

Estudio de la formación de imágenes para un dioptrio esférico en los puntos de Young-Weierstrass considerando el carácter vectorial del cambio electromagnético

Marcos Marcelino Carrillo Garcia

Trabajo de grado para optar por el título de Físico

Director

Rafael Ángel Torres Amaris

Doctorado en Ciencias Naturales - Física

Codirector

Alberto Luis Silva Lora

Doctorado en Ciencias Naturales - Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Física

Bucaramanga

2025

Dedicatoria

A mi padre, mi madre, mis hermanos y mi vida.

Índice

Introducción	8
1 Óptica geométrica y dioptrio esférico	11
1.1 Principio de Fermat	12
1.2 Estigmatismo Riguroso	14
1.3 Trazado de rayos para un dioptrio esférico	18
2 Óptica ondulatoria, polarización y difracción	23
2.1 Onda incidente sobre un dioptrio esférico	24
2.2 Coeficientes de Fresnel	25
2.3 Onda transmitida	28
2.4 Esfera de Poincaré	32
3 Propagación del campo electromagnético	37
3.1 Teoría escalar de la difracción	39
3.2 Difracción metaxial	44
3.3 Difracción de la onda esférica transmitida	48
3.4 Resolviendo la transformación usando Python	51
4 Conclusiones	54
Referencias bibliográficas	59
Apéndices	60

Índice de figuras

Figura 1	Formación de imágenes.	9
Figura 2	Onda transmitida centrada en d	11
Figura 3	Camino óptico.	13
Figura 4	Estigmatismo riguroso.	15
Figura 5	Dioptrio esférico	18
Figura 6	Trazado de rayos.	21
Figura 7	Incidencia perpendicular.	26
Figura 8	Incidencia paralela.	27
Figura 9	Perfil de amplitudes.	31
Figura 10	Representación de la onda transmitida.	32
Figura 11	Polarización del campo eléctrico.	34
Figura 12	Esfera de Poincaré	35
Figura 13	Polarización de la onda transmitida.	36
Figura 14	Estados de polarización de la onda transmitida sobre la esfera de Poincaré	36
Figura 15	Principio de Huygens-Fresnel.	38
Figura 16	Teorema de Helmholtz-Kirchhoff.	41
Figura 17	Solución de Rayleigh-Sommerfeld.	43
Figura 18	Transparencia de curvatura.	46
Figura 19	Aproximación Metaxial de Bonnet.	48
Figura 20	Relación para el emisor y el receptor de la onda transmitida.	50
Figura 21	Irradiancia sobre la imagen d	53

Índice de apéndices

Apéndice A. Ovoide de Descartes	60
Apéndice B. Código de Python para la simulación	63

Resumen

TÍTULO: Estudio de la formación de imágenes para un dioptrio esférico en los puntos de Young-Weierstrass considerando el carácter vectorial del campo electromagnético*

AUTOR: Marcos Marcelino Carrillo Garcia[†]

PALABRAS CLAVE: Dioptrio Esférico, Puntos de Young-Weierstrass, Polarización, Teoría escalar de la difracción

DESCRIPCIÓN:

La formación de imágenes es un fenómeno cotidiano en la visión; desde observar cuerpos celestes en el cielo nocturno hasta estudiar cómo están conformadas las células de distintos tejidos vivos, este fenómeno toma mucha relevancia a la hora de desarrollar diferentes sistemas ópticos que permitan avanzar en la investigación de distintas ramas de la ciencia. Por esto, es necesario conocer cómo se propaga la luz al atravesar un sistema óptico y poder determinar qué tan bien definida será la imagen. Para conocer cómo se propaga una onda, se utiliza la teoría escalar de la difracción; sin embargo, cuando el campo es vectorial o el sistema óptico tiene una apertura numérica grande, se da un tratamiento descrito en la teoría vectorial de la difracción ya que considera el carácter vectorial que se introduce en el cambio de medio y esto puede representar una mayor complejidad a la hora de solucionar la propagación de la onda. En el presente trabajo de investigación se estudia la propagación de una onda electromagnética desde la teoría escalar de la difracción en un dioptrio esférico sobre esferas de Young-Weierstrass, considerando la polarización de la onda transmitida después de atravesar el dioptrio.

*Trabajo de grado

[†]Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Rafael Ángel Torres Amaris, Ph.D. Codirector: Alberto Silva Lora, Ph.D.

Abstract

TITLE: Study of image formation for a spherical diopter at the Young-Weierstrass points considering the vectorial nature of the electromagnetic field.

AUTHOR: Marcos Marcelino Carrillo Garcia*

KEYWORDS: Spherical Diopter, Young-Weierstrass Points, Polarization, Scalar Theory of Diffraction

DESCRIPTION:

The image formation is an everyday phenomenon in vision; from observing celestial bodies in the night sky, to studying how the cells of different living tissues are made up, this phenomenon is highly relevant when developing different optical systems that allow progress in research of many branches of science. For this reason, is necessary to know how the waves propagate when passing through an optical system, in order to determine how well defined the image will be. To know how a wave propagates, the scalar diffraction theory is used; however, when there is a vector field or the optical system has a large numerical apperture, a vectorial diffraction theory is needed since it considers vector character introduced by change of medium and this could represent a higher complexity when propagating the wave. In the present research work, it is studied the wave propagation of light from the view of the scalar diffraction theory in a spherical diopter on Young-Weierstrass spheres, considering the polarization introduced when the wave passes through the diopter.

*Sciences Faculty. Physics Department. Director: Rafael Ángel Torres Amaris, Ph.D. Codirector: Alberto Silva Lora, Ph.D.

Introducción

En óptica, se conoce como dioptrio a la superficie que separa dos medios de distinto índice de refracción y dichas superficies son fundamentales en el estudio de la Óptica Geométrica, ya que dependiendo de su forma y ensamble, satisfacen distintas condiciones para la formación de imágenes: como los lentes para corregir la miopía del ojo humano, pasando por las cámaras de los dispositivos móviles y hasta los telescopios en la observación astronómica; los dioptrios han sido importantes en muchos avances tecnológicos y científicos desde hace varios siglos y dichos objetos están conformados por distintos arreglos de estas superficies, conocidos como sistemas ópticos, con el fin de obtener imágenes bien definidas.

Sin embargo, a pesar de que las imágenes formadas por estos sistemas son bien definidas no cumplen con la condición de estigmatismo riguroso y un sistema óptico es rigurosamente estigmático para un par de puntos A y A' , si todo rayo proveniente de A converge a A' después de atravesar el sistema óptico (Mahajan, 1998; Maurel, 2002). Un caso particular de un sistema rigurosamente estigmático es el dioptrio esférico, para el cual existen superficies que satisfacen dicha condición y son conocidas como esferas de Young-Weierstrass y es ampliamente utilizado en instrumentos de observación como microscopios, telescopios, cámaras e incluso lentes.

Figura 1.*Formación de imágenes.*

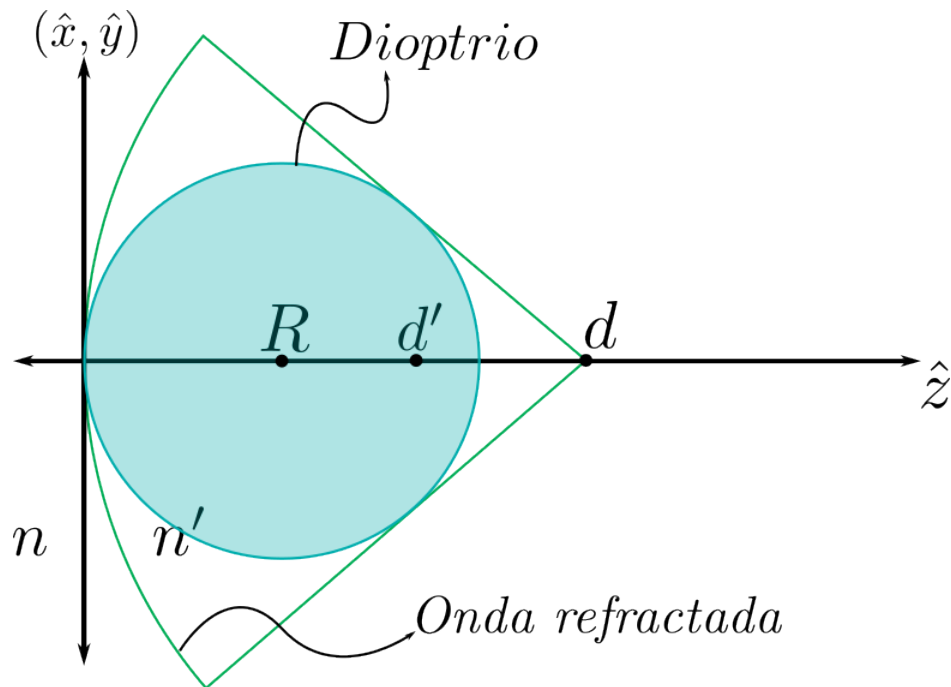
Nota. Esquematización de un sistema óptico rigurosamente estigmático.

Sin embargo, la luz también tiene propiedades ondulatorias y cuando incide sobre un dioptrio -esférico para este caso de estudio-, una parte se refleja y otra parte se transmite, de tal manera que satisfacen ciertas condiciones de frontera para que su campo electromagnético cumpla con la continuidad. De estas condiciones de frontera se deducen los coeficientes de Fresnel (Goldstein, 2017) que establecen cómo debe ser la refracción y la reflexión en función de los índices de refracción y el ángulo con el que incide dicha onda.

Las componentes de la amplitud de la onda transmitida -al igual que para la reflejada- cambian de magnitud, lo cual hace que cambie también su estado de polarización, produciendo generalmente que no sea uniforme sobre un mismo frente de onda y se dice entonces que la polarización de dicha onda es vectorial (Stratton & Chu, 1939; Wolf, 1959). Ahora, para propagar esta onda es necesario conocer cómo se produce la difracción, que es un fenómeno intrínseco de la propagación de las ondas y puede ser explicada mediante el *Principio de*

Huygens-Fresnel (Born & Wolf, 1999). Usualmente, al difractar una onda se aplica la teoría escalar de la difracción (Goldstein, 2017; Hecht, 2001); sin embargo cuando se trabaja con haces vectoriales, se opta por emplear una teoría vectorial de la difracción (Sheppard & Wilson, 1982; Sheppard et al., 1977; Visser & Wiersma, 1991) lo que implica un aumento en la complejidad del problema debido a que las soluciones pueden tornarse bastante difíciles de tratar, conduciendo a expresiones complicadas de manejar o que requieren un largo tiempo de cómputo para llegar a un resultado (Foreman & Török, 2011; Kim et al., 2018; Richards & Wolf, 1959; Sheppard & Török, 1997). En la práctica, los sistemas ópticos rigurosamente estigmáticos no forman imágenes libres de aberraciones, ya que al difractar la onda refractada no se observa una imagen puntual sobre la pantalla de observación.

Siguiendo esta idea ¿Cuál es el efecto de la polarización del campo electromagnético cuando se establece la amplitud mediante las relaciones establecidas por los coeficientes de Fresnel en la formación de imágenes, para un dioptrio esférico en los puntos de Young-Weierstrass?

Figura 2.*Onda transmitida centrada en d .**Nota.* Esquema del sistema a estudiar.

1. Óptica geométrica y dioptrio esférico

La óptica geométrica encuentra sus fundamentos al considerar la luz como un haz compuesto de rayos que se desplazan en línea recta dentro de un medio homogéneo, cuya velocidad depende del medio el cual atraviesa. Ya desde la antigua Grecia los filósofos empezaron a desarrollar las primeras ideas que ligan a la luz con la visión humana y se encuentran las primeras nociones sobre la reflexión de la luz e incluso se atribuye a Herón de Alejandría la proposición de que la luz sigue el camino más corto entre el objeto y el ojo.

Muchos años después, esta afirmación sería generalizada en el principio de Fermat,

siendo un pilar esencial dentro del estudio de la óptica, ya que establece que “*la trayectoria que sigue la luz al viajar de un punto a otro en un medio es estacionaria, esto es, no existen variaciones del camino óptico respecto a pequeñas variaciones en su trayectoria*”. Esta contribución ha permitido describir el comportamiento de la luz al desplazarse a través de dos medios de distinto índice de refracción. Es precisamente la ley de Snell-Descartes la que expresa matemáticamente esta relación entre el rayo que incide sobre el dioptrio* y el rayo que es transmitido, mostrando cómo es la relación de ambos respecto a la normal a dicho dioptrio.

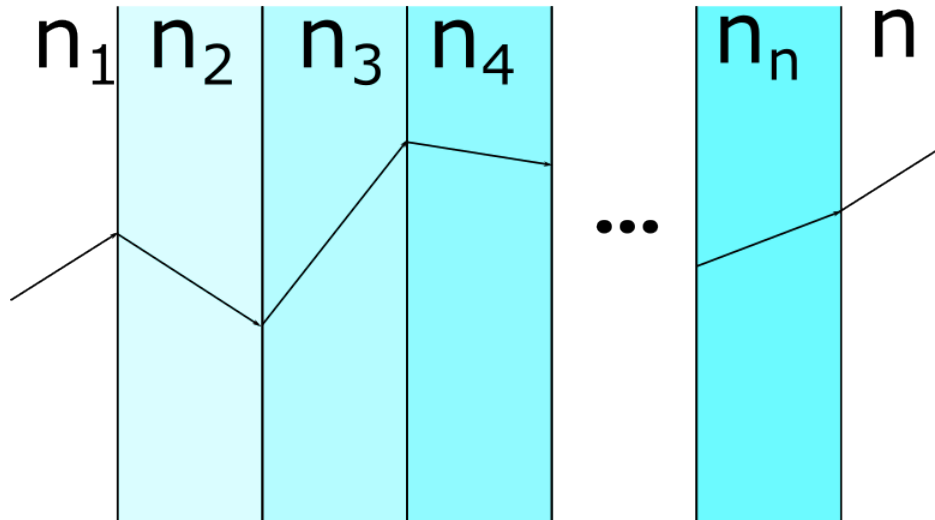
En el presente capítulo se repasa el principio de Fermat y cómo a partir de este se establece la ley vectorial de Snell-Descartes, la cual es de gran utilidad cuando se estudia un haz de luz que cambia de medio al desplazarse. De igual manera se estudia la condición de estigmatismo riguroso y el caso particular del dioptrio esférico, para el cuál se satisface dicha condición (Silva-Lora & Torres, 2020). Finalmente se establecen las relaciones trigonométricas del ángulo de refracción para cualquier rayo de luz que incide sobre un dioptrio esférico proveniente de un punto en el espacio que satisface la condición de estigmatismo riguroso.

