Tareas que promueven la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales bajo un modelo cognitivo

Celin Amparo Libreros Manrique

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciada en Matemáticas

Directora

Solange Roa Fuentes

Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2026

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mis padres, hermanas y por supuesto a mí, quienes con su amor, esfuerzo y perseverancia hicieron posible el desarrollo de este trabajo y la culminación de esta carrera.

Agradecimientos

Principalmente le doy gracias a Dios por mantenerme fuerte y fiel a mí misma, dotándome de los dones de la sabiduría y el entendimiento.

A mi mamá Eduvina por ser una luz en momentos donde todo se volvía oscuro, animándome y siempre mostrándome que la vida nos da justo lo que necesitamos.

A mi papá Juan Carlos que es un ejemplo de perseverancia y resiliencia, enseñándome que las cosas no se consiguen sin esfuerzo y sacrificio.

A mi hermana Tatiana por estar, escucharme y transmitirme la fuerza y sabiduría que solo una hermana mayor puede brindar y a mi hermana Sara por ayudarme a ver en mí lo que yo creía que no tenía. Ellas aplauden tan fuerte mis logros que opacan las voces negativas del camino. Mis padres y hermanas son mi ejemplo de que el amor que acompaña y permite construir, existe. Son mi impulso constante de éxito.

A la profesora Solange Roa, por su paciencia, orientación y valiosos consejos.

A las personas que conocí durante la carrera y se quedaron en parte de mis recuerdos, por compartir este camino de aprendizajes y enseñanzas de la vida, ellos saben quiénes son.

Tabla de contenido

Lista de Figuras

Resumen

Título: Tareas que promueven la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales bajo un modelo cognitivo*

Autor: Celin Amparo Libreros Manrique**

Palabras Clave: Sistemas de ecuaciones lineales, tareas, modelo cognitivo

Descripción:

Este proyecto presenta los resultados de un trabajo de investigación cuyo propósito fue diseñar e implementar tareas que promuevan la comprensión del concepto de sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes de último año de la Licenciatura en Matemáticas de una universidad pública de Colombia. El diseño de las tareas se orientó a partir del modelo cognitivo (descomposición genética) propuesto por Oliveros (2018). El método está guiado por la adaptación entre la primera y tercera componente del ciclo de investigación de la teoría APOE; allí se plantean cuatro tareas basadas en diversas investigaciones para la enseñanza-aprendizaje del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) bajo el enfoque de la teoría APOE. Finalmente, los resultados muestran cómo influye el contexto, preguntas y conceptos involucrados en las tareas a la construcción de las estructuras y mecanismos presentes en los estudiantes y la comprensión del concepto sistemas de ecuaciones lineales en este nivel académico.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Director: Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias en la Espacialidad de Matemática Educativa.

Abstract

Title: Tasks that promote understanding of linear equation systems under a cognitive model*

Author: Celin Amparo Libreros Manrique**

Key Words: Linear equation systems, tasks, cognitive model

Description:

This project presents the results of a research study whose purpose was to design and implement tasks that promote understanding of the concept of linear equation systems in final-year students of the Bachelor of Mathematics program at a public university in Colombia. The design of the tasks was based on the cognitive model (genetic decomposition) proposed by Oliveros (2018). The method is guided by the adaptation between the first and third components of the APOS theory research cycle, which proposes four tasks based on various studies for teaching and learning the concept of linear equation systems (LES) using the APOS theory approach. Finally, the results show how the context, questions, and concepts involved in the tasks influence the construction of structures and mechanisms present in students and the understanding of the concept of linear equation systems at this academic level.

* Thesis

** Science Faculty. Mathematics School. Bachelor's degree in Mathematics. Director: Solange Roa Fuentes. Doctor of Science in Educational Mathematics.

Introducción

El Álgebra lineal es un área que tiene una amplia gama de aplicaciones en otras áreas, dentro y fuera de las matemáticas; algunas son: en análisis funcional, ecuaciones diferenciales, investigación de operaciones, gráficas por computadora, ingeniería, química, etc. (González, 2011). Por ejemplo, Trejo y Camarena (2011) presentan una vinculación entre el álgebra lineal y la química; en particular, una operación de mezclado de sustancias químicas azucaradas con una concentración porcentual, que se modela mediante Sistemas de Ecuaciones Lineales. Por tanto, los Sistemas de Ecuaciones Lineales son una herramienta que sirve para abordar conceptos fundamentales del Álgebra Lineal como: espacio vectorial, combinación lineal, Base, transformaciones lineales, vectores y valores propios, etc. (Oliveros, 2018; Rozas-Torres et al., 2024).

Como señalan Rodríguez et al. (2022) la enseñanza y aprendizaje de los SEL ha sido motivo de variadas investigaciones, algunas de estas enfocadas en las concepciones que tienen los estudiantes al resolverlos (Borja, 2015; Rozas-Torres et al., 2024; DeVries y Arnon, 2004; Manzanero, 2007; Ochoviet, 2009; Rodríguez et al., 2019). Por consiguiente, consideramos que este estudio permite evidenciar el aprendizaje de los estudiantes de manera cognitiva sobre el concepto de Sistemas de Ecuaciones Lineales y además proporciona información para realizar recomendaciones sobre la enseñanza de este concepto.

Bajo este contexto, esta investigación busca diseñar tareas que promuevan la comprensión del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales a partir de un modelo cognitivo a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, pues como menciona Domínguez (2016) citada por Osorio (2021) una propuesta basada en una descomposición genética de la teoría APOE es viable y de ella se pueden construir nuevas propuestas didácticas para la mejora de la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos y ser implementada en la institución educativa que se desee.

A continuación, se presenta una breve descripción del desarrollo de la investigación: En el Capítulo 1 se realiza una revisión bibliográfica de diferentes investigaciones que se consideran como antecedentes importantes por la temática que abordan y la relación con el presente trabajo brindando información importante y resultados que ayudan a guiar el concepto que se decidió estudiar. El Capítulo 2 explica la motivación para realizar esta investigación, a través del planteamiento del problema; se determina la pregunta de investigación y el objetivo que da respuesta de esta. En el Capítulo 3 se hace un recorrido de la Teoría APOE y su Ciclo de investigación. En el Capítulo 4 se expone el método, guiado por la interacción entre la primera (modelo cognitivo presentado por Oliveros (2018)) y tercer componente del ciclo APOE. En el Capítulo 5 se justifica la elección de las tareas, su descripción, y análisis a priori, dando paso a los resultados y análisis de los mismos. Finalmente, el Capítulo 6 da a conocer las conclusiones.

1. Antecedentes

En este capítulo se presentan algunos resultados sobre la construcción del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales y en varios casos de su conjunto solución, desde diferentes perspectivas en Educación Matemática. Señalando concepciones previas, dificultades, propuestas de enseñanza y estudios basados en la teoría APOE, con la finalidad de reflexionar y revisar sugerencias que sirvan de guía para la presente investigación.

El estudio exploratorio de Rozas-Torres et al. (2024) se enfoca en identificar las concepciones previas que tienen los estudiantes de Ingeniería de primer año de universidad que cursan Álgebra Lineal respecto a los conceptos de ecuación lineal y sistemas de ecuaciones lineales específicamente de dos incógnitas, siendo un punto de partida para la enseñanza de los SEL de $m \times n$. El cuestionario aplicado contenía preguntas sobre la representación gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas y de un SEL de 3×2, la cantidad de soluciones de una ecuación lineal y de un SEL, una solución particular de un SEL y lo qué entienden por solución de un SEL.

Una de las tareas propuestas pedía graficar en GeoGebra un SEL 3×2 dado, junto con las preguntas ¿Cuántas soluciones tienen el sistema de ecuaciones lineales? ¿Por qué? con el objetivo de identificar las concepciones que tienen los estudiantes sobre las soluciones de un SEL de 3×2 representado gráficamente desde los modos de pensamiento de Sierpinska (2000). Las concepciones que surgieron de esta tarea fueron: El SEL no tiene soluciones porque no hay un punto de intersección entre las rectas, contrario a, el SEL tiene solución porque hay tres puntos de intersección. Como indica Rozas-Torres et al. (2024) la mayoría de los estudiantes tienen una concepción correcta (primera concepción), pues son capaces de establecer una relación entre los puntos de las tres rectas involucradas (modo sintético-geométrico) y las soluciones de las ecuaciones correspondientes al SEL, al afirmar que, en este caso, la intersección representa el punto en el que se cumple la igualdad en las tres ecuaciones a la vez (modo analítico-aritmético). Predominan las concepciones erróneas en cuando a la cantidad de soluciones que tiene una ecuación lineal y con ello la cantidad de soluciones que puede tener un SEL con dos incógnitas, pues de acuerdo con Oktaç (2018) citado por Rozas-Torres et al. (2024), Anaya-Puebla (2020) y Ochoviet (2009) las concepciones que tengan los estudiantes sobre las soluciones de una ecuación lineal influenciaran las concepciones que tengan para un SEL.

Rozas-Torres et al. (2024) sugieren que antes de trabajar con el contenido de SEL de $m \times n$, es fundamental plantear actividades a los estudiantes que les permitan visualizar geométricamente una ecuación lineal con dos y tres incógnitas. Esto puede facilitar la comprensión de que las soluciones de una ecuación lineal son un par ordenado o una tripleta que satisface la ecuación, vista como un punto en el plano o espacio que se define en la recta o el plano. También recomiendan diseñar actividades con applets donde los estudiantes tengan la oportunidad de representar analítica y geométricamente un SEL y su conjunto solución. Todo esto puede contribuir al tránsito entre el modo sintético-geométrico y el analítico-aritmético, para con ello fomentar el desarrollo del modo analítico-estructural.

El conocimiento de los errores cometidos por los estudiantes frente a problemas que involucran Sistemas de Ecuaciones Lineales sirve como herramienta para elaborar estrategias que ayudan a evitar dichas dificultades. Es por eso, que Trípoli et al. (2023) presenta una investigación que se centra en dificultades relacionadas con la definición de sistemas de ecuaciones lineales, en qué caso corresponde plantearlos, cómo resolverlos o qué es y qué representa gráficamente la solución de los mismos.

El estudio se realizó con estudiantes de diferentes especialidades de ingeniería que cursaban 'Matemática A' que corresponde a una introducción al cálculo y al álgebra, con temas como: la determinación de un vector perpendicular a otros dos; problemas que involucran rectas y planos; búsqueda de puntos críticos en funciones de varias variables u optimización utilizando el método de Multiplicadores de Lagrange. Donde se concluye que las dificultades respecto a los SEL obstaculizan el aprendizaje de estos temas nuevos y específicos del curso. (Trípoli et al., 2023).

A continuación, se presenta uno de los ejercicios planteados en dicha investigación: "Determina, si es que existe, la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$" El objetivo principal es determinar las estrategias para resolver el sistema dado; interpretar la identidad del tipo $0 = 0$ o bien un absurdo; y en caso de que el sistema sea compatible indeterminado, determinar su conjunto solución. Los estudiantes no presentaron inconvenientes al resolver el sistema, pero tuvieron errores en las operaciones; las mayores dificultades se evidenciaron en la interpretación dada la identidad del tipo $0 = 0$. Aquellos que concluyeron correctamente la naturaleza de la solución, presentaban dificultad en determinar y describir el conjunto solución.

Durante la discusión de los resultados Trípoli et al. (2023) observan que los estudiantes no pueden reconocer (sin hacer cálculos) que un par ordenado nunca puede ser solución de un sistema de tres incógnitas y, posteriormente, confunden $\mathbb{R}^2$ con el plano xy en $\mathbb{R}^3$. Además, se evidencia que no tienen en cuenta que la solución del sistema debe satisfacer todas y cada una de las ecuaciones que lo conforman. Al presentarles tres rectas correspondientes a tres ecuaciones de dos variables que se están intersecando dos a dos, los estudiantes concluyeron que tenía tres puntos solución; este error se presenta dado que los estudiantes trabajan por lo general con sistemas 2×2 y asocian su solución con el punto intersección entre dos rectas.

Trípoli et al. (2023) plantean la necesidad de resaltar el significado de la solución de un sistema como en la interpretación de resultados luego de resolver el mismo. De igual forma profundizar la interpretación de la correspondencia entre la representación gráfica y la algebraica, tanto en identificar una solución, como en plantear un sistema a partir de un gráfico dado.

Por otro lado, Ochoviet (2009) identifica y analiza dificultades presentadas por los estudiantes con los SEL de dos incógnitas y su conjunto solución; el estudio exploratorio se aplicó a estudiantes de Bachillerato y de profesorado de matemática, desde los que estudian por primera vez sistemas de ecuaciones, hasta quienes tenían una amplia experiencia con este concepto. Esto con el fin de proponer una secuencia de enseñanza del concepto para estudiantes de Bachillerato, considerado como la puerta de entrada al Álgebra Lineal.

Ochoviet (2009) afirma que cuando se presenta a un estudiante la forma algebraica de un sistema 3×2 como $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ donde se pide que resuelvan el sistema de ecuaciones y describan su conjunto solución, los estudiantes verifican que el par de números ordenados obtenido en dos de las ecuaciones se valide en la ecuación restante. A diferencia de la forma gráfica de sistemas 3×2, donde hay tres rectas que se intersecan dos a dos, o un sistema 4×2, aquí los estudiantes no logran transitar entre el modo analítico-aritmético y el modo sintético-geométrico, e interpretan cada punto de corte como una solución del sistema.

En general los problemas presentados geométricamente implican respuestas directas y evidentes, lo que evita un análisis que implique otro modo de pensar; como señala Sierpinska (2000) citado en Oliveros (2018), que los objetos matemáticos adquieren diferentes representaciones en la mente de los estudiantes, cuando están en distintos modos de pensamiento ya sea analítico, aritmético o geométrico. Así, al pensar en los SEL y su solución en diferentes modos permitirá a los estudiantes interiorizarlos y adquirir una comprensión más profunda de ellos (Ochoviet, 2009).

Por otro lado, tenemos a Segura (2004) que construye y aplica una secuencia didáctica que facilita el aprendizaje y solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales, articulando diferentes registros de representación semiótica y el pasaje entre ellos; permitiendo que los estudiantes interactúen con la secuencia y gestionen con sentido el objeto Sistema de Ecuaciones.

En el diseño de las actividades, Segura (2004) utilizó los registros verbal, gráfico y algebraico, donde integra los SEL con conjunto solución unitario, vacío o infinito. Un ejemplo de estas situaciones inicia con una representación en un registro verbal, donde se pedía a los estudiantes escribir detalladamente un SEL, o al considerar una representación dada en un registro gráfico, donde disponen las ecuaciones de las rectas dadas.

Posterior a la experimentación con la secuencia, Segura (2004) observó que quedaron subsanados algunos fenómenos como la desarticulación entre los sistemas de ecuaciones lineales y su solución; esto se logró a partir de la solución del sistema y al generar las ecuaciones lineales que tuvieran esa solución. De esta forma los alumnos son los que deciden que dicho sistema tenga esa solución, lo que afirma la articulación. La secuencia no asocia el objeto Sistemas de Ecuaciones Lineales con los métodos de solución, lo que evita que confundan el objeto con los algoritmos.

En la investigación de DeVries y Arnon (2004) estudian el concepto de solución de un sistema de ecuaciones, donde presentan un cuestionario estructurado, a estudiantes de licenciatura que ya habían desarrollado un curso de Álgebra Lineal. Las respuestas dieron poca información de la construcción que los alumnos habían hecho sobre la comprensión del concepto solución de una ecuación (y/o sistemas de ecuaciones), pero fue de vital importancia para tener una idea de las diversas comprensiones del concepto.

Un ejemplo de las preguntas del primer cuestionario es: "¿Cuál es la solución de esta ecuación (¿cómo se ve?)? $3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5$ ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? ¿La suma de dos soluciones también es una solución? ¿Qué pasa con una multiplicación por un escalar?" Según los resultados de las preguntas del primer cuestionario, era evidente que la mayoría de los estudiantes confundía el concepto de solución con resolución, pues desarrollaron dicho concepto desde la acción de resolver el sistema de ecuaciones, en lugar de la acción de sustitución (algoritmos). Como menciona DeVries y Arnon, (2004) estos algoritmos son difíciles de interiorizar, y obstaculiza la predicción de la forma de la solución sin llegar a calcularla. En términos de la teoría APOE los estudiantes se encuentran en el nivel Acción del concepto solución como resolución, luego, tienden a resolver de manera mecánica cuando se les pregunta por las soluciones.

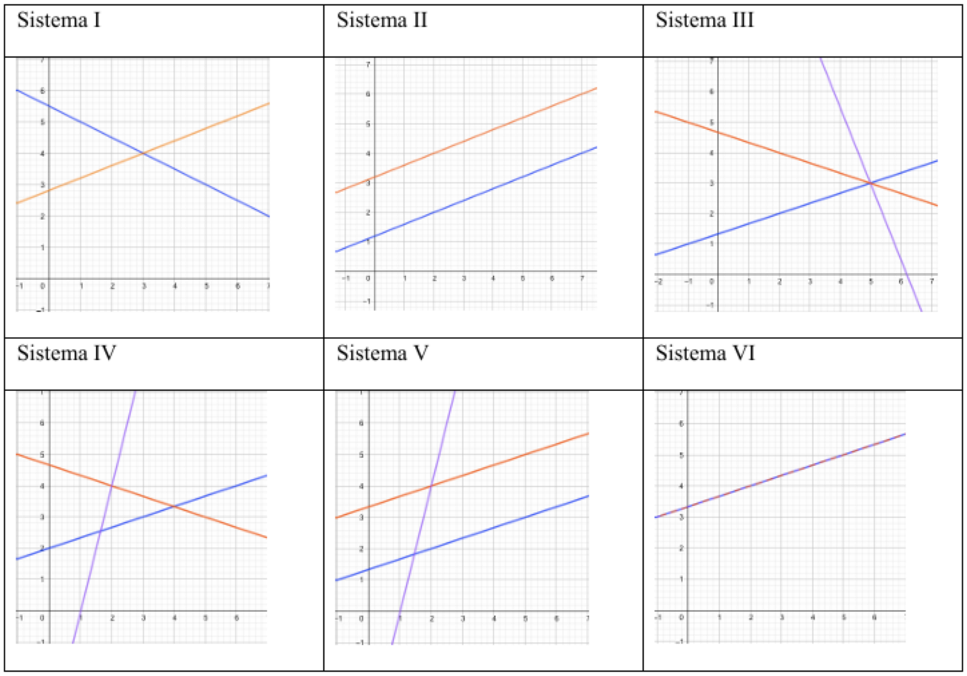
El análisis de las respuestas lleva a DeVries y Arnon (2004) a sugerir un protocolo mejorado para la entrevista, una versión inicial de una descomposición genética para la solución y una propuesta de secuencia didáctica. La secuencia de aprendizaje sugerida estaba dividida dependiendo de las estructuras que se querían desarrollar, por ejemplo, para el nivel Acción trabajar el concepto de ecuación incluido el concepto de solución de una ecuación, cuya intención es desarrollar la capacidad de identificar las dos funciones (sistema 2×2) con sus respectivos dominios y codominios, dónde la solución es un elemento del dominio y cuya sustitución da una proposición verdadera. El nuevo cuestionario, permitía realizar sustituciones y argumentación sobre la o las posibles soluciones; se considera el siguiente sistema de ecuaciones: $3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Se preguntó por la solución dadas algunas ternas; si el sistema tenía más de una solución; además, si podía encontrar el conjunto solución directamente, y características del conjunto solución del sistema como si la suma de dos soluciones o el múltiplo escalar de una solución es solución y justificar por qué sí o por qué no en cada interrogante.

En cuanto al nivel Proceso DeVries y Arnon (2004) sugieren que se debe enseñar a los estudiantes a identificar las funciones, sus dominios, codominios y descripciones de posibles soluciones y no soluciones, sin tener elementos para sustituir. Con el fin de avanzar hacia el nivel Objeto del concepto de solución de una ecuación o SEL, en el cuál recomiendan trabajar con conjuntos finitos. Así cuando se les presente un sistema de ecuaciones sobre conjuntos infinitos, vean necesarios otros métodos y no solo la sustitución, pues la verificación uno a uno de los elementos del conjunto es casi imposible. Además, aprender a resolver algoritmos incluirá la comprensión de lo que hace el algoritmo. (DeVries y Arnon, 2004).

Por otro lado, tenemos la investigación de Anaya-Puebla (2020) que contiene un ambiente virtual de aprendizaje basado en un diseño instruccional fundamentado en la *descomposición genética* (DG) de Borja (2015) cuyo eje principal era incorporar la tecnología a un diseño, lo que permite el desarrollo de nuevos entornos. La investigación se realizó con un grupo de Ingeniería en Biotecnología que repitieron el curso de Álgebra Lineal; en esta se integra el modelo 3 Usos de la Variable, que corresponden a usos comunes de las variables (incógnita, número general y relación funcional) (Ursini et al., 2016 citado en Anaya-Puebla, 2020) y la teoría APOE para la enseñanza del concepto de Conjunto Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales. Anaya-Puebla (2020) desarrolló una revisión de literatura y análisis de la DG de Borja (2015) con el fin de identificar construcciones mentales necesarias para promover la comprensión de conceptos como Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) y su Conjunto Solución (CS); siguió con el diseño de actividades y construcción del ambiente virtual junto con un pilotaje para detectar dificultades en las tareas y applets, que dio paso a la implementación de cinco tareas finales. Una de las tareas del diseño final presentaba la representación gráfica de seis sistemas de ecuaciones lineales en $\mathbb{R}^2$ (ver Figura 1) junto con la pregunta: ¿Cuántas soluciones tiene cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales anteriores?

Figura 1

Representaciones gráficas SEL en $\mathbb{R}^2$.



Nota. Diseño del instrumento de evaluación, Tarea 2. Tomada de *Ambiente Virtual de Aprendizaje para la construcción del concepto sistema de ecuaciones lineales fundamentado en la teoría APOE* (p.53) por Anaya-Puebla, 2020.

