1. Sea X un espacio vectorial normado y sea $X^\star$ su espacio dual. Para cada $x \in X$ consideremos la aplicación $\varphi_x : X^\star \to \mathbb{R}$ definida por $f \mapsto \varphi_x(f) = f(x)$. Entonces la topología débil* denotada por $\sigma(X^\star, X)$ es la topología menos fina sobre $X^\star$ que hace continua a todas las aplicaciones $(\varphi_x)_{x\in X}$.

Observación 1.2.2.
(i) Una base de abiertos de un punto $f_0 \in X^\star$ *para la topología* $\sigma(X^\star, X)$ *se obtiene al considerar todos los conjuntos de la forma*

$$V_\varepsilon(f_0; x_1, \ldots, x_n) = \{f \in X^\star : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon \quad \textit{para} \quad i = 1, \ldots, n\}$$

donde $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *están en* X *y* $\varepsilon > 0$.
(ii) [4, pág. 63]. *La topología débil** *es Hausdorff.*

El siguiente resultado es conocido como el Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki y afirma que la esfera unitaria cerrada en el espacio dual de un espacio de Banach X es débil* compacta.

Teorema 1.2.3 (Teorema de Banach–Alaoglu–Bourbaki). [4, pág 66]. *Sea X un espacio de Banach, entonces $B_{X^\star} = \{f \in X^\star : \|f\| \leq 1\}$ es débil* compacta.*

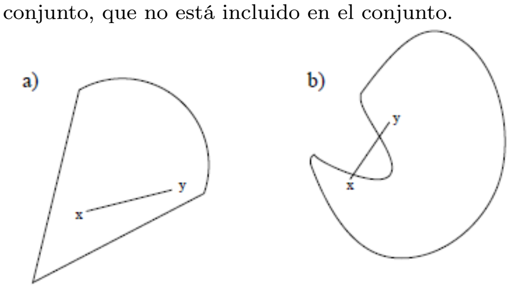
1.3. Conjuntos convexos y puntos extremos

En esta sección introducimos la definición de conjunto convexo para estudiar los puntos extremos de estos conjuntos. Además, definimos la envolvente convexa y presentamos el Teorema de Krein-Milman que será de utilidad en el capítulo 2.

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio vectorial y sea $A \subset X$. Diremos que A es convexo si para todo $x, y \in A$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ se tiene que $\lambda x + (1-\lambda)\, y \in A$.*

Geométricamente, esta definición se puede interpretar como sigue: un conjunto no vacío es convexo si dados dos puntos del conjunto, el segmento de recta que los une está contenido en dicho conjunto (ver Figura 1.1).

Figura 1.1: El conjunto de la figura a) es convexo. El conjunto de la figura b) no es convexo, pues existe un segmento de recta, uniendo dos puntos del conjunto, que no está incluido en el conjunto.



A continuación presentamos la definición de envolvente convexa.

Definición 1.3.2. *Sea A un subconjunto de un espacio vectorial X. La envolvente convexa de A denotada por $co\,(A)$ es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A.*

Observación 1.3.3.

(i) Si X es convexo, $co\,(A)$ es no vacío.

(ii) [4, pág. 17]. *Se puede demostrar que $co\,(A)$ se escribe analíticamente*

$$co\,(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : (x_i)_{i=1}^{n} \subset A, \quad \lambda_i \geq 0 \quad y \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definición 1.3.4. *Sea X un espacio vectorial y sea $A \subset X$ un conjunto convexo. Un elemento $z \in A$ es llamado punto extremo de A, si para $x, y \in A$ y $0 < \lambda < 1$ se tiene que $z = \lambda x + (1 - \lambda) y$, entonces $z = x = y$.*

En otras palabras, un punto extremo del conjunto convexo A es un punto en A que no es punto interior de algún segmento de recta en A .

Observación 1.3.5. *El conjunto de todos los puntos extremos de A se notará por $\partial_e (A)$.*

A través del siguiente ejemplo podemos observar un caso de un conjunto convexo y sus puntos extremos.

Ejemplo 1.3.6. *No es difícil demostrar que la bola unitaria cerrada $\overline{B(0,1)}$ en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo y que el conjunto de puntos extremos queda representado por $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, que es la frontera de $\overline{B(0,1)}$.*

El siguiente resultado es conocido como el Teorema de Krein Milman, el cual permite relacionar un conjunto convexo y compacto con la clausura de la envolvente convexa de sus puntos extremos.

Teorema 1.3.7 (Teorema de Krein-Milman). [5, pág. 142]. *Sea X un espacio vectorial normado y sea A un subconjunto de X convexo y compacto, entonces $A = \overline{co(\partial_e (A))}$, es decir A coincide con la clausura de la envolvente convexa de sus puntos extremos.*

En particular, cada subconjunto compacto y convexo de un espacio vectorial normado contiene un punto extremo, puesto que

$$\partial_e (A) \subset co(\partial_e (A)) \subset \overline{co(\partial_e (A))} = A.$$

1.4. Teorema de Hahn-Banach: separación de conjuntos convexos

En esta sección presentamos la definición de hiperplano junto con una propiedad para introducir la noción de separación en sentido amplio de dos conjuntos por un hiperplano en un espacio vectorial normado, y así, poder mostrar la primera forma geométrica del Teorema de Hahn Banach que garantiza la existencia de un hiperplano que separa dos conjuntos convexos. Iniciamos estableciendo la definición de hiperplano.

Definición 1.4.1. *Sea X un espacio vectorial normado, entonces un hiperplano H es un subconjunto de X de la forma $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ donde f es un funcional lineal y $\alpha \in \mathbb{R}$.*

El siguiente resultado caracteriza los hiperplanos cerrados.

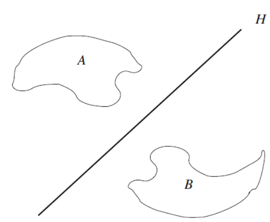
Proposición 1.4.2. [4, pág 5]. *Sea X un espacio normado. El hiperplano $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ es cerrado si y sólo si f es continuo.*

A continuación presentamos la definición de separación en sentido amplio de dos conjuntos por un hiperplano.

Definición 1.4.3. Sean A y B dos subconjuntos de un espacio vectorial normado X. Diremos que el hiperplano $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ separa A y B en sentido amplio si $f(x) \leq \alpha$ para todo $x \in A$ y $f(x) \geq \alpha$ para todo $x \in B$.

Geométricamente la separación significa que A y B se sitúan de un lado y de otro de H (ver Figura 1.2).

Figura 1.2: Separación entre los conjuntos A y B



El próximo teorema es conocido como la primera forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach y garantiza la existencia de un hiperplano cerrado que separa en sentido amplio dos conjuntos convexos.

Teorema 1.4.4 (Primera forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach,). [4, pág. 5]. *Sea X un espacio vectorial normado. Si A y B son dos subconjuntos no vacíos de X, convexos y disjuntos, y además A es abierto en X, entonces existe un hiperplano cerrado $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ que separa A y B en sentido amplio.*

1.5. Teorema de Stone-Weierstrass

El Teorema de Stone-Weierstrass da condiciones sobre una subálgebra cerrada de $\mathcal{C}(K)$ para que sea igual a $\mathcal{C}(K)$. Antes de establecer ese resultado es necesario dar la definición de álgebra y subálgebra.

Definición 1.5.1. *Un álgebra real es un espacio vectorial $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{R}$ en el cual se define una multiplicación en $\mathcal{A}$ que verifica las siguientes propiedades:*
(i) $x(yz) = (xy)z$,
(ii) $(x+y)z = xz + yz$; $x(y+z) = xy + xz$,

(iii) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$,

para todo x, y, z *en* $\mathcal{A}$ *y cualquier escalar* α *en* $\mathbb{R}$.

Definición 1.5.2 *Una subálgebra real es un subespacio vectorial de un álgebra* $\mathcal{A}$*, que además es cerrado bajo la multiplicación de* $\mathcal{A}$.

Antes de enunciar el Teorema de Stone-Weirstrass daremos la definición de separación de puntos por subconjuntos de $\mathcal{C}(K)$.

Definición 1.5.3. *Sea* K *un espacio topológico compacto Hausdorff. Un subconjunto* A *del espacio* $\mathcal{C}(K)$ *separa puntos de* K *si para cada par de elementos* $x \neq y \in K$ *existe una función* $f \in A$ *tal que* $f(x) \neq f(y)$.

A continuación presentamos el Teorema de Stone Weierstrass.

Teorema 1.5.4 (Teorema de Stone-Weierstrass). [5, pág. 145]. *Si* $\mathcal{A}$ *es una subálgebra de* $\mathcal{C}(K)$ *que contiene las funciones constantes de* $\mathcal{C}(K)$ *y además separa puntos de* K*, entonces* $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(K)$.

1.6. Lema de Zorn

En esta sección recordaremos la definición de conjunto parcialmente ordenado y la definición de cadena para enunciar el Lema de Zorn el cual garantiza la existencia de un elemento maximal en un conjunto parcialmente ordenado. Iniciamos estableciendo la definición de conjunto parcialmente ordenado.

Definición 1.6.1. *Un conjunto parcialmente ordenado es un conjunto* X *en el cual está definido un orden parcial, esto es, una relación binaria* $\leq$ *que verifica las propiedades*

(i) $a \leq a$ *(reflexiva),*

(ii) si $a \leq b$ *y* $b \geq a$*, entonces* $a = b$ *(antisimétrica),*

(iii) si $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, entonces* $a \leq c$ *(transitiva),*

para todo $a, b, c \in X$.

A continuación presentamos la definición de cadena.

Definición 1.6.2. *Una cadena* A *es un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado* X *que además satisface la propiedad de que para todo* $a, b \in A$

(iv) $a \leq b$ *o* $b \leq a$ *(totalidad).*

Antes de enunciar el Lema de Zorn daremos la definición de cota superior y elemento maximal en un conjunto parcialmente ordenado

Definición 1.6.3. Una cota superior de un subconjunto A de un conjunto parcialmente ordenado X es un elemento $a \in X$ tal que $x \leq a$ para cada $x \in A$.

Definición 1.6.4. Un elemento maximal de un conjunto parcialmente ordenado X es un elemento $a \in X$ tal que si $a \leq x$ para algún $x \in X$ entonces $a = x$.

A continuación presentamos el Lema de Zorn.

Teorema 1.6.5 (Lema de Zorn). [12, pág. 120]. *Sea X un conjunto parcialmente ordenado. Si toda cadena tiene una cota superior en X, entonces X tiene un elemento maximal.*

1.7. El coeficiente binomial $\binom{1/2}{n}$

En esta sección presentamos un resultado que permite realizar de una manera más natural estimaciones del coeficiente binomial $\binom{1/2}{n}$.

Teorema 1.7.1. *El coeficiente binomial $\binom{1/2}{n}$ para $n \in \mathbb{N}$ viene dado por la formula $\binom{1/2}{n} = \frac{1}{(-4)^n(1-2n)}\binom{2n}{n}$.*

Demostración. Como

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1},$$

para $m, n \in \mathbb{N}$, sin pérdida de generalidad consideremos

$$\binom{-1/2}{n-1} + \binom{-1/2}{n} = \binom{1/2}{n} \tag{1.1}$$

para $n \in \mathbb{N}$ y probemos que

$$\binom{-1/2}{n-1} + \binom{-1/2}{n} = \frac{1}{(-4)^n(1-2n)}\binom{2n}{n}. \tag{1.2}$$

De [9] tenemos que

$$\binom{-1/2}{k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \binom{2k}{k},$$

luego

$$\begin{aligned}
\binom{-1/2}{n-1} + \binom{-1/2}{n} &= \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\binom{2(n-1)}{n-1} + \left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left[(-4)\binom{2n-2}{n-1} + \binom{2n}{n}\right] \\
&= \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left[\frac{(-4)(2n-2)!}{(n-1)![2n-2-(n-1)]!} + \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}\right] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left[\frac{(-4)(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} + \frac{(2n)!}{n!n!}\right] \\
&= \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left[\frac{(-4)n^2(2n-2)!}{n!n!} + \frac{(2n)!}{n!n!}\right] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left[\frac{-4n^2(2n-2)! + (2n)(2n-1)(2n-2)!}{n!n!}\right] \\
&= \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left[\frac{\left[-4n^2 + 2n(2n-1)\right](2n-2)!}{n!n!}\right] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left[\frac{(-2n)(2n-2)!}{n!n!}\right] \\
&= \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left[\frac{(-1)(2n)(2n-1)(2n-2)!}{(2n-1)n!n!}\right] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left[\frac{(-1)(2n)!}{(2n-1)n!n!}\right] \\
&= \left(-\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{1-2n}\right) \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{1}{(-4)^n(1-2n)}\binom{2n}{n},
\end{aligned}$$

por lo tanto de (1.1) y (1.2) tenemos que $\binom{1/2}{n} = \frac{1}{(-4)^n(1-2n)}\binom{2n}{n}$. □

Capítulo 2

Álgebras de Banach y el Teorema de Albiac-Kalton

En este capítulo presentamos algunas propiedades de las álgebras de Banach y de los homomorfismos definidos sobre álgebras de Banach. Adicionalmente, se da una caracterización de las álgebras de Banach reales que son isométricamente isomorfas a los espacios reales $\mathcal{C}(K)$ de funciones continuas sobre un espacio de Hausdorff compacto K. Finalmente, mostramos ejemplos de algunas álgebra de Banach que son isométricamente isomorfas a un espacio $\mathcal{C}(K)$ y otras que no lo son.

2.1. Álgebras de Banach

Debido a que algunos espacios de Banach muestran propiedades interesantes cuando tienen estructura de álgebra, Gelfand en [7] inició el estudio de estos espacios que llamaremos álgebras de Banach, y se definen como sigue.

Definición 2.1.1. *Un álgebra de Banach es un espacio de Banach $\mathcal{A}$ en el cual se define una multiplicación que verifica las siguientes propiedades:*
(i) $x(yz) = (xy)z$,
(ii) $(x+y)z = xz + yz$; $x(y+z) = xy + xz$,
(iii) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$,
(iv) $\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$
para todo x, y, z *en* $\mathcal{A}$ *y cualquier escalar* α *en* $\mathbb{R}$.

Observación 2.1.2. *Si la multiplicación en* $\mathcal{A}$ *es conmutativa, es decir* $xy = yx$ *para todo* x, y *en* $\mathcal{A}$*, entonces* $\mathcal{A}$ *es llamada álgebra de Banach conmutativa. Si existe un elemento* e *en* $\mathcal{A}$ *tal que*

$xe = ex = x$ para todo $x \in \mathcal{A}$ y $\|e\| = 1$, $\mathcal{A}$ es llamada álgebra de Banach con identidad, además este elemento identidad es único. En efecto, sea e' otro elemento identidad de $\mathcal{A}$, entonces $ee' = e$. Por otro lado, como e es el elemento identidad en $\mathcal{A}$, se obtiene que $e'e = e'$, y por ser $\mathcal{A}$ conmutativa, se deduce que $e = e'$.

Observación 2.1.3. *La propiedad (iv) hace que la multiplicación en $\mathcal{A}$ sea continua, es decir que la aplicación*

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$(a, b) \longmapsto ab$$

es continua. En efecto, sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathcal{A}$ tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$, veamos que $x_n y_n \to xy$. Para ello sea $\varepsilon > 0$. Consideremos la estimación

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\| &= \|(x_n y_n - x y_n) + (x y_n - xy)\| \\ &\leq \|(x_n - x)\, y_n\| + \|x\,(y_n - y)\| \\ &\leq \|x_n - x\|\, \|y_n\| + \|x\|\, \|y_n - y\|, \end{aligned}$$

esto es

$$\|x_n y_n - xy\| \leq \|y_n\|\, \|x_n - x\| + \|x\|\, \|y_n - y\|. \tag{2.1}$$

Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, es acotada, luego existe $M_1 > 0$ tal que $\|y_n\| \leq M_1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Definamos $M = \text{máx}\{M_1, \|x\|\}$, entonces de (2.1) se sigue que

$$\|x_n y_n - xy\| \leq M\, \|x_n - x\| + M\, \|y_n - y\|.$$

De la convergencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existen números naturales K_1 y K_2 tales que si $n \geq K_1$ entonces $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2M}$, y si $n \geq K_2$ entonces $\|y_n - y\| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$. Considerando a $K = \text{máx}\{K_1, K_2\}$, si $n \geq K$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\| &\leq M\, \|x_n - x\| + M\, \|y_n - y\| \\ &< M\big(\tfrac{\varepsilon}{2M}\big) + M\big(\tfrac{\varepsilon}{2M}\big) = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que demuestra la continuidad del producto.

Observación 2.1.4. *En particular, la multiplicación en $\mathcal{A}$ es continua a la izquierda y continua a la derecha, es decir, si $x_n \to x$ entonces $x_n y \to xy$ para todo $y \in \mathcal{A}$, y si $y_n \to y$ entonces $x y_n \to xy$ para todo $x \in \mathcal{A}$.*

El siguiente resultado permite transformar un espacio de Banach el cual tiene estructura de álgebra en un álgebra de Banach.

