# ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN POR ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DE UNA UNIVERSIDAD PRIVADA, PARTIENDO DE TEXTOS PRODUCIDOS POR ELLOS

HÉCTOR HERNANDO DÍAZ ARDILA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
BUCARAMANGA
2009

**ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN POR ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DE UNA UNIVERSIDAD PRIVADA, PARTIENDO DE TEXTOS PRODUCIDOS POR ELLOS**

**HÉCTOR HERNANDO DÍAZ ARDILA**

**Director:**
**GABRIEL YÁÑEZ CANAL**

**Trabajo de Grado para optar el Título de:**
**Maestría en Pedagogía**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**
**FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS**
**ESCUELA DE EDUCACIÓN**
**MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA**
**BUCARAMANGA**
**2009**

A mi padre, a quien he tratado de emular en su condición de ingeniero.

Y a mis tres hermanos ingenieros, con la ilusión de que, por curiosidad profesional, se decidan a hojear este escrito.

## AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Santo Tomás de Bucaramanga y a sus directivas que me otorgaron la beca para esta Maestría.

A mi Director, por su apoyo y acertada orientación.

A los estudiantes que participaron en el trabajo de recolección de la información y que estuvieron siempre atentos a colaborar con esta labor.

A Ángela y Santiago, por soportarme, en el tiempo que le dediqué a este trabajo, robándoselo a los momentos que debimos compartir juntos.

## CONTENIDO

**LISTA DE TABLAS**

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE ANEXOS

**RESUMEN**

**TÍTULO**
ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN POR ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DE UNA UNIVERSIDAD PRIVADA PARTIENDO DE TEXTOS ESCRITOS POR ELLOS.*

**AUTOR**
DÍAZ ARDILA, Héctor Hernando**

**PALABRAS CLAVES**
Función, Función Potencia, Lenguaje Natural, Lenguaje Algebraico, Lenguaje Geométrico, Lenguaje Tabular.

**CONTENIDO**
Partiendo de la importancia que tienen las asignaturas matemáticas en las carreras de ingeniería, se busca analizar la forma como los estudiantes de estas carreras comprenden los conceptos matemáticos, para lo cual se tomó como objeto matemático de análisis el concepto de *función* por su gran importancia dentro de la Matemática pura y aplicada.

Utilizando los lenguajes algebraico, tabular y geométrico propios de la Matemática y teniendo en cuenta que el acto de comprensión se refleja en la capacidad que tengan los estudiantes para transferir conceptos matemáticos de un lenguaje a otro, se analizaron las respuestas dadas por los estudiantes en estos lenguajes.

El lenguaje verbal, dado el hecho de que en las últimas décadas la Didáctica Matemática lo ha abandono en cierto grado, resultó pertinente ponerlo a prueba como instrumento de análisis de comprensión.

Como conclusiones se destacan:

- El lenguaje verbal es muy bien comprendido por los estudiantes y es normal que así sea, por ser el lenguaje en que las personas se expresan más habitualmente, pero es en cierto grado impreciso cuando, aplicado a conceptos matemáticos si se utiliza en forma exclusiva. Asimismo, la comunicación de conceptos matemáticos en lenguaje verbal exige, además de los conocimientos sobre la Matemática en sí, capacidad de redacción. Por ello, como instrumento de evaluación debería utilizar en combinación con otros lenguajes.

- El lenguaje mejor comprendido por los estudiantes y en el que obtuvieron más cantidad de respuestas correctas es el lenguaje gráfico. Se recomienda incrementar su uso en el aula.

- El autor pone a consideración de la comunidad académica el análisis comparativo entre la Gramática y la Matemática que elaboró como parámetro de referencia; y aunque no resultó aplicable dentro de la metodología de la investigación, sí podría servir de referente de comprensión para otras investigaciones similares.


---

* Proyecto de Grado
** Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación. Director: Dr. Gabriel Yánez Canal.

## ABSTRACT

**TITLE**
ANALYSIS OF UNDERSTANDING OF THE CONCEPTS OF FUNCTION BY STUDENTS OF ENGINEERING FROM A PRIVATE UNIVERSITY, USING TEXTS WRITTEN BY THEM[**].

**AUTHOR**
DÍAZ ARDILA, Héctor Hernando [**]

**KEYWORD**
Function, Potency Function, Natural Language, Algebraic Language, Geometric Language, Tabular Language.

**CONTENT**
Because of importance of Mathematics in the study of Engineer, we look for the way as students understand the mathematical concepts. For that matter, we chose the concept of function, for its great importance into Mathematics, both pure and applied.

Using algebraic, tabular and geometric languages suitable in Mathematics and considering that understanding act is detected in the ability of students for transferring mathematical concept from one to other languages, we analyzed the answers from students in these different languages.

As conclusions from this researching, we can emphasize the following ones:

- Verbal language is the best understood by students and it is normal because of being the way people normally communicate each other, but it is more or less imprecise applied to mathematical concepts when it is used alone. Likewise, for communicating mathematical concepts in verbal language, besides mathematical knowledge, abilities to redact texts are necessary. Therefore, it is recommended to be combined with else languages.

- The best understood language by students and in which they got more correct answers was in graphic language. We recommend to increase using this language in class.

- Author lease for consideration of academic community the comparative analysis between Grammar and Mathematics that he achieved as referential parameter. Although it was not applied into the methodology of this research, it may be useful as understanding reference for else similar researches.


---

[*] Project of Grade
[**] Faculty of Human Sciences; School of Education; Director: Gabriel Yáñez Canal Ph. D.

# INTRODUCCIÓN

Este documento contiene el informe final de la investigación *Análisis de la comprensión del concepto de* ***función*** *por estudiantes de ingeniería partiendo de textos producidos por ellos*, realizada a dos grupos de estudiantes del Primer Semestre de ingeniería de la Universidad Santo Tomás en la ciudad de Bucaramanga y cuyo tema está enmarcado dentro del ámbito de la didáctica matemática.

El contenido de este informe está estructurado como se explica a continuación: el numeral 1 se ocupa de plantear el problema que intenta resolver la investigación. Este ejercicio de análisis se hizo teniendo muy presente que la matemática cuenta con sus propios lenguajes. Se mencionan en este aparte las dificultades que enfrentan profesores y estudiantes de matemáticas al tratar, el primero de transmitir y el segundo de comprender los conceptos matemáticos, dada su alto nivel intrínseco de abstracción, propio de esta ciencia, sumado al deseo, a veces excesivo, de los profesores en mantener un alto grado de rigor, que dificulta la comprensión. El numeral 2 expone los antecedentes de otras investigaciones que se han ocupado de temas similares, como el uso del lenguaje verbal aplicado a matemáticas o el análisis de la comprensión, como la investigación sobre los apuntes de clase. El numeral 3 se ocupa del Marco Teórico de la investigación que está enfocado, por una parte, a las representaciones semióticas (algebraica, aritmética, geométrica y verbal) utilizadas en la matemática y la interacción entre ellas, al proceso de comprensión que se obtienen con estas representaciones al intercambiar un mismo objeto matemático de una representación a otra y a la representaciones interna mental (neosis) y externa (semiosis) que generan la comprensión. Igualmente se incluyen algunos ejemplos de representación semiótica de la matemática que se aplicarán en la metodología. El numeral 4 es propiamente la investigación en sí y allí se describen todos los procedimientos desarrollados, los resultados obtenidos junto con el procesamiento de esos resultados y algunos comentarios sobre aspectos relevantes de dichos resultados que sirvieron de base para las conclusiones que están contenidas en el numeral 5. Finalmente hay varios anexos que corresponden a los resultados de la aplicación de los instrumentos que se incluyen como documentos de consulta y soporte.

# 1. JUSTIFICACIÓN

Se busca con la presente investigación indagar la comprensión de los estudiantes, no tanto del concepto de función en sí como objeto matemático abstracto, sino del comportamiento de diferentes tipos de funciones, visto desde sus representaciones, que serán utilizadas por los estudiantes al dar respuesta a los instrumentos que se diseñaron y cuyo diseño estuvo orientado a inducir a los estudiantes a transferir estos objetos de un lenguaje a otro. En estos procesos jugará un papel primordial el lenguaje verbal que, para los efectos de la presente investigación, se ha escogido como instrumento principal de comunicación, tanto de expresión como de comprensión, en el sentido de que los estudiantes se verán exigidos, tanto a comprender el lenguaje verbal como a expresarse en ese lenguaje.

Aunque habrá análisis de textos, la investigación no será propiamente lingüística sino que utilizará los lenguajes, en general, y el lenguaje verbal en particular, como instrumento de análisis de la comprensión conceptual.

En cuanto a la pertinencia de la investigación, es claro que la comprensión de los conceptos matemáticos es un logro de la mayor relevancia para los estudiantes de ingeniería en cualquiera de sus ramas, debido a que la mayor parte de los saberes de su profesión están soportados en esta ciencia. Esta situación amerita cualquier esfuerzo que se haga en la profundización de su conceptualización, en el mejoramiento de su enseñanza y en la comprensión metacognitiva de su aprendizaje, que son los aspectos en los que está orientada esta investigación.

A pesar de lo anterior, la experiencia nos demuestra que los estudiantes de ingeniería tienen muchas dificultades para comprender conceptos matemáticos. Prueba de esto son las estadísticas de mortalidad académica que se presentan en las Facultades de ingeniería y a las que se hará referencia más adelante.

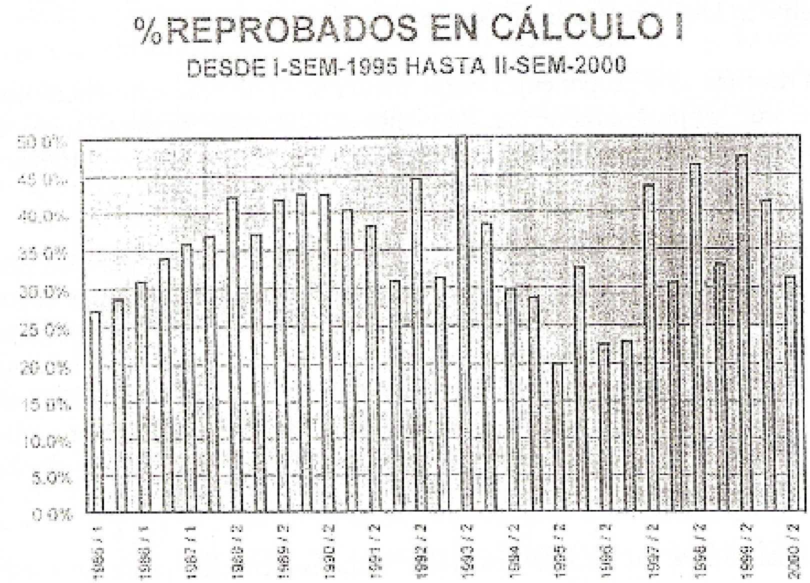
Una de las causas de estas dificultades es la deficiente enseñanza de las matemáticas en la Educación Media, que ha sido analizada con cierto detalle en un estudio de los profesores Álvarez y Marmolejo del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle, en el que manifiestan con preocupación que “la educación matemática en el bachillerato colombiano está lejos de alcanzar, en términos colectivos, los objetivos propuestos en tales programas.” (Álvarez y Marmolejo 1989). Pero no está en nuestras manos mejorar la enseñanza de las matemáticas en la Educación Media. Debemos partir de la situación real.

Para pulsar la situación de los estudiantes de ingeniería, se ha indagado en las estadísticas de mortalidad académica en Cálculo Diferencial en las instituciones de Educación Superior de la ciudad. No es fácil tener acceso a esta información porque las instituciones suelen guardar reserva sobre ello, pero por conducto del director de esta investigación, profesor Gabriel Yáñez Canal, se ha conseguido el *Informe Final* de un estudio dirigido por él relacionado con la enseñanza del Cálculo en la *Universidad Industrial de Santander* y que contiene datos estadísticos sobre mortalidad académica en las clases de Cálculo Diferencial.

De este informe se ha tomado un aparte que resume la idea central del estudio. Se ha subrayado lo más relevante para este trabajo:

Problema: Alta repitencia en los cursos de Cálculo I. Es un hecho conocido los deficientes resultados que obtienen en general los estudiantes de primer semestre en nuestras carreras de ingeniería. Estos resultados se manifiestan, en particular, en los cursos de Cálculo I. En el gráfico que se presenta a continuación se muestran los índices de reprobados en esta signatura en el periodo comprendido desde el I semestre de 1995 y el II semestre de 2000. Como se observa, estos índices oscilan entre 20% y 50%, siendo su valor medio 36.5%. Sin temor a equivocarnos afirmamos que estos niveles se han mantenido muy semejantes desde los inicios de la Universidad hasta nuestros días[1].

**Figura 1. Estadísticas reprobados Cálculo Diferencial UIS**




Fuente. YAÑEZ CANAL, Gabriel. (coord.) Informe final del programa: Seis horas semanales de clase directa, un primer paso hacia la implementación de una mejor manera de enseñar y Aprender el Cálculo. 2005, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Bucaramanga, Colombia. p. 2.

[1] YAÑEZ CANAL, Gabriel. (coord.) Informe final del programa: Seis horas semanales de clase directa, un primer paso hacia la implementación de una mejor manera de enseñar y Aprender el Cálculo. 2005, Universidad Industrial de Santander, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Bucaramanga, Colombia. p. 2.

## 2. FORMULACIÓN Y ANÁLISIS DEL PROBLEMA

El problema que se pretende plantear y resolver con la presente investigación se mueve alrededor de la íntima relación que existe entre las matemáticas, su didáctica y los lenguajes utilizados con ese fin, por una parte, y por la otra, el lenguaje como instrumento de comunicación humana en general y el lenguaje verbal en particular.

Es un hecho que las tendencias axiomáticas que vinieron a desembocar en lo que se llamó la *matemática moderna*, en su afán por lograr un gran rigor conceptual, buscando precisión y certeza en sus demostraciones, privilegiaron el lenguaje algebraico sobre las demás representaciones semióticas con que cuenta la matemática.

La notación algebraica de los conceptos matemáticos que conforman en sí todo un lenguaje, así sea en sentido metafórico,[2] fueron creados con ese específico fin. Son un conjunto de símbolos con significado preciso y que, combinados con una metodología y unos algoritmos que están claramente determinados en sus procedimientos, permiten ejecutar operaciones que en algunos campos han adquirido tal grado de complejidad, que sería imposible manejarlos de otra manera. Por estos motivos, el lenguaje algebraico es el instrumento lingüístico más idóneo para el manejo de conceptos matemáticos, porque fue creado para eso. Bastaría imaginar la dificultad que implicaría realizar operaciones matemáticas, así fueran las más elementales como la suma o la resta, utilizando el lenguaje verbal (“cinco más doce más veintitrés…”).

Por lo tanto, resulta perfectamente claro que el proceso de axiomatización de la matemática que se inició hace casi un siglo y que culminó con los trabajos de

[2] PIM, David. El lenguaje matemático en el aula, p. 31

David Hilbert (1900) y con los cuales se buscaba un máximo rigor en las demostraciones, con el fin de disipar ciertas dudas que habían puesto en evidencia los planteamientos de Russell y otros autores, se optara por acudir exclusivamente al lenguaje algebraico e incluso a crear un nuevo lenguaje complementario de igual o mayor precisión que éste, como fue el que nació con el Álgebra de Conjuntos, pieza fundamental de ese proceso.

Estas metodologías, tan eficaces en el campo de la sustentación lógica de la ciencia matemática, causaron efectos negativos en su Didáctica, porque llevaron el manejo de los procesos epistemológicos matemáticos a un grado de abstracción tal, que dificultó enormemente su comprensión. Y el lenguaje verbal que es, en apariencia tan “poco matemático”, cualquier cosa que eso signifique, no fue el único afectado. José Ismael Arcos Quezada lo expone con mucha claridad en su libro *Rigor o entendimiento*: *Un viejo dilema en la enseñanza de las matemáticas. El caso del Cálculo Diferencial*. Se cita la parte pertinente, subrayando lo más significativo:

> *(…) a partir de la primera mitad del Siglo XIX y como producto de continuos señalamientos sobre una supuesta falta de rigor, el Cálculo Infinitesimal fue sustituido gradualmente por la propuesta de Cauchy, que es la que, con algunas modificaciones, se enseña actualmente en las aulas. Esta sustitución ha tenido efectos negativos en el aprendizaje. (…) en la primera mitad del Siglo XX se indicaba que, para un buen (riguroso) aprendizaje de las matemáticas, incluso de la Geometría, <u>se debería prescindir de las figuras</u>.* [3]

Como puede verse, el lenguaje geométrico, plasmado magistralmente por Descartes en el plano que lleva su nombre y en otros instrumentos, como la recta real y el plano complejo, resultan desechados como instrumento didáctico, complicando innecesariamente la comprensión de las matemáticas por parte de los estudiantes.

---

[3] ARCOS QUEZADA, José Ismael. Rigor o Entendimiento: Un viejo dilema en la Enseñanza de las Matemáticas: El caso del Cálculo Infinitesimal. p. 79

Si eso pensaban los matemáticos de comienzo del siglo pasado sobre el lenguaje geométrico, que en ciencias como la economía y la estadística resulta tan funcional, no sólo como herramienta didáctica sino como metodología para el uso eficaz de las matemáticas, aportando la visualización del comportamiento de los fenómenos estudiados, ¿qué no habrían dicho estos matemáticos, si se les hubiese preguntado, sobre la pertinencia del lenguaje verbal usado en matemáticas? Sin duda habría respondido que es totalmente inadecuado.

Esa es la postura que se busca cuestionar, con el fin de rescatar las fortalezas pedagógicas y didácticas del lenguaje verbal, aunque reconociendo su ambigüedad en ciertos casos, apoyado en la idea de que el fin último de un curso de matemáticas es la comprensión de los conceptos y no la solidez de la estructura lógico-conceptual transmitida a los estudiantes. Al respecto George F. Simmons en el Prólogo de su libro *Ecuaciones Diferenciales* dice:

> *(…) prefiero, sin la más mínima duda, ser ocasionalmente impreciso pero inteligible, que adoptar una actitud perfectamente precisa e ininteligible. No tengo interés alguno en edificar una estructura matemática lógicamente impecable en la que definiciones, teoremas y demostraciones rigurosas se amalgamen entre sí en una mole desafiante que el lector ha de penetrar.*[4]

Este sano criterio de que el mensaje comunicativo del profesor a los estudiantes sea claro, homogéneo y coherente y sin ambigüedades semánticas y dobles significaciones (anfibologías) da pie para que sea pertinente revisar el vocabulario verbal de los conceptos matemáticos utilizado en matemáticas.

Es interesante tener en cuenta las consideraciones planteadas por David Pim en su libro ya citado: *El lenguaje matemático en el aula* cuando dice: "Entre las matemáticas y el lenguaje escrito hay una relación especial".[5] Esa *relación especial* es la que se debería analizar, de la mano del señor Pim, con más razón

---

[4] Simmondos, George F. Ecuaciones Diferenciales, p. 7.
[5] PIM, David, Opus citata, p. 13

cuando los autores de textos matemáticos suelen definir los conceptos en términos algebraicos (en fórmulas) pero utilizan poco las definiciones verbales.

Inicialmente se pensó que era conveniente establecer un determinado vocabulario estándar con sus respectivas definiciones que sirviera de referencia, pero cuando se diseñaron los instrumentos de investigación, se vio poco pertinente pedirles a los estudiantes que dieran definiciones literales de los conceptos porque estaríamos pasándonos al campo de la Gramática. Ese conjunto de palabras matemáticas se iba a llamar, *vocabulario institucional*, pero esa idea se suprimió.

El análisis hermenéutico de estos textos a la luz de los conceptos previamente establecidos permitió dar repuesta a la pregunta de investigación:

**¿Cómo se refleja la comprensión del concepto de *función* en textos producidos por los estudiantes?.**

PREGUNTAS DIRECTRICES. Para orientar el desarrollo de la investigación y dar respuesta a esta pregunta, se plantearon las siguientes preguntas directrices a las que se les hicieron algunos cambios como consecuencia de lo que se obtuvo en la investigación, teniendo en cuenta que las prácticas a las que fueron sometidos los estudiantes implicaron transferencias en doble vía de los conceptos de un leguaje a otro:

- ¿Qué tan pertinente es el lenguaje natural para representar objetos matemáticos?.

- ¿Qué tanto influye el discurso de aula en la comprensión del concepto de *función* en sus diversas representaciones?.

- ¿Qué tanto pueden los estudiantes explicar en lenguaje verbal el concepto de función partiendo de representaciones en otros lenguajes?.

- ¿Qué tanto comprenden los estudiantes un tema matemático representado en lenguaje verbal (natural) y cómo se refleja esa comprensión en las respuestas que dan en otros lenguajes?.

- ¿Qué tanta capacidad muestran los estudiantes al transferir un concepto de un lenguaje a otro sin alterar su contenido?.

## 3. ANTECEDENTES DE ESTA INVESTIGACIÓN

En cuanto a las investigaciones que se han encontrado sobre temas similares, no son muy numerosas las que buscan relacionar la didáctica (y el aprendizaje) matemáticos acudiendo al lenguaje verbal, ya sea como instrumento didáctico, o como instrumento de evaluación.

La investigación realizada por Carles Monereo, Reyes Carretero, Montserrat Castelló, Isabel Gómez y María Luisa Pérez Cabaní (1999) que aunque se refiere a las asignaturas de Lengua y de Introducción a la Didáctica de estudiantes de Primer Semestre de Magisterio en la Universidad Autónoma de Barcelona, una carrera muy diferente a la Ingeniería, que es la que cursan los estudiantes que serán investigados, sí se refiere específicamente a la utilización del lenguaje verbal como instrumento de evaluación y análisis de la comprensión.

La metodología consistió en tomar fotocopia de los apuntes a un grupo de estudiantes para analizar sus contenidos, grabar las exposiciones de clase y a partir de un Informe del Profesor sobre los objetivos y principales contenidos de la asignatura, realizar los análisis comparativos.

Por los contenidos, los apuntes de clase se agruparon así:

- Apuntes exhaustivos que recogían la mayor parte de la sesión
- Apuntes incompletos
- Apuntes selectivos elaborados a modo de resumen
- Apuntes con modificaciones importantes

Por otra parte se clasificaron según la literalidad de los contenidos así:

- Apuntes *literales*. Los estudiantes autores de estos apuntes se denominaron *copistas.*
- Apuntes *personalizados*. Los estudiantes se denominaron *estratégicos*.

Las preguntas contenidas en las entrevistas fueron las siguientes:

- ¿Qué son los apuntes y cuáles son sus objetivos?
- ¿Cuándo toma apuntes?
- ¿Cuáles son los principales condicionantes cuando toma apuntes?
- ¿Qué escribes cuando tomas apuntes?
- ¿Cómo tomas apuntes?
- ¿Qué efectos produce la toma de apuntes?
- ¿Cómo habría que tomar apuntes?

Las principales conclusiones de esta investigación fueron:

- Los estudiantes tienden a pensar que una clase es sólo una situación de transmisión de conocimientos y que *si poseen apuntes, poseen la clase*.
- Los estudiantes *copistas* aceptarían los apuntes de otros compañeros si fuesen claros y completos.
- Los estudiantes *estratégicos* piensan que mientras mejores sean los apuntes, menos tendrán que estudiarlos posteriormente, puesto que *mientras se anota, en parte se está aprendiendo*. Estos estudiantes no aceptarían apuntes de otros compañeros y consideran que los propios no le serían útiles para los otros.
- A los estudiantes *copistas* les molesta que cuando el Profesor explica un tema una segunda vez lo haga con otras palabras.
- Los estudiantes *estratégicos* prefieren que cuando el Profesor repita una explicación lo haga con otras palabras, para comprender mejor la idea, aunque no suelen tomar nota de la nueva explicación.

Cuanto más clara es la explicación del Profesor, más literales son los apuntes mientras que las explicaciones confusas les exige más esfuerzo.

Se encontró otra investigación titulada: “Los apuntes: una aproximación al razonamiento proporcional de los estudiantes de séptimo grado” desarrollada por la profesora Claudia Barajas Arenas para optar el título de Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Industrial de Santander. Busca esta investigación utilizar el recurso de los apuntes de clase de los estudiantes como instrumento de aprendizaje de matemáticas y lo aplica específicamente al razonamiento sobre el concepto de proporcionalidad. Partiendo de la elaboración de unas cartillas didácticas sobre el tema de proporcionalidad, los estudiantes elaboran unos textos que luego serán analizados por el investigador. Esta dinámica le permite analizar la comprensión y de esa manera y el texto escrito se convierte a la vez en instrumento de aprendizaje y de evaluación.

Las principales conclusiones de esta investigación son las siguientes:

- “Según los hallazgos de esta investigación, hay que favorecer las capacidades del estudiante (…) para realizar por sí mismo un apunte en el cual ponga en juego tareas metacognitivas básicas como la planificación y la evaluación.” [6]

- Debe favorecerse el ejercicio de la escritura en todas las asignaturas (como por ejemplo en matemáticas) y no solamente en la clase de Español. Para ello la investigadora cita los tres principios del movimiento “La escritura a lo largo del currículo” (*Writing across the curriculum WAC*).

    - Aprender a escribir es responsabilidad de toda la escuela. La escuela es una comunidad de aprendices.
    - Escribir es un instrumento epistemológico y no sólo un método de evaluación de conocimientos o de registro de la información.
    - Escribir es un proceso de elaboración de ideas.

[6] BARAJAS ARENAS, Claudia. Los apuntes: una aproximación al razonamiento proporcional de los estudiantes de séptimo grado. p. 27

Y hace finalmente la investigadora un comentario al que llama “confesión” que dice textualmente: “Quiero decir que los apuntes fueron para mí tan solo una excusa para invitar a los colegas a prestarle atención, siquiera por curiosidad, a la escritura de los estudiantes”. [7]

Ciertamente que es adecuado utilizar la escritura como recurso de aprendizaje para muchos saberes no necesariamente gramaticales o literarios y en este punto se identifican alrededor del mismo propósito la presente investigación con la que estamos comentando en este aparte: privilegiar el lenguaje verbal como instrumento pedagógico en temas matemáticos.

Finalmente se encontró, una investigación desarrollada recientemente (Parada, 2005) como Trabajo de Grado en la Especialización en esta misma universidad titulada: “La producción de textos: una alternativa para evaluar en matemáticas”.

Se trata de una investigación con niños y niñas estudiantes de matemáticas que están alrededor de los 10 años de edad, en la que se analiza un método de evaluación a través de la producción de textos en clase de matemáticas.

La metodología consistió en escoger un tema y pedirles a los estudiantes que escribieran un cuento, una poesía o una narración. Se trata de un enfoque lúdico que puede ser muy pertinente dentro del contexto de edad de los estudiantes analizados. Y a pesar de que la idea no es del todo descabellada para el contexto universitario, para el caso de estudiantes de ingeniería, resulta más apropiado que el estudiante elabore un texto argumentativo o expositivo y no narrativo, puesto que guarda más relación con el tipo de actividades propias de la profesión para la cual se está adiestrando.

[7] BARAJAS ARENAS, Claudia. Opus citata. p. 32

# 4. MARCO TEÓRICO

Se exponen en este capítulo las teorías que han servido de base para el diseño de la investigación, por una parte, de los instrumentos que se aplicarán y para el análisis de los resultados. Las ideas fundamentales alrededor de las cuales se ha estructura este Marco Teórico son: el lenguaje verbal (natural) como instrumento de comunicación y como indicador de comprensión de conceptos matemáticos y el concepto de comprensión enmarcado en la matemática.

## 4.1 EL CONCEPTO DE COMPRENSIÓN

Es necesario precisar un concepto que será fundamental para esta investigación: el concepto de *comprensión de los objetos matemáticos*.

Para la caracterización del concepto de comprensión se analizará los planteamientos de Anna Sierpinska en su libro "*Understanding in Mathematics*" y de James Hiebert y Thomas P. Carpenter (1992) en un texto titulado "*Learning and Teaching with understanding*".

El texto de Sierpinska es bastante extenso y no todos los temas son relevantes para esta investigación en igual grado. Por eso, esta aproximación a su pensamiento no será exhaustiva sino selectiva y se limitará a abordar algunas ideas sobre la relación entre comprensión y significado (*Understanding and Meaning*) y sobre las componentes y condiciones de un acto de comprensión (*Components and Conditions of an act of understanding*) que guarden relación con esta investigación.

Sierpinska analiza en qué consiste la comprensión y las diferentes formas que hay de comprender. Sobre este tema, tal vez la frase más representativa es la siguiente: "*Si el objeto de comprensión es un fenómeno natural, su comprensión deberá consistir en encontrar una explicación de por qué ocurre dicho fenómeno*"[8]

No siempre la comprensión que se analizará en esta investigación se referirá a fenómenos físicos, pero por tratarse de estudiantes de ingeniería, el análisis de fenómenos y específicamente la modelación matemática de dichos fenómenos es un tema muy importante en su carrera y, por lo tanto, cuando la matemática analiza o modela un fenómeno, la relación entre el comportamiento de la función (modelo matemático) y el fenómeno es un saber muy útil en ingeniería.

Dice Sierpinska que puede haber diversas clases de explicaciones a un fenómeno y, en consecuencia, diferentes formas de comprender. Alguien puede considerar que conoce una acción porque sabe cómo desempeñarla con éxito. Por otra parte, un fenómeno puede ser comprendido si se conocen sus componentes y la relación entre éstos. Pero en general, la mayoría de las veces el acto de comprender está relacionado con la pregunta: "¿por qué?" y la respuesta consiste en encontrar: las premisas, las razones, la causa de algo. Para muchos autores —dice Sierpinska— *comprender* es sinónimo de *comprender por qué*.

Viene a continuación una frase que merece algunos comentarios, relacionada con la diferencia entre *comprender* un concepto y conocer el procedimiento para llegar a determinado resultado que no es lo mismo.

*Entender cómo hacer algo, cómo desarrollar una acción práctica, qué hacer para obtener determinados resultados, de ninguna manera es comprender*.

---

[8] SIERPINSKA, Anna. Opus citata pag. 5. El texto original en Inglés dice así: "If the object of understanding is a phenomenon then its understanding may consist in finding an explanation of why the phenomenon occurs."

*(…) La comprensión no se orienta ni a los logros que se esperan de la acción ni a los medios que deban emplearse para obtenerlos.*[9]

Conviene matizar un poco el significado de esta idea y sus efectos sobre esta investigación. La capacidad de ejecutar lo que se podría denominar la "mecánica matemática" no demuestra que el estudiante haya comprendido el fenómeno. Simplemente se ha aprendido el procedimiento. Pero dentro del proceso de aprendizaje, las formas algorítmicas de solucionar los problemas matemáticos (como resolver un sistema de ecuaciones o despejar una variable, etc.) son de gran utilidad para el estudiante que aprende la matemática como herramienta. Saber cómo resolver una ecuación no es comprender el significado de esa ecuación, pero aun así, necesita aprenderlo.

Sobre los planteamientos de Sierpinska, Juan Godino, aparte de que coincide con esta diferenciación entre la comprensión de un concepto y su manejo, considera complementarias estas dos acciones. Dice así (se subrayan los dos conceptos referidos):

> *Veremos la conveniencia de atribuir un significado distinto y <u>complementario</u> a las nociones de <u>competencia</u> y <u>comprensión</u> matemática, relacionado con los componentes operatorio (praxémico) y discursivo del conocimiento, respectivamente. (...) existe una relación estrecha entre la <u>competencia</u> y la <u>comprensión</u> matemática, entre la práctica y la teoría.*[10]

Para el caso de la presente investigación, no se propone evaluar cuantitativamente la capacidad del estudiante para aplicar conceptos matemáticos en la resolución de problemas (competencia) sino analizar (no evaluar) la capacidad de exponer un concepto en lenguaje natural (capacidad discursiva) que es la que Godino denomina *componente discursivo de la comprensión.*

---

[9] SIERPINSKA, Anna. Opus citata, p. 5
[10] GODINO, Juan. Perspectiva semiótica de la competencia y comprensión matemática, p. 2

También se refiere Sierpinska a un tema de la mayor importancia para la didáctica de la matemática y muy pertinente para los fines de esta investigación y es el de las fortalezas pedagógicas de una buena notación matemática que "refuerza la comprensión, el pensamiento y el razonamiento matemáticos" y cita a Leibniz, un maestro de la notación matemática. La cita de Leibniz, a quien elogia diciendo que "es conocido por su fuerte convicción sobre las ventajas de una buena notación" dice que los símbolos no se deben escoger en forma arbitraria y que "un símbolo debe representar la naturaleza del objeto simbolizado".[11]

Vuelve luego a tocar el tema de la notación matemática ya mencionado y dice que "las ambigüedades que ocurren en la matemática no se deben a las definiciones sino al contexto" y a continuación concretiza esta idea con un ejemplo muy relevante.

Cuando no hay un signo entre dos símbolos, eso no significa por cierto que exista allí un signo implícito de multiplicación (por ejemplo, dx no significa "d por x".)[12]

En otro aparte se refiere al papel que juega la metáfora en la comprensión, tema interesante para orientar el discurso en el aula. Dice así:

Contrario a lo que se cree, el lenguaje figurado en un discurso no está encaminado a dar una imagen del objeto sino a llamar la atención hacia un aspecto importante de ese objeto. La figura es siempre para que el objeto se vea de cierta manera y no para hacerlo realmente visible."[13]

---

[11] SIERPINSKA, Anna. Opus citata, p. 8

[12] SIERPINSKA, Anna, Opus citata p. 21. El texto original en Inglés dice así: "When there is no sign between to symbols, it does not mean, however, that there is an implicit sign of multiplication there (for example, dx does not means d times x)"

[13] Sierpinska, Anna. Opus citata, p. 10. El texto original en Inglés dice así: "Contrary to what can be thought, figures of speech are not to give a 'picture' of something but to draw attention to some important aspect `to figure is always to see as, but not always to see or to make visible."

La metáfora, por su propia naturaleza, siempre es una aproximación al objeto representado expresada en lenguaje figurado y, por lo tanto, nunca será una imagen totalmente fiel de ese objeto. Es muy conveniente tener presente esta limitación del lenguaje figurado de las metáforas para que se aproveche su potencial pedagógico sin olvidar sus limitaciones epistemológicas.

Sigue profundizando en el tema y entra a tocar el punto que más interesa en esta investigación y que hace referencia exactamente a la metodología de pedirles a los estudiantes que expliquen *con sus palabras* un concepto matemático. Se trata de la diferenciación entre la 'representación conceptual' en filosofía y lo que ella llama la 'concepción' (*conception*) en matemáticas en el que se ha subrayado la idea que se relaciona específicamente con esta investigación:

> *La 'representación conceptual' en educación matemática se usa en un sentido que está más cerca de "verlo como si fuera" que de "verlo realmente como es". (…) Mientras la 'representación conceptual' se define como <u>lo que es expresable totalmente en palabras</u>, una concepción en cambio puede ser muy intuitiva, parcialmente visualizable y no necesariamente consistente o completa."* [14]

Si hacemos un paralelo con lo que en esta investigación se han llamado *definiciones gramático-matemáticas*, (página 57 de este informe) en las que se hizo una confrontación biunívoca entre definiciones gramaticales (sustantivo-adjetivo-verbo) y los correspondientes conceptos matemáticos (objeto matemático, propiedad matemática, operación matemática), Sierpinska hace algo similar cuando se refiere (cito sus propias palabras) a los "adjetivos asociados a la comprensión".

---

[14] SIERPINSKA, Anna, Opus citata, pag. 10. El texto original en Inglés dice así: " 'Conceptual representation' in mathematics education is used in a sense that is closer to 'seeing as' than to 'seeing'. While a conceptual representation is defined as expressible totally is words, a 'conception' maybe very intuitive, partly visual, and not necessarily consistent or complete."

Comienza manifestando que "decir que una persona 'comprende' algo es, como hemos visto, una expresión sumamente ambigua. Para aclararla, la gente utiliza toda clase de adjetivos" y a continuación enumera algunos ejemplos; pocos, es verdad, pero muy representativos. Los diagramaremos en forma esquemática tratando de reflejar las explicaciones de la autora.

**Tabla 1. Concepto de comprensión (Sierpinska)**

| CONCEPTO | IDEA FUNDAMENTAL | *IDEA OPUESTA* |
|---|---|---|
| Comprensión | Holística y figurativa (*configural*) | Procedimiento basado en reglas |
| | Cultural: Compartida por otros. (Sin. étnica) | |
| | Conceptual: Entendida como "verse como si fuera" | |
| | Espacial (Ej. Entender los números como referidos al tamaño relativo de las cosas, o como posiciones en la recta real, etc.) | |

Fuente. El autor

Hace luego Sierpinska una referencia (inevitable) a la semiótica, muy relacionada con lo que se acotará más adelante sobre Duval, en el que analiza lo que significa 'tener sentido". "Si algo tiene sentido —dice— es un signo, o también: signo es lo que tiene sentido, lo cual hace muy comprensible el concepto de signo".[15]

Sobre la didáctica de la matemática hace una referencia muy importante cuando dice (se subraya lo más pertinente):

> *La disciplina de la educación habla de la* comprensión *en general, cualquiera que sea el objeto a ser comprendido y formula principios de enseñanza a cualquier persona. Pero ha quedado claro hasta cierto punto que los métodos de enseñanza deben referirse a contenidos específicos porque es claro que el aprendizaje también se realiza sobre contenidos específicos.* <u>*Nuestra mente*</u>

---

[15] SIERPINSKA, Anna. Opus citata, p. 13. El texto original en Inglés dice así: "If anything has meaning, it is a sign. Or a sign is what has meaning. This makes the concept of sign very comprehensible."