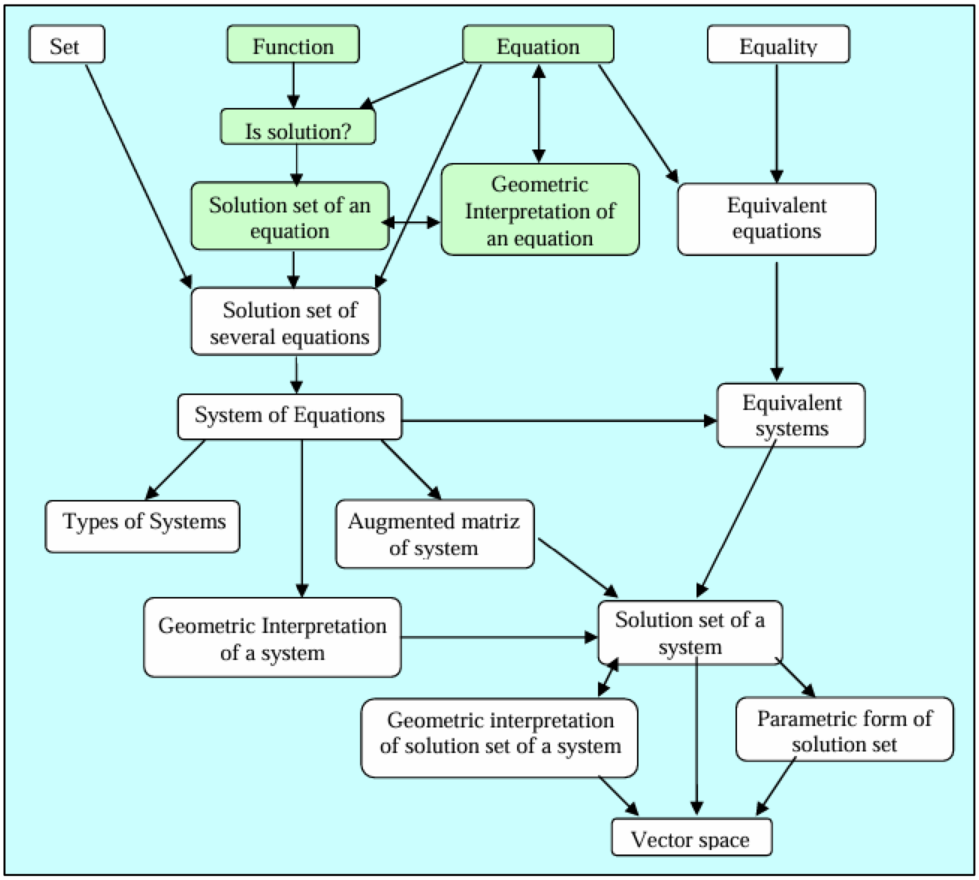
De acuerdo con Anaya-Puebla (2020) esta tarea permite evidenciar las siguientes estructuras cognitivas: el estudiante que se encuentre en una concepción Acción del concepto SEL considera cada una de las intersecciones de las rectas como posible solución del sistema, considerando la solución única en un sistema 2×2, y en el caso de sistemas $m > n$ el estudiante debe reflexionar si cada una de las intersecciones, como pareja ordenada, forma parte del conjunto solución de todas las ecuaciones que conforman el sistema. Luego, deberá coordinar el Proceso en el cual determine que una solución que está en un conjunto solución, pero no en los demás, no es solución del conjunto de todas las ecuaciones, con solo la información de las representaciones gráficas (Anaya-Puebla, 2020).

Finalmente, Anaya-Puebla (2020) describe que para que el estudiante logre una concepción Objeto del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales en el caso de la tarea anterior; en el registro gráfico debe verificar si cada una de las intersecciones es una solución del sistema, donde desencapsula el sistema y analiza en cada una de las ecuaciones que lo conforman. Si esa intersección pertenece al conjunto solución de dicha ecuación lineal o no, luego concluye si el SEL es inconsistente o consistente y cuantas soluciones tiene. Para Borja (2015) citado por Anaya-Puebla (2020) la concepción Objeto del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales supone operar con y sobre el sistema de ecuaciones lineales de la manera que lo requiera, bien sea para construir sistemas de ecuaciones lineales equivalentes o encontrar la solución al sistema. Se menciona que algunos de los errores que se presentaron parten de la dificultad con el objeto matemático de Ecuación Lineal y por tanto se les dificulta a los estudiantes enfrentarse a la ecuación vectorial; luego, solo un estudiante evidenció todas las estructuras cognitivas hasta lograr una concepción Objeto del concepto CS-SEL. La investigación concluye que a pesar de que los estudiantes podían resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante distintos algoritmos, no significa que tengan una comprensión del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales. (Anaya-Puebla, 2020).

Por su parte el trabajo de Manzanero (2007) se realizó con un curso de Álgebra para ingeniería III, donde se observó y aplicó una entrevista para determinar qué construcciones mentales lograron los estudiantes respecto al concepto de Conjunto Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales a partir de una adaptación a la descomposición genética del grupo RUMEC presentada en la Figura 2.

Figura 2

Descomposición genética del concepto SEL.



Nota. Descomposición genética del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales. Tomada de *Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una perspectiva desde la teoría APOE* (p.23) por Manzanero, 2007.

La entrevista contenía tres preguntas que motivaban a acciones de sustitución de elementos en ecuaciones o sistema de ecuaciones. Por ejemplo, “Dado el sistema de ecuaciones $2x + y = 6$ ¿son los pares ordenados $(1,4), (3,1)$ y $(2,2)$ soluciones del sistema?” Este tipo de preguntas fue relevante ya que Manzanero (2007) determinó que todos a excepción un estudiante entrevistado, lograban realizar acciones de sustitución al sistema y ecuaciones dadas, con el fin de verificar si los puntos eran solución o no. En cuanto al sistema de ecuaciones dado $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$, se preguntaba si las duplas $(0, -5), (1,4)$ y $(0,0)$ eran solución del sistema, su conjunto solución y la cantidad de elementos de este, junto con la representación gráfica del sistema y con ello la visualización de su conjunto solución. Esta pregunta permitía evidenciar una concepción Proceso en la solución de un sistema de ecuaciones, pues los estudiantes no recurrieron a la sustitución de puntos para afirmar que el sistema no tenía solución.

A partir del análisis a posteriori de cada entrevistado por Manzanero (2007) solo dos de los seis estudiantes entrevistados lograron coordinar los Procesos de función y ecuación, abriendo paso al Proceso solución para una ecuación o sistema dado; los otros estudiantes no lograron la interiorización de sus acciones en un proceso solución, pues necesitaban una expresión algebraica para cada variable con el fin de expresar el conjunto solución. Para el primer grupo de estudiantes se determinó una concepción Proceso del concepto Conjunto Solución de Sistemas de Ecuaciones (con dos incógnitas); y el siguiente grupo se encontraba en una concepción Acción del concepto Conjunto Solución de una Ecuación o Sistema de Ecuaciones. Algunos de los estudiantes no lograban graficar e interpretar las ecuaciones y su conjunto solución, lo que dificultaba la coordinación de la representación algebraica con la representación geométrica del conjunto solución de un sistema. Además, se presentaron dificultades al resolver problemas de sistemas de ecuaciones equivalentes que involucraban parámetros, pues el trabajo con parámetros requiere de la construcción de una concepción Proceso para ser resueltos correctamente (Manzanero, 2007).

Manzanero (2007) considera que la *descomposición genética* resulta viable para explicar las construcciones mentales de los estudiantes, aunque por los resultados obtenidos hace necesaria modificaciones para mejorarla. Como ningún estudiante evidenció una concepción Objeto del concepto Conjunto Solución y solo algunos construyeron la concepción de Proceso de solución, específicamente en sistemas de tres variables, es conveniente incluir los conceptos previos de variable y parámetro presentados como una estructura Proceso. Finalmente sugiere que la representación geométrica de los conjuntos solución de las ecuaciones lineales o de los sistemas de ecuaciones lineales deben construirse al tiempo con el concepto de Conjunto Solución, así cuando se coordinen, brinden una mejor comprensión del concepto de Sistemas de Ecuaciones y construyan una estructura Objeto de este.

Otra investigación relevante es la de Rodríguez et al. (2019) que propone una *descomposición genética* para el Conjunto Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas (sistemas $n \times 2$), mediante un tránsito entre sistemas homogéneos y no homogéneos, en un entorno geométrico-cartesiano. En esta investigación la aplicación se realizó con estudiantes de formación inicial del profesorado de matemática en una universidad chilena y la selección de entrevistados se desarrolla mediante estadística implicativa; se realizó un cuestionario, un análisis de este y una entrevista final. Una de las preguntas para la entrevista propone cuatro sistemas de ecuaciones lineales, determinar el conjunto solución y argumentar los resultados; por ejemplo, está el sistema $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$ que permite al estudiante la coordinación de procesos relacionados con la intersección de rectas. Así puede desarrollar una construcción Objeto del conjunto solución de un SEL 2×2 homogéneo, pues es evidente que los coeficientes de las ecuaciones no son proporcionales y, por tanto, el sistema tiene solución única, luego al ser un sistema de ecuaciones homogéneo la solución es el punto $(0,0)$.

De manera general Rodríguez et al. (2019) afirman que para que el estudiante construya el Proceso coeficientes proporcionales es suficiente coordinar los procesos: rectas paralelas con ecuación general de una recta. Utilizando la comparación de los respectivos coeficientes de un SEL homogéneo, como mecanismo de coordinación. Luego, coordinar el Proceso recta vectorial con el Proceso recta afín para construir el Proceso solución de un SEL no homogéneo. Esto dado que la construcción de Proceso solución de sistemas $n \times 2$ requiere el concepto previo de la coordinación entre el Proceso solución de un SEL y el Proceso eliminación de ecuaciones. Los principales resultados de esta investigación evidencian incomprensión del concepto solución de un sistema; dificultades para relacionar aspectos geométricos con algebraicos y sugerir nuevas estrategias para el caso de sistemas de tres o más ecuaciones lineales. Por tanto, la descomposición genética propuesta debía cambiar la dirección general, es decir, no apoyarse en un sistema homogéneo para resolver uno no homogéneo (Rodríguez et al., 2019).

Por otro lado, Oliveros (2018) realiza una investigación enfocada en el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de los Sistemas de Ecuaciones Lineales y su Conjunto Solución en estudiantes de Matemáticas que cursaban por primera vez un curso de Álgebra Lineal. Dicha investigación estudia cómo los sistemas de ecuaciones lineales van evolucionando en la medida en que se desarrolla un curso de Álgebra Lineal. Para esto la investigadora recoge información sobre los SEL asociados a conceptos como: combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generador y base. Las construcciones y relaciones entre ellas se presentan en términos de la teoría APOE. Para esto Oliveros (2018) desarrolló un análisis teórico, donde estudia diferentes libros de texto, haciendo una revisión global del contenido y la forma como abordan el concepto de SEL; éste es muy detallado en el análisis de cómo se involucran los demás conceptos con el estudio de los SEL. Luego realiza una descomposición genética hipotética del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales y aplica una prueba diagnóstica inicial, ocho sesiones de clase y una prueba diagnóstica final.

En la prueba final se presenta la siguiente pregunta: “Sean u, v, w tres vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$, $u = (1, -3, 0), v = (1, -1, 1), w = (0,2,1)$; a) ¿Estos puntos son colineales? ¿Por qué?

¿Estos vectores son linealmente dependientes o linealmente independientes? ¿Por qué?; b) ¿Qué generan estos vectores?". En general este problema muestra la relación entre la combinación lineal, la independencia o dependencia lineal y espacio generado, donde los SEL resultan un concepto fundamental para la determinación y descripción de los conceptos involucrados. Oliveros (2018) establece que para este problema el estudiante logra una concepción Acción del concepto SEL al reducir la matriz asociada al sistema y va en búsqueda de su solución; aquel estudiante que reflexione sobre el resultado de la matriz reducida, es decir, al obtener una fila de ceros, logra comprender que el sistema tiene infinitas soluciones (no solo la trivial), lo que implica que los vectores son linealmente dependientes y al obtener $0 = 3x + y - 2z$ entienda que los vectores generan un plano (el conjunto de vectores que satisfacen esa ecuación), no todo $\mathbb{R}^3$. Esto evidencia una concepción objeto de combinación lineal y como ya se mencionó una concepción Proceso del concepto SEL. La autora interpreta este resultado de la coordinación entre los procesos de SEL, usando representación matricial y vector. A partir de los resultados obtenidos en la entrevista se evidenció que las formas algebraicas predominaron frente a las formas geométricas, aunque se reconoce la importancia de ambas para la construcción conceptual de los Sistemas de Ecuaciones Lineales, lo que lleva a una descomposición genética refinada. Oliveros (2018) resalta que el estudio de los SEL debe iniciarse desde su naturaleza, es decir, como conjunto de ecuaciones lineales. Por ejemplo, al realizar operaciones elementales a una matriz del sistema, es necesario estructurar que la multiplicación por un escalar a una ecuación o la suma de ecuaciones no altera el conjunto solución, y si permite una descripción más directa de la solución. Por otro lado, las construcciones que realizaron los estudiantes sobre los SEL, relacionado con la combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generador y base, tuvo una diversidad de argumentos de tipo matricial en relación con los determinantes. Oliveros (2018) identifica un estado intermedio entre las estructuras Acción y Proceso, caracterizado por la manipulación de elementos sin una reflexión profunda sobre el significado de solución del sistema; esto dado que los estudiantes a menudo interpretaban la solución como una simple igualdad sin mayor explicación. Aunque no se evidenció la encapsulación del Proceso SEL construido, tal vez porque los problemas planteados no exigían una concepción más allá de Proceso para dar solución, se da una descripción del Esquema de SEL, determinado por relaciones conscientes con los conceptos: Combinación Lineal, Dependencia e Independencia Lineal, Conjunto generador y Base. Distinguiendo entre un *Nivel Intra* (construcciones del SEL en sí mismo) y un *Nivel Inter* (creación de relaciones entre el SEL y otros conceptos), donde el concepto SEL funciona como una herramienta para la solución de problemas (Oliveros, 2018).

Los antecedentes revisados evidencian que, actualmente existen múltiples estudios que abordan las concepciones, dificultades y estrategias de enseñanza sobre el concepto de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL), aunque persisten vacíos significativos en la comprensión conceptual en estudiantes de diversas disciplinas. Se han diseñado propuestas didácticas y entornos de aprendizaje que aportan elementos valiosos, estos estudios coinciden en señalar limitaciones y carencias de estrategias que favorezcan un desarrollo sistemático de los conceptos y promuevan la construcción de significados más profundos. Este panorama abre paso a la necesidad de una investigación orientada al diseño de tareas sustentadas en un modelo cognitivo, con el fin de superar las limitaciones detectadas en estudios previos y contribuir al desarrollo de una comprensión más profunda de los SEL en estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

2. Planteamiento del problema

Actualmente en el sistema educativo colombiano el concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales se aborda desde la educación secundaria (9° grado) y en general en los ciclos básicos de los programas universitarios donde se busca desarrollar formas más generales de pensamiento. En la educación secundaria se enfoca en los métodos de solución: sustitución, eliminación y reducción, lo que ocasiona que cuando los estudiantes ingresan a la universidad se limiten a aplicar algún método de solución al enfrentarse con problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales y no verifican la solución o cuestionarse sobre el origen de las ecuaciones.

Como menciona Osorio (2021) el proceso de enseñanza en matemáticas se ha convertido en un recetario, al inicio una explicación teórica del concepto, luego una sencilla ejemplificación y ejercitación, y para finalizar la aplicación del concepto. Donde los dos últimos momentos son similares al ejemplo que se presente con anterioridad, lo que condiciona el pensamiento matemático del estudiante y abre campo a un aprendizaje mecánico.

A raíz de lo anterior, se reportan algunos trabajos (Ochoviet, 2009; Ramírez, 2008; Ardila y Montañez, 2010; presentados por Ramos y Ordosgoitia, 2011) donde señalan que la manera tradicional en la que se desarrolla la temática, haciendo énfasis en los métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales genera aprendizajes erróneos sobre el sistema de ecuaciones y su solución. Es decir, surge una desarticulación entre el objeto sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución (Panizza et al., 1995; citado en Segura, 2004) llevándolos a la mecanización y falta de significado de la solución. (González, 2011).

Por su parte, Rodríguez et al. (2022) señala que la enseñanza del álgebra y en particular de los SEL, se dificulta por la arraigada costumbre de centrar su enseñanza y aprendizaje en lo práctico y mecánico, sin prever, que la construcción de conceptos se realice con base en situaciones reales, donde se tenga un adecuado uso de las formas de representación que implique que los conceptos previos estén constituidos y que la habilidad de aplicar procedimientos y estrategias para resolver problemas este desarrollada o en vías de desarrollo (Ochoviet, 2009; Oktaç y Trigueros, 2010; citados en Rodríguez et al., 2022, p. 166).

En la formación docente y más aún en la labor como educadores es un punto clave hacer una constante reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del área deseada, en nuestro caso de las matemáticas (álgebra lineal). Para esto se deben seleccionar los contenidos que sean más relevantes con el propósito de desarrollar habilidades que les permitan a los estudiantes entender situaciones cambiantes de su vida cotidiana. Para Ramos y Ordosgoitia (2011) uno de los temas con dichas características son los Sistemas de Ecuaciones Lineales, debido que, en los procesos diarios, se trabajan de manera inconsciente. Por ejemplo, en un campo de acción habitual, tenemos la economía, específicamente en la siguiente situación: determinar la cantidad de unidades producidas y demandadas dado un nivel de precios modelado por un sistema de ecuaciones con dos incógnitas (Atehortúa, 2017).

Otra de las grandes aportaciones del conocimiento fluido del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales se presenta en el tratamiento de temas tales como la determinación de un vector perpendicular a otros dos, problemas que involucran rectas y planos, búsqueda de puntos críticos en funciones de varias variables u optimización utilizando el método de Multiplicadores de Lagrange (Trípoli et al., 2023).

Las dificultades en el aprendizaje del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales surgen de diferentes fuentes:

> Unas están ligadas a la complejidad matemática de los elementos básicos que se utilizan en la adquisición del objeto sistemas de ecuaciones lineales (números reales y función afín, en vía de construcción); otros al concepto de sistemas de ecuaciones lineales y su solución,

y otros más a la ruptura entre el pensamiento aritmético y el algebraico. (Segura, 2004, p.52)

A partir de las dificultades presentes y las expuestas en el capítulo de antecedentes podemos proponer que la comprensión de los conceptos matemáticos en especial el concepto SEL es compleja para los estudiantes y en parte esto se debe a la manera como se aborda el concepto en el aula. Ahora bien, el diseño de tareas en la teoría APOE es útil para identificar y explicar las dificultades presentes, formas en que los estudiantes perciben un objeto matemático y las relaciones entre las diferentes construcciones que pueden o no hacer (Trigueros y Oktaç, 2019)

Desde esta perspectiva, los estudiantes no son sujetos pasivos de información sino constructores activos de su conocimiento, como afirman Trejo y Camarena (2011) aprender matemáticas implica que los individuos sean capaces de utilizarlas para resolver eventos específicos de su área de formación profesional y laboral. Por esta razón, como futuros profesores, se identifican dos tareas por realizar en la práctica docente (Camarena, 1990, p. 36, como se cita en Trejo y Camarena, 2011): a) fomentar la integración de conocimientos matemáticos en las ciencias específicas de la formación de los futuros profesionales; b) conocer desde el punto de vista cognitivo lo que ocurre con los estudiantes cuando trabajan una matemática contextualizada.

Para ello se propone la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo promover la comprensión del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales en estudiantes de Licenciatura en Matemáticas mediante el desarrollo de tareas guiadas por un modelo cognitivo?* Para dar respuesta a este interrogante se plantea el siguiente objetivo:

Diseñar tareas sustentadas en un modelo cognitivo que promuevan la comprensión de los Sistemas de Ecuaciones Lineales en estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

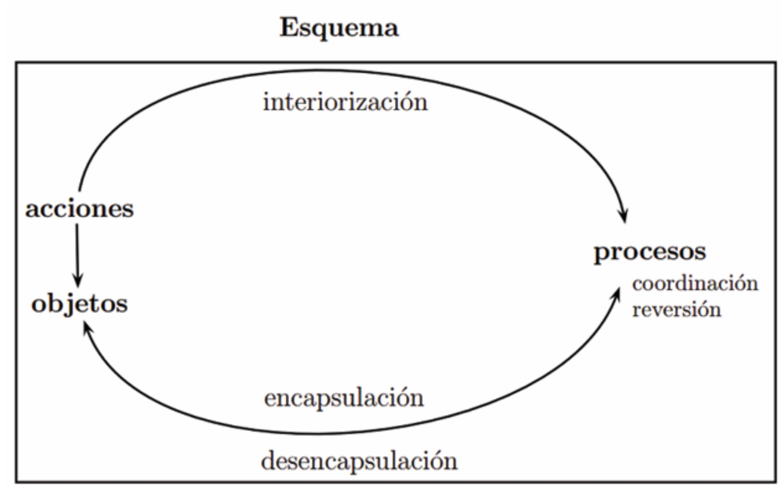
3. Teoría APOE

En este capítulo se presentan los elementos teóricos que se han seleccionado para este trabajo de investigación. Se decidió abordar la teoría APOE, con el fin de reflexionar sobre la comprensión del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales.

La teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema), es una teoría constructivista, la cual ayuda a entender el proceso de aprendizaje y la construcción de conceptos matemáticos a través de las estructuras mentales de los estudiantes, descritas en una descomposición genética. Esta teoría fue desarrollada por Ed Dubinsky y miembros de Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC por sus siglas en inglés), basada en el proceso de *abstracción reflexiva* planteado por Piaget, que describe el pensamiento lógico de los niños (Dubinsky, 1991). Se denominan mecanismos mentales a: *interiorización, coordinación, encapsulación y reversión*, quienes permiten la aplicación de construcciones mentales denominadas: *acciones, procesos, objetos y esquemas*; en la Figura 1 se muestran las relaciones entre las estructuras y mecanismos mentales. Estas ideas fueron extendidas para explicar cómo un individuo comprende un concepto matemático. (Arnon et al., 2014).

Figura 3

Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de conocimiento matemático.



Nota. Representación gráfica de las estructuras y mecanismos mentales en la teoría APOE. Tomada de *APOS Theory a framework for research and curriculum development in mathematics education.* (p.18) por Arnon et al., 2014, Springer.

El diagrama de la Figura 3 sirve para explicar cómo un individuo puede construir un concepto y/o noción matemática resumido en un Esquema mental. Aunque las construcciones y mecanismos mentales se presentan de manera jerárquica y ordenada, cuando un individuo está desarrollando su comprensión de un concepto, la construcción de dicho conocimiento no es tan lineal. (Dubinsky y McDonald, 2001).

El estudiante puede ir y venir entre diferentes estructuras o permanecer dentro de una, sí así lo necesite. El desarrollo de un concepto inicia en la mente del alumno con una acción paso a paso; por ello las Acciones se perciben de manera externa, es decir, son explícitas y guiadas por instrucciones. Los Procesos se construyen utilizando algún mecanismo mental, bien sea *interiorización o coordinación*. Cuando los alumnos realizan las acciones repetidamente y reflexionan sobre ellas, dan paso a estímulos internos de estas, luego pueden imaginar, revertir u omitir pasos; es decir, cuando predice con éxito el resultado, inventa atajos y puede describir verbalmente la acción sin realizarla realmente. La interiorización es el mecanismo que permite un cambio mental, y concientiza al estudiante de sus acciones, reflexionando y combinándola con otras acciones. (Arnon et al., 2014).

Cuando un alumno aplica una Acción a un Proceso, es decir, ve el proceso como una totalidad y puede realizar transformaciones (explícita o en la imaginación) en dicha totalidad, decimos que resumió el proceso en un Objeto cognitivo. (Arnon et al., 2014). Una vez el estudiante logra encapsular el Proceso en Objeto, puede desencapsularlo cuando sea necesario y volver al proceso que dio origen al objeto.