1.1. Principio de Fermat

Suponga que un rayo de luz viaja en un medio que es homogéneo y de índice de refracción n , del punto A al punto B recorre una distancia $l = v_n \Delta t$. La velocidad v_n se puede escribir teniendo en cuenta que el índice de refracción del medio en el que se propaga la luz está dado por $n = c/v$; además, $c\Delta t = L$ es la distancia que recorre la luz en el vacío en un tiempo Δt . Así,

*Se considera dioptrio a la superficie que separa dos medios de distinto índice de refracción.

Figura 3.
Camino óptico.



Nota. El camino óptico que toma la luz al atravesar un medio es aquel para el cual el tiempo es estacionario.

$$L = nl \quad (1)$$

representa la distancia que recorrería la luz en el vacío, en función de la distancia que recorre en un medio. Esta cantidad es conocida como *Camino Óptico**. Generalizando el concepto para medios continuos,

$$L = \int_A^B n(l)dl. \quad (2)$$

Ahora, el Principio de Fermat establece que el camino óptico es estacionario, esto es, respecto a pequeñas desviaciones del trayecto que toma la luz, las variaciones son nulas,

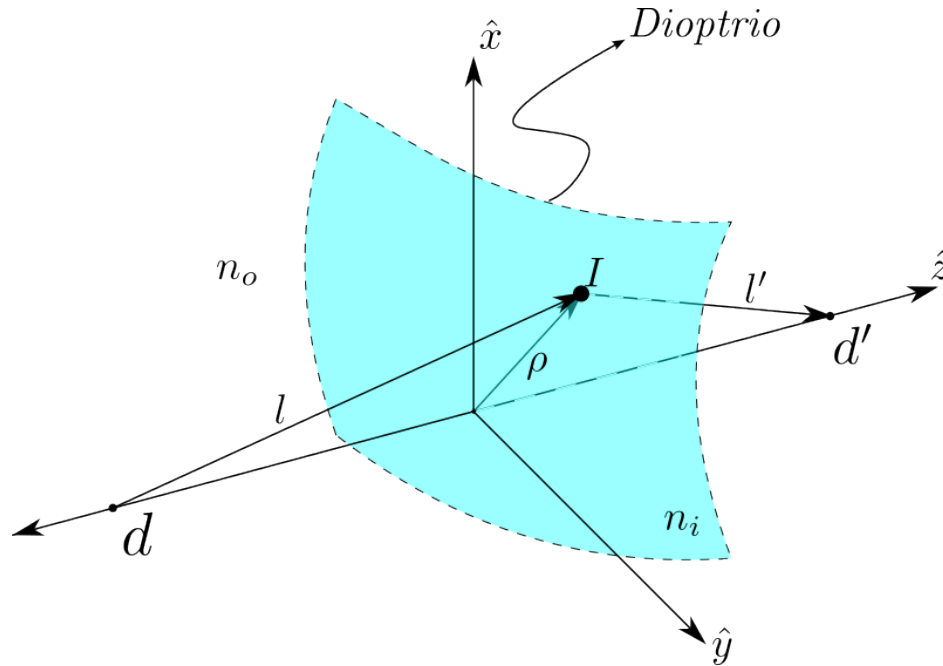
*El camino óptico es la distancia que recorre la luz en el vacío, en el mismo intervalo de tiempo t que tarda en recorrer la distancia l en un medio de índice de refracción n .

$$\delta L = \delta \int_A^B n(l) dl = 0. \quad (3)$$

Este principio establece un pilar fundamental en la óptica al describir el comportamiento de la luz mientras viaja a través de un medio. Una forma más familiar del principio de Fermat es la Ley vectorial de Snell-Descartes, mediante la que se relacionan los ángulos incidente, refractado y reflejado que se forma entre la normal al dioptrio y cada respectivo rayo de luz.

1.2. Estigmatismo Riguroso

Un sistema óptico es rigurosamente estigmático para cualquier par de puntos en el espacio d y d' , si todo rayo proveniente de d converge a d' después de atravesar el sistema óptico, recorriendo la misma longitud de camino óptico; se dice que dichos puntos son puntos conjugados para el sistema óptico (Mahajan, 1998; Maurel, 2002). Para conocer la forma geométrica que toma el dioptrio de tal manera que se cumple la condición de estigmatismo riguroso, se describe un sistema conformado por dos medios de índice de refracción n_o y n_i , separados por un dioptrio que pasa por el origen del sistema de coordenadas. los puntos d y d' se encuentran a las distancias d y d' , respectivamente, sobre el eje z cartesiano.

Figura 4.*Estigmatismo riguroso.*

Nota. Representación gráfica de un camino óptico que sale de A y converge a B después de atravesar el dioptrio.

De la figura 4 $l = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}$, $l' = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - d')^2}$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ son parámetros establecidos. El principio de Fermat establece que el camino óptico que recorre un rayo de luz a través del punto **I** es $L(\mathbf{r}) = n_o l + n_i l' = \text{cte}$. Debido a que esta condición se debe cumplir sobre todo el dioptrio, $L(0, 0, 0) = n_i d' - n_o d = \text{cte}$ y así

$$L(\mathbf{r}) = n_o \sqrt{r^2 + d^2 - 2zd} + n_i \sqrt{r^2 + d'^2 - 2zd'} = n_i d' - n_o d. \quad (4)$$

Elevando dos veces al cuadrado la Ec. 4 y reescribiendo la expresión resultante se obtiene que

$$\left[r^2 (n_o^2 - n_i^2) + 2zdd' \left(\frac{n_i^2}{d} - \frac{n_o^2}{d'} \right) \right]^2 - 4n_on_i (n_id' - n_od) \left[r^2 (n_od' - n_id) + 2zdd' (n_i - n_o) \right] = 0. \quad (5)$$

La ecuación 5 se conoce como Ovoide de Descartes y describe un dioptrio que satisface la condición de estigmatismo riguroso para los puntos conjugados d y d' . Dicha ecuación es un resultado general descrito en (Silva-Lora & Torres, 2020) y es a partir de esta que se deduce la expresión para el dioptrio esférico. En este caso particular se considera que dicha ecuación satisface las relaciones

$$n_o^2 - n_i^2 = \kappa (n_od' - n_id) \quad (6)$$

y

$$\frac{n_i^2}{d} - \frac{n_o^2}{d'} = \kappa (n_i - n_o), \quad (7)$$

siendo κ una constante. Si se reescribe 7 para después sumar y restar 6 y 7, se hallan los valores de d y d' para los cuales se cumplen estas igualdades. Con estas soluciones, $n_id' - n_od = 0$ y la ecuación 5 se simplifica a

$$r^2 (n_o^2 - n_i^2) + 2zdd' \left(\frac{n_i^2}{d} - \frac{n_o^2}{d'} \right) = 0; \quad (8)$$

recordando que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ se obtiene finalmente que

$$(x^2 + y^2) + \left(z - \frac{n_o n_i}{\kappa(n_o + n_i)} \right)^2 = \left(\frac{n_o n_i}{\kappa(n_o + n_i)} \right)^2. \quad (9)$$

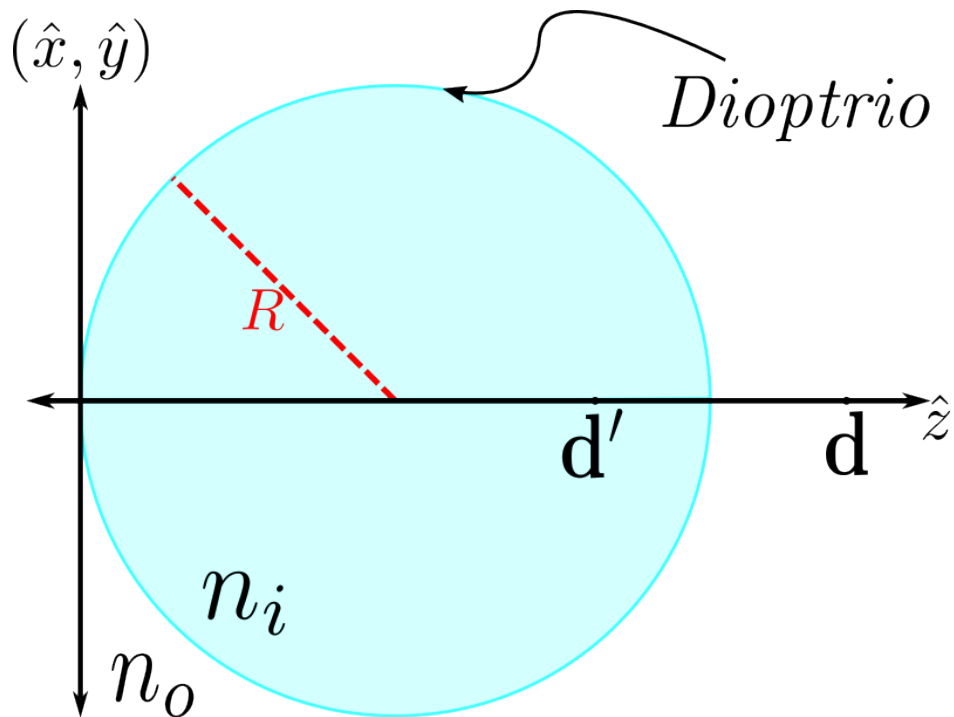
Esta es la ecuación de una esfera de radio $R = \frac{n_o n_i}{\kappa(n_o + n_i)}$, donde d y d' en términos de R son

$$d = R \left(1 + \frac{n_i}{n_o} \right) \quad (10)$$

y

$$d' = R \left(1 + \frac{n_o}{n_i} \right). \quad (11)$$

Estas dos expresiones finales describen un par de puntos conjugados para los cuales se cumple el estigmatismo riguroso y son conocidos como los puntos de Young-Weierstrass (Maurel, 2002) y en un sentido más general para un dioptrio, existen infinitos pares de puntos que satisfacen la condición de estigmatismo riguroso que forman superficies esféricas que son aplanéticas y satisfacen la condición Seno de Abbe (Abbe, 1873; Silva-Lora & Torres, 2020; Welford, 1976).

Figura 5.*Dioptrio esférico*

Nota. Esquematación de un dioptrio esférico y los puntos de Young-Weierstrass para los cuales se satisface el estigmatismo riguroso.

1.3. Trazado de rayos para un dioptrio esférico

Mediante el método desarrollado en Silva-Lora y Torres (2020) se puede establecer una expresión en dos dimensiones para conocer el comportamiento de cada rayo que satisfaga la condición de estigmatismo riguroso, al conocer el vector paramétrico $\vec{\rho}$ que describe el dioptrio y las posiciones d' y d respecto al vértice del dioptrio. En el espacio tridimensional, el vector paramétrico que describe el dioptrio se expresa como

$$\vec{\rho} = \begin{bmatrix} \rho(\varphi) \sin \varphi \cos \gamma \\ \rho(\varphi) \sin \varphi \sin \gamma \\ \rho(\varphi) \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (12)$$

siendo φ el ángulo polar y γ el ángulo azimutal, y cuyo vector normal $\hat{\mathbf{N}}$ resulta ser

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \gamma}}{\left| \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \gamma} \right|}. \quad (13)$$

Utilizando la ley vectorial de Snell-Descartes se define el versor del rayo refractado como

$$\hat{\mathbf{u}}' = \frac{n_i}{n_o} \hat{\mathbf{u}} - \left[\frac{n_i}{n_o} (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{N}}) + \sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_o} \right)^2 [1 - (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{N}})^2]} \right] \hat{\mathbf{N}}, \quad (14)$$

que describe el comportamiento de cualquier rayo refractado. Para este estudio se considera que el objeto está situado en $\mathbf{d}' = (0, 0, d')$, cuyos rayos divergen y viajan de un medio de índice de refracción n_i a un medio de menor índice n_o . El vector paramétrico que describe el dioptrio esférico es

$$\vec{\rho} = R \begin{bmatrix} \sin 2\varphi \cos \gamma \\ \sin 2\varphi \sin \gamma \\ 1 + \cos 2\varphi \end{bmatrix}, \quad (15)$$

mientras que el vector normal para dicho dioptrio esférico es

$$\hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \sin 2\varphi \cos \gamma \\ \sin 2\varphi \sin \gamma \\ \cos 2\varphi \end{bmatrix}. \quad (16)$$

El versor de cualquier rayo proveniente del objeto y que incide sobre el dioptrio esférico se expresa como

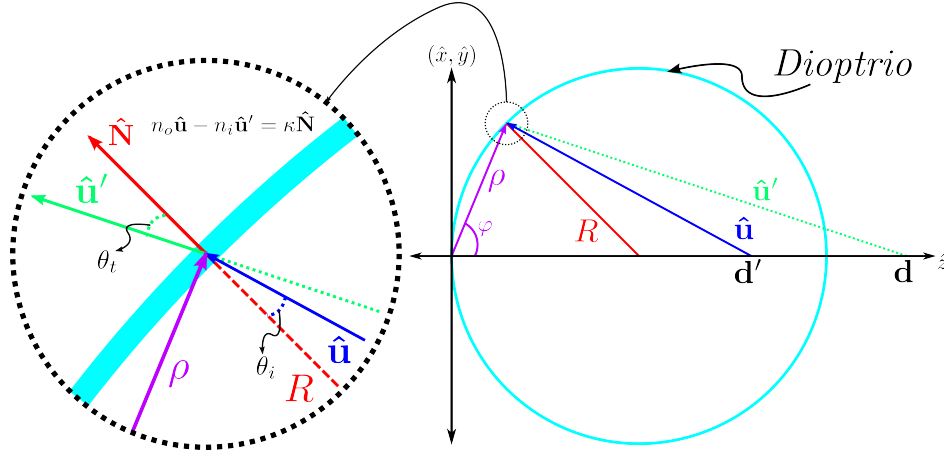
$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\rho} - \mathbf{d}'}{|\vec{\rho} - \mathbf{d}'|} = l^{-1} \begin{bmatrix} \sin 2\varphi \cos \gamma \\ \sin 2\varphi \sin \gamma \\ \cos 2\varphi - \frac{n_o}{n_i} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

siendo $l = \sqrt{1 + \left(\frac{n_o}{n_i}\right)^2 - 2\frac{n_o}{n_i} \cos 2\varphi}$. Finalmente, el versor de los rayos refractados provenientes de $\mathbf{d} = (0, 0, d)$, resulta ser

$$\hat{\mathbf{u}}' = \frac{n_i}{n_o} \hat{\mathbf{u}} - l^{-1} \left(\frac{n_i^2 - n_o^2}{n_i n_o} \right) \hat{\mathbf{N}}, \quad (18)$$

para los cuales se satisface el principio de Snell-Descartes.