Teorema 2.1.5. *Sea $\mathcal{A}$ un espacio de Banach y además un álgebra real con identidad $e \neq 0$ en la que la multiplicación es continua a la izquierda y a la derecha, entonces existe una norma sobre $\mathcal{A}$ que induce la misma topología de $\mathcal{A}$ y que convierte a $\mathcal{A}$ en un álgebra de Banach con identidad.*

Demostración. (Como $e \neq 0$, se descarta el caso en que $\mathcal{A} = \{0\}$.) A cada $x \in \mathcal{A}$ le asignamos el operador multiplicación por izquierda

$$\begin{aligned} M_x : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ t &\longmapsto M_x(t) = xt. \end{aligned}$$

Note que cada operador M_x es lineal, pues para todo $a, b \in \mathcal{A}$ y cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$

$$M_x(a+b) = x(a+b) = xa + xb = M_x(a) + M_x(b),$$

y

$$M_x(\alpha a) = x(\alpha a) = \alpha(xa) = \alpha M_x(a).$$

Veamos que los operadores M_x son acotados. Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $z_n \longrightarrow z$ con $z \in \mathcal{A}$, por hipótesis la multiplicación en $\mathcal{A}$ es continua a la derecha, entonces para $x \in \mathcal{A}$

$$M_x(z_n) = xz_n \longrightarrow xz = M_x(z),$$

luego cada operador M_x es continuo, y por tanto acotado.
Como todos los operadores M_x son lineales y acotados, definamos el conjunto $\widetilde{\mathcal{A}} = \{M_x : x \in \mathcal{A}\}$ el cual es subconjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, el conjunto de todos los operadores lineales acotados sobre $\mathcal{A}$. Veamos que $\widetilde{\mathcal{A}}$ es un espacio de Banach, para esto, probaremos que $\widetilde{\mathcal{A}}$ es un cerrado del espacio de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{A})$. En efecto, demostremos que $Cl(\tilde{\mathcal{A}}) \subset \widetilde{\mathcal{A}}$ donde $Cl(\tilde{\mathcal{A}})$ denota la clausura del conjunto $\widetilde{\mathcal{A}}$. Sea $S \in Cl(\tilde{\mathcal{A}})$, entonces existe una sucesión $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\widetilde{\mathcal{A}}$ tal que $S_k \to S$. Como cada $S_k \in \widetilde{\mathcal{A}}$, entonces S_k es la multiplicación a la izquierda por $x_k \in \mathcal{A}$, luego

$$S_k(y) = x_k y = (x_k e)\, y = S_k(e)\, y \quad (y \in \mathcal{A}). \tag{2.2}$$

El primer término de (2.2) tiende a $S(y)$ para cada $y \in \mathcal{A}$, pues como

$$\|S_k(y) - S(y)\| = \|(S_k - S)(y)\| \leq \|S_k - S\| \, \|y\|,$$

entonces de la convergencia de $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{k\to\infty} \|S_k(y) - S(y)\| = \lim_{k\to\infty} \|S_k - S\| \|y\| = 0.$$

En partícular $S_k(e) \to S(e)$, y para algún $x \in \mathcal{A}$

$$x_k e \longrightarrow xe$$

$$x_k \longrightarrow x,$$

y como la multiplicación en $\mathcal{A}$ es continua a la izquierda, para cada $y \in \mathcal{A}$

$$S_k(e)\, y = (x_k e)\, y = x_k y \longrightarrow xy = (xe)\, y = S(e)\, y,$$

por lo tanto el último término de (2.2) tiende a $S(e)\,y$. Como $S_k(y) \to S(y)$, $S_k(e)\,y \to S(e)\,y$ y tomando $S(e) = x$, de (2.2) se sigue que

$$S(y) = S(e)\, y = xy = M_x(y) \quad (y \in \mathcal{A}),$$

luego $S = M_x \in \widetilde{\mathcal{A}}$, y así $\widetilde{\mathcal{A}}$ es cerrado. Como $\widetilde{A}$ es un cerrado del espacio de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, por el Teorema 1.1.2, $\widetilde{\mathcal{A}}$ es un espacio de Banach.

Veamos ahora que $\widetilde{\mathcal{A}}$ es un álgebra de Banach con respecto a la norma usual del operador

$$\|M_x\| = \sup\{\|M_x(t)\| : t \in \mathcal{A}, \|t\| = 1\},$$

y con la multiplicación $M_x \circ M_y = M_{xy}$ (composición de operadores) la cual esta bien definida sobre $\widetilde{\mathcal{A}}$, pues

$$(M_x \circ M_y)(t) = M_x[M_y(t)] = M_x(yt) = (xy)\, t = M_{xy}(t) \quad (t \in \mathcal{A}).$$

Probemos que $\widetilde{\mathcal{A}}$ verifica *(i)*, *(ii)*, *(iii)* y *(iv)* de la Definición 2.1.1.

(i) Note que $M_x \circ (M_y \circ M_z) = (M_x \circ M_y) \circ M_z$, pues

$$M_x \circ (M_y \circ M_z) = M_x \circ M_{yz} = M_{(xy)z} = M_{xy} \circ M_z = (M_x \circ M_y) \circ M_z.$$

(ii) Veamos que $(M_x + M_y) \circ M_z = M_x \circ M_z + M_y \circ M_z$. Como $M_x + M_y = M_{x+y}$ ya que para algún $t \in \mathcal{A}$

$$M_x(t) + M_y(t) = xt + yt = (x + y)\, t = M_{x+y}(t),$$

entonces

$$[(M_x + M_y) \circ M_z](t) = (M_{x+y} \circ M_z)(t) = M_{x+y}[M_z(t)] = M_{x+y}(zt) = (x + y)(zt)$$

$$= x(zt) + y(zt) = M_x(zt) + M_y(zt) = M_x[M_z(t)] + M_y[M_z(t)]$$
$$= (M_x \circ M_z)(t) + (M_y \circ M_z)(t).$$

(iii) $\alpha(M_x \circ M_y) = \alpha M_x \circ M_y = M_x \circ \alpha M_y$ para $\alpha \in \mathbb{R}$, pues para algún $t \in \mathcal{A}$

$$\alpha[(M_x \circ M_y)(t)] = \alpha[M_x(M_y(t))] = \alpha[M_x(yt)] = \alpha(xyt) = (\alpha x)(yt)\,\alpha M_x(yt) = \alpha M_x[M_y(t)]$$
$$= (\alpha M_x \circ M_y)(t)$$

y

$$(\alpha M_x \circ M_y)(t) = \alpha M_x[M_y(t)] = \alpha M_x(yt) = \alpha xyt = x(\alpha yt) = M_x(\alpha yt) = M_x[\alpha M_y(t)]$$
$$= (M_x \circ \alpha M_y)(t)$$

(iv) Además $\|M_x \circ M_y\| \leq \|M_x\|\,\|M_y\|$ ya que si $t \in \mathcal{A}$ con $\|t\| = 1$, por ser M_x acotado tenemos que

$$\|(M_x \circ M_y)(t)\| = \|M_x[M_y(t)]\| \leq \|M_x\|\,\|M_y(t)\|,$$

esto es

$$\|(M_x \circ M_y)(t)\| \leq \|M_x\|\,\|M_y(t)\| \quad (t \in \mathcal{A}, \|t\| = 1), \tag{2.3}$$

así, de (2.3) se sigue que

$$\sup\{\|(M_x \circ M_y)(t)\| : t \in \mathcal{A}, \|t\| = 1\} \leq \sup\{\|M_x\|\,\|M_y(t)\| : t \in \mathcal{A}, \|t\| = 1\}$$
$$\sup\{\|(M_x \circ M_y)(t)\| : t \in \mathcal{A}, \|t\| = 1\} \leq \|M_x\| \sup\{\|M_y(t)\| : t \in \mathcal{A}, \|t\| = 1\}$$
$$\|M_x \circ M_y\| \leq \|M_x\|\,\|M_y\|.$$

Por lo tanto se ha demostrado que $\widetilde{\mathcal{A}}$ es un álgebra de Banach. Además, $\widetilde{\mathcal{A}}$ tiene como elemento identidad al operador

$$M_e : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$t \longmapsto M_e(t) = et = t$$

tal que $\|M_e\| = 1$.

Definamos ahora el operador

$$T : \mathcal{A} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}$$
$$x \longmapsto T(x) = M_x.$$

Sean $x, y \in \mathcal{A}$, entonces

$$T(x+y) = M_{x+y} = M_x + M_y = T(x) + T(y).$$

y $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$ y cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. En efecto, como $M_{\alpha x} = \alpha M_x$ ya que

$$M_{\alpha x}(t) = (\alpha x) t = \alpha (xt) = \alpha M_x(t) \quad (t \in \mathcal{A}),$$

entonces

$$T(\alpha x) = M_{\alpha x} = \alpha M_x = \alpha T(x),$$

luego T es lineal. Veamos ahora que $T(x) = 0$ implica que $x = 0$. Si $T(x) = 0$ entonces M_x debe ser el operador nulo, es decir $M_x(t) = 0$ para todo $t \in \mathcal{A}$, y en particular para el elemento identidad

$$\begin{aligned} M_x(e) &= 0 \\ xe &= 0 \\ x &= 0. \end{aligned}$$

Como $T(x) = 0$ implica que $x = 0$, el Teorema 1.1.4 garantiza la existencia del operador lineal

$$\begin{aligned} T^{-1} : \widetilde{\mathcal{A}} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ M_x &\longmapsto T^{-1}(M_x) = x \end{aligned}$$

el cual es biyectivo. Sea $x \in \mathcal{A}$, como M_x es acotado entonces

$$\|x\| = \|xe\| = \|M_x(e)\| \leq \|M_x\| \|e\| = \|M_x\|,$$

luego

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \|M_x\| \\ \left\|T^{-1}(M_x)\right\| &\leq \|M_x\|, \end{aligned}$$

esto es, T^{-1} es acotado.

Como T^{-1} es un operador lineal acotado y biyectivo definido entre los espacios de Banach $\mathcal{A}$ y $\widetilde{\mathcal{A}}$, por el Corolario del Teorema de la aplicación abierta (Corolario 1.1.9) $\left(T^{-1}\right)^{-1} = T$ es continua, además existen números reales $a > 0$ y $b > 0$ tales que

$$a \|M_x\| \leq \|x\| \leq b \|M_x\| \quad \left(M_x \in \widetilde{\mathcal{A}}\right). \tag{2.4}$$

Finalmente, tenemos que T y T^{-1} son continuos, luego $\mathcal{A}$ y $\widetilde{\mathcal{A}}$ son homeomorfos, y además (2.4) implica que tienen normas equivalentes, por lo tanto, se ha demostrado que para el álgebra real $\mathcal{A}$ con identidad , existe una norma sobre $\mathcal{A}$ que induce la misma topología de $\mathcal{A}$ y que convierte a $\mathcal{A}$ en un álgebra de Banach con identidad. $\square$

2.2. Algunas álgebras de Banach

El objetivo de esta sección es presentar algunos espacios de Banach que son álgebras de Banach con respecto a una operación de multiplicación adicional que esta bien definida.

Ejemplo 2.2.1. *Considere $\mathcal{C}(K)$ con la norma del supremo. Si se define la multiplicación usual de funciones $(fg)(t) = f(t)\,g(t)$ en $\mathcal{C}(K)$, entonces $\mathcal{C}(K)$ es un álgebra de Banach conmutativa $(fg = gf)$ con identidad (la función constante 1).*

Para verificar que $\mathcal{C}(K)$ satisface la propiedad *(iv)* de la Definición 2.1.1, note que para cualquier $f, g \in \mathcal{C}(K)$, $\|f\|\,\|g\|$ es cota superior del conjunto $\{|f(x)\,g(x)| : x \in K\}$. Como $\|fg\|$ es la menor de la cotas superiores de este conjunto, entonces $\|fg\| \leq \|f\|\,\|g\|$.

Observación 2.2.2. *Si $K = \{a_1, \ldots, a_n\}$ es un conjunto finito que consiste en n puntos, al considerar la aplicación $h : \mathcal{C}(K) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f \longmapsto h(f) = (f(a_1), \ldots, f(a_n))$, se sigue que $\mathcal{C}(K)$ es $\mathbb{R}^n$ con la multiplicación componente a componente $(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_n) = (x_1y_1, \ldots, x_ny_n)$. En particular, cuando $n = 1$ se obtiene el álgebra de Banach más simple, es decir $\mathbb{R}$ con el valor absoluto como norma.*

Ejemplo 2.2.3. *El espacio $\mathcal{C}^{(1)}[0,1]$ de todas las funciones continuas y diferenciables de valores reales sobre el intervalo $[0,1]$ con la multiplicación usual de funciones $(fg)(t) = f(t)\,g(t)$ y con la norma*

$$\|f\|_1 = \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)| + \sup_{0\leq t\leq 1} |f'(t)|$$

es un álgebra de Banach conmutativa $(fg = gf)$ con identidad (la función constante 1).

Para ver que $\mathcal{C}^{(1)}[0,1]$ satisface la propiedad *(iv)* de la Definición 2.1.1 note que

$$\|fg\| \leq \|f\|\,\|g\| \quad y \quad \|f'g'\| \leq \|f'\|\,\|g'\|,$$

(donde $\|.\|$ es la norma en $\mathcal{C}(K)$) por lo tanto $\|fg\| + \|f'g'\| \leq \|f\|\,\|g\| + \|f'\|\,\|g'\|$, esto es

$$\|fg\|_1 \leq a = \|f\|\,\|g\| + \|f'\|\,\|g'\|. \tag{2.5}$$

Considerando la estimación

$$
\begin{aligned}
a &\leq a + \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)| \sup_{0\leq t\leq 1} |g'(t)| + \sup_{0\leq t\leq 1} |f'(t)| \sup_{0\leq t\leq 1} |g(t)| \\
&= \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)| \sup_{0\leq t\leq 1} |g(t)| + \sup_{0\leq t\leq 1} |f'(t)| \sup_{0\leq t\leq 1} |g'(t)| + \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)| \sup_{0\leq t\leq 1} |g'(t)| + \sup_{0\leq t\leq 1} |f'(t)| \sup_{0\leq t\leq 1} |g(t)| \\
&= \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)| \left(\sup_{0\leq t\leq 1} |g(t)| + \sup_{0\leq t\leq 1} |g'(t)| \right) + \sup_{0\leq t\leq 1} |f'(t)| \left(\sup_{0\leq t\leq 1} |g(t)| + \sup_{0\leq t\leq 1} |g'(t)| \right) \\
&= \left(\sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)| + \sup_{0\leq t\leq 1} |f'(t)| \right) \left(\sup_{0\leq t\leq 1} |g(t)| + \sup_{0\leq t\leq 1} |g'(t)| \right) \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1
\end{aligned}
$$

de (2.5) se sigue que $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ con $f, g \in \mathcal{C}^{(1)}[0,1]$.

Ejemplo 2.2.4. *El espacio ℓ_∞ de sucesiones acotadas con la norma $\|x\| = \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\}$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad (la sucesión constante $(1) = (1,1,1,\ldots)$) y con la multiplicación de sucesiones definida componente a componente $(x_1, x_2, \ldots)(y_1, y_2, \ldots) = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots)$.*

ℓ_∞ verifica la desigualdad *(iv)* de la Definición 2.1.1, ya que para $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}, y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, $\|x\|\|y\|$ es cota superior del conjunto $\{|x_k y_k| : k \in \mathbb{N}\}$, pero como $\|xy\|$ es la mínima cota superior de este conjunto, entonces $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

Ejemplo 2.2.5. *Si X es un espacio de Banach, entonces el espacio $\mathcal{B}(X)$ de todos los operadores lineales acotados sobre X es un álgebra de Banach con respecto a la norma usual del operador $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| = 1\}$ y con la composición de operadores $(T \circ S)(t) = T[S(t)]$ como multiplicación. Además el operador idéntidad I es el elemento identidad.*

2.3. Homomorfismos reales en álgebras de Banach

En esta sección introducimos la definición de elementos invertibles de un álgebra para mostrar algunos resultados importantes de los homomorfismos definidos sobre álgebras de Banach. Iniciamos estableciendo la definición de homomorfismo de álgebras.

Definición 2.3.1. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra real y sea ϕ un funcional lineal sobre $\mathcal{A}$ que no es idénticamente nulo. Si $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$, entonces ϕ es llamado un homomorfismo real sobre $\mathcal{A}$.*

Observación 2.3.2. *A los homomorfismos definidos sobre el álgebra $\mathcal{A}$ también se le conocen como funcionales multiplicativos. Si ϕ es un operador lineal definido del álgebra $\mathcal{A}$ en un álgebra $\mathcal{B}$, tal que $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ para todo $x, y \in \mathcal{A}$, entonces ϕ es llamado un homomorfismo de álgebras.*

Definición 2.3.3. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra real con identidad, un elemento $x \in \mathcal{A}$ es llamado invertible si tiene un inverso en $\mathcal{A}$, es decir, si existe un elemento $x^{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $x^{-1}x = xx^{-1} = e$.*

Observación 2.3.4. *Cada elemento invertible $x \in \mathcal{A}$ tiene un único inverso, pues si u y v son inversos de x, $ux = e = xv$, luego*

$$u = ue = u(xv) = (ux)v = ev = v.$$

Algunas propiedades que verifican los homomorfismos reales son resumidas en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.5. *Si ϕ es un homomorfismo real sobre un álgebra real $\mathcal{A}$ con identidad, entonces*
(i) $\phi(e) = 1$,
(ii) $\phi(x) \neq 0$ para x invertible en $\mathcal{A}$.