Además, el mecanismo de *coordinación* sirve para nuevos objetos, pues se pueden desencapsular dos objetos, coordinar sus procesos base y encapsular el Proceso coordinado para formar un nuevo Objeto. La interacción de los elementos antes descritos da origen a los Esquemas. Una vez que un Esquema se construye como un conjunto coherente de estructuras (acciones, procesos, objetos, entre otras) y relaciones entre esas estructuras, es posible modificarlo como una estructura estática (objeto) y/o emplearla como una estructura dinámica que reconoce otros objetos o esquemas relacionados (Arnon et al., 2014). Para Dubinsky (2002) los esquemas son dinámicos, y son inherentes a su construcción y reconstrucción continua, esto de acuerdo con la actividad matemática del sujeto en situaciones matemáticas específicas.

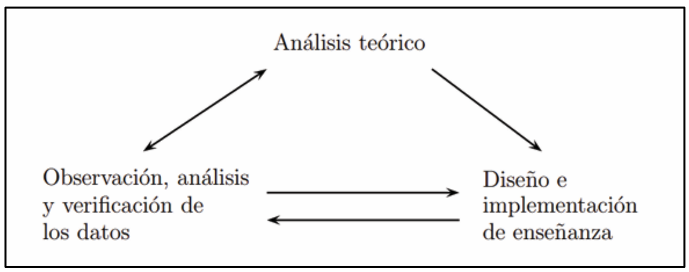
En términos de la teoría APOE la descripción de las estructuras y mecanismos mentales asociados a un concepto particular se denomina descomposición genética (DG). Arnon et al. (2014) afirma que la descomposición genética es considerada el corazón de la teoría, pues es un modelo cognitivo que describe cómo un estudiante llega a comprender una parte de conocimiento matemático.

3.1. Ciclo de investigación de APOE

Para Arnon et al. (2014), un proyecto de investigación sustentado desde APOE implica tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de un modelo de enseñanza y observación, análisis y verificación de datos. Este ciclo se repite tantas veces como sea necesario para comprender la epistemología del concepto y obtener estrategias pedagógicas eficaces para ayudar a los alumnos a aprenderlo. (Dubinsky y McDonald, 2001, p. 277). En la Figura 4 se ven las conexiones de estos componentes.

Figura 4

Ciclo de Investigación.



Nota. Representación gráfica del ciclo de investigación en la teoría APOE. Tomada de *APOS Theory a framework for research and curriculum development in mathematics education.* (p.94) por Arnon et al., 2014, Springer.

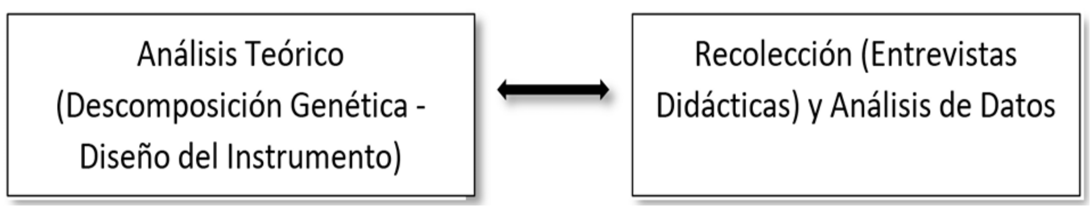
El *análisis teórico* presenta en forma de descomposición genética, un conjunto de construcciones mentales que un estudiante podría realizar para comprender el concepto matemático estudiado; lo cual se logra a través de análisis a libros de texto, experiencia de diferentes investigadores, resultados de estudios previos, entre otros. Este análisis, guía el *diseño y la implementació*n de estrategias pedagógicas mediante tareas que tienen el propósito de promover las construcciones mentales sugeridas en el componente anterior. Las tareas están diseñadas para apoyar a los estudiantes en la construcción de acciones, interiorizarlas en procesos, encapsular procesos en objetos y coordinar dos o más procesos para construir nuevos procesos de ser necesario. Así, la segunda componente abre paso a la *recopilación y análisis de datos*, donde se reúnen y analizan los resultados de los estudiantes bajo el modelo cognitivo. Finalmente, el ciclo continúa hasta que la evidencia empírica y el análisis teórico se dirigen a las mismas construcciones mentales.

4. Método

Este trabajo toma la adaptación realizada al Ciclo de investigación de APOE propuesta por Villabona et al. (2022), la cual se centra en la primera y tercera componente (ver Figura 5). Partimos del análisis teórico (descomposición genética de Sistemas de Ecuaciones Lineales) propuesto por Oliveros (2018) el cual orienta el diseño de tareas para la recolección y análisis de datos, mediante una entrevista.

Figura 5

Interacción entre la primera y tercera componente del Ciclo de investigación APOE.



Nota. Interacción entre la primera y tercera etapa del ciclo de investigación en la teoría APOE. Tomada de *Concepciones dinámicas y estáticas del infinito: procesos continuos y sus totalidades* (p.183) por Villabona et al., 2022. *Enseñanza de las Ciencias*, 40 (1)

A partir del Ciclo de investigación que propone la teoría APOE este trabajo parte de una descomposición genética validada de los sistemas de ecuaciones lineales, resultado de la aplicación del Ciclo de Investigación, desarrollado por Oliveros (2018). Dicho modelo, es la base para el diseño de las tareas, que serán implementadas a través de un instrumento denominado entrevista didáctica.

Con miras a implementar el modelo cognitivo propuesto por Oliveros (2018) en la primera componente, se diseña una entrevista didáctica que es aplicada a un grupo pequeño de estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas que hayan aprobado el curso de Álgebra Lineal y estén finalizando sus estudios. Las entrevistas serán, videograbadas, y se recogerán los trabajos realizados por los estudiantes a fin de analizarlos en concordancia con la Descomposición Genética. Esto permite probar la DG y llegar a promover un refinamiento para lograr un modelo que propicie la comprensión del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales en prácticas futuras.

4.1.Modelo cognitivo de los Sistemas de Ecuaciones Lineales

A partir de la teoría APOE, desarrollada por Dubinsky y sus coparticipantes (Asiala et al., 1996), se logró formalizar un modelo cognitivo en Oliveros (2018), que permite comprender la construcción del concepto: Sistemas de Ecuaciones Lineales mediante una Descomposición Genética, cuyo propósito es representar el desarrollo de este concepto en la mente de cada estudiante. A continuación, se presenta la descomposición refinada:

En Oliveros (2018) para la construcción del concepto de SEL se logra concluir que:

> Son estrictamente necesarias las estructuras: Acción del concepto Variable, Proceso del concepto Vector y Proceso de Ecuaciones equivalentes, para el inicio de la construcción del concepto de Sistemas de Ecuaciones Lineales; este último Proceso se determinó que es imprescindible para la interpretación de soluciones. Por otro lado, si se decide abordar el Objeto desde su forma geométrica la estructura Proceso del concepto de Vector es necesaria, pero si solo se quieren interpretar geométricamente las ecuaciones con dos o tres variables no es indispensable. Aclarando que esta estructura debe estar presente en la

> construcción del concepto SEL; por ejemplo, en problemas particulares que impliquen describir que un vector o vectores son solución de cierto sistema. (p.85)

La autora destaca que si se desea analizar el rol que existe entre los objetos abstractos y los objetos concretos, es necesario presentar tareas que involucren interpretaciones geométricas. Luego, señala que los métodos más comunes evidenciados en la investigación para resolver SEL son el método de sustitución, uso de interpretaciones matriciales y uso de determinantes.

A partir del análisis de resultados Oliveros (2018) determinó que:

> Existe un estado intermedio entre la concepción Acción y Proceso, caracterizado por la falta de reflexión sobre el trabajo con ciertos elementos que presenta un problema; al igual que la falta de interpretación de la solución de un problema; la cuál es entendida por los estudiantes como llegar a una igualdad sin tener que dar explicación. (p.86)

En función de la descripción anterior se propone plantear problemas donde sobren datos, con el fin de que los estudiantes aprendan a elegir los datos que sí los lleve a entender la información del problema y no intentar dar solución a problemas que no tienen solución.

Aquel estudiante que construya una concepción Proceso de SEL podrá determinar sin realizar ninguna acción si un problema tiene o no solución con una correcta interpretación del mismo; es una parte que caracteriza la interiorización de una Acción, pero no es la única forma. El uso de cualquiera de los métodos (convencionales, determinantes, matrices, rango, representación gráfica) sólo garantiza la mitad del éxito. La herramienta, comienza a tener significado cuando el estudiante sepa cómo usarla y saber por qué funciona. (Oliveros, 2018, p.86)

Como la encapsulación de la estructura Proceso del concepto SEL no fue evidente, no se logró identificar características que describan esta estructura, además la autora considera que las construcciones están determinadas según el contexto del problema. Es decir, si un problema pide determinar si los vectores de cierto espacio $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, son linealmente independientes, brinda diferentes opciones al estudiante como verificar geométricamente si pertenecen a una misma recta o a un mismo plano; o verificar si las únicas soluciones a un sistema homogéneo dado son iguales a cero, usando una matriz; o en caso de tener una matriz cuadrada usar determinantes y dar solución al problema.

Oliveros (2018) sugiere involucrar los conceptos Combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generador y Base, con el propósito de no aislar el concepto de SEL, de estos conceptos que forman parte del contenido, de los cursos de Álgebra lineal; pues los sistemas de ecuaciones lineales están presentes como herramienta para dar solución a problemas que implican el concepto de combinación lineal, el cuál es generador de otros conceptos. (Parraguez, 2014; Oliveros, 2018)

5. Recolección y análisis de datos

Esta componente se va a desarrollar con cinco estudiantes de último año de la Licenciatura en Matemáticas de una universidad pública colombiana. Dichos estudiantes han cursado y aprobado satisfactoriamente la asignatura de Álgebra Lineal. La entrevista se desarrolla de manera presencial e individual, cada estudiante cuenta con la constante guía de la autora de esta investigación; las dudas se resuelven a través de herramientas como: computador con acceso a internet, tablero y hojas de trabajo. Cada entrevista se lleva a cabo en una sesión de aproximadamente 120 minutos, con cuatro tareas que incluyen conceptos como combinación lineal, base, espacio generado y por supuesto el eje central de las tareas, en este caso la construcción del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales.

El diseño de tareas como plantea Trigueros y Oktaç (2019) puede construir o consolidar conocimientos y conexiones; involucrar a los estudiantes en actividades de justificación y crear conflicto cognitivo para motivar la progresión en el pensamiento matemático (Aguilar y Oktaç, 2004 en Trigueros y Oktaç, 2019). Ahora bien, el diseño de tareas en la teoría APOE es útil para identificar y explicar dificultades, así como las formas en que los estudiantes perciben un objeto matemático y las relaciones entre las diferentes construcciones que pueden o no lograr durante la aplicación del instrumento.

5.1. Análisis a Priori de la Entrevista

A continuación, se presenta un análisis preliminar detallado desde el punto de vista de la teoría APOE, el cual señala la conexión entre las estructuras mentales y los mecanismos predichos por la Descomposición Genética descrita en la sección 4.1. de este documento. Se mencionan características específicas que cada tarea tiene para cumplir su propósito, así como el papel que juega dentro de la secuencia. Cabe aclarar que la elección y el orden de las tareas es clave dentro de la teoría APOE. (Trigueros y Oktaç, 2019).

Tarea 1. La Búsqueda del Tesoro

Un antiguo mapa contiene dos pistas que describen una ruta de navegación para encontrar un tesoro escondido. Las ecuaciones describen las rutas de dos brújulas en posiciones diferentes. La ubicación del tesoro es el único punto donde ambas rutas se cruzan.

$$\textbf{Pistas:} \begin{cases} 4x + y = 0 \\ 8x + 2y = 5 \end{cases}$$

a) Tres marineros proponen tres posibles coordenadas para el tesoro: $\left(1,-\frac{3}{2}\right),(0,0),\left(-\frac{1}{2},2\right)$. Verifica, paso a paso, si cada uno de estos puntos ubica el tesoro.

b) ¿Cuántos puntos satisfacen las pistas y ubican el tesoro? ¿Habrá más tesoros o las pistas son falsas? Justifique su respuesta

c) ¿Si gráficas las dos rutas de navegación que notas? ¿Cómo influye esto en la búsqueda del tesoro?

En el primer ítem se busca que los estudiantes reemplacen los pares ordenados en cada una de las ecuaciones del sistema, para verificar si satisfacen la igualdad o afirmar directamente que ningún par ordenado es solución, al tratarse de rectas paralelas. Para el segundo ítem el estudiante debe buscar el conjunto solución del sistema de ecuaciones dado, mediante cualquier método algebraico, geométrico, o incluso desde la relación de los coeficientes con las ecuaciones. El último ítem busca que el estudiante identifique que el sistema dado corresponde a dos rectas paralelas y por tanto el conjunto solución de este es vacío.

Consideramos que, si el estudiante sustituye diferentes valores de una o más variables, en las ecuaciones para comprobar si satisfacen o no, evidencia una concepción Acción de Variable; está como se formuló en la descomposición genética es fundamental para iniciar la construcción del concepto SEL. Por otro lado, el estudiante no solo debe realizar la Acción de resolver el sistema, sino reflexionar sobre el resultado, construyendo una concepción Proceso. En este punto es posible que el estudiante caiga en un estado intermedio entre Acción y Proceso donde se evidencie la falta de interpretación de este resultado. Esto puede ocurrir por que el estudiante confunde la verificación con la resolución, donde supone que si ningún punto de la lista es correcto es suficiente; es decir, asume que el hecho de una falta de solución sea un error de las coordenadas propuestas.

Por otra parte, si un estudiante es capaz de comprender, sin tener que graficar que la solución del sistema representa la intersección de las rectas dadas, y que en este caso no existe dicha intersección, está evidenciando una concepción Proceso de SEL (interpretación geométrica). Luego, al graficarlas, confirma que son rectas paralelas y nunca se cruzan, por tanto, relaciona la representación gráfica con el resultado analítico de un sistema sin solución.

Tarea 2. Enigma del mapa

Luego de una exhausta búsqueda el capitán vuelve a revisar el mapa y se da cuenta que leyó una de las pistas mal y dijo: "Si encuentro una nueva ruta, podría tener mi tesoro; las pistas no me engañarán más, **no reemplazaré ningún número** y resolveré este misterio"

$$\textbf{Pistas corregidas:} \begin{cases} 4x + y = 0 \\ 8x + 2y = s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Siguiendo las peticiones del capitán, qué valor debería tener s para que:

a) Existan demasiados tesoros hasta que se canse y sigan de generación en generación.

b) Termine deprimido porque nunca encontrará el tesoro.

c) Sea el afortunado de llevarse el único tesoro en el mundo.

Esta tarea plantea el mismo sistema de ecuaciones lineales 2×2 de la tarea 1, pero con la variación de un parámetro s en la segunda ecuación, lo que va a permitir al estudiante explorar distintos casos de solución: infinitas soluciones, sin solución o única solución.

Para el ítem a) el estudiante debe notar que la ecuación debe ser múltiplo de la primera y como de por sí ya es $2(4x + y)$, luego es lógico suponer que para cumplir con este enunciado la respuesta es $s = 0$. Para el b) es posible que recurra a la tarea anterior, donde el sistema no tenía solución y, por tanto, $s = 5$ o siga probando con otros valores y descubra más propiedades del sistema con este caso. Finalmente, reflexionando sobre los valores y las posibles interpretaciones geométricas, note que solo cambiando s en la segunda ecuación, no es suficiente para determinar que solo haya un punto donde se encuentre el tesoro (única solución).

Es posible que el estudiante no siga las indicaciones y sustituya manualmente los valores de s, resolviendo los sistemas generados y hallando a ensayo y error las respuestas de los ítems o incluso usando un Software dinámico como GeoGebra para representar el sistema; en este caso evidencia una concepción Acción de SEL.

Si el estudiante ahora nota patrones entre los valores de s y el tipo de solución que surgen, esto es evidencia de que ha empezado a construir una concepción Proceso. Lo que lleva a relacionar los cambios algebraicos en las ecuaciones con modificaciones en la interpretación geométrica. Esto le permite justificar dichos patrones y dar cuenta de que no basta con cambiar solo s para que el sistema dado tenga única solución.

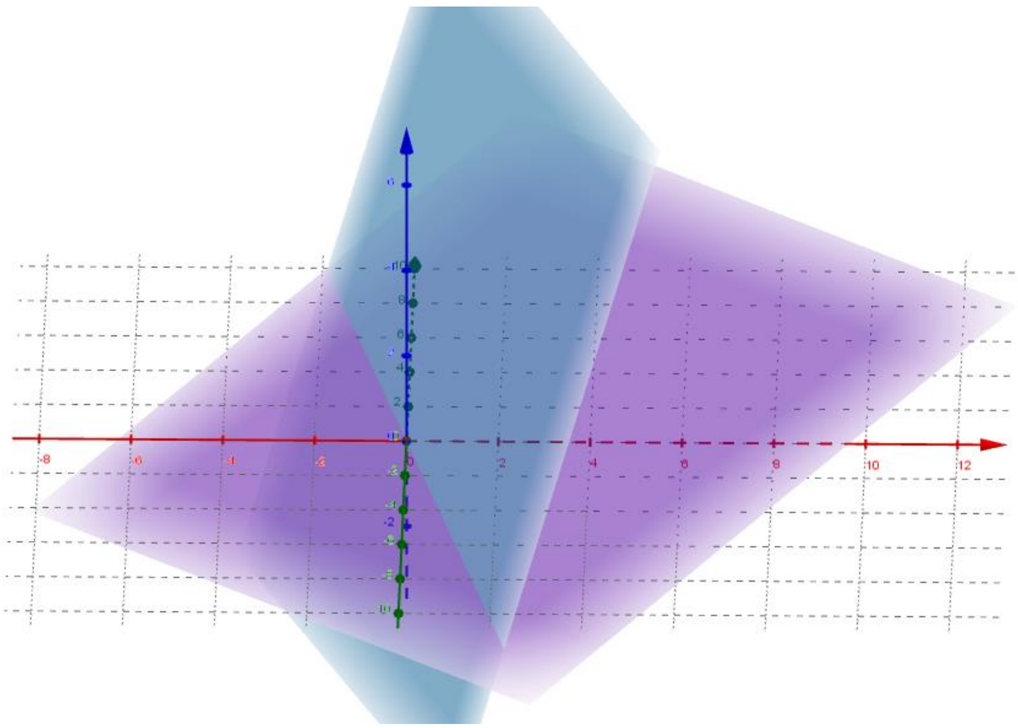
Además, si el estudiante reflexiona sobre el tipo de sistema dado y generaliza el comportamiento de este parámetro y los coeficientes que acompañan a las incógnitas, se encuentra desarrollando una concepción Objeto de SEL. Es decir, sin necesidad de cálculos o interpretaciones geométricas determina la naturaleza del sistema para cualquier s en este caso. Específicamente, al reflexionar sobre estas condiciones, el estudiante está encapsulando el proceso de resolución; ya no piensa en cómo resolvería esto, sino en qué debe ser cierto sobre el sistema para que tenga estas propiedades.

Antes de comenzar el análisis de las tareas 3 y 4, es necesario aclarar que son una contextualización y adaptación de las preguntas 7 y 8 respectivamente de la prueba diagnóstica final de Oliveros (2018).

Tarea 3. Gráficos por computadora (Adaptación de Oliveros (2018))

En una simulación 3D tienes tres fuentes de luz, cada una dirigida en una dirección dada por los vectores: $v_1 = (6, -3, 1), v_2 = (2, -1, 1), v_3 = (-2, 1, -4)$.

a) ¿Es posible **apagar por completo** la iluminación en una región al **combinar** estas luces? Justifica tu respuesta. Ten en cuenta que la representación geométrica del sistema resultante es la siguiente:



b) ¿Cuál es la solución del sistema? Justifique su respuesta.

c) ¿Los vectores luz v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes? Justifique su respuesta.

Como resultado de analizar el ítem a) se espera que los estudiantes planteen la siguiente igualdad: $x(6, -3, 1) + y(2, -1, 1) + z(-2, 1, -4) = (0, 0, 0)$, que resulta de la combinación lineal de los vectores dados en $\mathbb{R}^3$. Pues, al preguntar si es posible apagar por completo la iluminación, se espera que los estudiantes interpreten que la combinación lineal (ecuación) se debe igualar al vector nulo; este problema tiene como meta que el estudiante logre reflexionar sobre el conjunto solución de un sistema de ecuaciones dado, sin realizar ningún tipo de cálculo, a partir de su representación gráfica (ítem b). Lo que nos lleva al ítem c) que surge con el fin de evidenciar relaciones entre independencia lineal y los SEL.

Ahora bien, la solución del sistema no se puede determinar completamente de la interpretación geométrica, ya que para dar una respuesta completa se tendría que encontrar los vectores que son solución para ambos planos; es decir, lo que está en la intersección. Aunque a simple vista esto no es posible, los estudiantes pueden asumir que los vectores solución están en una recta. Entonces, para encontrar la solución a este sistema se espera que los estudiantes empleen algún método de resolución del sistema resultante de la igualdad en el ítem a). Es muy probable que los estudiantes realicen operaciones básicas a la matriz asociada al sistema y obtengan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como se muestra en la matriz asociada, no es necesario llevarla a una forma reducida escalonada, basta con su forma escalonada. Sin embargo, es posible que haya estudiantes que no reflexionen sobre este hecho y sigan realizando cálculos. Cuando el estudiante sustituya hacia atrás el sistema resultante y encuentre la solución del sistema (con cualquier método), la cual corresponde a los vectores de la forma: $(-\frac{3z}{2}, \frac{11z}{2}, z)$, indican los puntos que están en la recta formada por la intersección entre los planos de la imagen.

Ahora bien, ¿qué relación hay entre este suceso y los vectores luz?, para ello se presenta la pregunta c); se espera que los estudiantes logren concluir que los vectores luz v_1, v_2, v_3 no son linealmente independientes, pues la igualdad no se cumple únicamente cuando $x = y = z = 0$.

En términos prácticos, esto podría significar que una fuente de luz es redundante o que la combinación de algunas fuentes puede ser cancelada por las otras, lo cual es fundamental para los algoritmos de renderizado y el diseño de iluminación.

Si un estudiante describe la solución del sistema dado como los puntos que forman la recta de intersección en los planos y por tanto son infinitas soluciones, diremos que evidencia una concepción Proceso del concepto SEL (interpretación geométrica). Aunque, para hablar de la solución y no sólo del tipo de solución, el estudiante debe construir una concepción Proceso de los SEL, a partir de la coordinación entre los Procesos de SEL, usando la representación matricial y la interpretación geométrica.

Por otro lado, los estudiantes deberían determinar la naturaleza de la tarea, donde se aborda la independencia o dependencia lineal de los vectores v_1, v_2, v_3; esto por cómo se plantea la igualdad $x(6,-3,1) + y(2,-1,1) + z(-2,1,-4) = (0,0,0)$ en el ítem a). Como menciona Oliveros (2018) para que esto suceda, los estudiantes deben tener una concepción Objeto del concepto Combinación lineal; en este nivel son conscientes que, al igualar estos vectores al vector nulo, se están considerando todas las alternativas de solución, lo que permite establecer si el conjunto (v_1, v_2, v_3) es linealmente independiente o no.

Tarea 4. Sistema de Navegación Aéreo (Adaptación de Oliveros (2018))

Una torre de control necesita establecer un sistema de coordenadas de referencia para localizar aviones, en un graficador 3D. Para ello, utiliza tres antenas que emiten señales en direcciones específicas.