Figura 6.
Trazado de rayos.



Nota. Representación gráfica de un rayo de luz proveniente de d' y que forma una imagen en d después de atravesar el dioptrio esférico, satisfaciendo la ley de Snell-Descartes.

De las ecuaciones 17, 16 y 18, se deduce que las relaciones trigonométricas que se satisfacen son

$$\sin \theta_i = |\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{u}}| = l^{-1} \frac{n_o}{n_i} \sin 2\varphi, \quad (19)$$

$$\cos \theta_i = \hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = l^{-1} \left(1 - \frac{n_o}{n_i} \cos 2\varphi \right), \quad (20)$$

$$\sin \theta_t = |\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{u}}'| = l^{-1} \sin 2\varphi \quad (21)$$

y

$$\cos \theta_t = \hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{u}}' = \pm l^{-1} \left(\cos 2\varphi - \frac{n_o}{n_i} \right). \quad (22)$$

Esta última relación, Ec. 22, tiene dos soluciones que establecen cuál es el dominio de φ . se considerará la solución positiva, ya que permite que el mapeo sea más sencillo. Cabe resaltar que estos ángulos están en concordancia con el principio de Fermat ya que se derivan a partir de este y, por lo tanto, también lo están con la ley vectorial de Snell-Descartes. El ángulo límite para el cual hay rayos difractados se da cuando $\theta_t \rightarrow \pi/2$ y se establece como

$$\varphi_M = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{n_o}{n_i} \right). \quad (23)$$

Estos resultados precisan el punto de partida del estudio desarrollado en este trabajo, ya que al considerar las propiedades ondulatorias de la luz, se definen la dirección de la onda incidente en el mismo sentido que $\hat{\mathbf{u}}$ y la dirección de la onda refractada en el mismo sentido que $\hat{\mathbf{u}}'$.

De igual manera quedan definidos el ángulo incidente θ_i y el ángulo de refracción θ_t , mientras que conociendo el vector normal $\hat{\mathbf{N}}$, se define cuál es el plano sobre el que oscila el campo electromagnético de la onda incidente y la onda refractada. A partir de las relaciones trigonométricas, y haciendo uso de los coeficientes de Fresnel, se obtienen las componentes de la onda refractada, que se estudiarán con más detalle en el siguiente capítulo, al igual que se introducirá el concepto de polarización y cómo esta cambia dependiendo del ángulo de incidencia de la onda sobre el dioptrio esférico.

2. Óptica ondulatoria, polarización y difracción

Los principales avances en el estudio de las ondas electromagnéticas se dieron durante el siglo XIX, siendo uno de los más recordados la descripción de Maxwell sobre el electromagnetismo al unificar trabajos previos que explican fenómenos eléctricos y magnéticos, que con el paso de los años resultaron en cuatro ecuaciones que describen éstas interacciones y cómo hacen parte de un mismo fenómeno, ya que uno puede inducir al otro y viceversa.

Las cuatro ecuaciones son descripciones matemáticas de observaciones previas hechas por otros físicos, como Charles-Agustin de Coulomb, que describió cómo una carga eléctrica genera un campo eléctrico; Jean-Baptiste Biot y Félix Savart, que observaron cómo una corriente estacionaria genera un campo magnético; Michael Faraday, que mediante sus experiencias concluyó que a partir de un campo magnético variante en el tiempo se puede inducir una fuerza electromotriz sobre una espira cerrada; André-Marie Ampère, quien demuestra que la intensidad del campo magnético es proporcional a la corriente que lo atraviesa y James Clerk Maxwell, que introduce una modificación a los hallazgos de Ampère y logra demostrar que un campo magnético en movimiento inducen un campo eléctrico cambiante en el tiempo.

Las ecuaciones de Maxwell también permiten demostrar la existencia de las ondas electromagnéticas y dan indicios de algo que para finales del siglo XIX se descubriría: la luz es una onda electromagnética. En este capítulo se estudia el comportamiento de una onda electromagnética cuando cambia de medio, se establece la polarización, que describe cómo oscila la onda electromagnética, y se describe cómo es la onda transmitida para el problema

propuesto.

2.1. Onda incidente sobre un dioptrio esférico

Para el caso en estudio, se supone un objeto puntual que emite luz en d' , cuyos rayos viajan de un medio de mayor índice de refracción n_i a un medio de menor índice n_o . Esto es, una onda esférica que diverge de d' , cuyo vector de onda \mathbf{k} es colinear con $\hat{\mathbf{u}}$ y se puede describir mediante el campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r})e^{-i(k|\mathbf{r}-\mathbf{d}'|-\omega t)}, \quad (24)$$

el cual oscila sobre un plano perpendicular al vector de onda. Este plano de oscilación se puede obtener a partir del vector normal $\hat{\mathbf{N}}$ y el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ hallados en la sección (1.3), siendo entonces

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{u}}}{|\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{u}}|} = \begin{bmatrix} -\sin \gamma \\ \cos \gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

el vector perpendicular al plano de incidencia, y

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{u}}}{|\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{u}}|} = l^{-1} \begin{bmatrix} \left(\cos 2\varphi - \frac{n_o}{n_i}\right) \cos \gamma \\ \left(\cos 2\varphi - \frac{n_o}{n_i}\right) \sin \gamma \\ -\sin 2\varphi \end{bmatrix}, \quad (26)$$

el vector paralelo al plano de incidencia. La amplitud

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_p(\mathbf{r})e^{i\epsilon_p}\hat{\mathbf{p}} + A_s(\mathbf{r})e^{i\epsilon_s}\hat{\mathbf{s}}, \quad (27)$$

es la superposición de dos componentes perpendicular y paralela. Esta amplitud define el sentido de oscilación del campo eléctrico \mathbf{E} y los subíndices indican si la componente es perpendicular s o paralelo p al plano de incidencia y ϵ representa el desfase de la componente correspondiente. La amplitud de la onda es constante sobre todo el frente de onda y oscila en sentido horario, por lo que se reescribe como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A\hat{\mathbf{p}} + Ae^{-i\frac{\pi}{2}}\hat{\mathbf{s}} = A(\hat{\mathbf{p}} - i\hat{\mathbf{s}}), \quad (28)$$

donde existe un desfase de $\Delta\epsilon = \pi/2$ entre ambas componentes.

2.2. Coeficientes de Fresnel

Cuando la onda incide sobre el dioptrio esférico su energía se divide en dos partes, una reflejada y otra refractada, cumpliendo el principio de continuidad* que se satisface estableciendo cuatro condiciones de frontera para el campo electromagnético sobre la superficie que separa ambos medios (Goldstein, 2017) y son

$$D_s^{n_o} = D_s^{n_i}, \quad (29) \qquad H_p^{n_o} = H_p^{n_i}, \quad (31)$$

y

$$B_s^{n_o} = B_s^{n_i}, \quad (30) \qquad E_p^{n_o} = E_p^{n_i}. \quad (32)$$

*Para este estudio en particular se considera la onda incidente como monocromática y los medios como lineales, isotropos y homogéneos.

Siendo D el desplazamiento eléctrico y H es la intensidad del campo magnético. Sobre el dioptrio coexisten tres ondas -la incidente, la reflejada y la refractada- en cualquier instante de tiempo, para cualquier punto sobre el mismo, de tal manera que la frecuencia angular ω es la misma para las tres ondas. A partir de las Ecs. 29 y 30 se obtienen las relaciones entre las componentes perpendiculares de las amplitudes de estas ondas resultan ser

$$r_s = \frac{R_s}{A_s} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_o \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_o \cos \theta_t} \quad (33)$$

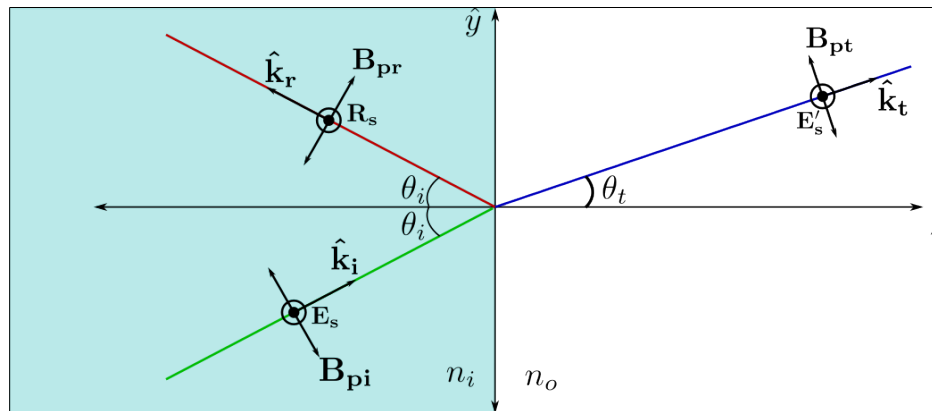
y

$$t_s = \frac{A'_s}{A_s} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_o \cos \theta_t}, \quad (34)$$

cumpliendo que $t_s - r_s = 1$.

Figura 7.

Incidencia perpendicular.



Nota. Relación de las componentes perpendiculares de las ondas incidente \mathbf{E}_s , reflejada \mathbf{R}_s y refractada \mathbf{E}'_s .

Para las componentes paralelas se obtiene que las relaciones están dadas por

$$r_p = \frac{R_p}{A_p} = \frac{n_o \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_o \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t} \quad (35)$$

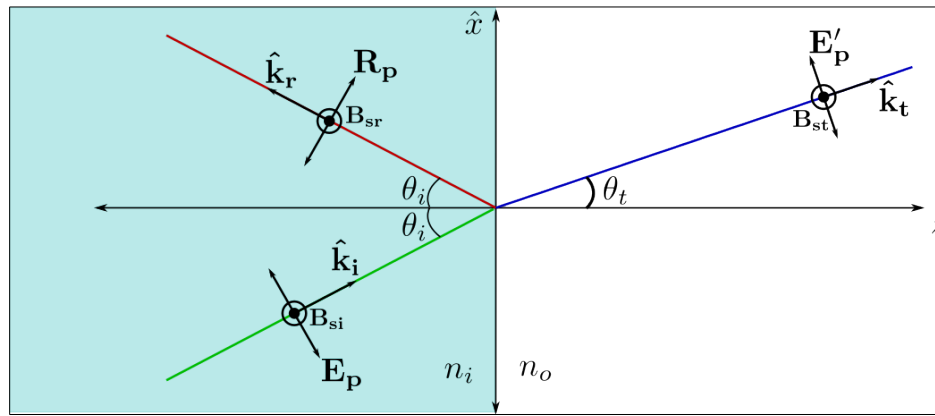
y

$$t_p = \frac{A'_p}{A_p} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_o \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}, \quad (36)$$

satisfaciendo que $\frac{n_o}{n_i} t_p - r_p = 1$.

Figura 8.

Incidencia paralela.



Nota. Relación de las componentes paralelas de las ondas incidente \mathbf{E}_p , reflejada \mathbf{R}_p y refractada \mathbf{E}'_p .

Estas relaciones son conocidas como coeficientes de Fresnel y permiten describir cómo es la transmisión de un medio a otro. Para el caso de estudio, estos coeficientes se pueden describir en función del ángulo φ , teniendo en cuenta las relaciones trigonométricas halladas en el capítulo anterior, resultando en que

$$r_s = \frac{n_i^2 + n_o^2 - 2n_i n_o \cos 2\varphi}{n_i^2 - n_o^2} \quad (37)$$

y

$$t_s = \frac{2n_i(n_i - n_o \cos 2\varphi)}{n_i^2 - n_o^2} \quad (38)$$

describen los coeficientes perpendiculares, mientras que para los coeficientes paralelos son

$$r_p = \frac{2n_i n_o - (n_i^2 + n_o^2) \cos 2\varphi}{(n_i^2 - n_o^2) \cos 2\varphi} \quad (39)$$

y

$$t_p = \frac{2n_i(n_i - n_o \cos 2\varphi)}{(n_i^2 - n_o^2) \cos 2\varphi}. \quad (40)$$

A partir de estas relaciones, se establecerá cómo es la amplitud de la onda transmitida.