Demostración. Probemos *(i)*. Sea $y \in \mathcal{A}$ con $\phi(y) \neq 0$, entonces tenemos que $\phi(y) = \phi(ye) = \phi(y)\phi(e)$, es decir $\phi(y) = \phi(y)\phi(e)$, además como $\phi(y) \neq 0$, se sigue que $\phi(e) = 1$.
Para demostrar *(ii)*, note que si $x \in \mathcal{A}$ es invertible, entonces existe x^{-1} en $\mathcal{A}$ tal que $xx^{-1} = e$, luego

$$\begin{aligned} \phi\left(xx^{-1}\right) &= \phi(e) \\ \phi(x)\phi\left(x^{-1}\right) &= 1, \end{aligned}$$

por lo tanto $\phi(x) \neq 0$. □

El siguiente resultado es una generalización de la propiedad *(iv)* de la Definición 2.1.1, y será utilizado en el siguiente teorema y en la seccion 2.5 para realizar algunas estimaciones.

Lema 2.3.6. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y sea $x \in \mathcal{A}$, entonces $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si $x \in \mathcal{A}$, en el caso $n = 1$, $\left\|x^1\right\| = \|x\|$ se da la igualdad. Si suponemos que la desigualdad es verdadera para $n = k$, es decir

$$\left\|x^k\right\| \leq \|x\|^k, \tag{2.6}$$

verificaremos que también es válida para $n = k+1$. Al multiplicar por $\|x\|$ en (2.6) se sigue que

$$\left\|x^{k+1}\right\| = \left\|x^k x\right\| \leq \left\|x^k\right\| \|x\| \leq \|x\|^k \|x\| = \|x\|^{k+1},$$

luego $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ es válido para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Sea $\mathcal{B}(X)$ el álgebra de Banach de todos los operadores lineales acotados definidos sobre el espacio de Banach X, si $T : X \to X$ en $\mathcal{B}(X)$ es tal que $\|T\| < 1$, entonces el Teorema de Neumann garantiza la existencia del operador inverso de $I_X - T$ el cual esta dado por la serie de Neumann

$$(I_X - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$

donde $T^0 = I_X$ y I_X denota el operador identidad sobre X. Al igual que en el caso de cualquier álgebra de Banach, el Teorema de Neumann puede ser generalizado de manera tal que garantice la existencia de elementos invertibles en algunas álgebras de Banach. En el siguiente resultado presentamos una generalización del Teorema de Neumann.

Teorema 2.3.7. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y sea $x \in \mathcal{A}$ tal que $\|x\| < 1$. Entonces*
(i) $e - x$ es ivertible,
(ii) $\left\|(e-x)^{-1} - e - x\right\| \leq \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$,
(iii) $|\phi(x)| < 1$ para cada homomorfismo real ϕ sobre $\mathcal{A}$.

Demostración. Veamos la parte *(i)*. Por el Lema 2.3.6 y por hipótesis tenemos que $0 \leq \|x^n\| \leq \|x\|^n$ y $\|x\| < 1$, luego por el criterio de comparación de series, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es absolutamente convergente, y como $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach, por el Teorema 1.1.3 se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge. Por tanto, la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge a un $s \in \mathcal{A}$. Ahora tenemos:

$$\begin{aligned}
s_n(e-x) &= \left(e + x + x^2 + \ldots + x^n\right)(e-x) \\
&= \left(e + x + x^2 + \ldots + x^n\right)e - \left(e + x + x^2 + \ldots + x^n\right)x \\
&= \left(e + x + x^2 + \ldots + x^n\right) - \left(x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1}\right) \\
&= e - x^{n+1}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
(e-x)s_n &= (e-x)\left(e + x + x^2 + \ldots + x^n\right) \\
&= e\left(e + x + x^2 + \ldots + x^n\right) - x\left(e + x + x^2 + \ldots + x^n\right) \\
&= \left(e + x + x^2 + \ldots + x^n\right) - \left(x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1}\right) \\
&= e - x^{n+1},
\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$s_n(e-x) = e - x^{n+1} = (e-x)s_n. \tag{2.7}$$

Ahora, como $0 \leq \|x^n\| \leq \|x\|^n$ y $(\|x\|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\|x\|^n \to 0$ ya que $\|x\| < 1$ tenemos que $x^n \to 0$. Ahora, como $s_n \to s$ y la multiplicación en $\mathcal{A}$ es continua, de la ecuación (2.7) se sigue que $s(e-x) = e = (e-x)s$, siendo s el inverso de $e - x$ en $\mathcal{A}$.
Para demostrar la parte *(ii)*, partimos del hecho de que $s = (e-x)^{-1}$ es el inverso de $(e-x)$ y se

puede expresar de la forma $s = e + x + x^2 + \cdots$, luego

$$\begin{aligned}\left\|(e-x)^{-1} - e - x\right\| &= \|s - e - x\| \\ &= \left\|x^2 + x^3 + \cdots\right\| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x^n\| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n ,\end{aligned}$$

y al considerar la igualdad

$$\sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n = \tfrac{1}{1-\|x\|} - 1 - \|x\| = \tfrac{1-\left(1-\|x\|^2\right)}{1-\|x\|} = \tfrac{\|x\|^2}{1-\|x\|},$$

se sigue que $\left\|(e-x)^{-1} - e - x\right\| \leq \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$.
Finalmente para demostrar *(iii)*, consideramos a $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| \geq 1$. Como $\left|\lambda^{-1}\right| < 1$, multiplicando por $\|x\|$ tenemos

$$\left|\lambda^{-1}\right| \|x\| < \|x\| . \tag{2.8}$$

Ya que $\left|\lambda^{-1}\right| \|x\| = \left\|\lambda^{-1} x\right\|$ y $\|x\| < 1$, de (2.8) se sigue que $\left\|\lambda^{-1} x\right\| < 1$, entonces por la parte *(i)* de este teorema $e - \lambda^{-1} x$ es invertible, además por la parte *(ii)* de la Proposicón 2.3.5 $\phi\left(e - \lambda^{-1} x\right) \neq 0$, y como $\phi\left(e - \lambda^{-1} x\right) = \phi(e) - \phi\left(\lambda^{-1} x\right) = 1 - \lambda^{-1} \phi(x)$, se tiene

$$1 - \lambda^{-1} \phi(x) \neq 0. \tag{2.9}$$

De (2.9) tenemos que $\lambda \neq \phi(x)$, y por tanto $|\phi(x)| \neq |\lambda|$, además como $|\lambda| \geq 1$ se concluye que $|\phi(x)| < 1$. □

Observación 2.3.8. *Las partes (i) y (iii) del Teorema 2.3.7 son quizás las partes más utilizadas en la teoría de álgebras de Banach; en particular, (iii) implica que todos los homomorfismos de álgebras de Banach son continuos, en efecto, como* $|\phi(x)| < 1$ *para todo* $x \in \mathcal{A}$*, entonces* $\|\phi\| \leq 1$*, lo cual implica que*

$$\frac{|\phi(x)|}{\|x\|} \leq \|\phi\| \leq 1 \quad (x \in X),$$

esto es , $|\phi(x)| \leq \|x\|$ *para todo* $x \in X$*, luego* ϕ *es acotado y por tanto continuo.*

2.4. El espacio de estado de un álgebra de Banach

En esta sección definimos el espacio de estado de un álgebra de Banach y presentamos tres características fundamentales de este conjunto.

Definición 2.4.1. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach real conmutativa con identidad, entonces el espacio de estado de $\mathcal{A}$ se define como el conjunto*

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in \mathcal{A}^{\star} : \|\varphi\| = \varphi(e) = 1\}$$

donde $\mathcal{A}^{\star}$ denota el espacio dual (topológico) de $\mathcal{A}$.

Definición 2.4.2. *Sea $\mathcal{S}$ el espacio de estado de un álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{A}$ con identidad, si $\varphi \in \mathcal{S}$ entonces φ es llamado un estado.*

Proposición 2.4.3. *El espacio de estado $\mathcal{S}$ de un álgebra de Banach real conmutativa $\mathcal{A}$ con identidad es no vació.*

Demostración. Como $\mathcal{A}$ contiene un elemento diferente de cero, a saber, el elemento identidad e, entonces por el Corolario del Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.1.12) existe $\varphi \in \mathcal{A}^{\star}$ tal que $\|\varphi\| = 1$ y $\varphi(e) = \|e\|$, como $\|e\| = 1$ entonces $\|\varphi\| = \varphi(e) = 1$, luego $\varphi \in \mathcal{S}$ y por lo tanto $\mathcal{S} \neq \emptyset$. □

Proposición 2.4.4. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa con identidad, entonces el espacio de estado $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$ es debil* compacto.*

Demostración. Comenzamos demostrando que $\mathcal{S}$ es debil* cerrado. Veamos que $\bar{\mathcal{S}}^{weak^{\star}} \subset \mathcal{S}$. Sea $\varphi \in \bar{\mathcal{S}}^{weak^{\star}}$, entonces cualquier vecindad de φ en la topología debil* interseca a $\mathcal{S}$, así para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $W\left(\varphi, x, \frac{1}{n}\right) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, entonces existen $\varphi_n \in \mathcal{S}$ tal que $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \frac{1}{n}$, luego $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ para cada $x \in X$, y así la sucesión $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada para cada $x \in X$ y por el Teorema de Banach Steinhaus, $\sup\{\|\varphi_n\| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$, luego existe $M > 0$ tal que $\|\varphi_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $M = \sup\{\|\varphi_n\| : n \in \mathbb{N}\}$. Note que si $x \neq 0$ con $\|x\| = 1$ se tiene que

$$|\varphi_n(x)| \leq \|\varphi_n\| \|x\| \leq M \|x\| = M,$$

es decir,

$$|\varphi_n(x)| \leq M \quad (x \in X, \|x\| = 1). \tag{2.10}$$

Ahora, haciendo $n \to \infty$ en (2.10) tenemos que

$$|\varphi(x)| \leq M \quad (x \in X, \|x\| = 1),$$

luego $\sup\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| = 1\} \leq M$, esto es $\|\varphi\| \leq M$, o sea $\|\varphi\| \leq \sup\{\|\varphi_n\| : n \in \mathbb{N}\}$, pero $\|\varphi_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que $\|\varphi\| \leq 1$. Por otro lado, para todo $x \in X$ tenemos que $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\|$, en particular para el elemento identidad $1 = |\varphi(e)| \leq \|\varphi\| \|e\| = \|\varphi\|$, o sea $1 \leq \|\varphi\|$, luego $\|\varphi\| = \varphi(e) = 1$, por tanto $\varphi \in \mathcal{S}$, siendo así $\mathcal{S}$ debil* cerrado.

Como cada elemento de $\mathcal{S}$ tiene norma uno, entonces $\mathcal{S}$ está contenida en la bola unitaria cerrada $B_{\mathcal{A}^\star} = \{f \in \mathcal{A}^\star : \|f\| \leq 1\}$ de $\mathcal{A}^\star$, además por el Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki la bola $B_{\mathcal{A}^\star}$ es debil* compacta, entonces como $\mathcal{S}$ es un subconjunto debil* cerrado de un conjunto debil* compacto, se tiene que $\mathcal{S}$ es debil* compacto. □

Proposición 2.4.5. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad, entonces el espacio de estado $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$ es convexo.*

Demostración. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$ y sea $0 \leq \lambda \leq 1$, probemos que $\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2 \in \mathcal{S}$, esto es

$$\|\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2\| = [\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2](e) = 1.$$

Note que

$$[\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2](e) = \lambda\varphi_1(e) + (1-\lambda)\varphi_2(e) = \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

luego

$$[\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2](e) = 1. \tag{2.11}$$

Ademas, como $\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$ es acotado, entonces

$$1 = |[\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2](e)| \leq \|\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2\| \|e\| = \|\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2\|,$$

esto es

$$1 \leq \|\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2\|. \tag{2.12}$$

Ya que $\|\varphi_1\| = 1$ y $\|\varphi_2\| = 1$, entonces por la desigualdad triangular

$$\|\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2\| \leq \|\lambda\varphi_1\| + \|(1-\lambda)\varphi_2\| = \lambda\|\varphi_1\| + (1-\lambda)\|\varphi_2\| = \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

luego

$$\|\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2\| \leq 1. \tag{2.13}$$

Así, de las desigualdades (2.12) y (2.13) tenemos que

$$\|\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2\| = 1. \tag{2.14}$$

Por tanto, de las desigualdades (2.11) y (2.14) se sigue que

$$\|\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\,\varphi_2\| = [\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\,\varphi_2]\,(e) = 1,$$

es decir $\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\,\varphi_2 \in \mathcal{S}$ y por lo tanto $\mathcal{S}$ es convexo. $\square$

2.5. Clausura del conjunto de cuadrados de un álgebra de Banach

El propósito de esta sección es definir el conjunto de cuadrados de un álgebra de Banach, para probar algunas propiedades importantes de su clausura.

Definición 2.5.1. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach real, se define el conjunto de cuadrados en $\mathcal{A}$ como el conjunto $\left\{a^2 : a \in \mathcal{A}\right\}$.*

Observación 2.5.2. *Se denotara por $\mathcal{A}_+$ la clausura del conjunto de cuadrados del álgebra de Banach real $\mathcal{A}$, esto es, $\mathcal{A}_+ = \overline{\{a^2 : a \in \mathcal{A}\}}$.*

Observación 2.5.3. *Si $\mathcal{A}$ es el álgebra de Banach de funciones continuas $\mathcal{C}\,(K)$ de valores reales donde K es un espacio topológico Hausdorff y compacto, entonces $\mathcal{A}_+$ es el cono positivo $\{f \in \mathcal{C}\,(K) : f \geq 0\}$, es decir*

$$\overline{\{f^2 : f \in \mathcal{C}\,(K)\}} = \{f \in \mathcal{C}\,(K) : f \geq 0\}\,.$$

En efecto, veamos que $\overline{\{f^2 : f \in \mathcal{C}\,(K)\}} \subset \{f \in \mathcal{C}\,(K) : f \geq 0\}$. Sea $g \in \overline{\{f^2 : f \in \mathcal{C}\,(K)\}}$ entonces existe una sucesión $\left(a_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\left\{f^2 : f \in \mathcal{C}\,(K)\right\}$ que converge uniformemente a g, luego g es continua, además $a_n^2 \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $g \geq 0$ y por tanto $g \in \{f \in \mathcal{C}\,(K) : f \geq 0\}$.
Para probar la contenencia $\{f \in \mathcal{C}\,(K) : f \geq 0\} \subset \overline{\{f^2 : f \in \mathcal{C}\,(K)\}}$ demostraremos primero que

$$\{f \in \mathcal{C}\,(K) : f \geq 0\} \subset \left\{f^2 : f \in \mathcal{C}\,(K)\right\}. \tag{2.15}$$

Si $g \in \{f \in \mathcal{C}\,(K) : f \geq 0\}$, note que g se puede expresar de la forma $g = g^{\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{2}}$, entonces haciendo $h = g^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{C}\,(K)$ tenemos que $h^2 = g^{\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{2}} = g \in \left\{f^2 : f \in \mathcal{C}\,(K)\right\}$, por lo tanto $\{f \in \mathcal{C}\,(K) : f \geq 0\} \subset \left\{f^2 : f \in \mathcal{C}\,(K)\right\}$. Ahora, como $\left\{f^2 : f \in \mathcal{C}\,(K)\right\} \subset \overline{\{f^2 : f \in \mathcal{C}\,(K)\}}$, de (2.15) se sigue que

$$\{f \in \mathcal{C}\,(K) : f \geq 0\} \subset \overline{\{f^2 : f \in \mathcal{C}\,(K)\}},$$

quedando así demostrada la contenencia deseada, y por lo tanto $\mathcal{A}_+ = \{f \in \mathcal{C}\,(K) : f \geq 0\}$.

En el siguiente lema, se resumen algunas propiedades del conjunto $\mathcal{A}_+$ que serán necesarias en las siguientes secciones de este capitulo.

Lema 2.5.4. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach real:*

(i) Si $x, y \in \mathcal{A}_+$ entonces $xy \in \mathcal{A}_+$.

(ii) Si $x \in \mathcal{A}_+$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda x \in \mathcal{A}_+$.

Demostración. (i) Sean $x, y \in \mathcal{A}_+$, entonces existen sucesiones $\left(b_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left(c_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\left\{a^2 : a \in \mathcal{A}\right\}$ (con $b_n, c_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$) tales que $b_n^2 \to x$ y $c_n^2 \to y$. Note que

$$\left(b_n c_n\right)^2 \in \left\{a^2 : a \in \mathcal{A}\right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.16}$$

pues $b_n c_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además como la multiplicación en $\mathcal{A}$ es continua

$$\lim_{n\to\infty} \left(b_n c_n\right)^2 = \lim_{n\to\infty} b_n^2 \lim_{n\to\infty} c_n^2 = xy. \tag{2.17}$$

Por lo tanto haciendo $d_n = b_n c_n$ en (2.16) y (2.17) se sigue que, para $xy \in \mathcal{A}$ existe una sucesión $\left(d_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\left\{a^2 : a \in \mathcal{A}\right\}$ tal que $d_n^2 \to xy$, esto es $xy \in \mathcal{A}_+$.

(ii) Si $x \in \mathcal{A}_+$ entonces existe una sucesión $\left(b_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\left\{a^2 : a \in \mathcal{A}\right\}$ tal que $b_n^2 \to x$. Si $\lambda \geq 0$ note que

$$\left(\sqrt{\lambda} b_n\right)^2 \in \left\{a^2 : a \in \mathcal{A}\right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.18}$$

pues $\sqrt{\lambda} b_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además como la multiplicación en $\mathcal{A}$ es continua

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\lambda} b_n\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \lambda b_n^2 = \lambda \lim_{n\to\infty} b_n^2 = \lambda x. \tag{2.19}$$

Por lo tanto haciendo $c_n = \sqrt{\lambda} b_n$ en (2.18) y (2.19) se sigue que, para $\lambda x \in \mathcal{A}$ existe una sucesión $\left(c_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\left\{a^2 : a \in \mathcal{A}\right\}$ tal que $c_n^2 \to \lambda x$, esto es $\lambda x \in \mathcal{A}_+$. $\square$

Un resultado que permite relacionar los elementos de un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ con los elementos del conjunto $\mathcal{A}_+$ es el siguiente.