Antena 1: $w_1 = (1,-1,0)$

Antena 2: $w_2 = (1,1,0)$

Antena 3: $w_3 = (0,0,1)$

El sistema de coordenadas de referencia ideal debe ser ortogonal. Los ingenieros de la torre de control te piden que verifiques si estas tres antenas cumplen con el requisito de ortogonalidad. Para ello, necesitas comprobar dos cosas:

a) ¿Son las direcciones de las antenas perpendiculares entre sí?

b) ¿Son las tres antenas suficientes para describir la posición de cualquier avión en la región espacial?

Imagina que la torre de control decide rotar su sistema de antenas. El nuevo sistema de referencia está definido por la matriz de rotación:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Sin resolver nuevos sistemas de ecuaciones, responde: ¿El nuevo conjunto de antenas describe la posición de cualquier avión en la región espacial ($\mathbb{R}^3$)?

Para la tarea final, se busca incluir los conceptos: Base, Espacio generado, Independencia lineal, Combinación lineal, Transformación lineal y SEL. Con la presencia de los ítems a) y b) se busca que los estudiantes comprueben las condiciones para que el conjunto de vectores w_1, w_2, w_3 sea una base y además ortogonal.

En términos prácticos, que las antenas describan la posición de cualquier avión y sea un sistema de coordenadas de referencia ideal. Para ello, los estudiantes deben aplicar el producto escalar y comprobar que sea igual a cero (ortogonalidad); plantear las ecuaciones $\alpha(1,-1,0) + \beta(1,1,0) + \theta(0,0,1) = (0,0,0)$, $\alpha(1,-1,0) + \beta(1,1,0) + \theta(0,0,1) = (x,y,z)$, y resolver el sistema asociado (con cualquier tipo de método), con el fin de determinar si los vectores son linealmente independientes y además generen todo $\mathbb{R}^3$.

Un estudiante con una concepción Acción o estado intermedio entre Acción y Proceso podría: no entender a profundidad por qué el producto escalar tiene que ser cero para que los vectores sean perpendiculares; solo ve la ecuación $\alpha(1,-1,0)+\beta(1,1,0)+\theta(0,0,1)=(0,0,0)$ como un sistema al cual le debe hallar la solución sin justificar su respuesta; a raíz del uso de cualquier método para resolver el SEL, el estudiante no entienda los valores que toman α,β,θ en el contexto de independencia lineal.

La interiorización de las acciones anteriores se logra cuando el estudiante comprende la conexión entre la operación matemática y la propiedad geométrica, respecto al cero en el resultado del producto escalar; o cuando logra concluir que los tres vectores apuntan en direcciones diferentes y así no se puedan cancelar entre sí. Se espera que un estudiante con una concepción Objeto de la combinación lineal y una concepción Proceso de los SEL, logre determinar si el conjunto cumple con las condiciones para ser una base del espacio. (Oliveros, 2018).

La parte c) de la tarea obliga al estudiante a ver el sistema de ecuaciones que resolvió antes, no como un proceso para obtener un resultado, sino como un todo con una propiedad intrínseca del conjunto de vectores.

Si el estudiante ya ha encapsulado la concepción Proceso del concepto SEL, no necesita volver a resolver el sistema, puede determinar que las transformaciones lineales como las rotaciones no cambian la independencia lineal de un conjunto de vectores. Por lo tanto, si el conjunto original era una base, el nuevo conjunto también lo será. Asimismo, las rotaciones preservan la ortogonalidad (las longitudes y ángulos entre los vectores no cambian).

Finalmente, el sistema de ecuaciones lineales se convierte en una herramienta mental que el estudiante puede recordar y manipular sin necesidad de realizar cálculos. Así, el estudiante puede razonar sobre las propiedades del sistema sin resolverlo, lo que es clave en la construcción de una concepción Objeto del concepto SEL.

5.2. Análisis de datos

A continuación, se presentan las producciones de las estructuras que los estudiantes evidenciaron sobre el concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales, con base en las respuestas y aportes recopilados en la entrevista. Se realizaron un total de cinco entrevistas de manera individual y presencial; en un tiempo aproximado de 120 minutos. Con el objetivo de mantener la confidencialidad de los participantes, se usan los siguientes seudónimos: Mauricio, Sebastián, Arturo, Andrea y Miguel.

5.2.1. Análisis a posteriori

El análisis a posteriori de las producciones de los estudiantes sobre las tareas a la luz del modelo cognitivo permite conocer la comprensión que han logrado gracias a su formación en el programa de Licenciatura en Matemáticas. Además, puede promover un nuevo refinamiento de la descomposición genética, si las estructuras y mecanismos mentales que evidencian los estudiantes no han sido descritos en el modelo inicial.

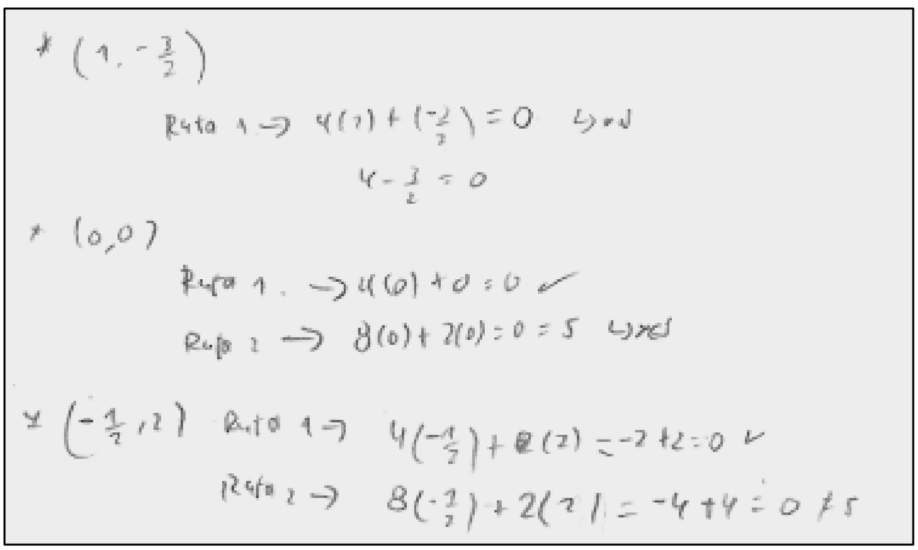
Los datos que se obtuvieron en la entrevista fueron analizados con base en las construcciones y mecanismos mentales descritos en la descomposición genética. Se presenta el análisis de los resultados considerando los tipos de construcciones realizadas por los estudiantes. Para cada una de ellas se agregan imágenes y apartados de la transcripción de la entrevista.

Estructuras previas al concepto de SEL

En el modelo cognitivo se consideran dos estructuras estrictamente necesarias para el inicio de la construcción del concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales, estas son Acción del concepto de Variable y Proceso de ecuaciones equivalentes. Esta última estructura estaba implícita en la interpretación de un sistema con infinitas soluciones en la Tarea 2, cabe aclarar que se especifica en la concepción Proceso de SEL. Contrario a la primera estructura que se presenta explícitamente en la Tarea 1, donde el estudiante verifica paso a paso, si las coordenadas dadas son una posible solución del sistema; determina si lo es o no y reconoce qué ecuaciones equivalentes tienen el mismo conjunto solución. Esto se evidencia en los procedimientos y argumentos de Mauricio:

Figura 6

Respuestas Mauricio, ***Tarea 1 (a).***



Mauricio: Primero, estoy mirando los puntos, para ver si este punto [señalando el punto $(1, -\frac{3}{2})$] cumple con la primera ecuación, qué es la ecuación de la brújula 1 y luego verificar en la otra ecuación. Según entiendo aquí, si estas dos [señalando el SEL] da igual, encuentro la ubicación del tesoro. En este caso está no cumple [señalando el procedimiento de la Figura 6] porque me está dando una constante igual a 0, cosa que no es cierta.

Entrevistadora: ¿A qué hace referencia con la ubicación del tesoro?

Mauricio: La intersección de esas dos ecuaciones, bueno esas dos rectas.

Entrevistadora: Y en términos del sistema.

Mauricio: Las soluciones. Pero de todos modos si yo evaluó los puntos, ya con eso puedo saber si las que proponen están bien o no [refiriéndose a las posibles soluciones del sistema].

Todos los estudiantes evidenciaron las estructuras previas a la construcción del concepto SEL descritas en el modelo cognitivo. Aunque solo se presenta la producción de Mauricio, que recopila explícitamente los argumentos generales de los entrevistados. En la Figura 6 y fragmento subrayado de la conversación anterior la estructura Acción del concepto de Variable se evidencia, cuando Mauricio reemplaza diferentes valores de las variables, en las ecuaciones y justifica que satisfacen en algunos casos y en otros no.

Concepción Acción del concepto SEL

En la descomposición genética se propone que un estudiante puede construir el concepto de SEL, a partir de la identificación de variables, la manipulación de dos o más ecuaciones del sistema, así como al determinar algún algoritmo eficaz para encontrar su conjunto solución.

Por ejemplo, Mauricio señala las palabras brújulas diferentes, identificando las ecuaciones involucradas, respecto al contexto; luego señala que ambas rutas se cruzan (Ver Figura 7); interpretando que la solución del sistema vendría siendo la intersección de las dos ecuaciones involucradas.

Figura 7

Anotaciones de Mauricio en la ***Tarea 1.***

Tarea 1. La Búsqueda del Tesoro

Un antiguo mapa contiene dos pistas que describen una ruta de navegación para encontrar un tesoro escondido. La primera ecuación describe la ruta de una brújula y la segunda ecuación la ruta de un astrolabio. La ubicación del tesoro es el único punto donde ambas rutas se cruzan.

$$\textbf{Pistas: } \begin{cases} 4x + y = 0 & 1 \\ 8x + 2y = 5 & 2 \end{cases}$$

Una vez Mauricio identifica las ecuaciones y elije un método de resolución del SEL, procede a desarrollar el método de resolución más eficaz, se enfrenta al conjunto solución del SEL dado y determina su tipo de solución; lo que le permite seguir construyendo una estructura más avanzada, que corresponde a la reflexión del conjunto solución y propiedades del SEL. Prueba de ello, es la siguiente conversación y su imagen asociada:

Mauricio:	[Al leer el ítem b] Lo que se refiere a las pistas ¿son estas de acá? [señalando las coordenadas].
Entrevistadora:	[Señala la hoja de trabajo la palabra "pistas" que es como se denota el SEL de esta Tarea].
Mauricio:	Ah ok ok, sí. [Procede a resolver el sistema mediante Gauss-Jordan y una vez encuentra una fila de ceros igualada a 5 comenta] No tiene soluciones [Ver procedimiento y argumento en la Figura 8].

Figura 8
Respuestas Mauricio, ***Tarea 1 (b y c)***

b) c) $\begin{matrix} 4x+y=0 \\ 8x+2y=5 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \end{array}\right) \xRightarrow{F_2 \to -2F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$

No hay solución en el sistema de ecuaciones

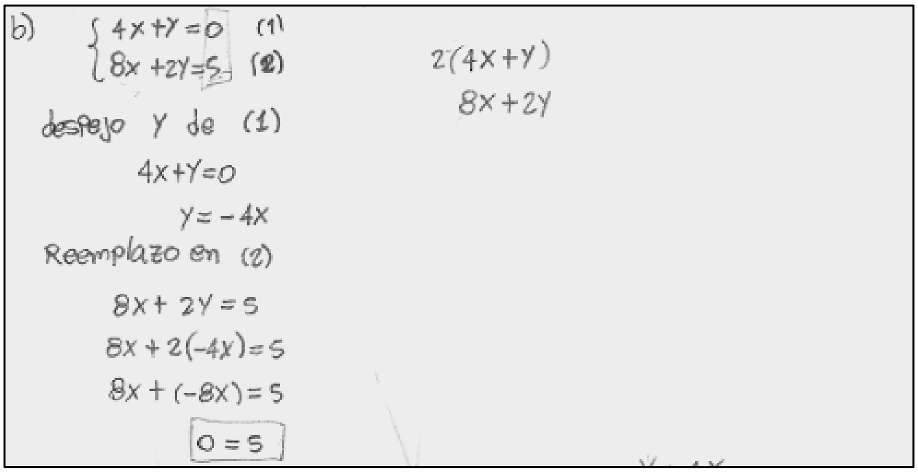
c) Son [illegible] pq la pista 2 es 2 (pista 1) es por [illegible] rectas son paralelas.

En ningún momento voy a encontrar el tesoro.

Asimismo, se presentan las producciones de Sebastián, que son más extensas en cuanto a argumentación y detalla el método de resolución que es más eficaz para él; aunque para este nivel académico, se esperan métodos más avanzados, misma situación que ocurrió con Andrea:

Figura 9

Respuestas Sebastián, ***Tarea 1 (b).***



Sebastián: Entonces, según yo debería cumplirse el sistema de ecuaciones lineales para poder llegar al tesoro, para que coincidan ambas ecuaciones en un solo punto y esa sería la solución; porque si yo lo pienso esto va a ser [señalando las ecuaciones] dos rectas, que si uno las grafica debe haber un punto de intersección, que es precisamente, pues que ese punto resuelva el sistema de ecuaciones que a su vez estaría indicando en que coordenada está ubicado el tesoro.

Entrevistadora: ¿Y a simple vista se puede ver la intersección?

Sebastián: A simple vista, la verdad no es tan sencillo de pensarlo, pero si diría que es más sencillo resolverlo por el método de sustitución (Ver Figura 9), sí, despejar en una ecuación, para luego hallar el punto en la otra. Entonces en la respuesta de la b, si estamos hablando del sistema de ecuaciones completo ningún punto satisface todo el sistema de ecuaciones y en cuanto a que habrá más tesoros o que las pistas son falsas, diría que son falsas [refiriéndose a las coordenadas del ítem a y no al conjunto solución del sistema].

En los fragmentos subrayados de rojo, Sebastián identifica las ecuaciones y comprende que la única manera de que haya un tesoro es si hay una intersección; es decir una única solución del SEL, lo que lo lleva a elegir un método de resolución cómodo para él acorde a la cantidad de variables y afirmar o refutar esta idea. Gracias al procedimiento de la Figura 9 y el fragmento subrayado de negro, podemos puntualizar que mediante los cálculos determina el tipo de solución y logra justificar por qué las coordenadas dadas no satisfacen el SEL y da sentido al contexto de la Tarea 1.

Como ya se mencionó Andrea hace uso de un método poco común para el nivel universitario, pero aun así logra desarrollar la Tarea 1 sin complicaciones y evidencia construcción de esta concepción, así:

Andrea: Iba a verificar cada punto, pero siento que me queda más fácil hallar el punto [haciendo referencia al conjunto solución del sistema y su interpretación del contexto de la tarea] Es que el tesoro va a estar en ese punto, si lo hallo no tengo que verificar cada punto, porque pues la solución es el punto de corte de ambas ecuaciones.

Entrevistadora: ¿Y cómo hallarías ese punto?

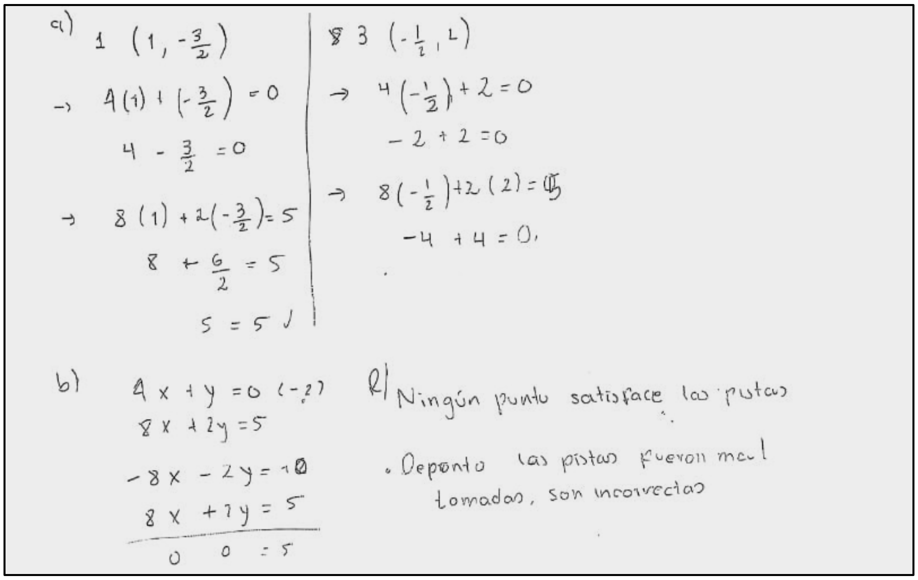
Andrea: Según yo, pues primero despejó y y luego x, tengo que llegar a la igualdad [prácticamente quería encontrar el punto a ensayo y error. Al final decide verificar si las coordenadas dadas son una posible solución] Ay ¿cómo era para ver que tenía uno, varios o ninguno? […] Que pasa si lo multiplico por -2, jum, creo que no tiene solución.

Entrevistadora: ¿Por qué no tiene solución?

Andrea: No sé, yo intuyo que no existe un punto que satisfaga ambas condiciones, porque por lo menos, yo quiero llegar a despejar alguna de las dos variables para así obtener el valor de la otra; entonces, un ejemplo: yo buscaba que, y me diera 0, pero si yo multiplico por -2 esta primera ecuación [señalando $4x + y = 0$] entonces, me va a dar $-8x - 2y = 0$, esto llegaría a $0 = 5$ [método de reducción como se muestra en la Figura 10] y <u>no me daría el despeje de una de las variables que es lo que busco.</u>

Figura 10

Respuestas Andrea, ***Tarea 1.***



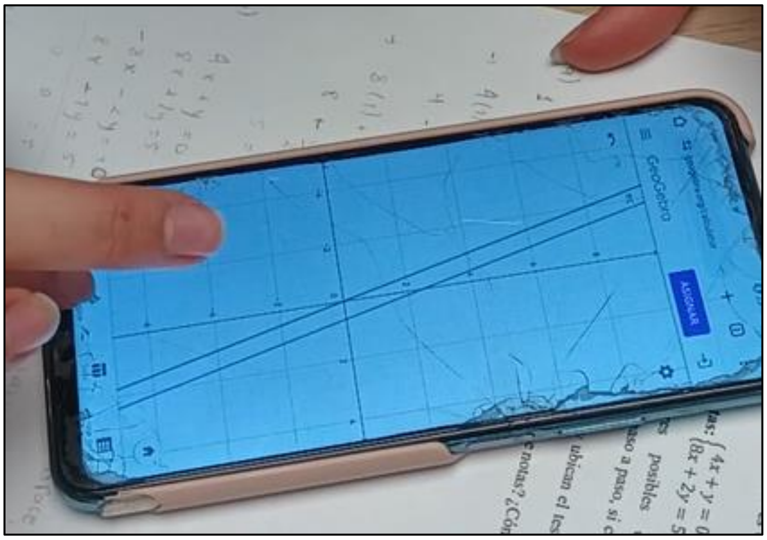
Andrea es consciente de que la manera más sencilla de abordar la Tarea 1 es hallar el conjunto solución del SEL dado, como menciona en el fragmento subrayado de rojo; puede determinar el tipo de solución y con ello descartar las coordenadas que no cumplen con las propiedades resultantes. Luego, elige el método de reducción y como se muestra en el fragmento subrayado de negro expone que al no llegar a una acción especifica de este tipo de métodos, solo se puede concluir que el sistema de ecuaciones dado no tiene solución. Una vez resueltos los ítems a y b de la Tarea 1 la entrevistadora agrega:

Entrevistadora: Para la pregunta c, puede hacerlo a mano, un software o graficador.

Andrea: […] en GeoGebra se ve mejor. [como se muestra en la Figura 11].

Figura 11

*Representación geométrica SEL **Tarea 1**, Andrea.*



Andrea: Bueno son paralelas, con razón algo me decía que no se iban a cruzar.

Entrevistadora: ¿Y con el despeje que realízate no se puede determinar la solución?

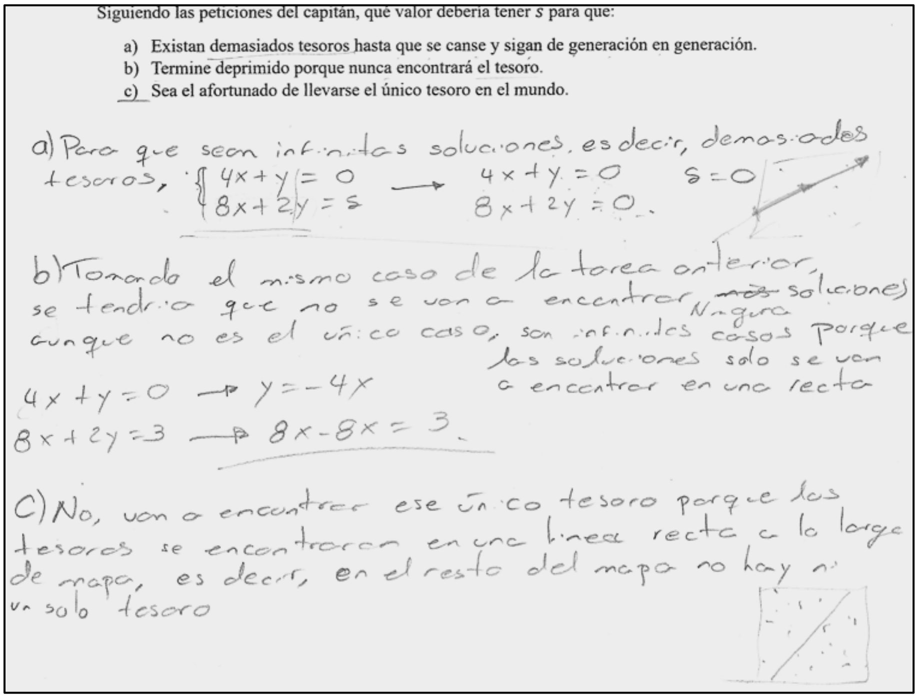
Andrea: Bueno, sí, es que no sabía cómo interpretarlo, pero ya con la gráfica esto de aquí [señalando el $5/2$ del despeje de y] es la distancia que hay entre las rectas, y que bueno son paralelas, es decir, no hay solución y los piratas perdieron el tiempo. [Ver Figuras 10 y 11].

En la conversación anterior, se evidencia que Andrea no reflexionó sobre la relación entre el SEL y su representación geométrica, lo que le impidió interpretar el resultado algebraico respecto a la representación geométrica de la solución, quedándose en una concepción acción.

