

**UN MODELO DE OPTIMIZACIÓN DE RUTAS DE TRANSPORTE URBANO EN  
EL ÁREA METROPOLITANA DE BUCARAMANGA CON VRPTW MEDIANTE  
UN ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN POR ENJAMBRE DE PARTÍCULAS  
EVOLUTIVO.**

**LEIDY YANETH MARÍN PACHECO  
SIXTO MAURICIO MELÉNDEZ GALLO**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOMECÁNICAS  
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES  
INGENIERÍA INDUSTRIAL  
BUCARAMANGA  
2017**

**UN MODELO DE OPTIMIZACIÓN DE RUTAS DE TRANSPORTE URBANO EN  
EL ÁREA METROPOLITANA DE BUCARAMANGA CON VRPTW MEDIANTE  
UN ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN POR ENJAMBRE DE PARTÍCULAS  
EVOLUTIVO.**

**LEIDY YANETH MARÍN PACHECO  
SIXTO MAURICIO MELÉNDEZ GALLO**

**Trabajo de grado para optar al título de ingenieros industriales**

**Director  
HENRY LAMOS DÍAZ  
PhD. en Física-Matemática**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICOMECÁNICAS  
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES  
INGENIERÍA INDUSTRIAL  
BUCARAMANGA  
2017**

## **DEDICATORIA**

A mis padres Marina Pacheco y Antonio Marín por su comprensión, amor y apoyo,  
porque sin ellos esto no hubiera sido posible.

A Ingrid y Keyla por su amistad y confianza.

A Pao, Lili, Jennifer, Dianita, Cristian, por su amistad, apoyo incondicional, consejo  
y por los momentos vividos

A Leo por su compañía

A Six por su amistad y dedicación.

**Leidy Marín Pacheco**

## **DEDICATORIA**

A toda mi familia principalmente a mi madre Flor Alba, a mi padre Sixto Meléndez, a mis hermanos Diana, Leonardo y Alexandra por siempre estar conmigo y apoyarme.

A Nicolás, Eder, Daniel, Jhon, Juan D y Fabián por su amistad brindada durante este proceso que está culminando.

A Camila, Néstor, Luisa, Camilo, Juan, Daniela, David, Fabián D y a Las peligrosas, por todas la alegría compartida.

A Roció por su apoyo incondicional

A mi compañera de proyecto Leidy por su apoyo y amistad.

**Mauricio Meléndez Gallo**

## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios por permitirnos culminar esta etapa tan importante de nuestras vidas.

Al Doctor Henry Lamos Díaz por su paciencia, orientación y apoyo constante durante el desarrollo de este proyecto.

Al Ingeniero Daniel Orlando Martínez por su tiempo, su orientación y apoyo en esta investigación.

A Metrolínea por la información brindada.

A la Universidad Industrial de Santander, a la Escuela de Estudios Industriales y Empresariales, y al grupo de investigación OPALO por la formación académica.

**Leidy Yaneth Marín Pacheco**

**Sixto Mauricio Meléndez Gallo**

## TABLA DE CONTENIDO

	<b>Pág.</b>
INTRODUCCIÓN .....	17
1 TABLA DE CUMPLIMIENTO DE OBJETIVOS .....	19
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	20
3. JUSTIFICACIÓN .....	22
4. OBJETIVOS .....	25
4.1 OBJETIVO GENERAL .....	25
4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	25
5. METODOLOGÍA .....	26
6. REVISIÓN DE LA LITERATURA .....	28
6.1. ANÁLISIS DE LA LITERATURA .....	28
7. MARCO DE ANTECEDENTES .....	42
8. MARCO TEÓRICO .....	45
8.1 OPTIMIZACION COMBINATORIA .....	45
8.2. COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL .....	48
8.3. MÉTODOS DE SOLUCIÓN .....	50
8.3.1. Optimización por enjambre de partículas (PSO) .....	55
8.3.2. Optimización evolutiva por enjambre de partículas (EPSO) .....	57
8.4. PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS (VRP) .....	61
8.4.1. Problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW) .....	62
9. RED DE TRANSPORTE .....	68
9.1. TRANSPORTE URBANO .....	70
9.2. MODELO DE OPTIMIZACIÓN DE RUTAS DE TRANSPORTE URBANO. ....	75
9.2.1. Características del modelo .....	76
10. APLICACIÓN DE LA OPTIMIZACION EVOLUTIVA POR ENJAMBRE DE PARTICULAS .....	85