*no funciona de la misma manera cuando estudia matemáticas que cuando estudia historia de la literatura.*[16]

Esta tesis es de la mayor importancia para contraponerla a la tendencia de los teóricos de la pedagogía que tratan de sentar bases genéricas de enseñanza sin tener en cuenta los contenidos. Pero es preciso entender en qué consiste propiamente la comprensión. Cita Sierpinska a su paisano Adjukiewicz que nos dice: *(…) una persona comprende una expresión cuando al escucharla dirige su pensamiento hacia el objeto y no hacia la palabra.*[17]

Comenta Sierpinska esta idea de comprensión ampliándola más allá de la comprensión de una expresión por medio de una *representación mental*. Reemplaza la palabra 'expresión' por la palabra 'objeto' y lo llama *objeto de comprensión* (*object of understanding*) y su representación la llama *base de comprensión* (*basis of understanding*).

Dadas estas explicaciones define luego los componentes de la comprensión que son:

- El sujeto que comprende (*the understanding subject*)
- El objeto de comprensión (*the object of urderstanding*)
- La base de la comprensión (*the basis of understanding*)
- La operación mental que enlaza el objeto y la base.

---

[16] SIERPINSKA, Anna. Opus citata, pag. 41.El texto original en Inglés dice así: "The general discipline of education spoke about understanding in general, whatever the object to be understood, and formulated principles of teaching any subject. It has become clear at some point that teaching methods must be content-specific because very clear learning is content-specific. Our minds do not function in the same way whether we study mathematics or the history of literature."

[17] Sierpinska, Anna. Opus citata, pag. 28. El texto original en Inglés dice así: (…) a person understands an expression if on hearing it he directs his thoughts to an object than the word in question.

Los dos primeros componentes son claros y no requieren definición. En cuanto a la base de la comprensión corresponde a la representación mental del objeto comprendido igual como lo entiende Duval, según se expondrá más adelante. Y la operación mental de unión entre los dos elementos es un acto equivalente a adjudicarle a un determinado objeto un cierto símbolo o signo. Lo que Duval denomina como *el significante* y *el significado*.

Complementan estos análisis otro aparte que la autora denomina textualmente "operaciones mentales involucradas en la comprensión" y que se expondrá a continuación. Sierpinska identifica cuatro operaciones mentales a saber:

- Identificación. Lo entiende como el acto de descubrir o reconocer el objeto de comprensión y le aplica otros sinónimos como 'develar' (*deveil*), 'aislar' (*isolate*), 'singularizar' (*single out*).
- Discriminación. "Discriminar entre dos objetos es identificarlos como distintos"[18] "Los conceptos de 'identificar' y 'discriminar' son muy similares —explica Sierpinska— a lo que Locke denomina coincidencias y discrepancias (*agreement and disagreement*) entre ideas". (Sierpinska, opus citata, pag. 57)
- Generalización. *Se entiende aquí por 'generalización' la operación mental por medio de la cual una situación dada (que corresponde al objeto de comprensión) se entiende como un caso particular de otra situación, entendiendo el concepto de 'situación' en sentido amplio —agrega Sierpinska— para que incluya diversas clases de objetos (materiales o*

---

[18] SIERPINSKA, Anna, Opus citata, p. 60). El texto original en Inglés de estas definiciones dice así: "Discrimination between two objects is an identification of two object as different objects. The meaning of 'identification' and 'discrimination' is close to what Locke calls 'agrement and disagrement' (between ideas). Generalization is understood here as the operation of the mind in which a given situation (which is the object of understanding) is thought of as a particular case of another situation. The term 'situation' is used here in a broad sense, form a class of objects (material or mental) to a class of events (phenomena) to problems, theorems or statements and theories. 'Synthesis' means for us here: the search of a common link, a unifying principle, a similitude between several generalizations and their grasp as a whole (a certain system)on this base.

*mentales), o diversos eventos (fenómenos), problemas, teoremas, asertos o teorías.* (Ídem)

- Síntesis. *La 'síntesis' significa para nosotros la búsqueda de un enlace común, de un principio unificador, de una similitud entre varias generalizaciones y la aprehensión como un todo (como una especie de sistema) con base en ese enlace.*

Por otra parte, James Hiebert (1992) expone el concepto de comprensión (*understanding*) haciendo referencia a lo que él llama 'representación interna y externa', conceptos que guardan una estrecha relación con lo dicho por Sierpinska. Lo expone de esta manera:

> *Para pensar y comunicar ideas matemáticas necesitamos representarlas de alguna manera. Y la comunicación nos exige que la representación sea externa, tomando la forma del lenguaje hablado, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. Una idea matemática particular casi siempre puede ser representada en alguna o en todas las formas de representación posibles.*[19]

Hasta aquí la referencia sobre la *representación externa*. En cuanto a la *representación interna* dice lo siguiente.

> *Para pensar ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente de tal manera que la mente pueda operar con ellas. Y como las representaciones mentales no son observables, la discusión sobre la forma como las ideas se representan en la cabeza se basa en un alto grado de inferencia.*[20] (Ídem)

---

[19] HIEBERT, James y otro. Learning and Teaching with understanding p. 66. El texto original en Inglés dice así: "To think about and communicate mathematical ideas, we need to represent them in some way. Communication requires that the representations be external, taking the form of spoken language, written symbols, pictures, or physical objects. A particular mathematical idea can often be represented in any one form or in all forms of representation."

[20] Ibid, p. 66. El texto original en Inglés dice así: "To think about mathematical ideas, we need to represent them internally, in a way that allows the mind to operate on them. Because mental representations are not observable, discussions of how ideas are represented inside the head are based on high degrees of inference.

De la misma manera que se dan estos dos tipos de representaciones (interna y externa), se dan —según Hiebert— conexiones internas y externas. Sobre las conexiones externas dice así:

> ***Conexiones externas****.(…) Las conexiones entre diferentes representaciones con frecuencia se basan en relaciones de similitud ("estos objetos se parecen de la siguiente manera…") y en relaciones de diferencia ("estos objetos se diferencian de la siguiente manera…").*[21]

Su definición de comprensión de objetos matemáticos está dada en los siguientes términos:

> *Comencemos por definir 'comprensión' en términos de la manera como es representada y estructurada la información. Una idea, un procedimiento o un hecho matemático ha sido comprendido, si forma parte de una red interna. En términos más específicos, la matemática es comprendida si su representación mental forma parte de una red mental de representaciones. El grado de comprensión se determina por la cantidad de conexiones y por la fortaleza de esas conexiones. Una idea, un procedimiento o un hecho matemático ha sido comprendido a cabalidad en la medida en que estén ligados de una manera más sólida y con una mayor cantidad de conexiones.* (Hiebert, 1992, p. 95 – 97.) [22]

Guarda mucha relación esta definición con el concepto de *conocimiento significativo* y se entiende como tal al conocimiento nuevo que guarda relación con lo que ya se sabe (presaberes). En la medida en que un nuevo conocimiento se integre con los presaberes, ese conocimiento es significativo, le interesa al sujeto y puede ser comprendido debidamente.[23]

---

[21] Ibid. p. 6.El texto original en Inglés dice así: "**External connections**: (…) Connections between different external representations are often base don relationships of similarity ("these are alike in the following way") and relationships of difference ("these are different in the following ways").

[22] El texto original en Inglés dice así: "We begin by defining understanding in terms of the way information is represented and structured. A mathematical idea or procedure or fact is understood if it is part of an internal network. More specifically, the mathematics is understood if its mental representation is part of a network of representations. The degree of understanding is determined by the number and strength of connections. A mathematical idea or procedure, or fact is understood thoroughly if it is linked to existing networks with stronger or more numerous connections.

[23] AUSUBEL, David, Psicología y Educación.

Igualmente se ve pertinente complementar estas consideraciones alrededor del concepto de *comprensión* con una definición de la autora ya citada, subrayando lo más pertinente para esta investigación.

*Muchos actos de comprensión pueden consistir no en representarse a sí mismo el objeto de comprensión sino en trasladarlo de una representación a otra.*[24]

Mucha relación guardan estos conceptos con los planteamientos sobre las representaciones semióticas de Raymond Duval (1995). Plantea Duval que “no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación” (Duval, R. 1999, p. 25) y hace especial énfasis en la importancia de diferenciar “entre representante y representado o al menos, entre forma y contenido de una representación semiótica. Esta diferenciación generalmente está asociada a la comprensión de lo que representa una representación (sic).”[25]
Y en cuanto al acto mismo de comprender, sólo es posible, nos dice Duval (1999) por medio de las representaciones semióticas de los objetos matemáticos que se desarrollan a través de tres funciones fundamentales: una primera función que guarda relación con el carácter social de los objetos matemáticos que es la *comunicación*. Una segunda función que es el *tratamiento,* relacionada con el desarrollo mismo de las matemáticas en el que se producen nuevas ideas alrededor del objeto analizado. Y finalmente la *objetivación* que es el acto de toma de conciencia del sujeto pensante sobre el objeto matemático pensado. La función de tratamiento se realiza a través de las *transformaciones de la información* que nos permiten obtener nuevas ideas no detectadas en la representación semiótica original.

---

[24] SIERPINSKA, Anna.. Opus citata, p. 52. El texto original en Inglés dice así: “Many acts of understanding may consist not in representing oneself the object of understanding, but in translating from one representation to another.”

[25] DUVAL, Raymond, Opus citata, p. 31

Algunos trabajos de Psicología Cognitiva y de Didáctica han destacado la importancia de estas diferentes representaciones semióticas y han evidenciado los siguientes aspectos.

La importancia de la relación entre los símbolos matemáticos y los contenidos. En este punto Duval trae una cita de Kaput (1987) que dice: "No es posible ninguna actividad matemático significativa sin contar con una forma material para expresarla".

- La gran diversidad existente de formas de representación para un mismo contenido representado.
- La importancia del cambio de forma de la representación por razones de la facilidad de manejo.

Duval da a entender que hay diversas formas de representar una misma cantidad y dependiendo de la representación que se utilice, su manejo es diferente, como por ejemplo, a la equivalencia entre representar la misma cantidad en notación fraccionaria (½) o en notación decimal (0.5) y a las diferencias y ventajas de manejo de cada cual en distintos casos. La diferencia entre sumar fraccionario y sumar decimales, por ejemplo.

Esta diversidad de representaciones no debe hacer pensar que se trata de conceptos diferentes sino de diferentes significantes del mismo significado. Por ello, nos dice Duval, "no puede haber comprensión de matemáticas si no se distingue un objeto de su representación."[26] (Duval, R. 1999, p. 14).

[26] DUVAL, Raymond. Registros Semióticos y aprendizajes Intelectuales, p. 14

El otro aspecto es que existen representaciones semióticas conformadas por símbolos y representaciones mentales y las primeras, dice Duval.[27], parecerían estar subordinadas a las segundas. Que la llamada *noesis*, que se ha denominado objetivación y que consiste en la construcción mental del concepto, gobierna a la *semiosis*, que corresponde a su presentación semiótica. Esto dice la teoría sicológica y pedagógica.

Pero en matemáticas la situación cambia. Así lo expone Duval (con un subrayado del Investigador agregado):

> *En matemáticas, las representaciones semióticas no sólo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma. En efecto, la posibilidad de efectuar tratamientos sobre objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótica utilizado. (...) Los procedimientos y su costo dependen del sistema de escritura escogido: escritura binaria, escritura decimal, escritura fraccionaria. Los tratamientos matemáticos no pueden efectuarse independientemente de un sistema semiótico de representación."* [28]

En otras palabras, el "cómo se hace" está supeditado al "cómo se escribe", o sea, al "cómo se representa" en el papel, porque la representación semiótica de los objetos matemáticos (externa) contribuye significativamente a su comprensión por su carácter visual. La complejidad de la Matemática y de sus algoritmos no permite que podamos manipularlos mentalmente. Eso sólo cuando se trata de operaciones muy elementales (sumas, restas, etc.).

Este concepto de comprensión, consistente en ser capaz de representar de diferentes maneras (diferentes lenguajes) un mismo objeto matemático. En este sentido, la utilización en clase de una sola representación de los objetos matemáticos no capacita al estudiante para diferenciar el significante del significado, ni para aplicar un mismo objeto matemático en situaciones reales

[27] DUVAL, Raymond. Ibid. p. 14
[28] Ibid. p. 15

diferentes a los ejemplos utilizados en la clase. Por eso dice Duval: “la comprensión de matemáticas requiere la coordinación de al menos dos registros se representación semiótica”. (Duval, 2001, pag. 2).

Esta coordinación de la que nos habla Duval, se logra capacitando al estudiante en las siguientes acciones:

- Un adecuado manejo de las representaciones semióticas de los objetos matemáticos una vez el estudiante se ha familiarizado con las diferentes representaciones y sus procedimientos de manejo.

- La identificación de los significantes de cada representación y su significado. Ej. Que a los significantes ½ y 0.5 les corresponde el mismo significado.

De ahí la importancia de que el estudiante sea capaz de transferir un objeto matemático de una representación a otra. De un significante a otro, destreza que será puesta a prueba en la investigación con los instrumentos que se aplicarán a los estudiantes.

De todo lo anterior es fácil concluir que esa diversidad de lenguajes para representar objetos matemáticos es precisamente la principal herramienta epistemológica, no sólo para representar dichos objetos sino para comprobar su comprensión porque en la medida en que el estudiante sea capaz de captar la idea de que está representando el mismo objeto en diversos lenguajes, separa los conceptos de *significante* y *significado*.

Finalmente se hace referencia a los componentes comunes entre el lenguaje y la matemática, que tiene a su vez su propio lenguaje. Como la enseñanza de las matemáticas, comprende contenidos y estrategias muy específicos y muy diferentes a los que se aplican en la enseñanza de otras asignaturas, se presentan algunas representaciones que se utilizan para representar los objetos matemáticos.

## 4.2 EL LENGUAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En cuanto al lenguaje utilizado en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, será conveniente analizar cómo se escribe la matemática desde el punto de vista del lenguaje y de los símbolos. Y aunque la investigación no será un estudio lingüístico ni semiótico a profundidad, sí se ocupará de realizar un análisis hermenéutico de los textos producidos por los estudiantes, con el fin de construir de allí los conceptos contenidos en dichos textos y analizar las diversas representaciones semióticas que se utilizan en el manejo de los conceptos matemáticos y que nos permiten comprenderlos y utilizarlos, teniendo en cuenta la interacción que tienen entre sí estas representaciones y la función que cumplen en el aprendizaje de las matemáticas.

**Representaciones semióticas de las matemáticas.** Las matemáticas cuentan con diferentes formas de representación semiótica que permiten expresar los conceptos matemáticos, pero es la representación algebraica la que mejor nos permite plasmar los conceptos de una manera más clara y precisa, condición indispensable de esta ciencia. Las más utilizadas por los libros de texto de matemáticas son las siguientes:

- Representación tabular (tabla de valores)
- Representación algebraica (con una fórmula)
- Representación geométrica (con una gráfica)

Pero transversal a estas representaciones semióticas está el lenguaje natural (oral y escrito) con el que se explica de una manera más comprensible la significación y comportamiento de los conceptos expresados en las otras representaciones mencionadas.

Estas opciones de representación matemática las expone el profesor James Stewart en su libro "Cálculo: textos y contextos" que es texto en muchas universidades, en el numeral correspondiente a la representación de las funciones, con algunos cambios de denominación; y no sólo incluye también el lenguaje verbal sino que lo coloca de primero y agrega este comentario que es de gran importancia para los efectos de esta investigación:

*Si una sola función se puede representar de las cuatro maneras, a menudo resulta útil pasar de una representación a otra, para adquirir un conocimiento adicional de esa función.*[29]

Aunque el lenguaje natural (oral y escrito) es el menos *matemático*, cualquier cosa que esto signifique, es el lenguaje por excelencia en la comunicación humana; pero tiene la limitación de que con él no se pueden realizar operaciones matemáticas. Sin embargo, cuenta con la gran fortaleza de que puede desbordar sus propias fronteras y explicar los conceptos expresados en los otros tres lenguajes. Por medio de las palabras se plantean los problemas (matemáticos y no matemáticos); por medio de las palabras se explica y soporta argumentativamente la relación entre la información suministrada (datos) y las condiciones dadas, que serán "traducidas" a fórmulas y, finalmente, por medio de las palabras se interpretan el significado y la equivalencia real de los resultados obtenidos. Las fórmulas y algoritmos hacen la labor "mecánica" del proceso, pero son las palabras las que lo explican, vale decir, las que le dan sentido y aplicabilidad a los resultados. Al respecto Duval (2004) dice: "En la enseñanza de las matemáticas, el empleo del lenguaje natural es fundamental". (Duval, R. 2004,

[29] STEWART, James. Cálculo: Conceptos y contextos, p. 15

p. 27) y dice en otro aparte que "la potencia del lenguaje natural radica en el hecho de que es el sistema semiótico que permite cumplir en un mismo acto intencional todas las grandes funciones discursivas."[30]

## 4.3 PAPEL CONCEPTUAL DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

Cada uno de estas representaciones cumple su propio papel así:

**Representación tabular**. Es la que se expresa con números, que se manipulan por medio de los llamados operadores aritméticos y que son; suma (+), resta (-), multiplicación (X), división (÷), potenciación $(\ )^n$ y radicación $\sqrt{\ }$. La ciencia que normatiza estas operaciones se llama Aritmética. Los resultados de estas operaciones son siempre números. Cuando se toma una fórmula algebraica, se le dan valores a unas variables para calcular otras como se hace una tabla de valores, se puede de que se trata de la representación tabular de la fórmula algebraica.

Mientras que el Álgebra expresa fórmulas literales válidas para muchas situaciones, la Aritmética se ocupa de casos particulares y da los resultados concretos de estas situaciones. Históricamente el Álgebra concibió la generalización de los objetos matemáticos analizados por la Geometría (representación geométrica) y la Aritmética (representación numérica), que nació, ésta última, para contar los objetos, para agruparlos y para determinar sus costos y su precio.

**Representación algebraica**. Es la que se expresa a través de fórmulas conformadas por letras que representan las variables o los parámetros y números, que son manipulados con los operadores aritméticos ya mencionados y

---

[30] DUVAL, Raymond, Semiosis y Pensamiento Humano. P. 20.

con los operadores algebraicos que siguen reglas fijas, invariables y sin excepciones. Estas reglas son aplicables a otras ramas de las matemáticas como la Trigonometría y el Cálculo en todas sus modalidades. El lenguaje y los algoritmos algebraicos son la más poderosa herramienta matemática puesto que maneja los objetos matemáticos de una forma general y abstracta, lo cual permite hacerlos aplicables a múltiples situaciones y fenómenos específicos de muy variada índole. Es de todos sabido que las demostraciones de los teoremas, incluidos los que se refieren a conceptos geométricos, se realizan en lenguaje algebraico.

**Representación geométrica**. Es la que permite representar las cifras aritméticas por medio de puntos sobre un plano y las fórmulas algebraicas, trigonométricas y del Cálculo, muy particularmente las que se conocen como funciones (representación algebraica). Forman parte también de esta representación los esquemas, las figuras planas o tridimensionales y otras representaciones pictóricas que se elaboran como elemento auxiliar del texto matemático escrito.
Así como el lenguaje algebraico es la gran herramienta para las demostraciones, a su vez el lenguaje geométrico es un instrumento que ayuda significativamente a los estudiantes a comprender los conceptos y a los usuarios de la matemática a visualizar el comportamiento de los fenómenos, puesto que permite visualizar el comportamiento de los procesos matemáticos, particularmente en el caso de las funciones.

**Representación en lenguaje natural**. Es la que más ayuda a clarificar los conceptos, como ya se dijo, pero en el aula de matemáticas, la realidad es que ninguna de las explicaciones verbales se da por escrito, entre otras razones, porque sería muy lento escribir textos en el tablero e igualmente lenta sería su lectura por los estudiantes. Lo más frecuente es que se transmitan oralmente y de la misma manera se dan las respuestas a las preguntas de los estudiantes, con algunas eventuales anotaciones en el tablero en ciertos casos. Luego el estudiante, fuera de aula, tiene que enfrentarse a la solución de los problemas sobre el tema explicado, pero ya no contará con las explicaciones verbales del profesor que orientaron los pasos del proceso y le dieron sentido a las fórmulas. La situación que todos los estudiantes han vivido y sufrido es que los ejercicios que hace el profesor en clase se ven muy fáciles, porque el profesor, que seguramente no escoge los más difíciles, para que la clase no sea demasiado larga y pesada, conoce a fondo el tema, porque ha estado trajinando con él una otra vez y sabe por dónde se comienza, cómo se continúa, cómo acaba y un orden de magnitud del resultado. Cuando pone a los estudiantes a realizar el ejercicio en clase, responde las preguntas verbalmente. Pero fuera del aula, sin el apoyo explicativo del profesor, el estudiante encuentra muy difíciles los temas y tiene serios tropiezos en su desempeño, así se trate de situaciones similares a las expuestas en el aula y alrededor del mismo tema.

En cuanto a la metodología de acudir al lenguaje natural como instrumento de representación de conceptos matemáticos, hay un documento que resulta muy pertinente para esta investigación en varios aspectos: como soporte teórico, como antecedente, aunque no se trate propiamente de una investigación sino de recomendaciones didácticas relacionadas con la comprensión de conceptos matemáticos y su respectiva evaluación y, lo más importante, como metodología en el sentido de que enlaza lenguaje natural y lenguaje matemático de una forma similar a como se hizo en la presente investigación. El texto, que por cierto es muy breve, es de Larry Buschman (1995) y se titula “El Lenguaje matemático en el aula”.

Se transcriben algunos apartes que dan la idea del pensamiento y de las propuestas del autor en esta materia y se subraya lo que esté directamente relacionado con el objetivo de esta investigación:

*El uso de la comunicación oral y escrita como una herramienta con la cual los alumnos puedan reflejar su comprensión de las matemáticas les ayudará a personalizar y realizar conexiones entre los conceptos matemáticos. Cuando los alumnos comunican información matemática, la recuerdan, la entienden y la usan para descubrir y encontrar más información.*[31]

Más adelante el autor expone algunas "Técnicas de comunicación matemática" orientadas hacia el ejercicio de "traducir" conceptos matemáticos de un lenguaje a otro. Recomienda las siguientes técnicas:

*TÉCNICA 1. Presente un problema y su respuesta como provenientes de una persona imaginaria y pida a los estudiantes que envíen una carta hipotética a esa persona expresando su opinión sobre la solución dada al problema.*
*TÉCNICA 2: Presente un problema resuelto con un error significativo y haga que sus alumnos lo descubran.*
*TÉCNICA 3: Presente un problema y haga que los alumnos formulen una pregunta nueva sobre él.*
*TÉCNICA 4: Presente un problema y una solución parcial y haga que los alumnos la completen.*
*TÉCNICA 5: Presente un problema con datos que no tienen que ver con la pregunta y haga que los alumnos identifiquen lo pertinente y eliminen lo innecesario.*
*TÉCNICA 6: Presente un problema y haga que los estudiantes expliquen cómo resolverlo usando sólo palabras.*[32]

Estas "técnicas" son muy similares a las que se utilizaron en esta investigación como quedará explicado en la Metodología.

El análisis hermenéutico de los diferentes tipos de textos producidos por los estudiantes estará orientado por las metodologías del Análisis del discurso de algunos teóricos que han estudiado el tema de quienes se exponen a continuación algunas ideas.

Como en los instrumentos diseñados para recoger la información de esta investigación habrá actividades de comprensión de lectura de textos, es importante definir una pauta para detectar cuándo hay comprensión al leer un texto por parte de los estudiantes y cuándo no lo hay, para lo cual es pertinente

[31] Coincide esta consideración con lo planteado por Duval, en el sentido de que al transferir un objeto de una representación a otra, se obtiene información nueva. (Nota de investigador)
[32] Buschman, Larry. El lenguaje matemático en el aula. p. 324-329

transcribir lo que dice Lisette Poggioli: "*Nadie puede explicar con sus propias palabras algo que no ha comprendido.*".[33] Dicho al contrario: si un lector se limita a repetir en palabras textuales lo que ha leído, podemos estar seguros de que no ha comprendido el texto. Igualmente esclarecedora es la forma como lo plantea Adler Mortimer hablando de comprensión de lectura en su libro "*Cómo leer un libro*". Se ha resaltado en negrilla lo más relevante: "Recomendamos al lector que elija algunas de las oraciones complicadas que aparecen en este libro e intente **expresar con sus propias palabras** cada una de las afirmaciones que se enuncian[34]

Y a continuación justifica su afirmación:

Expresarlas con sus propias palabras nos parece la mejor prueba para saber si se ha comprendido la proposición o proposiciones de la oración.

> (…) *Si cuando se nos pide que expliquemos lo que quiere decir un escritor con una frase concreta, lo único que podemos hacer es repetir sus palabras, con pequeños cambios en el orden, existen razones para sospechar que no sabemos a que se refiere. Idealmente, el lector debería ser capaz de decir lo mismo con palabras diferentes. La idea, por supuesto, puede aproximarse en diversos grados, pero si el lector no es capaz de variar en absoluto las palabras del autor, quedará demostrado que entre ambos se ha producido* ***un intercambio de palabras, no de pensamiento o de conocimiento****. El lector conoce las palabras del escritor, pero no su mente. Éste trataba de comunicar conocimiento, y lo único que ha recibido aquél es palabras. (En este párrafo, la negrilla es del autor)*[35]

Y a continuación el autor entra a ocuparse de lo que significa traducir de un idioma a otro, asunto que guarda mucha relación con el esfuerzo de los estudiantes de "traducir" una representación matemática, como lo expone Anna Sierpinska cuando asimila la comprensión de un concepto con el acto de

---

[33] POGGIOLI, Lissette. Estrategias de adquisición de conocimiento, p 3
[34] ADLER, Mortimer y DOREN Charles van. Cómo leer un libro, p. 134.
[35] Ibid, p.

“trasladarlo de una representación a otra”.

> *El proceso de traducción de una lengua extranjera tiene relevancia con respecto a la prueba que acabamos de sugerir. Si el lector no puede enunciar con una oración en su propia lengua lo que dice otra en Francés, por ejemplo, significa que no comprende esta última, pero incluso si la comprendiese, la traducción estaría limitándose al nivel verbal, porque aunque haya construido una reproducción fiel en su propia lengua, quizá no sepa que quería transmitir el autor de la oración original.*
>
> *(…)*
>
> *El autor puede expresar la misma proposición con distintas palabras a lo largo del texto. El lector que no ha logrado traspasar las palabras y llegar hasta la proposición que expresan aquellas, probablemente tratará las oraciones equivalentes como si fuesen enunciados de proposiciones distintas.*

Y a pesar de que el libro de Adler no tiene nada que ver con matemáticas, trae a continuación un ejemplo matemático muy pertinente para esta investigación. Dice así:

> *Imaginemos que una persona no sabe que «2 + 2 = 4» y que «4 - 2 = 2» son notaciones diferentes de la misma relación aritmética; la de cuatro como el doble de dos o dos como la mitad de cuatro.*
>
> *Llegaríamos a la conclusión de que esa persona sencillamente no entiende la ecuación. La misma conclusión que sacaría el lector que no supiera cuándo se presentan enunciados equivalentes de la misma proposición o que no pudiera ofrecer por sí mismo un enunciado equivalente a pesar de asegurar que comprende la proposición que contiene la oración.* [36]

Los anteriores planteamientos dan una base teórica para estructurar los criterios que se aplicarán al evaluar el grado de comprensión conceptual de los estudiantes y que estará muy relacionado con la capacidad de “traducir” conceptos matemáticos de un lenguaje a otro (conexiones) y expresar en el mismo lenguaje verbal y “en sus propias palabras” algo que ha leído.

[36] ADLER, Mortimer y DOREN Charles van, Opus citata. p 135

Se tomarán los planteamientos de Anselm Strauss y Juliet Corbin (1998) que se ocupa de la metodología de codificación y análisis de la información para construir los conceptos contenidos en un texto.

Describen estos autores una secuencia de análisis que se inicia con la *codificación abierta*, que recoge de manera libre los conceptos más relevantes y frecuentes (representados en palabras) en relación con el tema tratado. Luego las compara, las agrupa y conforma la *codificación axial* que será tomada como base de análisis del texto.

# 5. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

## 5.1 INTRODUCCIÓN

Este numeral comprende una descripción detallada de la forma como se realizó la investigación en cuanto al diseño de los instrumentos, los resultados obtenidos y el procesamiento y análisis aplicado a esos resultados, todo soportado en los respectivos marcos teóricos.

Como se trataba de poner a prueba la capacidad de los estudiantes para comprender el concepto de función utilizando el lenguaje verbal, se buscó que por medio de la comunicación profesor/estudiantes, que es la comunicación más frecuente en el aula, el lenguaje verbal fuera en unos casos lenguaje-origen y en otros lenguaje-destino de esa comunicación, para analizar no solamente la capacidad de los estudiantes para representar en palabras el concepto de función, sino también la capacidad de comprensión verbal.

Y partiendo de la conveniencia, expuesta en el Marco Teórico, de transferir los conceptos matemáticos de un lenguaje a otro para lograr y para medir comprensión, se involucraron también los otros lenguajes utilizados en matemáticas: el lenguaje algebraico, el lenguaje aritmético y el lenguaje gráfico.

## 5.2 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

**5.2.1 Objetivo General.** Analizar la comprensión del concepto de *función* por parte de los estudiantes de Ingeniería de una universidad privada que cursan Cálculo Diferencial, partiendo de textos en lenguaje natural producidos por ellos.

### 5.2.2 Objetivos Específicos.

- Indagar sobre las definiciones universalmente aceptadas por la comunidad académica alrededor de la idea de *función* y de los conceptos relacionados con esta idea, con el fin de construir alrededor de estos conceptos lo que se llamará *Vocabulario institucional.*
- Analizar la influencia que pueda tener el discurso de aula en la comprensión del concepto de *función*.
- Analizar la forma como comprenden los estudiantes el concepto de *función* utilizando el lenguaje natural, como lenguaje origen y como lenguaje destino.

## 5.3 METODOLOGÍA UTILIZADA

Se trabajó con dos grupos que se denominaron: Muestra A y Muestra B. Estos grupos conformaban la totalidad del curso de Primer Semestre de la carrera de Ingeniería de Telecomunicaciones en dos semestres consecutivos. En ambos casos se invitó a todo el grupo a participar y las actividades formaron parte de una clase normal.  Salvo casos de ausencia por fuerza mayor que se registró en los informes, todo el grupo participó.

MUESTRA A: A los estudiantes de la Muestra A (16 en total) el profesor les hizo una exposición sobre la función identidad y sobre la función constante.

Y para responder a la pregunta de investigación planteada al comienzo sobre qué tanto influye el discurso de aula en las respuesta de los estudiantes, se grabó esta exposición de aula, se tomaron fotografías de lo escrito por el profesor en el tablero y se recogieron fotocopias de los apuntes libremente tomados por los estudiantes, sin haberles anunciado previamente que se recogería dicho material. De acuerdo con la metodología escogida, los apuntes sólo se utilizaron para corroborar lo escrito en el tablero en caso de duda pero no fue motivo de análisis hermenéutico.

Se transcribieron a texto escrito estas grabaciones al que se le insertaron las fotografías y a cada una se le hizo un esquema para mayor facilidad de lectura.

(Véase la trascripción de la grabación con las fotografías y esquemas en el Anexo A).

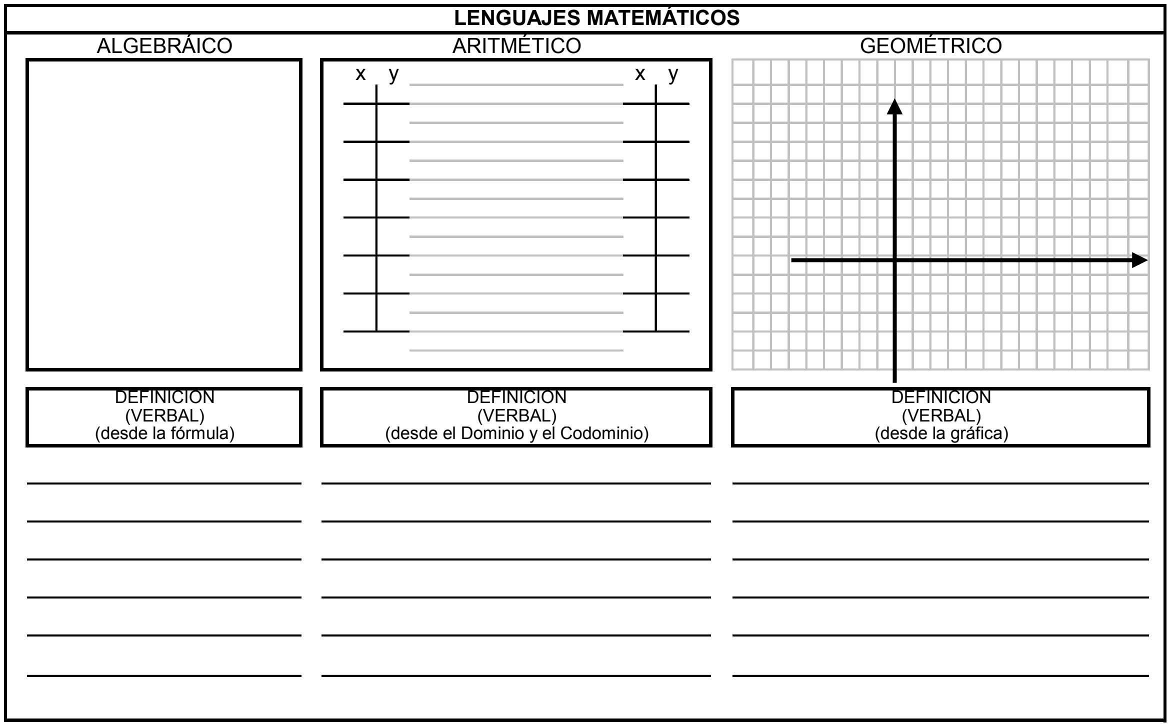
Para esta clase, el profesor utilizó la plantilla que acostumbra utilizar para exponer este tema y que está dividida en tres columnas a saber:

- Lenguaje algebraico
- Lenguaje aritmético
- Lenguaje geométrico

Esta plantilla tiene unos renglones debajo de cada representación para escribir en lenguaje verbal (natural) comentarios y explicaciones sobre cada representación.

En la clase, el profesor explicó de manera interactiva con los estudiantes las funciones Constante e Identidad, utilizando para ello un acetato con la misma plantilla que aparece a continuación, proyectada sobre el tablero con el fin de escribir sobre ella llenando los espacios.

**Tabla 1. Instrumento 1**




Fuente. El autor

En la parte superior de cada columna se representa la función y en los renglones de la parte inferior se escriben los comentarios sobre lo observado arriba.

En esta plantilla se representaron estas dos funciones (identidad y constante): en lenguaje algebraico (fórmulas), en lenguaje aritmético (tabla de valores) y en lenguaje geométrico (gráfica); luego, guiados por el profesor y para cada una de las funciones, se invitó a los estudiantes a expresar verbalmente lo que pudieran observar sobre el comportamiento de cada una de estas funciones, partiendo cada una de las representaciones y el profesor las fue escribiendo en la columna correspondiente, debajo de cada representación.

Cumplida esta parte del ejercicio, a los estudiantes se les entregó una plantilla igual y que llamaremos **Instrumento No. 1** y se les pidió verbalmente que hicieran el mismo ejercicio con la función potencia de exponente 2, o sea, la función cuadrática, para lo cual se les dio la fórmula:

$$f(x) = x^2$$

Debían hacer tres actividades:

ACTIVIDAD UNO.[37] Calcular los valores (Representación tabular. Columna central).

ACTIVIDAD DOS. Dibujar la gráfica (Representación geométrica. Cuadrícula derecha).

ACTIVIDAD TRES. Hacer comentarios verbales sobre cada representación en los renglones correspondientes (Representación verbal).

MUESTRA B. A los estudiantes de la Muestra B (19 en total) se les suministró directamente el documento guía que llamaremos **Instrumento No.2** y el procedimiento consistía en que ellos no recibirían ninguna otra explicación aparte de lo que estaba contenido en ese instrumento. Se trataba de que los estudiantes se guiaran en su ejercicio exclusivamente por información dada en lenguaje verbal escrito. No se contestaron preguntas ni los estudiantes conocían el tema que iban a desarrollar y que se refería a *transformación de funciones.* Para mejor ilustración de la presente explicación, en la página siguiente se transcribe el **Instrumento No. 2.**

---

[37] Se han identificado estas actividades con letras (uno, dos, tres) para diferenciarlas de las actividades del Instrumento 2. (Nota del Investigador)

**INSTRUMENTO No.2** [38]

**TALLER DE TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES**

Profesor: Héctor Hernando Díaz A.

| |
|---|
| INSTRUCCIÓN GENERAL: Lea todo el texto antes de comenzar a contestarlo. Si tiene alguna duda, pregunte. Una vez se hayan respondido todas las preguntas, se empezará a contar el tiempo. |

TEMA: Transformación de las funciones y su efecto sobre la gráfica.