Por otro lado, Arturo fue el único entrevistado que presentó esta concepción en la Tarea 2, pues decidió hallar a ensayo y error los posibles valores de s. A continuación, sus producciones:

Figura 12

Respuestas Arturo, ***Tarea 2.***


Siguiendo las peticiones del capitán, qué valor debería tener s para que:

a) Existan demasiados tesoros hasta que se canse y sigan de generación en generación.
b) Termine deprimido porque nunca encontrará el tesoro.
c) Sea el afortunado de llevarse el único tesoro en el mundo.

a) Para que sean infinitas soluciones, es decir, demasiados tesoros, $\begin{cases} 4x+y=0 \\ 8x+2y=s \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} 4x+y=0 \\ 8x+2y=0. \end{matrix}$ $s=0$

b) Tomando el mismo caso de la tarea anterior, se tendría que no se van a encontrar ~~más~~ Ninguna soluciones aunque no es el único caso, son infinitos casos porque las soluciones solo se van a encontrar en una recta

$4x+y=0 \longrightarrow y=-4x$
$8x+2y=3 \longrightarrow 8x-8x=3.$

c) No, van a encontrar ese único tesoro porque los tesoros se encontraran en una línea recta a lo largo de mapa, es decir, en el resto del mapa no hay ni un solo tesoro

Arturo: Bueno para que tenga demasiados tesoros, se supone que son infinitas soluciones, entonces tienen que estar las rectas sobrepuestas, entonces tienen que ser múltiplo la una de la otra, […] ya está cuadrado de tal manera que sean múltiplo. [refiriéndose a que desde el inicio se ve que $8x + 2y$ es dos veces $4x + y$] Se multiplica por 2 entonces el único que serviría es el 0, porque al multiplicar el dos por este cero [señalando el 0 de la ecuación $4x + y = 0$] $s = 0$. Para no encontrar el tesoro, pues poner la de la tarea anterior [es decir $s = 5$, porque comprobó que con ese valor el sistema no tiene solución] y la c no me acuerdo. (Ver Figura 12).

A partir del argumento anterior, se decide intervenir y agregar otra pregunta para analizar el tipo de razonamiento que Arturo presenta, pues hasta ahora resuelve la Tarea 2 con casos específicos:

Entrevistadora: Si no es el único caso, entonces ¿cómo podría generalizarlo? ¿Por qué dice que no es el único caso?

Arturo: Porque puede haber otros aparte del 5 donde sean paralelas.

Entrevistadora: ¿Y esos otros son algunos específicos o todos a excepción de uno?

Arturo: Específicos creo, no me acuerdo. Si soy capaz de resolver el c, soy capaz de resolver esa pregunta. [escribe las ecuaciones y toma otro caso específico para s, es decir, $s = 3$ y escribe la respuesta que considera correcta] Si uno grafica este primer caso [señalando el sistema $4x + y = 0$ y $8x + 2y = 0$] pues los puntos se van a mover en la recta, es decir las soluciones siempre iban a estar en esa recta, pero, por ejemplo, si se toma el 3, va a ocurrir lo mismo que con el 5, que siempre el x se va a cancelar y va a ser 0, entonces para mí, si tengo la gráfica [hace una recta y varios puntos dispersos alrededor de ella (Ver última gráfica de la Figura 12)] o sea no van a estar en esta recta.

Entrevistadora: Ok, y si vemos el sistema de ecuaciones lineales, que debería cambiar para que se cumpla que solo tenga una solución.

Arturo: Cambiar uno de estos, creo, bueno no sé [señalado los coeficientes que acompañan las variables de la ecuación $8x + 2y$]

Arturo piensa que, al determinar un sistema con única solución, la inquietud de las condiciones para un conjunto solución vacío se resolverá, como señala en el fragmento subrayado de rojo. El problema radica en que Arturo no toma en cuenta su propia sugerencia y sigue eligiendo casos específicos, los cuales dificultan la acción de notar los patrones entre los valores de s y el tipo de solución. Luego, no reflexiona o no alcanza a comprender a profundidad que los cambios algebraicos en las ecuaciones se relacionan con modificaciones en la representación geométrica, lo que lo lleva a una interpretación confusa del conjunto solución.

Como afirma Oliveros (2018) el estancamiento de estos estudiantes en esta concepción se presenta debido a la carencia de la interpretación del enunciado, y además por falta de estructuras previas, como lo son la del concepto de Vector y la interpretación matricial de un SEL. Esto los lleva a la aplicación de una serie de acciones sin mucho significado. Lo que evita que evolucionen sus construcciones sobre el concepto, además de limitar sus procedimientos y análisis en determinas situaciones.

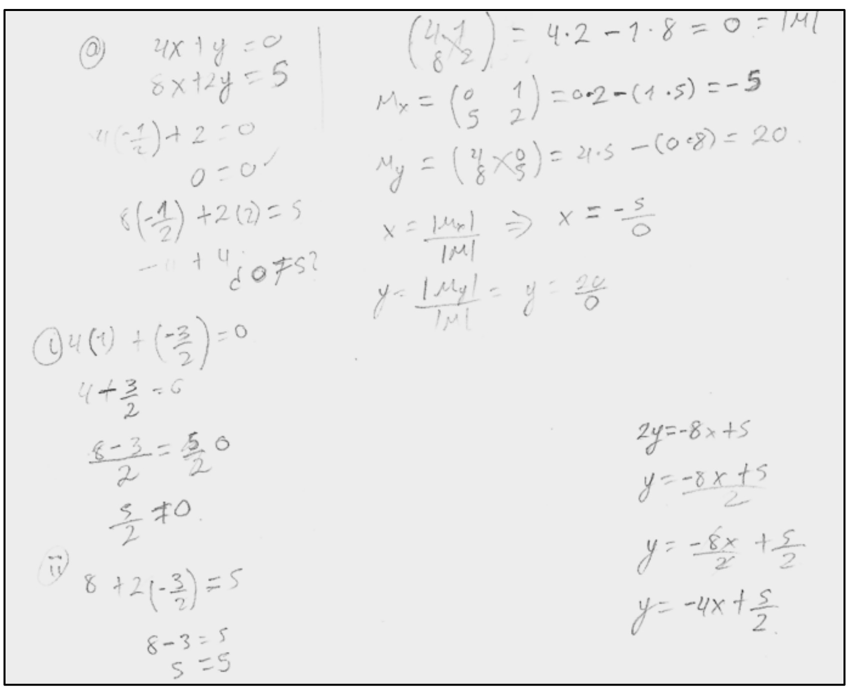
Estado intermedio entre la concepción Acción y Proceso

Este estado se considera en la descomposición genética como la falta de reflexión sobre el trabajo con ciertos elementos que presenta un problema. Por ejemplo:

Miguel: Quiero resolver el sistema por determinantes [Regla de Cramer (Ver Figura 13).] me dan división entre cero, y eso no se puede.

Figura 13

Respuestas Miguel, ***Tarea 1 (a).***



Entrevistadora: ¿Cómo interpreta ese resultado de la división entre cero?

Miguel: Pues, como no se puede dividir entre cero, es que aquí [señalando el sistema de ecuaciones dado] si multiplico por 2, me da esto [señalando que la ecuación $4x + y$ con la multiplicación se convierte en $8x + 2y$] como si fueran paralelas o sobrepuestas.

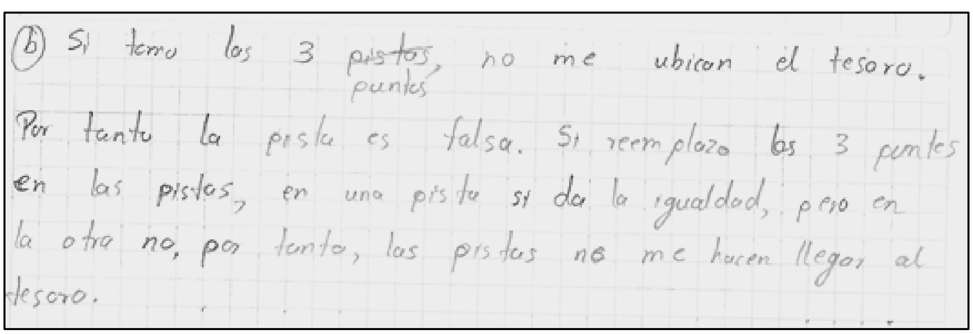
Entrevistadora: ¿Y cómo saber si son paralelas o sobrepuestas?

Miguel: Pues como le digo si multiplicó a ambos lados del igual por 2 me da $8x + 2y$, el problema es ese 5, debe ser cero, así estarían sobrepuestas y son infinitas soluciones; aunque primero hago esto mejor [empieza a verificar si los puntos dados son o no una posible solución del sistema dado] No, el sistema no tiene solución.

Miguel construye una concepción acción al verificar si las coordenadas dadas son o no solución, asegurando esta idea al resolver el SEL. Al comienzo tiene problemas con diferenciar rectas paralelas con rectas sobrepuestas asociadas a la representación geométrica de un SEL con infinitas soluciones. Más adelante, logra observar que al modificar los coeficientes de las ecuaciones varía el conjunto solución, pero no lo ve como una propiedad general de los sistemas de ecuaciones lineales, sino una anomalía de la Tarea 1 determinada por el contexto. Es decir, no piensa en el conjunto solución del SEL sino en la relación de la solución del ítem anterior, limitando su oportunidad de interiorizar las acciones ya presentes.

Figura 14

Respuestas Miguel, ***Tarea 1 (b).***


(b) Si tomo los 3 ~~pistas~~ puntos, no me ubican el tesoro. Por tanto la pista es falsa. Si reemplazo los 3 puntos en las pistas, en una pista si da la igualdad, pero en la otra no, por tanto, las pistas no me hacen llegar al tesoro.

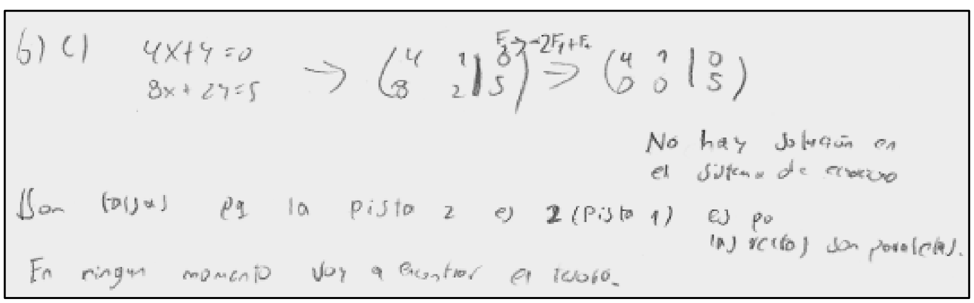
En síntesis, Miguel no entiende lo que significa la división entre cero; hasta que verifica las coordenadas y observa que ningún punto funciona, interpretando que la división entre cero aparece debido a los tres puntos dados. Aunque el estudiante intentó dar respuesta de la solución del problema contextualizado, confundió la verificación de los puntos dados con el conjunto solución del sistema y así supone que sí ningún punto de la lista es correcto es suficiente para dar solución al ítem b; donde asume que las pistas son falsas, es decir que el sistema no tiene solución como un error de las coordenadas dadas (Ver Figura 14).

Concepción Proceso del concepto SEL

Como se plantea en la descomposición genética, un estudiante con esta concepción podrá determinar sin realizar ninguna Acción externa, si un problema tiene o no solución con una correcta interpretación del mismo, como se muestra en la Tarea 1 donde Mauricio realiza la siguiente reflexión:

Figura 15

Justificación de Mauricio, ***Tarea 1.***



Entrevistadora: Aquí [señalando el ítem c)] puede graficar en un Software, hacer las gráficas a mano o simplemente dar la respuesta si así lo considera.

Mauricio: Ah, son paralelas.

Entrevistadora: ¿Cómo lo determinó?

Mauricio: Porque esta ecuación, [señalando la primera ecuación, $4x + y = 0$] multiplicándola por el escalar 2 me da está [señalando la segunda ecuación, $8x + 2y = 5$], bueno sin el 5, eso hace que las rectas sean paralelas y no haya solución. [Al responder el ítem b, lee la pregunta c] prácticamente ya respondí con esto [señalando la solución del sistema en la Figura 15] y pues ya dije que son paralelas. [Aun así decide agregar una última respuesta respecto al contexto de la Tarea 1].

Mauricio no acude a procedimientos extensos, ni cálculos extras para determinar que el sistema de ecuaciones dado corresponde a rectas paralelas y por ende su conjunto solución es vacío, lo cual es característico de esta concepción. Además, su argumento en la Figura 15 es sencillo y acertado: "Son falsas por que la pista 2 es dos veces la pista 1, las rectas son paralelas. En ningún momento voy a encontrar el tesoro".

Asimismo, Sebastián realizó la siguiente reflexión en la misma Tarea:

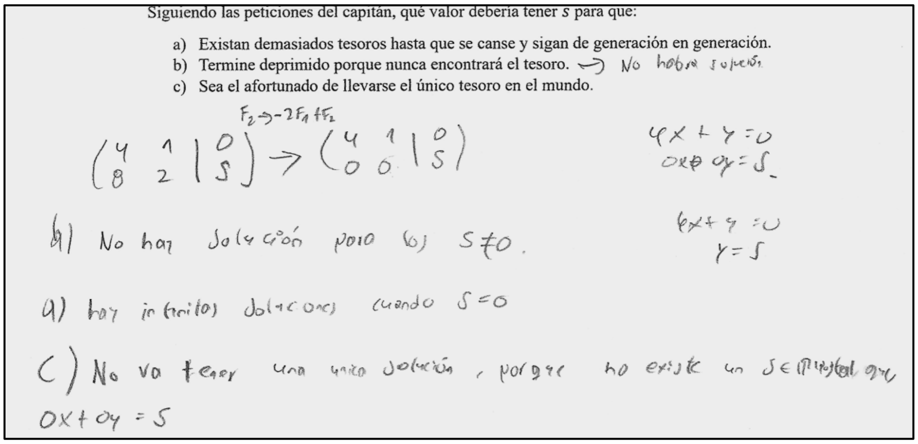
Sebastián: Pues, técnicamente lo que puedo concluir es que no hay intersección entre las dos ecuaciones. Sí, porque estoy llegando [señalando $0 = 5$ (ver Figura 9)] a que técnicamente no se van a tocar. Bueno y eso ya lo había sospechado porque si yo tomo el $4x + y$ y luego lo multiplico por 2 entonces obtengo $8x + 2y = 5$, sí, entonces lo que estoy viendo es que uno es, bueno al multiplicarlo por un escalar en este caso el 2, estoy llegando a la otra ecuación. [señalando $8x + 2y = 5$].

Mauricio y Sebastián son capaces de comprender antes de graficar que la solución del sistema representa la intersección de las rectas dadas y en este caso no hay dicha intersección; hecho que confirman al graficarlas y notar que son paralelas, relacionando el resultado analítico de un sistema sin solución con la representación geométrica.

Ahora bien, Mauricio presentó esta concepción con otro tipo de Tarea, el procedimiento y argumentos se presentan a continuación:

Figura 16

Respuestas Mauricio, ***Tarea 2.***


Siguiendo las peticiones del capitán, qué valor debería tener s para que:

a) Existan demasiados tesoros hasta que se canse y sigan de generación en generación.
b) Termine deprimido porque nunca encontrará el tesoro. → No habrá solución
c) Sea el afortunado de llevarse el único tesoro en el mundo.

$F_2 \to -2F_1 + F_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & s \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{array}\right)$$

$4x + y = 0$
$0x + 0y = s$

b) No hay solución para los $s \neq 0$.

$y = s$

a) hay infinitos soluciones cuando $s = 0$

c) No va tener una única solución, porque no existe un $s \in$ ... que $0x + 0y = s$

Mauricio: [Lo primero que hace el estudiante es interpretar el contexto y anota frente al ítem b) “No habrá solución” (ver Figura 16)]
Pues no hay solución del sistema. [Procede a escribir la matriz asociada al sistema y se guía del resultado de la primera Tarea, lee los ítems y decide comenzar por la b) pues la asocia con la solución del SEL de la Tarea 1 y sin decir nada anota “No hay solución para los s diferentes de 0”] Haber si es 0, me queda que $4x + y = 0$, o sea que $y = -4x$ es decir que va a tener infinitas soluciones, la a). La otra es que sea el afortunado […] en ningún momento ¿no?

Entrevistadora: ¿Por qué piensa que en ningún momento?

Mauricio: Tendría que haber dado aquí un uno [señalando la segunda componente de la diagonal principal de la matriz aumentada reducida (ver Figura 16)].

Entrevistadora: ¿Cómo relaciona está matriz con el sistema, que información nos da?

Mauricio: No sé, pero supongamos que queda $0x + 0y = s$.

Entrevistadora: ¿Qué pasaría si le cambió los coeficientes?

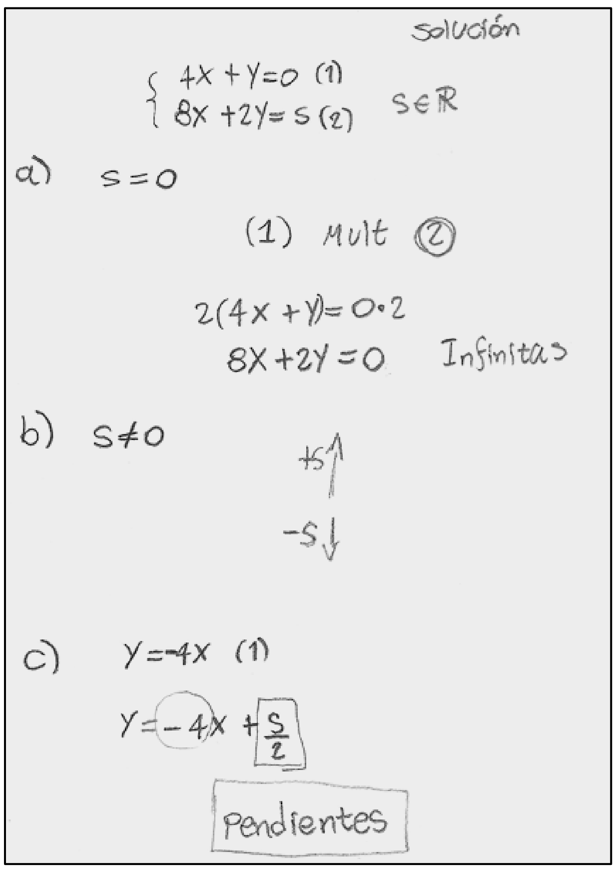
Mauricio: Si le cambió los coeficientes, por ejemplo, digamos que esta, $y = s$. Ahí ya habría una solución. Porque y sería s y entonces la x sería $-s/4$ [hace este análisis a partir de reemplazar la y en la primera ecuación], tendría solución, única solución.

Mauricio observa los patrones que surgen al cambiar los coeficientes y compararlos con la representación geométrica del sistema de ecuaciones; luego, entiende que no sirve de nada cambiarle el parámetro *s* para que haya una única solución, pero olvida justificar la presencia de una fila de ceros y su relación directa con los coeficientes y así determinar con mayor facilidad las condiciones que tiene que cumplir el SEL en cada situación.

En esta misma Tarea el estudiante Sebastián fue muy claro en sus procedimientos y argumentos evidenciando de manera casi inmediata esta concepción:

Figura 17

Respuestas Sebastián, ***Tarea 2.***



Sebastián: [lee el enunciado y los ítems] Esto está interesante, bueno entonces resolvamos [reescribe el sistema de ecuaciones dado y lee el ítem a] pues técnicamente s tendría que tomar el valor de 0.

Entrevistadora: ¿Por qué?

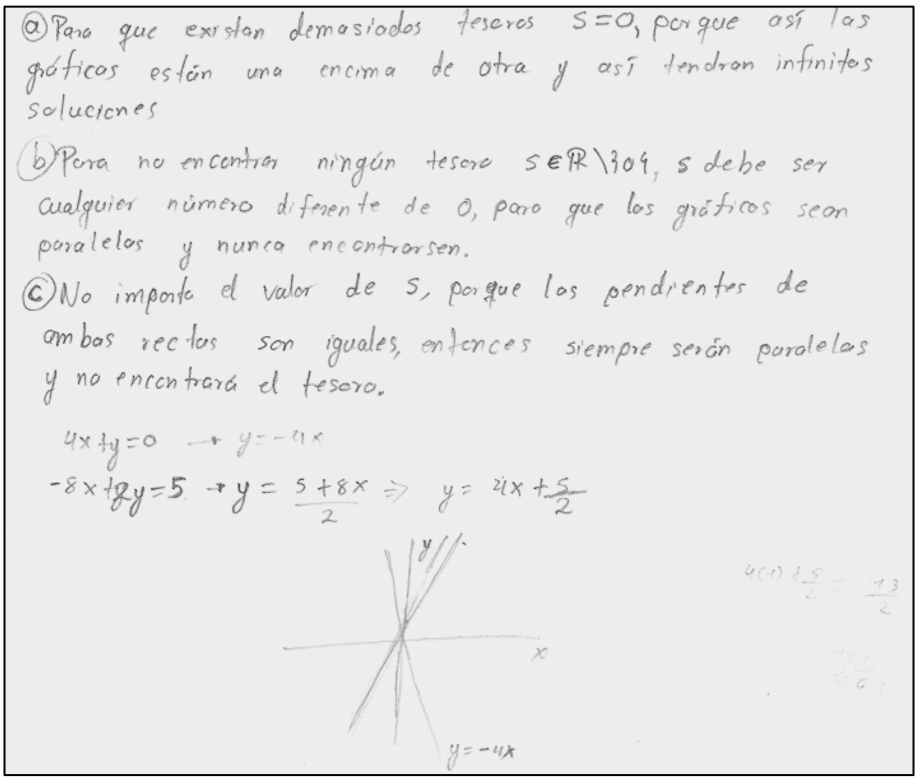
Sebastián: Porque, cayendo en cuenta con lo de la anterior [es decir la Tarea 1] la única manera de que de una u otra manera sean la misma recta es porque toma, llamemos ecuación 1 [denotación para $4x + y = 0$] multiplicada por 2, tenemos que $8x + 2y = 0$ me queda así, es decir, <u>la única manera de que sean la misma ecuación al momento de multiplicarla por 2 es que sea 0 y habrían infinitas soluciones, porque claro ese 0 lo que me indica es que no estoy haciéndole ningún tipo de traslación a esa recta</u>, en cuanto a las gráficas. Ahora en la b, pues s tomaría, bueno la condición es que s sea diferente de 0, porque de igual manera como habíamos analizado en la tarea anterior ese 5 lo que estaba haciendo era subirlo o bajarlo, es decir, <u>en general este s lo que nos está diciendo es que en la gráfica yo o lo voy a trasladar hacia arriba s unidades o si lo voy a bajar s unidades</u> [realiza flechas en la hoja para explicar lo que dice (ver Figura 17)] y no veo más restricciones, puede incluso ser $0{,}05$ o una fracción o un infinitesimal, pero siempre va a tener una traslación [relacionando traslación, paralelismo, y finalmente ninguna solución del sistema] para el único tesoro, es decir, debo tomar $y = -4x$ que es la primera ecuación, bueno y $y = -4x + \frac{s}{2}$ tiene que haber un punto en común, lo que puedo decir con seguridad es que no, diría que no se va a poder encontrar un valor para s el cual el SEL sea de solución única, pero para que por lo menos la rectas se intersequen no va a haber una condición solo sobre s, <u>lo que si va a influir son las pendientes, esas inclinaciones de las rectas,</u> entonces la única condición para que haya una intersección es que modifiquemos la pendiente de alguna de las rectas [anota lo que dice y encierra con un círculo -4 de la segunda ecuación, el cuál es la pendiente de la recta] pero de nuevo si modificamos s nos va a seguir realizando la misma traslación, siguen siendo paralelas. [Ver Figura 17].

Sebastián realiza una descripción detallada de la solución de la Tarea 2 como se evidencia en las producciones anteriores, pero hay tres fragmentos subrayados que son clave en la conversación; pues en cada uno menciona las transformaciones que sufren las ecuaciones para determinar el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales pedido, enfatizando en la importancia de relacionar el resultado algebraico y la representación geométrica del SEL.