10.1. HEURISTICA DEL VECINO MÁS CERCANO .....	86
10.1.1. Procedimiento.....	88
10.2. EL MECANISMO DEL ALGORITMO EPSO .....	92
10.2.1. Descripción detallada del algoritmo EPSO. ....	93
10.3. DISEÑO DE LA SOLUCION .....	96
11. ANALISIS DE RESULTADOS.....	103
12. CONCLUSIONES .....	106
13. RECOMENDACIONES.....	108
BIBLIOGRAFÍA.....	109

## LISTA DE FIGURAS

	<b>Pág.</b>
Figura 1. Mapa del Área metropolitana de Bucaramanga.....	69
Figura 2. Red urbana. Anexo C. Red urbana Completa. ....	75
Figura 3. Diagrama de flujo para el algoritmo de vecino más cercano. ....	91
Figura 4. Concepto de la modificación de un punto de la búsqueda en EPSO.....	93
Figura 5. Diagrama de flujo de EPSO binario. ....	95

## LISTA DE TABLAS

	<b>Pág.</b>
Tabla 1. Cumplimiento de Objetivos .....	19
Tabla 2. Caracterización de rutas .....	73
Tabla 3. Ejemplo para la conversión de las soluciones en valores posiciones continuas .....	98
Tabla 4Ejemplo para la aplicación del ROV.....	98
Tabla 5. Tabla de rutas .....	104

## LISTA DE ANEXOS\*

Anexo A. Análisis bibliométrico.

Anexo B. Caracterización de rutas.

Anexo C. Red urbana completa.

Anexo D. Coordenadas de las paradas de Metrolinea.

Anexo E. Matriz de datos.

Anexo F. Matriz de distancias.

Anexo G. Framework EPSO para el modelo propuesto en el software Matlab

Anexo H. Tabla de rutas.

Anexo I. Artículo de investigación.

---

\* Ver documentos adjuntos en el CD-ROOM

## RESUMEN

**TITULO:** UN MODELO DE OPTIMIZACIÓN DE RUTAS DE TRANSPORTE URBANO EN EL ÁREA METROPOLITANA DE BUCARAMANGA CON VRPTW MEDIANTE UN ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN POR ENJAMBRE DE PARTÍCULAS EVOLUTIVO.

**AUTORES:** LEIDY YANETH MARÍN PACHECO\*\*  
SIXTO MAURICIO MELÉNDEZ GALLO\*\*

**PALABRAS CLAVE:** Problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo, optimización evolutiva por enjambre de partículas, rutas, transporte urbano, red de transporte.

### **CONTENIDO:**

En el presente documento consta de una revisión de la literatura, seguidamente se diseña una red de transporte restringida y posteriormente se hace la formulación de un modelo de optimización de rutas de transporte urbano en Bucaramanga y su área metropolitana; la investigación permitirá rediseñar las rutas actuales del sistema integrado de transporte masivo 'Metrolínea', con el fin disminuir tanto las distancias recorridas, como los tiempos de viaje y obtener las rutas optimas

Para llevar a cabo esta investigación primero se realizó una revisión de la literatura en bases de datos con el fin de determinar el algoritmo a usar para el modelo propuesto basado en el problema VRPTW integrado con la metaheurística optimización por enjambre de partículas evolutiva (EPSO), luego de seleccionar el algoritmo se diseñó la red de transporte urbano restringida con base a la información suministrada por Metrolínea, esta red se diseñó por medio de la herramienta 'Google Maps' y en esta red están representadas las paradas de las rutas objeto de estudio y deposito que en este caso es la estación de Provenza.