Símbolos utilizados:

En la expresión *f(x)*
*f* indica que se trata de una función
*x* es la variable independiente de esa función
La expresión se lee: "*f de x*" o "*función de x*".
*a, b, c, k*: son constantes

ACTIVIDAD 1: Complete las descripciones faltantes: (tiempo 5 minutos)

| NO. | TRANSFORMACIÓN | DESCRIPCIÓN |
|---|---|---|
| | $f(x)+c$ | Sumarle la constante 'c' a la función |
| | $f(x+b)$ | (Siguiendo el ejemplo de la primera fila, dé una descripción en palabras de esta transformación sin utilizar números, ni fórmulas matemáticas.) |
| | $af(x)$ | (Siguiendo el ejemplo de la primera fila, dé una descripción en palabras de esta transformación sin utilizar números, ni fórmulas matemáticas.) |
| | $f(kx)$ | (Siguiendo el ejemplo de la primera fila, dé una descripción en palabras de esta transformación sin utilizar números, ni fórmulas matemáticas.) |

[38] Se aclara que la plantilla suministrada a los estudiantes tenía más espacio para las respuestas que en este informe se omite por economía. (Nota del Investigador)

ACTIVIDAD 2: (tiempo disponible: 10 minutos)

| |
|---|
| INSTRUCCIÓN GENERAL: Lea todo el texto antes de comenzar a contestarlo. Si tiene alguna duda, pregunte. Una vez se hayan respondido todas las preguntas, se empezará a contar el tiempo. |
| Tome la función potencia: $f(x) = x^2$<br>Para poder dibujar la gráfica, representemos la función con la variable '*y*'. La ecuación se nos convierte en:<br>$y = x^2$ |
| Con esta fórmula, los valores de los parámetros *a, b, c, k* que aparecen en la TABLA DE PARÁMETROS y los valores de "*x*" del cuadro de TRANSFORMACIONES que aparece a continuación, calcule '*y*' para cada caso. |

TABLA DE PARÁMETROS
INSTRUCCIÓN: Agregue las fórmulas que faltan, reemplazando las constantes *a, b, c, k* con los siguientes valores:
$a=2$
$b=3$
$c=5$
$k=2$
Calcule los valores de *y* para cada caso y escríbalos en las casillas del cuadro que aparece a continuación.

| $x$ | TRANSFORMACIONES | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $f(x)$ | $f(x)+c$ | $f(x+b)$ | $af(x)$ | $f(kx)$ |
| | $y=x^2$ | | | | |
| -3 | | | | | |
| -2 | | | | | |
| -1 | | | | | |
| 0 | | | | | |
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | | | | | |

INSTRUCCIÓN: Agotado el tiempo, el estudiante entregará lo que haya desarrollado en las ACTIVIDADES N° 1 y 2.

ACTIVIDAD 3 (tiempo disponible: 15 minutos)

INSTRUCCIÓN: A continuación aparece el mismo formulario anterior totalmente diligenciado, calculado en un intervalo mayor [-6, 6] y las Instrucciones para desarrollar al

ACTIVIDAD NO. 3.

| X | TRANSFORMACIONES | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | No. 1 | No.2 | No.3 | No.4 | No.5 |
| | *f(x)* | *f(x)+c* | *f(x+b)* | *af(x)* | *f(kx)* |
| | $y=x^2$ | $y=x^2+5$ | $y=(x+3)^2$ | $y=2x^2$ | $y=(2x)^2$ |
| -6 | y=36 | y=39 | y=9 | y=72 | y=144 |
| -5 | y=25 | y=30 | y=4 | y=50 | y=100 |
| -4 | y=16 | y=21 | y=1 | y=32 | y=64 |
| -3 | y=9 | y=14 | y=0 | y=18 | y=36 |
| -2 | y=4 | y=9 | y=1 | y=8 | y=16 |
| -1 | y=1 | y=6 | y=4 | y=2 | y=4 |
| 0 | y=0 | y=5 | y=9 | y=0 | y=0 |
| 1 | y=1 | y=6 | y=16 | y=2 | y=4 |
| 2 | y=4 | y=9 | y=25 | y=8 | y=16 |
| 3 | y=9 | y=14 | y=36 | y=18 | y=36 |
| 4 | y=16 | y=21 | y=49 | y=32 | y=64 |
| 5 | y=25 | y=30 | y=64 | y=50 | y=100 |
| 6 | y=36 | y=41 | y=81 | y=72 | y=144 |

INSTRUCCIÓN: Dibuje las cinco (5) gráficas como está indicado en las cuadrículas anexas: Las Gráficas Nos. 1-2-3 en la primera cuadrícula y las Nos. 4-5 en la segunda. A cada curva deben escribirle la fórmula para identificarla. Si algún punto no cabe en la cuadrícula, omítalo.[39]

[39] Este instrumento incluía a continuación dos hojas de cuadrículas donde el estudiante debía dibujar las cinco gráficas con estos datos. (Nota del Investigador)

ACTIVIDAD 4: En la columna de la derecha describa con sus propias palabras y sin utilizar fórmulas ni símbolos matemáticos lo que le sucedió a la gráfica original en cada una de las transformaciones.

| TRANSFORMACIÓN | DESCRIPCIÓN<br>(¿Qué cambio sufrió la gráfica?) |
|---|---|
| NO. 1<br>$f(x)+c$ | |
| NO. 2<br>$f(x+b)$ | |
| NO. 3<br>$af(x)$ | |
| NO. 4<br>$f(kx)$ | |

Como puede verse en el propio instrumento, los estudiantes debían realizar cuatro actividades pero para cada una, sólo conocían la respectiva instrucción en el momento de realizarla. Los estudiantes fueron recibiendo el instrumento actividad por actividad. Las actividades fueron las siguientes:

**ACTIVIDAD 1. Explicación verbal**. (Del lenguaje algebraico al lenguaje verbal): Describir en palabras cada una de las transformaciones realizadas a la función (del lenguaje algebraico al lenguaje verbal). Partiendo de la función potencia básica [$f(x)= x^2$] y de las constantes *a. b. c* y *k,* se le pidió explicar “con sus propias palabras” cada una de las siguientes transformaciones:

$f(x)+c$

$f(x+b)$

$af(x)$

$f(ax)$

**ACTIVIDAD 2**. **Fórmulas**. Escribir la fórmula correspondiente a cada transformación (interpretación y representación en lenguaje algebraico). Partiendo de las fórmulas esquemáticas suministradas en la actividad anterior, el estudiante debía montar las fórmulas y calcular los valores de la función tomando para la variable independiente los valores que estaban escrito en el instrumento: (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3).

**ACTIVIDAD 3. Graficación**. (del lenguaje tabular al lenguaje geométrico). En el instrumento se colocó una tabla de valores para la variable independiente con el correspondiente valor (imagen) para la función. Los valores de la variable independiente eran los valores enteros dentro de intervalo [-6, 6]. La actividad consistió en dibujar la gráfica de cada transformación

**ACTIVIDAD 4. Descripción** (del lenguaje geométrico al lenguaje verbal). Se le pidió al estudiante que comentara "con sus propias palabras" el efecto que había tenido cada transformación en la gráfica.

## 5.4 ALGUNAS DEFINICIONES GRAMÁTICO-MATEMÁTICAS

Para explicar la forma como se analizarán las respuestas de los estudiantes a estos instrumentos, se ha visto conveniente crear algunas definiciones nuevas que no forman parte de las denominaciones generalmente utilizadas en matemáticas. Estas definiciones que aparecen a continuación han sido redactadas por el investigador, debido a su clasificación con destino a su aplicación en esta investigación. Igualmente se han creado algunas clasificaciones que no existen en la matemática tradicional. Para diferenciar el vocabulario matemático aceptado por la comunidad académica del que ha creado el investigador para este trabajo, a este segundo se le colocará un asterisco (*).

- Operación matemática: Es un procedimiento previamente establecido que realiza una transformación en el valor o en el objeto matemático respectivo. (Ej. Sumar, restar, dividir, etc.)

- Operador matemático: Es un signo o símbolo que representa una operación matemática. (Ejemplos: $+, \times, \div, \sqrt{\phantom{x}}, D_x$)

Las operaciones matemáticas, para los efectos gramaticales que se necesita establecer en esta investigación, se han dividido en dos clases:

- Unitarias*[40]: Las que se le aplican a un solo valor u objeto matemático Ej. Potenciación, derivación, integración y otras.

- Binarias*: Las que se aplican entre dos valores u objetos matemáticos. Ej. Suma, resta, multiplicación, división.

Para representar las operaciones unitarias los operadores se han clasificado en dos clases según la posición en que se coloquen en la notación. Pueden ser:

- Operador Preposicional*: El que se coloca al comienzo del valor u objeto matemático que va a ser transformado por la operación. Ejs. Operador derivada $(D_x)$; La raíz cuadrada $(\sqrt{\ })$.

- Operador postposicional*. El que se coloca al final del valor u objeto matemático que va a ser transformado por la operación. De este grupo sólo se ha detectado el Operador factorial: *n!*. Como en la notación del operador integral $\left(\int \ \right)$ debe colocarse un diferencial $(dx; dy; dz)$ para indicar con respecto a cuál variable se está integrando, este diferencial podría considerarse como un *operador postposicional.*

Los operadores para representar operaciones binarias se denominarán:

- Operador copulativo*[41]: El que se coloca en medio de los dos valores u objetos matemáticos que se van a operar. Ej. 5+6; 3-1; 9÷3. *x*+*y*.

---

[40] Se recuerda que las definiciones que lleven asterisco (*) han sido creadas por el investigador (Nota del investigador).
[41] Este nombre está tomado de la Gramática, ciencia en la cual corresponde a la preposición 'y'. (Nota del investigador)

Para los efectos de esta investigación, se conjugan dos ciencias que no es frecuente ver juntas y que son: la Gramática y la matemática. Esta simbiosis exige establecer un paralelo entre los elementos gramaticales y los conceptos matemáticos así:

**Tabla 2. Gramática vs. Matemáticas**

| DENOMINACIÓN GRAMATICAL | DENOMINACIÓN MATEMÁTICA |
|---|---|
| Sustantivo | Objeto matemático |
| Adjetivo | Propiedad matemática |
| Verbo | Operación matemática |

Fuente. El autor

Igualmente se ha hecho una subdivisión de los objetos matemáticos que podría considerarse que tienen carácter mixto, es decir: matemático-gramatical así:

Objeto matemático autónomo*****: Es el objeto matemático que ha sido creado por la ciencia matemática como resultado de un axioma, postulado o definición arbitraria convencional. En términos gramaticales correspondería al *sujeto* de la oración gramatical, pero no en cuanto a que ejecuta la acción del verbo, porque las operaciones matemáticas (que equivalen al verbo gramatical) no las ejecutan los objetos sino los operadores matemáticos. Más bien en el sentido de que tiene vida autónoma independientemente de cualquier operación matemática. No son el resultado de una operación matemática.

Objeto matemático resultado*****: Es el objeto matemático que se produce como resultado de una operación matemática. Gramaticalmente equivaldría al complemento directo de una oración gramatical puesto que recibe la acción de un verbo. Si nos refiriéramos a la Gramática Latina, correspondería al modo acusativo de las declinaciones latinas.

Ampliando lo dicho con un ejemplo: El número 5 es en sí un *objeto matemático autónomo*, pero si es el resultado de dividir a 20 entre 4, adquiere el carácter de *objeto matemático resultado* y en este caso, el mismo número 5, al adquirir esta nueva condición, se llama *cociente*.

Por todo lo anterior y como resultado de las primeras consultas realizadas, se ha visto conveniente darle a cada palabra consultada doble clasificación: clasificación gramatical siguiendo las pautas de la Gramática y de los propios diccionarios consultados, y una clasificación matemática. La primera ya está establecida y basta acogerse a ella. La clasificación matemática existe como tal, pero no específicamente para las palabras sino para los conceptos matemáticos. Y se ha observado que hay conceptos matemáticos que se expresan con una sola palabra (Ej. Suma, resta, etc.). En cambio hay otros para los que se requieren varias palabras (Ej. Número real, derivada parcial, integral triple, etc.). Y para el caso de las operaciones matemáticas, en muchos casos hay que crear una frase completa porque involucra un verbo. (Ej. Elevar a una potencia, extraer una raíz, hallar los factores primos, hallar un común denominador, etc.). En consecuencia, lo que se ha llamado en esta investigación el *Vocabulario Institucional* no estará conformado sólo por palabras sino también por frases.

Se tomarán los tres elementos fundamentales de la oración gramatical como son: sustantivo, adjetivo y verbo. Sobre la marcha se comprobará si se requiere agregar el adverbio que, como bien se sabe, califica al verbo, al adjetivo o a otros adverbios y que podría referirse, por ejemplo, a operaciones matemáticas que podrían hacerse con diferente grado precisión, o a para diferenciar entre demostraciones intuitivas o rigurosas, o a operaciones notables que se realizan de manera directa sin aplicar el algoritmo paso a paso. etc. Igualmente se requerirán ciertas preposiciones que se aplican a operaciones como: ‘por’, ‘más’, ‘a’, ‘en’, etc.

**Tabla 3. Definiciones gramático-matemáticas**

| DEFINICIÓN GRAMATICAL | DEFINICIÓN MATEMÁTICA | | EJEMPLOS |
|---|---|---|---|
| | Primer Nivel | Segundo Nivel | |
| Sustantivo | Objeto matemático | Autónomo | Número, infinito, función, pendiente |
| | | Resultado | Producto, cociente, residuo, derivada, área, perímetro, volumen |
| Adjetivo | Propiedad matemática | | Par, impar, mayor, menor, natural, real, racional, imaginario, complejo, cuadrado perfecto, fraccionario, decimal |
| Verbo | Operación matemática | | Sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar a una potencia, extraer una raíz, duplicar, triplicar, derivar, integrar |

Fuente. El autor

En cuanto al paralelo que se ha expuesto en este aparte entre la gramática y la matemática, se podría hacer otro tanto entre *operadores matemáticos* (matemática) con las *conjunciones y afijos* (prefijos y sufijos) de la gramática.

El Diccionario de la *RAE* define estos conceptos así (se subraya lo relevante):

Conjunción: Gram. Parte invariable de la oración, que denota la relación que existe entre dos oraciones o entre miembros o vocablos de una de ellas, juntándolos o enlazándolos siempre gramaticalmente, aunque a veces signifique contrariedad o separación de sentido entre unos y otros.

Afijo: adj. Gram. Dícese del pronombre personal cuando va pospuesto y unido al verbo, y también de las preposiciones y partículas que se emplean en la formación de palabras derivadas y compuestas. Ú. m. c. s. m.

Como se sabe, los *afijos* pueden ir antepuestos (*prefijos*) o pospuestos (*sufijos)* a la palabra. A continuación  la definición de cada uno.

Prefijo: Dícese del afijo que va antepuesto; como en DESconfiar, REponer. Ú. t. c. s. m.

Sufijo: adj. Gram. Aplícase al afijo que va pospuesto. Dícese particularmente de los pronombres que se juntan al verbo y forman con él una sola palabra; v. gr.: morirSE; díMELO. Ú. m. c. s. m.

De la misma manera como operan las *conjunciones* y los *afijos* en la oración gramatical, sucede con los *operadores matemáticos* que han quedado definidos arriba y se puede hacer un paralelo biunívoco entre los dos así:

**Tabla 4. Afijos**

| **AFIJOS** | | **OPERADORES MATEMÁTICOS** | |
|---|---|---|---|
| **PREFIJOS (antepuestos)** | **SUFIJOS (pospuestos)** | **preposicionales (antepuestos)** | **POSPOSICIONALES (pospuestos)** |
| Ej. Prever | Ej. dígamelo | Operador derivada:<br>Ej $D_x Senx$ | Operador factorial:<br>Ej. 7! |
| **CONJUNCIONES** | | **BINARIOS** | |
| Ej. “Vaya con Dios”<br>“Tú y yo”<br>“Hoy por ti, mañana por mí” | | 4 + 5<br>8 × 2<br>14 ÷ 2 | |

Fuente. El autor

Hasta aquí la descripción de los procedimientos de recolección de la información utilizados en la investigación. A continuación se trascriben los resultados obtenidos y el análisis de estos.

## 5.5 ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN Y RESULTADOS OBTENIDOS

**5.5.1 Discurso de aula.** Tomando el texto de la grabación y como para tener unos indicadores cuantitativos del texto, tenemos lo siguiente conteo estadístico de todo el discurso:

| | |
|---|---|
| Cantidad total de palabras | 8,393 |
| Cantidad de caracteres (sin contar los espacios) | 38,310 |
| Cantidad de caracteres (contando los espacios) | 46,448 |

COMENTARIOS

La grabación dura exactamente 1 hora, 14 minutos. (1h 14') que equivale a 74 minutos. Para una cantidad total de 8,393 palabras, dan un promedio de 113.41 palabras/minuto.

Buscando al azar en Internet (Wikipedia) sobre la velocidad promedio al hablar, dice que: los libros grabados hablan a 150-175 ppm (palabras por minuto); Las presentaciones 100 ppm; las conversaciones 200 ppm y los "martillos" de subasta, que son los que (por conveniencia) suelen hablar a mayor velocidad, pronuncian 250 ppm. Por lo tanto la velocidad del profesor de 113 ppm es un registro bastante bajo.

El vocabulario matemático utilizado. Se trata de extraer del discurso de aula las *palabras y frases matemáticas* utilizadas por el profesor, cuyo contexto dé una definición o explicación sobre su significado con el fin de confrontarlo con la *definición institucional*. Se encontró lo siguiente. Las cifras globales del discurso de aula son las siguientes:

- Las palabras en singular y en plural se tomaron como la misma palabra.

- Frases que se acostumbran acortar como ‘recta’ por ‘línea recta’ o ‘curva’ por ‘línea curva’ se cuentan también como una sola palabra.

- De las 8,393 palabras, 748[42] que corresponden al 8.91% son *palabras matemáticas*. El Anexo C contiene el listado de todas las *palabras matemáticas* utilizadas por el profesor.

- De todas estas *palabras matemáticas* utilizadas por el profesor en su discurso de aula, se transcriben a continuación las que fueron mencionadas más de 5 veces. Cada palabra lleva al frente el número de veces que fue utilizada y están ordenadas por la frecuencia de utilización.

**Tabla 5. Palabras matemáticas**

| PALABRA MATEMÁTICA | CANTIDAD DE VECES QUE FUE UTILIZADA | PALABRA MATEMÁTICA | CANTIDAD DE VECES QUE FUE UTILIZADA |
|---|---|---|---|
| Valor | 64 | f(x) | 8 |
| dominio | 59 | Ángulo | 7 |
| función | 58 | asíntota | 7 |
| X | 43 | creciente | 7 |
| codominio | 39 | Infinita | 7 |
| Gráfica | 36 | propiedad | 7 |
| fórmula | 35 | tangente | 7 |
| Recta | 24 | vertical | 7 |
| Y | 24 | conjunto | 6 |
| ecuación | 23 | eje *x* | 6 |
| constante | 22 | elemento | 6 |
| función constante | 21 | número | 6 |
| pendiente | 16 | variable | 6 |
| inclinación | 12 | variación | 6 |
| Cero | 11 | eje y | 5 |
| º | 10 | lenguaje verbal | 5 |
| perpendicular | 10 | nomenclatura | 5 |
| términos | 10 | | |

Fuente. El Autor

En las conclusiones se expondrán los comentarios que han suscitado estas cifras.

[42] Téngase en cuenta que no son 748 palabras diferentes (Nota del investigador)

Sobre el contenido de la exposición del profesor, explicó la *función constante* y luego la *función identidad.* De lo que quedó consignado podemos resumir lo siguiente.

Función constante. El profesor expuso la *función constante* y en forma interactiva con los estudiantes se hicieron las siguientes aseveraciones que quedaron consignadas en el tablero:

**Tabla 6. Función constante**

| FUNCIÓN CONSTANTE | | |
|---|---|---|
| **LENGUAJES MATEMÁTICOS** | | |
| **ALGEBRÁICO** | **ARITMÉTICO** | **GEOMÉTRICO** |
| **(con fórmulas)** | **(tabla de valores)** | **(gráfica)** |
| 1. Valor único<br>*2.* De la forma *f(x)=mx+b* en donde: *m=0; b=c*<br>3. Pendiente nula *(m=0)*<br>Intercepto: c | 1. D=*R*; $D = \{x / x \in R\}$ cD=5; cD={5}<br>2. Dominio varía y el Codominio se queda quieto (no varía)<br>3. A cualquier valor del D le corresponde un único valor en el cD. | 1. Paralela al eje *x*<br>2. Perpendicular al eje *y*<br>3. Es una recta infinita<br>4. 0º de inclinación<br>5. Es horizontal<br>6. No tiene asíntotas<br>7. Corta al eje *y* en 5 |

Fuente. El Autor

RESUMEN: Función constante

De la representación algebraica: 3 asertos

De la representación aritmética: 3 asertos

De la representación geométrica: 7 asertos

Combinando todo lo dicho, podría montarse una definición, o mejor, tres definiciones, una para cada representación así:

Representación Algebraica (con fórmulas). La fórmula de la *función constante* es de la forma *f(x)=mx+b* en donde: *m=0* y *b=c* con pendiente nula e intercepto c.

Representación Aritmética (tabular). El Dominio de la *función constante* son todos los números reales y el coDominio “se queda quieto” es decir, que a cualquier valor del Dominio le corresponde el mismo valor en el coDomominio.

Representación Geométrica (gráfica). La gráfica de la *función constante* es una recta horizontal infinita,[43] sin asíntotas, paralela al eje *x* y perpendicular al eje *y;* tiene una inclinación de 0º y corta al eje *y* en el punto *c* que para el ejemplo es 5.

Función identidad: Se hizo lo propio con la *función identidad* y se hicieron las siguientes asertos:

**Tabla 7. Función identidad**

| **FUNCIÓN IDENTIDAD** | | |
|---|---|---|
| **LENGUAJES MATEMÁTICOS** | | |
| **ALGEBRÁICO (CON FÓRMULAS)** | **ARITMÉTICO (TABULAR)** | **GEOMÉTRICO (GRÁFICA)** |
| 1. De la forma *f(x)=mx+b* en donde: *m=1* b=0<br>2. A diferencia de la función constante, la y varía. | 1. A cada valor del *D* le corresponde igual valor en el *cD*. D = cD = R<br>2. D, cD = (x,y) /x R, y R | 1. Corta al eje x en el punto (0,0)<br>2. Inclinación de 45º (π/2)<br>3. Es una recta infinita<br>4. Gráfica creciente<br>5. Es una función porque una recta vertical sólo la corta en un punto.<br>6. A un valor en el eje *x* le corresponde el mismo valor en el eje *y*.<br>7. Pendiente constante<br>8. La tangente del ángulo de inclinación es 1.<br>9. La variación de *x* es igual a la variación de *y*. |

Fuente. El Autor

[43] Aunque por definición de la Geometría euclidiana, toda recta es infinita, el profesor acoge esa propiedad de la función para destacarla (Nota del investigador)

RESUMEN: Función identidad
*De la Representación algebraica: 2 asertos*
*De la Representación aritmética: 2 asertos*
*De la Representación geométrica: 9 asertos*

Combinando todo las definiciones de la *función identidad* quedarían así:

Representación Algebraica (con fórmulas). La fórmula de la *función identidad* es de la forma *f(x)=mx+c* en donde: *m=1* y *b=0* con pendiente 1 e intercepto 0 y a diferencia de la función constante, la *y* varía.

Representación Aritmética (tabular). Tanto el Dominio como el coDomonio de la *función identidad* son todos los números reales y a cada valor en el Dominio le corresponde ese mismo valor en el coDomonio.

Representación Geométrica (gráfica). La gráfica de la *función identidad* se sabe que es una función porque una recta vertical corta a la curva en un solo punto y es creciente; es una recta infinita, que corta al eje *x* en el punto (0,0,), tiene una inclinación de 45º ($\pi/2$) y a cualquier valor en el eje *x* le corresponde ese mismo valor en el eje *y* y la variación de *x* es igual a la variación de *y*. La pendiente es constante e igual a 1 y la tangente del ángulo de inclinación es 1.

- **Textos y otras representaciones escritas por los estudiantes.**

El análisis de los resultados de cada instrumento tiene dos partes:
INFORME ESTADÍSTICO que da cifras globales de las respuestas de los estudiantes.
ANÁLISIS CUALITATIVO
En él se clasifican y analizan las respuestas de más interés. Las conclusiones se expondrán en el siguiente capítulo.

Muestra A. Aplicación del Instrumento No. 1 – Análisis explicativo de la función potencia.

INFORME ESTADÍSTICO

ACTIVIDAD UNO: Cálculos numéricos. Se esperaba que los estudiantes calcularan una tabla de valores dentro de un intervalo suficiente para dibujar la gráfica. Los resultados fueron casi perfectos.

**Tabla 8. Instrumento 1. Actividad Uno**

| GRUPO | RESULTADOS | ESTUDIANTES | |
|---|---|---|---|
| | | **Cant.** | **%** |
| 1 | Todos correctos | 16 | 94.12% |
| 2 | No todos correctos | 0 | 00.00% |
| 3 | No hizo la tabla | 1 | 5.88% |
| TOTALES | | | 100.00% |

Fuente. El Autor

ACTIVIDAD DOS: Graficación (Representación geométrica). Todos los estudiantes participantes hicieron la gráfica correctamente. (100%)

ACTIVIDAD TRES: Comentarios a las representaciones: Como las respuestas se refieren específicamente a cada representación, así se agruparán los análisis de estos resultados. Pero además, dentro de cada representación se clasificarán en los siguientes grupos:

GRUPO 1 – Respuestas originales correctas RO(+). Son respuestas correctas y que no fueron influidas por el discurso de aula.

GRUPO 2 - Respuestas redundantes correctas RR(+). Son respuestas correctas, pero que sí fueron influidas por el discurso de aula.

GRUPO 3 - Respuestas originales incorrectas RO(-). Son respuestas incorrectas pero que no fueron influidas por el discurso de aula.

GRUPO 4 - Respuestas redundantes incorrectas RR(-): Respuestas que se limitaron a repetir lo dicho por el profesor pero sin que fuera pertinente aplicárselo a la función potencia.

GRUPO 5 – Respuestas incoherentes o irrelevantes (XX)

Los resultados aparecen en la tabla siguiente:

Destaquemos primero la cantidad total de respuestas que nos indica, de cuál de las tres representaciones los estudiantes pudieron decir más asertos. Se enumerarán en orden descendente de cantidad en todos los casos.

De un total de 108 respuestas dadas:

- 50 (46.30%) fueron sobre la representación geométrica
- 32 (29.63%) fueron sobre la representación algebraica
- 23 (24.07%) fueron sobre la representación aritmética

**Tabla 9. Instrumento 1. Actividad tres**

| REPRESENTAC | RESPUESTAS CORRECTAS | | TOTAL CORRECTAS | | RESPUESTAS INCORRECTAS | | | TOTAL INCORRECTAS | | TOTAL RESPUESTAS | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ORIGINALES | REDUND | | | RO(-) | RR(-) | (XX) | | | | |
| | RO(+) | RR(+) | CANT. | % | 3 | 4 | 5 | CANT. | % | CANT | % |
| ALGEBRAICA | 4 | 8 | 12 | 37,50% | 5 | 7 | 8 | 20 | 62,50% | 32 | 29,63% |
| ARITMÉTICA | 10 | 9 | 19 | 73,08% | 5 | 1 | 1 | 7 | 26,92% | 26 | 24,07% |
| GEOMÉTRICA | 25 | 4 | 29 | 58,00% | 11 | 4 | 6 | 21 | 42,00% | 50 | 46,30% |
| TOTALES | 39 | 21 | 60 | 55,56% | 21 | 12 | 15 | 48 | 44,44% | 108 | 100,00% |
| | 36,11% | 19,44% | | | 19,44% | 11,11% | 13,89% | | | | 100,00% |

Fuente. El Autor

De las 39 respuestas correctas:

- 25 (64.10%) fueron sobre la representación geométrica
- 10 (25.64%) fueron sobre la representación aritmética
- 4 (10.26%) fueron sobre la representación algebraica

ANÁLISIS CUALITATIVO

Respuestas RO(+). Correctas y originales

RO(+)-01. Se mencionará de primera una respuesta que resulta sorprendentemente original e inteligente, así sea incompleta. Es la respuesta que fue dada sólo por el estudiante 12 (Muestra A) referida a la representación algebraica de la función potencia. Dice así:

‘y’ siempre será igual o mayor que ‘x’

El investigador reconoce con toda modestia que nunca se le había ocurrido comparar los valores de *x* con el respectivo valor de *y* en una función. Esta comparación parece haber sido deducida por el estudiante analizando la fórmula y no la gráfica, porque es posible deducir que la potencia par de un número, ya sea positivo o negativo, “siempre” será mayor o igual que el número y en cambio es muy difícil comparar distancias horizontales y verticales visualmente.

Pero esta afirmación tiene una salvedad: sólo es verdad para números negativos y para números positivos mayores o iguales a 1. Es decir: no se cumple en el intervalo (0, 1), o sea, números en el intervalo que corresponde a número positivos de fracción decimal sin parte entera y que en la gráfica están alrededor del vértice de la parábola. Combinando la respuesta del estudiante con la salvedad que ha quedado expuesta se puede decir:

$$x^2 \geq x; \{x \mid -\infty < x \leq 0 \cup 1 \leq x\}$$
$$x^2 < x; \{x \mid 0 < x < 1\}$$

Es muy significativo que un estudiante capte este hecho en unos pocos minutos de trabajo. Parecería que estamos frente a un estudiante muy inteligente y efectivamente su desempeño fue magnífico a lo largo del curso de Cálculo Diferencial.

No obstante lo anterior, es curioso que este mismo estudiante también “cayó en la trampa” de decir que “la fórmula de la función potencia es de la forma

$$y = mx + b$$

error que se analizará más adelante. En el numeral en el que se analiza este error se hará referencia a la respuesta de este estudiante en particular.

RO(+)-02: Hay una respuesta correcta y original dada por varios estudiantes. Consiste en afirmar que la función potencia “siempre será positiva”. Lo dicen de diferentes maneras y en algunos casos con algunas imprecisiones. En unos casos refiriéndose a la fórmula, en otros a la tabla de valores y en otros a la gráfica. Se transcriben las respuestas a continuación:

**Tabla 10. Instrumento 1. Actividad tres (valores positivos)**

| No. | DESDE LA FÓRMULA (Algebraico) | DESDE EL DOMINIO Y EL CODOMINIO (Tabular) | DESDE LA GRÁFICA (Geométrico) |
|---|---|---|---|
| 1 | | | Es positiva respecto a *y* |
| 2 | | | |
| 3 | Todos los valores serán positivos | | |
| 4 | | | Todos sus reales son positivos |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | Es una parábola positiva<br>Es siempre positiva |
| 9 | | Los valores del Codominio siempre serán positivos | |
| 10 | | | |
| 11 | | | Parábola positiva |

Continuación Tabla 11. Instrumento 1. Actividad tres (valores positivos)

| No. | DESDE LA FÓRMULA (Algebraico) | DESDE EL DOMINIO Y EL CODOMINIO (Tabular) | DESDE LA GRÁFICA (Geométrico) |
|---|---|---|---|
| 12 | y siempre será positiva | Siempre los elementos de salida tendrán elementos de llegada positivos | |
| 13 | | | Es una parábola positiva |
| 14 | | | |
| 15 | | | |
| 16 | | Los valores de "y" siempre son positivos | En el eje x el D y cD son los R, mientras en el eje *y* solo son positivos |

Fuente. El Autor

RO(+)-03: Un buen número de estudiantes (8 de 16 que corresponde al 50%) hicieron referencia a que la curva es una parábola.

Analizando estadísticamente esta respuesta en particular, de los 16 estudiantes de esta muestra, 9 (56.25%) lo incluyen en sus respuestas.

**Respuestas RO(-): Incorrectas originales.**

RO(-)-01. Al igual que se hizo con las respuestas correctas, se coloca de primera entre las incorrectas ésta, que consiste en confundir entre *duplicar* un valor, y *elevarlo al cuadrado*. La expresión $f(x)=x^2$ confundió a varios estudiantes que hablaron de que la función es "el doble" de la variable. Lo dijeron de varis maneras, pero todas las respuestas dan a entender lo mismo.

- Toma el valor de *x* **duplicado.**
- A cada valor del Dominio le corresponde un valor **duplo** en el Codominio.
- Va a ser **el doble.**
- Siempre va a ser **el doble.**
- Tiene un valor aumentado **al doble** del valor inicial de *x.*

**Respuestas RO(-): Incorrectas repetitivas.**

Cuando se habla de respuestas *repetitivas* se está haciendo referencia a que fueron influidas por la exposición del profesor. La exposición de aula en que el profesor explicó, a modo de ejemplo-guía, las funciones *constante* e *identidad* y que se hizo inmediatamente antes de aplicar el **Instrumento No. 1**, influyó para que algunos estudiantes, sin que fuera pertinente, le aplicaran las mismas propiedades a la función potencia. Hubo una respuesta de este tipo:

RR(-)-01: La fórmula de la función potencia es de la forma $y = mx + b$. La dieron cuatro estudiantes. Es muy significativo que uno de los estudiantes (el estudiante 12) que cometió este error es el mismo que dio (sólo él) la respuesta RO(+)-01 que se destacó como una respuesta muy inteligente.

Lo anterior nos hace pensar que la idea de que una expresión matemática “es de la forma…” no es clara, ni siquiera para los estudiantes más destacados, a pesar de que es un recursos muy frecuente en los texto por sus ventajas para generalizar de manera muy amplia una expresión matemática para que sea aplicable para muchos casos particulares. Es útil en matemáicas encontrar expresiones prototípicas que representen muchos casos particulares y le permita a quien expone el tema (por ejemplo el profesor) no explicar con ejemplos sino con expresiones generales. Analicemos este concepto para lo cual comenzaremos dándole un nombre.

Forma matemática: Entendamos por *forma matemática* una expresión que contiene variables y parámetros. Las primeras se suelen representar con las últimas letras de alfabeto (u, v, w, x, y, z) y los segundos, con el resto de letras de alfabeto.

Ejemplo de *forma matemática*.

Las ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Representa a cualquiera de las cuatro curvas cónicas.

Las formas matemáticas se utilizan para representar diferentes expresiones en las que, al reemplazar los parámetros por valores numéricos, sin variar, ni la disposición de las variables ni los valores numéricos que contenga la expresión (coeficientes, exponentes, términos independientes numéricos, etc.) se están dando casos particulares de esa *forma matemática.*

En el caso que nos ocupa, el profesor dijo en su exposición que las fórmulas de la *función constante* y la *función identidad* eran de la forma:

$$f(x) = mx + b$$

Esta expresión contiene la variable independiente 'x' y los parámetros *'m'* y *'b'*. Que las fórmulas de esas funciones sean de determinada forma, equivale a decir que las fórmulas de las funciones constante e identidad son casos particulares de la forma dada y que se obtienen reemplazando los parámetros *'m'* y *'b' por ciertos valores así:*

Para la función constante: *m = 0; b = c (la constante 'c' puede tomar diferentes valores)*

En la función identidad: *m = 1; b = 0.*

Eso no lo entendieron estos 4 estudiantes en los que está incluido el estudiante 12.

Finalmente analicemos el error en que incurren los estudiantes.

Ellos debían analizar la función potencia [$f(x)=x^2$] partiendo de las pautas dadas por el profesor en su exposición. 4 estudiantes dijeron que esta ecuación era también de la forma: $f(x)=mx+b$ lo cual no es cierto. Pero si los estudiantes hubieran recibido la pauta explicada arriba de que sólo pueden reemplazarse los parámetros (que son '*m*' y '*b*') sin alterar el resto de la fórmula, es posible que no hubiera cometido ese error.

Las *respuestas RR(+): Correctas redundantes*, no son de interés porque bien podríamos calificarlas como "un golpe de suerte". Sobre las *XX – Incoherentes o irrelevantes* no hay nada qué decir.

<u>Muestra B. Aplicación del Instrumento No. 2</u> – Transformación de funciones. Este instrumento se transcribió en la página 52 y comprende 4 actividades, como y se explicó arriba. Sus resultados se analizarán en forma independiente y al final se hará un análisis comparativo de todas.

ACTIVIDAD 1: Consistía en explicar verbalmente las transformaciones de la función potencia ($y=x^2$). Las respuestas de los estudiantes están contenidas en el Anexo F.

INFORME ESTADÍSTICO

No es aplicable un análisis estadístico de un ejercicio con respuesta abierta.

ANÁLISIS CUALITATIVO

Tipificación de las respuestas. Se clasificaron las respuestas buscando conceptos que se repitieran en varios estudiantes. De acuerdo con los contenidos observados, se clasificarán de la siguiente manera:

Tipo 1: Respuestas aparentemente correctas

Tipo 2: Respuestas literales. Que se limitan a repetir en palabras lo que está escrito en otro lenguaje. No reflejan comprensión.[44]

Tipo 3: Respuestas ambiguas. No se entiende bien el sentido.