2.3. Onda transmitida

La onda transmitida es esférica y se puede representar como

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}'(\mathbf{r})e^{-i(k_i|\mathbf{r}-\mathbf{d}|-\omega t)}, \quad (41)$$

que oscila en el plano $(\hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{p}}')$, perpendicular al vector de onda \mathbf{k}' . Esta onda se desplaza paralela al vector $\hat{\mathbf{u}}'$, determinado en la Ec. 14, mientras que la amplitud está determinada a partir de las relaciones de los coeficientes de Fresnel de tal manera que $A'_p = t_p A_p$ y $A'_s = t_s A_s$. El plano de oscilación queda descrito mediante un vector perpendicular

$$\hat{\mathbf{s}}' = \frac{\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{u}}'}{|\hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{u}}'|} = \begin{bmatrix} -\sin \gamma \\ \cos \gamma \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{s}}, \quad (42)$$

y un vector unitario paralelo que es

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}}' &= \frac{\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{u}}'}{|\hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{u}}'|} \\ &= \left(\frac{n_i}{n_o}\right) \hat{\mathbf{p}} - l^{-1} \left(\frac{n_i^2 - n_o^2}{n_i n_o}\right) \hat{\mathbf{T}}, \end{aligned} \quad (43)$$

siendo

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi \cos \gamma \\ \cos 2\varphi \sin \gamma \\ -\sin 2\varphi \end{bmatrix}, \quad (44)$$

el vector unitario tangencial al dioptrio. A partir de esto, la amplitud del campo puede se escribe como

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = t_p A \hat{\mathbf{p}}' - t_s A \hat{\mathbf{s}}. \quad (45)$$

Es de utilidad para este estudio describir las componentes de la amplitud de la onda transmitida en función de dos estados de polarización ortonormales, circular derecho $|\mathcal{R}'\rangle$ y circular izquierdo $|\mathcal{L}'\rangle$, recordando que la polarización es una propiedad de las ondas que tienen un sentido de oscilación bien definido (Goldstein, 2017). Para esto, se definen dos vectores que describen estos estados de polarización como

$$|\mathcal{R}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{p}}' - i\hat{\mathbf{s}}) \quad (46)$$

y

$$|\mathcal{L}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{p}}' + i\hat{\mathbf{s}}). \quad (47)$$

Al reemplazar 46 y 47 en la ecuación 45, la amplitud de la onda transmitida resulta ser

$$\mathbf{A}'(\varphi) = \frac{A}{\sqrt{2}} (t_p + t_s) |\mathcal{R}'\rangle + \frac{A}{\sqrt{2}} (t_p - t_s) |\mathcal{L}'\rangle. \quad (48)$$

A pesar de que la onda transmitida sigue siendo esférica, su amplitud ya no es uniforme sobre su frente de onda y en cambio, dependerá del ángulo θ_i con el cual incide la onda sobre el dioptrio esférico. Ambas componentes de la amplitud estarán moduladas por los términos $(t_p + t_s)$ para la componente derecha y $(t_p - t_s)$ para la componente izquierda, y explícitamente resultan como

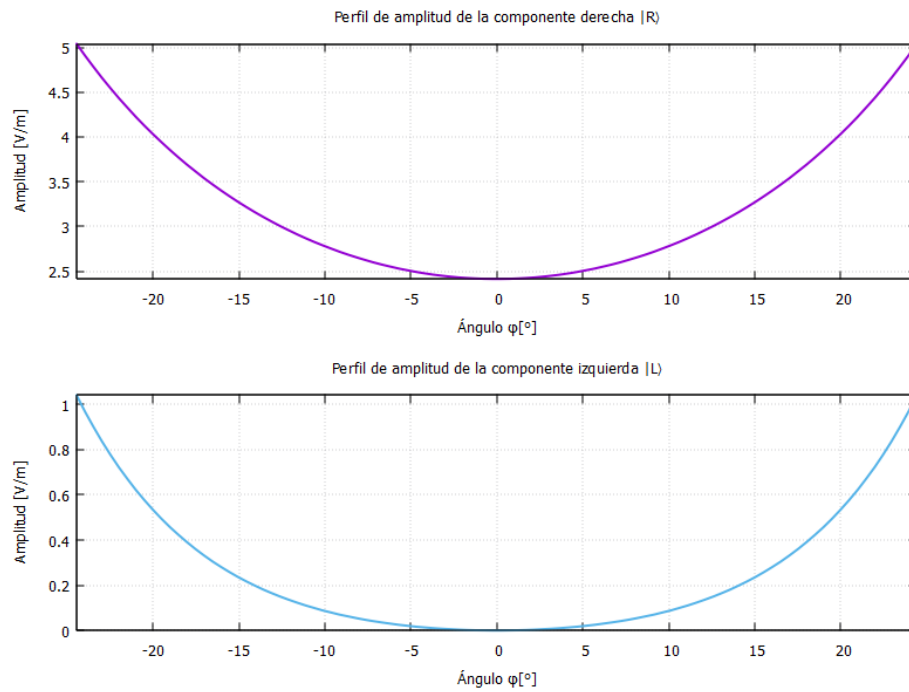
$$t_{\mathcal{R}} = t_p + t_s = \frac{2n_i^2}{n_i^2 - n_o^2} (\sec 2\varphi + 1) - \frac{2n_i n_o}{n_i^2 - n_o^2} (\cos 2\varphi + 1), \quad (49)$$

y

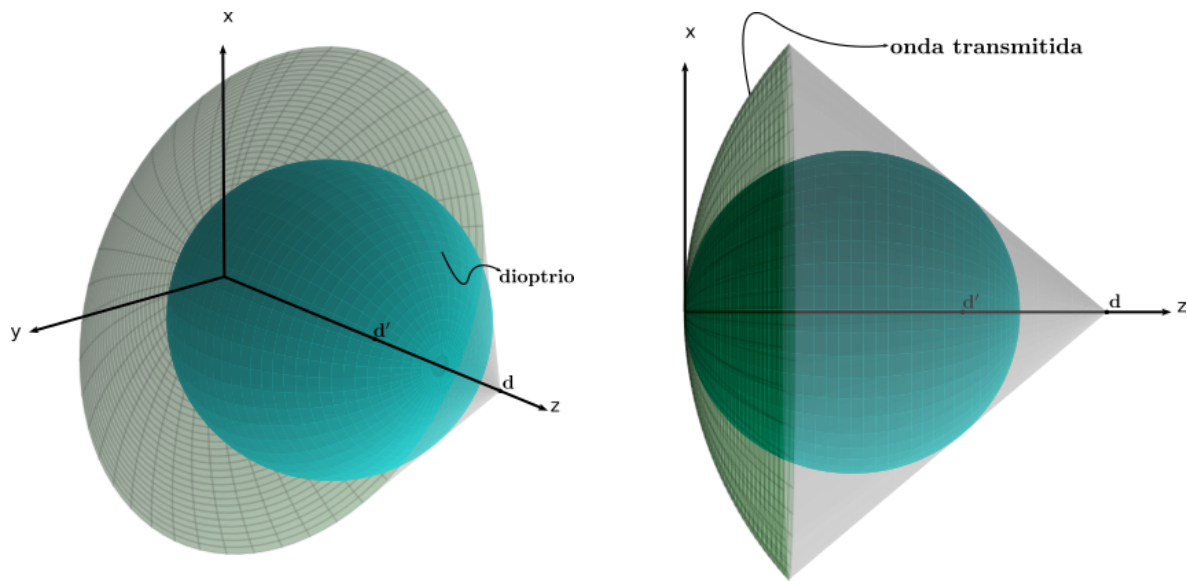
$$t_{\mathcal{L}} = t_p - t_s = \frac{2n_i^2}{n_i^2 - n_o^2} (\sec 2\varphi - 1) + \frac{2n_i n_o}{n_i^2 - n_o^2} (\cos 2\varphi - 1). \quad (50)$$

Estas funciones permiten saber cómo es el perfil de amplitud de ambas modulaciones, derecha e izquierda.

Figura 9.
Perfil de amplitudes.



Nota. Perfil de amplitud de las componentes de la onda transmitida, cuando $n_o = 1$ y $n_i = 1,52$.

Figura 10.*Representación de la onda transmitida.*

Nota. La onda transmitida sigue siendo esférica, pero su amplitud ya no es constante sobre el frente de onda, por lo que se puede expresar en términos de su polarización, usando dos estados ortogonales.

A partir de estos resultados se puede deducir la polarización de la onda transmitida, debido a que conocemos los estados base ($|\mathcal{R}\rangle, |\mathcal{L}\rangle$) y la amplitud de cada componente. Sin embargo, usar la esfera de Poincaré resultará más sencillo, como se verá en la siguiente sección.

2.4. Esfera de Poincaré

Cualquier onda electromagnética que se propaga en el espacio se puede escribir mediante un vector de campo eléctrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{bmatrix} E_x(\mathbf{r}, t) \\ E_y(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x e^{i\varphi_x} \\ \varepsilon_y e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} e^{i(\phi(\mathbf{r}) - \omega t)}, \quad (51)$$

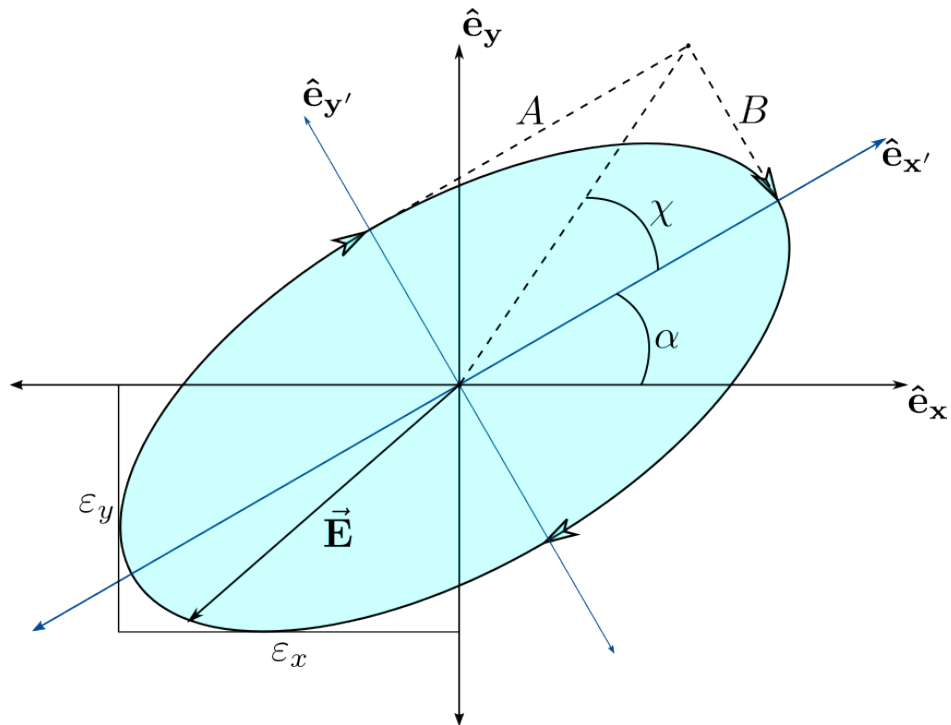
cuyo vector de Jones se define por las amplitudes de las componentes de tal manera que

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x e^{i\varphi_x} \\ \varepsilon_y e^{i\varphi_y} \end{bmatrix}, \quad (52)$$

con ε_x y ε_y cantidades reales. La parte real de la onda en la Ec. 51 representa una elipse generalizada en el plano (x, y) conocida como *Elipse de Polarización*, descrita por la relación

$$\frac{E_x^2}{\varepsilon_x^2} + \frac{E_y^2}{\varepsilon_y^2} - 2 \frac{E_x E_y}{\varepsilon_x \varepsilon_y} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi, \quad (53)$$

siendo $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$.

Figura 11.*Polarización del campo eléctrico.*

Nota. Campo Eléctrico \mathbf{E} con polarización elíptica e inclinada un ángulo de α respecto al eje horizontal \hat{e}_x .

La Ec. 53 describe de manera general una elipse con una inclinación α y es de utilidad poder describir la elipse en un sistema (x', y') tal que sus ejes coordenados coincidan con el semieje mayor y menor, rotando el sistema coordenado de modo que

$$\begin{bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Reemplazando estas componentes en la Ec. 53 se obtiene la ecuación de una elipse cuyo eje mayor se encuentra sobre el eje x' , para la que se satisfacen tres condiciones (P_1, P_2, P_3) que son

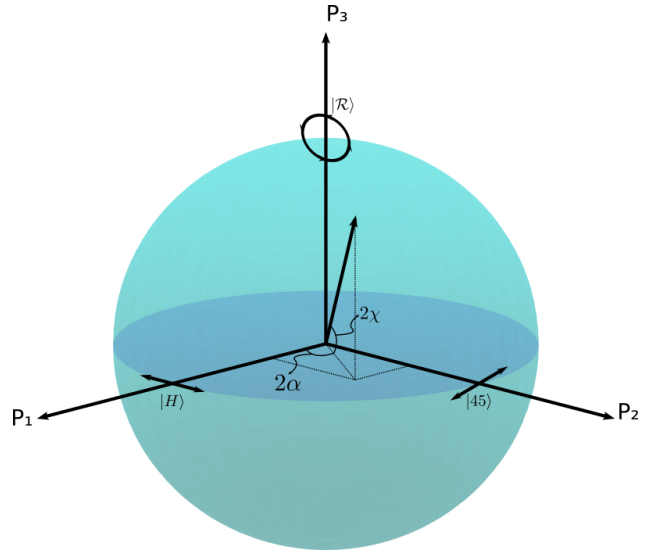
Figura 12.
Esfera de Poincaré

$$P_1 = \cos 2\chi \cos 2\alpha = \left(\frac{\varepsilon_x^2 - \varepsilon_y^2}{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} \right), \quad (55)$$

$$P_2 = \cos 2\chi \sin 2\alpha = 2 \left(\frac{\varepsilon_x \varepsilon_y}{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} \right) \cos \Delta\varphi \quad (56)$$

y

$$P_3 = \sin 2\chi = 2 \left(\frac{\varepsilon_x \varepsilon_y}{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} \right) \sin \Delta\varphi. \quad (57)$$



Nota. Representación de un estado de polarización sobre la esfera de Poincaré.

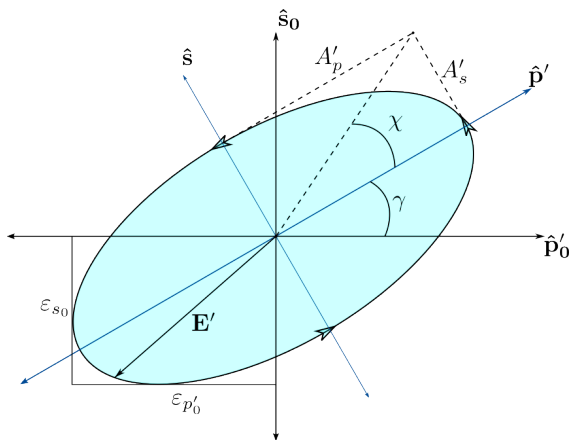
Estas relaciones conforman una triada de coordenadas (P_1, P_2, P_3) que describen cualquier punto sobre una esfera unitaria conocida como *Esfera de Poincaré* y cada punto sobre esta esfera representa un estado de polarización de una onda electromagnética oscilando en un plano perpendicular a la dirección de propagación.