Seguidamente la investigación muestra el diseño y codificación de la solución para el algoritmo EPSO seleccionado para resolver el modelo propuesto, esta solución se hace empleando el software MATLAB y finalmente se muestra los resultados para el modelo propuesto.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ingenierías Físicomecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales. Ingeniería Industrial. Director Henry Lamos Díaz PHD. en Física-Matemática

## ABSTRACT

**TITLE:** OPTIMIZATION MODEL OF URBAN TRANSPORT ROUTES IN METROPOLITAN AREA OF BUCARAMANGA THROUGH VRPTW, ALGORITHM OF OPTIMIZATION BY EVOLUTIVE PARTICLE SWARM.

**AUTHORS:** LEIDY YANETH MARÍN PACHECO\*\*  
SIXTO MAURICIO MELÉNDEZ GALLO\*\*

**KEYWORDS:** Problems of vehicles routes with time windows, evolving optimization by particle swarm, routes, urban transport, transport network.

### CONTENT:

This document consists of a review of the literature, a restricted transport network is designed and a model for the optimization of urban transport routes is then formulated in Bucaramanga and its metropolitan area; The research will allow the redesign of the current routes of the integrated mass transport system 'Metrolínea', in order to reduce both the distances traveled and the travel times and obtain the optimal routes

To carry out this research we first performed a review of the literature on databases in order to determine the algorithm to be used for the proposed model based on the VRPTW problem integrated with the metaheuristic evolutionary particle swarm optimization (EPSO) After selecting the algorithm the restricted urban transport network was designed based on the information provided by Metrolínea, this network was designed by means of the 'Google Maps' tool and in this network are represented the stops of the routes under study and Deposit that in this case is the station of Provence.

Then the research shows the design and coding of the solution for the EPSO algorithm selected to solve the proposed model, this solution is done using the MATLAB software and finally the results are shown for the proposed model.

---

\* Degree work

\*\* Faculty of Physicomechanical Engineering. School of Industrial and Business Studies. Industrial engineer. Director Henry Lamos Díaz PHD. In Physics-Mathematics

## INTRODUCCIÓN

En el transporte urbano uno de los problemas de mayor impacto e igualmente difícil de tratar es la asignación de rutas. Siendo la globalización la mayor consecuencia en el incremento del flujo poblacional tanto en las principales ciudades como su entorno metropolitano, cabe resaltar que una correcta asignación de rutas es consecuencia clara del crecimiento en los viajes de personas y de carga en los medios de transporte, siendo el transporte por carretera el que predomina sobre los demás.

En casi todas las ciudades capitales de Colombia el fenómeno de la movilidad por carreteras se viene incrementando, de igual manera las actuales dinámicas de crecimiento urbano y metropolitano, donde se requiere recorrer grandes trayectos, con una estructura urbana inadecuada y una alta densidad poblacional ha llevado a que el sistema de transporte público en cuanto a servicio, frecuencia y tiempos de desplazamiento de los usuarios, particularmente dentro de las llamadas horas pico sea ineficaz.

Con el fin de dar respuesta a las expectativas crecientes de una movilidad que exige un servicio eficiente y de calidad. La optimización de las rutas de transporte se convierte en un factor crucial a la hora de hablar de movilidad ya que esta busca encontrar las mejores rutas que permita obtener mayor eficiencia de los recursos existentes, con una adecuada asignación de rutas que cumpla con los requerimientos de los usuarios del servicio.

Con la realización de este proyecto se busca un modelo de optimización de rutas de transporte urbano el cual minimice las distancias y tiempos de recorrido en las rutas vehiculares por medio de una metaheurística de optimización por enjambre

de partículas evolutivo, igualmente se pretende brindar una herramienta que muestre y permita elegir las rutas que proporcione menores tiempos y distancias. Lo anterior con el fin de validar este modelo con rutas prediseñadas a través de un sistema de información geográfica "Maps Google".