Tipo 4: Respuestas incorrectas.[45]

Primera transformación (como ejemplo guía): [$f(x)+c$)]

Respuesta esperada: *Sumarle la constante "c" a la función*

Segunda transformación: $f(x+b)$

Respuesta esperada: *Sumarle la constante b a la variable independiente de la función.*

Las respuestas de los estudiantes, de acuerdo con la tipología definida, se agrupan de la siguiente manera:

Tipo 1: Respuestas aparentemente correctas

En el procedimiento de selección de las respuestas, primero se escogieron las respuestas que, como un todo, se encontraron conceptualmente correctas y luego se analizó su contenido en detalle, marcando las palabras comunes a todas las respuestas e identificándolas con colores, agrupando las que se consideran sinónimas. Se encontraron los siguientes conceptos (palabras) comunes:

**Tabla 12. Instrumento 2. Actividad 1. Segunda Transformación *f(x+b)***

**Caracterización de las frases (aparentemente correctas) utilizadas**

| Palabra utilizada por el estudiante | Denominación matemática (denominación gramatical) |
|---|---|
| variable independiente = variable 'x' | Objeto matemático (sustantivo) |
| función | Objeto matemático (sustantivo) |
| la constante b = una constante = b | Objeto matemático (sustantivo) |
| suma = sumar = sumarle = sumada = sumemos | Operación matemática (verbo) |

Fuente. El autor

[44] Sobre este tema, véase Marco Teórico en este documento. (Nota del investigador)

[45] En el Anexo F aparece el análisis detallado de cada respuesta por grupos. (Nota del Investigador)

**Tabla 13. Instrumento 2. Actividad 1 Segunda Transformación**

**Respuestas correctas**

| ESTUD | RESPUESTAS CORRECTAS Fórmula dada: *f(x+b)* | ORDEN DE ENTREGA |
|---|---|---|
| 5 | A la variable independiente de esta función sumarle la constante b. | 18 |
| 9 | Una función con la variable independiente sumada con una constante | 6 |
| 10 | Función de (x+b) sumarle b a la variable independiente x | 7 |
| 12 | Función de la suma de la variable ‘x’ y la constante ‘b’. f de ‘x’ más ‘b’. | 8 |
| 14 | Sumarle la constante “b” a la variable independiente de la función | 9 |
| 18 | Esta función nos pide que le sumemos **b** a la **variable x** para así determinar la función | 12 |
| 19 | Sumarle una constante a la variable independiente de la función | 1 |

Fuente. El autor

Explicación. Es muy significativo que los estudiantes utilizan todos el mismo vocabulario matemático.

Tipo 2: Respuestas literales. (Las respuestas se limitan a repetir en palabras lo que está escrito en lenguaje algebraico. No refleja comprensión.) Las respuestas son prácticamente idénticas.

**Tabla 14. Instrumento 2. Actividad 1. Segunda Transformación**

**(Respuestas literales)**

| ESTUDIANTE | RESPUESTAS LITERALES Formula dada: *f(x+b)* | ORDEN DE ENTREGA |
|---|---|---|
| 2 | Función de x más b | 13 |
| 3 | Hacer función de (x+b) | 4 |
| 6, 7, 17 | Función de (x+b) | 2, 3, 17 |

Fuente. El autor

Tipo 3: Respuestas ambiguas. No hay nada qué decir al respecto.

Tipo 4. Respuestas incorrectas.

Respuesta Error 1-1. “Multiplicación-Operador” [46]

Estudiante 11

Fórmula dada: *f(x+b)*

Respuesta: Primero sumamos la variable independiente con la constante b y luego la multiplicamos con la función

Explicación: El error consiste en interpretar que en la expresión *f(x)*, la *f* está multiplicando a la *x*.

Respuesta Error 1-2. “Función-Doble Variable”

Estudiante 1

Fórmula dada: *(x+b)*

Respuesta: Sumar las variables independientes “x” y “y” a la función “f”

Explicación: No es claro por qué el estudiante se refirió a dos variables siendo que en la expresión $y=x^2$ la *y* representa a la función que es de una sola variable.

Tercera transformación: *af(x)*

Respuesta esperada: *Multiplicar la fórmula de la función de x por la constante a.*

Se han escrito en negrilla las palabra comunes a todas las respuestas y se han identificado con colores. Son las siguientes, agrupando las que se consideran sinónimas.

**Tabla 15. Instrumento 2. Actividad 1. Tercera Transformación *af(x)***

**Caracterización de las frases (aparentemente correctas) utilizadas**

| Palabra utilizada por el estudiante | Denominación matemática (denominación gramatical) |
|---|---|
| variable independiente = variable ‘x’ | Objeto matemático (sustantivo) |
| (toda)la función (f(x)) = esta función = una función =la función de x = f de x | Objeto matemático (sustantivo) |
| la constante “a” = una constante = a | Objeto matemático (sustantivo) |
| Multiplicar(la) = multiplica = multiplicación = multiplicando = por | Operación matemática (verbo) |

Fuente. El autor

Tipo 1: Respuesta aparentemente correcta

[46] Se le ha colocado un nombre mnemotécnico a cada error para identificar sus características. (Nota del investigador).

**Tabla 16. Instrumento 2. Actividad 1. Tercera Transformación: *af(x)***

**(Respuestas correctas)**

| ESTUD. | RESPUESTAS CORRECTAS Formula dada: *af(x)* | ORDEN DE ENTREGA |
|---|---|---|
| 1 | Multiplicar la constante "a" con la función[47] | 10 |
| 3 | a que multiplica a la función de (x) | 4 |
| 5 | La función f(x) multiplicarla por la constante a | 18 |
| 8 | a por la función de x | 5 |
| 11 | La constante a por la función | 14 |
| 12 | La multiplicación de 'f' de 'x' por la constante 'a'. 'a' por 'f' de 'x'. | 8 |
| 14 | Se multiplica la constante "a" a toda la función. | 9 |
| 18 | Esta nos pide multiplicar la función por una constante | 12 |
| 19 | Multiplicar una constante a la función | 1 |
| 20 | Constante 'a' multiplicando la función de x | 9 |

Fuente. El autor

Tipo 2: Respuesta literal (Las respuestas se limitan a repetir en palabras lo que está escrito en lenguaje algebraico. No refleja comprensión.[48]) Las respuestas son todas prácticamente idénticas.

**Tabla 17. Instrumento 2. Actividad 1. Tercera Transformación: *af(x)***

**(Respuestas literales)**

| ESTUD. | RESPUESTAS LITERALES Fórmula dada: *af(x)* | ORDEN DE ENTREGA |
|---|---|---|
| 2 | Función af de x | 13 |
| 6 | a función de (x) | 2 |
| 7 | a f de x | 3 |
| 17 | afunción (x) | 16 |

Fuente. El autor

Tipo 3: Respuestas ambiguas. Sin comentarios.

Respuestas Error 2-1. "Función *af*"

[47] Comentario (menor): Si la actividad parte de una función (no de una constante), lo más lógico es decir que se multiplica la función, que ya existe, por la constante y no al contrario. (Notas del investigador)

[48] Véase MARCO TEÓRICO en este documento. (Nota del investigador)

**Tabla 18. Instrumento 2. Actividad 1. Tercera Transformación: *af(x)***

**(Respuestas Error 4)**

| ESTUD. | RESPUESTAS ERROR 4<br>Formula dada: af*(x)* | ORDEN<br>DE ENTREGA |
|---|---|---|
| 2 | función af de "x" | 13 |
| 10 | Función af de x | 7 |

Fuente. El autor

Explicación: Los estudiantes parecen no haber entendido la expresión *af(x)* como el producto de la constante '*a*' (cuyo valor era conocido) con la función *f(x)* sino como la denominación de una nueva función: función '*af*'. *f(kx)*

Representación algebraica: Respuesta esperada: *Multiplicar la variable independiente de la función por la constante k*.

**Tabla 19. Instrumento 2. Actividad 1. Tercera Transformación *af(x)***

**Caracterización de las frases (aparentemente correctas) utilizadas**

| Palabra utilizada por el estudiante | Denominación matemática (denominación gramatical) |
|---|---|
| variable independiente = variable 'x' | Objeto matemático + Propiedad matemática (sustantivo + adjetivo) |
| (toda)la función (f(x)) = esta función = una función =la función de x = f de x | Objeto matemático (sustantivo) |
| la constante "k" = una constante = k | Objeto matemático (sustantivo) |
| Multiplicar(la) = multiplica = multiplicación = multiplicando = por | Operación matemática (verbo) |

Fuente. El autor

Tipo 1: Respuesta aparentemente correcta.

**Tabla 20. Instrumento 2. Actividad 1. Transformación 4**

**(Respuestas correctas)**

| ESTUD. | RESPUESTAS CORRECTAS<br>Fórmula dada: *f(kx)* | ORDEN<br>DE<br>ENTREGA |
|---|---|---|
| 5 | La variable independiente de esta función multiplicarla por la constante k | 18 |
| 12 | Función de la multiplicación de la constante 'k' por la variable 'x'. 'f' de 'k' por 'x' | 8 |
| 14 | Se multiplica la constante "k" a la variable independiente | 9 |
| 19 | Multiplicar una constante a la variable de la función | 1 |

Fuente. El autor

Tipo 2: Respuesta literal (Las respuestas se limitan a repetir en palabras lo que está escrito en lenguaje algebraico. No refleja comprensión.) Las respuestas son prácticamente idénticas.

**Tabla 21. Instrumento 2. Actividad 1. Transformación 4**

**(Respuestas literales)**

| **ESTUD.** | **RESPUESTAS LITERALES**<br>**Fórmula dada: *f(kx)*** | **ORDEN DE ENTREGA** |
|---|---|---|
| 6 | Función de (kx) | 2 |
| 7 | Función de kx | 3 |
| 10 | “función de kx” | 7 |
| 17 | “función de **(**$k \cdot x$**)** | 16 |

Fuente. El autor

Tipo 3: Respuestas ambiguas. Sin comentarios.

Respuestas Error 3-1. “Función –Variable”

**Tabla 22. Instrumento 2. Actividad 1. Transformación 4**

**(Respuestas Error 3-1)**

| **ESTUD.** | **RESPUESTAS ERROR 3-1**<br>**Formula dada: *f(kx)*** | **ORDEN DE ENTREGA** |
|---|---|---|
| 2 | Multiplicarle la constante k a la función | 13 |
| 4 | Es el resultado de la multiplicación de f(x) por k. | 11 |
| 20 | Función por la constante ‘k’ de x | 9 |

Fuente. El autor

Explicación: El error consiste en interpretar la expresión**:** *f(kx)* como el producto de la constante *k* por la función.

Comentario.

Respuestas Error 3-2. “Función de constante”

**Tabla 23. Instrumento 2. Actividad 1. Transformación 4**

**(Respuestas Error 3.2)**

| **ESTUD.** | **RESPUESTAS ERROR 3-2**<br>**Formula dada: *f(kx)*** | **ORDEN DE ENTREGA** |
|---|---|---|
| 3 | Función de (kx) = (o sea de k que multiplica a x) | 4 |

Fuente. El autor

Comentario: Salvo la función constante cuya fórmula no contiene *x* una función no puede tener como variable independiente una constante. En el caso de la respuesta, no es correcto decir: "Función de *k*".

Respuestas Error 3-3. "Operación-Multiplicación"

**Tabla 24. Instrumento 2. Actividad 1. Transformación 4**

**(Respuestas Error 3.3)**

| **ESTUDIANTE** | **RESPUESTAS ERROR 3-3**<br>**Formula dada: *f(kx)*** | **ORDEN DE ENTREGA** |
|---|---|---|
| 11 | La función por la multiplicación de la constante k por la variable | 14 |

Fuente. El autor

Comentario: (Véase Comentario al Error 1-1)

ACTIVIDAD 2. Consistía en calcular los valores de la función para ciertos valores dados de la variable independiente (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3).

INFORME ESTADÍSTICO

**Tabla 25. Instrumento 2. Actividad 2 (Global).**

| **RESULTADOS INSTRUMENTO 2. ACTIVIDAD 2** | | |
|---|---|---|
| **ESTUDIANTE** | **RESPUESTA CORRECTAS** | |
| | **CANTIDAD** | **PORCENTAJE** |
| 12 | 35/35 | 100,00% |
| 19 | 35/35 | 100,00% |
| 11 | 33/35 | 94,20% |
| 1 | 32/35 | 91,40% |
| 14 | 22/35 | 62,80% |

Continuación Tabla 26. Instrumento 2. Actividad 2 (Global).

| **ESTUDIANTE** | **RESPUESTA CORRECTAS** | |
|---|---|---|
| | **CANTIDAD** | **PORCENTAJE** |
| 16 | 21/35 | 60,00% |
| 17 | 21/35 | 60,00% |
| 20 | 19/35 | 54,20% |
| 10 | 16/35 | 45,70% |
| 2 | 15/35 | 42,80% |
| 18 | 15/35 | 42,80% |
| 9 | 14/35 | 40,00% |
| 7 | 15/35 | 40,00% |
| 3 | 7/35 | 20,00% |
| 5 | 7/35 | 20,00% |
| 6 | 7/35 | 20,00% |
| 15 | 7/35 | 20,00% |
| 8 | 2/35) | 5,70% |
| 4 | 0/0 | 0,00% |
| 13 | No participó | No participó |

Fuente. El autor

**Tabla 27.Cuadro Estadístico. Instrumento 2. Actividad 2 (Global)**

| **CUADRO ESTADÍSTICO RESUMEN** | | | |
|---|---|---|---|
| **GRUPO** | **TIPOLOGÍA** | **CANT. ESTUD.** | **% DEL TOTAL** |
| 1 | Todas las respuestas bien. (Sin errores) | 2 | 10% |
| 2 | Aciertos iguales o superiores al 90% (Destacados) | 2 | 10% |
| 3 | Aciertos iguales o superiores al 60%. (Nota $\geq$3.00) “Aprobados” | 3 | 15% |
| 4 | Aciertos inferiores al 60%. Nota$\leq$3.0 “Reprobados” | 12 | 60% |
| | No participaron | 1 | 5% |
| TOTALES | | 20 | 100% |

Fuente. El autor

Para los cálculos de esta Actividad 2 no se les definió si podían utilizar calculadora, pero al entregar se les preguntó si la habían utilizado o no. El resultado es el siguiente:

Utilizaron calculadora 3 estudiantes. Los Nos. 1, 14, 18. (15.79%)

No utilizaron calculadora 16 estudiantes. Los Nos.: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 19, 20. (84.21%)

ANÁLISIS CUALITATIVO

Anotaciones previas

- Para poder analizar discriminadamente los resultados por columna, se hará una descripción de las circunstancias de cada respuesta.

Columna 1 (Sin transformaciones. Sin parámetros): Corresponde a la función original y la fórmula ($y=x^2$) venía impresa en el formulario. No había que crearla y bastaba reemplazar solamente los valores de $x$. se esperaría un porcentaje alto de resultados correctos.

Columna 2 (Primera Transformación [$f(x)+c$]): Corresponde a la transformación de agregarle una constante a la función. Estaba escrita la forma genérica de la ecuación pero debía reemplazarse la fórmula de la función y el valor del parámetro ‘c’ así: [$y=x^2+5$]. Estas sustituciones implicaban un mayor esfuerzo y comprensión que la anterior.

Columna 3 (Segunda Transformación [$f(x+b)$]): Corresponde a la transformación de agregarle una constante a la variable independiente. Estaba escrita la forma genérica de la ecuación pero debía reemplazarse la fórmula de la función y el valor del parámetro ‘b’ así: [$y=(x+3)^2$].

Columna 4 (Tercera Transformación [$af(x)$]): Corresponde a la transformación de multiplicar la función por la constante ‘a’. Estaba escrita la forma genérica de la ecuación pero debía reemplazarse la fórmula de la función y el valor del parámetro 'a' así: [$y=2x^2$].

Columna 5 (Cuarta Transformación [$f(kx)$]): Corresponde a la transformación de multiplicar la variable independiente por la constante 'k'. Estaba escrita la forma genérica de la ecuación pero debía reemplazarse la fórmula de la función y el valor del parámetro 'k' así: [$y=(kx)^2$]. Estas sustituciones implicaban un mayor esfuerzo y comprensión.

Con respecto al tipo de error de cálculo aritmético, son siempre de dos tipos: en el valor (absoluto) de la respuesta y en el signo. Esquematicemos estos errores.

Si extrapolamos el concepto de vector para aplicárselo a los escalares como si se tratara de "*Vectores en* $R^1$", como lo hace el programa MATLAB para matemáticas, podemos establecer las siguientes definiciones que nos serán útiles para este análisis:

Un número (escalar), considerado vectorialmente, tiene los mismos elementos de un vector: magnitud y dirección. La magnitud es su *valor absoluto* y la dirección el signo. La dirección, en la recta real, será 'derecha' para los números positivos e 'izquierda' para los números negativos y la magnitud, será la distancia al origen (punto 0) que es como define la matemática el valor absoluto.
Aplicando estas convenciones, los errores son de dos tipos: de magnitud (valor absoluto) y de dirección (signo) podemos tipificar los errores así.

En la operación suma: signos iguales se suman, signos distintos se restan y se pone el signo del mayor.

En la operación resta: Se le cambia el signo al sustraendo y se aplica la regla de la suma.

En la operación multiplicación o división, se multiplican las magnitudes y se aplica la ley de los signos: signos iguales, resultado positivo. Signos diferentes, resultado negativo.

Estas reglas no son tan obvias. Las de la suma son intuibles. Las de la resta son un poco menos obvias. Y las de la multiplicación y división son, como bien se sabe, parcialmente convencionales, vale decir, arbitrarias. Los estudiantes se equivocan mucho en esto y a los profesores nos parece inaceptable, pero vistas como "retahíla verbal", aunque se ven claras, se pone en evidencia que no son fáciles de memorizar. Y si insistimos en la idea de que "la matemática no es para memorizar", más errores cometerán nuestros estudiantes, porque hay muchas reglas de la matemática que se deben memorizar, como las tablas de multiplicar, por ejemplo.

No es relevante para esta investigación contar cuántos estudiantes se equivocaron de una manera o de otra, sino destacar que en la práctica de las matemáticas, no todo es conceptual; la experiencia del Investigador es que las reglas de procedimiento suelen ser con más frecuencia fuentes de error entre los estudiantes (y los profesores…) que los supuestos errores conceptuales. Se volverá sobre el tema en las conclusiones.

- Preclasificación por grupos según los resultados

Primer Grupo (sin errores): Los estudiantes que respondieron correctamente toda la actividad.

Segundo Grupo (destacados): Los que tuvieron bien el 90% o más de las respuestas.

Tercer Grupo (Nota $\geq$3.00 "aprobados"): Los que tuvieron un porcentaje de respuestas correctas inferior al 90% pero igual o superior al 60% (que correspondería a una nota de 3.00).

Cuarto Grupo: (Nota$\leq$3.00 “reprobados”): Los estudiantes que obtuvieron un porcentaje de respuestas correctas inferior al 60%.

Quinto Grupo: (atípico): Está conformado por los estudiantes que no dieron respuestas numéricas que pudieran tabularse y, por lo tanto, tendrán que interpretarse o desecharse.

- Para procesar matemáticamente la información se creó un archivo de Excel que compara los resultados con una tabla de referencia y dice cuáles están iguales a los de esa tabla. Pero como es posible que algunos resultados supuestamente correctos hayan coincidido por casualidad, se hará un análisis directamente sobre el procedimiento de cálculo de cada estudiante para analizar si se dio esta circunstancia y ajustar los resultados.

ANÁLISIS CUALITATIVO

Como se trataba de obtener unos resultados numéricos de valor único, esta actividad no es muy susceptible de análisis cualitativo que involucre factores de gradualidad. De un cálculo aritmético sólo se puede decir sí está bien y está mal y nada más. Sin embargo en las conclusiones se intentarán algunas consideraciones interpretativas que buscarán explicar el porqué de los aciertos o errores de los estudiantes.

ACTIVIDAD 3. Consistió en dibujar las gráficas de la función original (función potencia) y con las cuatro transformaciones en una cuadrícula que se le entregó a cada estudiante.

## INFORME ESTADÍSTICO

Es posible definir el porcentaje de las respuestas correctas, tanto al colocar los puntos en el plano como al trazar las curvas. A continuación puede verse la tabla estadística global de las respuestas.

**Tabla 28. Estadística Global (colocación de puntos)**

**Instrumento 2. Actividad 3**

| ESTADÍSTICA POR CANTIDAD DE ESTUDIANTES | | | |
|---|---|---|---|
| **% RESULTADOS CORRECTOS** | **# ESTUDIANTES** | **% DEL TOTAL** | **% ACUMULADO** |
| 100,00% | 10 | 31,58% | 31.58% |
| 90,00% | 5 | 26,32% | 57.90% |
| 80,00% | 3 | 15,79% | 73.69% |
| 70,00% | 1 | 5,26% | 78.95% |
| 60,00% | 1 | 5,26% | 84.21% |
| < 60,00% | 3 | 15,79% | 100.00% |
| **TOTALES** | **19** | **100,00%** | |

Fuente. El autor

Nota: Si la Actividad 3 hubiera sido una evaluación de clase, el 73.69% de los estudiantes habrían sacado una “nota” superior o igual a 4.00 y el 84.21% superior o igual a 3.00. Sería un buen resultado…

**Tabla 29. Estadística Global (colocación de puntos)**

**Instrumento 2. Actividad 3**

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN</th><th colspan="2">GRAFICO 1</th><th colspan="2">GRAFICO 2</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Porcentaje de respuestas correctas</td><td>Puntos</td><td>Curva</td><td>Puntos</td><td>Curva</td></tr>
<tr><td>100.00%</td><td>89.47%</td><td>94.74%</td><td>84.21%</td></tr>
<tr><td colspan="2">GRAFICO 3</td><td colspan="2">GRAFICO 4</td></tr>
<tr><td>Puntos</td><td>Curva</td><td>Puntos</td><td>Curva</td></tr>
<tr><td>68.42%</td><td>57.89%</td><td>84.21%</td><td>78.95%</td></tr>
<tr><td colspan="4">GRAFICO 5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Puntos</td><td colspan="2">Curva</td></tr>
<tr><td colspan="2">84.21%</td><td colspan="2">78.95%</td></tr>
</table>

Fuente. El autor

ANÁLISIS CUALITATIVO

Los porcentajes de gráficos bien elaborados es significativamente alto. Es evidente que se trata de una actividad que el estudiante ejecuta correctamente.

Se elaboró un cuadro descriptivo de lo que hizo cada estudiante en esta Actividad 3 al dibujar las gráficas (Anexo F) y a continuación se clasificarán los tipos de errores. Son dos:

Error punto (EP). Error al colocar los puntos en el plano
Error curva. (EC).Error al unir los puntos para trazar la curva

NOTA. Como esta investigación no tiene por objeto evaluar a los estudiantes, sino analizar su forma de comprensión, sólo interesan las respuestas dadas. Las no-respuestas, o sea, los que no respondieron (errores por omisión), ya sea porque no alcanzaron o porque no supieron cómo hacerlo, no se tendrán en cuenta. Esta decisión "salva" a muchos estudiantes de dar respuestas equivocadas, pro aun así, no altera el logro de los objetivos de esta investigación, porque el porcentaje de respuestas correctas con relación al total de las respuestas posibles es también muy alto (93.26%).

EP-0: Sin errores en los puntos. Todos bien ubicados
EP-1: Errores de localización (acción)
EP-2: No colocó puntos o sólo algunos (Po omisión. No se computan)
EC-0: Sin errores. Trazó bien las curvas
EC-1: Unión mal algunos puntos (Por acción)
EC-2: No unió los puntos o sólo algunos (Po omisión. No se computan)

A continuación se tipifican las respuestas *sin errores* (EP-0 y EC-0) y los errores por acción (EP-1 y EC-1)

EP-0 (sin errores en los puntos): 19 (100.00% de los que participaron)

EC-0 (sin errores en las curvas): 17 (89.47%)

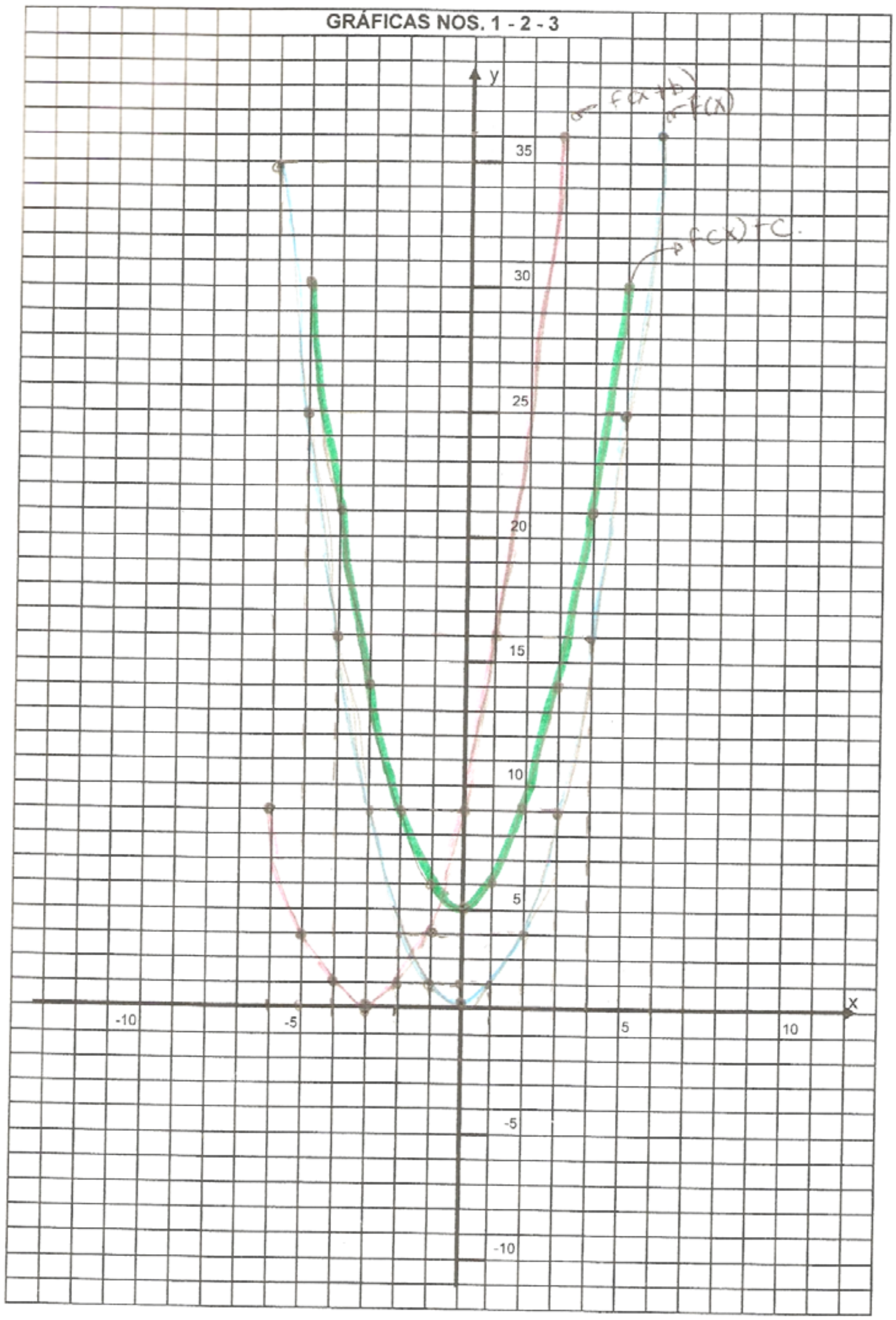
EP-1: Errores de localización (acción). De los errores de localización de puntos, el único de interés para este análisis es el siguiente:

El estudiante 7 tomó un valor negativo para la función en $x = -3$.

EC-1: Unión mal algunos puntos (Por acción)

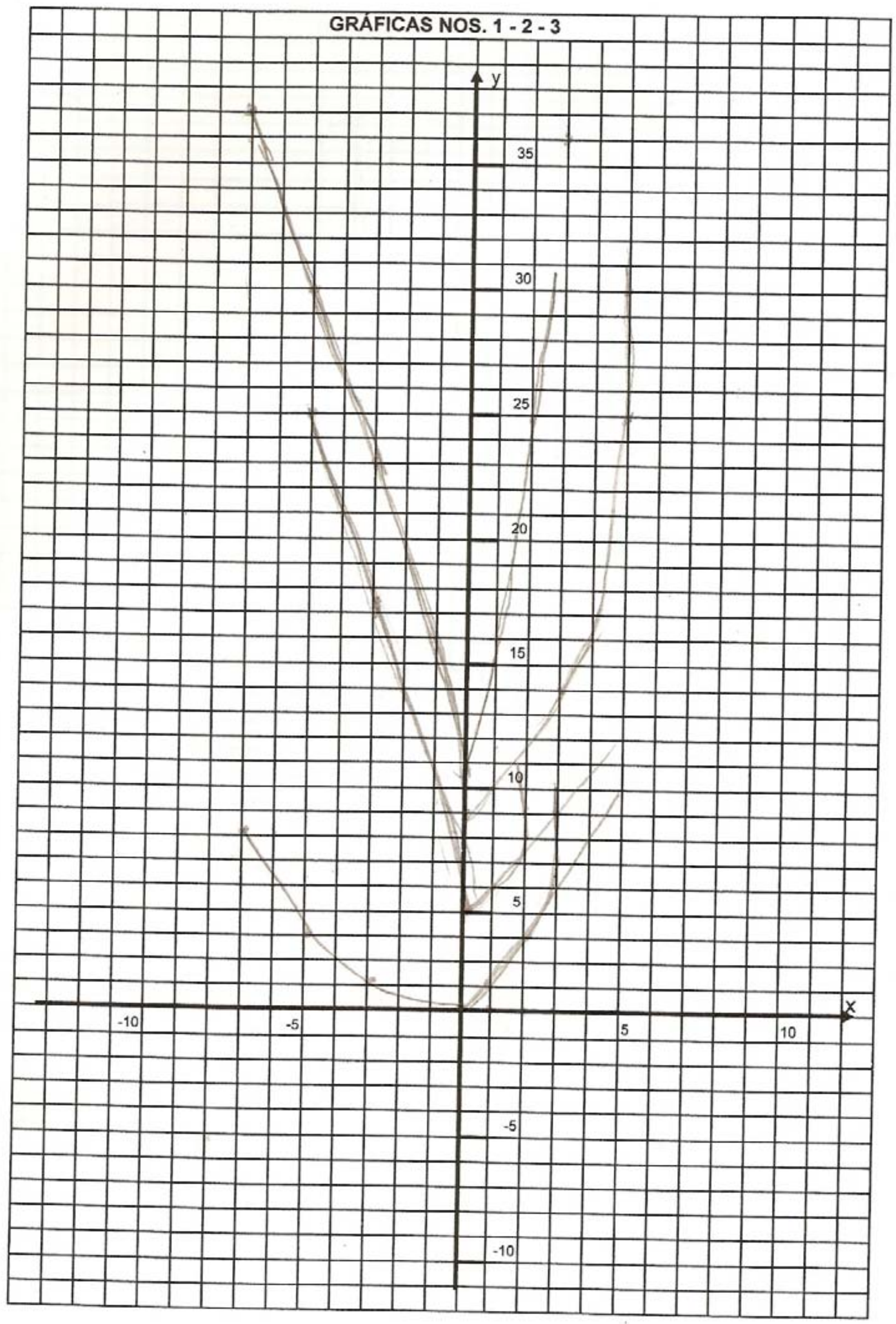
Sobre este tipo de error, es pertinente comparar una gráfica que se ha calificado como correcta, con otra que tiene este error, para analizar las incorrecciones y sus supuestas causas. A continuación aparecen ambas gráficas que se analizarán comparativamente.

**Figura 2. Gráfica de la función original y las transformaciones 1 y 2 (correctas)**




Fuente. El Autor

**Figura 3. Gráfica de la función original y las transformaciones 1 y 2 (incorrectas)**




Fuente. El Autor

**Tabla 30. Cuadro comparativo gráficas**

| CUADRO COMPARATIVO DE LAS DOS GRÁFICAS ANALIZADAS | |
|---|---|
| **Gráficas correctas (estudiante 1)** | **Gráficas incorrectas (estudiante 9)** |
| 1. El estudiante pudo ir trazando cada gráfica porque muy seguramente colocó los puntos de cada función separadamente. | 1. El estudiante al parecer colocó todos los puntos a la vez y luego confundió unas gráficas con otras. |
| 2. El propio estudiante tuvo la iniciativa de trazar cada una de distinto color para diferenciarlas. Lo hizo tal vez por estética (es una mujer), pero ayuda a ver muy clara cada representación. | 2. Utilizó el mismo color para las tres gráficas y se confundió. Seguramente no acostumbra tener lapiceros de colores a la mano. |
| 3. El estudiante sabía de antemano que las gráficas eran parábolas porque en las cuatro respuestas de la Actividad 4 que viene en seguida lo dice. | 3. El estudiante tenía muy poca idea de la clase de gráfica que estaba dibujando. Una buena muestra es que no contestó ninguna de las cuatro preguntas de la Actividad 4 en la que se le pedía explicar lo que les había sucedido a las gráficas. |
| 4. Es más o menos evidente que la principal diferencia entre los dos estudiantes es que el primero trabajó con más método. | |

Fuente. El Autor

ACTIVIDAD 4. Consistió en describir con palabras el efecto que había tenido sobre la gráfica cada transformación.

Observación preliminar. En las transformaciones 1 y 2, es claro el efecto sobre la gráfica pero en las transformaciones 3 y 4 no se ve si el efecto es que la gráfica se alarga hacia arriba o hacia los lados. Por esta ambigüedad, de la Actividad 4 se analizarán solamente las dos primeras respuestas.

INFORME ESTADÍSTICO

Como la pregunta era abierta y cada estudiante podía responder lo que a bien tuviera, algunos dieron una sola respuesta a cada pregunta y otros dieron dos. Se diferenciarán en *sencillas* y *dobles.*

A modo de guía, podemos dar la *respuesta esperada* a cada pregunta:

Primera Transformación. Respuesta esperada: La gráfica se desplaza cinco (5) unidades hacia arriba.

Segunda Transformación. Respuesta esperada: La gráfica se desplaza tres (3) unidades hacia la izquierda.

Tercera Transformación: No se analizará.
Cuarta Transformación: No se analizará.

Según las respuestas obtenidas de los estudiantes, se han tipificado las respuestas así:

- [B-B]: Respuestas totalmente correctas y que responden la pregunta
- [B-M]: Respuestas totalmente correctas pero que no responden la pregunta
- [b-B]: Respuestas parcialmente correctas que responden la pregunta
- [b-M]: Respuestas parcialmente correctas que no responden la pregunta
- [M]: Respuestas totalmente equivocadas
- [X]: Respuestas ambiguas o irrelevantes (no se analizarán)

ANÁLISIS CUALITATIVO

Salvo las respuestas correctas que pueden analizarse dentro del contexto del tema tratado, el resto de respuestas no son clasificables. Transcribamos las respuestas que se han considerado correctas a las que se les hará sendos comentarios, no tanto con relación a la validez de lo que dice el estudiante sino indagando si eso, correcto o incorrecto que dice, está indicando comprensión de la transformación de la gráfica.

**Tabla 31. Comentarios Investigador**

| Estud. | RESPUESTA DEL ESTUDIANTE | COMENTARIO DEL INVESTIGADOR |
|---|---|---|
| 5 | En esta la recta se volvió más pequeña que la inicial y el punto en donde cambió del eje negativo en x al positivo en x está en 5y | Aunque una parábola es infinita en ambos sentidos (en '*x*' y en '*y*') el estudiante da a entender que al elevarse cinco unidad el vértice de la parábola, se "acorta" la curva. Es una afirmación matemáticamente equivocada pero denota que ha entendido lo que le pasó a la gráfica. |
| 7 | Que el punto 0 del eje de las x le corresponde el 5 del eje de la y | Simplemente da las nuevas coordenadas del vértice pero como la curva no cambia de forma, se queda con la idea de que es el único punto que cambia de posición. |
| 10 | Su valor en x=0 y en y es 5 | Es una respuesta similar a la anterior y se podría comentar lo mismo. |
| 11 | Esta no llegó hasta el punto 0 sino al punto y igual a 5 | Podemos suponer que "esta" se refiere a la gráfica, por lo tanto, está diciendo lo mismo que las anteriores respuestas.. |
| 12 | La gráfica no tocó el punto cero (0) | Igual que los anteriores. |
| 17 | Esta gráfica no tuvo muchos cambios. Vimos que la otra era igual pero corrida 5 puntos hacia arriba. | La frase es aparentemente clara, pero está mal redactada. No es "la otra", o sea, la función original, la que está corrida hacia arriba sino *ésta.* |
| 19 | La gráfica se corrió 5 posiciones hacia arriba en el eje y | Este estudiante amplía lo dicho por los anteriores en el sentido de que fue toda la gráfica la que se corrió hacia arriba y no solamente el vértice. Muestra este estudiante una capacidad mayor que los otros para generalizar una conclusión. Generalizar es con mucha frecuencia, fuente de error. Quien se atreve a hacerlo está mostrando seguridad. |
| 20 | La gráfica sufrió un cambio porque no parte de (0,0) | Este estudiante también le adjudica el cambio a toda la gráfica pero se genera una duda porque sólo se refiere al inicio de la gráfica, pero deja sin decir explícitamente que <u>toda</u> la curva sube. |

Fuente. El Autor

# 6. CONCLUSIONES, OBSERVACIONES Y VALIDACIONES

Realizadas todas las actividades previstas en la presente investigación, pasamos a extractar las conclusiones más importantes que se han obtenido, tomadas de los análisis de la información realizados en el numeral anterior. Esas conclusiones están orientadas por la pregunta de investigación planteada al comienzo de este informe a la que trataremos de darle una respuesta general, dando respuestas directas y particulares a cada una de las preguntas directrices.

**PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN**

**¿Cómo se refleja la comprensión del concepto de *función* en textos producidos por los estudiantes?**

**PREGUNTAS DIRECTRICES**

*PREGUNTA 1: ¿Qué tan pertinente es el lenguaje natural para representar objetos matemáticos?*

RESPUESTAS

- El método de pedirle a los estudiantes que expliquen con palabras lo que entendieron no es funcional como instrumento de evaluación para definir una nota, porque aunque el acto de repetir lo que está contenido en el texto no demuestra comprensión (véase Marco Teórico) ante un posible reclamo del estudiante, tampoco puede el profesor sostener que el estudiante está cometiendo un error, así su respuesta sea irrelevante y no significativa. El método puede servir como *indicador* de comprensión, (o mejor, *comprobador*) si hubo comprensión, pero si no la hubo, no es confiable para evaluar.

- Y aparte de la limitación planteada en el punto anterior, es más o menos evidente y se observa en las respuestas de los estudiantes, que cuando el estudiante no está muy seguro de haber entendido, se “refugia” en las palabras del profesor o del libro y las repite textualmente. En ese sentido y como instrumento auxiliar de las evaluaciones tradicionales, generalmente en lenguaje algebraico o gráfico, podría ser pertinente intentar evaluaciones matemáticas orales, en las que al estudiante se le pidiera explicar algo en palabras; la ventaja de esta metodología es que así como el profesor tendría oportunidad de pedir más explicaciones, el estudiante gozaría del *derecho de réplica*. Sería un método de evaluación un poco engorroso e ineficiente en tiempo, pero podría ser muy dinámico y dialógico y respetuoso del "debido proceso". Y referido a las apreciaciones de la profesora Claudia Barajas en su investigación, citada en los Antecedentes de este informe, cuando dice que "debe favorecerse el ejercicio de la escritura en todas las asignaturas", y a las del profesor Larry Buschman citado en el Marco Teórico, cuando recomienda "el uso de la comunicación oral y escrita como una herramienta con la cual los alumnos puedan reflejar su comprensión de las matemáticas", ¡estaría el estudiante practicando matemáticas, expresión verbal y técnicas de argumentación al mismo tiempo!

- Sobre lo anterior, cuando se quieran sacar conclusiones para evaluación de respuestas verbales sobre temas matemáticos, deberán confrontarse con respuestas en otros lenguajes (aritméticos, gráficos, etc.) o hacerlo en forma de diálogo oral, como se dijo en el punto anterior.

- Mirando los pros y los contras de esta metodología de evaluar matemáticas verbalmente, se debe tener presente que una mala explicación verbal por parte del estudiante, bien puede deberse en algunos casos a dificultades para redactar, como se detecta en esta investigación en los caso en los que el estudiante modela y aplica bien la fórmula, pero cuando se le pide que explique en palabras el resultado, lo hace mal.

- La representación verbal de las funciones puede ser todo lo válida que se quiera como tal, y así lo considera la matemática clásica de funciones cuando afirma que lenguaje verbal es *una* de las formas de representarla; pero si sólo utilizamos la representación verbal, no podremos realizar con esa función operaciones útiles y significativas como la derivada y la integral, entre otras, cuyo procedimiento es típicamente algebraico. Con palabras es posible montar funciones no representables en lenguaje algebraico. Podrían eventualmente realizarse gráficamente pero, estaríamos utilizando la representación geométrica y no la representación verbal. En otras palabras, los estudiantes, en el caso que nos ocupa, incluso el profesor, terminan asimilando el concepto de función con su respectiva fórmula, a pesar de, que en teoría, la fórmula es sólo *una* de las diferentes formas de representarla, como ya se dijo. En la práctica de aula se cumple que "si no hay fórmula, no hay matemática", como lo afirma textualmente el profesor en la exposición grabada en una actitud algo atrevida.

- Es claro que el profesor investigado respeta y acata los criterios matemáticos universalmente aceptados sobre la validez de definir una función por diversos medios, entre ellos, el lenguaje de texto, como se acaba de comentar, y así lo expone en el discurso de aula que se grabó para esta investigación; asimismo, acepta que la fórmula no *es* la función en sí sino tan sólo una de las varias formas de representarla. Sin embargo el investigador encuentra poco consistente en términos pedagógicos que se le dé al estudiante una definición tan amplia de función representada en diferentes formas y luego se pase el resto del semestre manejando exclusivamente fórmulas y las funciones "textuales" no se vuelven a ver por ninguna parte.

- El rigor conceptual que exige la matemática hace que resulte al menos insuficiente definir los conceptos matemáticos sólo en palabras. La polisemia lingüística (varios significados para la misma palabra) que se da en todos los idiomas, hace que sea fácil caer en imprecisiones matemáticas al usar exclusivamente el lenguaje verbal. Como un ejemplo de esta ambigüedad se puede citar una experiencia del investigador. En un ejercicio de clase con los estudiantes sobre el tema que en Cálculo Diferencial se denomina: *razones afines*, el enunciado del problema decía que “la diferencia entre dos números es de…” y se daba un valor cualquiera. Algunos estudiantes relacionaron la palabra ‘diferencia’ con la idea de que un número sea diferente a otro y plantearon como fórmula una desigualdad. Es un buen ejemplo de la múltiple significación de algunas palabras que se constituye en un grave inconveniente cuando se aplica a las matemáticas. Las frases “la diferencia entre dos números es…” y “el número *a* es diferente al número *b*” no tienen ninguna relación matemática entre sí, a pesar de que utilizan las palabras ‘diferencia’ y ‘diferente’ que tiene la misma raíz y significado similar.

- No obstante lo anterior, dada la eficacia pedagógica de las explicaciones, definiciones y representaciones de los conceptos matemáticos en lenguaje verbal, reconocida por varios autores citados en este informe, sería útil que los profesores trabajáramos con los estudiantes en la redacción de definiciones verbales de los principales conceptos matemáticos estudiados en el programa de asignatura, o discutieran definiciones verbales tomadas de los libros, con el fin de aguzar el rigor semántico de conceptos matemáticos expresados en palabras para aprovechar dichas ventajas pedagógicas.

*PREGUNTA 2: ¿Qué tanto influye el discurso de aula en la comprensión del concepto de función en sus diversas representaciones?*

RESPUESTAS

- Si se ha destacado en puntos anteriores la potencialidad didáctica del lenguaje verbal, eso significa que el discurso de aula es una poderosa herramienta de transmisión del conocimiento.

- Pero como se trata de analizar las fallas, pensemos en sus debilidades. En este sentido, es importante destacar de los resultados de la investigación que el error de afirmar que la fórmula de la función potencia [$f(x)=x^2$] es de la forma $f(x)=mx+b$ lo cometieron estudiantes muy destacados que incluso en otras preguntas de esta investigación dieron respuestas muy acertadas y originales. Este error nos lleva a dos conclusiones:

    - o Los estudiantes se limitaron a repetir lo que había dicho el profesor sobre la forma general de la ecuación de las funciones constante e identidad [$f(x)=mx+b$] y se la aplicaron equivocadamente a la función potencia. Es claro que interpretaron equivocadamente el concepto de *forma matemática*.
    - o Parece que los profesores no les explicamos debidamente a los estudiantes el significado del concepto de *forma de una ecuación*. El Investigador manifiesta que no lo ha visto explicado en los textos que ha consultado. Lo utilizan pero no lo explican. Hay aquí un vacío en la enseñanza de este concepto.

*PREGUNTA 3: ¿Qué tanto pueden los estudiantes explicar en lenguaje verbal el concepto de función partiendo de representaciones en otros lenguajes?*

RESPUESTAS

- Es interesante observar que en el Instrumento 2, Actividad 1 (Table 13, p. 86) en la que los estudiantes explican en palabras las transformaciones de la función potencia, se seleccionaron primero las frases que se consideraron matemáticamente correctas por su contenido y cuando se analizaron gramaticalmente se comprobó que eran correctas también en este sentido. Se comprueba una concordancia entre coherencia y corrección matemática y gramatical. Esto refuerza la tesis de la profesora Claudia Barajas de que es conveniente privilegiar las competencias comunicativas en lenguaje verbal en todas las asignaturas, incluida la matemática que parece tan ajena a la literatura.

- Debe destacarse lo siguiente:
  - En la Actividad Uno del Instrumento No. 1, la representación en la que los estudiantes se les ocurrieron mayor cantidad de respuestas fue en la Representación Geométrica (50 respuestas; 46.30%).
  - De las 39 respuestas correctas de la Actividad Tres de este mismo instrumento, 25 (64.10%) corresponden a la representación geométrica.
  - Igualmente en la actividad de dibujar gráficas fue en la que los estudiantes obtuvieron mejores resultados.

Lo anterior confirma la mayor capacidad que suelen tener los estudiantes para comprender la representación geométrica y esto le da un gran valor pedagógico. Por ello, nunca se debería prescindir de esta representación en la enseñanza de las matemáticas. Los profesores deberíamos, por razones pedagógicas, utilizar lo más posible el lenguaje geométrico en las exposiciones de aula. Y graficar no solo las funciones primitivas sino sus derivadas y sus integrales. Una gráfica de la pendiente de una curva, tomando la derivada como nueva función sería muy ilustrativa para analizar el comportamiento de ciertos fenómenos. Un magnífico ejemplo es el caso de los esfuerzos de una viga de dos apoyos sometida a carga. La integral de la carga es el esfuerzo cortante. La integral del esfuerzo cortante es el momento flector y la integral del momento flector es la elástica, o sea, la forma que toma la viga a flectarse.

- Hay un error típico y muy frecuente cuando se les pide a los estudiantes que expliquen en palabras la función potencia [$f(x)=x^2$] y varios estudiantes responden que "el valor de la función es el doble de la variable". Y en lenguaje algebraico, cuando se le pregunta a los estudiantes "cuánto es $x + x$" dudan en responder si el resultado es '$2x$' o '$x^2$'. Esta confusión al tratar de explicar en palabras el efecto matemático entre el 2 como coeficiente y el mismo 2 como exponente origina frecuentes errores.

- Este grupo de conclusiones puede validarse con lo que recomienda Theodore Eisenberg cuando dice: "Cuando los estudiantes se inician en el tema de funciones, se les debe enfatizar la representación visual.[49]

*PREGUNTA 4: ¿Qué tanto comprenden los estudiantes un tema matemático representado en lenguaje verbal (natural) y cómo se refleja esa comprensión en las respuestas que dan en otros lenguajes?*

RESPUESTAS

- Error "Multiplicación-Operador: El error consiste en no tener en cuenta que cuando dos letras o un número y una letra están juntos, no siempre se están multiplicando. Este error ha sido analizado por algunos autores como Anna Sierpinska cuya referencia se mencionó en el Marco Teórico. Dice así: "Cuando no hay un signo entre dos símbolos, eso no significa por cierto que exista allí un signo implícito de multiplicación (por ejemplo, dx no significa "d por x".) [50]

- Al ejemplo del diferencial citado del texto de Sierpinska podríamos perfectamente agregarle el caso del símbolo f(x) de la respuesta de otro estudiante. Dice textualmente que "primero sumamos la variable independiente con la constante b" (corresponde a la expresión x+b) "y luego la multiplicamos con la función (se refiere a la expresión f(x+b)) dando a entender equivocadamente que en la expresión la f(x+b), la f está multiplicando a (x+b). El mismo error.

[49] Eisenberg, T. 1992. El texto original en Inglés dice así: When students are introduced to functions, the visual representation should be specially emphasized.
[50] SIERPINSKA, Anna. Opus citata p. 21

- La propiedad de que las potencias pares son siempre positivas parece ser una idea muy clara para un grupo significativo de estudiantes, a juzgar por el porcentaje (56.25%) que lo incluyó en su respuesta por su propia iniciativa sin que se le hubiera preguntado sobre ese particular.

- Al pasar de una explicación verbal a la representación algebraica, hacen mal uso de los paréntesis.

- Cuando se les dio el valor de los parámetros *a, b, c y* k y se les pidió aplicarlos a las ecuaciones no tuvieron clara la diferencia entre variables y parámetros y algunos los reemplazaron equivocadamente.

- Los errores de los estudiantes de matemáticas son más de procedimiento que de concepto.

- No tienen claro que para transformar una función debe alterarse la fórmula y no la variable dependiente, a pesar de que ésta representa a la función.

- Ejemplo. Si se quiere duplicar el valor de la función $y=x^2$ debo escribir: $y=2x^2$ y no $2y=x^2$ porque esta segunda operación realiza la transformación contraria: divide la función por 2.

- Otro error: elevar a la potencia la variable pero no su coeficiente. Hacer la operación de esta manera: $(2x)^2=2x^2$ como si el exponente sólo afectara a la variable.

- Se observan errores aritméticos cometidos por los estudiantes (sumas, resta, potencias, etc.) y aunque no están directamente relacionados con el concepto de función, sí en cambio con su manejo. Teniendo en cuenta que sólo 3 de los 19 estudiantes utilizó calculadora, se dieron los errores típicos de cuando se suman o se multiplican números positivos y negativos mentalmente: o se da mal el signo, o el resultado o ambas cosas. Cabe comentar que en la pedagogía escolar de hace algunas décadas se le daba gran importancia a que el estudiante se ejercitara en hacer operaciones sin escribir. Lo llamaban *cálculo mental*. La pedagogía de la educación media había abandonado estas prácticas pero, al parecer, se les ha vuelto a dar importancia. ¡Enhorabuena!

*PREGUNTA 5: ¿Qué tanta capacidad muestran los estudiantes al transferir un concepto de un lenguaje a otro sin alterar su contenido?*

RESPUESTAS

- La metodología utilizada en esta investigación de dar varias definiciones de un concepto matemático (para el caso, de la *función*) visto desde sus diferentes representaciones es cognitivamente muy eficaz, porque se detecta que el estudiante termina descubriendo por su cuenta que cuando dice algo de la fórmula de la función y luego algo supuestamente diferente de la gráfica, está refiriéndose al mismo objeto y a la misma propiedad. Está diciendo lo mismo con palabras diferentes. Ejemplo: En la formula $f(x)=mx+b$, decir que $m=0$ es equivalente a decir que la gráfica es horizontal, o que es paralela al eje $x$, o que es perpendicular al eje $y$ o que su pendiente es nula. Todas esas afirmaciones las dijeron los estudiantes en diferentes momentos. Unos asertos surgen de la fórmula y otros de la gráfica pero son equivalentes. Se generan unas conexiones que podríamos llamar *sinonimia matemática* que se corresponden de una representación a otra y mejoran la comprensión.

Finalmente hay otras conclusiones y recomendaciones por fuera de las preguntas de investigación que resultan como *subproductos* y que se transcriben aquí con la esperanza de que resulten pedagógicamente útiles.

- Del discurso de aula se pueden extraer algunas cifras que podrían ser útiles como referencia para otras investigaciones tales como:

    - o En la exposición de aula, la cantidad de palabras que corresponden a conceptos matemáticos fue del 8.91%. Esta cifra para la cual no contamos con una base de referencia, podría convertirse en un indicador de qué tanto acude un profesor de matemáticas al vocabulario estrictamente matemático para exponer los temas.
    - o La cantidad de palabras por minuto (ppm) que arrojó el discurso de aula fue de 113 ppm. De acuerdo con cifras estadísticas, una conversación normal se desarrolla a 250 ppm. Por lo tanto la velocidad del profesor investigado es relativamente baja. Quedan estas cifras como referencia para posteriores investigaciones.

- Esta investigación pone a consideración de la didáctica matemática las denominaciones y definiciones nuevas (numeral 4.3 de este documento) que se agregaron como referencia para el análisis y que intentan interrelacionar los conceptos matemáticos con los conceptos gramaticales. Se denominaron: *definiciones gramático-matemáticas*.

- Finalmente, una digresión etimológica. En la parte introductoria de la METODOLOGÍA se hizo referencia a que se había escogido la función potencia cuya gráfica es una parábola, por ser una función y una curva muy conocidas para los estudiantes. Por la frecuencia como los estudiantes se refirieron al nombre de esta curva podemos concluir que realmente es muy conocida. Pero cabe anotar que un estudiante la llamó *hipérbola*. Este error, a los profesores que estamos tan familiarizados con estos nombres y sus características, nos puede parecer muy grave. Sin embargo, en aras de la verdad, vale la pena tener presente, en cuanto a la denominación de las cuatro curvas cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola), con excepción de la primera, cuyo nombre se menciona en muchos contextos, los nombres de las otras tres no dicen nada sobre su significado ni sobre su forma. El significado etimológico de la palabra ‘parábola’ es: *comparación* y su referencia más conocida son los evangelios. Nada qué ver… ‘Elipse’ significa originalmente *insuficiencia*, que no tiene nada qué ver con un óvalo… y la palabra ‘hipérbola’ significa *exageración* que tampoco guarda ninguna relación con esta curva. Por cierto que existe en Español la palabra ‘hipérbole’ para denominar el recurso retórico de exagerar las cosas. La intención es destacar el hecho de que estos nombres no son muy mnemotécnicos ni fáciles de recordar a pesar de ser tan antiguos, puesto que se remontan a antes de los griegos.

# BIBLIOGRAFÍA

ADLER, Mortimer y DOREN Charles van. *Cómo leer un libro. 1940,* Título original: How to read en book.

ARCOS QUEZADA, José Ismael. *Rigor o Entendimiento: Un viejo dilema en la Enseñanza de las Matemáticas: el caso del Cálculo Infinitesimal.* Tiempo de Educar, jul-dic. Vol. 5 No. 10, 2004, Toluca México.

AUSUBEL, David. *Psicología y Educación*. Editorial Paidós. España, 2002.

BARAJAS ARENAS, Claudia. *Los apuntes: una aproximación al razonamiento proporcional de los estudiantes de séptimo grado. 2008,* Tesis para optar el título de Licenciatura en Matemáticas. Universidad Industrial de Santander.

BENVENISTE, E. *Problèmes de linguistique générale*, 1, Paris, Gallimard. 1974

BUSCHMAN, L. *El lenguaje matemático en el aula*. Teaching children Mathematics, Vol. 1, No, 6, 1995 http://www.indexnet.santillana.es/rcs/_archivos/Recursos/matematicas/lenguamates.doc

DEIROS, B. *Apuntes sobre didáctica de la matemática para ingeniería*, 2003, http://www.monografias.com/trabajos11/monogrr/monogrr.shtml.

DUVAL, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano, Registros semióticos de Aprendizaje Intelectuales*, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación matemática. 1999, Cali, Colombia.

EISENBERG, Theodore. *On the development of a sense for functions*. In Guershon Harel and Ed Dubinsky, editors, 1992, The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, pages 153-174. Mathematical Association of America, USA, 1992.

GODINO, Juan D. (2002). *Perspectiva semiótica de la competencia y comprensión matemática*, Universidad de Granada.

HERNÁNDEZ, Víctor M. (1996) *Algunas conjeturas sobre la noción de problema, Lingüística y Educación Matemática y las perspectivas del uso de la tecnología*. *vhernan@gauss.mat.uson.mx*

HIEBERT, James y CARPENTER, Thomas P. Learning and Teaching with understanding. 1992, Grouws D. A. (editor). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*.

JONES, M. *Demystifying functions: The historical and pedagogical difficulties of the concept of function*. 2006

LARIOS OSORIO, Víctor. *Algo sobre el rigor del lenguaje*. *Gaceta COBAQ*, año XIV, No. 1243, marzo-abril, 1997, ciudad de Méjico, 1997, Colegio de Bachilleres del Estado de Querétaro, Méjico.

PARADA, S. *La producción de textos: una alternativa para evaluar Matemáticas*, Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas, Especialización en Educación Matemática, Bucaramanga. 2005.

PIM, D. *El lenguaje matemático en el aula,* Ediciones Morata S. A., Madrid, España. 1987

SIERPINSKA, Anna. *Understanding in Mathematics".* Colección: Studies Mathematics Education Series.The Falmer press. USA. 1994.

SIMMONDS, George F. y KRANTZ, Steven G. *Ecuaciones Diferenciales*, c. Graw Hill, México, 2007.

STEWART, James. *Cálculo: conceptos y contextos*, Thompson Learning, Méjico, D. F. Méjico. 2001.

# ANEXOS

## Anexo A. Grabación de Aula
## “Clase sobre funciones”
## (Trascripción editada de la grabación) [51]

PROFESOR. Bueno señores, el tema de hoy como ya lo habíamos dicho en anteriores clases, es ya propiamente el tema clave del curso de Cálculo,[52] porque vamos a ver funciones. El concepto de función es tal vez de las cosas más importantes de la Matemática porque de ahí partió una rama de la Matemática que es el Cálculo.

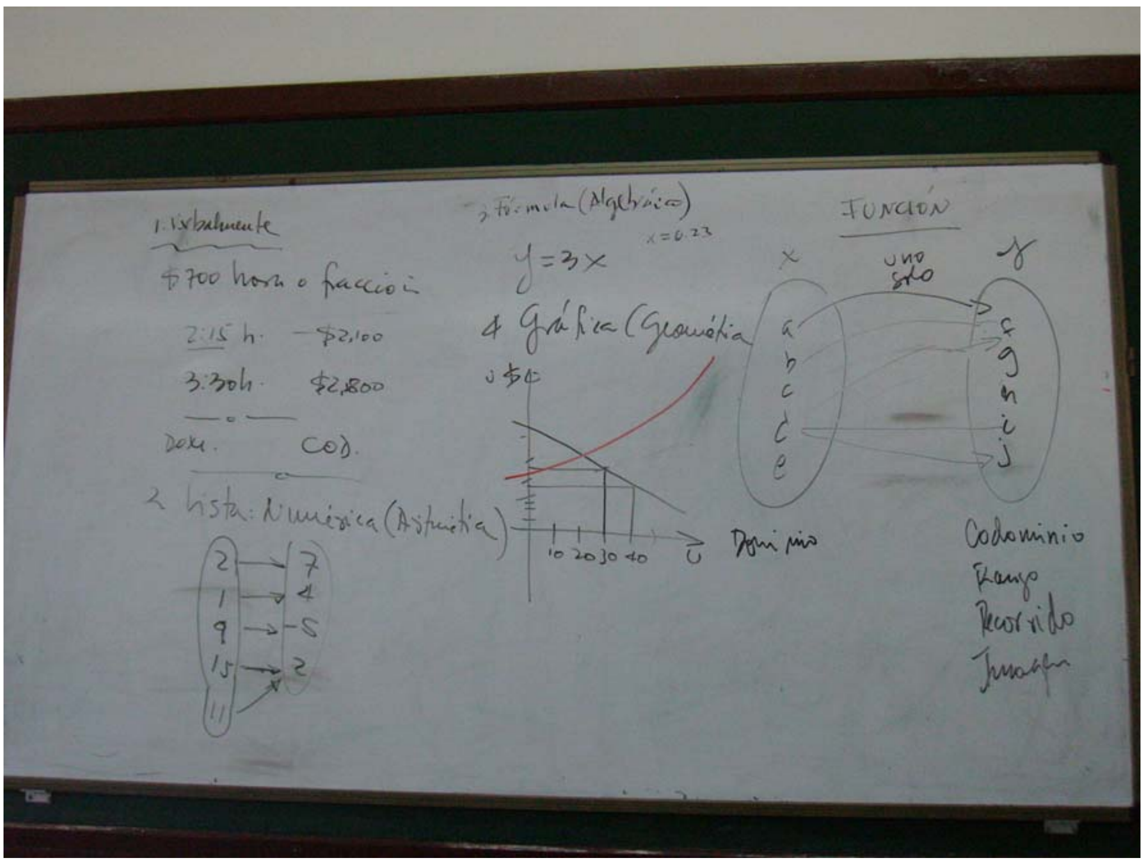
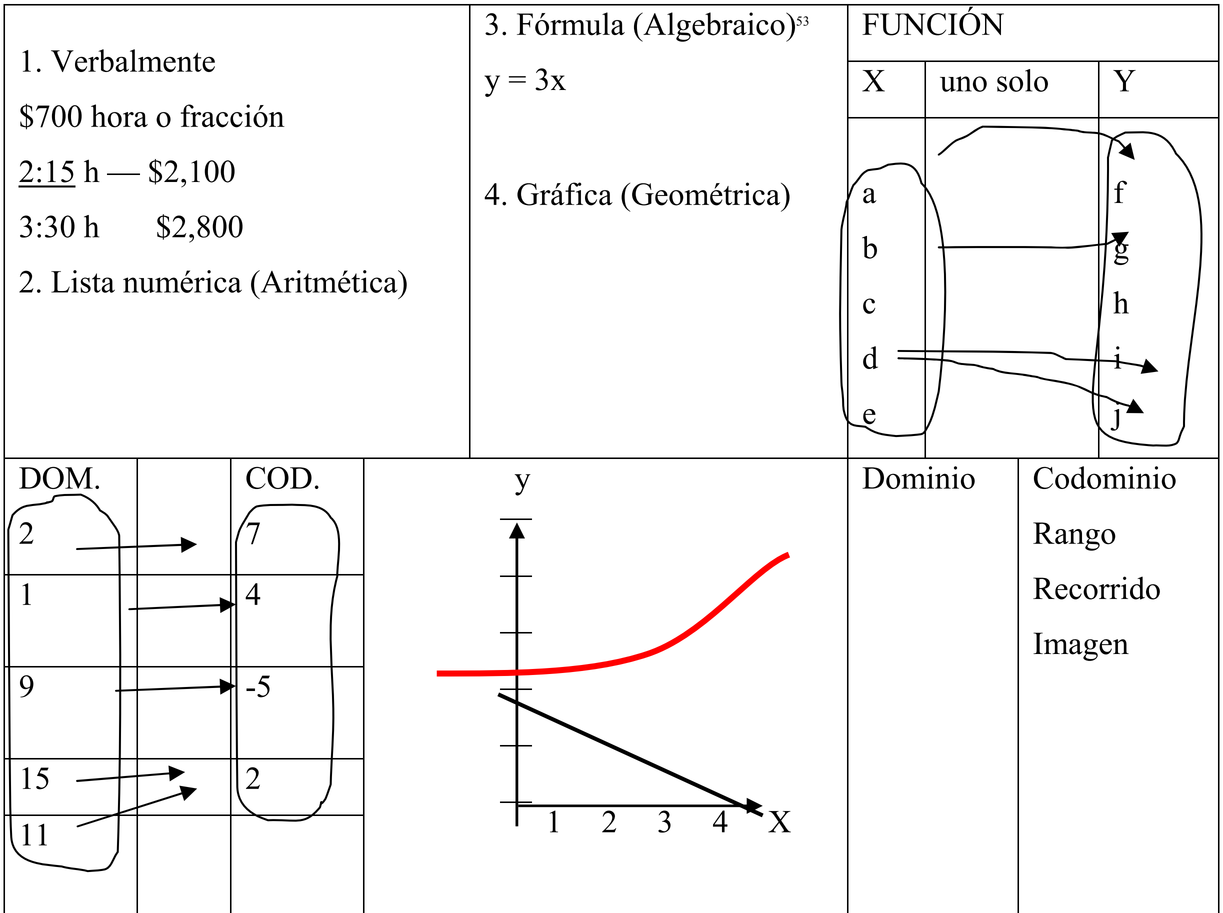



Foto No. 1

[51] La edición ha consistido en quitar palabras repetidas o comentarios irrelevantes sobre lo escrito en el tablero, diagramar por párrafos y colocar puntuación y viñetas. (Nota del Investigador)
[52] Las palabras que aparecen subrayadas corresponden al vocabulario matemático. (Nota del Investigador)




Esquema de la Foto No. 1

Miremos de qué manera concibe la Matemática el concepto de <u>función</u>. Bueno. Entonces, la forma como se concibe la <u>función</u> ustedes la conocen porque son temas que ya han visto.

Hay un <u>conjunto</u> de <u>elementos</u> que se acostumbra en la Matemática denominar con la <u>variable *x*</u> que se llama el <u>Dominio</u> (*dibuja el <u>Dominio</u>. Véase parte superior derecha en la Foto No. 1*) ...cualquier cantidad de <u>elementos</u>.

Y hay otro <u>conjunto</u> que se suele denominar con la <u>variable</u> *y* que se llama: (*escribiendo. Véase esquina inferior derecha en la Foto No. 1)*

---

[53] En algunos casos el Profesor lo escribe en masculino (referido a lenguaje) y en otros lo escribe en femenino (referido a representación) (Nota del Investigador-Profesor)

CoDominio

Rango

Recorrido o

Imagen.

(Dibuja el coDominio. Véase borde derecho en la Foto No. 1)

Todos esos nombres le tienen.

Hay unos profesores a los que les gusta uno, a otros que les gusta otro.

La palabra rango que viene del Inglés: '*range*' que es 'campo'. '*Range'* es como una explanada; como un campo abierto; de ahí viene la palabra.

A mí me gusta coD*ominio* porque como que los ata, ¿No? Genera como la idea que uno tiene de función que es una dependencia: este (*mostrando el coDominio*) depende del otro (*mostrando el Dominio*).

Entonces estos elementos, pues serían aquí, por ejemplo, voy a ponerle:

$a_1$, $a_2$...,

No. (*borrando*) Pongámosle otras letras f, g.

No tiene importancia lo que le pongamos. (Véase la parte superior derecha en la Foto No. 1)

¿Cuál es la condición que tiene que cumplir esta situación para que sea función? Que a cada uno de estos (*mostrando el Dominio*) le corresponda uno solo; "uno solo" (*escribiendo*). Para cada valor del Dominio sólo puede una (*no se entiende*) valor en el coDominio. Si hay más valores no se llama función. Se llama simplemente relación. Entonces esto es para que haya función.

Entonces, ¿De qué manera hacemos depender el coDominio del Dominio? O sea: ¿cómo le adjudicamos a cada uno de los valores del Dominio un valor en el coDominio? Se puede hacer de diferentes maneras.

(LENGUAJE VERBAL)[54]

Se puede hacer verbalmente. ¿Verbalmente cómo podría ser?

---

[54] Los títulos entre paréntesis son para guía de lectura pero no fueron dichos ni escritos en el tablero.

Como por ejemplo en los parqueaderos dice que vale $700 hora o fracción.
Hay un letrero en los parqueaderos que dice (*escribiendo*):
“$700 hora o fracción” (véase la parte superior izquierda en la Foto No. 1)
Entonces para cada cantidad de tiempo que uno se demore en el parqueadero le corresponde pagar una plata. Eso es una función.
Entonces si el Señor se demoró (*escribiendo*) 2 horas 15 minutos. Entonces, ¿Cuánto paga?
Cada hora o fracción. Aquí hay 2 horas y fracción. o sea: son 3.
3 × 7 son $2,100
¿Sí?
Si el Señor se demoró 3 horas y ½ entonces serían 4:
4 × 7 = 28. Son $2,800
Eso sería una función determinada por un texto hablado. Ahí no hay Matemáticas. No hay una fórmula algebraica ni nada. Simplemente un texto.
UN ESTUDIANTE (Giovanni Meneses): (Hace la observación de que hay varias cantidades de horas que pagan la misma plata y entonces no hay relación una a una.)
PROFESOR: Si uno se demora 2 ½ horas paga lo mismo que si se demora 2 horas. Está muy bien su observación. Entonces aquí tenemos una situación que no cumple la condición de función. Pero hay una relación. Está muy bien... o está muy mal lo que usted me acaba de decir. Me parece que no tiene razón. Está muy buena la discusión. Miremos que sí es función.
A dos valores... a un mismo valor no le pueden corresponder... (*señalando el tablero*) Aquí está el Dominio y aquí está el coDominio. ¿Sí? A un mismo valor del Dominio no le puede corresponder dos valores en el coDominio pero sí se puede que a varios valores del coDominio les corresponda el mismo valor en Dominio. Ahí sí no hay problema. ¿Correcto? Hagámoslo gráficamente.
Supongamos (*escribiendo en el tablero*) que a b también le corresponde el f. Y a d también le corresponde el f.
¿Eso es función? Sí es función. Lo que no puede ser es que a este (*Señalando un elemento del Dominio*) le salgan dos flechas. Dicho gráficamente que es una buena manera de

explicar las cosas: de uno de estos elementos (*señalando el Dominio*) no pueden salir dos flechas. Una para un lado y otra para otro. Pero aquí (*señalando el coDominio*) si pueden llegar cualquier cantidad de flechas. Entonces corrijo lo dicho. Estamos en lo cierto de que sí es una función y que no importa que se repita. Lo importante es que a una… o sea: lo que no serviría, hablemos del caso del parqueadero, es que pongan una forma de cobrar que le permita al señor del Parqueadero cobrarle a unos un valor y a otros otro. No. El que se demora dos hora y un minuto siempre le cobran lo mismo. No según "el marrano" como dicen. No; sino que tiene una ley fija; pero no importa que haya varios valores para el mismo tiempo. No importa.

Muy buena las observaciones. Me gustan mucho porque generan discusión y ayudan a aclarar las cosas. Me aclaran inclusive a mí.

(LENGUAJE ARITMÉTICO)

Dijimos que verbalmente era una forma. La otra forma es por una lista, o sea de manera numérica. O si queremos decir, de manera aritmética. Entonces yo digo: (*escribiendo en el tablero. Véase la inferior izquierda en la Foto No. 1*).

Al 2 le corresponde el 7

Al 1 le corresponde el 4

Al 9 le corresponde –5 y

Al 15 le corresponde el 2

No más. Eso es toda la función. El Dominio son cuatro elementos y el coDominio otros cuatro y están relacionados de esa manera. Lo que no puede ser es que al 2 le correspondan dos valores. Yo puede agregar uno que diga aquí 11.

Al 11 le corresponde también el 2

No pasa nada. Lo que no puede ser es que al 2 (señalando el Dominio) le correspondan dos valores.

Efectivamente entonces esa podría ser otra forma de función: como una lista como una lista de marcado que eso es lo que tiene las niñas que atienden las fotocopiadoras, 1 fotocopia tanto, 2 fotocopias tanto, para no tener que multiplicar, 15 fotocopias valen tanto, 30 fotocopias tanto entonces de esa manera pueden saber el valor.

Entonces primera forma verbal, segunda forma como una lista.

(LENGUAJE ALGEBRAICO)

Una tercera forma, que es la que vamos a ver la mayoría de veces en este curso[55], porque es la forma matemática más funcional y que tiene una operabilidad mucho mejor, es con una fórmula. Con una fórmula es por un sistema algebraico.

Entonces yo digo, por ejemplo… acudimos a la nomenclatura que se acostumbra utilizar. Entonces yo digo que (*Escribiendo. Véase la parte superior central en la Foto No. 1*):

y = 3x

Y con eso yo lo digo todo ya; ya no toca decir nada:

Cuando *x* vale 5, a Y le corresponde… ¿Cuánto? 15.

O sea: con una fórmula se dice todo.

¿Realmente cuántos valores puede tomar la *x*? Infinitos valores.

Entonces también habrá infinitos valores para la Y.

Entonces fíjense todo lo que estamos diciendo con esta formulita: estamos dándole infinitas posibilidades de elementos al Dominio y al coDominio. Uno ya se acostumbró. Ya no le asombra ni nada, pero es una herramienta muy poderosa que con una fórmula tan simple pueda decir tantas cosas y pueda uno generar dos conjuntos tan grandes, tan grandes que son infinitos. Todo con una fórmula.

Entonces tenemos:

- Con un texto o sea verbalmente
- Con una lista numérica o sea aritméticamente
- Con una fórmula o sea algebraicamente

(LENGUAJE GEOMÉTRICO)

La otra forma es gráficamente o sea con una gráfica, que se llama geométricamente. Geométricamente es que yo digo, por ejemplo…

---

[55] Este énfasis es importante dentro de la Filosofía pedagógica del Profesor. Él considera que los textos hablan de los tipos de funciones que se está exponiendo pero el resto del curso se limita a manejo de fórmulas. (Nota del Investigador-Profesor)

A ver: ¿Qué puedo decir con una gráfica?

El precio de los zapatos es así: (*Trazando unos ejes*) estos son pesos (*señalando el eje Y*) y estos son unidades de zapato (*señalando el eje x*). Aquí van las unidades y aquí otras unidades. Entonces esto es (*marcando las medidas en el eje x*) 10, 20, 30, 40,… y éste es el precio unitario del zapato.

Entonces yo digo:

Si yo compro 30 zapatos, ¿a cómo me salen?

Me salen a este precio. En realidad esta recta debe ser descendente (*borrando la recta. Véase la parte central en la Foto No. 1*) porque mientras más zapatos compre, más baratos me salen. Si yo compro 40 me salen a esto (*Señala el corte sobre la recta de la abscisa 30)*. Entonces en la gráfica yo puedo leer. Lógicamente en una gráfica que esté bien hecha y que se haga con precisión etc.

La lectura de una función en una gráfica no es tan precisa, porque una gráfica puede tener errores, y ya medidas tan pequeñas como uno puede hacerlo en Matemáticas ya no es tan fácil aquí. Yo puedo poner

$$x = 0.23$$

y calcularlo y me da la Y exacta.