Estos argumentos son similares a los presentados por Miguel:

Figura 18

Respuestas Miguel, ***Tarea 2.***



Miguel:	Una pregunta, ¿el valor de *s* puede ser un valor específico o uno que cumpla para cada uno de estos? [señalando los ítems a, b y c].
Entrevistadora:	La idea es determinar que valores debe tomar *s* para que cumpla con cada una de las condiciones.
Miguel:	Bueno, para la primera *s* debería ser 0 [escribe su argumento, no habla, pasa al ítem b, no habla escribe en silencio (Ver Figura 18)] Una pregunta, ¿yo no puedo modificar las pistas?
Entrevistadora:	¿Por qué desea modificarlas?

Miguel: Porque como tengo la misma pendiente, siempre van a ser paralelas o pues la misma, entonces si le sumo un número constante eso solo me da la distancia entre las rectas, y si le sumo cero, pues quedan iguales, entonces como tienen la misma pendiente siempre van a ser paralelas, por lo tanto, no va a encontrar, sin importar quien sea s, no va a encontrar un tesoro. Por eso preguntó ¿las pistas las puedo modificar?

Entrevistadora: Si, modifíquelas y veamos que resulta.

Miguel: Es que dice que valores toma s, pero en este caso s no me importa, lo que me importa es la pendiente.

Miguel visualiza el sistema de ecuaciones dado geométricamente, lo que le permite determinar qué términos de la ecuación debe modificar para que cumpla con las condiciones pedidas, sin necesidad de resolver el sistema o asignarle valores específicos al parámetro s.

Es vital aclarar que los estudiantes que alcanzan esta concepción ya han pasado por la construcción de la concepción Proceso de ecuaciones equivalentes; donde reconocen que las ecuaciones que son múltiplo escalar entre ellas tienen las mismas soluciones y por tanto son infinitas (producciones referentes al ítem *a* de la Tarea 2). Es decir, las soluciones de las ecuaciones equivalentes son la misma y que la transformación que cambia los coeficientes (múltiplo escalar) de las variables no altera al conjunto solución.

Para la Tarea 3, Mauricio cometió errores aritméticos y algebraicos en el método de resolución (Ver Figura 19), pero logra reflexionar sobre los resultados de su error de manera correcta, así:

Figura 19

Parte I respuestas Mauricio, ***Tarea 3.***

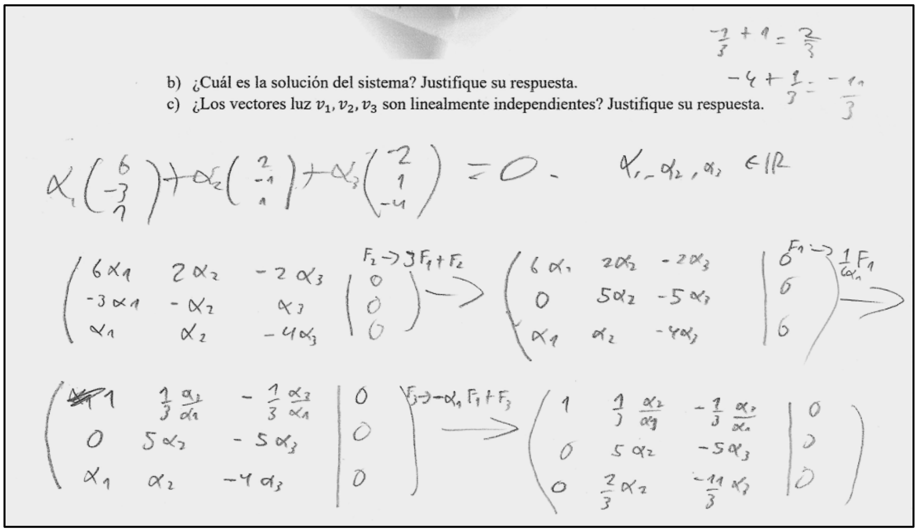
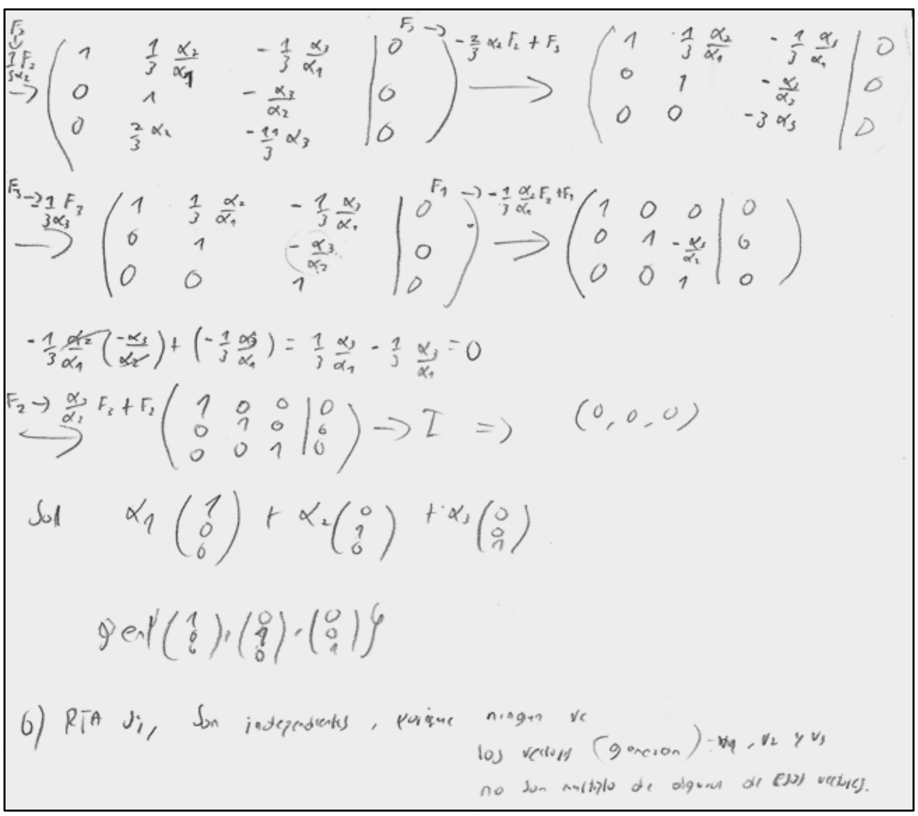


Figura 20

Parte II respuestas Mauricio, ***Tarea 3.***



Mauricio: O sea, apagado es que estas cosas [señalando los vectores que escribió] al combinarlas me den 0. [luego, iguala los vectores a cero y los acompaña de parámetros $\alpha_n, n \in \{1, 2, 3\}$] Habrá una que sea múltiplo de otra por un escalar. Haber ahí parece que esta cosa está cortando con una recta [señalando la representación geométrica del sistema resultante de la Tarea 3]. Mmmm, no sé, no sé lo que voy a hacer [comienza a escribir la matriz asociada al sistema junto con los parámetros presentados en la Figura 16] Voy a hacer Gauss-Jordan pero no me acuerdo si es así, voy a hacerlo.

Entrevistadora: ¿El método de Gauss-Jordan se realiza con los parámetros o con los coeficientes que los acompañan?

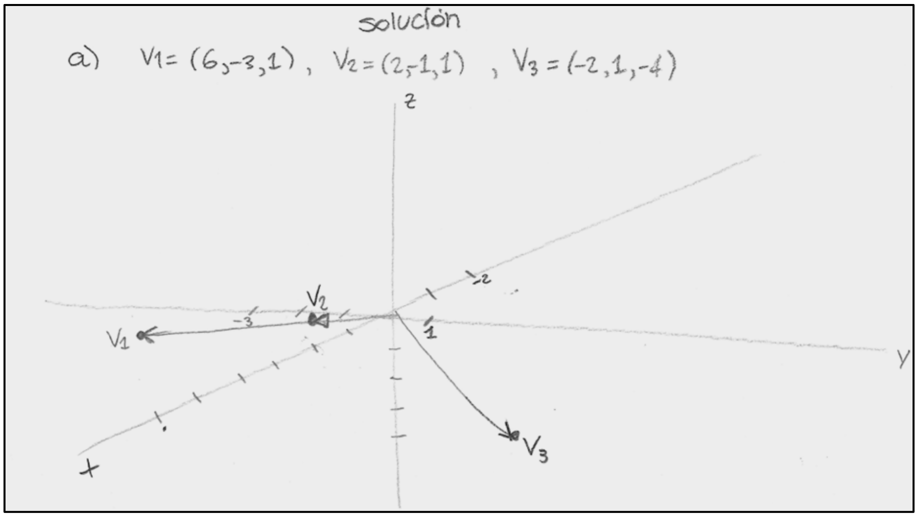
Mauricio: Se supone que debe dar lo mismo. [refiriéndose a los resultados con solo los reales y los resultados usando los parámetros] Dio la identidad, es decir [mira el comienzo de los resultados] ay no la embarre debe ser α, o bueno, <u>digamos si fueran x, y, z, queda $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. Esa es la identidad, o sea que van a ser independientes.</u> [Ver Figura 20]

Mauricio evidencia esta concepción, aunque no haya dado una solución correcta a la Tarea 3, destacando que el contexto de la Tarea es congruente con la construcción de las estructuras. El estudiante recuerda que tiene que resolver un sistema y lo asocia con matrices y un método específico, pero no recuerda si es junto con los parámetros o no. Al no recordar este detalle comete un error en los cálculos y por ello, todo el procedimiento le queda incorrecto, lo que lo lleva a una interpretación errónea de la solución del sistema dado y el contexto de la Tarea. Aunque cabe resaltar que la interpretación de los resultados que le dieron fue acertada, pues entiende el valor que deben tomar los parámetros para que el sistema sea linealmente independiente (ver fragmento subrayado).

Como se presenta en el modelo cognitivo los estudiantes construyen una concepción Proceso usando algún resultado teórico o cuando logran pensar en un SEL desde una interpretación geométrica, matricial, por determinantes o rango, y entiendan que lo importante es interpretar el contexto para darle solución a un problema. Por ejemplo:

Figura 21

*Representación geométrica de vectores (**Tarea 3**), Sebastián.*

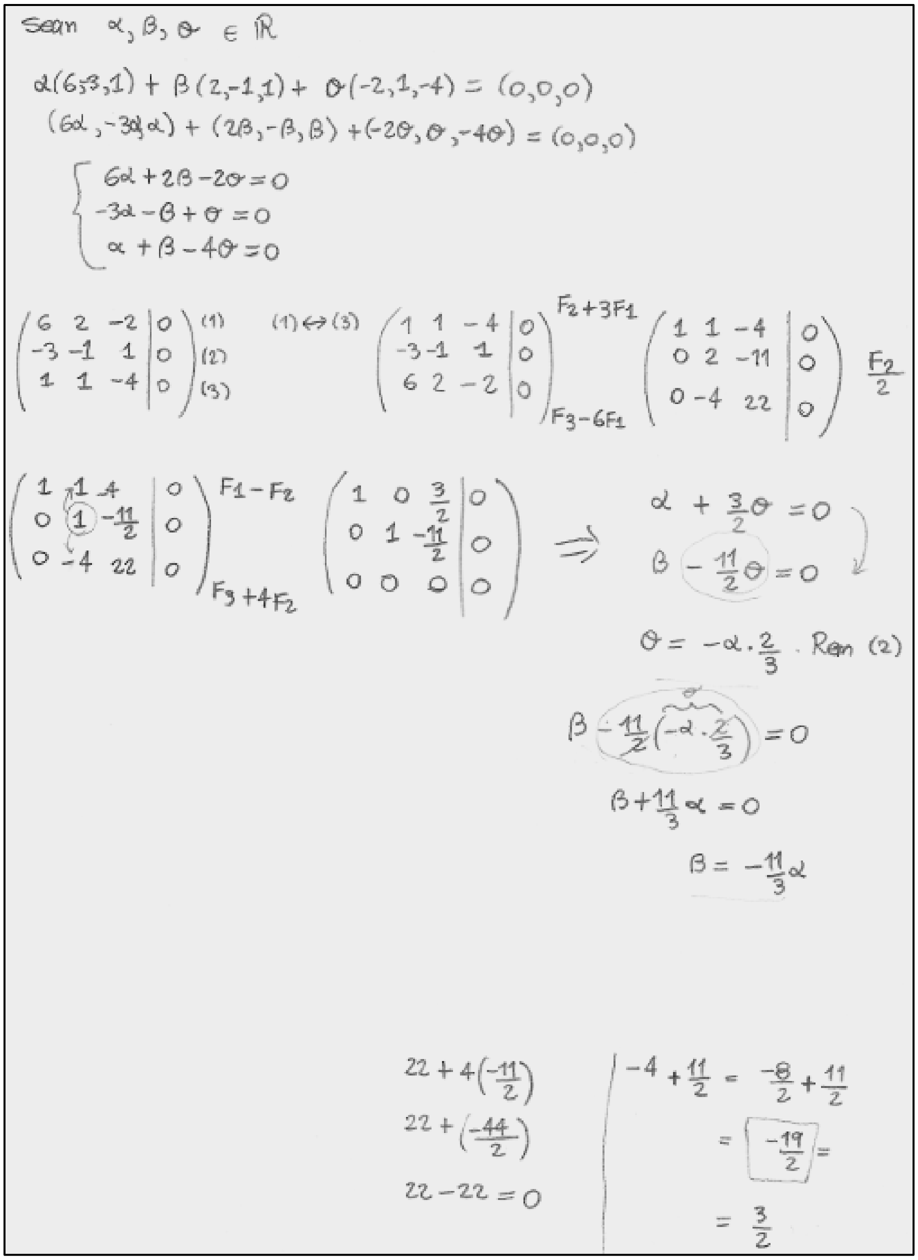


Sebastián:	[Lee el enunciado, el ítem a y gráfica los vectores dados (ver Figura 21)] Y si de alguna u otra manera es esto mismo que tenemos aquí [comparando la representación geométrica de los vectores y señalando la representación geométrica del SEL dado] Bueno, es posible apagar la iluminación al combinarlas, es decir que no llegue luz ¿cierto?
Entrevistadora:	Sí ¿cómo interpreta el hecho de apagar por completo el sistema?
Sebastián:	Pues, yo interpreto, o sea que se apaguen todas las luces, que se anulen todas las luces en pocas palabras, eso implicaría, bueno que técnicamente la combinación lineal de todos esos vectores me debe dar $(0,0,0)$ [realizando la combinación lineal igualada al vector nulo].

Para Sebastián la gráfica de la Figura 21 fue muy importante para comprender el tipo de solución del sistema dado, que se veía en la representación geométrica de la Tarea 3 y pensar en el contexto gráficamente; para finalmente determinar que la única posibilidad para que el sistema se apagará fuera igualar la combinación lineal de los vectores al vector nulo. Sebastián fue uno de los entrevistados que hablo y escribió directamente el SEL, haciendo evidente la conexión entre los SEL como herramienta en un problema de dependencia lineal (ver Figura 22).

Figura 22

Respuestas Sebastián, ***Tarea 3.***



Sean $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$

$\alpha(6,-3,1) + \beta(2,-1,1) + \theta(-2,1,-4) = (0,0,0)$

$(6\alpha, -3\alpha, \alpha) + (2\beta, -\beta, \beta) + (-2\theta, \theta, -4\theta) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} 6\alpha + 2\beta - 2\theta = 0 \\ -3\alpha - \beta + \theta = 0 \\ \alpha + \beta - 4\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2+3F_1 \\ \\ F_3-6F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -11 & 0 \\ 0 & -4 & 22 & 0 \end{array}\right) \frac{F_2}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & 0 \\ 0 & -4 & 22 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1-F_2 \\ \\ F_3+4F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha + \frac{3}{2}\theta = 0 \\ \beta - \frac{11}{2}\theta = 0 \end{array}$$

$\theta = -\alpha \cdot \frac{2}{3}$. Reem (2)

$\beta - \frac{11}{2}\left(-\alpha \cdot \frac{2}{3}\right) = 0$

$\beta + \frac{11}{3}\alpha = 0$

$\beta = -\frac{11}{3}\alpha$

$22 + 4\left(-\frac{11}{2}\right)$

$22 + \left(-\frac{44}{2}\right)$

$22 - 22 = 0$

$-4 + \frac{11}{2} = -\frac{8}{2} + \frac{11}{2}$

$= \boxed{-\frac{19}{2}} =$

$= \frac{3}{2}$

Sebastián: Es casi como decir que sean libres, no recuerdo bien, pero va por ahí la idea.

Entrevistadora: ¿Y qué es que sean libres?

Sebastián: Que los escalares al final me den cero, o bueno si un vector es libre es porque no es combinación lineal de los otros. Entonces claro, para poder hallar la solución del sistema podría intentar hacerlo por sustitución, pero no sé si sea tan cómodo, entonces lo que voy a querer armar es la matriz con los coeficientes manteniendo el orden y la dejo como matriz aumentada de una vez [resuelve el sistema con el método de Gauss-Jordan y explica los cambios que realiza por fila (ver Figura 22)] Es decir, llegue a que no me va a dar la identidad, lo cual me está diciendo que un vector a ser múltiplo escalar de otro vector.

Entrevistadora: ¿Y esa conclusión también la podemos sacar desde la gráfica o no?

Sebastián: Pues, según la gráfica la solución va a ser esto [delineando la recta que corta a los dos planos en la representación geométrica dada] y bueno también lo pude haber visto en el momento en que grafique los vectores, que uno es múltiplo escalar del otro [señalando los vectores que grafico en la Figura 21] De igual manera, no son linealmente independientes.

Entrevistadora: ¿Hay algún parámetro que quedó libre?

Sebastián: Mmm, yo diría que β y θ quedan dependiendo de los valores que α tome. Y bueno, según yo con la última pregunta, los vectores no serían linealmente independientes porque llegamos a la conclusión de que un vector es múltiplo escalar de otro, es decir que necesariamente para que fueran linealmente independientes debimos haber llegado a la matriz identidad.

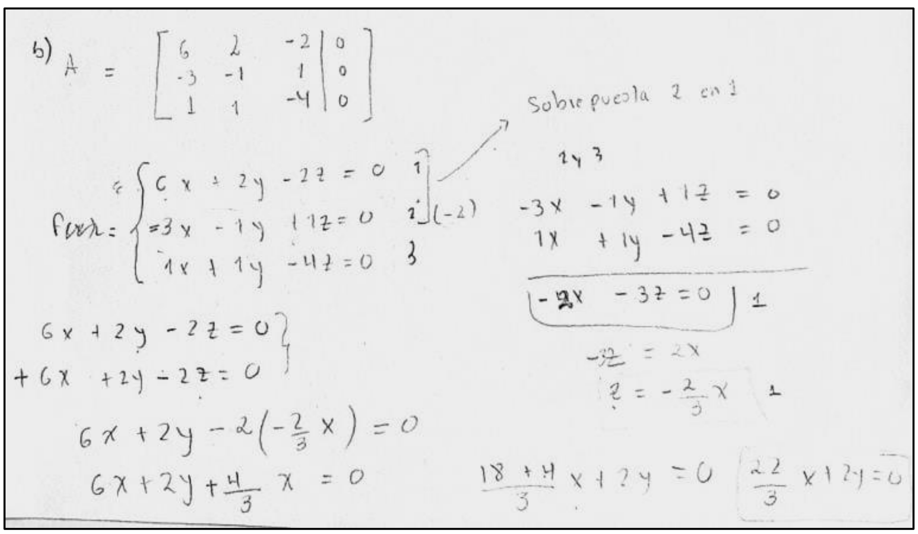
A través del fragmento subrayado de rojo Sebastián puntualiza que la Tarea 3 nos lleva a ver si los vectores son linealmente independientes o dependientes; donde realiza la combinación lineal, la iguala al vector nulo y determina el sistema de ecuaciones lineales resultante como muestra la Figura 22. Por otro lado, los fragmentos subrayados de negro nos indican que Sebastián interpretó que, si la matriz aumentada reducida no llega a ser la identidad, uno de los vectores que conforman la matriz asociada es múltiplo escalar de otro; y por tanto, el conjunto de vectores no es linealmente independiente, lo que refuerza la interpretación geométrica que ya había realizado.

Discusiones como la anterior, son las que se esperaban en la investigación, donde el estudiante logra construir la concepción Proceso de los SEL, al coordinar los Procesos de SEL usando la representación matricial y la interpretación geométrica.

Sin embargo, hay otro tipo de argumentos que también son importantes en la investigación, y permiten construir esta concepción. Cuenta de ello son las siguientes discusiones guiadas, pues son razonamientos que los estudiantes evidencian junto con preguntas externas a las propuestas en la Tarea 3:

Figura 23

Parte I respuestas Andrea, ***Tarea 3.***



Andrea: Yo creo que, para apagar el sistema, depende de la dirección de los vectores, pero o sea si apago los focos, pues obvio se apaga todo ¿no? ¿Estas son las ecuaciones cierto? [señalando la representación geométrica del sistema de ecuaciones dado y procede a leer los ítems b y c] Según yo debería ubicarlos algo así, voy a utilizar matrices no sé por qué [escribiendo la matriz asociada al sistema (ver Figura 23)] pero, espere si dan tres vectores, ¿por qué solo hay dos ecuaciones?

Entrevistadora: ¿Cuántas ecuaciones debería haber?

Andrea: Pues tres cada una relacionada con un vector, pero en la gráfica no están.

Entrevistadora: ¿Qué crees que ocurrió con una de las ecuaciones? ¿Cuáles son las posibilidades para que no se vea?

Andrea: Que no exista, aunque no puede ser, porque ahí está el vector o de pronto este paralelo a uno de esos y por eso no se ve.

Entrevistadora: En la imagen están todos los planos, entonces ¿qué otra opción hay?

Andrea: Oooh, jum, entonces está sobrepuesto.

Entrevistadora: ¿Y que significa que estén sobrepuestos?

Andrea: Que sean iguales, pero ahora tengo que hallar las ecuaciones, volvamos aquí [señalando la matriz que escribió] me falta poner que va luego de los vectores, pero no sé qué es.

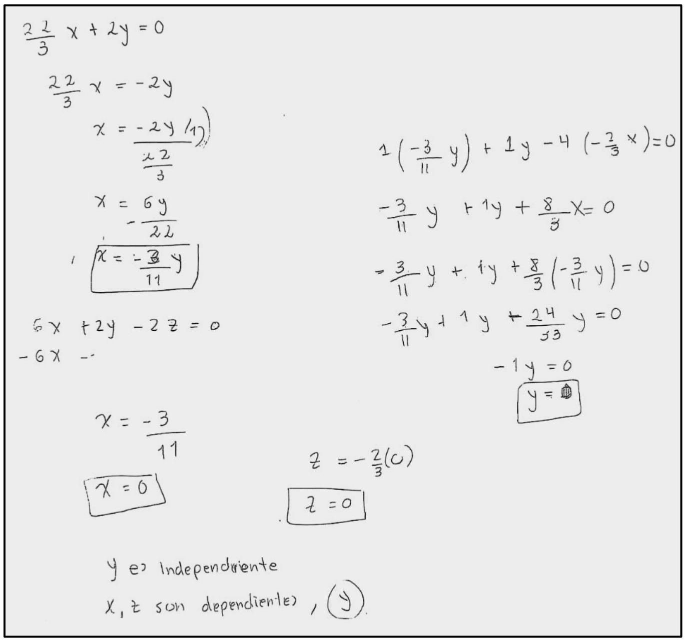
Entrevistadora: Ok, recuerda que dijiste que, si apagábamos los focos, se apagaba todo, entonces ¿qué crees que va ahí?