Proposición 2.5.5. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach real conmutativa con identidad, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) Si $x \in \mathcal{A}$ es tal que $\|x\| \leq 1$, entonces $e + x \in \mathcal{A}_+$.

(ii) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+$.

Demostración. Para la demostración de la parte *(i)* consideraremos dos casos, cuando $\|x\| < 1$ y cuando $\|x\| = 1$.

Caso I: Sea $x \in \mathcal{A}$ con $\|x\| < 1$, entonces al escribir $(e+x)^{\frac{1}{2}}$ en su serie binomial tenemos que $(e+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$. Por el Lema 2.3.6

$$0 \leq \left\| \binom{1/2}{n} x^n \right\| = \binom{1/2}{n} \|x^n\| \leq \binom{1/2}{n} \|x\|^n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

además como $\|x\| < 1$, por el criterio de comparación de series $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$ es absolutamente convergente, y como $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach, por el Teorema 1.1.3 $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n \in \mathcal{A}$. Note que por el Teorema 1.7.1 se tiene

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} \binom{1/2}{m} x^m \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n \right] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

$$c_k = \sum_{m+n=k} \binom{1/2}{m} \binom{1/2}{n} = \begin{cases} 1, & si \quad k = 0, 1 \\ 0, & si \quad k \geq 2 \end{cases}$$

luego

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 1x^0 + 1x^1 + 0x^2 + 0x^3 + \cdots = e + x, \qquad (\text{donde } x^0 = e)$$

esto es

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} \binom{1/2}{m} x^m \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n \right] = e + x.$$

Por lo tanto para $e + x \in \mathcal{A}$ existe una sucesión $b_n = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} x^k \right] \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} x^k \right]$ en $\{a^2 : a \in \mathcal{A}\}$ (pues $\sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} x^k \in \mathcal{A}$ para cada $n \in \mathbb{N}$) tal que

$$\lim_{n \to \infty} b_n = e + x,$$

esto es, $e + x \in \mathcal{A}_+$.

Caso II: Si $x \in \mathcal{A}$ con $\|x\| = 1$, consideremos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x$. Note que $\|x_n\| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues

$$\|x_n\| = \left\| \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) x \right\| = \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) \|x\| = 1 - \tfrac{1}{n} < 1.$$

Como $\|x_n\| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces por el Caso I tenemos que $e + x_n \in \mathcal{A}_+$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos ahora que $e + x_n \to e + x$ en $\mathcal{A}_+$. Note que

$$\begin{aligned} \|(e + x_n) - (e + x)\| &= \|x_n - x\| \\ &= \left\| \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) x - x \right\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \left(-\tfrac{1}{n}\right) x \right\| \\
&= \left|-\tfrac{1}{n}\right| \|x\| \\
&= \tfrac{1}{n}
\end{aligned}
$$

luego

$$
\lim_{n\to\infty} \|(e+x_n)-(e+x)\| = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} = 0,
$$

por lo tanto $e+x_n$ converge a $e+x$, y como $\mathcal{A}_+$ es cerrado, $e+x \in \mathcal{A}_+$.

(ii) Sea $x \in \mathcal{A}$ con $\|x\| \leq 1$, entonces por la parte *(i)* de este teorema tenemos que $e+x \in \mathcal{A}_+$. Note que si $z=-x$ entonces $\|z\| \leq 1$, por lo tanto de la parte *(i)* de este teorema $e+z \in \mathcal{A}_+$, o sea $e-x \in \mathcal{A}_+$. Como $e+x \in \mathcal{A}_+$ y $e-x \in \mathcal{A}_+$, por la parte *(ii)* del Lema 2.5.4 tenemos que $\frac{1}{2}(e+x) \in \mathcal{A}_+$ y $\frac{1}{2}(e-x) \in \mathcal{A}_+$. Ahora, expresando a x de la forma

$$
x = \frac{1}{2}(e+x) - \frac{1}{2}(e-x)
$$

se sigue que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+$. □

Observación 2.5.6. *La parte (i) es conocida en la teoría de álgebras de Banach como el "Lema de la raíz cuadrada".*

2.6. Algunas propiedades de las álgebras de Banach que satisfacen la desigualdad $\left\|x^2-y^2\right\| \leq \left\|x^2+y^2\right\|$

En esta sección demostraremos cuatro resultados sobre las álgebras de Banach que satisfacen una desigualdad adicional con respecto a la norma. Estos resultados serán utilizados para demostrar el teorema principal de este capítulo.

Lema 2.6.1. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach real con identidad tal que para todo $a,b \in \mathcal{A}$ se tiene que $\left\|a^2-b^2\right\| \leq \left\|a^2+b^2\right\|$, entonces $\|x-y\| \leq \|x+y\|$ para todo $x,y \in \mathcal{A}_+$.*

Demostración. Sean $x,y \in \mathcal{A}_+$, entonces existen sucesiones $\left(a_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(b_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\left\{a^2 : a \in \mathcal{A}\right\}$ tales que $a_n^2 \to x$ y $b_n^2 \to y$. Note que

$$
a_n^2 - b_n^2 \longrightarrow x-y \qquad \text{y} \qquad a_n^2 + b_n^2 \longrightarrow x+y. \tag{2.20}
$$

Como la norma en $\mathcal{A}$ es continua, entonces de (2.20) se sigue que

$$\left\|a_n^2 - b_n^2\right\| \to \|x-y\| \quad \text{y} \quad \left\|a_n^2 + b_n^2\right\| \to \|x+y\| . \tag{2.21}$$

Además, por hipótesis

$$\left\|a_n^2 - b_n^2\right\| \leq \left\|a_n^2 + b_n^2\right\| \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.22}$$

por lo tanto de (2.21) y (2.22) se tiene que $\|x-y\| \leq \|x+y\|$ para $x, y \in \mathcal{A}_+$. $\square$

Lema 2.6.2. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach real con identidad. Si para todo $a, b \in \mathcal{A}$ se tiene que $\left\|a^2 - b^2\right\| \leq \left\|a^2 + b^2\right\|$, entonces $\|x\| \leq \|x+y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{A}_+$.*

Demostración. Si $x, y \in \mathcal{A}_+$, por el Lema 2.6.1 tenemos que $\|x-y\| \leq \|x+y\|$. Además, como

$$\|x-y\| \leq \frac{1}{2}\left(\|x-y\| + \|x+y\|\right) \leq \|x+y\| ,$$

entonces

$$\tfrac{1}{2}\left(\|x-y\| + \|x+y\|\right) \leq \|x+y\| . \tag{2.23}$$

Por las propiedades de la norma, $2\|x\| = \|2x\| = \|(x-y)+(x+y)\| \leq \|x-y\| + \|x+y\|$, luego

$$\|x\| \leq \tfrac{1}{2}\left(\|x-y\| + \|x+y\|\right), \tag{2.24}$$

por lo tanto de (2.23) y (2.24) se sigue que $\|x\| \leq \|x+y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{A}_+$. $\square$

Lema 2.6.3. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach real con identidad tal que $\left\|a^2 - b^2\right\| \leq \left\|a^2 + b^2\right\|$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$, entonces $\varphi(x) \geq 0$ siempre que $\varphi \in \mathcal{S}$ y $x \in \mathcal{A}_+$.*

Demostración. Si $x \in \mathcal{A}_+$ con $\|x\| = 1$, por la Proposición 2.5.5 $e - x \in \mathcal{A}_+$, luego por el Lema 2.6.2 tenemos que $\|e-x\| \leq \|(e-x)+x\| = \|e\| = 1$, es decir

$$\|e-x\| \leq 1 \quad \textit{con} \quad e - x \in \mathcal{A}. \tag{2.25}$$

Note que para φ en $\mathcal{S}$

$$\|\varphi\| = \sup\left\{|\varphi(x)| : x \in \mathcal{A} \textit{ con } \|x\| \leq 1\right\}, \tag{2.26}$$

por lo tanto de (2.25) y (2.26) se deduce que $|\varphi(e-x)| \leq \|\varphi\|$ para todo $x \in \mathcal{A}_+$, pero como $\|\varphi\| = \varphi(e) = 1$ entonces

$$
\begin{aligned}
|\varphi(e-x)| &\leq 1 \\
|\varphi(e)-\varphi(x)| &\leq 1 \\
|1-\varphi(x)| &\leq 1,
\end{aligned}
$$

luego $1-\varphi(x) \leq 1$, esto es $\varphi(x) \geq 0$ con $\varphi \in \mathcal{S}$ y $x \in \mathcal{A}_{+}$. $\square$

Teniendo en cuenta el lema anterior , a continuación enunciamos el resultado más importante de esta sección.

Lema 2.6.4. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach real que satisface la desigualdad $\left\|a^2-b^2\right\| \leq \left\|a^2+b^2\right\|$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$ y sea K el conjunto de todos los estados multiplicativos de $\mathcal{A}$, es decir,*

$$K=\{\varphi \in \mathcal{S} : \varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y) \text{ para todo } x, y \in \mathcal{A}\}.$$

Entonces K es un espacio de Hausdorff compacto en la topología débil* de $\mathcal{A}^\star$ el cual contiene el conjunto $\partial_e \mathcal{S}$ de puntos extremos de $\mathcal{S}$ (y en partícular es no vació).

Demostración. La topología débil* sobre $\mathcal{A}^\star$ es Hausdorff y como $K \subset \mathcal{A}^\star$ entonces K es un espacio Hausdorff en la topología débil* de $\mathcal{A}^\star$.

Para probar que K es compacto en la topología débil* sobre $\mathcal{A}^\star$, demostraremos primero K es debil* cerrado, es decir $\bar{K}^{weak*} \subset K$. Sea $\varphi \in \bar{K}^{weak*}$, entonces cualquier vecindad de φ en la topología débil* interseca a K, luego para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $W\left(\varphi, x, \frac{1}{n}\right) \cap K \neq \emptyset$. Así, existen $\varphi_n \in K$ tal que $|\varphi_n(x)-\varphi(x)|<\frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ para cada $x \in \mathcal{A}$. Como $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, para cada $x \in \mathcal{A}$ la sucesión $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada y por el Teorema de Banach-Steinhaus existe un $B>0$ tal que $|\varphi_n(x)|<B$ para cada $x \in \mathcal{A}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon>0$, y $x, y \in \mathcal{A}$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $|\varphi_n(x)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2B}$, además también existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$ entonces $|\varphi_n(y)-\varphi(y)|<\frac{\varepsilon}{2B}$. Sea $N=\max\{n_0, n_1\}$ entonces si $n>N$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
|\varphi(xy)-\varphi(x)\varphi(y)| &\leq |[\varphi(xy)-\varphi(x)\varphi(y)]+[\varphi(x)\varphi_n(y)-\varphi_n(x)\varphi(y)]| \\
&=|[\varphi(xy)-\varphi_n(x)\varphi(y)]+[\varphi(x)\varphi_n(y)-\varphi(x)\varphi(y)]| \\
&\leq |\varphi(xy)-\varphi_n(x)\varphi(y)|+|\varphi(x)\varphi_n(y)-\varphi(x)\varphi(y)| \\
&=|\varphi_n(x)\varphi(y)-\varphi(x)\varphi(y)|+|\varphi(x)\varphi_n(y)-\varphi(x)\varphi(y)| \\
&=|\varphi(y)||\varphi_n(x)-\varphi(x)|+|\varphi(x)||\varphi_n(y)-\varphi(y)| \\
&<B\frac{\varepsilon}{2B}+B\frac{\varepsilon}{2B}=\varepsilon,
\end{aligned}
$$

luego $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$. Por tanto $\varphi \in K$ y así K es débil* cerrado. Como $K \subset \mathcal{S}$, entonces K es un subconjunto débil* cerrado de $\mathcal{S}$ (el cual es un conjunto débil* compacto por la Proposición 2.4.4), por lo tanto K es un compacto para la topología débil* de $\mathcal{A}^\star$.

Por las Proposiciones 2.4.4 y 2.4.5 tenemos que $\mathcal{S}$ es débil* compacto y convexo, por tanto el Teorema de Krein-Milman garantiza que $\partial_e(\mathcal{S}) \neq \emptyset$. Probemos que $\partial_e(\mathcal{S}) \subset K$. Sea $\varphi \in \partial_e(\mathcal{S})$, entonces para demostrar que φ esta en K, φ debe verificar:

$$\|\varphi\| = \varphi(e) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad (x, y \in \mathcal{A}).$$

Como $\varphi \in \partial_e(\mathcal{S})$, entonces φ es un punto extremo de $\mathcal{S}$, lo cual implica que $\varphi \in \mathcal{S}$, esto es $\|\varphi\| = \varphi(e) = 1$.

Para probar que φ es un homomorfismo, es suficiente demostrar que $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ siempre que $x \in \mathcal{A}_+$ y $y \in \mathcal{A}$, pues $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+$ por la parte *(ii)* de la Proposición 2.5.5.

Antes de demostrar que φ es un homomorfismo, plantearemos dos desigualdades:

Sea $x \in \mathcal{A}_+$ tal que $\|x\| \leq 1$ y sea $y \in \mathcal{A}$ con $\|y\| \leq 1$, entonces por la parte *(i)* de la Proposición 2.5.5 $e + y \in \mathcal{A}_+$ y $e - y \in \mathcal{A}_+$. Además de la parte *(i)* del Lema 2.5.4, $x(e-y) \in \mathcal{A}_+$ y $x(e+y) \in \mathcal{A}_+$, así, por el Lema 2.6.3 $\varphi(x(e-y)) \geq 0$ y $\varphi(x(e+y)) \geq 0$, o sea $\varphi(x) \pm \varphi(xy) \geq 0$, luego

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(xy) &\geq 0 \\ \varphi(x) &\geq \varphi(xy) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \varphi(xy) &\geq 0 \\ \varphi(x) &\geq -\varphi(xy) \end{aligned}$$

es decir $\varphi(x) \geq \varphi(xy) \geq -\varphi(x)$, lo cual implica que

$$|\varphi(xy)| \leq \varphi(x). \tag{2.27}$$

Como $\|x\| \leq 1$, de la parte *(i)* de la Proposición 2.5.5 tenemos que $e - x \in \mathcal{A}_+$, y como $(e-y), (e+y) \in \mathcal{A}_+$, entonces por la parte *(i)* del Lema 2.5.4 $(e-x)(e-y) \in \mathcal{A}_+$ y $(e-x)(e+y) \in \mathcal{A}_+$. Luego por el Lema 2.6.3

$$\begin{aligned} \varphi((e-x)(e-y)) &\geq 0 \\ \varphi((e-x)e - (e-x)y) &\geq 0 \\ \varphi(e-x) - \varphi((e-x)y) &\geq 0 \\ \varphi(e) - \varphi(x) - \varphi((e-x)y) &\geq 0 \\ 1 - \varphi(x) &\geq \varphi((e-x)y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\left(e-x\right)\left(e+y\right)\right) &\geq 0\\
\varphi\left(\left(e-x\right)e+\left(e-x\right)y\right) &\geq 0\\
\varphi\left(e-x\right)+\varphi\left(\left(e-x\right)y\right) &\geq 0\\
\varphi\left(e\right)-\varphi\left(x\right)+\varphi\left(\left(e-x\right)y\right) &\geq 0\\
\varphi\left(\left(e-x\right)y\right) &\geq -\left(1-\varphi\left(x\right)\right)
\end{aligned}$$

esto es, $1-\varphi\left(x\right)\geq\varphi\left(\left(e-x\right)y\right)\geq-\left(1-\varphi\left(x\right)\right)$, luego

$$\left|\varphi\left(\left(e-x\right)y\right)\right|\leq 1-\varphi\left(x\right). \tag{2.28}$$

Como φ tiene norma uno, entonces

$$\left|\varphi\left(x\right)\right|\leq 1 \quad \left(x\in\mathcal{A},\|x\|\leq 1\right), \tag{2.29}$$

y del Lema 2.6.3

$$\varphi\left(x\right)\geq 0 \quad \left(x\in\mathcal{A}_{+},\|x\|\leq 1\right), \tag{2.30}$$

por lo tanto de las desigualdades (2.29) y (2.30) se sigue que

$$0\leq\varphi\left(x\right)\leq 1 \quad \left(x\in\mathcal{A}_{+},\|x\|\leq 1\right). \tag{2.31}$$

La Ecuación (2.31) nos hace considerar tres casos para demostrar que φ es un homomorfismo, cuando $\varphi\left(x\right)=0$, $\varphi\left(x\right)=1$ y cuando $0<\varphi\left(x\right)<1$.

Caso I: Si $\varphi\left(x\right)=0$, de la desigualdad (2.27) tenemos que $\varphi\left(xy\right)=0$, es decir $\varphi\left(xy\right)=\varphi\left(x\right)\varphi\left(y\right)$ y por tanto $\varphi\in K$.

Caso II: Si $\varphi\left(x\right)=1$, entonces de la desigualdad (2.28) se obtiene que $\varphi\left(\left(e-x\right)y\right)=0$, esto es

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\left(e-x\right)y\right) &= 0\\
\varphi\left(y\right)-\varphi\left(xy\right) &= 0\\
\varphi\left(y\right) &= \varphi\left(xy\right)\\
1.\varphi\left(y\right) &= \varphi\left(xy\right)\\
\varphi\left(x\right)\varphi\left(y\right) &= \varphi\left(xy\right),
\end{aligned}$$

luego $\varphi\in K$.