Si yo lo hago en la gráfica no puedo leer cosas tan exactas. Entonces la gráfica tiene limitaciones. Pero la gráfica tiene la ventaja de que uno visualiza el comportamiento de la función. Por ejemplo en lo que estoy diciendo, es una función descendente; o sea: mientras más zapatos compre más barato me sale. Es lo que está diciendo esa gráfica. Entonces tiene esa enorme ventaja: de que uno visualiza el comportamiento.

Si a uno le dicen el producto interno bruto de Colombia se está comportando así (*traza una curva roja sobre los ejes. Véase parte central en la Foto No. 1*) ¿Colombia va mejorando o empeorando? ¡Mejorando! Uno puede decir eso sin mirar las cifras. Está creciendo el producto interno. Está creciendo muy rápido. Entonces la cosa va bien.

Entonces le da a uno información muy inmediata, muy funcional, muy práctica. Por eso los economistas utilizan tanto la gráfica: porque es que una gráfica para una persona que tiene que manejar información: un Ministro de Hacienda, un Gerente de empresa, la gráfica es muy funcional porque, sin necesidad de leer cifras, le va indicando el comportamiento.

Bueno: esa es la parte general de lo que estamos hablando de funciones. ¿Alguna pregunta?

ESTUDIANTE: (*no se entiende*)

PROFESOR: Si la gráfica es continua no tiene ningún inconveniente en el Dominio. Por lo tanto no tiene ninguna interrupción, o sea, serían los números reales.

Lo que pasa es que para saber el Dominio más preciso tendríamos que saber la ecuación. La ecuación es la que nos va a informar de una manera más precisa, porque hablando en términos de si esto es una curva continua, recordemos el concepto que ustedes seguramente conocen: una curva que tiene una asíntota. (15’ 01”)

¿Recuerdan qué son las asíntotas? Son valores a las cuales no puede llegar la función. Entonces: si esto tuviera una asíntota, acá contestando tu pregunta, entonces el Dominio no llega sino hasta may cerca. Si hay función de aquí para allá, que la función terminara así entonces quiere decir que el Dominio tiene una interrupción o sea decir en una gráfica Dominio y coDominio resulta información insuficiente porque no sabemos, visualmente vemos el comportamiento pero la parte de cifras matemáticas se nos queda un poquito incompleto. Entonces podemos predecir un poquito pero ya para llegarlo a calcular necesitamos definitivamente la fórmula. La fórmula es la que nos va permitir hablar de Dominio y coDominio entonces esa es la parte general.

(TIPOS DE FUNCIONES)

Bueno. Entonces vamos a hacer un barrido por todas las funciones que se van a manejar en este curso. Ahí podemos representarlas de diferentes maneras.

Veamos qué es lo que yo voy a hacer: Voy a representar en:

Lenguaje algebraico

Lenguaje aritmético

Lenguaje geométrico y

Lenguaje Verbal

las diferentes funciones que vamos a ver. En el ejercicio de hoy voy a exponer dos. Las más sencillas. La tercera la hace cada uno de ustedes en su plantilla y, a partir de la cuarta, yo continúo trabajando y me llevo las plantillas. Ustedes van a tener que hacerse el montaje de las plantillas de todas las funciones, pero por ahora vamos a trabajar una que es la función que vamos a ver.

Miremos las funciones que vamos a ver, bueno entonces voy a hacer una lista de las funciones que vamos a trabajar:

Función constante

Función Identidad

Función Potencia

para n =1

para n=2

para n =3

Se podrían hacer todas las que quisiéramos pero vamos a ir hasta ahí no más.

Función polinómica

Función Racional

Función Trigonométrica y la función correspondiente inversa o sea

Función Trigonométrica inversa

Función Exponencial y

Función Logarítmica

Esas son las funciones que vamos a ver pero no hoy. Vamos a verlas en varias secciones pero para que tengan la lista completa.

(FUNCIÓN CONSTANTE)

Bueno. Empezamos con la función constante. En primer lugar, toda función tiene un nombre. Ese nombre pues es en lenguaje verbal. Entonces ese nombre lo vamos a poner aquí en el centro (*escribiendo en el tablero. Véase la parte inferior central en la Foto No. 2*).

La hojita no la utilicemos. Tomen apuntes como quieran y en la tercera <u>función</u> que veamos ustedes va a hacer un trabajo de la <u>función</u> potencia en los mismos <u>términos</u> que veamos las otras.

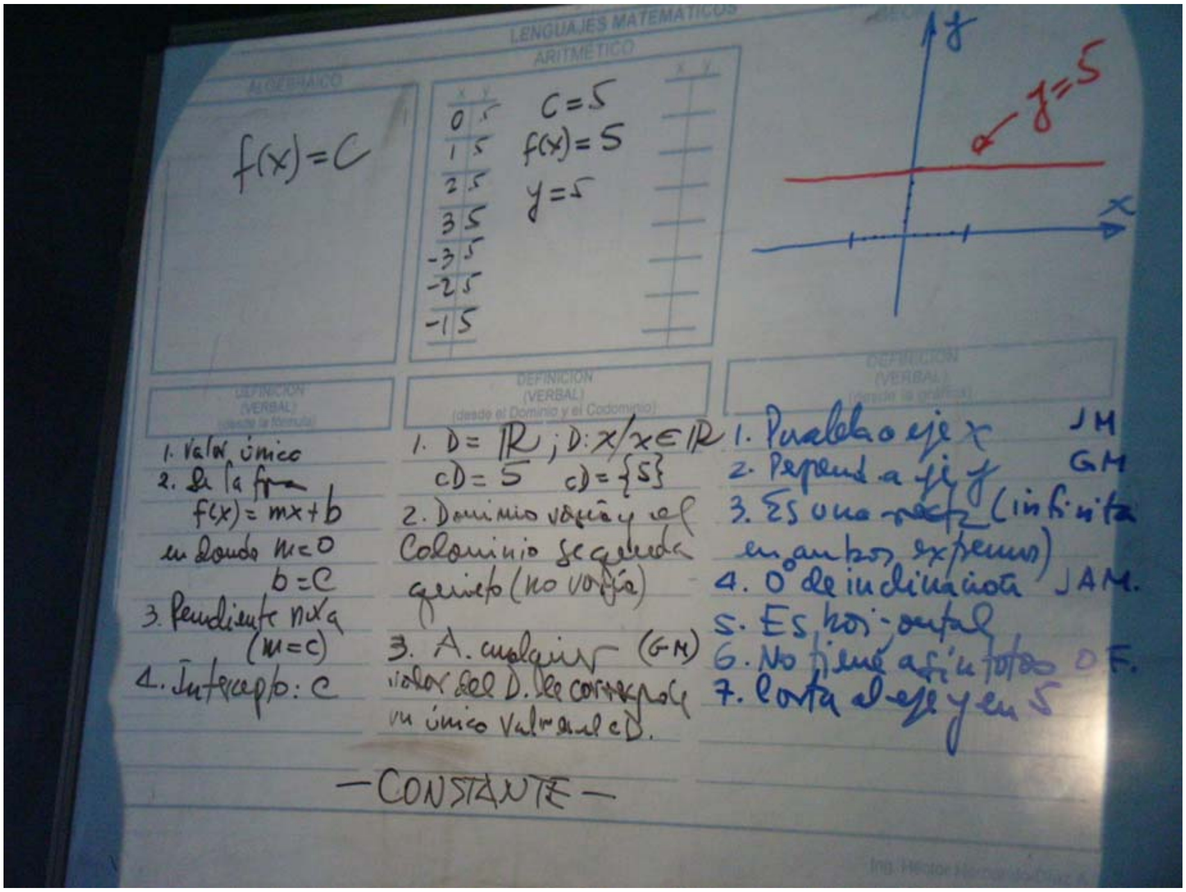
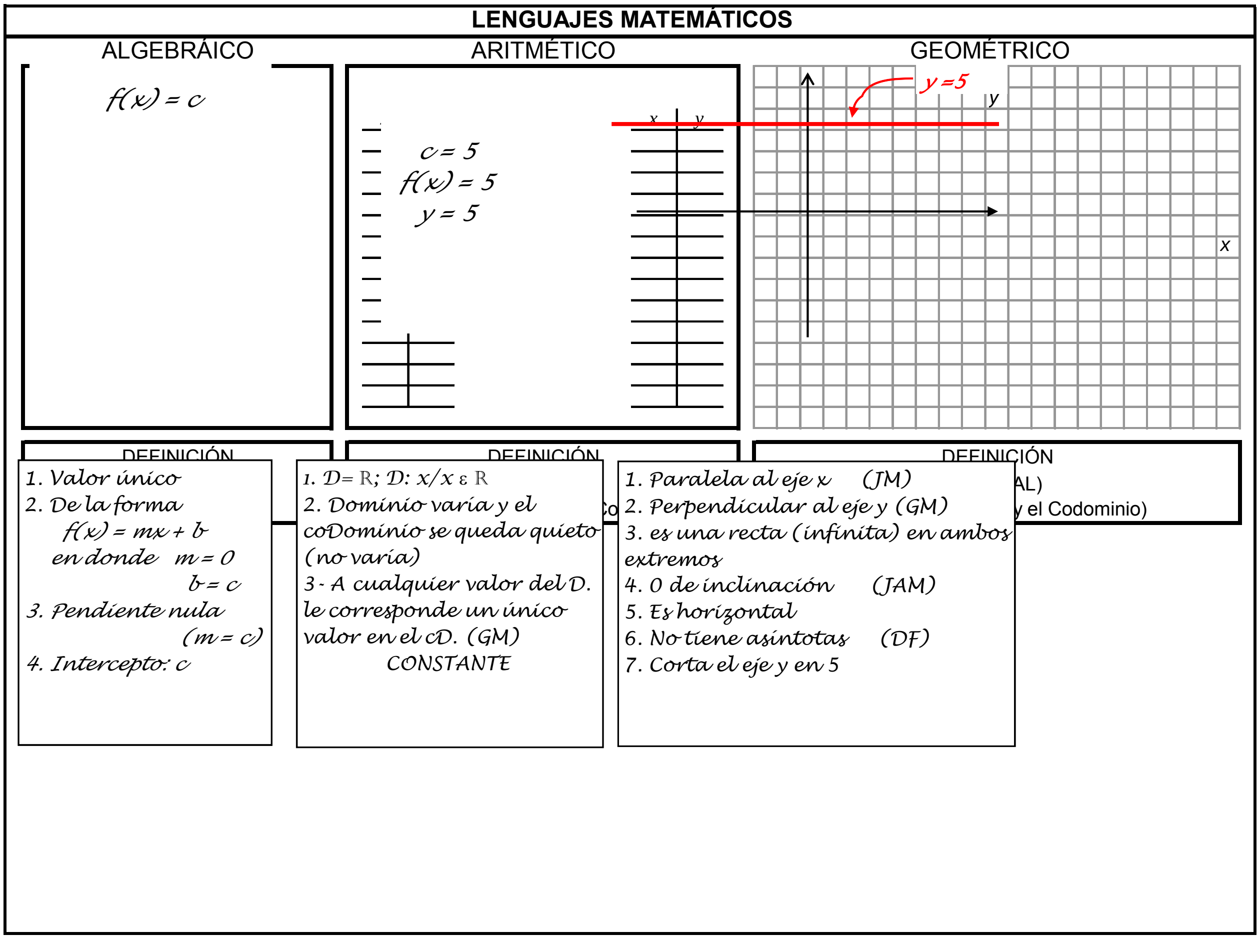



Foto No. 2




Esquema de la Foto No. 2

NOTA EXPLICATIVA: Las iniciales que aparecen al frente de cada numeral en el texto de la tercera columna corresponden a las iniciales de los estudiantes que aportaron cada uno de esos planteamientos con el fin de darles una nota de reconocimiento. (Nota del Profesor/Investigador)

(LENGUAJE VERBAL [Natural])

Entonces en primer lugar en Lenguaje Natural que se llama, la función tiene un nombre que es **constante.**

(LENGUAJE ALGEBRAICO)

En lenguaje algebraico tiene una fórmula. ¿Alguno recuerda la fórmula de la función constante?

UN ESTUDIANTE: f (x) = x

PROFESOR: ¿Esa es la función constante? ¿Por qué es la función constante?

Constante como que uno pensaría que es que *y* siempre tiene el mismo valor. ¿ *y* siempre tiene el mismo valor? (21' 07")

UN ESTUDIANTE: ¿? (no se entiende)

Va cambiando:

Cuando *x* vale 3 *y* vale 3

UN ESTUDIANTE: Directamente proporcional

EL PROFESOR: Sería directamente proporcional. Eso es correcto. Es una recta pero: ¿Esa es la función constante?

La función constante es que el valor es constante y ahí va subiendo.

Cuando *x* vale 5 y vale 5

Cuando *x* vale 10 y vale 10

O sea no es constante. No es igual uno del otro. Veámoslo así: La función constante es que es constante por eso se llama constante.

UN ESTUDIANTE: f(x) = una constante

¡Correcto! ¡Eso sí!:

*f(*x*)* = a una constante

Pongámosle una letra para que veamos la posibilidad de todas.

*f(*x*)* = a

Vamos a usar la nomenclatura de los textos. Siempre cuando usan constante la llaman *c*. Pongamos:

f(x)= c

¿Correcto?

En lenguaje algebraico función constante es:

f(x)= c

A una constante cualquiera.

Listo. Bueno. Entonces, ¿Estos renglones para qué son? (*señalando la plantilla en la parte inferior izquierda en la Foto No. 2*). Estos renglones son para que nosotros digamos frente a la fórmula de la función todo lo que se nos ocurra decir.

Voy a decir una cosa sobre esa fórmula y luego ustedes dicen otras cosas. Yo voy e decir que esta ecuación tiene un valor único. (*escribe en el tablero*)

¿Qué más se les ocurre a ustedes decir sobre esa fórmula?

A ver. Para que miremos cuál es la dinámica de esta explicación. Lo que digamos aquí (*señalando la primera columna en la Foto No. 2*) es sobre la fórmula; lo que digamos aquí (*señalando la segunda columna en la Foto No. 2*) es sobre Dominio y coDominio y cuando lleguemos aquí (*señalando la tercera columna en la Foto No. 2*) hablamos de cómo es la gráfica. La forma de la gráfica. ¿OK? (23' 19")

Entonces de la fórmula no hay mucho que decir. Esa característica tiene el Álgebra: que uno nombra una fórmula y se le acabó el tema porque es que la fórmula lo dice todo. A mí se me ocurre poner que valor único. (*Escribe. Numeral 1 de la primera columna en la Foto No. 2)*

¿Qué otras cosas se les ocurre a ustedes para comentar qué forma tiene esa ecuación?

Repacen las formas de ecuación que aquí vimos.

¿Cuál es la forma de ecuación de la recta? Forma general de una recta: ¿se acuerdan? Ecuación pendiente - intercepto. ¿Cuál es? monstruo verde comepiedras. Ecuación pendiente - intercepto. ¿Cuál es? ¿Cuál es?

y =… ó f(x) = mx + c.

Entonces (*escribiendo*) esta ecuación es de la forma f(x), la vamos a llamar f(x) para mantener la nomenclatura f(x) = mx + c (*renglones 2 y 3 de la primera columna en la Foto No. 2*)

Pero en esa fórmula ¿Cuánto vale m, o sea dónde esta la m?

Ustedes acostumbran a usar b, entonces dejemos la b para respetar la nomenclatura: Da lo mismo cualquier letra pero para que hagamos referencia a lo que estuvimos viendo.

¿Cuánto vale m en la fórmula f(x) = mx + b ¿ah?

Cuando algo no está es porque vale…¿cuánto? 0. ¡Correcto!

Cuando alguien no está, es porque está ausente. ¿No?

¿Dónde están los estudiantes de ecuaciones diferenciales? No. No está ninguno. 0. Entonces:

¿Cuánto vale m? Es una ecuación de la forma de f(x) = mx + b

En donde ¿m= a qué?

y b = a… ¿A cómo? a la constante y ¿cómo se llama la constante¿ Eso es una cosa que podemos decir. Que esa ecuación tiene la forma de una ecuación de una recta que es:

f(x) = mx + b

¿Dónde m es 0. ¿Qué es m? En una ecuación: ¿Qué es m?

Diga duro. Yo quiero que digan duro lo que se les ocurra aunque la embarren, porque es que me ayudan. Si la embarran mejor. Entonces yo ya sé que no entendieron y les vuelvo a explicar. Pero si ustedes se callan es que les da pena habla.

UN ESTUDIANTE. B es un intercepto.

PROFESOR: b es un intercepto. ¡Correcto! ¿Y m?

UN ESTUDIANTE. La pendiente.

PROFESOR: la pendiente. ¿Y cuánto es la pendiente?

UN ESTUDIANTE: Cero.

Profesor: 0. Entonces vamos a poner también eso. De una vez lo podemos decir (*escribiendo. Renglón 4 de la primera columna en la Foto No. 2*). Pendiente… pongamos pendiente nula. Digámoslo en Álgebra m=0. Ya lo habíamos dicho, pero entonces hablemos de que esa es la pendiente, o sea, un concepto complementario.

¿Cuánto es el intercepto? La constante, digámoslo también. Otra palabra que nos sabemos el intercepto = a la c. *(Escribiendo. Numeral 4 de la primera columna en la Foto No. 2*)

¿Qué más se les ocurre decir? Bueno.

(*Cuenta un chiste a propósito de un estudiante que se quitó un zapato*) Es como la propaganda del avión. ¿La han visto? (*risa*) Pero no se moleste con lo que te voy a decir. Estoy haciendo un chiste para divertirme. El señor que se quita los zapatos en el avión. (*risa*). No lo tome a mal.

¿Qué más podemos decir de esa fórmula? ¿Qué más decimos?

Bueno. Pasemos entonces a la Aritmética. Vamos a darle valor a la $x$ para hallar $f(x)$. Entonces. En primer lugar, para poder hablar de valores aritméticos, tenemos que darle un valor a la c. ¿Cuánto quieren que valga c?

Digamos que c = 5. En lenguaje aritmético consiste en eso. En darle valores a las letras. Cuando yo le doy valores a las letras estoy pasando de Álgebra a Aritmética. Eso es lo que estoy haciendo. Entonces si c vale 5 entonces: ¿La ecuación cómo queda?

$f(x)=5$

Entonces. Como nosotros vamos a darle valores a la $x$ para que aparezcan unos valores en y, porque después vamos a dibujar aquí, voy a irlo haciendo de una vez. Cuando pasemos al lenguaje geométrico vamos a dibujar la gráfica acá. Entonces voy a darle a la ecuación la forma de y =5 para que me aparezcan valores de $y$ y los pueda dibujar allá (*señalando los ejes en la Foto No. 2*).

Entonces comienzo a dar valores: Cuando x=5 ¿cuánto vale $y$? Me gusta que digan lo primero que se le ocurra. Si los estudiante no se equivocaran, costaba muchísimo trabajo dar clase, porque no sabría uno qué decir. Hablaba uno y se iba para la casa, porque si no se equivocan nunca… Entonces equivóquense, porque necesito que se equivoquen.

Entonces: cuando $x$ vale 0 y vale uno (1). ¿Quién dijo Cero para que conversemos? Uno siempre tiene la costumbre de decir: Cundo $x$ vale 0, $y$ vale 0. Pero aquí la $y$ siempre vale 5. Por eso se llama función constante la $y$ siempre va a valer 5, porque no hay dónde remplazar la $x$ además, hablando en términos prácticos: ¿Dónde pongo yo la $x$ si no hay $x$? Cuando $x$ vale 1, $y$ vale 5; cuando $x$ vale 2 $y$ vale 5; cuando $x$ vale 3 $y$ vale 5; cuando $x$ vale –3 $y$ vale 5; cuando $x$ vale –2 $y$ vale 5; cuando $x$ vale -1 $y$ vale 5; ahí como para agotar la tinta y el marcador y la saliva mía y el tema y el Dominio. Bueno. Entonces, como ven, ése es el comportamiento.

¿Qué se les ocurre decir a ustedes en lenguaje verbal sobre ese comportamiento? (30’ 25”)

Digan cosas. Eso lo podemos decir de esta manera; no hay ninguna limitación en el Dominio o sea:

¿Cuál será el Dominio?

UN ESTUDIANTE: Todos los reales.

PROFESOR: Todos los reales. ¡Correcto! (Escribe. Véase Numeral 1 de la segunda columna en la Foto No. 2)

El coDominio, que yo acostumbro escribirlo así ¿cuál será?

UN ESTUDIANTE: De cero a cinco

PROFESOR: ¿de 0 a 5?

UN ESTUDIANTE: Valor único.

PROFESOR: El coDominio tiene valor único. ¿Correcto! Nunca es distinto a 5. Entonces podemos decirlo de otra manera, como acostumbran en la teoría de conjuntos, que el Dominio está formado (*Escribe. Numeral 1 de la segunda columna en la Foto No. 2*). por valores *x* tal que *x* pertenece a los números reales o sea esa es la forma como se acostumbra escribir la notación de la teoría de conjuntos. ¿Correcto? Y el coDominio no tiene nada que agregar. No es sino el puro 5. Entonces podemos decir que el coDominio es igual al conjunto formado por el número 5. El elemento 5 no más. El coDominio podemos enumerarlo todo.

Bueno, pero esto es en fórmulas. Ahora quiero que lo digan en palabras. Quiero que hagan una descripción en palabras del Dominio y del coDominio.

UN ESTUDIANTE: Son los valores para los cuales hay valor en el coDominio. (32’ 24”)

PROFESOR: Bueno. Esa es una muy buena definición de Dominio que es la definición clásica: que el Dominio comprende los valores para los cuales haya valor en el coDominio. porque si no, no… El coDominio es una constante, pero yo les quiero pedir que me relacionen el Dominio y el coDominio. ¿Cómo se comporta?

UN ESTUDIANTE: (*no se entiende*)

PROFESOR: Digámoslo así, ya que a usted se le ocurrió decirlo así. Vamos a decirlo así. No crece. Digámonos así. ¡Me gusta eso! Es poco matemático pero me gusta. Porque es que estamos hablando cosa que entienda todo mundo. “Como para la abuelita” como dicen. Entonces el Dominio varía y el coDominio… podemos decir como usted dijo: que se queda quieto. Aquí estamos haciendo Lenguaje Natural o sea lenguaje… Se queda quieto y podemos decir entre paréntesis: no varía ((*Escribe. Numeral 2 de la segunda columna en la Foto No. 2*).

Bueno. ¿Quién lo dice de otra manera?

Ustedes podrían decir lo mismo, pero pueden decirlo de otra manera; en otra frase.
UN ESTUDIANTE: (*no se entiende*)
PROFESOR: ¡Correcto! ¿Muy bien, amigo Giovanni! Pero digámoslo en términos como está pedido ahí.
UN ESTUDIANTE: (*no se entiende*)
Entiendo. Entonces no es para todos en conjunto sino para cualquiera. ¿No te parece que lo que usted (sic) está diciendo… para cualquier valor… voy a poner aquí… fue una idea tuya y yo te la califico. Para cualquier valor… digámoslo con *a*: a cualquier valor del Dominio le corresponde el mismo valor en el coDominio.¿Está bien?
UN ESTUDIANTE: Un único valor.
PROFESOR: Un único valor. Si lo prefieres así. Lo cambiamos así ((*Escribe. Numeral 3 de la segunda columna en la Foto No. 2*). Le corresponde un único valor en el coDominio. (35' 19")
Bueno. ¿A quién se le ocurre más?
Muéstrame la plantilla. La plantilla viene diseñada para que a ustedes si se les sigue ocurriendo cosas siguen aquí (*mostrando el respaldo de la hoja*) todo lo que se les ocurra decir. ¿OK? Viene así diseñada para eso.
¿Qué más quieren decir? ¿Alguien puede decir eso de otra manera? A ver…
UN ESTUDIANTE: El Dominio es positivo.
PROFESOR: El problema está en que si yo estoy diciendo que el Dominio es positivo estoy refiriéndome a esa función en particular, pero yo quiero que digamos cosas que sean válidas para todos los casos. Yo estoy de acuerdo que en este caso escogimos una constante positiva, pero no es una condición que deba cumplir la función constante. Puede ser:
$f(x) = -2$ también.
¿Quién lo dijo? ¿Tú? ¿Quién comentó? Quiero que hablemos de la función constante o sea: usemos el ejemplo para poder escribir letras de los números aritméticos, pero estamos hablando de la función constante.
Yo no sé. De golpe ya quedó dicho todo. ¿No?

Pasemos al otro. Entonces para $x = 0$ $y = 5$ entonces voy a poner aquí (escribiendo) 1 2 3 4 5 entonces para 1 2 3 4 5 –5 2 3 4 5 y aquí 5 entonces para x= -0 $y$ =5 para $x$ = 2 5; todo 5; todo 5; todo 5;  todo 5; Acá entonces la función es $y$ = 5 correcto. Ahora quiero que se olviden del Dominio, se olviden de la fórmula y miren la gráfica y digan cosas de la gráfica todo lo que se les ocurra de la gráfica bueno entonces voy a escribirlo en azul. Bueno. Jennifer Vargas (sic) (la estudiante se llama Jennifer Martínez) a todo el mundo se le da premio aquí. Todo el que hable. Entonces. Es paralela al eje $x$. (*Escribe. Numeral 1 de la tercera columna en la Foto No. 2*).

Otra idea.

UN ESTUDIANTE: Es perpendicular a $y$.

PROFESOR: ¡Correcto. Escribiendo) Es perpendicular al eje $y$. También. Sí señor Giovanni. El chino hablador. Entonces (*Escribe. Numeral 2 de la tercera columna en la Foto No. 2*). Perpendicular al eje $y$ ¡Perfecto!

¿Qué mas? A ver. No repitamos. El que habló ya, se le acaba el turno. Que hablen los demás. ¿Qué más?

Y eso, ¿por qué nadie ha dicho que es una recta, por ejemplo? Eso lo dije yo. Eso es mío. ((*Escribe. Numeral 3 de la tercera columna*). Es una recta. Es que lo más evidente se olvida. ¿Qué más?

UN ESTUDIANTE: Es infinita.

PROFESOR: Dejemos. Podemos colocar 'infinita' pero dejemos infinito como una propiedad de toda recta. Entonces, una recta es infinita; lo que no es infinito es un segmento de recta; recuerdan los conceptos de Geometría. Segmento de recta es un pedazo de recta, pero la recta es infinita para los dos lados. Y hacemos caer en cuenta que es infinita, pero está muy bien que se diga que es infinita, pero es propiedad de la recta. Al decir que es recta se entiende que es infinita. ¿Qué más? Digamos infinita en ambos extremos (*Escribe. Numeral 3 de la tercera columna*).

Bueno, en este caso si podríamos hablar de positivo y negativo, pero un recta en el espacio no tiene lado positivo y negativo porque no se sabe para qué lado es la derecha y para qué lado es la izquierda. No hay una nomenclatura. Bueno, a ver. Van a quedar grabadas una serie de risas que no dejan hablar. A mí me gusta que la pasen bien pero que se oiga. Bueno. Otra idea.

UN ESTUDIANTE: Tiene Cero (0º).

PROFESOR: ¿Tiene Cero (0º) de qué? ¿Cero (0º) de inclinación? ¡Perfecto! ¿Cómo es su nombre? José Alejandro Mendoza (*escribiendo*) Cero (0º).

UN ESTUDIANTE: m = 0

PROFESOR: m = 0 es en términos algebraicos. Cero (0º) de inclinación es en términos geométricos. Es un lenguaje. Por eso les dije que nos olvidemos de las fórmulas ¿No? Miren acá (*señalando la fórmula*) sino miren la gráfica y digan cosas sobre la gráfica lo que los ojos le dicen. Ni fórmulas, ni pendientes, ni ecuaciones, ni nada, sino lo que la gráfica dice.

Yo también voy a decir cosas, porque si ustedes no dicen… Es horizontal ¿sí o no?

UN ESTUDIANTE: No tiene asíntotas.

PROFESOR: Bueno discutamos el cuento de las asíntotas. Efectivamente no tiene asíntotas. No es que yo esté en desacuerdo. No tiene asíntotas. Bueno: no tiene asíntotas en ninguna parte. Lo que pasa es que realmente las asíntotas son una propiedad de las curvas, pero como no es ninguna mentira lo que estamos diciendo y es importante que salgan a relucir todo lo que ustedes sepan, pues se trata es de que se luzcan aquí.

Bueno. Otra cosa. ¿Qué más?

UNA ESTUDIANTE: (*no se entiende*)

PROFESOR: ¿Qué hubo? ¿Qué quieres decir? No te entendí. Más durito. ¿Cómo es tu nombre? Gisela. Estamos hablando de las características que tiene la gráfica de la función constante y una de las características es que es una recta. ¿Qué otra cosa quieres decir? Que no te entiendo cuál es la diferencia entre eso. ¿Qué otra cosa querías agregar? La gráfica es una recta. Sí, es lo mismo o sea: estamos hablando de que la gráfica de esta función es una recta. Ya queda dicho así. ¿Alguna más?

UN ESTUDIANTE. (*No se entiende*)

PROFESOR: ¿Abarca todo qué?

UN ESTUDIANTE: (no se entiende)

PROFESOR: ¿En dónde corta el eje *y*?

UN ESTUDIANTE: En 5.

PROFESOR: ¿Por qué no decimos esa vaina (sic)? Corta al eje y en 5. *(Escribe. Numeral 7 de la tercera columna en la Foto No. 2)* Corta al eje *y* en 5.

Bueno señores, ustedes le van a poder agregar lo que quieran. Ustedes se llevan para la casa las plantillas y montan… y a ustedes se les ocurre lo que quieran. Por cada cosita que le agreguen yo le voy dando nota y pueden sumar y sumar. Toca que sean cosas coherentes, cosas que tengan sentido y cosas que sean ciertas obviamente. La tarea es que ustedes se lo van a llevar y entonces trabajan individualmente, porque cada cosa que digan no se lo valgo sino a uno. Entonces, si ustedes piensan copiar la tarea pues pierden puntos.

¿Cuántos puntos les voy a dar? No sé, porque es muy difícil sacar las cuentas ahoritica (sic), pero yo le voy a dar puntaje por decir cantidad y todas las cosas que ustedes digan suman. Bueno entonces queda vista la función constante. (44’ 40”)

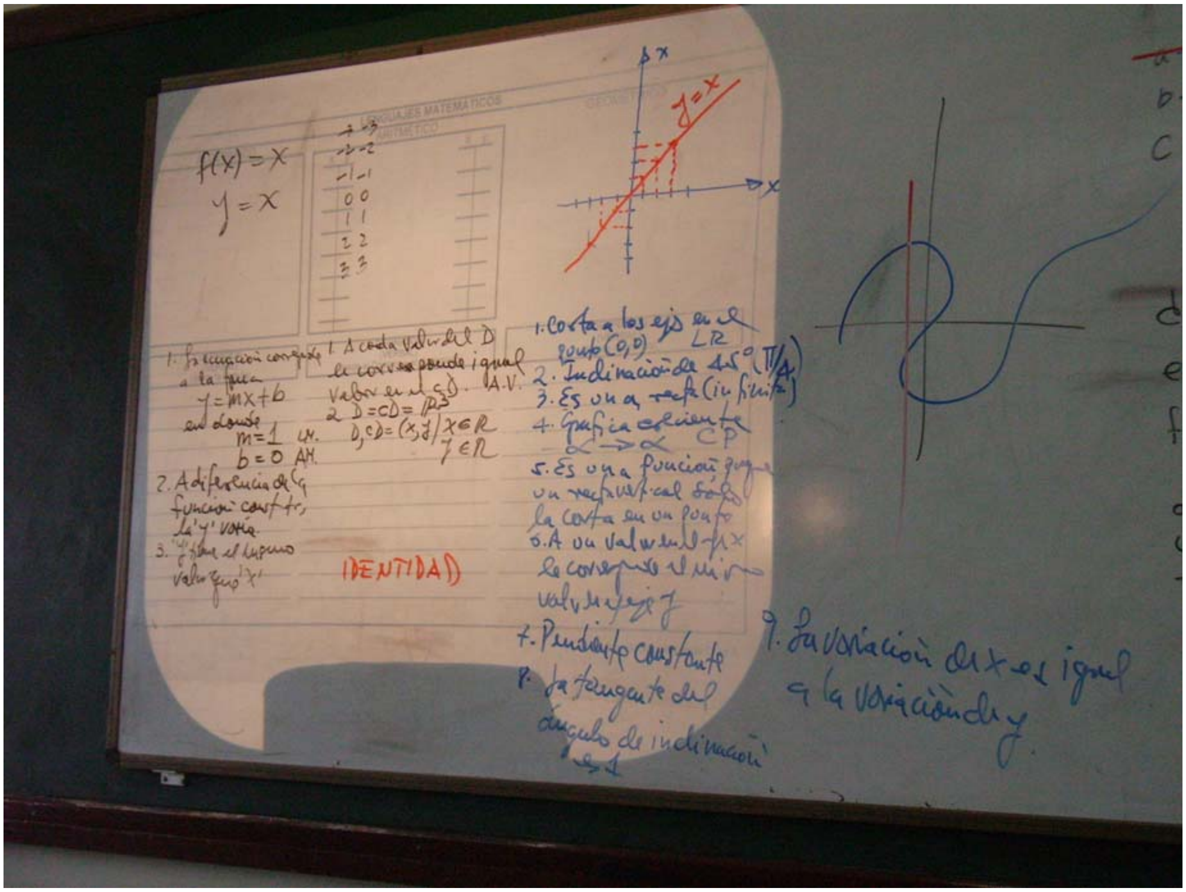
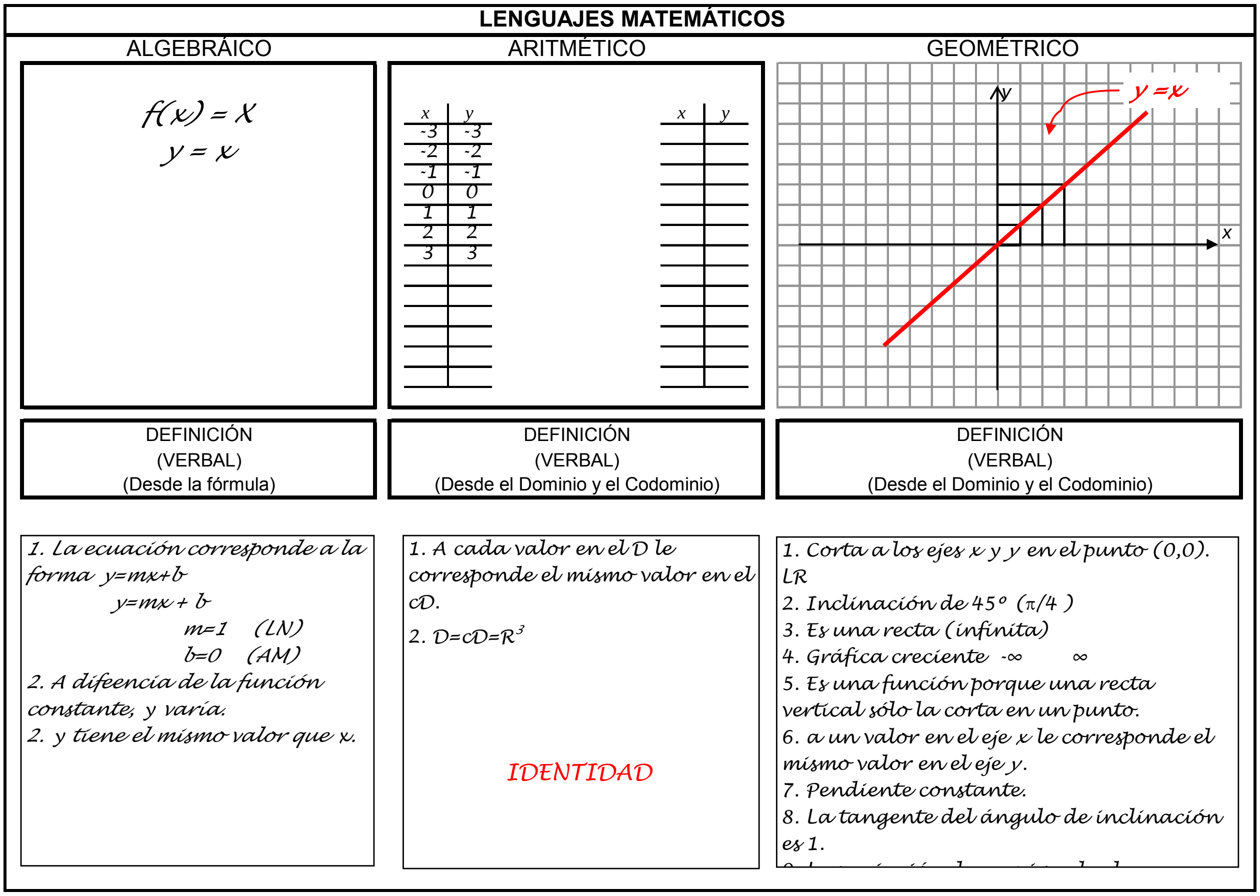

f(x) = x
y = x
y=x
IDENTIDAD
7. Pendiente constante
9. La variación de x es igual a la variación de y.

Foto No. 3




FUNCIÓN IDENTIDAD. Bueno señores, ya vimos la función constante ahora vamos a ver la función identidad. Entonces le ponemos el nombre acá: (*Escribe. Véase parte central en la Foto No. 3*). IDENTIDAD.

¿Cuál es la fórmula de la función identidad? ¿La recuerdan? ¿Se acuerdan o no se acuerdan?