Andrea: Pues están nulas, será poner 0 [escribiendo una última columna de ceros y determinando el sistema de ecuaciones lineales en la Figura 23].

En la primera parte de los resultados Andrea está empeñada en ubicar los vectores dados en una matriz sin darle significado a lo que está haciendo. Al comienzo se pensó que Andrea estaba en una concepción Acción de SEL, pero al generar más preguntas se iba haciendo presente la concepción Proceso de SEL en esta Tarea. A continuación, se observa dicho avance:

Figura 24

Parte II respuestas Andrea, ***Tarea 3.***



Andrea: Jum, creo que no voy a usar la matriz, porque siempre se me dificultó usar Gauss-Jordan, voy a hacerlo por otro método. [usando el método de reducción y llegó a la ecuación que era múltiplo escalar de otra (Ver Figura 24)] terminé, bueno y es igual a cero, o sea esa es la variable independiente y x, z dependen de y. Jum, ahora ¿los vectores son independientes y cómo sé eso?

Entrevistadora: ¿Para qué usó los vectores?

Andrea: Para hallar el sistema y encontrar una solución.

Entrevistadora: Ok, encontró una solución del sistema y de ella que puede determinar.

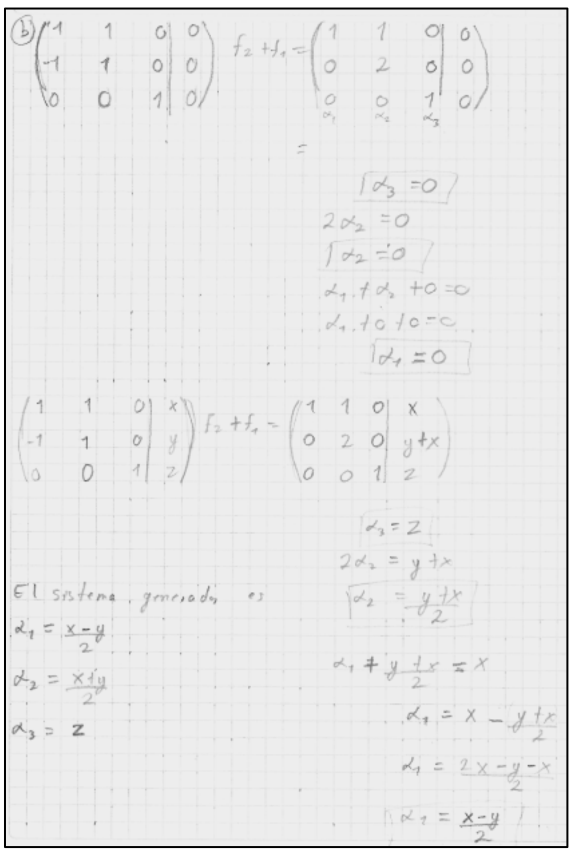
Andrea: Pues que x y z dependen de y, entonces supongo que los vectores no son linealmente independientes.

Para Andrea su mayor dificultad era emplear un método, más no interpretar el resultado de este. Cuando la y le dio 0, le permitió ver que la variable en cuestión no depende de las otras para satisfacer el sistema de ecuaciones y con ello concluyó que los vectores no eran linealmente independientes. Recordemos que fue una de las pocas que reconoció el SEL en la Tarea 3 y lo escribió explícitamente, aunque sus producciones revelan una falta de formalización en la notación.

Por otra parte, la interpretación y construcción de esta concepción se nutre cuando el estudiante puede entender que diferentes situaciones como las que se pueden encontrar en un problema de Combinación lineal, Base o Conjunto generador se pueden solucionar con un planteamiento adecuado y solución de un SEL. Por consiguiente, se presentan las siguientes producciones:

Figura 25

Respuestas Miguel, ***Tarea 4.***



Miguel: A ver si en un sistema de ecuaciones 2×2 las rectas son perpendiculares cuando la multiplicación de las pendientes es igual a -1. Aunque eso ¿no tiene que ver con el producto punto?

Entrevistadora: Si, pero ¿cuánto debería dar el producto punto?

Miguel: Mmm, yo me guio del -1, aunque como es otro espacio, creo que tiene que ver con los ángulos y algo de cero.

Entrevistadora: Si, el producto punto debe dar cero, porque la definición dice que se deben multiplicar las magnitudes por el coseno del ángulo entre ellos ¿y qué ángulo tienen si son perpendiculares?

Miguel: De 90°, aaaah y $cos\ (90°) = 0$, de ahí sale el cero.

Entrevistadora: Si, ahora comprueba si los vectores son o no perpendiculares entre ellos.

Miguel: Si son perpendiculares [lee el ítem c] sí.

Entrevistadora: ¿Por qué, describen cualquier posición?

Miguel: No sé, algo me dice que así es, no me acuerdo cómo saber si es un conjunto generador, supongo que tengo que resolver otro sistema, pero ahora con Gauss-Jordan [no completa el procedimiento, pero hace sustituciones y concluye que son linealmente independientes] ahora, se igualan a x, y, z creo.

Entrevistadora: Si, vamos a ver como es el sistema generador.

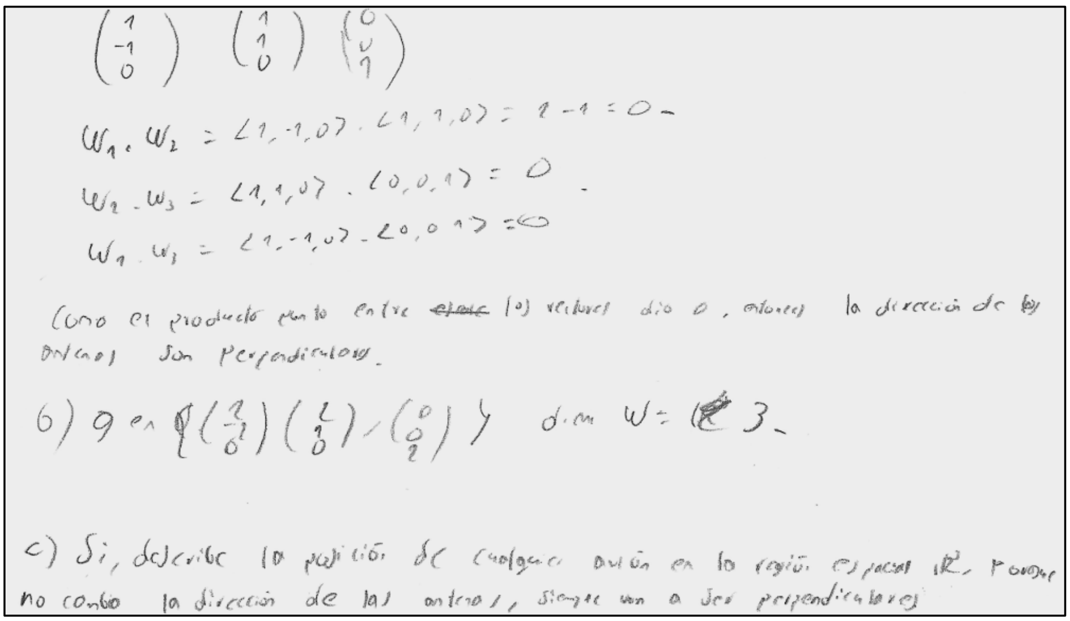
Miguel: Bueno, supongo que estos de aquí conforman el sistema generador [señala los resultados de cada parámetro en la Figura 25].

La construcción de esta concepción en Miguel no fue directa, iba surgiendo a medida que se le realizaban preguntas. Miguel llega a comprender la conexión entre la operación matemática y la propiedad geométrica, respecto al cero en el resultado del producto escalar, aunque en ningún momento se dirige directamente al SEL. Es consciente de que existen unos escalares, que son necesarios para determinar el conjunto generador, es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales entre los vectores $w_1 = (1, -1, 0), w_2 = (1, 1, 0), w_3 = (0, 0, 1)$ y además implícitamente sabe que debe darle solución a los sistemas $\alpha_1(1,-1,0)+\alpha_2(1,1,0)+\alpha_3(0,0,1)=(0,0,0)$ y $\alpha_1(1,-1,0)+\alpha_2(1,1,0)+\alpha_3(0,0,1)=(x,y,z)$.

Por otro lado, Mauricio y Sebastián tienen claro que para cumplir con la ortogonalidad el producto escalar debe ser cero y evidencian una concepción Objeto de combinación lineal y una concepción Proceso de SEL, al determinar que el conjunto de vectores cumple con las condiciones necesarias para ser una base del espacio como se esperaba desde el análisis a priori:

Figura 26

Respuestas Mauricio, ***Tarea 4.***



Mauricio: [leyendo el enunciado] ortogonales, sería mirar si el producto escalar es 0. Primero consigo la base, pero ¿qué tengo que hacer con esa base? [se queda pensando, pero no dice nada y luego hace el producto escalar, comprobando la ortogonalidad. Lee el ítem b] Si sé que hacer, pero como lo hago jum.

Entrevistadora: Puede explicar con palabras que se tiene que hacer o a dónde quiere llegar.

Mauricio: Espere pienso, aah $\mathbb{R}^3$, o sea si esa cosa [refiriéndose a la base] me genera todo $\mathbb{R}^3$, bueno estoy mirando si es base.

Entrevistadora: Y para que sea base ¿qué tiene que cumplir?

Mauricio: Para que sea base, la combinación lineal de esos tres jum [señalando los vectores].

Entrevistadora: ¿Qué tiene que pasar con la combinación lineal?

Mauricio: Tiene que ser igual a cero.

Entrevistadora: Las antenas, bueno los vectores, tienen que ser ortogonales y ¿qué propiedad deben cumplir para que sean base?

Mauricio: ¿Qué sean base? ... que no sean múltiplo escalar del otro.

Entrevistadora: Es decir, … que sean …

Mauricio: Linealmente independientes. Bueno ahí ya se [mirando la hoja] que ninguno va a ser, no va a haber ninguno múltiplo el uno del otro.

Entrevistadora: ¿No es necesario hacer algún cálculo o procedimiento?

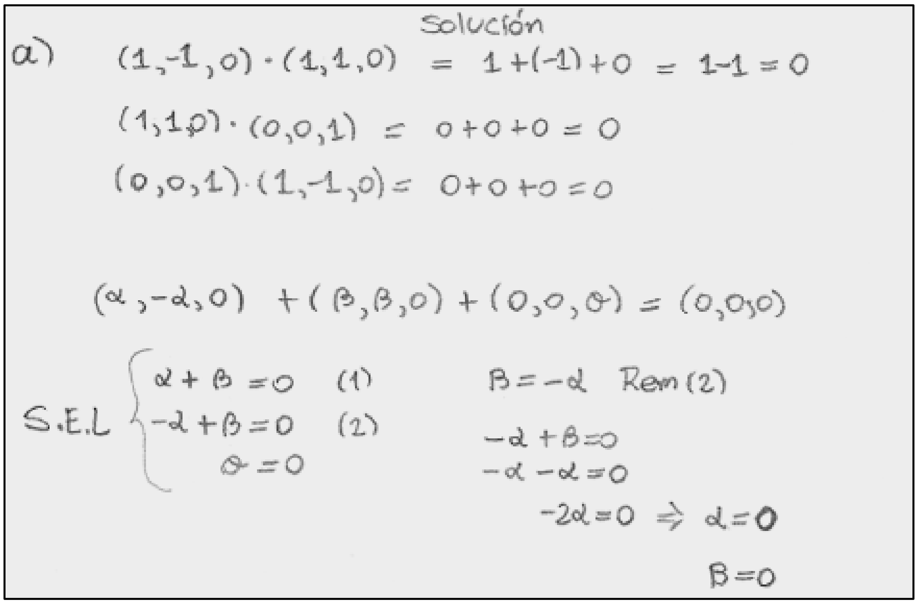
Mauricio: No, ahí se ve, y como son linealmente independientes, esos son base. [Ver Figura 26]

Mauricio reflexiona sobre las propiedades que deben cumplir los vectores para que sean linealmente independientes y no recurre a cálculos para verificar. Incluso no menciona directamente que se forma un SEL, pero es consciente de que para que un conjunto de vectores sea base, tienen que ser independientes entre ellos, idea que desarrolla implícitamente.

Contrario a la reflexión que realiza Sebastián de los mismos ítems de la Tarea 4, donde realizó la combinación lineal y determino el SEL asociado (ver Figura 27); afirma que al igualar la combinación lineal con el vector nulo, se están considerando todas las alternativas de solución, lo que permite establecer que el conjunto (w_1, w_2, w_3) es linealmente independiente y resuelve el sistema $\alpha(1,-1,0)+\beta(1,1,0)+\theta(0,0,1)=(x,y,z)$, formalizando el sistema generador del espacio $\mathbb{R}^3$ como se muestra en la Figura 28.

Figura 27

Parte I respuestas Sebastián, ***Tarea 4.***



Solución

a) $(1,-1,0)\cdot(1,1,0) = 1+(-1)+0 = 1-1=0$

$(1,1,0)\cdot(0,0,1) = 0+0+0=0$

$(0,0,1)\cdot(1,-1,0) = 0+0+0=0$

$(\alpha,-\alpha,0)+(\beta,\beta,0)+(0,0,\theta)=(0,0,0)$

$$\text{S.E.L}\begin{cases}\alpha+\beta=0 & (1)\\ -\alpha+\beta=0 & (2)\\ \theta=0\end{cases}$$

$\beta=-\alpha$ Rem (2)

$-\alpha+\beta=0$

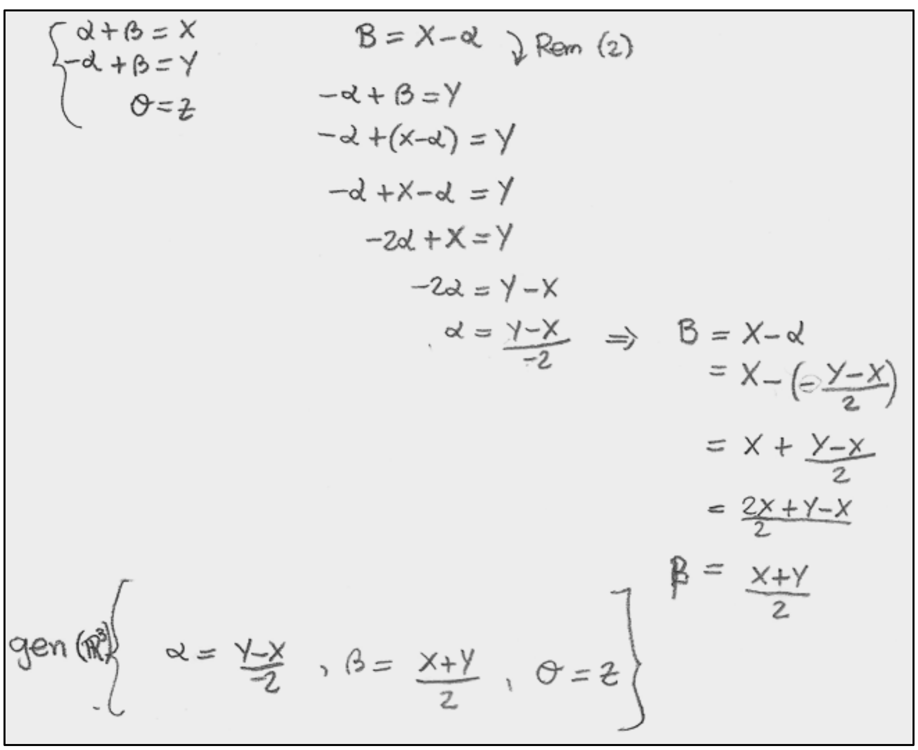
$-\alpha-\alpha=0$

$-2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0$

$\beta=0$

Figura 28

Parte II respuestas Sebastián, ***Tarea 4.***



$$\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ -\alpha+\beta=y\\ \theta=z\end{cases}$$

$\beta=x-\alpha$ Rem (2)

$-\alpha+\beta=y$

$-\alpha+(x-\alpha)=y$

$-\alpha+x-\alpha=y$

$-2\alpha+x=y$

$-2\alpha=y-x$

$\alpha=\frac{y-x}{-2} \Rightarrow \beta=x-\alpha$

$=x-\left(-\frac{y-x}{2}\right)$

$=x+\frac{y-x}{2}$

$=\frac{2x+y-x}{2}$

$\beta=\frac{x+y}{2}$

$$\text{gen}(\mathbb{R}^3)\left\{\alpha=\frac{y-x}{-2},\ \beta=\frac{x+y}{2},\ \theta=z\right\}$$

Sebastián: Ahora, de alguna u otra manera nos están preguntando si la combinación lineal de estas tres antenas me genera todo el espacio.

Entrevistadora: ¿Y eso que significa para estos tres vectores? [señalando los vectores de las antenas].

Sebastián: Que sean una base de todo el espacio, en este caso $\mathbb{R}^3$.

Entrevistadora: ¿Qué propiedades se tienen que cumplir para que sean base?

Sebastián: Para que sean base tiene que cumplir que sean linealmente independientes y que la combinación lineal de ellos me genere todo el espacio. [realiza la combinación lineal y determina el sistema de ecuaciones lineales] Bueno ya θ nos dio 0, si hacemos sustitución, despejamos β de la primera ecuación y la reemplazamos en la segunda, α también es 0 y si α es 0 no habrá de otra que β también sea 0. Es decir, que <u>si son linealmente independientes y ahora hay que ver si realmente genera todo el espacio.</u> [Ver Figura 24] Nos preguntamos cual va a ser ese generado de todo este espacio, hay que igualarlo ahora a x, y, z [señalando la combinación lineal que anotó antes y escribiendo el nuevo sistema de ecuaciones lineales] bueno ya θ abarca todo z, ahora hay que revisar ese x y y, bueno voy a hacer lo mismo que antes. [encuentra el generado mediante sustitución, hallando cada parámetro y la relación entre las variables (Ver Figura 25)] ¿Qué puedo concluir? <u>Jum, pues, diría que, si generan todo el espacio, debido a que los parámetros α, β y θ dependen de x, y, z, o sea abarca todos los puntos</u>.

Sebastián describe de manera detallada todo el procedimiento, de allí podemos tomar los fragmentos subrayados y afirmar que comprende lo que implica determinar una base, dominio del concepto dependencia lineal y conjunto generador. En el alcance de las últimas construcciones de este apartado se evidencia de manera específica cuando los estudiantes no solamente piensan en el planteamiento de un sistema, sino el propósito de este. Puede que no lleguen a describir como tal un sistema, pero la idea esta implícita, justo lo que caracteriza esta concepción.

Además, esta construcción se hace significativa cuando acompaña a otros conceptos, es decir cuando no se aísla, sino se incorpora para darle significado, porque como lo describe Parraguez (2014) en Oliveros (2018) aunque el concepto Combinación Lineal sea la célula generadora del Álgebra Lineal, los SEL, son la herramienta para darle solución a todos los problemas donde surjan las combinaciones lineales.

Estructuras asociadas a la complejidad del objeto

Se debe aclarar que los estudiantes no realizaron procedimientos directos para dar solución al ítem c de la Tarea 4, lo que hicieron fue ir deduciendo a partir de las preguntas que iban contestando. En el análisis a priori se consideró que era necesario que en dicho ítem los estudiantes reflexionaran sobre las condiciones y propiedades que cumple un sistema de ecuaciones lineales sin necesidad de cálculos. Sin embargo, 4 de los 5 entrevistados no logran relacionar el concepto de transformación lineal y su influencia sobre los sistemas de ecuaciones lineales resultantes, tal como se muestra a continuación en la transcripción de la entrevista de Mauricio:

Figura 29

Anotaciones de Mauricio, ***Tarea 4 (c).***

la matriz de rotación:

$$R = \begin{pmatrix} \overset{0}{\cos(\theta)} & \overset{1}{-sen(\theta)} & 0 \\ \overset{1}{sen(\theta)} & \overset{0}{\cos(\theta)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sistemas de ecuaciones, responde: ¿El

Mauricio: Mmm, sí, o no sé, mejor miro lo otro [leyendo la segunda parte de la Tarea 4 y el ítem c; empieza a hacer cálculos mentales con diferentes ángulos en la matriz de rotación] son ortogonales [según los valores que les puso a seno y coseno (ver Figura 29)], solo si $\theta = \frac{\pi}{2}$; me hizo dudar de la pregunta anterior, ¿será que con un contraejemplo? No sé si lo generan o no, en cualquiera de las dos.

Entrevistadora: ¿Afirma que el nuevo sistema genera todo $\mathbb{R}^3$sin comprobar el original?

Mauricio: Mmm, en cualquier θ no, solo en $\theta = \frac{\pi}{2}$. No sé, no sé, eso creo.

El estudiante estaba empeñado en buscar un contraejemplo, porque según deja claro es más fácil, que ver si genera todo el espacio o no, ante la frustración de no acordarse del concepto de conjunto generador, su interés disminuye, por tanto, la entrevistadora pregunta:

Entrevistadora: ¿No recuerdas como determinar un conjunto generador?

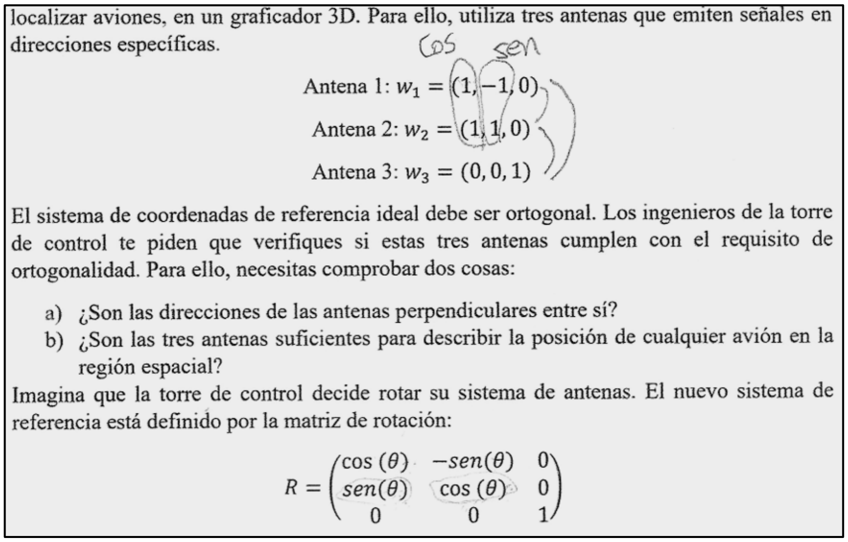
Mauricio: No, no me acuerdo del sistema generador, ni sabía que la matriz de rotación existía.

El hecho de que Mauricio no recuerde conceptos clave como el conjunto generador y las transformaciones lineales presenta una limitación en la construcción de los SEL como objeto; ya que impide establecer una conexión entre las propiedades de la solución del sistema y las herramientas de la teoría de transformaciones lineales, sin oportunidad de analizar el sistema de forma integral.