Para el caso de estudio, los estados de polarización del campo eléctrico transmitido quedan descritos conociendo que la inclinación de la elipse de polarización sobre el eje horizontal es $\alpha = \gamma$, donde $\alpha \in [0, \pi]$ y que la elipticidad χ se obtiene conociendo que

$$\tan \chi = \frac{A'_s}{A'_p} = \cos 2\varphi, \quad (58)$$

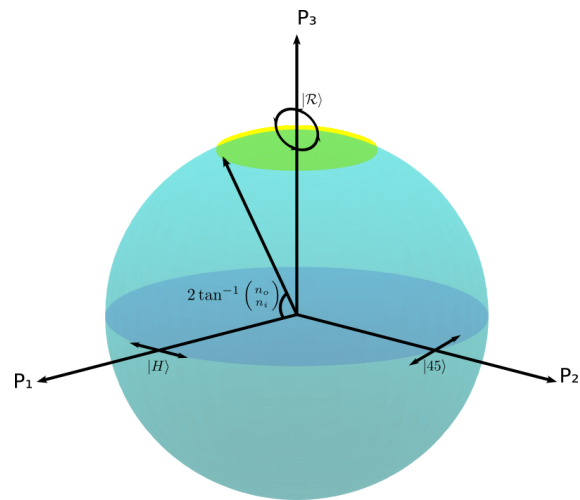
cuyo dominio es $\chi \in \left[\arctan \frac{n_o}{n_i}, \frac{\pi}{4} \right]$. Dado esto, los estados de polarización sobre la esfera de Poincaré son todos aquellos que satisfacen dichas condiciones para χ y γ .

Figura 13.
Polarización de la onda transmitida.



Nota. Esquemmatización de la polarización de la onda transmitida.

Figura 14.
Estados de polarización de la onda transmitida sobre la esfera de Poincaré



Nota. Distribución de los estados sobre la esfera de Poincaré.

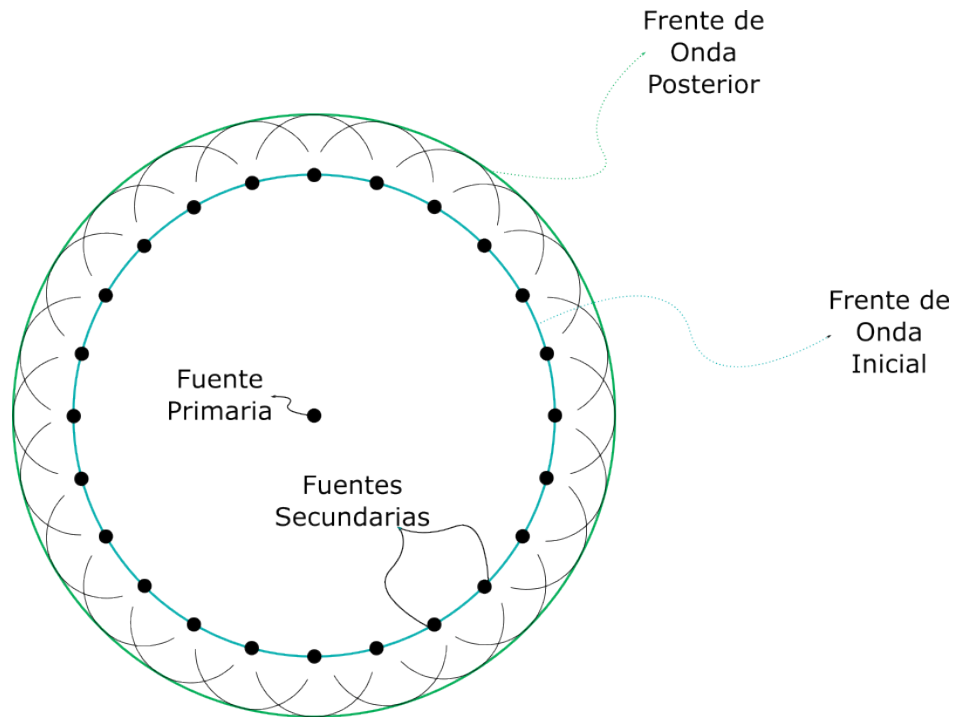
Los estados de polarización sobre la esfera de Poincaré permiten evidenciar que la polarización sobre el frente de onda ya no es uniforme y por lo tanto, es una onda vectorial. Conocer cómo se propaga este tipo de ondas presenta una mayor complejidad debido a que no satisfacen la ecuación de Helmholtz que cumplen las ondas escalares, dificultando conocer cómo es la difracción de dicha onda. Escribir la onda transmitida en términos de dos estados de polarización ortogonales permite asumir que se cumple el principio de superposición y así suponer que la onda transmitida es la suma vectorial de dos ondas escalares. En el próximo capítulo se abordará la difracción para ondas escalares y se calculará cómo es la intensidad

de la onda transmitida sobre el punto de Young-Weierstrass o punto imagen.

3. Propagación del campo electromagnético

La naturaleza ondulatoria de la luz empieza a tomar relevancia en el mundo moderno cuando a comienzos del siglo XIX, Thomas Young describe su experiencia al dejar pasar luz proveniente de una misma fuente a través de dos aberturas muy cercanas en una lámina y observar franjas brillantes y oscuras en una pantalla de observación (Young, 1804); dicho patrón, conocido como patrón de interferencia, solo puede ser explicado si se considera la luz como una onda.

Desde el siglo XVII, el físico Holandés Christiaan Huygens consideraba ya que la luz era un fenómeno ondulatorio que se propagaba a través de un medio conocido como éter, y a partir de ello estableció un principio revolucionario y controvertido en su momento al considerar que cada punto de un frente de onda, puede considerarse como una nueva fuente de ondas secundarias (Huygens, 1920), y fue precisamente con el experimento de la doble rendija de Young, dos siglos más tarde, que se pudo corroborar el principio planteado por Huygens, aunque dicho principio carecía de rigurosidad matemática.

Figura 15.*Principio de Huygens-Fresnel.*

Nota. Representación gráfica del principio de Huygens-Fresnel.

La descripción de Huygens fue complementada por Augustin Fresnel en 1815 (Fresnel, 1868) al establecer que dichas ondas secundarias interfieren entre sí para dar lugar al frente de onda posterior. Las bases matemáticas para el principio de Huygens-Fresnel fueron establecidas por Kirchhoff a finales del Siglo XIX (Kirchhoff, 1883).

En este capítulo se aborda la descripción matemática desarrollada por diferentes físicos y matemáticos que permiten describir cómo se propaga una onda electromagnética a través del espacio. De igual manera, se describe el concepto de transparencia de curvatura, mediante el cual Georges Bonnet plantea una solución que considera una aproximación metaxial de las aberturas del campo. Finalmente, se establece cómo es la propagación de

la onda electromagnética que se estudia, a partir de dicho planteamiento y se establece una discretización de la propagación para encontrar una solución mediante la simulación del problema en el lenguaje de programación Python.

3.1. Teoría escalar de la difracción

Una onda electromagnética se puede representar mediante su campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ o su campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, los cuales son soluciones a la ecuación de onda. Cuando las componentes de dichos campos pueden ser representadas mediante una misma función general $\Psi(\mathbf{r}, t)$, que es solución de la ecuación de onda, se puede reducir la ecuación de onda vectorial a una ecuación de onda escalar. Así, la ecuación de onda se establece como

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (59)$$

siendo μ es la permeabilidad magnética y ϵ es la permitividad eléctrica del medio que atraviesa la onda electromagnética. Una solución general resulta ser

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (60)$$

donde $A(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})}$ es la amplitud compleja del campo. Esta función escalar representa a una onda monocromática (una sola frecuencia ν) y se puede generalizar a una onda policromática (varias frecuencias), estableciendo esta como una suma infinita de todas las frecuencias de la onda en cualquier instante de tiempo

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{r}, \nu) e^{-i2\pi\nu t} d\nu. \quad (61)$$

Esta onda policromática también satisface la ecuación de onda al igual que la onda monocromática y se puede simplificar de tal manera que

$$(\nabla^2 + k^2) A(\mathbf{r}, \nu) = 0, \quad (62)$$

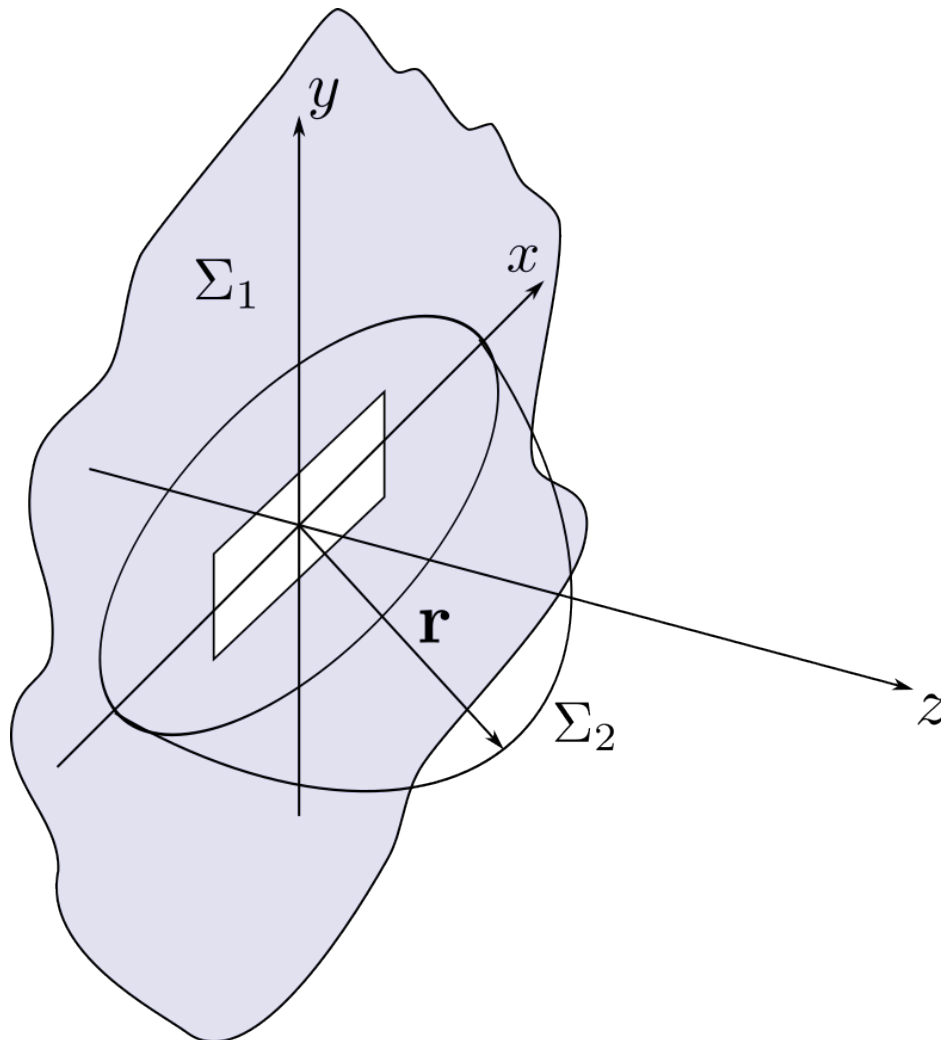
siendo $k = 2\pi/\lambda$ el número de onda. Este resultado se conoce como la *Ecuación de Helmholtz* y establece cómo varía la amplitud compleja de una onda electromagnética en cualquier lugar del espacio para determinada frecuencia. Por otra parte, para estudiar cómo se propaga una onda electromagnética se utiliza el teorema de Green para describir dicha onda encerrada en una superficie. Para esto, se plantea una función de Green G para la cual se cumpla que

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (63)$$

tal que al reemplazar las funciones $A(\mathbf{r}, \nu)$ y $G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ en el teorema de Green resulta ser

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma(V)} \left[G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial A(\mathbf{r}', \nu)}{\partial n} - A(\mathbf{r}', \nu) \frac{\partial G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial n} \right] d\sigma' \\ = \int_V \left[\partial G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \nabla^2 A(\mathbf{r}', \nu) - A(\mathbf{r}', \nu) \nabla^2 \partial G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \right] dV. \end{aligned} \quad (64)$$

Figura 16.
Teorema de Helmholtz-Kirchhoff.



Nota. Esquematización de la superficie $\Sigma(V)$ que encierra el volumen V .

Si se suma y se resta $kG(\mathbf{r}' - \mathbf{r})A(\mathbf{r}', \nu)$ dentro de la integral que está al lado derecho de la igualdad se obtiene entonces que

$$\oint_{\Sigma(V)} \left[G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial A(\mathbf{r}', \nu)}{\partial n} - A(\mathbf{r}', \nu) \frac{\partial G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial n} \right] d\sigma' = 4\pi \int_V A(\mathbf{r}', \nu) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV \quad (65)$$

$$= 4\pi A(\mathbf{r}, \nu), \quad (66)$$

donde finalmente

$$A(\mathbf{r}, \nu) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma(V)} \left[G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial A(\mathbf{r}', \nu)}{\partial n} - A(\mathbf{r}', \nu) \frac{\partial G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial n} \right] d\sigma'. \quad (67)$$

Cuando la superficie Σ_2 tiende a infinito la integral tiende a cero, de manera que el resultado relevante es aquel sobre Σ_1 que es

$$A(\mathbf{r}, \nu) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma_1} \left[G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \frac{\partial A(\mathbf{r}', \nu)}{\partial n} - A(\mathbf{r}', \nu) \frac{\partial G(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\partial n} \right] d\sigma'. \quad (68)$$

Esta integral se conoce como el teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff, a partir del cual se puede establecer el campo sobre un punto del espacio \mathbf{r} , si se conoce dicho campo sobre la superficie Σ_1 y su derivada normal a la superficie. Esta integral tiene gran relevancia cuando se quiere conocer el campo de una onda electromagnético después de que pasa por una abertura pequeña; sin embargo, el desarrollo planteado por Kirchhoff presentaba inconsistencias al considerar que el campo y su derivada se anulaban sobre toda la superficie exceptuando el espacio de la abertura.