UN ESTUDIANTE: *f(x)* = *c*

PROFESOR: No. Esa es la función constante. Igual a un número.

¿Se acuerda o no se acuerdan?

f(x) = x

Ustedes la habían nombrado antes. Se adelantaron un número. Entonces la fórmula es

f(x) = *x*

¿OK? ¿Qué se le ocurre decir sobre esa fórmula?

UN ESTUDIANTE: Que $y = x$

Vamos a decir que $y = x$ o sea cuando pasemos al lenguaje aritmético diremos que $y = x$ pero entonces vamos a decirlo de una vez: (*Escribe. Parte superior izquierda en la Foto No.3*) $y = x$.

UN ESTUDIANTE: Que toma distintos valores.

¿Que toma distintos valores? ¿'Distintos valores' qué quiere decir? ¿Qué es lo que toma distintos valores? A ver. Pensemos en términos… o sea: parcelemos nuestro pensamiento. No empecemos a hablar de los valores de $x$ y $y$ porque ya estamos hablando del Dominio. Hablemos de las características algebraicas de esa ecuación. Voy a decir una que no voy a colocar porque todavía no hemos llegado, pero podía ser: que esa ecuación es de la forma:

$f(x) = x^n$ siendo $n = 1$.

Algo así. ¿Sí me entienden? Podíamos decirlo. Podemos hasta ponerlo si queremos, pero son cosas como esas. O sea: son conceptos algebraicos de las características de esa ecuación. Seguramente ya les decía que en Álgebra no hay mucho qué opinar: Eso es como decir:

$y = x^2$ ¿Le parece bonita o fea? Pues no me parece ni bonita ni fea porque eso no tiene nada qué opinarle. O sea que el Álgebra tiene poco que opinarle en cuestiones apreciativas porque el Álgebra es como muy completa y muy total y muy simple además. Bueno. Pero de todas maneras, tratemos de decir algo. Miremos un poquito de lo que dijimos de la anterior a ver si algunas de las ideas que vimos en la función anterior se puede… Sí, Gisela.

UNA ESTUDIANTE: $x$ puede ser cualquier número.

Que $x$ puede ser cualquier número es una propiedad de las funciones. Que uno puede hacer variar la $x$ en cualquier número, ¿Qué quieres decir? En la (función) constante puede ser cualquier número y siempre la función vale lo mismo. O sea, te completo tu comentario: el Dominio ya lo tienes anotado en tus apuntes, el Dominio de la función constante es los reales. El coDominio es que no tiene sino un numerito (sic). El Dominio sí es todos los reales. Usted le puede dar a $y$ todo lo que siempre la $y$ siempre se vale lo mismo. Entonces: ¿Qué es lo que tú quieres decir de esta ecuación? O sea: es que uno tiende a pensar en términos de Dominio y coDominio porque es donde más hay que decir cosas, pero yo quiero insistirles en que miremos como la característica algebraica. Así como yo puedo decir: "Hablemos de tal persona, pero solamente hablen de la ropa. No hablen del pelo. No. De la ropa no más. O hablen de tal persona pero hablen que viene de tal ciudad o sea: un aspecto". El aspecto que quiero destacar de esa función es la fórmula. ¿Sí? ¿Alguien dijo?

UN ESTUDIANTE: Si le da valor a la *x* tiene un solo valor del *y*.

PROFESOR: No solo sino el mismo. Entonces te voy a regalar ese punto para ti. Pero eso ya es del Dominio pero no importa: Si quieren pensar adelante, eso no es pecado pensar adelante. Entonces voy a ponerlo acá (*señalando en la segunda columna*) porque es un asunto relacionado con Dominio (*Escribe. Numeral 1 de la segunda columna)*: A cada valor del Dominio… ¿qué más? (*habla el estudiante Valera*) le corresponde igual valor en el coDominio. Punto para Valera: ¿Su nombre cómo es? Alberto Valera. Ustedes se acuerdan ¿No? Ahí está la foto que no me deja mentir. Esta foto sale por Vanguardia mañana. Bueno, a ver. ¿Qué más? Si quieren pensar en el Dominio y coDominio también, porque el turno tiende a pensar acá (*señalando la primera columna*). Entonces lo que ustedes anoten de acá (*señalando la segunda columna*) yo se los anoto también o que digan de la fórmula (*señalando la primera columna*). Pregunto si se puede decir algo de lo que dijimos de la fórmula anterior de que era la ecuación de una recta ¿Sí es la ecuación de una recta? ¿Sí? ¿La fórmula tiene la forma de una recta? (escribiendo) Entonces la ecuación corresponde a la forma:

y = mx + b

En esa fórmula que estamos analizando la función constante: ¿Cuánto vale m y cuánto vale b? que son los parámetros que determinan la ecuación. ¿Cuánto vale m?

UN ESTUDIANTE: Cero (0)

PROFESOR: ¿Cero (0)? Entonces 0 por *x* se iría la *x*. ¿Cómo es tu apellido? Ríos. No es para calificarte, tranquilo, simplemente para irme aprendiendo los nombres. No te preocupes. No es 0, porque entonces se anularía la *x*. ¿Sí ves? Si la *x* está presente es porque su coeficiente no puede ser Cero (0). ¿Correcto? porque el que mata la *x* es el coeficiente.

¿Cuánto vale m?

UN ESTUDIANTE: Es variable.

¿La m varía con la constante? O sea: ¿Es m variable? No es variable. ¿Cuánto es?

UN ESTUDIANTE: Uno (1)

m es 1. (Escribe. Renglón 5 de la primera columna en la Foto No. 3)

¿No les he contado el cuento del Ángel de la Guarda?

LOS ESTUDIANTES: ¡No!

PROFESOR: ¡Si claro! Que todo número va acompañado del Ágel de la Guarda que es el 1. Entonces se fue el ángel de la guarda. Miren, ¿No ven el 1? Es que casi no se ve porque es un espíritu. Pregunto: ¿Cuánto vale m? La ecuación corresponde a la forma

$y = m x + b$

En donde m=1

UN ESTUDIANTE: …y $b = 0$

PROFESOR: ¿Quién lo dijo?

UN ESTUDIANTE: ¡Yo!

PROFESOR: ¡Listo! se lo regalo. ¿Cómo se llama usted? Alejandro Mendoza. A. M. 'por la mañana'.

UN ESTUDIANTE: (no se entiende).

¿Usted qué dijo?

UN ESTUDIANTE: (no se entiende).

PROFESOR: Correcto. ¿Usted cómo se llama? Leonardo Monroy. Si señor. Claro. Lo justo.

(54' 30")

¿Qué más? Sigan diciendo cosas de la ecuación o sea: tema algebraico o también del Dominio si quieren. Ahí vamos abriendo todas las páginas.

UN ESTUDIANTE: El valor de *y* varía.

El valor de *y* varía. ¿Quién lo dice? Bueno analicemos… puede hablar el que quiera. Simplemente que yo pongo una sola notica para no acumular.

Podemos hacer una comparación, amigo Mendoza, y es que comparemos esto con la función que estábamos viendo antes. Con la constante. Allá la *y* no variaba y aquí si.

Entonces digamos… no sé si lo pensaste por ese lado. A diferencia de la función constante en la función identidad varia la *y*. ¿Qué tal? ¿sí? Entonces: (escribiendo) a diferencia de la función constante la *y* varía.

UN ESTUDIANTE: (*no se entiende*)

PROFESOR: Es cierto lo que usted está diciendo. Lo que pasa que la *y* varíe proporcional a la *x* es propiedad de toda las funciones. Siempre. Unas veces es proporción directa, otra vez proporción inversa o proporción geométrica o proporción aritmética, pero siempre o sea: lo que establece una función es eso que la una varíe en proporción a la otra. Entonces esa es una verdad, pero es una verdad que sirve para todas las funciones. Pero esa no es característica de esta no más. ¡Está buena la china! (observando una muchacha que pasa por el corredor)

ESTUDIANTES: (*risas*)

PROFESOR: Sí. Esto lo dijimos del Dominio pero ahora hablemos algebraicamente. *y* tiene… cundo pongo la *y* le pongo comillas para que creamos que no es la y. Tiene el mismo valor que *x* . O sea: Lo que estamos diciendo aquí es que estamos observando la fórmula

y = *x*

entonces estoy diciendo esto mismo en palabras. Cundo hablemos del Dominio lo diremos en términos del Dominio. Bueno. Dejemos ahí y pasemos al Dominio. ¿Qué podemos decir del Dominio? Ahora entonces démosle valores a esto empiezo (escribiendo) –3, –2, – 0, 1, 2 y 3. Cuando *x* vale –3 *y* vale lo mismo. ¿No?

UN ESTUDIANTE: (*no se entiende*)

PROFESOR: En ambos casos. Sí. Entonces pongamos Dominio = al coDominio ¿No te parece? igual al conjunto de los números reales (*escribiendo*) o sea que el Dominio y el coDominio, vamos a decirlo de esa manera, está formado por los valores x, y tales que *x* pertenece a los reales y *y* pertenece a los reales. ¡Listo! (58' 13")

UN ESTUDIANTE: (*no se entiende*)

Profesor: Eso fue lo que dijimos acá. Es posible a cada valor del Dominio le corresponde igual valor en el coDominio. Eso es más o menos lo que estábamos diciendo. ¿Qué más?

Bueno. Voy a ir pintando la gráfica a ver si se les ocurren más ideas con respecto Dominio y coDominio y si no, entonces pasamos la gráfica (*pintando la gráfica*). Entonces vuelvo a pintar acá…

Entonces cuando $x$ vale –3 $y$ vale –3; cuando $x$ vale –2 $y$ vale –2; –1, –1; 0, 0; 1, 1; 2, 2; 3, 3. Entonces esta es la ecuación:

$y = x$

Entonces: ahora si empiecen a decir cosas con respecto a esa gráfica. A ver. Como aquí hay bastante qué decir, entonces voy a poner turnos y voy dando el turno y el que quiera hablar o no… Voy a barrer así (*señalando a los estudiantes uno a uno*) tan, tan, tan. Si no se le ocurra nada, entonces va el otro. (1h 00' 13")

UN ESTUDIANTE: Corta el eje en el punto (0, 0).

PROFESOR: Corta al eje… corta a los ejes en el punto (0, 0). ¿Su nombre? Leider Ramírez. Siguiente: ¿Cómo es tu nombre? Carlos Pacheco. No, pero recuerden que estamos hablando. Hablemos de lo que usted ve aquí con sus ojitos de la gráfica. Bueno el siguiente. No pierde el turno. Apenas se acuerde dice.

UN ESTUDIANTE: Inclinación 45º. (1h 01' 37")

PROFESOR: ¡Correcto! Usted es el hombre de los ángulos (*escribiendo*). Inclinación de 45º. A ver, amigo. Lo desafió para que lo diga en radianes. (*espera*) El que lo diga en radianes tiene punto.

UN ESTUDIANTE: $\pi/4$

PROFESOR. $\pi/4$ OK. ¿Quién dijo? No, espere. Vamos para allá. Gámez: ¿Tiene algo que opinar? ¿Qué tiene para decir? ¿Gisela? No voy a dar turno. Voy a ir en orden. O sea que bajen la mano y calladitos y no hacen más alharaca, porque no voy a hacer así. Ahora te doy el turno, sí. Calladitos y no hacen más alharaca porque no voy a hacer así. Ahora te doy el turno.

UN ESTUDIANTE: Es una recta.

PROFESOR: Es una recta. ¡Listo! Entonces digo que es infinita. No. En esta ocasión no alcen la mano porque… si tienes turno.

UN ESTUDIANTE: Es creciente.

PROFESOR: Es una gráfica creciente. Es una función creciente pero como estamos hablando de la gráfica, digamos que es creciente, digamos que es creciente, digamos: gráfica creciente, para que hablemos de la gráfica. ¿Sí? Entonces (escribiendo) gráfica creciente desde la izquierda como se llama la izquierda desde $-\infty$ hacia $+\infty$, ¿Sí? ¿Su nombre? Carlos Pacheco. ¡Prefecto!

¿Qué más? Terminamos allá, tenemos aquí: ¿Usted ya dijo algo o no?

UN ESTUDIANTE: $\pi/4$

PROFESOR: $\pi/4$. Entonces. Claro que usted ya tiene acumulados bastantes puntos entonces ya estamos es desperdiciando. Alguno que tenga algo qué decir.

UN ESTUDIANTE: …elemento de salida (*no se entiende*)

PROFESOR: ¿Elemento de salida del Dominio o el coDominio, o qué?

UN ESTUDIANTE: (*no se entiende*)

PROFESOR: Bueno. Eso es propiedad de toda función… (*discute el estudiante*) pero es propiedad de todas las funciones, ¿No?

PROFESOR: (no se entiende)

PROFESOR: ¡Ah, ya, OK! Bueno. A ver. Ese punto vale, pero entonces quiero que usted lo complete. ¿Ustedes se acuerdan cómo es el artificio que uno utiliza a partir de una gráfica para saber que la gráfica es una función o no? Ve pensando y si te acuerdas te doy turno. Le dan una gráfica. Voy a pintar una gráfica cualquiera acá (pintando). Entonces la gráfica es por ejemplo: (pinta la gráfica) La pregunta es: Dígame si esa gráfica, sin saber la fórmula, no le dan a uno la fórmula sino la gráfica. Por la gráfica, dígame si es una función o no es una función. A ver. ¿Quién se acuerda?

UN ESTUDIANTE: Se hace una prueba vertical…

PROFESOR: ¿Cómo? ¿Una prueba vertical? Una prueba vertical es una raya vertical? O sea: le trazo una vertical. ¿Sí? ¿Qué más?

UN ESTUDIANTE: (no se entiende pero se deduce que dice lo correcto o sea: que la recta sólo puede cortar a la curva en un punto)

PROFESOR: ¡Correcto! Entonces en punto. Uno traza una vertical y si esa vertical corta en dos portes la gráfica es porque no es función. ¿Por qué no es función? Porque para un mismo valor de *x* (señala la gráfica) hay doble valor de *y* (*Véase la parte derecha en la Foto No. 3)*

UN ESTUDIANTE: O triple.

PROFESOR: O triple. ¡Correcto! Entonces tienes ese punto. Me acuerdas. Entonces voy a escribirlo: (escribiendo) Es una función porque una recta vertical sólo la corta en un punto. ¿OK? Bueno, ¿Me dice su nombre? Diego. ¡Listo! ¿Qué otra cosa? Allá, allá…

UN ESTUDIANTE: Es perpendicular.

PROFESOR: ¿Perpendicular a qué?

UN ESTUDIANTE: (*no se entiende*)

PROFESOR: No. No es perpendicular. Si el amigo Mendoza nos dice que tiene 45º, ¿Cómo va a decir que es perpendicular? ¿Correcto? ¿Correcto? No es perpendicular, En vez de perpendicular es como torcidito (sic). No. No es perpendicular. ¿Algo más?

UN ESTUDIANTE: Como el eje z

PROFESOR: No. No hay eje z ahí. ¿Díaz? ¡¿Sí o no?

UN ESTUDIANTE: Para un valor en el eje x le corresponde el mismo valor en y.

PROFESOR: Bueno. No le voy a poner punto porque es lo mismo que se dijo en Dominio. Pero usted tiene razón y lo voy a escribir. O sea porque lo estamos diciendo partiendo de mirar la gráfica. No estamos hablando de Dominio y coDominio sino que mirando la gráfica ve uno que para un valor de *x* le corresponde un mismo o sea que para un valor en el eje *x* no hablamos de Dominio y coDominio sino de eje que es como se habla en lenguaje gráfico. Entonces (escribiendo): a un valor en el eje *x* le corresponde el mismo valor en el eje y . ¿OK? ¿Estamos de acuerdo? ¿Eso coincide con lo que usted estaba pensando? ¿Sí?

A ver, ¿Usted qué tal? ¿Ya dijimos que era creciente o no?

UN ESTUDIANTE: (no se entiende)

PROFESOR: ¿Pero constantemente es que nunca se cansa o qué?

UN ESTUDIANTE

PROFESOR: Que no varía el ángulo de crecimiento ya lo dijo el amigo Mendoza. Usted tiene que hablar en otros términos.

UN ESTUDIANTE: Que es constante.

PROFESOR. ¿Qué es lo que es constante? Si me dice la palabra se lo tomo.

UN ESTUDIANTE: El ángulo.

PROFESOR: El ángulo ya lo dijo el amigo Mendoza, o sea que toca que hable de otra cosa.

UN ESTUDIANTE: La inclinación.

PROFESOR: ¿La inclinación? Es que la inclinación fue lo que dijo él. Mire (*mostrando el tablero*) la inclinación de 45º. Ahora: Si usted me dice que lo que quiere decir es que la inclinación es constante: la inclinación es constante en cualquier línea recta. La característica de una línea recta es que la inclinación es constante. ¿Correcto? Ahora se me descuadró esta cosa (*cuadrando el acetato*).

UN ESTUDIANTE: La pendiente.

PROFESOR: ¿La qué? ¿quién dijo pendiente? La pendiente. ¡Correcto! No. Entonces no ponemos. Usted sí tiene. ¿Omar Ferrer? Yo escribí por ahí Omar Ferrer en alguna parte. No. Pero en esta clase de a uno. A ver. Le doy punto si usted me dice qué es la pendiente. Déjenlo que se acuerde de esa vaina (sic). Usted es de los de buena memoria.

UN ESTUDIANTE: La tangente.

PROFESOR: ¿Tangente? ¿Tangente de qué?

UN ESTUDIANTE: Del ángulo.

PROFESOR: Del ángulo. ¿De cuál ángulo? ¿Del que dijo allá Mendoza?

UN ESTUDIANTE: (no se entiende)

PROFESOR: ¡Ah, bien! Entonces. ¿Cuál es la tangente?

UN ESTUDIANTE: Punto.

PROFESOR: Sí. Punto para ti, pero termina de decirme. Pero ahora termina de decirme. ¿Cuánto es la tangente de ese ángulo? ¡Qué buena pregunta esa! Si el ángulo es 45º, ¿cuál será la tangente niñita (sic)?

UN ESTUDIANTE: 1.

PROFESOR: ¿Acepta la propuesta del amigo?

UN ESTUDIANTE: Sí.

PROFESOR. (*escribiendo*). Entonces la tangente del ángulo de inclinación es 1. Le decía yo aquí al amigo Monroy que la característica de que no cambia el rumbo o que no cambia la pendiente es propia de todas las rectas no es solamente de la función identidad.

UN ESTUDIANTE: Forma un triángulo.

PROFESOR: ¿Cómo? ¿Forma un triángulo? No. Le falta un lado. Ah. No es el que lo forma sino que usted lo hace.

UN ESTUDIANTE: Variable, pendiente independiente.

PROFESOR: ¿'variable pendiente independiente' qué quiere decir?

UN ESTUDIANTE: Que la una depende de la otra.

PROFESOR: ¡Perdón! Oigamos lo que…

UN ESTUDIANTE. (No se entiende)

PROFESOR: A ver. No sé si lo que tu estás queriendo decir… como lo dije yo, no te lo valgo a ti. A ver si te lo estoy interpretando bien. ¿Lo que tú quieres decir es que la variación de *x* es igual a la variación de *y*? ¿Será eso? O sea: ¿Si *x* varía 3 unidades, *y* varía 3 unidades? Si x varía 5 unidades… ¿Sí? Entonces digamos: la variación de *x* es igual a la variación de y ¿Está bien? Siempre son dependientes en una función. Eso es pendiente. Entonces (escribiendo): La variación de *x* es igual a la variación de *y*. Bueno. Paremos ahí. Paremos ahí.¿Tú ya tomaste (la foto)? (*toman la foto del tablero*). Que salga todo. ¿No? Cuádrate.

Llévate eso. No que ustedes se van a llevar esto y van a seguir poniendo cosas. ¿Lista la toma? ¿Ya puedo borrar? Bueno señores.

(FUNCIÓN POTENCIA)

Entonces vamos a ganar tiempo voy a apagar este aparato. Entonces van a trabajar ustedes la función potencia, con n igual a…

UN ESTUDIANTE: A 1.

PROFESOR: Cuando n = 1 ¿Qué resulta?

UN ESTUDIANTE: La identidad.

PROFESOR: La misma identidad. Entonces esa no… Podemos seguramente en el informe decir cuando n = 1 equivale a la función identidad.

Entonces partamos de n = 2

Entonces ustedes van a trabajar allá en su papel; en la plantilla independientemente, con la misma dinámica con que estamos trabajando:

Ponen la fórmula

Le dan valores a la fórmula

Pintan la gráfica y

Dicen cosas; todas las que se les ocurra. Y si se les siguen ocurriendo siguen aquí atrás (*señala la otra cara de la hoja*).

Entonces en la función:

$f(x) = x^2$

O si quieren ponerla en forma genérica:

$f(x)= x^n$ para n= 2.

Para decirlo de manera más universal.

Entonces, señores, voy a dar un cuartico de hora para que ustedes trabajen con tranquilidad. Como les digo: trabajen independientes y las cosas que se les ocurra no se las cuenten a nadie, para que les valga a ustedes solos. Voy a tener en cuenta las cosas que se le ocurran a alguien y no se le ocurran a nadie y las que se le ocurran a todo al mundo valen menos. También valen, claro está, pero si se les ocurrió a todos, pues valen menos que si le ocurre a una sola persona. Entonces, Bueno. Voy a bañarme las manos ya vuelvo con ustedes ya estoy acá.

## Anexo B. Resultados del INSTRUMENTO 1
## Actividad TRES - Comentarios sobre la *función potencia*

| **ESTUDIANTE NO.** | **Desde la fórmula (ALGEBRAICO)** |
|---|---|
| 1. | 1. Toma el valor de x **duplicado**<br>2. corresponde a la forma<br>***y = mx + b***<br>en: m = 1; b=0 |
| 2. | 1. La **constante** (**x**) está **elevado** a (**n**) y este tiene un valor de 2<br>2. El valor de **f(x)** es igual al **valor** de **x**<br>3. Se dice que es **potencia** entonces la **función** se basa en la **potenciación** |
| 3. | 1. Todos los **valores** serán **positivos**<br>2. La **y varía**<br>3. Siempre va a ser **el doble**<br>4. No será **constante** |
| 4. | 1. La **y varía**<br>2. "**x**" y "**y**" son de **diferente valor**<br>3. **Directamente proporcionales**, ya que al **aumentar x** también **aumenta y** |
| 5. | |
| 6. | |
| 7. | 1. "**n**" es **constante**<br>2. "**f(x)**" es **mayor** que "**x**" a medida que "**x**" **aumenta** |
| 8. | |
| 9. | 1. **n** es **constante** |
| 10. | 1. Tiene un **valor aumentado al doble** del **valor inicial** de **x**<br>**2.** La **ecuación** corresponde a la **forma y=mx+b**<br>3. A diferencia de la **función identidad** el valor de **y cambia con respecto a x** |
| 11. | |
| 12. | 1. La forma **y = mx + b** donde m = 1 y b = 0 |

| ESTUDIANTE NO. | Desde la fórmula (ALGEBRAICO) |
|---|---|
| | 2. **y siempre** será **positiva**<br>3. **y siempre** será **igual o mayor** que **x** |
| 13. | **1.** Para **x valores** su **valor** va a ser **el doble**<br>2. El **resultado** puede **variar**<br>3. A diferencia de la **función constante** la **y varía** |
| 14. | 1. La **función creciente**<br>2. En esta función la **y varía** con **respecto a x** |
| 15. | 1. x varía<br>**2. n no varía**<br>3. **f** es **función de x** |
| 16. | 1. La **ecuación** corresponde a la forma **y = mx + b** donde m = 1; b = 0<br>2. La (sic) |
| 17. | 1. La **función creciente**<br>2. Esta **función** la **y varía con respecto a la x** |

| ESTUDIANTE NO. | Desde el Dominio y el coDominio (TABULAR) |
|---|---|
| 18. | 1. D = R = cD<br>2. A cada valor del **Dominio** le corresponde un valor **duplo** en el **Codominio**<br>3. El **Codominio** son los **R positivos** con respecto a y |
| 19. | |
| 20. | 1. Va a ser **el doble**<br>2. Puede tomar **valores infinitos**<br>3. Son **todos** los $\mathbf{R^+}$ |
| 21. | 1. El **D** es **diferente** del **cD**<br>**2. D = R cD=R**<br>3. A **cualquier valor** del **D** le **corresponde** un **valor diferente** en el **cD** |

| ESTUDIANTE NO. | Desde el Dominio y el coDominio (TABULAR) |
|---|---|
| | 4. Sólo cuando el **D** es igual a **0 ó 1** su **cD** también es **0 ó 1**<br>5. Su cD es siempre positivo |
| 22. | |
| 23. | |
| 24. | 1. **f(x)=x** cuando "**x**" es igual a **1 y 0**.<br>2. **f(x) siempre** tiene **valores positivos**<br>**3. D = R** |
| 25. | 1. El **Dominio** es **todos los reales**<br>2. El **cD** son los $x \geq 0$ |
| 26. | 1. Los **valores** del **Codominio siempre** serán **positivos** |
| 27. | 1. Al **elevarse al cuadrado** el **Rango =R$^+$** y el **Dominio =R** $D = \{x / x \in R\}$<br>2. Tanto el **Dominio** como el **Codominio varían** con **excepción del módulo de la multiplicación el '1'** |
| 28. | |
| 29. | 1. **Dominio** $\in R$ y **Codominio** $\in R^+$<br>2. Siempre los **elementos de salida** tendrán **elementos de llegada** positivos |
| 30. | 1. Para un valor del **dominio** el **codominio** va a ser **el doble**<br>2. Como el **dominio** y el **codominio** ambos varían |
| 31. | 1. A cada **valor** de **D** le **corresponde** un valor diferente en el **cD**<br>2. Es **infinito** |
| 32. | 1. El **Codominio** es **el cuadrado** del **Dominio**<br>**2. D y cD = R**<br>3. |
| 33. | 1. "y" siempre es **el doble** del valor de "**x**"<br>2. Los **valores** de "**y**" siempre son **positivos**<br>3. **"x" tiene D, cD R = D, cD =(x,y)/x$\in$ R** |
| 34. | 1. A cada **valor** de **D** le **corresponde** un **valor diferente** en el **cD**. |

| ESTUDIANTE NO. | Desde la gráfica (GEOMÉTRICO) |
|---|---|
| 35. | 1. La gráfica es una **parábola**<br>2. Es **positiva respecto a** *y*<br>3. **Creciente** en y de 0 a ∞<br>4. Describe una **curva** |
| 36. | 1. Es una **parábola**<br>**2. Creciente** |
| 37. | 1. Pasa por **el origen**<br>2. Es una **parábola**<br>3. Todos sus **reales** son **positivos**<br>4. **Función creciente** |
| 38. | 1. D = R; cD = $R^+$<br>2. No corta al eje *x*<br>3. Corta al eje *y* una sola vez |
| 39. | |
| 40. | 1. Es una **curva**<br>2. El **foco** está en **los puntos (0,0)** |
| 41. | 1. Es una **parábola positiva**<br>2. El **punto + cercano** de la **curva** pasa por **(0,0)**<br>3. Es **siempre positiva** |
| 42. | |
| 43. | 1. El **punto mínimo absoluto** está en el **origen (0,0)**<br>2. Esta función **crece** de **(-∞,0)** y **crece** desde **(0,∞)**<br>3. Es una **curva**<br>4. Es **cóncava hacia arriba**<br>5. Es **constante**<br>6. Es **continua**<br>7. El **punto de corte** es **(0,0)** |

| ESTUDIANTE NO. | Desde la gráfica (GEOMÉTRICO) |
|---|---|
| 44. | **1. Parábola positiva**<br>2. **Crece** tanto en **eje vertical** como **horizontal**<br>3. Parte de **cero** hasta **infinito**<br>4. Forma **imagen** |
| 45. | 1. Es una **parábola**<br>2. **Crece** en **los positivos con respecto a *y*** y **decrece** en **los negativos con respecto a *y*** |
| 46. | 1. La **gráfica** es una **parábola**<br>2. Es una **parábola positiva**<br>3. Es una **parábola infinita** |
| 47. | 1. La función es **creciente** y **decreciente**<br>2. Tiene **mínimos**<br>**3. No es simétrica**<br>4. Es ∞ tanto en el **eje 'x'** como en **'y'**<br>**5. Corta al eje 'y'** |
| 48. | 1. Es una **parábola**<br>2. El **foco** es **cero cero**<br>3. Es **infinita**<br>4. Es una **función** porque **si se traza una recta vertical solo corta un punto** |
| 49. | 1. **Corta a los ejes** en **el punto (0,0)**<br>2. El **eje "y"** tiene **asíntotas** en **0**<br>3. La **pendiente varía**<br>4. (está borrado)<br>5. En el **eje x el D y cD son los R**, mientras en el **eje y solo son positivos** |
| 50. | **1. No corta los ejes "x" y "y"**<br>2. Es una **función infinita**<br>3. Gráfica **creciente** para esta **función**<br>4. |

| RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE INSTRUMENTO NO. 1 | | | |
|---|---|---|---|
| FUNCIÓN POTENCIA | | | |
| NO. | Desde la fórmula (ALGEBRAICO) | Desde el Dominio y el coDominio (TABULAR) | Desde la gráfica (GEOMÉTRICO) |
| | Toma el valor de x **duplicado** corresponde a la forma<br>y = mx + b<br>en: m = 1; b=0 | D = R = cD<br>A cada valor del **Dominio** le corresponde un valor **duplo** en el **Codominio**<br>El **Codominio** son los **R positivos** con respecto a y | La gráfica es una **parábola**<br>Es positiva respecto a *y*<br>**Creciente** en y de 0 a ∞<br>Describe una **curva** |
| | La **constante** (**x**) está **elevado** a (**n**) y este tiene un valor de 2<br>El valor de **f(x)** es igual al **valor** de **x**<br>Se dice que es **potencia** entonces la **función** se basa en la **potenciación** | | |
| | Todos los **valores** serán **positivos**<br>La y varía<br>Siempre va a ser **el doble**<br>No será constante | Va a ser **el doble**<br>Puede tomar valores infinitos<br>Son **todos** los **$R^+$** | Es una parábola<br>Creciente |
| | La y varía<br>“x” y “y” son de diferente valor<br>Directamente proporcionales, ya que al aumentar x también aumenta y | El **D** es **diferente** del **cD**<br>D = R cD=R<br>A cualquier valor del D le corresponde un valor diferente en el cD<br>Sólo cuando el **D** es igual a **0** | Pasa por **el origen**<br>Es una parábola<br>Todos sus reales son positivos<br>Función creciente |

| RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE INSTRUMENTO NO. 1 | | | |
|---|---|---|---|
| **FUNCIÓN POTENCIA** | | | |
| NO. | Desde la fórmula<br>(ALGEBRAICO) | Desde el Dominio y el coDominio<br>(TABULAR) | Desde la gráfica<br>(GEOMÉTRICO) |
| | | **ó 1** su **cD** también es **0 ó 1**<br>Su cD es siempre positivo | |
| | | | D = R; cD = $R^+$<br>No corta al eje *x*<br>Corta al eje *y* una sola vez |
| | | | |
| | "n" es constante<br>"**f(x)**" es **mayor** que "**x**" a medida que "**x**" **aumenta** | **f(x)=x** cuando "**x**" es igual a **1 y 0**.<br>f(x) siempre tiene valores positivos<br>D = R | Es una **curva**<br>El foco está en los puntos (0,0) |
| | | El Dominio es todos los reales<br>El **cD** son los $x \geq 0$ | Es una parábola positiva<br>El punto + cercano de la curva pasa por (0,0)<br>Es siempre positiva |
| | n es constante | Los valores del Codominio siempre serán positivos | |
| | Tiene un valor aumentado al doble del valor inicial de x<br>La ecuación corresponde a la forma y=mx+b<br>A diferencia de la función identidad el valor de y cambia con respecto a x | Al elevarse al cuadrado el Rango =$R^+$ y el Dominio =R<br>$D = \{x / x \in R\}$<br>Tanto el Dominio como el Codominio varían con excepción del módulo de la multiplicación el '1' | El punto mínimo absoluto está en el origen (0,0)<br>Esta función **crece** de **(-∞,0)** y **crece** desde **(0,∞)**<br>Es una **curva**<br>Es cóncava hacia arriba<br>Es constante<br>Es continua<br>El punto de corte es (0,0) |

| RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE INSTRUMENTO NO. 1 | | | |
|---|---|---|---|
| **FUNCIÓN POTENCIA** | | | |
| NO. | Desde la fórmula<br>(ALGEBRAICO) | Desde el Dominio y el coDominio<br>(TABULAR) | Desde la gráfica<br>(GEOMÉTRICO) |
| | | | Parábola positiva<br>Crece tanto en eje vertical como horizontal<br>Parte de **cero** hasta **infinito**<br>Forma **imagen** |
| | La forma **y = mx + b** donde m = 1 y b = 0<br>y siempre será positiva<br>y siempre será igual o mayor que x | Dominio $\in R$ y Codominio $\in R^+$<br>Siempre los elementos de salida tendrán elementos de llegada positivos | Es una parábola<br>Crece en los positivos con respecto a *y* y decrece en los negativos con respecto a *y* |
| | Para x valores su valor va a ser el doble<br>El resultado puede variar<br>A diferencia de la función constante la y varía | Para un valor del **dominio** el **codominio** va a ser **el doble**<br>Como el **dominio** y el **codominio** ambos varían | La gráfica es una parábola<br>Es una parábola positiva<br>Es una parábola infinita |
| | La función creciente<br>En esta función la **y varía** con **respecto a x** | A cada **valor** de **D** le **corresponde** un valor diferente en el **cD**<br>Es infinito | La función es creciente y decreciente<br>Tiene mínimos<br>No es simétrica<br>Es ∞ tanto en el **eje 'x'** como en **'y'**<br>Corta al eje 'y' |
| | x varía<br>n no varía<br>f es función de x | El Codominio es el cuadrado del Dominio<br>D y cD = R | Es una parábola<br>El foco es cero cero<br>Es infinita<br>Es una función porque si se |

| RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DE INSTRUMENTO NO. 1 | | | |
|---|---|---|---|
| **FUNCIÓN POTENCIA** | | | |
| NO. | Desde la fórmula (ALGEBRAICO) | Desde el Dominio y el coDominio (TABULAR) | Desde la gráfica (GEOMÉTRICO) |
| | | | traza una recta vertical solo corta un punto |
| | La **ecuación** corresponde a la forma **y = mx + b** donde m = 1; b = 0<br>La (sic) | "y" siempre es **el doble** del valor de "**x**"<br>Los **valores** de "**y**" siempre son **positivos**<br>"x" tiene D, cD R = D, cD =(x,y)/x∈ R | Corta a los ejes en el punto (0,0)<br>El eje "y" tiene asíntotas en 0<br>La pendiente varía<br>(está borrado)<br>En el eje x el D y cD son los R, mientras en el eje y solo son positivos |
| | La función creciente<br>Esta función la y varía con respecto a la x | A cada valor de D le corresponde un valor diferente en el cD. | No corta los ejes "x" y "y"<br>Es una función infinita<br>Gráfica **creciente** para esta **función** |

**Anexo C. Discurso de Aula**

Estadísticas de Vocabulario utilizado en el discurso de aula

| SECUENCIA | PALABRA MATEMÁTICA | CONTEO |
|---|---|---|
| | | |
| 729 | valor | 64 |
| 653 | Dominio | 59 |
| 622 | función | 58 |
| 720 | x | 43 |
| 654 | coDominio | 39 |
| 731 | gráfica | 36 |
| 730 | fórmula | 35 |
| 699 | recta | 24 |
| 722 | y | 24 |
| 564 | ecuación | 23 |
| 679 | constante | 22 |
| 521 | función constante | 21 |
| 718 | pendiente | 16 |
| 696 | inclinación | 12 |
| 500 | Cero | 11 |
| 693 | º | 10 |
| 637 | perpendicular | 10 |
| 662 | términos | 10 |
| 445 | f(x) | 8 |
| 692 | ángulo | 7 |
| 410 | asíntota | 7 |
| 660 | creciente | 7 |
| 377 | infinita | 7 |
| 598 | propiedad | 7 |
| 695 | tangente | 7 |
| 620 | vertical | 7 |
| 545 | conjunto | 6 |
| 641 | eje *x* | 6 |
| 92 | elemento | 6 |
| 506 | número | 6 |
| 704 | variable | 6 |
| 721 | variación | 6 |
| 659 | eje y | 5 |

| | | |
|---|---|---|
| 285 | lenguaje verbal | 5 |
| 385 | nomenclatura | 5 |
| 448 | Álgebra | 4 |
| 412 | curva | 4 |
| 727 | función identidad | 4 |
| 249 | intercepto | 4 |
| 195 | lenguaje algebraico | 4 |
| 381 | positivo | 4 |
| 576 | radianes | 4 |
| 292 | valor único | 4 |
| 338 | condición | 3 |
| 726 | identidad | 3 |
| 591 | izquierda | 3 |
| 546 | números reales | 3 |
| 290 | valor único | 3 |
| 472 | algebraica | 2 |
| 4 | Cálculo | 2 |
| 49 | condición | 2 |
| 423 | Corta al eje *y* | 2 |
| 383 | derecha | 2 |
| 179 | directamente proporcional | 2 |
| 655 | eje | 2 |
| 639 | eje z | 2 |
| 593 | elemento de salida | 2 |
| 677 | línea recta | 2 |
| 382 | negativo | 2 |
| 297 | números reales | 2 |
| 218 | pendiente - intercepto | 2 |
| 299 | teoría de conjuntos | 2 |
| 259 | Aritmética | 1 |
| 568 | Corta al eje | 1 |
| 22 | dependencia | 1 |
| 526 | directa | 1 |
| 178 | directamente proporcional | 1 |
| 626 | doble valor | 1 |
| 228 | ecuaciones diferenciales | 1 |
| 592 | elemento de salida | 1 |
| 154 | Función Exponencial | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 155 | Función Logarítmica | 1 |
| 149 | Función polinómica | 1 |
| 148 | Función Potencia | 1 |
| 150 | Función Racional | 1 |
| 151 | Función Trigonométrica | 1 |
| 153 | Función Trigonométrica inversa | 1 |
| 138 | Lenguaje aritmético | 1 |
| 139 | Lenguaje geométrico | 1 |
| 321 | Lenguaje Natural | 1 |
| 44 | lenguaje verbal | 1 |
| 676 | línea recta | 1 |
| 379 | negativo | 1 |
| 298 | notación | 1 |
| 217 | pendiente - intercepto | 1 |
| 629 | recta vertical | 1 |
| 36 | relación | 1 |
| 697 | rumbo | 1 |
| 293 | teoría de conjuntos | 1 |
| 201 | valor único | 1 |
| 295 | valores *x* | 1 |
| 9 | variable *x* | 1 |
| 614 | vertical | 1 |
| 446 | $x^n$ | 1 |