Caso III: Si $0<\varphi\left(x\right)<1$, consideremos los funcionales $\psi_1,\psi_2\in\mathcal{A}^{\star}$ definidos por

$$\begin{aligned} \psi_1 : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \psi_1(y) = \frac{1}{\varphi(x)}\varphi(xy) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \psi_2 : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \psi_2(y) = \frac{1}{1-\varphi(x)}\varphi((e-x)y)\,. \end{aligned}$$

Note que $\psi_1(e) = \frac{1}{\varphi(x)}\varphi(xe) = \frac{1}{\varphi(x)}\varphi(x) = 1$, luego

$$\psi_1(e) = 1. \tag{2.32}$$

Como ψ_1 es acotado, $1 = |\psi_1(e)| \leq \|\psi_1\| \|e\| = \|\psi_1\|$, esto es

$$1 \leq \|\psi_1\|\,. \tag{2.33}$$

De la desigualdad (2.27) tenemos que

$$|\psi_1(y)| = \left|\tfrac{1}{\varphi(x)}\right| |\varphi(xy)| \leq \left|\tfrac{1}{\varphi(x)}\right| |\varphi(x)| = 1,$$

o sea $|\psi_1(y)| \leq 1$ y como $\|\psi_1\| = \sup\{|\psi_1(y)| : y \in \mathcal{A}, \|y\| \leq 1\}$ entonces

$$\|\psi_1\| \leq 1. \tag{2.34}$$

Por lo tanto de las desigualdades (2.33), (2.33) y (2.34) tenemos que $\|\psi_1\| = \psi_1(e) = 1$, esto es $\psi_1 \in \mathcal{S}$. Por otro lado

$$\psi_2(e) = \tfrac{1}{1-\varphi(x)}\varphi((e-x)e) = \tfrac{1}{1-\varphi(x)}(\varphi(e) - \varphi(x)) = \tfrac{1}{1-\varphi(x)}(1-\varphi(x)) = 1,$$

luego

$$\psi_2(e) = 1. \tag{2.35}$$

Como ψ_2 es acotado, $1 = |\psi_2(e)| \leq \|\psi_2\| \|e\| = \|\psi_2\|$, esto es

$$1 \leq \|\psi_2\|\,. \tag{2.36}$$

Por la desigualdad (2.28) tenemos que

$$|\psi_2(y)| = \left|\tfrac{1}{1-\varphi(x)}\right| |\varphi((e-x)y)| \leq \left|\tfrac{1}{1-\varphi(x)}\right| |1-\varphi(x)| = 1.$$

Así, $|\psi_2(y)| \leq 1$, y como $\|\psi_2\| = \sup\{|\psi_2(y)| : y \in \mathcal{A}, \|y\| \leq 1\}$ entonces

$$\|\psi_2\| \leq 1. \tag{2.37}$$

De las ecuaciones (2.35), (2.36) y (2.37) se sigue que $\|\psi_2\| = \psi_2(e) = 1$, esto es $\psi_2 \in \mathcal{S}$.
Como $\varphi, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}$ y $0 < \varphi(x) < 1$, podemos escribir

$$\varphi = \varphi(x)\,\psi_1 + (1 - \varphi(x))\,\psi_2, \tag{2.38}$$

y por el hecho de que φ es un punto extremo de $\mathcal{S}$ tenemos que $\varphi = \psi_1 = \psi_2$. Si $\varphi = \psi_1$, de (2.38) se sigue que

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \varphi(x)\,\psi_1 + (1 - \varphi(x))\,\psi_2 \\
\tfrac{1}{\varphi(x)}\varphi(xy) &= \varphi(x)\left[\tfrac{1}{\varphi(x)}\varphi(xy)\right] + (1 - \varphi(x))\left[\tfrac{1}{1-\varphi(x)}\varphi((e-x)\,y)\right] \\
\tfrac{1}{\varphi(x)}\varphi(xy) &= \varphi(xy) + \varphi((e-x)\,y) \\
\tfrac{1}{\varphi(x)}\varphi(xy) &= \varphi(xy) + \varphi(y) - \varphi(xy) \\
\tfrac{1}{\varphi(x)}\varphi(xy) &= \varphi(y) \\
\varphi(xy) &= \varphi(x)\,\varphi(y),
\end{aligned}$$

y si $\varphi = \psi_2$, de (2.38) también se tiene que

$$\begin{aligned}
\psi_2 &= \varphi(x)\,\psi_1 + (1 - \varphi(x))\,\psi_2 \\
\tfrac{\varphi((e-x)y)}{1-\varphi(x)} &= \varphi(x)\left[\tfrac{1}{\varphi(x)}\varphi(xy)\right] + (1 - \varphi(x))\left[\tfrac{1}{1-\varphi(x)}\varphi((e-x)\,y)\right] \\
\tfrac{\varphi(y)-\varphi(xy)}{1-\varphi(x)} &= \varphi(xy) + \varphi((e-x)\,y) \\
\tfrac{\varphi(y)-\varphi(xy)}{1-\varphi(x)} &= \varphi(xy) + \varphi(y) - \varphi(xy) \\
\tfrac{\varphi(y)-\varphi(xy)}{1-\varphi(x)} &= \varphi(y) \\
\varphi(y) - \varphi(xy) &= \varphi(y)\,[1 - \varphi(x)] \\
\varphi(y) - \varphi(xy) &= \varphi(y) - \varphi(x)\,\varphi(y) \\
\varphi(xy) &= \varphi(x)\,\varphi(y),
\end{aligned}$$

luego $\varphi \in K$, y por lo tanto $\partial_e(\mathcal{S}) \subset K$. □

2.7. Teorema de Albiac-Kalton

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema principal de este capítulo, el cual da una caracterización de las álgebras de Banach que son isométricamente isomorfas a los espacios reales $\mathcal{C}(K)$.

Teorema 2.7.1 (Teorema de Albiac-Kalton). *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach real conmutativa con* *identidad, entonces $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfo al álgebra $\mathcal{C}(K)$ para algún espacio topológico Hausdorff y compacto K si y sólo si $\left\|a^2-b^2\right\| \leq \left\|a^2+b^2\right\|$ para todo a, b en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Suponga que $\left\|a^2-b^2\right\| \leq \left\|a^2+b^2\right\|$ es válido para todo $a, b \in \mathcal{A}$. Definamos la aplicación

$$\begin{aligned} J : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{C}(K) \\ x &\longmapsto J(x) = J_x \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} J_x : K &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto J_x(\varphi) = \varphi(x), \end{aligned}$$

por lo tanto si $x \in \mathcal{A}$, entonces $J(x) = J_x(\varphi) = \varphi(x)$ para algún $\varphi \in K$, donde K es el conjunto de todos los estados multiplicativos de $\mathcal{A}$.

Veamos que J es un homomorfismo entre las álgebras de Banach $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}(K)$, es decir que

$$J(xy) = J(x)J(y) \quad \text{para todo} \quad x, y \in \mathcal{A}. \tag{2.39}$$

En efecto, si $x, y \in \mathcal{A}$ entonces $J(xy) = J_{xy}(\varphi) = \varphi(xy)$ para algún $\varphi \in K$, esto es

$$J(xy) = \varphi(xy). \tag{2.40}$$

Ya que $\varphi \in K$, entonces

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \tag{2.41}$$

y como $\varphi(x)\varphi(y) = J_x(\varphi)J_y(\varphi) = J(x)J(y)$, o sea

$$\varphi(x)\varphi(y) = J(x)J(y), \tag{2.42}$$

de (2.40), (2.41) y (2.42) tenemos que $J(xy) = J(x)J(y)$, luego J es un homomorfismo de álgebras.

Probemos también que J es lineal. Sean $x, y \in \mathcal{A}$ entonces para algún $\varphi \in K$ tenemos que

$$\begin{aligned} [J(x+y)](\varphi) = J_{x+y}(\varphi) &= \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ &= J_x(\varphi) + J_y(\varphi) = [J(x)](\varphi) + [J(y)](\varphi) \\ &= [J(x) + J(y)](\varphi) \end{aligned}$$

esto es,

$$J(x+y) = J(x) + J(y). \tag{2.43}$$

Sean $z \in \mathcal{A}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces para algún $\varphi \in K$

$$\begin{aligned}[\alpha J(z)](\varphi) &= \alpha J_z(\varphi) = \alpha\varphi(z) = \varphi(\alpha z) = J_{\alpha z}(\varphi) \\ &= [J(\alpha z)](\varphi),\end{aligned}$$

luego

$$\alpha J(z) = J(\alpha z), \tag{2.44}$$

por tanto de (2.43) y (2.44) se tiene que J es lineal.
Note que $J(e) = 1$, pues $J(e) = Je(\varphi) = \varphi(e) = 1$ para todo $\varphi \in K$. Además $\|J\| = 1$, ya que

$$\begin{aligned}\|J\| &= \sup\left\{\tfrac{\|J(x)\|}{\|x\|} : \|x\| \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\tfrac{1}{\|x\|}\sup\{|J_x(\varphi)| : \varphi \in K\} : \|x\| \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\sup\left\{\tfrac{|\varphi(x)|}{\|x\|} : \|x\| \leq 1\right\} : \varphi \in K\right\} \\ &= \sup\{\|\varphi\| : \varphi \in K\} \\ &= 1\end{aligned}$$

Queremos demostrar que J es una isometría, para ello estableceremos el siguiente hecho:

Afirmación. *Si x en $\mathcal{A}$ es tal que $\|J_x\| \leq 1$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $t_\varepsilon > 0$ para el cual $\|e - t_\varepsilon(1-\varepsilon)e - t_\varepsilon x\| < 1$.*

Supongamos que la afirmación es falsa, entonces para un x en $\mathcal{A}$ con $\|J_x\| \leq 1$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\|e - t(1+\varepsilon) - tx\| \geq 1$ para todo $t > 0$. Definamos el conjunto $B = \{e - t(1+\varepsilon)e - tx : t \geq 0\}$ el cual es subconjunto de $\mathcal{A}$, y probemos que B es convexo. En efecto, sean $x_1, x_2 \in B$ tales que

$$x_1 = e - t_1(1+\varepsilon)e - t_1 x \qquad \text{y} \qquad x_2 = e - t_2(1+\varepsilon)e - t_2 x,$$

donde $t_1 \geq 0$ y $t_2 \geq 0$, si $\lambda \in [0,1]$, veamos que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in B$.
Como

$$\begin{aligned}\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 &= \lambda[e - t_1(1+\varepsilon)e - t_1 x] + (1-\lambda)[e - t_2(1+\varepsilon)e - t_2 x] \\ &= \lambda e - \lambda t_1(1+\varepsilon)e - \lambda t_1 x + (1-\lambda)e - (1-\lambda)t_2(1+\varepsilon)e - (1-\lambda)t_2 x \\ &= \lambda e - \lambda t_1(1+\varepsilon)e - \lambda t_1 x + e - \lambda e - (1-\lambda)t_2(1+\varepsilon)e - (1-\lambda)t_2 x \\ &= -\lambda t_1(1+\varepsilon)e - \lambda t_1 x + e - (1-\lambda)t_2(1+\varepsilon)e - (1-\lambda)t_2 x\end{aligned}$$

$$= e - (1+\varepsilon)\, e\, [\lambda t_1 + (1-\lambda)\, t_2] - [\lambda t_1 + (1-\lambda)\, t_2]\, x,$$

esto es

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2 = e - [\lambda t_1 + (1-\lambda)\, t_2]\, (1+\varepsilon)\, e - [\lambda t_1 + (1-\lambda)\, t_2]\, x. \tag{2.45}$$

Haciendo $t_3 = \lambda t_1 + (1-\lambda)\, t_2$ donde $t_3 \geq 0$, entonces de (2.45) se sigue que

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2 = e - t_3\, (1+\varepsilon)\, e - t_3 x$$

para $t_3 \geq 0$, esto es $\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \in B$, luego B es convexo.
Puesto que los elementos del conjunto B tienen norma mayor o igual a uno, entonces los conjuntos B y $B_{\mathcal{A}}(0,1) = \{x \in \mathcal{A} : \|x\| < 1\}$ son disjuntos, además convexos, y como $B_{\mathcal{A}}(0,1)$ es un abierto en la topología de $\mathcal{A}$, por la primera forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach existe un hiperplano cerrado $H = \{x \in \mathcal{A} : \varphi(x) = 1\}$ que separa B y $B_{\mathcal{A}}(0,1)$ en sentido amplio , esto es

$$\varphi(z) \geq 1 \quad \forall z \in B, \tag{2.46}$$

y

$$\varphi(z) \leq 1 \quad \forall z \in B(0,1). \tag{2.47}$$

donde φ es un funcional lineal de norma uno (ver Figura 2.1).

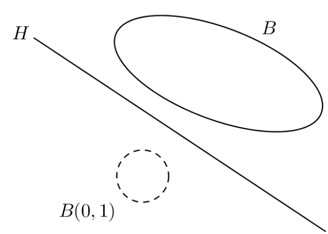


Figura 2.1: Separación de B y $B(0,1)$

Veamos que $\varphi \in \mathcal{S}$. Como φ es acotado, entonces $|\varphi(e)| \leq \|\varphi\|\, \|e\| = 1$, luego

$$|\varphi(e)| \leq 1. \tag{2.48}$$

Sea $e - t(1+\varepsilon)\, e - tx \in B$ para $t \geq 0$, entonces de (2.46) se sigue que

$$1 \leq \varphi\left(e - t\left(1+\varepsilon\right)e - tx\right), \quad (t \geq 0) \tag{2.49}$$

y tomando en particular $t = 0$ en (2.49) obtenemos que

$$1 \leq \varphi\left(e\right), \tag{2.50}$$

así, de (2.48) y (2.50) tenemos que $\varphi\left(e\right) = 1$. Por lo tanto como $\varphi \in \mathcal{A}^{\star}$ y $\|\varphi\| = \varphi\left(e\right) = 1$ se tiene que $\varphi \in \mathcal{S}$.

De la Ecuación (2.46) se sigue que

$$\varphi\left(e - t\left(1+\varepsilon\right)e - tx\right) \geq 1 \quad (t \geq 0),$$

en particular, tomando $t = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi\left[e - \left(1+\varepsilon\right)e - x\right] &\geq 1 \\
\varphi\left(e\right) - \left(1+\varepsilon\right)\varphi\left(e\right) - \varphi\left(x\right) &\geq 1 \\
1 - \left(1+\varepsilon\right) - \varphi\left(x\right) &\geq 1 \\
-\varphi\left(x\right) &\geq 1+\varepsilon
\end{aligned}$$

y como $\left|\varphi\left(x\right)\right| \geq -\varphi\left(x\right)$ entonces

$$\left|\varphi\left(x\right)\right| \geq 1+\varepsilon. \tag{2.51}$$

Por el Lema 2.6.4 existe $\varphi' \in K$ tal que φ' es un punto extremo de $\mathcal{S}$, entonces de (2.51) se sigue que

$$\left|\varphi'\left(x\right)\right| > 1+\varepsilon. \tag{2.52}$$

Utilizando la ecuación (2.52) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|J_x\| &= \sup\left\{\left|J_x\left(\psi\right)\right| : \psi \in K\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\psi\left(x\right)\right| : \psi \in K\right\} \\
&\geq \left|\varphi'\left(x\right)\right| \\
&\geq 1+\varepsilon \\
&> 1,
\end{aligned}$$

esto es $\|J_x\| > 1$, lo cual es una contradicción con $\|J_x\| \leq 1$, luego la afirmación es válida.

Veamos que $\|x\| \leq 1$ si y sólo si $\|J(x)\| \leq 1$. Sea $x \in \mathcal{A}$ con $\|x\| \leq 1$ entonces como

$$\|J\| = \sup \{\|J(x)\| : \|x\| \leq 1\} = 1$$

tenemos que $\|J(x)\| \leq 1$.