Para solucionar este impasse, Rayleigh y Sommerfeld plantean dos funciones de Green las cuales garantizan que G o $\delta_n G$ se desvanezcan sobre el plano de la abertura. Una de ellas

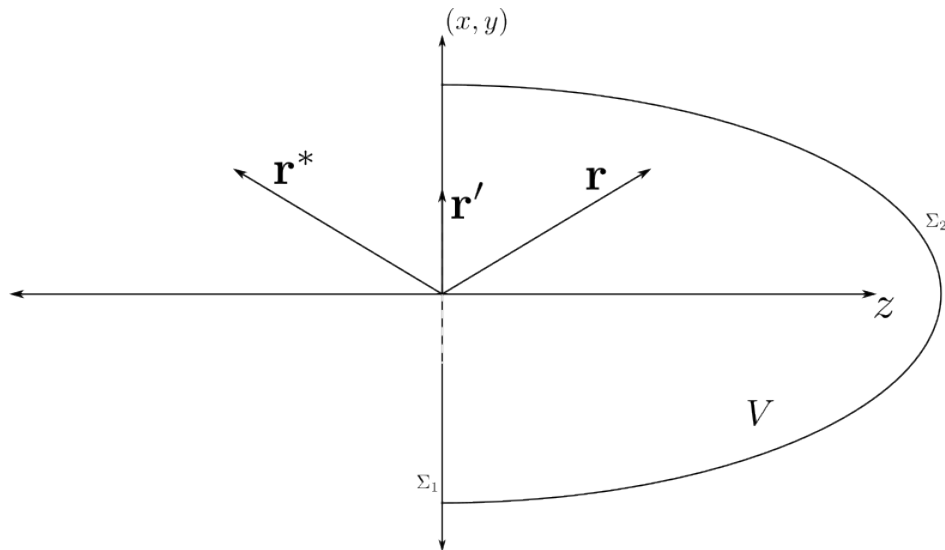
es

$$G(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \frac{e^{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}^*|}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}^*|} - \frac{e^{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}, \quad (69)$$

para la cual \mathbf{r}^* es el espejo de \mathbf{r}' ; también se nota que sobre la superficie Σ esta función se hace cero.

Figura 17.

Solución de Rayleigh-Sommerfeld.



Nota. Esquematización de la función de Green propuesta por Rayleigh-Sommerfeld.

Reemplazando la función de Green en el teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff de la Ec. 68 y asumiendo que $\lambda \ll \mathbf{r}'$, se establece que la primera solución de Rayleigh-Sommerfeld es

$$A(\mathbf{r}, \nu) = -\frac{ik}{2\pi} \oint_{\Sigma_1} A(\mathbf{r}', \nu) \frac{e^{ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \cos(\hat{\mathbf{n}}, |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) d\sigma'. \quad (70)$$

Esta solución es una descripción particular del principio de Huygens-Fresnel, que explica la propagación de las ondas en un medio. Sin embargo, si se considera que las distancias transversales son pequeñas comparadas con la distancia al plano de observación, resulta útil realizar las siguientes aproximaciones

- Para el coseno,

$$\cos(\hat{\mathbf{n}}, |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) \approx \frac{z' - z}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}.$$

- Para la fase,

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - x'}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - y'}{z} \right)^2 \right].$$

- Para la amplitud,

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \approx z.$$

Bajo estas consideraciones, la ecuación 70 se reescribe como

$$A(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint A(x', y') e^{\frac{ik}{2z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx' dy'. \quad (71)$$

Esta ecuación se conoce como el principio de Huygens-Fresnel bajo la aproximación de fresnel o aproximación de campo cercano.

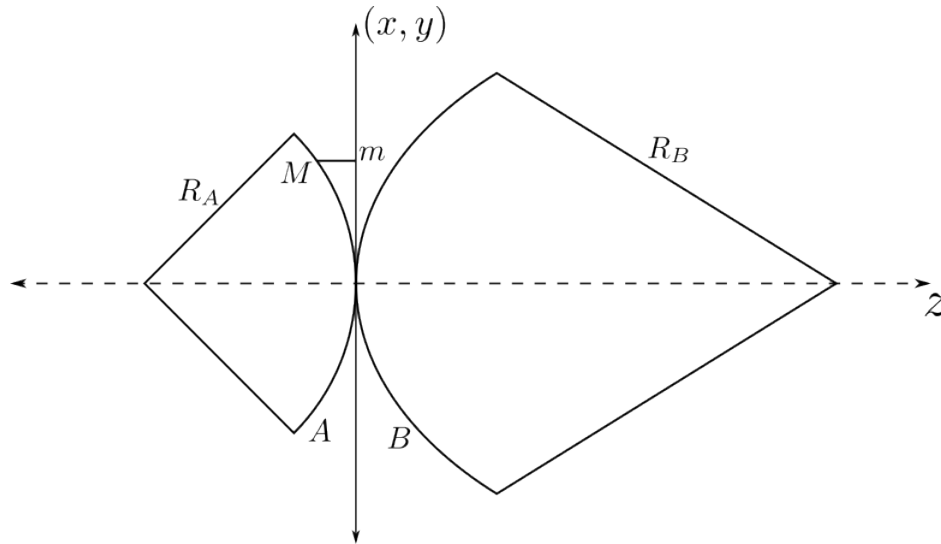
3.2. Difracción metaxial

Una limitación de la solución dada por Rayleigh-Sommerfeld, y también de la aproximación de Fresnel, es que las superficies difractantes deben ser planos, lo cual restringe el estudio de la difracción. Para solucionar esta problemática Georges Bonnet propone el uso

de emisores y receptores esféricos (Bonnet et al., 1978; BONNET, 1979; Bonnet, 1978): La teoría metaxial de la difracción, que es una aproximación a segundo orden considerando que:

- Las aberturas son moderadas, indicando que las dimensiones transversales de los emisores y receptores son pequeñas respecto a las distancias de observación y radios de curvatura.
- Los ángulos de los “rayos” con el eje de un emisor o receptor, son moderados.
- Los emisores y receptores se aproximan mediante porciones de esferas.
- Los cálculos se aproximan hasta segundo orden con respecto a los parámetros de abertura y ángulos, considerando las 3 condiciones anteriores.

Esta teoría hace uso de la transparencia de curvatura, concepto acuñado por Bonnet para hacer referencia a la relación entre dos emisores (o receptores) mediante una fase determinada por su geometría. Suponga entonces dos porciones de esferas A y B que comparten un mismo vértice sobre un plano P

Figura 18.*Transparencia de curvatura.*

Nota. Para dos esferas tangentes, se pasa del campo en una de las esferas a la otra mediante una transparencia de curvatura.

La relación a segundo orden entre un punto arbitrario M sobre A y su proyección m sobre P resulta ser

$$\overline{Mm} = -\frac{(x^2 + y^2)^2}{2R_A}. \quad (72)$$

Ahora, la diferencia de fase entre el campo en M y el campo en m se puede escribir como

$$\varphi = -\frac{\pi r^2}{\lambda R_A}, \quad (73)$$

de tal modo que el campo sobre P para el punto m es

$$U_P(r) = U_A(r) \exp \left[-i \frac{\pi r^2}{\lambda R_A} \right], \quad (74)$$

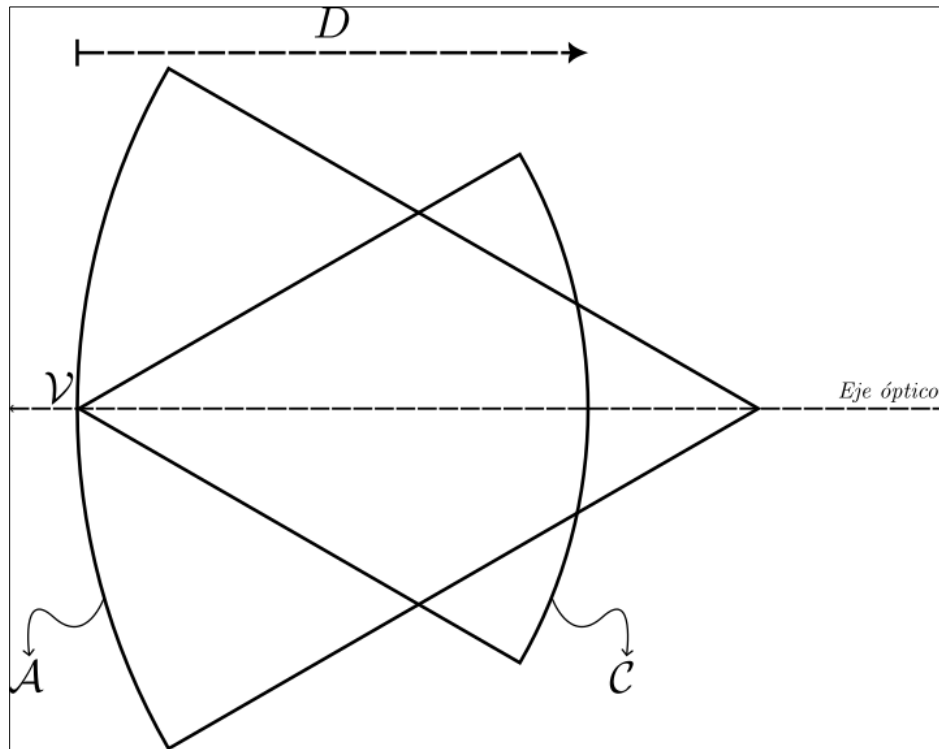
siendo $U_A(r)$ el campo en el punto M sobre A . De manera similar se obtiene el campo en B a partir de conocer el campo en P . Finalmente, se concluye que

$$U_P(r) = U_A(r) \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right]. \quad (75)$$

Se dice entonces que la transferencia del campo de A a B se hace mediante una transparencia de curvatura, ya que ambos campos solo se diferencian por un término de fase cuadrática que se anula cuando se considera la irradiancia de la onda, por lo tanto no hay atenuación. Teniendo en cuenta estas consideraciones y mediante el uso de una transformación de Fourier óptica, se puede deducir la ecuación 71 de manera que

$$A(s) = \frac{1}{i\lambda D} \iint_{-\infty}^{\infty} A(r) e^{i\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_a} \right) r^2} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda D} \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}} dr, \quad (76)$$

donde D es la distancia a la pantalla de observación, R_a es el radio del emisor a la superficie A y \mathbf{s}' es el vector sobre el plano de observación.

Figura 19.*Aproximación Metaxial de Bonnet.*

Nota. La difracción de Fresnel es considerada cuando se observa el campo difractado sobre una esfera cardinal \mathcal{C} centrada sobre el emisor \mathcal{A} .

3.3. Difracción de la onda esférica transmitida

Para el caso de estudio, la onda transmitida se considera como el emisor, siendo esta onda una onda esférica, cuya apertura angular está acotada por el valor del ángulo β para el cual existe transmisión y que depende del ángulo φ_M , descrito en la Ec. 23. La apertura angular del emisor, que para el caso de estudio se encuentra sobre \mathbf{d} , se establece como el ángulo entre el eje óptico $\hat{\mathbf{z}}$ y el rayo $\hat{\mathbf{u}}'$, siendo

$$\cos \beta = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{u}}'. \quad (77)$$

El último rayo para el cual existe transmisión se obtiene cuando $\varphi = \varphi_M$. Así, resolviendo esta relación para el último rayo $\hat{\mathbf{u}}'$, la apertura angular del emisor resulta ser

$$\beta = \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{n_i^2 - n_o^2}{n_i^2}} \right). \quad (78)$$

Si se considera que $n_o = 1$ y $n_i = 1,52$, el ángulo máximo resulta ser $\beta = 0,7180[\text{rad}]$. Para garantizar limitar los errores de aproximación del sistema, se puede acotar entonces la amplitud máxima $\beta = 0,5[\text{rad}]$ y esta apertura garantiza un buen resultado considerando que la aproximación es a segundo orden.