Por otro lado, tenemos a Sebastián que sabe que la ortogonalidad se conserva, pero esto solo es una parte para lograr encapsular completamente el Proceso de SEL, a menos de que sea llevado a la respuesta. Como puede verse en la siguiente imagen y transcripción:

Figura 30

Anotaciones de Sebastián, ***Tarea 4 (c).***


localizar aviones, en un graficador 3D. Para ello, utiliza tres antenas que emiten señales en direcciones específicas.

cos sen

Antena 1: $w_1 = (1, -1, 0)$

Antena 2: $w_2 = (1, 1, 0)$

Antena 3: $w_3 = (0, 0, 1)$

El sistema de coordenadas de referencia ideal debe ser ortogonal. Los ingenieros de la torre de control te piden que verifiques si estas tres antenas cumplen con el requisito de ortogonalidad. Para ello, necesitas comprobar dos cosas:

a) ¿Son las direcciones de las antenas perpendiculares entre sí?
b) ¿Son las tres antenas suficientes para describir la posición de cualquier avión en la región espacial?

Imagina que la torre de control decide rotar su sistema de antenas. El nuevo sistema de referencia está definido por la matriz de rotación:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sebastián: Bueno, yo diría que no, en este caso no, porque estoy asumiendo que en este caso lo que estoy haciendo es cambiar los escalares por funciones trigonométricas, ay no, no sé es que estoy comparando con esto [señalando los vectores y comparando componente a componente con la matriz de rotación] bueno, yo lo estoy viendo así con el sistema de ecuaciones es como si α va a ser este $cos(\theta)$, luego que ese β va a ser $-sen(\theta)$, asumo que estos de acá [encerrando las primeras y segundas componentes de los vectores] la razón por la que la descarto es porque multiplicamos por funciones trigonométricas y no concuerdan, o no para mí para que sigan manteniendo el generado.

Entrevistadora: ¿Y si digo que la rotación es una transformación lineal, cambia algo?

Sebastián: Jum, transformación lineal, bueno viéndolo desde ese punto de vista, dudaría en decir que una rotación mantiene todo eso, es que bueno si es transformación lineal, necesariamente la rotación va a abarcar todo el espacio, pero de igual manera como tenemos combinaciones de rotaciones puede que haya una rotación la cual esa antena no pueda ser, entonces no podrá ser el espacio, se quedarían por fuera ciertos valores o posiciones en el espacio. Yo seguiría con mi idea de que no genera todo el espacio<u>, habría que solucionarlo o tratar de dibujarlo en alguna calculadora grafica para tener idea, estoy muy seguro de que no va a abarcar el espacio completo</u>.

Sebastián no logra pensar en las propiedades o los SEL como una entidad que cumple con ciertos criterios, sino como un algo que se tiene que manipular. En la Figura 30 se puede observar cómo compara los vectores iniciales con las funciones trigonométricas dadas para la rotación, buscando un patrón que le diga si está manipulando un SEL con una posible solución igual a la original. Concluyendo en el fragmento subrayado que realizar cálculos nuevos sobre el sistema asegura que el último sistema de ecuaciones resultante cumple con las condiciones establecidas.

Por otro parte, Miguel relaciona la matriz asociada al sistema con la matriz de rotación. Veamos la forma de pensar de Miguel:

Miguel: ¿Cómo sin hacer nada?

Entrevistadora: Ok, usted ya comprobó que los vectores originales son ortogonales y a parte generan todo el espacio, la cuestión es, si los roto ¿siguen teniendo las mismas características? ¿el nuevo conjunto de vectores es ortogonal y genera $\mathbb{R}^3$?

Miguel: Sí.

Entrevistadora: ¿Por qué?

Miguel: Ortogonales siguen siendo [hace cálculos mentales del producto punto con los nuevos vectores].

Entrevistadora: Recordemos que la rotación es una transformación lineal.

Miguel: Mmm, a ver es que comparémoslo con esto, porque necesito guiarme de esto para asegurarme [señala la resolución del sistema anterior (ver Figura 25)].

Miguel no logra encapsular la concepción Proceso de SEL, pues necesita hacer nuevos cálculos para determinar si el nuevo conjunto de vectores cumple con las características pedidas y no ve el sistema de ecuaciones como una herramienta que determine la solución de la Tarea, sino que cree que es otro problema de matrices ajeno a los SEL.

Adicionalmente, Andrea asocia la Tarea con las funciones trigonométricas, mas no como se había considerado en el análisis a priori a partir del hecho de que las transformaciones lineales como las rotaciones no cambian la independencia de un conjunto de vectores y preservan la ortogonalidad, sino a través de analizar el comportamiento de las funciones trigonométricas, como se muestra a continuación:

Andrea: Yo creo que sí, porque las funciones de $seno$ y $coseno$ varían entre 1 y -1, bueno a aparte cuando decimos que son independientes, puede tomar cualquier parámetro en este caso los parámetros son las funciones, entonces si mi lógica no falla, esto [señalando la matriz de rotación] si va a cumplir con lo mismo de esto y va a cubrir todo $\mathbb{R}^3$ [señalando el sistema de ecuaciones lineales resultante].

A partir de las transcripciones anteriores y el análisis de las mismas, concluimos que el álgebra lineal permite abordar los sistemas de ecuaciones lineales desde múltiples perspectivas: geométrica, matricial y de transformaciones lineales. Por tanto, no conocer el rol de las transformaciones lineales y sus conjuntos generadores imposibilita la visión de estas perspectivas como un todo coherente, lo cual limita la capacidad de manipular y predecir el comportamiento del sistema.

Finalmente, Arturo es el estudiante más cercano a la construcción de una concepción Objeto de SEL. Como sugiere el modelo cognitivo la encapsulación de la concepción Proceso del concepto SEL y la construcción de la estructura Objeto, depende del contexto del problema y los conceptos involucrados, en este caso Transformaciones lineales. La idea es que el estudiante vea el sistema de ecuaciones como una propiedad intrínseca del conjunto de vectores y con ello conserve ciertas características, como se muestra en la siguiente discusión con Arturo en el ítem c de la Tarea 4:

Arturo: Aunque no recuerde bien, pues la rotación, ¿no es solo moverlos en el mismo espacio?

Entrevistadora: Ok, pero ¿cómo influye que se mueve en el mismo espacio? ¿cómo es el movimiento o qué características tiene el objeto que se modifica?

Arturo: Pues las características serían las mismas, están en el mismo espacio y son los mismos vectores solo que está sufriendo una rotación. Es que, si el sistema de ecuaciones inicialmente describe la posición en el espacio general, o sea genera el espacio, pues la rotación va a seguir manteniendo eso. [El estudiante entiende el SEL como objeto desde el hecho que es una herramienta de una transformación lineal, pero no sabe directamente por que se cumple, o sea algo le dice que se así pero teóricamente no entiende el por qué pasa, no le da un significado].

Si bien, Arturo logra pensar en el sistema como un objeto que se puede manipular para dar sentido a una situación que involucra las transformaciones lineales, pero falta que le dé un sentido a los resultados y desarrolle más sus argumentos al respecto. Por tanto, se decide que no hubo evidencia directa de otra estructura más evolucionada que la de Proceso. En la mayoría de las discusiones se guiaba a los estudiantes a ubicarse en la concepción Objeto, pero había estructuras previas referentes a otros conceptos lo que impedía este tránsito de estructuras. Tal vez se haga presente con otro tipo de población u otro tipo de contexto, que tenga la misma intención, es decir, donde no sea tan evidente el uso de los SEL, para resolver ciertas situaciones y así encapsular el Proceso en un objeto; permitiendo a los estudiantes expandir su nivel de argumentación y darle significado a cada una de sus justificaciones.

6. Conclusiones

El objetivo que nos planteamos al inicio de esta investigación fue: Diseñar tareas sustentadas en un modelo cognitivo que promuevan la comprensión de los Sistemas de Ecuaciones Lineales en estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. El cuál se fue logrando en su fase de diseño y experimentación, validando la coherencia entre el diseño teórico de las tareas y las estructuras mentales que estas promovieron. Asimismo, la pregunta de investigación fue respondida al identificar que la promoción de la comprensión se logra mediante la evidencia explícita de reflexión y coordinación de registros, y no meramente de la aplicación de algoritmos. Hay que destacar que no es tanto el modelo lo que nos interesa, sino como el modelo me permite detectar que estructuras y mecanismos mentales han logrado desarrollar los estudiantes durante el programa de Licenciatura en Matemáticas en relación con un concepto matemático.

Se confirmó que las estructuras previas postuladas en el modelo cognitivo (Acción del concepto Variable y Proceso de Ecuaciones equivalentes) son estrictamente necesarias y fueron universalmente alcanzadas por los entrevistados. Esto subraya la importancia de abordar el significado de las variables y la invariancia del conjunto solución antes de la manipulación de sistemas.

Las Tareas 1 y 2 fueron en gran medida efectivas para impulsar la transición de la concepción Acción a la concepción Proceso de SEL. Estudiantes como Mauricio y Sebastián demostraron la capacidad de coordinar la interpretación analítica de un resultado con su significado geométrico sin necesidad de ejecutar todo el cálculo, evidenciando interiorización de las acciones de manera clara y concisa.

Por otro lado, la evidencia de un estado intermedio de Acción y Proceso, como lo fue el caso de Miguel, caracterizado por la aplicación de algoritmos sin reflexión o por la dificultad para generalizar resultados de parámetros, sugiere que el diseño de tareas debe enfatizar la justificación y la argumentación de la solución, y no solo su obtención. Es esencial que la interpretación geométrica sea un paso de reflexión y no un mero recurso visual; pues como arrojan los resultados los estudiantes no suelen utilizar la representación gráfica como ayuda previa a solucionar la Tarea, y cuando desarrollan la parte algebraica, suelen tener dudas o errores y ahí es cuando recurren a diversas representaciones a manera de verificación.

En las Tarea 3 y 4, al vincular el concepto SEL con los conceptos Combinación Lineal, Dependencia Lineal, Base, Espacio generado y Transformación Lineal permitió a estudiantes como Sebastián utilizar el SEL como una herramienta (concepción Proceso) que probablemente le ayuden a resolver problemas con un nivel más avanzado del Álgebra Lineal. Este hallazgo es crucial, pues confirma que las tareas diseñadas facilitan el inicio de la construcción del Nivel Inter del Esquema de SEL (uso del concepto para abordar otros conceptos matemáticos).

Se observa que, inicialmente, los estudiantes centran su atención en la manipulación operativa de ecuaciones, verificando soluciones o aplicando métodos algorítmicos sin reflexión conceptual. Sin embargo, a medida que avanzan las tareas, los estudiantes integran representaciones algebraicas, geométricas y matriciales, articulando ideas de equivalencia, solución e independencia lineal. Este progreso refleja la efectividad del modelo cognitivo al propiciar la coordinación entre distintas estructuras mentales y favorecer la comprensión relacional del concepto SEL.

Hay niveles de desarrollo entre estructuras que no son lineales, como afirma Oktaç (2022) “los niveles no son necesariamente secuenciales, aunque algunos de ellos pueden considerarse más cercanos a una de las etapas u otra, y pueden considerarse como posibles paradas en un camino entre dos etapas”. A partir, de los resultados de las estructuras asociadas a la complejidad de objeto, hubo un estudiante en particular que presentó un nivel más avanzado en comparación con sus compañeros y el cual no se tenía previsto. Lo que nos lleva a plantearnos la posibilidad de que Arturo se encuentre en un nivel intermedio entre la concepción Proceso y concepción Objeto.

La principal limitante en esta investigación reside en que ningún estudiante construyó plenamente la concepción Objeto del concepto SEL. Si bien se logró que el SEL funcionara como una herramienta, la encapsulación necesaria para operar con el sistema como una entidad matemática no se observó de manera robusta. Lo que nos lleva a sugerir un refinamiento del modelo cognitivo que incluya estructuras previas de Proceso del concepto Parámetro y Proceso del concepto Transformación Lineal; si bien los SEL en su mayoría y para lograr esta concepción tienen que trabajar como una herramienta de construcción de otros conceptos. Ahora es necesario estudiar en principio las estructuras que tienen los estudiantes de aquellos conceptos que necesitan de la presencia de los SEL para una comprensión significativa; esto dependiendo del contexto de las tareas. Los resultados permitieron comprender de manera más profunda que la dificultad en el aprendizaje del SEL no es una falla de memorización, sino una falta de articulación entre las construcciones mentales de los conceptos precursores.

En general, el análisis de los resultados nos demostró la coherencia metodológica entre las tareas diseñadas y los hallazgos cognitivos. Las tareas lograron promover eficazmente los conceptos Acción y Proceso, resolviendo parcialmente el problema de la comprensión algorítmica superficial. Sin embargo, el desafío persiste en el diseño de tareas que faciliten la encapsulación hacia la concepción Objeto, lo cuál será el foco de una futura investigación.

Finalmente, el estudio contribuye al campo de la Educación Matemática al verificar la eficacia de la Descomposición Genética para las primeras construcciones del concepto SEL en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas, proporcionando evidencia que puede ser utilizada para el refinamiento de futuros modelos cognitivos o nuevos diseños didácticos. Desde una perspectiva pedagógica, los resultados sugieren que el diseño de tareas contextualizadas, que vinculen los sistemas de ecuaciones con situaciones significativas, potencia la comprensión del concepto al promover la reflexión y la argumentación. Además, la intervención docente, basada en preguntas orientadoras, desempeña un papel fundamental para que los estudiantes evolucionen de una comprensión empírica hacia una comprensión estructural.

Referencias bibliográficas

Anaya-Puebla, F. (2020). *Ambiente virtual de aprendizaje para la construcción del concepto de Sistema de Ecuaciones Lineales fundamentado en la teoría APOE*. (Tesis de maestría). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México. https://hdl.handle.net/20.500.12371/11526

Atehortúa, D. (2017). *Propuesta metodológica para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante problemas de aplicaciones contables.* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory*. En APOS Theory. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E. Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Currilum Development in Undergraduate Mathematics Education.In Kaput J., Schoenfeld, A. & Dubinsky E. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II.* pp. 1-32, U.S.A.: American Mathematical Society.

Borja, I. (2015). *Conjunto Solución a un Sistema de Ecuaciones Lineales: una mirada desde la perspectiva de la Teoría APOS* (Tesis de doctorado no publicada). CINVESTAV-IPN. México.

DeVries, D., y Arnon, I. (2004). Solution-What does it mean? Helping Linear Algebra Students Develop the Concept While Improving Research Tools. Proceedings of the 28th *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, 55-62.

Domínguez, D. (2016). *Secuencia didáctica que le permite a los estudiantes de octavo y noveno interpretar y usar las nociones de conteo en la solución de problemas de combinación y permutación* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer

Dubinsky, E y McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Reseach. In D. Holton (Ed), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 273-280). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (2002). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: Tall, D. (eds) *Advanced Mathematical Thinking.* Mathematics Education Library, vol 11 (pp. 95-126). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

González, D. (2011). *Los sistemas de ecuaciones lineales: evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento en estudiantes universitarios*. (Tesis de especialización). Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Manzanero, L. (2007). *Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una perspectiva desde la Teoría APOE*. (Tesis de maestría no publicada). CINVESTAV-IPN. México.

Ochoviet, T. (2009). *Sobre el Concepto de Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas*. (Tesis de doctorado). CICATA-IPN. Uruguay

Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), 373-385.

Oktaç, A. (2018). Conceptions about system of linear equations and solution. In Stewart, S.; Andrews-Larson, C.; Berman, A.; Zandieh, M. (eds.), Challenges and strategies in teaching linear algebra. ICME-13 Monographs. Cham: *Springer*. 71-101.

Oktaç, A. (2022). ¿Qué hay de nuevo en la teoría APOE? Una mirada a los niveles y la Totalidad. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (21), 9–21. https://doi.org/10.35763/aiem21.4245

Oliveros, L. (2018). *Un modelo cognitivo de construcción de los sistemas de ecuaciones lineales.* (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander. Colombia.

Osorio, J. (2021). *Resolución de problemas de sistemas de ecuaciones lineales* 2×2 *a partir de la comprensión matemática y la teoría APOE* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Parraguez, M., Uzuriaga,V. (2014). *Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores.* Universidad Tecnológica de Pereira

Ramos, S. y Ordosgoitia, Y. (2011). *Análisis de la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes de noveno grado cuando realizan actividades que promueven el tránsito entre los pensamientos analítico-aritmético y sintético-geométrico.* (Tesis de especialización). Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Rozas-Torres, E., Cárcamo, A., & Fortuny, J. (2024). Concepciones Previas sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales: un Estudio Exploratorio con Estudiantes Universitarios. *Bolema: Boletim De Educação Matemática*, *38*, e230153. https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230153

Rodríguez, M., Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Vásquez P. y Del Valle, M. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Enseñanza de las ciencias*, 37(1), 71-92. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194

Rodríguez, M., Mena-Lorca, A., Gregori, P., Vásquez, P., Del Valle, M. y Parraguez, M. (2022). Comprensión del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas: un estudio de casos. *Educación matemática*, *34*(3), 163-193. Epub 17 de marzo de 2023.https://doi.org/10.24844/em3403.06

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: Una secuencia Didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 7(1), 49-78.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. In J-L Dorier (Ed.) *On the teaching of linear algebra.* Pp. 209 - 246. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Trejo, E., y Camarena, P. (2011). Análisis cognitivo de situaciones problema con sistemas de ecuaciones algebraicas en el contexto del balance de materia. *Educación Matemática*, 23(2), 65-90.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2019). Task Design in APOS Theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 15, 43-55.

Trípoli, M., García, M., & Smidt, J. (2023). Sistemas de Ecuaciones: Dificultades que presentan alumnos de Ingeniería. *VII Jornadas ITEE de la Facultad de Ingeniería-UNLP* 117-122

Apéndice

Entrevista sobre el concepto de SEL:

Tarea 1. La Búsqueda del Tesoro

Un antiguo mapa contiene dos pistas que describen una ruta de navegación para encontrar un tesoro escondido. Las ecuaciones describen las rutas de dos brújulas en posiciones diferentes. La ubicación del tesoro es el único punto donde ambas rutas se cruzan.

$$\textbf{Pistas: } \begin{cases} 4x + y = 0 \\ 8x + 2y = 5 \end{cases}$$

a) Tres marineros proponen tres posibles coordenadas para el tesoro: $\left(1, -\frac{3}{2}\right), (0, 0), \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$. Verifica, paso a paso, si cada uno de estos puntos ubica el tesoro.

b) ¿Cuántos puntos satisfacen las pistas y ubican el tesoro? ¿Habrá más tesoros o las pistas son falsas? Justifique su respuesta

c) ¿Si gráficas las dos rutas de navegación que notas? ¿Cómo influye esto en la búsqueda del tesoro?

Tarea 2. Enigma del mapa

Luego de una exhausta búsqueda el capitán vuelve a revisar el mapa y se da cuenta que leyó una de las pistas mal y dijo: “Si encuentro una nueva ruta, podría tener mi tesoro; las pistas no me engañarán más, **no reemplazaré ningún número** y resolveré este misterio”

$$\textbf{Pistas corregidas: } \begin{cases} 4x + y = 0 \\ 8x + 2y = s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Siguiendo las peticiones del capitán, qué valor debería tener s para que:

a) Existan demasiados tesoros hasta que se canse y sigan de generación en generación.

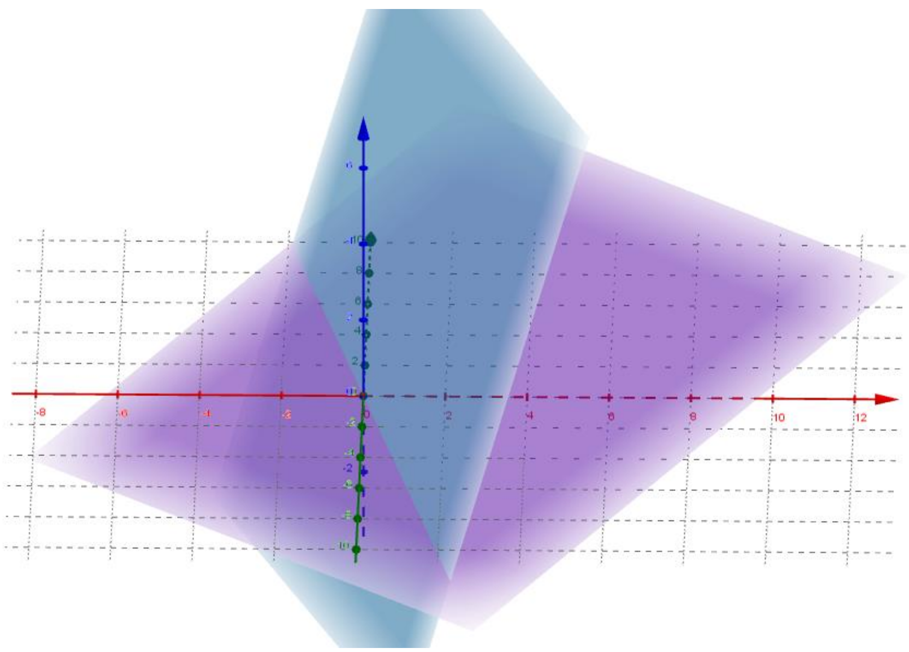
b) Termine deprimido porque nunca encontrará el tesoro.

c) Sea el afortunado de llevarse el único tesoro en el mundo.

Tarea 3. Gráficos por computadora (Adaptación de Oliveros (2018))

En una simulación 3D tienes tres fuentes de luz, cada una dirigida en una dirección dada por los vectores: $v_1 = (6, -3, 1), v_2 = (2, -1, 1), v_3 = (-2, 1, -4)$.

a) ¿Es posible **apagar por completo** la iluminación en una región al **combinar** estas luces? Justifica tu respuesta. Ten en cuenta que la representación geométrica del sistema resultante es la siguiente:



b) ¿Cuál es la solución del sistema? Justifique su respuesta.

c) ¿Los vectores luz v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes? Justifique su respuesta.

Tarea 4. Sistema de Navegación Aéreo (Adaptación de Oliveros (2018))

Una torre de control necesita establecer un sistema de coordenadas de referencia para localizar aviones, en un graficador 3D. Para ello, utiliza tres antenas que emiten señales en direcciones específicas.

Antena 1: $w_1 = (1, -1, 0)$

Antena 2: $w_2 = (1, 1, 0)$

Antena 3: $w_3 = (0, 0, 1)$

El sistema de coordenadas de referencia ideal debe ser ortogonal. Los ingenieros de la torre de control te piden que verifiques si estas tres antenas cumplen con el requisito de ortogonalidad. Para ello, necesitas comprobar dos cosas:

a) ¿Son las direcciones de las antenas perpendiculares entre sí?

b) ¿Son las tres antenas suficientes para describir la posición de cualquier avión en la región espacial?

Imagina que la torre de control decide rotar su sistema de antenas. El nuevo sistema de referencia está definido por la matriz de rotación:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Sin resolver nuevos sistemas de ecuaciones, responde: ¿El nuevo conjunto de antenas describe la posición de cualquier avión en la región espacial ($\mathbb{R}^3$)?