Reciprocamente, sea $x \in \mathcal{A}$ tal que $\|J_x\| \leq 1$, entonces por la afirmación para cada $\varepsilon > 0$ existe un $t_\varepsilon > 0$ para el cual

$$\|e - t_\varepsilon (1+\varepsilon) e - t_\varepsilon x\| < 1. \tag{2.53}$$

Note que

$$\|e - t_\varepsilon (1+\varepsilon) e - t_\varepsilon x\| = \|-e + t_\varepsilon (1+\varepsilon) e + t_\varepsilon x\|, \tag{2.54}$$

pues

$$\begin{aligned} \|e - t_\varepsilon (1+\varepsilon) e - t_\varepsilon x\| &= \|(-1)(-e + t_\varepsilon (1+\varepsilon) e + t_\varepsilon x)\| \\ &= |-1| \, \|-e + t_\varepsilon (1+\varepsilon) e + t_\varepsilon x\| \\ &= \|-e + t_\varepsilon (1+\varepsilon) e + t_\varepsilon x\|, \end{aligned}$$

luego de las ecuaciones (2.53) y (2.54) se tiene que

$$-e + t_\varepsilon (1+\varepsilon) e + t_\varepsilon x \in \mathcal{A} \quad \text{con} \quad \|-e + t_\varepsilon (1+\varepsilon) e + t_\varepsilon x\| < 1. \tag{2.55}$$

Utlizando la parte *(i)* de la Proposición 2.5.5, de (2.55) tenemos que

$$e + (-e + t_\varepsilon (1+\varepsilon) e + t_\varepsilon x) \in \mathcal{A}_+, \tag{2.56}$$

pero

$$e + (-e + t_\varepsilon (1+\varepsilon) e + t_\varepsilon x) = t_\varepsilon ((1+\varepsilon) e + x), \tag{2.57}$$

entonces de las ecuaciones (2.56) y (2.57) se sigue que

$$t_\varepsilon ((1+\varepsilon) e + x) \in \mathcal{A}_+. \tag{2.58}$$

Como $\frac{1}{t_\varepsilon} > 0$, de la Ecuación (2.58) y de la parte *(ii)* del Lema 2.5.4 obtenemos que

$$(1+\varepsilon) e + x \in \mathcal{A}_+. \tag{2.59}$$

Tomando en (2.59) un ε lo suficientemente pequeño, se tiene que $1+\varepsilon \to 1$, luego de (2.59) se sigue que $e + x \in \mathcal{A}_+$. Aplicando el mismo razonamiento para $-x$ en $\mathcal{A}$ con $\|J(-x)\| \leq 1$, tenemos que

$e-x\in\mathcal{A}_+$. Por lo tanto como $(e+x),(e-x)\in\mathcal{A}_+$ del Lema 2.6.1 obtenemos que

$$\|(e+x)-(e-x)\|\leq\|(e+x)+(e-x)\|$$

luego

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\|(e+x)-(e-x)\| &\leq \tfrac{1}{2}\|(e+x)+(e-x)\|\\ \frac{1}{2}\|2x\| &\leq \frac{1}{2}\|2e\|\\ \left\|\left(\tfrac{1}{2}\right)2x\right\| &\leq \left\|\left(\tfrac{1}{2}\right)2e\right\|\\ \|x\| &\leq \|e\|\\ \|x\| &\leq 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto como J preserva distacias del disco de $\mathcal{A}$ en el disco de $\mathcal{C}(K)$, J es una isometria.

Por ser J una isometría, se tiene que J es inyectivo, probemos ahora que J es sobreyectivo. Para demostrar que J es sobre, definamos el conjunto $J(\mathcal{A})=\{J(x):x\in\mathcal{A}\}$ y veamos que $J(\mathcal{A})$ verifica lo siguiente □

- ◇ es una subálgebra de $\mathcal{C}(K)$,
- ◇ es cerrada,
- ◇ separa puntos de K,
- ◇ contiene las Fuciones constantes de $\mathcal{C}(K)$.

$J(\mathcal{A})$ es una subálgebra por (2.39), (2.43) y (2.44). Veamos que $\overline{J(\mathcal{A})}\subset J(\mathcal{A})$. Sea $f\in\overline{J(\mathcal{A})}$, entonces existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $J(\mathcal{A})$ donde $f_n=J(x_n)$ (con $x_n\in\mathcal{A}$) tal que $f_n\to f$ uniformemente, luego $f\in\mathcal{C}(K)$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente , es acotada, así existe $M>0$ tal que

$$\|f_n\|\leq M\quad(\forall n\in\mathbb{N}).\tag{2.60}$$

Ya que J es una isometría, se tiene que

$$\|f_n\|=\|J(x_n)\|=\|x_n\|,\tag{2.61}$$

por tanto de (2.60) y (2.61) se sigue que $\|x_n\|\leq M$ para todo $n\in\mathbb{N}$, esto es $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{A}$, luego existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x_{n_k}\longrightarrow x\quad(x\in\mathcal{A}).\tag{2.62}$$

Como J es continua, de (2.62) se sigue que

$$J(x_{n_k}) \longrightarrow J(x). \tag{2.63}$$

Puesto que $(J(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsuseción de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $f_n = J(x_n)$ y $f_n \to f$, entonces

$$J(x_{n_k}) \longrightarrow f, \tag{2.64}$$

pero como el límite de una sucesión es único, de (2.63) y (2.64) se tiene que $f = J(x)$, luego $f \in J(\mathcal{A})$ y por tanto $J(\mathcal{A})$ es cerrada.

Veamos que $J(\mathcal{A})$ separa puntos de K. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ tales que $\varphi_1 \neq \varphi_2$, entonces existe algún x en $\mathcal{A}$ tal que $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$, esto es $J_x(\varphi_1) \neq J_x(\varphi_2)$. Por lo tanto para cualquier φ_1, φ_2 en K con $\varphi_1 \neq \varphi_2$, existe $J_x \in J(\mathcal{A})$ tal que $J_x(\varphi_1) \neq J_x(\varphi_2)$, es decir $J(\mathcal{A})$ separa los puntos de $\mathcal{C}(K)$.

Veamos que $J(\mathcal{A})$ contiene las funciones constantes de $\mathcal{C}(K)$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha e \in \mathcal{A}$, luego $J(\alpha e) \in J(\mathcal{A})$, además note que $J(\alpha e)$ es la función constante α, pues para algún $\varphi \in K$

$$\begin{aligned}[J(\alpha e)](\varphi) &= J_{\alpha e}(\varphi) \\ &= \varphi(\alpha e) \\ &= \alpha\varphi(e) \\ &= \alpha,\end{aligned}$$

luego $J(\mathcal{A})$ contiene todas las funciones constantes de $\mathcal{C}(K)$.

Como $J(\mathcal{A})$ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{C}(K)$ que contiene las funciones constantes de $\mathcal{C}(K)$ y además separa puntos de K, por el Teorema de Stone-Weierstrass $J(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(K)$, luego J es sobreyectiva. Por lo tanto el algebra de Banach $\mathcal{A}$ es isometricamente isomorfa al álgebra $\mathcal{C}(K)$.

2.8. Una aplicación del Teorema de Albiac-Kalton

En esta sección mostraremos que el espacio de sucesiones acotadas ℓ_∞ es isométricamente isomorfo a un espacio $\mathcal{C}(K)$. Comenzamos probando las siguientes desigualdes de valor absoluto.

Proposición 2.8.1. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

(i) $||a| - |b|| \leq |a - b|$,

(ii) $|a^2 - b^2| \leq |a^2 + b^2|$.

Demostración. *(i)* Note que $b = b - a + a$, entonces por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} |(b-a)+a| &\leq |b-a| + |a| \\ |b| &\leq |b-a| + |a| \\ -|b-a| &\leq |a| - |b| \\ -|a-b| &\leq |a| - |b| \end{aligned}$$

Del mismo modo, escribiendo $a = a - b + b$ tenemos que

$$\begin{aligned} |(a-b)+b| &\leq |a-b| + |b| \\ |a| &\leq |a-b| + |b| \\ |a| - |b| &\leq |a-b|. \end{aligned}$$

Por lo tanto $-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|$, lo cual implica que $||a| - |b|| \leq |a-b|$.
(ii) Escribiendo $a^2 + b^2 = a^2 - \left(-b^2\right)$ y utlizando la desigualdad de la parte *(i)* de este teorema, tenemos que

$$\left|a^2 - b^2\right| = \left|\left|a^2\right| - \left|b^2\right|\right| = \left|\left|a^2\right| - \left|-b^2\right|\right| \leq \left|a^2 - \left(-b^2\right)\right| = \left|a^2 + b^2\right|.$$

$\square$

Ejemplo 2.8.2. *El espacio de sucesiones acotadas ℓ_∞ es isométricamente isomorfo a un espacio $\mathcal{C}(K)$ para algún espacio topológico Hausdorff y compacto.*

En la sección 2.2 vimos que ℓ_∞ con la norma $\|x\| = \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\}$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad (la sucesión constante $(1) = (1, 1, 1, \ldots)$) donde la multiplicación es el producto de dos sucesiones definida componente a componente. Si $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, b = (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, note que $\left|a_k^2 + b_k^2\right| \leq \left\|a^2 + b^2\right\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, por la parte *(ii)* de la Proposición 2.8.1 tenemos que $\left|a_k^2 - b_k^2\right| \leq \left|a_k^2 + b_k^2\right|$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego

$$\left|a_k^2 - b_k^2\right| \leq \left\|a^2 + b^2\right\| \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

esto es, $\left\|a^2 + b^2\right\|$ es una cota superior del conjunto $\left\{\left|a_k^2 - b_k^2\right| : k \in \mathbb{N}\right\}$, pero como $\left\|a^2 - b^2\right\|$ es la menor de la cotas superiores para este conjunto, se sigue que $\left\|a^2 - b^2\right\| \leq \left\|a^2 + b^2\right\|$ para $a, b \in \ell_\infty$. Entonces por el Teorema de Albiac-Kalton ℓ_∞ es isométricamente isomorfo a un espacio $\mathcal{C}(K)$ para algún espacio topologico Hausdorff y compacto K.

2.9. Algunas álgebras de Banach que no satisfacen la desigualdad $\left\|x^2 - y^2\right\| \leq \left\|x^2 + y^2\right\|$

Existen algunas algebras de Banach conmutativas con identidad donde la desigualdad del Teorema de Albiac-Kalton falla, por esta razón, el objetivo de esta sección es mostrar dos álgebras de Banach de este tipo.

Ejemplo 2.9.1. *La álgebra de Banach real $\mathcal{C}^{(1)}[0,1]$ conmutativa con identidad, con norma*

$$\|f\| = \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)| + \sup_{0\leq t\leq 1} |f'(t)|$$

y con la multiplicación usual de funciones $(fg)(t) = f(t)g(t)$ no satisface la desigualdad del Teorema de Albiac-Kalton.

Si se toma en particular $a = e^x, b = e^{-x} \in \mathcal{C}^{(1)}[0,1]$, tenemos que $\left\|a^2 - b^2\right\| = 3e^2 + e^{-2}$, pues

$$\begin{aligned}
\left\|a^2 - b^2\right\| &= \left\|(e^x)^2 - \left(e^{-x}\right)^2\right\| \\
&= \left\|e^{2x} - e^{-2x}\right\| \\
&= \max_{0\leq x\leq 1} \left|e^{2x} - e^{-2x}\right| + \max_{0\leq x\leq 1} \left|2e^{2x} + 2e^{-2x}\right| \\
&= \left(e^2 - e^{-2}\right) + \left(2e^2 + 2e^{-2}\right) \\
&= 3e^2 + e^{-2},
\end{aligned}$$

ya que $\max\left\{\left|e^{2x} - e^{-2x}\right| : 0 \leq x \leq 1\right\} = e^2 - e^{-2}$ (ver Figura 2.2) y $\max\left\{\left|2e^{2x} + 2e^{-2x}\right| : 0 \leq x \leq 1\right\} = 2e^2 + 2e^{-2}$ (ver Figura 2.3).

Figura 2.2: $f(x) = e^{2x} - e^{-2x}$ definida en $[0,1]$

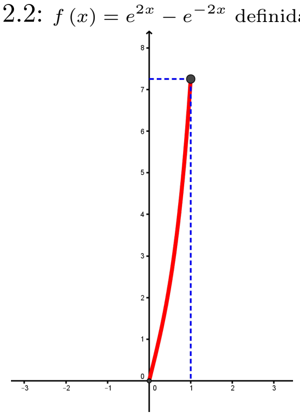
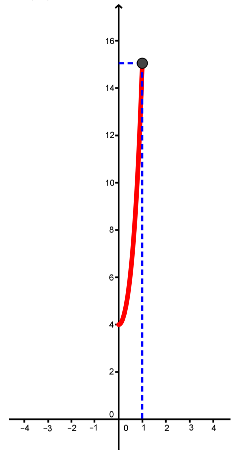


Figura 2.3: $f(x) = 2e^{2x} + 2e^{-2x}$ definida en $[0,1]$



Además, $\left\|a^2 + b^2\right\| = 3e^2 - e^{-2}$, pues

$$\begin{aligned}
\left\|a^2 + b^2\right\| &= \left\|\left(e^x\right)^2 + \left(e^{-x}\right)^2\right\| \\
&= \left\|e^{2x} + e^{-2x}\right\| \\
&= \max_{0 \leq x \leq 1} \left|e^{2x} + e^{-2x}\right| + \max_{0 \leq x \leq 1} \left|2e^{2x} - 2e^{-2x}\right| \\
&= \left(e^2 + e^{-2}\right) + \left(2e^2 - 2e^{-2}\right) \\
&= 3e^2 - e^{-2},
\end{aligned}$$

ya que $\max\left\{\left|e^{2x} + e^{-2x}\right| : 0 \leq x \leq 1\right\} = e^2 + e^{-2}$ (ver Figura 2.4) y $\max\left\{\left|2e^{2x} - 2e^{-2x}\right| : 0 \leq x \leq 1\right\} = 2e^2 + 2e^{-2}$ (ver Figura 2.5).

Figura 2.4: $f(x) = e^{2x} + 2e^{-2x}$ definida en $[0,1]$

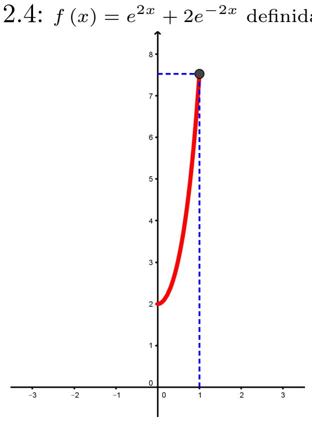
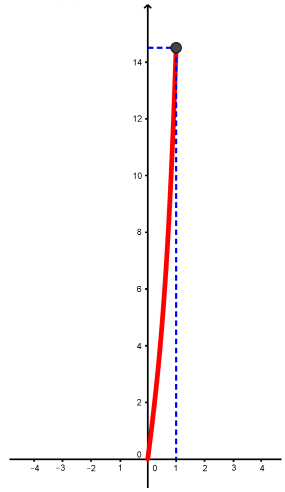


Figura 2.5: $f(x) = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$ definida en $[0, 1]$



Por lo tanto

$$-e^{-2} < e^{-2}$$

$$3e^2 - e^{-2} < 3e^2 + e^{-2}$$

$$\left\| a^2 + b^2 \right\| < \left\| a^2 - b^2 \right\|,$$

y así, la desigualdad del Teorema de Albiac-Kalton falla para la álgebra de Banach $\mathcal{C}^{(1)}[0,1]$.

Ejemplo 2.9.2. *Sea $\ell_1(\mathbb{Z}_+)$ es espacio de las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ (de coeficientes reales) donde $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_1$, con norma*

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

y con la multiplicación

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

en donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Entonces $\ell_1(\mathbb{Z}_+)$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad que no satisface la desigualdad del Teorema de Albiac-Kalton.

Tomando en particular $a = 1 - 2t^2, b = 2t + t^2 \in \ell_1(\mathbb{Z}_+)$ tenemos que $a^2 = 1 + 4t^2 + 4t^4$ y $b^2 = 4t^2 + 4t^3 + t^4$. Además $a^2 + b^2 = 1 + 4t^3 + 5t^4$ y $a^2 - b^2 = 1 - 8t^2 - 4t^3 + 3t^4$, por lo tanto veamos que $\left\| a^2 + b^2 \right\| < \left\| a^2 - b^2 \right\|$, pues

$$\left\| a^2 + b^2 \right\| = |1| + |4| + |5| = 10 < 16 = |1| + |-8| + |-4| + |3| = \left\| a^2 - b^2 \right\|,$$

luego la desigualdad del teorema de Albiac-Kalton falla para el álgebra de Banach $\ell_1(\mathbb{Z}_+)$.

Capítulo 3

Espacios isométricamente inyectivos y el Teorema de Goodner-Nachbin

En este capítulo estudiamos los espacios isométricamente inyectivos. Queremos determinar cuando los espacios de funciones continuas $\mathcal{C}(K)$ son espacios isométricamente inyectivos, para ello usaremos algunos resultados de las aplicaciones sublineales. Primero definimos los espacios isométricamente inyectivos y el orden-completo para los espacios $\mathcal{C}(K)$ usando el axioma de completitud en los números reales, y después demostraremos los teoremas sobre aplicaciones sublineales necesarios para caracterizar cuando los espacios $\mathcal{C}(K)$ son isométricamente inyectivos.

3.1. Espacios isométricamente inyectivos

Consideremos el siguiente problema de extensión: supongamos que X e Y son espacios de Banach y que A es un subespacio cerrado de X. Sea $T : A \longrightarrow Y$ un operador acotado, ¿podemos extender T a un operador lineal acotado $\tilde{T} : X \longrightarrow Y$? En esta sección vamos a definir los espacios de Banach que permiten dicha extensión y mostraremos un ejemplo de estos espacios.

Definición 3.1.1. *Sean X e Y espacios de Banach, sea A un subespacio cerrado de X y considere $T : A \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado. Diremos que Y es un espacio inyectivo, si existe un operador lineal acotado $\tilde{T} : X \longrightarrow Y$ el cual es una extensión de T. Además, si $\|\tilde{T}\| = \|T\|$, Y es llamado un espacio isométricamente inyectivo.*

A continuación, presentamos un ejemplo donde podemos observar que el espacio de Banach ℓ_∞ es isométricamente inyectivo.