La superficie de salida \mathbf{s} es la proyección del vector paramétrico ρ , enunciado en la ec. 15 sobre el plano xy , siendo entonces

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \cos \gamma \\ r \sin \gamma \end{bmatrix}, \quad (79)$$

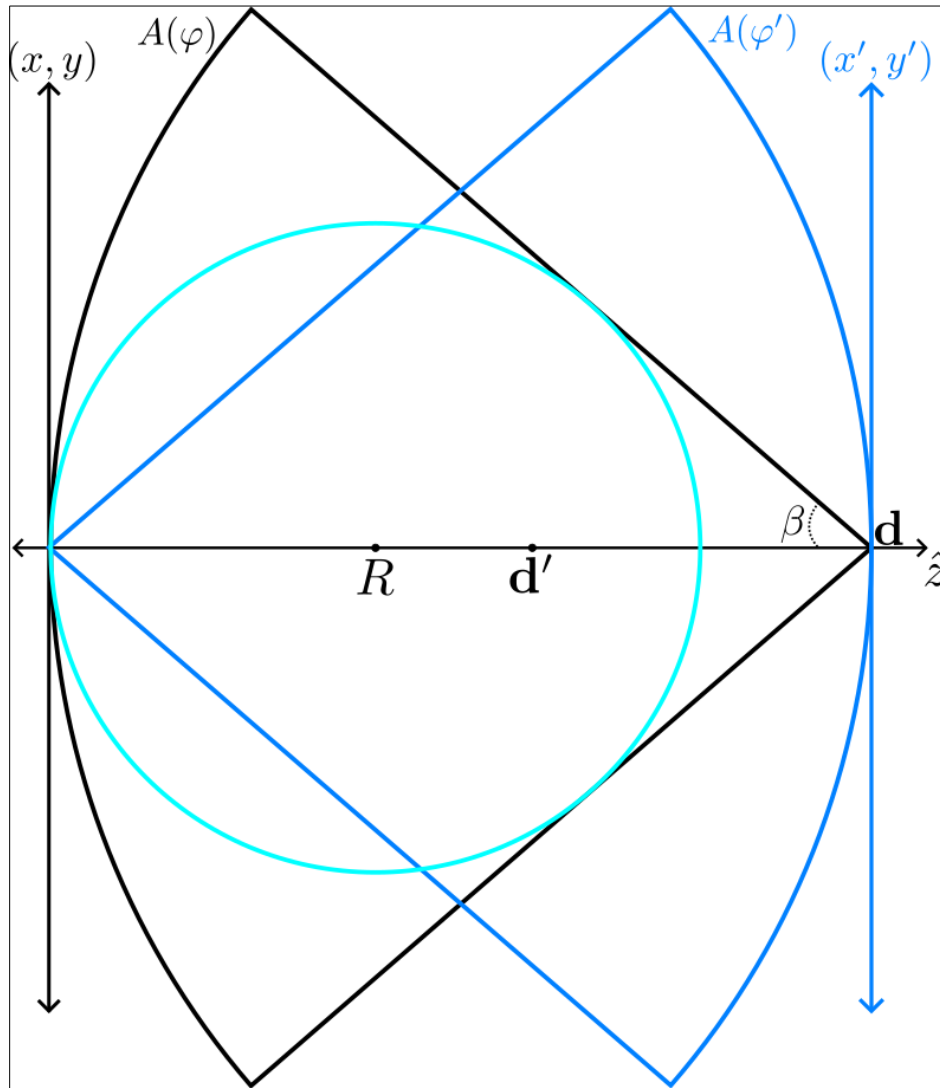
donde $r = R \sin 2\varphi$. La superficie de observación se establece como

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s \cos \gamma' \\ s \sin \gamma' \end{bmatrix}, \quad (80)$$

que se encuentra a la distancia $D = d$, que es de igual manera la distancia al punto imagen la onda transmitida $R_a = d$. Así, la difracción de las componentes de manera general puede escribirse como

Figura 20.

Relación para el emisor y el receptor de la onda transmitida.



relación entre el emisor y el receptor, donde la apertura angular del emisor es β .

$$A(s) = \frac{1}{i\lambda d} \iint_{-\infty}^{\infty} A(s) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda d} \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}} dr, \quad (81)$$

para la cual $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = Rs \sin 2\varphi s \cos(\gamma - \gamma')$ y $dr = 2R^2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi d\varphi d\gamma$. Al reemplazar este término resulta entonces

$$A(\varphi') = \frac{1}{i\lambda d} \int_0^{\varphi_M} A(\varphi) \left[\int_0^{2\pi} e^{i\left[\frac{2\pi}{\lambda}(R \sin 2\varphi)s\right] \cos(\gamma-\gamma')} d\gamma \right] 2R^2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi d\varphi, \quad (82)$$

donde la integral dentro de los corchetes rectangulares resulta ser la función de Bessel de primer tipo y de orden cero J_0 y así

$$A(\varphi') = \frac{4\pi n_o}{i\lambda R(n_i + n_o)} \int_0^{\varphi_M} A(\varphi) J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda}(R \sin 2\varphi)s\right) (R \sin 2\varphi) (2R \cos 2\varphi d\varphi). \quad (83)$$

Recordando que $r = R \sin 2\varphi$, la expresión resultante toma la forma de una transformación de Hankel de orden cero que se define como

$$\mathcal{H}_0\{f(r)\}(s) = \int_0^\infty f(r) J_0(sr) r dr, \quad (84)$$

que precisamente indica la simetría esférica del problema. Para resolver esta transformación, se hará uso de un código en Python, para poder obtener la intensidad de la onda sobre la superficie de observación.

3.4. Resolviendo la transformación usando Python

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el capítulo 2, el campo eléctrico de la onda transmitida es

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{\sqrt{2}} (t_{\mathcal{R}} |\mathcal{R}\rangle + t_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}\rangle) e^{-i(k_i |\mathbf{r}-\mathbf{d}'| - \omega t)}, \quad (85)$$

donde cabe recordar que A es la amplitud del campo eléctrico, mientras que $|\mathcal{R}\rangle$ y $|\mathcal{L}\rangle$ son los estados de polarización circular derecho y circular izquierdo. Para dar una solución al planteamiento, el enfoque se dará en entender cómo transforman las funciones que modulan la amplitud, $t_{\mathcal{R}}$ y $t_{\mathcal{L}}$. Planteando un cambio de variable tal que $r = R \sin 2\varphi$ y $s = \sin \varphi'$ las modulaciones de la amplitud resultan ser

$$t_{\mathcal{R}} = \frac{2n_i^2}{n_i^2 - n_o^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - R^{-2}r^2}} + 1 \right) - \frac{2n_i n_o}{n_i^2 - n_o^2} \left(\sqrt{1 - R^{-2}r^2} + 1 \right) \quad (86)$$

y

$$t_{\mathcal{L}} = \frac{2n_i^2}{n_i^2 - n_o^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - R^{-2}r^2}} - 1 \right) + \frac{2n_i n_o}{n_i^2 - n_o^2} \left(\sqrt{1 - R^{-2}r^2} - 1 \right), \quad (87)$$

para la amplitud derecha e izquierda, respectivamente. Difractando estas modulaciones según se indica en la Ec. 83, las componentes de la modulación de amplitud resultante son

$$\mathcal{H}_0 \{t_{\mathcal{R}}\} = \frac{2n_i^2}{n_i^2 - n_o^2} \mathcal{H}_0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - R^{-2}r^2}} + 1 \right\} - \frac{2n_i n_o}{n_i^2 - n_o^2} \mathcal{H}_0 \left\{ \sqrt{1 - R^{-2}r^2} + 1 \right\} \quad (88)$$

y

$$\mathcal{H}_0 \{t_{\mathcal{L}}\} = \frac{2n_i^2}{n_i^2 - n_o^2} \mathcal{H}_0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - R^{-2}r^2}} - 1 \right\} + \frac{2n_i n_o}{n_i^2 - n_o^2} \mathcal{H}_0 \left\{ \sqrt{1 - R^{-2}r^2} - 1 \right\}. \quad (89)$$

Así, la amplitud del campo eléctrico difractado es

$$\mathbf{A}_H(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{\sqrt{2}} \mathcal{H}_0 \{t_{\mathcal{R}}\} |\mathcal{R}'\rangle + \frac{A}{\sqrt{2}} \mathcal{H}_0 \{t_{\mathcal{L}}\} |\mathcal{L}\rangle. \quad (90)$$

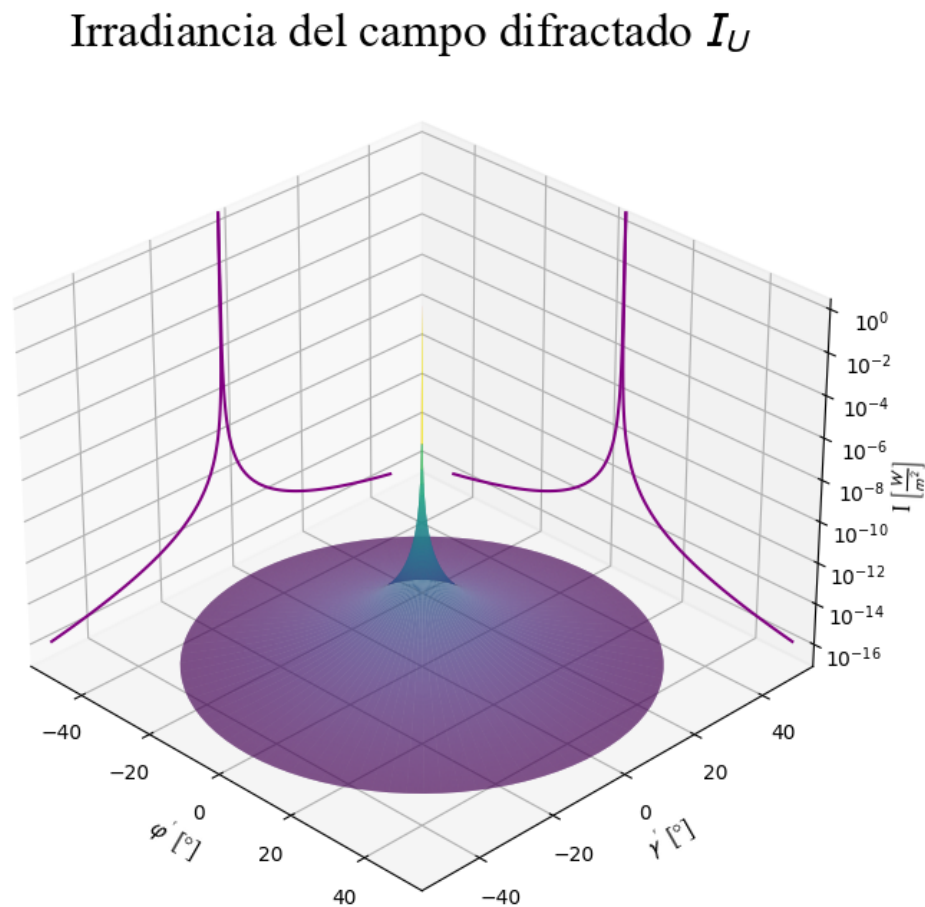
La irradiancia del campo eléctrico difractado es

$$I_U = \epsilon_o c n_i \|\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)\|^2. \quad (91)$$

Cabe resaltar que los términos cruzados en la ecuación anterior son nulos debido a que los estados de polarización son ortogonales. Finalmente, la solución numérica para las ecuaciones 88 y 89 se hacen mediante el uso de la librería Hankel (Murray, 2020) de python.

Figura 21.

Irradiancia sobre la imagen d .



Nota. Los parámetros establecidos son $n_o = 1$, $n_i = 1,52$, $R = 5[\text{mm}]$ y $\lambda = 633[\text{nm}]$. Gráfico ajustado en escala semilog.

Es de resaltar que las modulaciones de la amplitud, descritas en las Ecs. 86 y 87, se pueden describir a partir de 3 términos que condicionan dichas modulaciones: una constante, cuya transformación de Hankel resulta ser la función delta de Dirac $\delta_a(x)$ y dos términos racionales, que añaden un decaimiento suavizado a medida que se aleja del eje óptico como se observa en la figura 21. De igual manera, aunque el perfil de intensidad decae rápidamente, la imagen no es puntual y se puede deducir que debido a que la amplitud sobre el frente de onda no es uniforme, se producen aberraciones que dependen de las variaciones de la amplitud, producto del cambio de medio de la onda, a pesar de que sigue siendo una onda esférica.

4. Conclusiones

En este trabajo investigativo se analizó el trazado de rayos para una superficie esférica en los puntos que satisfacen el estigmatismo riguroso conocidos como puntos de Young-Weierstrass. Mediante el método desarrollado en Silva-Lora y Torres (2020) se planteó el vector paramétrico (Ec. 15) que describe a una esfera centrada en $(0, 0, R)$, a partir de la cual se establecieron los vectores directores de los rayos incidente (Ec. 17) y refractado (Ec. 14), junto con la ley vectorial de Snell-Descartes, al igual que se determinaron las relaciones trigonométricas de los rayos incidente y refractado con la normal al dioptrio (Ec. 16), descritas en las ecuaciones Ecs. 19, 20, 21 y 22.

A partir de la normal al dioptrio y el rayo incidente se obtienen los vectores que forman el plano de oscilación del campo electromagnético incidente, $\hat{\mathbf{s}}$ (Ec. 25) y $\hat{\mathbf{p}}$ (Ec. 26),

mientras que haciendo uso de la normal y el rayo refractado, se hallan los vectores que forman el plano de oscilación del campo electromagnético refractado, $\hat{\mathbf{s}}'$ (Ec. 42) y $\hat{\mathbf{p}}'$ (Ec. 43). El plano de oscilación del campo electromagnético refractado contiene la información de la polarización de dicha onda, descrito en las ecuaciones y se muestra cómo es la distribución de los estados de polarización sobre la esfera de Poincaré (figura 14).

Describir el campo refractado en componentes de dos estados de polarización ortogonales, como lo son los estados circular derecho $|\mathcal{R}'\rangle$ (Ec. 46) y circular izquierdo $|\mathcal{L}'\rangle$ (Ec. 47), permite que las componentes del campo sean independientes y así poder difractar dichas componentes como ondas escalares independientes.

La teoría escalar de la difracción mediante la aproximación metaxial de Bonnet permite establecer cómo será el campo sobre la superficie de la imagen. Hacer uso de la aproximación metaxial permite comprender cómo es la relación de las superficies de salida y de observación para superficies esféricas, cuya pertinencia se evidencia por la geometría del sistema.

Como el plano de observación se encuentra en el punto Young-Weierstrass, la aproximación de Bonnet permite entender que el campo difractado tendrá como solución una transformación de Fourier, cuyo caso particular debido a la geometría esférica del sistema se presenta como una transformación de Hankel. Las dos componentes descritas se encuentran moduladas principalmente por la Ec. 49, para la componente de polarización izquierda, y la Ec. 50 para la componente de polarización derecha.

Finalmente, estas modulaciones permiten concluir que a pesar de que el frente de onda de la onda transmitida sigue siendo esférico, la amplitud no es uniforme sobre dicho frente de onda y se puede entender como la combinación de 3 términos principales, un término constante y 2 términos racionales, que al ser difractados se transforman en un delta de Dirac $\delta(x)$ para el término constante y dos términos de decaimiento rápido y continuo a medida que se aleja del eje óptico. La intensidad (figura 21) muestra entonces que la imagen formada no es una imagen puntual y son precisamente los términos racionales los que introducen una aberración, producto de una amplitud no uniforme.