**Anexo D. Instrumento 2 – Actividad 1**

RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES

| TRANSFORMACIÓN | | ESTUDIANTE | DESCRIPCIÓN | ORDEN DE ENTREGA |
|---|---|---|---|---|
| 1 | f(x)+c | | Ejemplo: Sumarle la constante “c” a la función | |
| 2 | f(x+b) | | Sumar las variables independientes “x” y “y” a la función “f” | 10 |
| | | | Función de x más b | 13 |
| | | | Hacer función de (x+b) | 4 |
| | | | Que la variable se suma con otra puede ser un escalar. | 11 |
| | | | A la variable independiente de esta función sumarle la constante b. | 18 |
| | | | Función de (x+b) | 2 |
| | | | Función de (x+b) | 3 |
| | | | La función de F tras la constante B | 5 |
| | | | Una función con la variable independiente sumada con una constante | 6 |
| | | | Función de (x+b) sumarle b a la variable independiente x | 7 |
| | | | Primero sumamos la variable independiente con la constante b y luego la multiplicamos con la función | 14 |
| | | | Función de la suma de la variable ‘x’ y la constante ‘b’. f de ‘x’ más ‘b’. | 8 |
| | | | (No participó) | |
| | | | Sumarle la constante “b” a la variable independiente de la función | 9 |

| TRANSFORMACIÓN | | ESTUDIANTE | DESCRIPCIÓN | ORDEN DE ENTREGA |
|---|---|---|---|---|
| | | | Toman la función con la variable y le sumo la constante y c. es la R. | 15 |
| | | | (no respondió) | 17 |
| | | | “función de (x+b)” | 16 |
| | | | Esta función nos pide que le sumemos b a la variable x para así determinar la función | 12 |
| | | | Sumarle una constante a la variable independiente de la función. | 1 |
| | | | Función de x (sumando la constante b) | 9 |
| 3 | af(x) | | Multiplicar la constante “a” con la función | 10 |
| | | | Función af de x | 13 |
| | | | A que multiplica a la función de (x) | 4 |
| | | | Ya que a es escalar y nunca va a cambiar se multiplica por la función | 11 |
| | | | La función f(x) multiplicarla por la constante a | 18 |
| | | | a función de (x) | 2 |
| | | | a f de x | 3 |
| | | | a por la función de x | 5 |
| | | | Una constante de una función | 6 |
| | | | función af de “x” | 7 |
| | | | La constante a por la función | 14 |
| | | | La multiplicación de ‘f’ de ‘x’ por la constante ‘a’. ‘a’ por ‘f’ de ‘x’. | 8 |

| TRANSFORMACIÓN | | ESTUDIANTE | DESCRIPCIÓN | ORDEN DE ENTREGA |
|---|---|---|---|---|
| | | | Se multiplica la constante “a” a toda la función. | 9 |
| | | | Utiliza la constante de f indica de que tratamos en x que es la variable de la dicha función. | 15 |
| | | | (no respondió) | 17 |
| | | | “afunción (x) | 16 |
| | | | Esta nos pide multiplicar la función por una constante | 12 |
| | | | Multiplicar una constante a la función | 1 |
| | | | Constante ‘a’ multiplicando la función de x | 9 |
| 4 | f(kx) | | Multiplicar una constante “k” por una variable “x” a la función “f” | 10 |
| | | | Multiplicarle la constante k a la función | 13 |
| | | | Función de (kx) = (o sea de k que multiplica a x) | 4 |
| | | | Es el resultado de la multiplicación de f(x) por k. | 11 |
| | | | La variable independiente de esta función multiplicarla por la constante k | 18 |
| | | | Función de (kx) | 2 |
| | | | Función de kx | 3 |
| | | | La función de f por k | 5 |
| | | | Una función que multiplica a la constante con la variable | 6 |
| | | | “función de kx” | 7 |

| TRANSFORMACIÓN | | ESTUDIANTE | DESCRIPCIÓN | ORDEN DE ENTREGA |
|---|---|---|---|---|
| | | | La función por la multiplicación de la constante k por la variable | 14 |
| | | | Función de la multiplicación de la constante ‘k’ por la variable ‘x’. ‘f’ de ‘k’ por ‘x’ | 8 |
| | | | | |
| | | | Se multiplica la constante “k” a la variable independiente | 9 |
| | | | Indicamos nuestra función, hacemos la respectiva de la constante | 15 |
| | | | (no respondió) | 17 |
| | | | “función de ($k \cdot x$) | 16 |
| | | | Esta función interpreta que multipliquemos la constante por una variable. | 12 |
| | | | Multiplicar una constante a la variable de la función | 1 |
| | | | Función por la constante ‘k’ de x. | 9 |

## Anexo E. Descripción detallada de las respuestas al instrumento 2

### ACTIVIDAD 2

A continuación se hace una descripción detallada de los errores cometidos en donde se ha colocado un "Puntaje total" arrojado por el archivo Excel y un "Puntaje corregido" con los ajustes de la revisión en detalle.

**Primer Grupo**: Los estudiantes que tuvieron todas las respuestas correctas.

| | |
|---|---|
| Estudiante 12 | Puntaje total: (35/35) 100.00% |
| | Puntaje corregido: El mismo. |
| Estudiante 19 | Puntaje total: (35/35) 100.00% |
| | Puntaje corregido: El mismo. |

Observación (válida para ambos): No reemplazaron los parámetros por su valor en la fórmula y esto los obligó a trabajar de memoria pero es claro que esta circunstancia no afectó los resultados, puesto que no tienen errores.

**Segundo Grupo:** Estudiantes que tuvieron un porcentaje de respuestas correctas igual o superior al 90% (en orden descendente de puntaje).

| | |
|---|---|
| Estudiante 11 | Puntaje total: (33/35) 94.29% |
| | Puntaje corregido: El mismo. |

Observación: No reemplazó los parámetros por su valor en la fórmula y esto lo obligó a trabajar de memoria. Pudo ser una fuente de error.

| | |
|---|---|
| Col. 1: : ($y=x^2$) | Todas las respuestas bien (100%) |
| Col. 2: ($y=x^2+5$) | Todas las respuestas bien (100%) |

Col. 3: [$y=(x+3)^2$] Todas las respuestas bien (100%)
Col. 4: ($y=2x^2$) Tiene errores solamente en las 2 últimas casillas de la columna 3 ($x=2; x=3$) por un error de cálculo explicable sólo por descuido, porque un alto porcentaje del cuadro, incluidos el resto de valores de esta misma columna, están bien. (71.43%)
Col. 5: [$y=(2x)^2$] Todas las respuestas bien (100%)

Estudiante 1 Puntaje total: (32/35) 91.43%
Puntaje corregido: El mismo.

Observación: No reemplazó los parámetros por su valor en la fórmula y esto lo obligó a trabajar de memoria. Pudo ser una fuente de error.

Col. 1:($y=x^2$): Todas las respuestas bien (100%)
Col. 2:($y=x^2+5$) Todas las respuestas bien (100%)
Col. 3:[$y=(x+3)^2$] 4 respuestas correctas (57.14%). Tuvo errores en los tres primeros valores de la columna 3 correspondientes a $x=-3; x=-2; x=-1$ debido a que tomó los valores de $x$ como positivos.
Col. 4: ($y=2x^2$) Todas las respuestas bien (100%)
Col. 5: Todas las respuestas bien (100%)

**Tercer Grupo:** Estudiantes que tuvieron respuestas correctas por debajo del 90% pero iguales o superiores al 60%.

Estudiante 14 Puntaje total: (23/35) 65.71%
Puntaje corregido: (22/35) 62.86% (permanece en el mismo grupo)

Observación (muy importante). Creó bien las formulas con excepción de las de la columna 5.

Col. 1: ($y=x^2$): Los resultados correspondientes a $x=-3$; $x=-2$ y $x=-1$ los dio negativos a pesar de que la fórmula está bien. (57.14%)

Observación: Es frecuente que los estudiantes no caigan en la cuenta de que en casos como estos (potencias pares de valores negativos) a la calculadora también hay que escribirle paréntesis para que dé bien el signo de los resultados.

Col. 2: ($y=x^2+5$) De nuevo tomó como negativas las potencias y dio mal los resultados correspondientes a $x=-3$; $x=-2$ y $x=-1$. (57.14%)

Col. 3:[$y=(x+3)^2$] Todas las respuestas bien (100%)

Col. 4: ($y=2x^2$) Todas las respuestas bien (100%)

Col. 5: [$y=(2x)^2$] Sólo elevó al cuadrado la variable pero no la constante. Repitió los cálculos de la columna anterior, los resultados son los mismos y, por lo tanto están incorrectos. Sólo coincide por casualidad el resultado correspondiente a $x=0$ cuyo cuadrado tiene el mismo valor. (0.00%)

Estudiante 16 Puntaje total: (23/35) 65.71%

Puntaje corregido: (21/35) 60.00%

Col. 1: ($y=x^2$): Todas las respuestas bien (100%)

Col. 2:($y=x^2+5$) Creó bien la fórmula. Todas las respuestas bien (100%)

Col. 3:[$y=(x+3)^2$] Creó mal la fórmula. Sólo está bien por casualidad el resultado correspondiente a $x=-3$ porque la resta da 0 y el cuadrado tiene ese mismo valor. (0.00%)

Col. 4: ($y=2x^2$) Creó bien la fórmula. Todas las respuestas bien (100%)

Col. 5: [$y=(2x)^2$] Creó mal la fórmula. Todas las respuestas incorrectas y sólo coincide pro casualidad el resultado correspondiente a $x=0$ cuyo cuadrado tiene ese mismo valor. (0.00%)

**Cuarto grupo**: Los estudiantes que tuvieron menos del 60% de las respuestas correctas.

Estudiante 9 Puntaje total: (19/35) 54.29%

Puntaje corregido: (14/35) 40.00%

Col. 1:($y=x^2$): Todas las respuestas bien (100%)

Col. 2:($y=x^2+5$) No elevó al cuadrado. Sólo sumó la constante. Sólo 2 repuestas bien por casualidad, en las que no elevar al cuadrado no afectaba la respuesta porque el resultado da el mismo valor. ($x=0$; $x=1$). *Stricto sensu*, no respondió ninguna correctamente. (0.00%).

Col. 3:[$y=(x+3)^2$] No elevó al cuadrado. Sólo sumó la constante. Sólo 2 respuestas bien pero por casualidad debido a que el resultado de las sumas daban 0 y 1 respectivamente y no se alteraban por no elevarlas al cuadrado porque dan el mismo valor. *Stricto sensu*, no respondió ninguna correctamente. (0.00%).

Col. 4: ($y=2x^2$) Creó bien las fórmulas. Todas las respuesta bien. (100.00%).

Col. 5. [$y=(2x)^2$] No elevó al cuadrado. Sólo multiplicó la variable por la constante. Sólo una respuesta bien pero porque la base era 0. *Stricto sensu*, no respondió ninguna correctamente. (0.00%).

Estudiante 20 Puntaje total: (19/35) 54.29%

Puntaje corregido: el mismo

Observaciones:

Creó bien <u>todas</u> las fórmulas.

En la Tabla de Parámetros (donde se les dio valor a $a=2$, $b=3$, $c=5$, $k=2$) al frente de cada uno de estos valores: este estudiante (el único) escribió: *f(2);f(3); f(5);f(2).* Estas representaciones no son correctas y no tienen nada que ver con el valor de los parámetros.

Col. 1: ($y=x^2$): Todas las respuestas bien (100%)

Col. 2: ($y=x^2+5$) Los resultados correspondientes a $x=-3$; $x=-2$ y $x=-1$ los dio negativos a pesar de que la fórmula estaba bien.

Col. 3:[$y=(x+3)^2$] Los resultados correspondientes a $x=-3$; $x=-2$ y $x=-1$ los dio negativos a pesar de que la fórmula estaba bien.

Col. 4: ($y=2x^2$) Los resultados correspondientes a $x=-3$; $x=-2$ y $x=-1$ los dio negativos a pesar de que la fórmula está bien.

Col. 5: [$y=(2x)^2$] Los resultados correspondientes a $x=-3$; $x=-2$ y $x=-1$ los dio negativos a pesar de que la fórmula estaba bien.

Observación: Es frecuente que los estudiantes no caigan en la cuenta de que en casos como estos (potencias pares de valores negativos) a la calculadora también hay que colocarle paréntesis para que dé bien el signo de los resultados.

Estudiante 2 Puntaje total: (17/35) 48.57%

Puntaje corregido: (15/35) 42.86%

Col. 1: ($y=x^2$): Todas las respuestas bien (100%)

Col. 2: ($y=x^2+5$) Todas las respuestas bien (100%)

Col. 3: [$y=(x+3)^2$] Creó mal la fórmula y la respuesta aparentemente correcta correspondiente a ($x=-1$) es sólo por casualidad. (0.00%)

Col. 4: ($y=2x^2$) Creó mal la fórmula. Sólo coincide, por casualidad, la respuesta para $x=0$ cuyo resultado es 0 en todos los casos. Los resultados son iguales a los de la columna 1 y por lo tanto incorrectos. (0.00%).

Col. 5: [$y=(2x)^2$] Creó mal la fórmula porque excluyó la constante $k$ de la potencia. Sólo coincide, por casualidad, la respuesta para $x=0$ cuyo resultado es 0 en todos los casos. (0.00%)

Estudiante 18 Puntaje total: (16/35) 45.71%

Puntaje corregido: (15/35) 42.86% (permanece en el mismo grupo)

Observación:

En la casilla donde debería ir la fórmula colocó valores numéricos. No es claro cómo los calculó. Por este motivo no es posible saber cuáles resultados incorrectos se deben a errores de formulas y cuáles a errores de cálculo.

En la fila correspondiente a $x=0$ colocó indiscriminadamente un 0… aunque no es claro si es realmente un 0. Amerita una entrevista para averiguar cómo lo hizo.

Col. 1: ($y=x^2$): Se limitó a colocar la misma fórmula ($y=x^2$) en todas las casillas con excepción de la correspondiente a $x=0$ en la que colocó un *0*. (14.29%)

Col. 2: ($y=x^2+5$) Todas las respuesta bien con excepción del resultado correspondiente a $x=0$. (85.71%).

Col. 3: [$y=(x+3)^2$] Todas las respuestas mal con excepción de la correspondiente a $x=-1$ en la que colocó "inexplicablemente" un *4* que no se tomará como respuesta correcta. (0.00%)

Col. 4: ($y=2x^2$) Todas las respuestas bien. (100%)

Col. 5: [$y=(2x)^2$] Todas las respuestas incorrectas con excepción de la correspondiente a $x=0$ en la que colocó un *0*. (14.29%)

Estudiante 6 Puntaje total: (17/35) 40.00%

Puntaje corregido: (7/35) 20.00%

Observación: Ninguna de las fórmulas está elevada al cuadrado pro algunas fórmulas están parcialmente bien.

Col. 1: ($y=x^2$): Todas las respuestas bien (100%)

Col. 2: ($y=x^2+5$) Creó mal la fórmula y sólo están bien por casualidad los resultados correspondientes a $x=0$ y $x=1$ cuyos cuadrados son 0 y 1 respectivamente. (0.00%)

Col. 3: [$y=(x+3)^2$] Creó mal la fórmula. Sólo están bien por casualidad los resultados de $x=-3$; $x=-2$ debido a que los resultados de la suma son 0 y 1 respectivamente y cuyos cuadrados tienen esos mismos valores. (0.00%).

Col. 4: ($y=2x^2$) Creó y reemplazó mal en la fórmula. Sólo está bien pro casualidad el resultado para $x=0$ (0.00%).

Col. 5: [$y=(2x)^2$] Creó y reemplazó mal en la fórmula. Sólo está bien pro casualidad el resultado para $x=0$ (0.00%).

Estudiante 5 Puntaje total: (12/35) 34.29%

Puntaje corregido: (7/35) 20.00%

Observación: Ninguna de las fórmulas está elevada al cuadrado pro algunas fórmulas están parcialmente bien.

Col. 1:($y=x^2$): Todas las respuestas bien (100%)

Col. 2:($y=x^2+5$) Creó mal la fórmula y tienen las respuestas incorrectas. Sólo están correctos por casualidad los resultados correspondientes a $x=0$ y $x=1$ cuyos cuadrados son 0 y 1 respectivamente. (0.00%)

Col. 3:[$y=(x+3)^2$] Todas las respuestas mal. (0.00%)

Col. 4: ($y=2x^2$) Creó mal la fórmula y sólo están bien por casualidad los resultados correspondientes a $x=0$ y $x=1$ cuyos cuadrados son 0 y 1 respectivamente. (0.00%)

Col. 5: [$y=(2x)^2$] Creó mal la fórmula y sólo está bien por casualidad el resultado correspondientes a $x=0$ cuyo cuadrado es 0. (0.00%)

Estudiante 10 Puntaje total: (9/38) 25.71%

Puntaje corregido: (16/35) 45.71% (mejoró el puntaje)

Col. 1: ($y=x^2$): Todas las respuestas bien. (100.00%)

Col. 2: ($y=x^2+5$) No totalizó los valores y en la fórmula utilizó mal el paréntesis, porque incluyó un miembro y parte del otro de la ecuación, pero si se calculan los resultados con las operaciones anotadas darían correctas todas las respuestas. Para la tabulación de esta columna se tomarán como correctos estos resultados (100.00%).

Col. 3:[$y=(x+3)^2$] Todas las respuesta incorrectas con excepción del resultado correspondiente a $x=-1$ que por casualidad coincide, debido a que el estudiante no elevó al cuadrado la suma pero tomó la $x$ como positiva y da la casualidad de que $(-1+3)^2=4$ (respuesta correcta) da el mismo resultado que la operación incorrecta que hizo el estudiante: (+1+3)=4. (0.00%)

Col. 4: ($y=2x^2$) No reemplazó la variable en la fórmula y todas las respuesta están incorrectas con excepción del resultado correspondiente a $x=0$ en la que colocó un *0* junto a la variable. Se tomará como correcta esta respuesta. (14.29%).

Col. 5: [$y=(2x)^2$] Todas las respuesta incorrectas con excepción del resultado correspondiente a $x=0$ en la que colocó un 0. Se tomará como correcta esta respuesta. (14.29%).

Estudiante 15 Puntaje <u>parcial</u> (Col. 1) (7/35) 20.00%.

Puntaje corregido: (8/35) 22.86%

Observaciones

No colocó las fórmulas en las respectivas casillas y en cambio en algunas colocó unas operaciones que corresponden a $x=-3$.

Col. 1:($y=x^2$): Todas las respuestas bien (100%)

Col. 2: ($y=x^2+5$) Reemplazó mal los datos. Ninguna respuesta bien Sólo coincide por casualidad el resultado correspondiente a $x=0$ debido a que su cuadrado tiene el mismo valor. (0.00%).

Col. 3: [$y=(x+3)^2$] Creó mal la fórmula sin el exponente y reemplazó mal los datos. Ninguna respuesta bien. Sólo coincide por casualidad el resultado correspondiente a $x=3$ debido a que $(3+3)^2$ =36 (respuesta correcta es igual a la respuesta equivocada que dio el estudiante: 3(9+3)=36. (0.00%).

Col. 4: ($y=2x^2$) Reemplazó mal los datos. Ninguna respuesta bien. Sólo coincide por casualidad el resultado correspondiente a $x=0$ debido a que su cuadrado tiene el mismo valor. (0.00%).

Col. 5: [$y=(2x)^2$] No elevó al cuadrado y reemplazó mal los datos. Ninguna respuesta bien. Sólo coincide por casualidad el resultado correspondiente a $x=0$ y $x=1$ debido a que sus cuadrados tiene el mismo valor. (0.00%).

Estudiante 8 Puntaje total: (9/35) 25.71%

Puntaje corregido: (2/35) 5.71%

Observaciones:

Este es un caso especial. Amerita una entrevista y un análisis particular.

No colocó las fórmulas ni indicó las operaciones hechas. Sólo colocó los resultados por lo que no es claro determinar cómo los obtuvo. Incluso hay operaciones numéricas en la casilla donde debía colocar la fórmula.

Ni siquiera la columna 1 está bien a pesar de que la fórmula ya estaba escrita y la mayoría de los estudiantes la respondió bien.

Col. 1: ($y=x^2$): Simplemente repitió el valor de la variable. Sólo quedaron bien por casualidad los resultados para $x=0$ y $x=1$ porque los cuadrados tienen el mismo valor. (0.00%).

Col. 2: ($y=x^2+5$) Simplemente colocó el resultado de la suma sin elevar al cuadrado la variable. Sólo quedaron bien por casualidad los resultados para $x=0$ y $x=1$ porque los cuadrados tienen el mismo valor. (0.00%)

Col. 3:[$y=(x+3)^2$] Sólo están bien los resultados para $x$=-3 y $x$=-2 debido a que la resta daba 0 y 1 respectivamente y los cuadrados tienen esos mismos valores. (0.00%)

Col. 4: ($y=2x^2$) Sólo quedaron bien por casualidad los resultados para $x=0$ y $x=1$ porque los cuadrados tienen el mismo valor. (0.00%)

Col. 5: [$y=(2x)^2$] Sólo quedó bien pro casualidad el resultados para $x=0$ porque el cuadrado tiene el mismo valor. (0.00%)

Estudiante 3: Puntaje total: (8/35) 22.86%

Puntaje corregido: (7/35) 20.00%

Este es un caso especial. Amerita una entrevista y un análisis particular.

Col. 1:($y=x^2$): Todas las respuestas bien (100%)

Col. 2 ($y=x^2+5$) Restó la constante en vez de sumarla. Todas las respuestas están mal. (0.00%)

Col. 3 [$y=(x+3)^2$]: Restó la constante en vez de sumarla y aplicó la misma fórmula de la Columna 2 ($y=x^2+c$) cambiando el parámetro ($y=x^2+b$). En consecuencia: todas las respuestas están mal. Solamente coincide por casualidad el resultado correspondiente a $x=-2$ debido a que $(-2+3)^2=1$

(respuesta correcta) es igual a la respuesta incorrecta y mal calculada que dio el estudiante: $(-2)^2 +3=1$. (0.00%)

Observaciones

Indicó en la fórmula que la variable estaba al cuadrado pero la reemplazó por un valor equivocado y no la elevó al cuadrado.

Col. 4: ($y=2x^2$) y 5 [$y=(2x)^2$]:

Colocó la constante en el denominador (dividiendo) a pesar de que en la fórmula general estaba en el numerador (multiplicando).

Estudiante 4 Puntaje total: (8/35) 22.86%

Puntaje corregido: (0/0) 0.00% (Puntaje nulo)

Col. 1($y=x^2$): Sólo están bien por casualidad los resultados de $x=0; x=1$ debido a que sus cuadrados son también 0 y 1 respectivamente. Todas las respuesta mal. (0.00%).

Col. 2:($y=x^2+5$) Sólo están bien por casualidad los resultados de $x=0; x=1$ debido a que sus cuadrados son también 0 y 1 respectivamente. Todas las respuesta mal. (0.00%).

Col. 3:[$y=(x+3)^2$] Sólo están bien por casualidad los resultados de $x=-3; x=-2$ debido a que los resultados de la suma son 0 y 1 respectivamente (0.00%).

Col. 4: ($y=2x^2$) Creó y reemplazó mal en la fórmula. Sólo está bien pro casualidad el resultado para $x=0$. Todas las respuesta mal. (0.00%).

Col. 5: [$y=(2x)^2$] Creó mal en la fórmula y aunque reemplazó los datos bien, los resultados son incorrectos. Sólo está bien por casualidad el resultado para $x=0$. Todas las respuesta mal. (0.00%).

**Quinto Grupo**: (Grupo atípico)

Estudiante 7: Puntaje total: (no tabulable)

Puntaje corregido: (15/35) 40.00% (pasa del Quinto al Tercer Grupo)

Observación: No es posible saber si el estudiante habría hecho bien las operaciones que dejó indicadas.

Col. 1: ($y=x^2$): Está bien aplicada la fórmula pero no totalizó los valores, pero si se calculan los resultados darían correctas todas las respuestas. Para la tabulación de esta columna de se tomarán estos resultados como correctos. (100.00%).

Col. 2: ($y=x^2+5$) Está bien aplicada la fórmula pero no totalizó los valores. Si se calculan los resultados con las operaciones anotadas darían correctas todas las respuestas. Para la tabulación de esta columna de se tomarán estos resultados (100.00%).

Col. 3: [$y=(x+3)^2$] No elevó al cuadrado la fórmula ni totalizó los valores. Si calculamos los resultados, sólo estarían correctos por casualidad los resultados correspondientes a $x=-3$ y $x=-2$ debido a que la suma da $0$ y 1 cuyos cuadrados tienen el mismo valor. (0.00%)

Col. 4: ($y=2x^2$) No elevó al cuadrado en la fórmula, tiene fallas y no totalizó los valores pero si se calculan los resultados con las operaciones anotadas darían incorrectas todas las respuestas. Solo coincide por casualidad el resultado correspondiente a $x=0$ y $x=1$ porque su cuadrado tiene igual valor. (0.00%).

Col. 5: [$y=(2x)^2$] No elevó al cuadrado la fórmula pero reemplazó bien la constante '*k*'. Si se calcularan los valores dan todos incorrectos. Solo coincide por casualidad el resultado correspondiente a $x=0$ porque su cuadrado tiene igual valor. (0.00%)

Estudiante 17 Puntaje parcial (Col. 1): (7/35) 20.00%

Puntaje corregido: (21/35) 60.00% (pasa del Quinto al Segundo Grupo).

Col. 1: ($y=x^2$): No utilizó los paréntesis pero los resultados están todos bien (100.00%).

Col. 2: ($y$=$x^2$+$5$) Utilizó mal el paréntesis y no totalizó los datos, pro si se realizan los cálculos, los resultados darían correctos. Se tomarán como tales para tabular esta columna. (100.00%)

Col. 3:[$y=(x+3)^2$] Creó la fórmula igual a la de la Columna 2 ($y=x^2+c$) cambiando el parámetro ($y=x^2+b$) y no calculó resultados. Por lo tanto, si se hacen los cálculos, los resultados serán todos incorrectos, con excepción del resultado correspondiente a $x=-1$ porque $(-1+3)^2$ (cálculo correcto) es igual al cálculo equivocado que hizo el estudiante: $(-1)^2+3$. (0.00%)

Col. 4: ($y=2x^2$) La notación utilizada en la fórmula es incorrecta pero se entiende qué quiso decir. Si se realizan los cálculos, los resultados serían todos correctos. Se tomarán como tales. (100.00%)

Col. 5: [$y=(2x)^2$] La notación de la fórmula no es correcta, realizó la misma operación de la columna anterior y no realizó las operaciones. Por lo tanto, si se calculan los resultados las respuestas serían incorrectas, salvo el resultado correspondiente a $x=0$ cuyo cuadrado tiene el mismo valor. (0.00%)

## Anexo F. Resultados del Instrumento 2

ACTIVIDAD 3 (Graficación)

| GRUPO | ESTUD | GRÁFICA 1 | | GRÁFICA 2 | | GRÁFICA 3 | | GRÁFICA 4 | | GRÁFICA 5 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | f(x) | | f(x)+c | | f(x+b) | | af(x) | | f(kx) | | TOTALES | |
| | | Puntos | Curva | Puntos | Curva | Puntos | Curva | Puntos | Curva | Puntos | Curva | Cant. | % |
| 1 | 1 | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | 10 | 100,00% |
| 1 | 3 | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | 10 | 100,00% |
| 1 | 5 | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | 10 | 100,00% |
| 1 | 6 | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | 10 | 100,00% |
| 1 | 10 | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | 10 | 100,00% |
| 6 | 12 | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | 10 | 100,00% |
| 2 | 14 | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | 10 | 100,00% |
| 2 | 16 | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | 10 | 100,00% |
| 1 | 19 | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | 10 | 100,00% |
| 1 | 20 | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | 10 | 100,00% |
| 2 | 7 | Bien | Bien | Bien | Bien | Tomó un valor negativo para x=-3 | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | 9 | 90,00% |
| 2 | 11 | Bien | Bien | Bien | Bien | Tomó mal el valor para x=-3 | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | 9 | 90,00% |
| 2 | 17 | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | No unió los puntos | Bien | Bien | Bien | Bien | 9 | 90,00% |
| 3 | 2 | Bien | Bien | Bien | Bien | Tomó mal los puntos | Confundió las gráficas | Bien | Bien | Bien | Bien | 8 | 80,00% |
| 3 | 4 | Bien | Bien | Bien | Bien | Tomó mal los puntos | Mal la gráfica | Bien | Bien | Bien | Bien | 8 | 80,00% |

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | Bien | Unió mal los puntos | Bien | Unió mal los puntos | Bien | Unió mal los puntos | Bien | Bien | Bien | Bien | 7 | 70,00% |
| 5 | 18 | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | No colocó puntos | No hizo la gráfica | No colocó puntos | No hizo la gráfica | 6 | 60,00% |
| 6 | 8 | Bien | No unió los puntos | Bien | No unió los puntos | Bien | No unió los puntos | Bien | No unió los puntos | Bien | No unió los puntos | 5 | 50,00% |
| 6 | 15 | Bien | Bien | Bien | Bien | Bien | No unió los puntos | Colocó muy pocos puntos | No unió los puntos | Colocó muy pocos puntos | No unió los puntos | 5 | 50,00% |
| | 13 | No participó | No participó | No participó | No participó | No participó | No participó | No participó | No participó | No participó | No participó | 0 | |
| TOTAL “Bien” | | 19 | 17 | 18 | 16 | 13 | 11 | 16 | 15 | 16 | 15 | 156 | |
| | | | | | | | | | | | | 156 | |
| | | | | | | | | Promedia respuestas correctas/por estudiante | | | | 8,2 | |
| | | | | | | | | Respuestas posibles | | | | 190 | |
| | (%) | 100,00% | 89,47% | 94,74% | 84,21% | 68,42% | 57,89% | 84,21% | 78,95% | 84,21% | 78,95 % | 82,11% | |
| | | | | | | | | | | | 100,00 % | correctas | |
| | | | | | | | | | | | 90,00 % | correctas | |
| | | | | | | | | | | | 80,00 % | correctas | |
| | | | | | | | | | | | 70,00 % | correctas | |
| | | | | | | | | | | | 60,00 % | correctas | |
| | | | | | | | | | | | < 60,00 % | correctas | |
| | | | | | | | | | | | >60% | 17 | |
| | | | | | | | | | | | <60% | 2 | |

## Anexo G. Resultados de la aplicación del instrumento 2
Actividad 4

INSTRUMENTO 2 - ACTIVIDAD 4
TRANSFORMACIÓN 1
***[f(x)+c]***

| | EST. | | RESPUESTA | TIPO | CONTEO | (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | | En esta la recta se volvió más pequeña que la inicial y el punto en donde cambió del eje negativo en x al positivo en x está en 5y | B-B | 1 | |
| 1 | 7 | | Que el punto 0 del eje de las x le corresponde el 5 del eje de la y | B-B | 2 | |
| 1 | 10 | b | *Su valor en x=0 y en y es 5* | B-B | 3 | |
| 1 | 11 | | Esta no llegó hasta el punto 0 sino al punto y igual a 5 | B-B | 4 | |
| 1 | 12 | | La gráfica no tocó el punto cero (0) | B-B | 5 | |
| 1 | 17 | | Esta gráfica no tuvo muchos cambios. Vimos que la otra era igual pero corrida 5 puntos hacia arriba. | B-B | 6 | |
| 1 | 19 | | La gráfica se corrió 5 posiciones hacia arriba en el eje y | B-B | 7 | |
| 1 | 20 | | La gráfica sufrió un cambio porque no parte de (0,0) | B-B | 8 | 33,33% |
| 1 | 1 | b | *El lado izquierdo y derecho son iguales y forma su parábola* | B-M | 9 | |
| 1 | 2 | | Esta gráfica se forma como una parábola hasta el punto 30. | B-M | 10 | |
| 1 | 3 | | Las x positivas y negativas toman la misma y en el plano a excepción a x =0 que corresponde a y =5 | b-M | 11 | |
| 1 | 8 | | Que es una parábola | B-M | 12 | |
| 1 | 10 | a | *La gráfica sufrió una parábola.* | b-M | 13 | |
| 1 | 14 | b | *de igual forma en el eje x tanto del lado positivo como del negativo y para el eje y es totalmente positiva* | B-M | 14 | |
| 1 | 16 | a | *Empieza desde (-6,36) y finaliza en (6,36) y a medida dan más números.* | B-M | 15 | |
| 1 | 14 | a | *Es una hipérbola* | M | 16 | |
| 1 | 16 | b | *La gráfica sufre una apertura mayor.* | M | 17 | |
| 1 | 1 | a | *La gráfica tuvo una transformación en su curva.* | X | 18 | |
| 1 | 4 | | Primero la gráfica está normal sin alteraciones | X | 19 | |
| 1 | 6 | | Es perfecta porque sube en los dos lados | X | 20 | |
| 1 | 9 | | (No respondió. Entregó la hoja en blanco) | XXXX | 21 | |
| 1 | 13 | | (No participó) | XXXX | 22 | |
| 1 | 15 | | (No participó en esta sesión) | XXXX | 23 | |
| 1 | 18 | | (No participó en esta sesión) | XXXX | 24 | |
| | | | TOTAL RESPUESTAS | | 24 | |

INSTRUMENTO 2 - ACTIVIDAD 4

- TRANSFORMACIÓN 1

**[ *f(x+3)*]**

| **2** | **EST.** | | **RESPUESTA** | **TIPO** | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | a | La gráfica tuvo una transformación en su curva de lado izquierdo. | b-M | |
| 2 | 1 | b | Como vemos, termina en las coordenadas menos seis, nueve y la del lado derecho sí es normal. | M | |
| 2 | 2 | | Esta gráfica se tornó en forma de parábola hasta el punto 36 y por falta de espacio. | X | |
| 2 | 3 | | La gráfica se formó en U mostrando diferentes valores para todos los valores de *x* | X | |
| 2 | 4 | | Empieza a correrse en el eje y | M | |
| | | a | En esta gráfica por la izquierda se hizo más pequeña. | M | |
| 2 | 5 | b | El punto mínimo o más bajo está en *-3x* y cambia de *x* negativo a positivo en *9y* aproximadamente. | B-B | |
| 2 | 6 | | Es igual que la primera sino que sólo sube completa en el lado x y + y en el otro se corta. | M | |
| 2 | 7 | | El punto sero (sic) del eje de las y estuvo situado en el punto -3 del eje x | B-B | |
| 2 | 8 | | Que es una parábola | X | |
| 2 | 9 | | *(No respondió. Entregó la hoja en blanco)* | XXXX | |
| 2 | 10 | | La gráfica es una parábola en x=0 es y=9 | X | |
| 2 | 11 | | Esta tampoco llegó al punto, sino al punto igual a menos tres. | B-B | |
| | | a | Los valores en x negativo fueron pocos y en x positivos bastantes. | X | |
| 2 | 12 | b | Tampoco tocó el punto (0,0) de la gráfica. | B-B | |
| 2 | 13 | | *(No participó)* | XXXX | |
| 2 | 14 | | Se comporta de igual forma en el eje y positivo y con los mismos valores en x, tanto positivos como negativos | X | |
| 2 | 15 | | *(No participó en esta sesión)* | XXXX | |
| | | a | Empieza desde (-6,39) y termina en (6,41). | X | |
| 2 | 16 | b | También a medida que dan más # la gráfica se abre más. | X | |
| 2 | 17 | | Esta gráfica estuvo más pequeña que la anterior pero tenía una forma diferente a la otra. | X | |
| 2 | 18 | | *(No participó en esta sesión)* | XXXX | |
| 2 | 19 | | La gráfica se corre hacia la izquierda 3 posiciones en el eje x. | B-B | |
| 2 | 20 | | Esta empieza de la parte negativa del eje x. | B-B | 20 |