Ejemplo 3.1.2. *El espacio de las sucesiones acotadas ℓ_∞ es un espacio isométricamente inyectivo.*

Para ver que ℓ_∞ es un espacio isométricamente inyectivo, consideremos un subespacio cerrado A de un espacio de Banach X, y el operador lineal acotado

$$\begin{aligned} T : A &\longrightarrow \ell_\infty \\ a &\longmapsto T(a) = (f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}, \end{aligned}$$

donde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el espacio dual $A^\star$. Note que

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|T(a)\| : a \in A \text{ con } \|a\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|(f_n(a))_{n=1}^\infty\| : a \in A \text{ con } \|a\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\sup\{|f_n(a)| : n \in \mathbb{N}\} : a \in A \text{ con } \|a\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\sup\{|f_n(a)| : a \in A \text{ con } \|a\| \leq 1\} : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\|f_n\| : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Hahn-Banach para espacios normados, para cada funcional lineal acotado f_n de $A^\star$ existe una extensión $g_n \in X^*$ tal que $\|f_n\| = \|g_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, el operador lineal acotado

$$\begin{aligned} \tilde{T} : X &\longrightarrow \ell_\infty \\ x &\longmapsto \tilde{T}(x) = (g_n(x))_{n=1}^\infty \end{aligned}$$

es una extensión de T. Además $\|\tilde{T}\| = \|T\|$, pues

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}\| &= \sup\left\{\left\|\tilde{T}(x)\right\| : x \in X \text{ con } \|x\| \leq 1\right\} \\ &= \sup\{\|(g_n(x))_{n=1}^\infty\| : x \in X \text{ con } \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\sup\{|g_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} : x \in X \text{ con } \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\sup\{|g_n(x)| : x \in X \text{ con } \|x\| \leq 1\} : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\|g_n\| : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\|f_n\| : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

Luego ℓ_∞ es un espacio isométricamente inyectivo.

3.2. Orden-completo para espacios $\mathcal{C}(K)$

En esta sección vamos a formalizar la noción de cota superior mínima (supremo) para subconjuntos del espacio de funciones continuas $\mathcal{C}(K)$.

Definición 3.2.1. *Sean A y B subconjuntos no vacíos del espacio $\mathcal{C}(K)$ tales que $f \leq g$ para todo $f \in A$ y $g \in B$. Diremos que $\mathcal{C}(K)$ es ordenado-completo, si para cada f en A y g en B, existe $h \in \mathcal{C}(K)$ tal que $f \leq h \leq g$.*

Observación 3.2.2.

(i) Note que $f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in K$.

(ii) Si $\mathcal{C}(K)$ es ordenado-completo, entonces cualquier subconjunto A de $\mathcal{C}(K)$ que tenga una cota superior, también tiene una cota superior mínima la cual denotaremos por $\sup A$, pues como B es el conjunto de todas las cotas superiores de A, por la definición 3.2.1 la función h (la cual es determinada de forma única) es la menor de la cotas superiores de A.

(iii) La función h se define como

$$\begin{aligned} h : K &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h(x) = \sup\{f(x) : f \in A\} \end{aligned}$$

y siempre es una función continua. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in K$, como $h = \sup\{f(x) : f \in A\}$, existe un $f_0 \in A$ tal que $h - \frac{\varepsilon}{3} < f_0$, esto es $h < f_0 + \frac{\varepsilon}{3}$, luego

$$f_0 \leq h < f_0 + \tfrac{\varepsilon}{3}, \tag{3.1}$$

y como

$$f_0 - \tfrac{\varepsilon}{3} < f_0, \tag{3.2}$$

de (3.1) y (3.2) se sigue que

$$f_0 - \tfrac{\varepsilon}{3} < h < f_0 + \tfrac{\varepsilon}{3},$$

es decir

$$|h(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in K. \tag{3.3}$$

Como $f_0 \in A$, entonces f_0 es continua en K, luego existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in K$ con $\|x - x_0\| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3}. \tag{3.4}$$

Por lo tanto, si $x \in K$ y $\|x - x_0\| < \delta$, entonces (usando (3.3) y (3.4))

$$\begin{aligned} |h(x) - h(x_0)| &= |h(x) - f_0(x) + f_0(x) - f_0(x_0) + f_0(x_0) - h(x_0)| \\ &\leq |h(x) - f_0(x)| + |f_0(x) - f_0(x_0)| + |f_0(x_0) - h(x_0)| \end{aligned}$$

$$\leq \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

luego h es continua.

(iv) De manera similar, se muestra que el ínfimo es una función continua.

3.3. Aplicaciones sublineales

El objetivo de esta sección es mostrar tres resultados importantes de las aplicaciones sublineales y aplicaciones sublineales minimales definidas en un subespacio lineal de un espacio de Banach X al espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}(K)$. El desarrollo de estos resultados será fundamental para la demostración del teorema principal de este capítulo. Iniciamos estableciendo la definición de aplicación sublineal.

Definición 3.3.1. *Sea A un subespacio lineal de un espacio de Banach X, y sea K un espacio topológico compacto Hausdorff. Una aplicación $V : A \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ es llamada sublineal si*
(i) $V(\alpha x) = \alpha V(x)$
(ii) $V(x+y) \leq V(x) + V(y)$
para cualquier $\alpha \geq 0$ y para todo $x, y \in A$.

Observación 3.3.2 . *La propiedad (ii) es conocida con el nombre de subaditividad.*

A continuación presentamos la definición de aplicación sublineal minimal.

Definición 3.3.3. *Sean X un espacio de Banach, K un espacio topológico compacto Hausdorff y $V : X \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ una aplicación sublineal. Diremos que V es minimal, si no existe una aplicación sublineal $U : X \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ tal que $U(x) \leq V(x)$ para todo $x \in X$ y $U \neq V$.*

El siguiente resultado permite obtener una nueva aplicación sublineal a partir de dos aplicaciones sublineales dadas que verifican una desigualdad adicional.

Teorema 3.3.4. *Sean X un espacio de Banach, A un subespacio lineal de X, K un espacio topológico compacto Hausdorff; además $V : X \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ y $W : A \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ son aplicaciones sublineales tales que $W(y) + V(-y) \geq 0$ para todo $y \in A$. Si $\mathcal{C}(K)$ es ordenado-completo, entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} V \wedge W : X &\longrightarrow \mathcal{C}(K) \\ x &\longmapsto V \wedge W(x) = \inf\{V(x-y) + W(y) : y \in A\}, \end{aligned}$$

está bien definida y es sublineal.

Demostración. Sean $x \in X$ e $y \in A$, entonces como $0 \leq V(-y) + W(y)$, si expresamos a $-y = -x + (x-y)$ y utilizamos la propiedad *(ii)* de la Definición 3.3.1, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq V(-y) + W(y) = V[(-x) + (x-y)] + W(y) \leq V(-x) + V(x-y) + W(y) \\ 0 \leq V(-x) + V(x-y) + W(y) \\ -V(-x) \leq V(x-y) + W(y), \end{aligned}$$

esto es, $-V(-x)$ es una cota inferior del conjunto de aplicaciones $\{V(x-y) + W(y) : y \in A\}$. Como $\mathcal{C}(K)$ es ordenado-completo, podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} V \wedge W : X &\longrightarrow \mathcal{C}(K) \\ x &\longmapsto V \wedge W(x) = \text{ínf}\{V(x-y) + W(y) : y \in A\}, \end{aligned}$$

la cual está bien definida. Note que $V \wedge W$ es sublineal, ya que para $\alpha \geq 0$

$$\begin{aligned} V \wedge W(\alpha x) &= \text{ínf}\{V(\alpha x - y) + W(y) : y \in A\} \\ &= \text{ínf}\{V(\alpha x - \alpha z) + W(\alpha z) : y = \alpha z \in A\} \\ &= \text{ínf}\{\alpha V(x-z) + \alpha W(z) : z \in A\} \\ &= \alpha\, \text{ínf}\{V(x-z) + W(z) : z \in A\} \\ &= \alpha V \wedge W(x), \end{aligned}$$

y para cualquier $x, z \in X$

$$\begin{aligned} V \wedge W(x+z) &= \text{ínf}\{V[(x+z) - y] + W(y) : y \in A\} \\ &= \text{ínf}\{V[(x+z) - 2w] + W(2w) : y = 2w \in A\} \\ &= \text{ínf}\{V[(x-w) + (z-w)] + 2W(w) : w \in A\} \\ &\leq \text{ínf}\{V(x-w) + V(z-w) + 2W(w) : w \in A\} \\ &= \text{ínf}\{V(x-w) + V(z-w) + W(w) + W(w) : w \in A\} \\ &= \text{ínf}\{V(x-w) + W(w) : w \in A\} + \text{ínf}\{V(z-w) + W(w) : w \in A\} \\ &= V \wedge W(x) + V \wedge W(z), \end{aligned}$$

luego $V \wedge W$ es sublineal. □

El próximo teorema garantiza la existencia de una aplicación sublineal minimal bajo la condición de que el espacio $\mathcal{C}(K)$ sea ordenado-completo.

Teorema 3.3.5. *Sean X un espacio de Banach, K un espacio topológico compacto Hausdorff y V :*

$X \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ una aplicación sublineal. Si $\mathcal{C}(K)$ es ordenado-completo, existe una aplicación sublineal minimal $W : X \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ tal que $W(x) \leq V(x)$ para todo $x \in X$.

Demostración. Definamos el conjunto

$$\mathcal{S} = \{U : X \longrightarrow \mathcal{C}(K) \mid U \text{ es sublineal y } U(x) \leq V(x) \text{ para todo } x \in X\}.$$

$\mathcal{S}$ es no vació ya que $V \in \mathcal{S}$ y además como $\mathcal{C}(K)$ es ordenado-completo, $\mathcal{S}$ es un conjunto parcialmente ordenado. Considere $\Psi = (U_i)_{i\in I}$ una cadena en $\mathcal{S}$, entonces para todo $x \in X$ e $i \in I$ se tiene

$$\begin{aligned} 0 = U_i[x + (-x)] &\leq U_i(x) + U_i(-x) \\ 0 &\leq U_i(x) + U_i(-x) \\ -U_i(-x) &\leq U_i(x). \end{aligned}$$

Como cada $U_i \in \mathcal{S}$, entonces $U_i(x) \leq V(x)$ para todo $x \in X$, luego $-U_i(-x) \leq V(x)$ y así $-U_i(x) \leq V(-x)$, por lo tanto $-V(-x) \leq U_i(x)$ para todo $x \in X$, esto es, el conjunto $\{U_i(x) : i \in I\} \subset \mathcal{C}(K)$ tiene una cota inferior, y como $\mathcal{C}(K)$ es ordenado-completo, la aplicación

$$\begin{aligned} U_\Psi : X &\longrightarrow \mathcal{C}(K) \\ x &\longmapsto \inf\{U_i(x) : i \in I\} \end{aligned}$$

está bien definida sobre X. Veamos que U_Ψ es sublineal. Sea $\alpha \geq 0$ entonces

$$U_\Psi(\alpha x) = \inf\{U_i(\alpha x) : i \in I\} = \inf\{\alpha U_i(x) : i \in I\} = \alpha \inf\{U_i(x) : i \in I\} = \alpha U_\Psi(x),$$

luego $U_\Psi(\alpha x) = \alpha U_\Psi(x)$ para $\alpha \geq 0$. Note que para cualquier $x, y \in X$ se tiene que $U_\Psi(x+y) \leq U_i(x+y)$ ya que $U_\Psi(x+y)$ es el ínfimo del conjunto $\{U_i(x+y) : i \in I\}$. Ahora, como cada U_i es sublineal , $U_i(x+y) \leq U_i(x) + U_i(y)$, luego

$$U_\Psi(x+y) \leq U_i(x) + U_i(y) \quad \forall i \in I. \tag{3.5}$$

Como Ψ es un conjunto totalmente ordenado, por la propiedad de totalidad para $i \neq j \in I$ se puede asumir sin pérdida de generalidad que $U_i \leq U_j$. Entonces para cada $x \in X$ tenemos que $U_i(x) \leq U_j(x)$, y sumando $U_i(y)$ con $y \in X$ en ambos lados de esta desigualdad, se obtiene que

$$U_i(x) + U_i(y) \leq U_j(x) + U_i(y) \quad \forall i \neq j \in I, \tag{3.6}$$

luego de (3.5) y (3.6) se sigue que

$$U_\Psi(x+y) \leq U_j(x) + U_i(y)$$
$$U_\Psi(x+y) - U_j(x) \leq U_i(y)$$

para todo $i \neq j \in I$. Esto es, $U_\Psi(x+y) - U_j(x)$ es una cota inferior del conjunto $\{U_i(y) : i \neq j \in I\}$, pero como $U_\Psi(y)$ es la mayor de las cotas inferiores de este conjunto, entonces

$$U_\Psi(x+y) - U_j(x) \leq U_\Psi(y)$$
$$U_\Psi(x+y) - U_\Psi(y) \leq U_j(x)$$

para todo $j \neq i \in I$. Si j recorre todo $I - \{i\}$, entonces $U_\Psi(x+y) - U_\Psi(y)$ es una cota inferior del conjunto $\{U_j(x) : j \neq i \in I\}$, pero como $U_\Psi(x)$ es la mayor de las cotas inferiores de este conjunto,

$$U_\Psi(x+y) - U_\Psi(y) \leq U_\Psi(x)$$
$$U_\Psi(x+y) \leq U_\Psi(x) + U_\Psi(y)$$

para todo $x, y \in X$, y por tanto U_Ψ es sublineal. Además para cada $i \in I$, $U_\Psi(x) \leq U_i(x) \leq V(x)$ para todo $x \in X$, luego $U_\Psi \in \mathcal{S}$.

Note que, por cómo se definió la aplicación U_Ψ, para cada $i \in I$ tenemos que $U_\Psi(x) \leq U_i(x)$ para todo $x \in X$, es decir que U_Ψ es una cota inferior de la cadena $(U_i)_{i\in I}$, por lo tanto tenemos que $\mathcal{S}$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que la cadena $(U_i)_{i\in I}$ tiene una cota inferior $U_\Psi \in \mathcal{S}$, entonces por el Lema de Zorn existe un elemento minimal $W : X \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ en $\mathcal{S}$, luego W es una aplicación minimal. □

Una aplicación sublineal V que va del espacio de Banach X en $\mathcal{C}(K)$ y que además es minimal, resulta ser lineal como se observa en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.6. *Sean X un espacio de Banach, K un espacio topológico compacto Hausdorff, $\mathcal{C}(K)$ un espacio ordenado-completo y $V : X \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ una aplicación sublineal. Si V es minimal entonces V es lineal.*

Demostración. Para $x \in X$, sea $\langle x \rangle$ su espacio generado. Definamos la aplicación

$$W : \langle x \rangle \longrightarrow \mathcal{C}(K)$$
$$\lambda x \longmapsto W(\lambda x) = -\lambda V(-x)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Veamos que W es lineal. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$W[\alpha(\lambda x)] = W[(\alpha\lambda)x] = -\alpha\lambda V(-x) = \alpha[-\lambda V(-x)] = \alpha W(\lambda x).$$

y si $\lambda_1 x, \lambda_2 x \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} W(\lambda_1 x + \lambda_2 x) &= W[(\lambda_1 + \lambda_2) x] \\ &= -(\lambda_1 + \lambda_2) V(-x) \\ &= -\lambda_1 V(-x) - \lambda_2 V(-x) \\ &= W(\lambda_1 x) + W(\lambda_2 x), \end{aligned}$$

luego W es lineal.

Note que $-\lambda V(-x) \geq -V(-\lambda x)$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, esto es

$$W(\lambda x) + V(-\lambda x) \geq 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

por tanto, como $V : X \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ y $W : \langle x \rangle \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ son aplicaciones sublineales tales que $W(\lambda x) + V(-\lambda x) \geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, y además $\mathcal{C}(K)$ es ordenado-completo, usando el Teorema 3.3.4 podemos definir la aplicación sublineal

$$\begin{aligned} V \wedge W : X &\longrightarrow \mathcal{C}(K) \\ x &\longrightarrow V \wedge W(x) = \inf\{V(x - \lambda x) + W(\lambda x) : \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ahora, por la minimalidad de V, se tiene que $V(x) \leq V \wedge W(x)$ para todo $x \in X$, es decir

$$V(x) \leq \inf\{V(x - \lambda x) + W(\lambda x) : \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad \forall x \in X, \tag{3.7}$$

además tomando $\lambda = 0$ tenemos que

$$V \in \{V(x - \lambda x) + W(\lambda x) : \lambda \in \mathbb{R}\}, \tag{3.8}$$

por lo tanto de (3.7) y (3.8) se sigue que $V = V \wedge W$.

Como $V = V \wedge W$, entonces $V \leq W$ para todo $\lambda x \in \langle x \rangle$, es decir

$$\begin{aligned} V(\lambda x) &\leq W(\lambda x) \\ V(\lambda x) &\leq -\lambda V(-x), \end{aligned}$$

esto es, para cada $x \in X$

$$\lambda V(-x) \leq -V(\lambda x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Ahora, tomando $\lambda = 1$ en la desigualdad (3.9) tenemos que

$$V(-x) \leq -V(x) \qquad \forall x \in X. \tag{3.10}$$

Observe que, por la sublinealidad de V

$$0 = V(x-x) \leq V(x) + V(-x),$$

esto es

$$-V(x) \leq V(-x) \qquad \forall x \in X, \tag{3.11}$$

por lo tanto de (3.10) y (3.11) concluimos que

$$V(-x) = -V(x) \qquad \forall x \in X. \tag{3.12}$$

Finalmente demostremos que V es lineal.

Por la sublinealidad de V tenemos que $V(x+y) \leq V(x) + V(y)$ para todo $x, y \in X$, además

$$\begin{aligned} V(x) = V[(x+y)-y] &\leq V(x+y) + V(-y) \\ V(x) &\leq V(x+y) - V(y) \qquad \text{(por 3.12)} \\ V(x) + V(y) &\leq V(x+y), \end{aligned}$$

luego $V(x+y) = V(x) + V(y)$ para todo $x, y \in X$.