Referencias bibliográficas

- Abbe, E. (1873). Contributions to the theory of the microscope and that microscopic perception. *Arch. Microsc. Anat*, 9, 413-468.
- Bonnet, G., et al. (1978). Introduction à l'optique métaxiale. Deuxième partie: systèmes dioptriques centres (non diaphragmés et non aberrants).
- BONNET, G. (1979). La diffraction metaxiale: Doctrine unitaire pour l'optique, l'acoustique et la radio-electricité, dans le langage des signaux. *7° Colloque sur le traitement du signal et des images, FRA, 1979*.
- Bonnet, G. (1978). Introduction a l'optique métaxiale Première partie: Diffraction métaxiale dans un espace homogène: Trilogie structurale, dioptré sphérique. *Annales des Télécommunications*, 33(5), 143-165.
- Born, M., & Wolf, E. (1999). Principles of Optics, 7th (expanded) edition. *United Kingdom: Press Syndicate of the University of Cambridge*, 461.
- Foreman, M. R., & Török, P. (2011). Computational methods in vectorial imaging. *Journal of Modern Optics*, 58(5-6), 339-364.
- Fresnel, A. (1868). *Oeuvres complètes d'augustin Fresnel*. Imprimerie impériale.
- Goldstein, D. H. (2017). *Polarized light*. CRC press.
- Hecht, E. (2001). Optics 4th edition. *opt4*.
- Huygens, C. (1920). *Traité de la lumière:...* chez Pierre vander Aa, marchand libraire.
- Kim, J., Wang, Y., & Zhang, X. (2018). Calculation of vectorial diffraction in optical systems. *JOSA A*, 35(4), 526-535.
- Kirchhoff, G. (1883). Zur theorie der lichtstrahlen. *Annalen der Physik*, 254(4), 663-695.

- Mahajan, V. N. (1998). *Optical Imaging and Aberrations: Part I. Ray Geometrical Optics*. SPIE Publications.
- Maurel, A. (2002). *Optique géométrique : cours*. Belin.
- Murray, S. (2020). *Hankel v1.2.2*. <https://hankel.readthedocs.io/>
- Richards, B., & Wolf, E. (1959). Electromagnetic diffraction in optical systems, II. Structure of the image field in an aplanatic system. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 253(1274), 358-379.
- Sheppard, C., Choudhury, A., & Gannaway, J. (1977). Electromagnetic field near the focus of wide-angular lens and mirror systems. *IEE Journal on Microwaves, Optics and Acoustics*, 1(4), 129-132.
- Sheppard, C., & Török, P. (1997). An electromagnetic theory of imaging in fluorescence microscopy, and imaging in polarization fluorescence microscopy. *Bioimaging*, 5(4), 205-218.
- Sheppard, C., & Wilson, T. (1982). The image of a single point in microscopes of large numerical aperture. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 379(1776), 145-158.
- Silva-Lora, A., & Torres, R. (2020). Explicit Cartesian oval as a superconic surface for stigmatic imaging optical systems with real or virtual source or image. *Proceedings of the Royal Society A*, 476(2235), 20190894.
- Stratton, J. A., & Chu, L. (1939). Diffraction theory of electromagnetic waves. *Physical Review*, 56(1), 99.
- Visser, T. D., & Wiersma, S. H. (1991). Spherical aberration and the electromagnetic field in high-aperture systems. *JOSA A*, 8(9), 1404-1410.

Welford, W. (1976). Vi aplanatism and isoplanatism. En *Progress in Optics* (pp. 267-292, Vol. 13). Elsevier.

Wolf, E. (1959). Electromagnetic diffraction in optical systems-I. An integral representation of the image field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 253(1274), 349-357.

Young, T. (1804). I. The Bakerian Lecture. Experiments and calculations relative to physical optics. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, (94), 1-16.

Apéndices

Apéndice A. Ovoide de Descartes

Elevando al cuadrado la Ec. 4 se obtiene que

$$\begin{aligned} \rightarrow n_1^2 (r^2 + d_1^2 - 2zd_1) + n_2^2 (r^2 + d_2^2 - 2zd_2) \\ + 2n_1n_2\sqrt{r^2 + d_1^2 - 2zd_1}\sqrt{r^2 + d_2^2 - 2zd_2} = (n_2d_2)^2 + (n_1d_1)^2 - 2n_1n_2d_1d_2 \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow n_1^2 (r^2 + d_1^2 - 2zd_1) + n_2^2 (r^2 + d_2^2 - 2zd_2) \\ - (n_2d_2)^2 - (n_1d_1)^2 + 2n_1n_2d_1d_2 = -2n_1n_2\sqrt{r^2 + d_1^2 - 2zd_1}\sqrt{r^2 + d_2^2 - 2zd_2} \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow n_1^2 (r^2 - 2zd_1) + n_2^2 (r^2 - 2zd_2) + 2n_1n_2d_1d_2 = -2n_1n_2\sqrt{r^2 + d_1^2 - 2zd_1}\sqrt{r^2 + d_2^2 - 2zd_2}. \end{aligned} \quad (94)$$

Nuevamente, elevando al cuadrado la Ec. 94

$$\begin{aligned} \rightarrow & \left[n_1^2 (r^2 - 2zd_1) + n_2^2 (r^2 - 2zd_2) \right]^2 + (2n_1n_2d_1d_2)^2 + 4n_1n_2d_1d_2 \left[n_1^2 (r^2 - 2zd_1) + n_2^2 (r^2 - 2zd_2) \right] \\ & = (2n_1n_2)^2 (r^2 + d_1^2 - 2zd_1) (r^2 + d_2^2 - 2zd_2) \quad (95) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow & \left[n_1^2 (r^2 - 2zd_1) + n_2^2 (r^2 - 2zd_2) \right]^2 + (2n_1n_2d_1d_2)^2 + 4n_1n_2d_1d_2 \left[n_1^2 (r^2 - 2zd_1) + n_2^2 (r^2 - 2zd_2) \right] \\ = & 4n_1^2n_2^2 (r^2 - 2zd_1) (r^2 - 2zd_2) + 4n_1^2n_2^2d_2^2 (r^2 - 2zd_1) + 4n_1^2n_2^2d_1^2 (r^2 - 2zd_2) + 4(n_1n_2d_1d_2)^2 \end{aligned} \quad (96)$$

En la Ec. 96 el primer término después del igual es cuatro veces el término cruzado del binomio que está antes y el segundo término después es igual al último término después del igual.

$$\begin{aligned} \rightarrow & \left[n_1^2 (r^2 - 2zd_1) - n_2^2 (r^2 - 2zd_2) \right]^2 + 4n_1n_2d_1d_2 \left[n_1^2 (r^2 - 2zd_1) + n_2^2 (r^2 - 2zd_2) \right] \\ & = +4n_1^2n_2^2d_2^2 (r^2 - 2zd_1) + 4n_1^2n_2^2d_1^2 (r^2 - 2zd_2) \quad (97) \end{aligned}$$

Reorganizando la Ec. 97 se obtiene que

$$\begin{aligned} \rightarrow & \left[n_1^2 (r^2 - 2zd_1) - n_2^2 (r^2 - 2zd_2) \right]^2 + 4 (n_1 n_2 d_1 d_2 n_1^2 - n_1^2 n_2^2 d_2^2) (r^2 - 2zd_1) \\ & + 4 (n_1 n_2 d_1 d_2 n_2^2 - n_1^2 n_2^2 d_1^2) (r^2 - 2zd_2) = 0, \quad (98) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow & \left[n_1^2 (r^2 - 2zd_1) - n_2^2 (r^2 - 2zd_2) \right]^2 - 4n_2 n_1^2 d_2 (n_2 d_2 - n_1 d_1) (r^2 - 2zd_1) \\ & + 4n_1 n_2^2 d_1 (n_2 d_2 - n_1 d_1) (r^2 - 2zd_2) = 0, \quad (99) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow & \left[n_1^2 (r^2 - 2zd_1) - n_2^2 (r^2 - 2zd_2) \right]^2 + 4n_1 n_2 (n_2 d_2 - n_1 d_1) (n_2 d_1 - n_1 d_2) r^2 \\ & - 4n_1 n_2^2 d_1 d_2 (n_2 d_2 - n_1 d_1) 2z + 4n_2 n_1^2 d_1 d_2 (n_2 d_2 - n_1 d_1) 2z = 0, \quad (100) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow & \left[n_1^2 (r^2 - 2zd_1) - n_2^2 (r^2 - 2zd_2) \right]^2 + 4n_1 n_2 (n_2 d_2 - n_1 d_1) (n_2 d_1 - n_1 d_2) r^2 \\ & - 4n_1 n_2 (n_2 d_2 - n_1 d_1) 2zd_1 d_2 (n_2 - n_1) = 0 \quad (101) \end{aligned}$$

y finalmente

$$\left[n_1^2 (r^2 - 2zd_1) - n_2^2 (r^2 - 2zd_2) \right]^2 - 4n_1n_2 (n_2d_2 - n_1d_1) \left[r^2 (n_1d_2 - n_2d_1) + 2zd_1d_2 (n_2 - n_1) \right] = 0, \quad (102)$$

que se puede reescribir como

$$\left[r^2 (n_1^2 - n_2^2) + 2zd_1d_2 \left(\frac{n_2^2}{d_1} - \frac{n_1^2}{d_2} \right) \right]^2 - 4n_1n_2 (n_2d_2 - n_1d_1) \left[r^2 (n_1d_2 - n_2d_1) + 2zd_1d_2 (n_2 - n_1) \right] = 0 \quad (103)$$

y es el resultado de la ecuación 5.

Apéndice B. Código de Python para la simulación

La gráfica 3D de la irradiancia del campo electromagnético difractado se obtiene mediante el código:

```
import numpy as np

import hankel

import matplotlib.pyplot as plt

import matplotlib.ticker as mticker

from matplotlib import cm
```

```
# Constantes del problema

epsilon = 8.8541878176e-12

c = 299792458

ht=hankel.HankelTransform(nu=0,N=200,h=1e-9)

no= 1 #índice de refracción del dioptrio

ni= 1.52 #índice de refracción del dioptrio

R= 0.005 #Radio del dioptrio, en metros

phiM = 0.5 # Ángulo límite

# definiendo la superficie de observación

s0 = np.sin(np.linspace(0.00005,1,500))

theta0 = np.linspace(0,2*np.pi,90)

s0,theta = np.meshgrid(s0,theta0)

x = s0*np.cos(theta)

y = s0*np.sin(theta)

s = np.sqrt(x**2 + y**2)

# Constantes de las modulaciones izquierda y derecha

A = ((2*(ni**2))/((ni**2)-(no**2)))

C = ((2*ni*no)/((ni**2)-(no**2)))

# Clase para definir las funciones de modulación

de las modulaciones izquierda y derecha
```

```
class DifraccionRadial:

    def __init__(self, R, phiM):

        self.R = R

        self.limr = R * np.sin(2 * phiM)

    def _base_r(self, r):

        """Convierte r a la forma usada en las funciones."""

        return self.R * np.sin(2 * np.asarray(r))

    def _apply_mask(self, r, expr):

        """Aplica el límite físico (-limr, limr)."""

        resultado = np.zeros_like(r)

        mask = (-self.limr < r) & (r < self.limr)

        resultado[mask] = expr[mask]

        return resultado

# ---- Funciones específicas ----

def Br(self, r):

    r = self._base_r(r)

    expr = 1 / np.sqrt(1 - (r / self.R)**2) + 1

    return self._apply_mask(r, expr)

def Bl(self, r):
```

```
    r = self._base_r(r)

    expr = 1 / np.sqrt(1 - (r / self.R)**2) - 1

    return self._apply_mask(r, expr)

def Dr(self, r):

    r = self._base_r(r)

    expr = np.sqrt(1 - (r / self.R)**2) + 1

    return self._apply_mask(r, expr)

def Dl(self, r):

    r = self._base_r(r)

    expr = np.sqrt(1 - (r / self.R)**2) - 1

    return self._apply_mask(r, expr)

# Transformando las partes dependientes de r

difraccion = DifraccionRadial(R,phiM)

Fkbr=ht.transform(difraccion.Br,s,ret_err=False)

Fkdr=ht.transform(difraccion.Dr,s,ret_err=False)

Fkbl=ht.transform(difraccion.Bl,s,ret_err=False)

Fkdl=ht.transform(difraccion.Dl,s,ret_err=False)

# Irradiancia calculada para la amplitud completa

f_squared = epsilon*c*ni*((A*Fkbl + C*Fkdl)**2 + (A*Fkbr - C*Fkdr)**2)
```

```
#Definir Log scale para Z

def log_tick_formatter(val, pos=None):

    return f"$10^{{{int(val)}}}$"

# Ploteando la Irrandiancia

fig = plt.figure(figsize=(8.5,5.5))

ax = plt.axes(projection='3d')

# Superficie 3D

ax.plot_surface(np.rad2deg(x),np.rad2deg(y),np.log10(f_squared),

cstride=1,rstride=1, cmap=cm.viridis, alpha=1)

# Corte transversal de la superficie 3D

ax.contour(np.rad2deg(x),np.rad2deg(y),np.log10(f_squared),

levels=[0],zdir='x',offset=-180/np.pi,colors='purple')

ax.contour(np.rad2deg(x),np.rad2deg(y),np.log10(f_squared),

levels=[0],zdir='y',offset= 180/np.pi,colors='purple')

# definición de ejes y vista

plt.rcParams["font.family"] = "Times New Roman"
```

```
plt.rcParams["mathtext.fontset"] = "stix"

plt.rcParams["font.size"] = 12

ax.zaxis.set_major_formatter(mticker.FuncFormatter(log_tick_formatter))

ax.zaxis.set_major_locator(mticker.MaxNLocator(integer=True))

ax.set_title(r"Irradiancia del campo difractado  $I_U$ ",
math_fontfamily='stixsans', fontname="Times New Roman", fontsize=24)

ax.set_xlabel(r" $\varphi$ '  $[\circ]$ ", math_fontfamily='stixsans',
fontname="Times New Roman", fontsize=12)

ax.set_ylabel(r" $\gamma$ '  $[\circ]$ ", math_fontfamily='stixsans',
fontname="Times New Roman", fontsize=12)

ax.set_zlabel(r" $I \left[ \frac{W}{m^2} \right]$ ",
math_fontfamily='stixsans', fontname="Times New Roman", fontsize=12)

ax.view_init(30,-45)

fig.savefig("Hankel3D_limitada.svg", format="svg")

plt.show()
```