Ahora, sean $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces si $\alpha \geq 0$, de la propiedad *(i)* de la Definición 3.3.1

$$V(\alpha x) = \alpha V(x),$$

y si $\alpha < 0$, de (3.12) y de nuevo por la propiedad *(i)* de la Definición 3.3.1

$$\begin{aligned} V(\alpha x) &= V[-(-\alpha)x] \\ &= -V[(-\alpha)x] \\ &= -(-\alpha)V(x) \\ &= \alpha V(x) \end{aligned}$$

luego V es lineal. $\square$

3.4. Teorema de Goodner-Nachbin

En esta sección usamos el concepto de orden-completo junto con los teoremas de las aplicaciones sublineales de las sección 3.3 para demostrar el Teorema de Goodner-Nachbin, el cual da condiciones sobre los espacios $\mathcal{C}(K)$ para que sean espacios isométricamente inyectivos.

Teorema 3.4.1 (Teorema de Goodner-Nachbin). *Sea K un espacio topológico compacto Hausdorff. Entonces $\mathcal{C}(K)$ es isométricamente inyectivo si y sólo si $\mathcal{C}(K)$ es ordenado-completo.*

Demostración. Suponga que $\mathcal{C}(K)$ es ordenado completo. Sea A un subespacio cerrado de un espacio de Banach X y sea S un operador lineal acotado con $\|S\| = 1$ definido por

$$\begin{aligned} S : A &\longrightarrow \mathcal{C}(K) \\ x &\longmapsto S(x) \end{aligned}$$

donde para cada $x \in A$, $S(x)$ es una función continua definida por

$$\begin{aligned} S(x) : K &\longrightarrow \mathbb{R} \\ k &\longmapsto [S(x)](k). \end{aligned}$$

Como $\|S\| = 1$, note que de la definición de norma de S obtenemos que

$$\begin{aligned} 1 = \|S\| &= \sup\left\{ \frac{\|S(x)\|}{\|x\|} : x \in A - \{0\} \right\} \\ &= \sup\left\{ \frac{1}{\|x\|} \sup\{|[S(x)](k)| : k \in K\} : x \in A - \{0\} \right\} \\ &= \sup\left\{ \sup\left\{ \frac{|[S(x)](k)|}{\|x\|} : k \in K \right\} : x \in A - \{0\} \right\} \\ &= \sup\left\{ \frac{|[S(x)](k)|}{\|x\|} : x \in A - \{0\}, k \in K \right\}, \end{aligned}$$

esto es, para cada $x \in A$ tenemos que $\frac{|[S(x)](k)|}{\|x\|} \leq 1$ para todo $k \in K$. Expresando a $\frac{|[S(x)](k)|}{\|x\|} \leq 1$ de la forma $-\|x\| \leq [S(x)](k) \leq \|x\|$ y multiplicando en los tres miembros de la desigualdad por la función constante $1_K \in \mathcal{C}(K)$, obtenemos que para cada $x \in A$

$$-\|x\| \cdot 1_K(k) \leq [S(x)](k) \leq \|x\| \cdot 1_K(k)$$

para todo $k \in K$, esto es

$$-\|x\| \cdot 1_K \leq [S(x)] \leq \|x\| \cdot 1_K. \tag{3.13}$$

Definamos la aplicación

$$
\begin{aligned}
V_0 : X &\longrightarrow \mathcal{C}(K) \\
x &\longmapsto V_0(x) = \|x\| \cdot 1_K
\end{aligned}
$$

y veamos que es sublineal. En efecto, para todo $\alpha \geq 0$

$$V_0(\alpha x) = \|\alpha x\| \cdot 1_K = (|\alpha| \|x\|) \cdot 1_K = \alpha (\|x\| \cdot 1_K) = \alpha V_0(x),$$

además, para todo $x, y \in X$

$$V_0(x+y) = \|x+y\| \cdot 1_K \leq \|x\| \cdot 1_K + \|y\| \cdot 1_K = V_0(x) + V_0(y),$$

por tanto, V_0 es sublineal.

Note que

$$
\begin{aligned}
V_0(-x) &= \|-x\| \cdot 1_K = |-1| \|x\| \cdot 1_K = \|x\| \cdot 1_K \\
V_0(-x) &= \|x\| \cdot 1_K \\
-V_0(-x) &= -\|x\| \cdot 1_K
\end{aligned}
$$

luego de la desigualdad (3.13) se sigue que $-V_0(-x) = -\|x\| \cdot 1_K \leq S(x)$ para todo $x \in A$, es decir

$$S(x) + V_0(-x) \geq 0$$

para todo $x \in A$.

Como $V_0 : X \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ y $S : A \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ son aplicaciones sublineales tales que $S(x) + V_0(-x) \geq 0$ para todo $x \in A$ y $\mathcal{C}(K)$ es ordenado-completo, por el Teorema 3.3.4 podemos definir sobre X la aplicación sublineal $V = V_0 \wedge S$ definida por

$$
\begin{aligned}
V : X &\longrightarrow \mathcal{C}(K) \\
x &\longmapsto V(x) = \inf \{V_0(x-y) + S(y) : y \in A\}.
\end{aligned}
$$

Ahora, como $V : X \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ es sublineal y $\mathcal{C}(K)$ es ordenado completo, por el Teorema 3.3.5 existe una aplicación sublineal minimal $T : X \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ tal que $T(x) \leq V(x)$ para todo $x \in X$. Además el Teorema 3.3.6 implica que T es lineal.

Ya que T y S son lineales, de la minimalidad de T tenemos que para todo $x \in A$

$$
\begin{aligned}
T(-x) &\leq S(-x) \\
-T(x) &\leq -S(x)
\end{aligned}
$$

$$S(x) \leq T(x),$$

y como $T(x) \leq S(x)$ para todo $x \in A$ (por la minimalidad de T nuevamente), entonces $T(x) = S(x)$ para todo $x \in A$, esto es, $T\mid_A = S$, por tanto T es una extensión de S.
Como $T(x) = S(x)$ para todo $x \in A$ entonces

$$\|S\| \leq \|T\|, \tag{3.14}$$

pues como

$$\left\{\frac{\|S(x)\|}{\|x\|} : x \in A - \{0\}\right\} = \left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in A - \{0\}\right\} \subseteq \left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X - \{0\}\right\}$$

entonces

$$\sup\left\{\frac{\|S(x)\|}{\|x\|} : x \in A - \{0\}\right\} \leq \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in X - \{0\}\right\}$$
$$\|S\| \leq \|T\|.$$

Ahora, por la minimalidad de T tenemos que $T(x) \leq V_0(x) = \|x\| \cdot 1_K$, o sea

$$T(x) \leq \|x\| \cdot 1_K \quad \text{para todo } x \in X. \tag{3.15}$$

Además $-T(x) = T(-x) \leq V_0(-x) = \|-x\| \cdot 1_K = \|x\| \cdot 1_K$, esto es

$$-\|x\| \cdot 1_K \leq T(x) \quad \text{para todo } x \in X, \tag{3.16}$$

por lo tanto de (3.15) y (3.16) tenemos que $-\|x\| \cdot 1_K \leq T(x) \leq \|x\| \cdot 1_K$, es decir, que para cada $x \in A$

$$-\|x\| \leq [T(x)](k) \leq \|x\| \quad \text{para todo } k \in K,$$

esto es

$$|[T(x)](k)| \leq \|x\|$$
$$\frac{|[T(x)](k)|}{\|x\|} \leq 1$$

para todo $x \in X - \{0\}$ y cada $k \in K$, es decir, 1 es cota superior del conjunto

$$\left\{\frac{|[T(x)](k)|}{\|x\|} : x \in X - \{0\}, k \in K\right\},$$

pero como el supremo de este conjunto es la menor de las cotas superiores, entonces

$$\sup\left\{\frac{|[T(x)](k)|}{\|x\|}: x\in X-\{0\}, k\in K\right\}\leq 1. \tag{3.17}$$

Además

$$\begin{aligned}\sup\left\{\frac{|[T(x)](k)|}{\|x\|}: x\in X-\{0\}, k\in K\right\} &= \sup\left\{\tfrac{1}{\|x\|}\sup\{|[T(x)(k)]| : k\in K\} : x\in X-\{0\}\right\}\\ &= \sup\left\{\tfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x\in X-\{0\}\right\}\\ &= \|T\|,\end{aligned}$$

así, de (3.17) se sigue que $\|T\|\leq 1$, y como $\|S\|=1$, entonces

$$\|T\|\leq\|S\|. \tag{3.18}$$

Por lo tanto de (3.14) y (3.18) concluimos que $\|T\|=\|S\|$.

Hemos demostrado que si $\mathcal{C}(K)$ es ordenado-completo entonces $\mathcal{C}(K)$ es un espacio isométricamente inyectivo

Recíprocamente, probemos ahora la otra implicación del Teorema de Goodner-Nachbin. Suponga que $\mathcal{C}(K)$ es un espacio isométricamente inyectivo. Sea $\ell_\infty(K)$ el espacio de Banach de todos las funciones acotados sobre K, como $\mathcal{C}(K)$ es un subespacio cerrado de $\ell_\infty(K)$, considere el operador acotado

$$\begin{aligned}T:\mathcal{C}(K)&\longrightarrow\mathcal{C}(K)\\ s&\longmapsto T(s)=s,\end{aligned}$$

entonces como $\mathcal{C}(K)$ es isométricamente inyectivo y $\mathcal{C}(K)\subset\ell_\infty(K)$, existe un operador lineal acotado $P:\ell_\infty(K)\longrightarrow\mathcal{C}(K)$ el cual es una extensión de T tal que $\|P\|=\|T\|$. Note que P es una proyección, pues $P\,|_{\mathcal{C}(K)}=T=I$, y además como T tiene norma uno, entonces $\|P\|=1$.

Demostremos que si $b\in\ell_\infty(K)$ con $b>0$ entonces

$$\|P(1_K-\lambda b)\|\leq 1 \quad\text{para}\quad 0\leq\lambda\leq\tfrac{2}{\|b\|}. \tag{3.19}$$

En efecto, si $0\leq\lambda\leq\frac{2}{\|b\|}$ entonces $0\leq\lambda\|b\|\leq 2$, luego

$$\begin{aligned}0\leq\lambda|b(t)|\leq 2 &\qquad \forall t\in K\\ 0\leq\lambda b(t)\leq 2 &\qquad \forall t\in K \qquad \text{(por que } b>0)\\ -2\leq -\lambda b(t)\leq 0 &\qquad \forall t\in K\\ -1\leq 1-\lambda b(t)\leq 1 &\qquad \forall t\in K\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|1-\lambda b(t)| &\leq 1 \qquad \forall t \in K \\
\sup_{t\in K}|1-\lambda b(t)| &\leq 1 \\
\|1-\lambda b\| &\leq 1,
\end{aligned}
$$

esto es

$$
\|1_K-\lambda b\| \leq 1, \tag{3.20}
$$

y como

$$
\|P(1_K-\lambda b)\| \leq \|P\|\,\|1_K-\lambda b\| = \|1_K-\lambda b\|, \tag{3.21}
$$

de (3.20) y (3.21) se tiene que $\|P(1_K-\lambda b)\| \leq 1$ para $0 \leq \lambda \leq \frac{2}{\|b\|}$.

Ahora, P es una aplicación positiva, esto es, $P(b) \geq 0$ siempre que $b \in \ell_\infty(K)$ y $b \geq 0$. En efecto, si $b \geq 0$ de (3.19) tenemos que $\|P(1_K-\lambda b)\| \leq 1$ para $0 \leq \lambda \leq \frac{2}{\|b\|}$, luego

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in K}|P(1_K-\lambda b)(t)| &\leq 1 \\
|P(1_K-\lambda b)(t)| &\leq 1 \qquad \forall t \in K \\
P(1_K-\lambda b)(t) &\leq 1 \qquad \forall t \in K \\
P(1_K)(t)-\lambda P(b)(t) &\leq 1 \qquad \forall t \in K \\
1_K(t)-\lambda P(b)(t) &\leq 1 \qquad \forall t \in K \\
1-\lambda P(b)(t) &\leq 1 \qquad \forall t \in K \\
0 &\leq \lambda P(b)(t) \qquad \forall t \in K \\
0 &\leq P(b)(t) \qquad \forall t \in K,
\end{aligned}
$$

por tanto, P es una aplicación positiva.

Ahora, sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathcal{C}(K)$ tales que si $f \in A$ y $g \in B$ entonces $f \leq g$. Consideremos la función $a \in \ell_\infty(K)$ definida por

$$
\begin{aligned}
a : K &\longrightarrow \mathbb{R} \\
t &\longmapsto a(t) = \sup\{f(t) : f \in A\}.
\end{aligned}
$$

Sea $h = P(a)$, entonces $h \in \mathcal{C}(K)$. Si $f \in A$ entonces $f \leq a$, luego

$$
a - f \geq 0
$$

$$
\begin{aligned}
P(a-f) &\geq 0 \\
P(a)-P(f) &\geq 0 \\
h=P(a) &\geq P(f)=f,
\end{aligned}
$$

por tanto

$$
f \leq h \qquad \forall f \in A. \tag{3.22}
$$

Ahora, si $g \in B$ se tiene que g es cota superior del conjunto $\{f(t) : f \in A\}$, pero a es la menor de las cotas superiores para este conjunto, luego $a \leq g$, así

$$
\begin{aligned}
g-a &\geq 0 \\
P(g-a) &\geq 0 \\
P(g)-P(a) &\geq 0 \\
g=P(g) &\geq P(a)=h,
\end{aligned}
$$

esto es

$$
h \leq g \qquad \forall g \in B, \tag{3.23}
$$

luego de (3.22) y (3.23) se tiene que $f \leq h \leq g$ para todo $f \in A$ y todo $g \in B$. Por lo tanto como A y B son subconjuntos de $\mathcal{C}(K)$ tales que $f \leq g$ para cada f en A y g en B, y además existe $h \in \mathcal{C}(K)$ tal que $f \leq h \leq g$ para todo $f \in A$ y para todo $g \in B$, tenemos que $\mathcal{C}(K)$ es ordenado-completo, y así queda demostrado el teorema. $\square$

4. Conclusiones

- ◇ Se presentaron varios conceptos, propiedades y resultados relativos a la Teoría de álgebras de Banach, aspectos que son importantes para el desarrollo de la Teoría de espacios de Banach. Adicionalmente, se revisó las definiciones de espacios de estados de un álgebra de Banach, el conjunto de cuadrados de un álgebra de Banach y el espacio de todos los estados multiplicativos de un álgebra de Banach y se probaron algunas de sus propiedades.
- ◇ Se estudió una generalización del Teorema de Neumann para garantizar la existencia de elementos invertibles en algunas álgebras de Banach.
- ◇ Se estudió el Teorema de Albiac-Kalton el cual es un criterio para verificar si un álgebra de Banach es isométrico a un espacio $\mathcal{C}(K)$.
- ◇ Se estudió el orden-completo en espacios $\mathcal{C}(K)$ y las aplicaciones sublineales en estos espacios y sus propiedades relacionadas con las aplicaciones lineales y la minimalidad.
- ◇ Se estudió un método para saber cuándo un espacio $\mathcal{C}(K)$ es un espacio isométricamente inyectivo el cual es conocido como el Teorema de Goodner-Nachbin
- ◇ Como aplicaciones de los resultados obtenidos sobre una caracterización de los espacios $\mathcal{C}(K)$ se probó que el espacio ℓ_∞ es un espacio $\mathcal{C}(K)$, así como también se demostró que es un espacio isométricamente inyectivo.

Bibliografía

[1] ALBIAC, F. and KALTON, N. J. A characterization of real $\mathcal{C}(K)$-spaces. The American Mathematical Monthly. [online] Octubre, 2007. Vol. 114 N° 8 [cited: 3 July 2015] p. 737-743. Available from Internet: http://kaltonmemorial.missouri.edu/docs/amm2007.pdf

[2] ALBIAC, F. and KALTON. Topics in Banach space Theory. New York: Springer, 2006.

[3] BANACH, Stefan. Théorie des opérations lineaires, Warszawa, 1932..

[4] BREZIS, Haim. Functional Analysis, Sobolev Sapaces and Partial Differential Equations. New York: Springer, 2011.

[5] CONWAY J. B. A Course in Functional Analysis. New York: Springer, 1990.

[6] FREDHOM I. Sur une classe d'équations fonctionelles, Acta Mathematica, 1903. Vol. 27, p 365-390.

[7] GELFAND I. Normierte Ringe, Recreational Mathematics, 1941, Vol 9, N° 1, p 3-24.

[8] GOODNER D. B. Projections in normed linear spaces. Transactions of the American Mathematical Society. [Online] Julio, 1950. Vol. 69 [cited: 3 July 2015] p. 89-108. Available from Internet: http://www.ams.org/journals/tran/1950-069-00/S0002-9947-1950-0037465-6/S0002-9947-1950-0037465-6.pd

[9] GRAHAM R. and KNUTH D. and PATASHNIK O. Concrete mathematics. New York: Addison-Wesley, 1989, p. 186.

[10] KREYSZIG E. Introductory Functional Analysis with Applications. New York: Wiley, 1989.

[11] NACHBIN L. On the Hahn-Banach theorem, Anais da Academia Brasileira de Ciências, 1949. Vol. 21 [cited: 3 July 2015] p. 151-154.

[12] PINTER C. C. Set Theory. Philippines: Addison-Wesley 1971, p. 120.

[13] RUDIN W. Functional Analysis. New York: McGraw-Hill, 1973.