## 1 TABLA DE CUMPLIMIENTO DE OBJETIVOS

**Tabla 1. Cumplimiento de Objetivos**

OBJETIVO	CUMPLIMIENTO
<b>GENERAL</b>	
Construir un modelo para el problema de ruteo de vehículos en el área metropolitana de Bucaramanga con restricción en las ventanas de tiempo para el transporte urbano mediante un algoritmo de optimización por enjambre de partículas evolutivo.	9.3 Modelo de optimización de rutas de transporte urbano
<b>ESPECÍFICO</b>	
Realizar una revisión de literatura del problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW).	6 Revisión de la literatura
Diseñar la red de transporte restringida a ciertos sectores o regiones del área metropolitana de Bucaramanga usando la herramienta Google Maps.	9 Red de transporte Anexo C. Red urbana completa
Seleccionar el algoritmo para la solución del VRPTW de acuerdo a la revisión bibliográfica previamente realizada sobre algoritmos basados en la Metaheurística Optimización Evolutiva de Enjambre De Partículas (EPSO).	10 Aplicación de la optimización evolutiva por enjambre de partículas
Desarrollar el EPSO que resuelve el problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo utilizando el software MATLAB.	Anexo G. Framework EPSO para el modelo propuesto en el software Matlab.
Realizar un artículo publicable en base a trabajo de investigación realizado.	Anexo I. Artículo

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Al hablar de un modelo de optimización de rutas para el transporte urbano cabe mencionar que se cuenta con poca información al respecto. De acuerdo a las búsquedas realizadas la información existente sobre modelos aplicados en otros países como en Ecuador<sup>1</sup>, en donde se realizó un estudio y propuesta de nuevas rutas y líneas de transporte público urbano del Distrito Metropolitano de Quito en un caso de aplicación para el corredor Sur Occidental del sistema Metro bus – Q, mediante el cual se estimaron los tiempos de viaje de las unidades de transporte público en este corredor, determinaron el modelo de transporte más apropiado para desarrollar el proyecto, tomando en cuenta la matriz origen destino del área en estudio y la función flujo velocidad, por último generaron una herramienta, que permite analizar futuras asignaciones o reasignaciones de rutas a operadores de transporte, por parte del organismo regulador del transporte público urbano en la ciudad de Quito. Los mecanismos para el modelamiento de rutas en Colombia son empíricos y no estructurados, por consiguiente, difícil aplicar esta metodología a nuestro contexto. Actualmente el sistema de transporte urbano está regido por normas, emitidas por el ministerio de transporte.

La mayoría de los esfuerzos en el área del transporte urbano se han dirigido a la solución del problema de ruteo de vehículos (Vehicle Routing Problem, VRP), el cual busca la determinación de la ruta óptima que permita la minimización de costos, distancias, tiempos de operaciones y la optimización de los recursos existentes. Generalmente este problema se ve más claramente en la distribución de mercancía donde inicialmente se tiene una serie de clientes geográficamente

---

1 BAYAS MEZA, Patricio G., Estudio y propuesta de nuevas rutas y líneas de transporte público urbano del distrito metropolitano de quito, caso de aplicación corredor sur occidental del sistema metro bus, tesis grado, Magister en ingeniería industrial y productividad, 2011, Escuela politécnica nacional Facultad de ingeniería química y agroindustria.

dispersos, donde cada cliente presenta una demanda esperando ser atendida, para esto se cuenta con un depósito y una flota de vehículo con capacidad limitada.

El principal objetivo de este proyecto es el planteamiento de un modelo que optimice las rutas de transporte para el área metropolitana de Bucaramanga.

Para el desarrollo de este proyecto se estudiará el problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo, que consiste en diseñar un conjunto posible de rutas para una flota de vehículos homogénea, que salen y llegan a diferentes depósitos (estaciones de transferencia del sistema integrado de transporte), donde el vehículo debe cumplir con una ventana de tiempo establecida de la parada, se pueden presentar dos situaciones que el vehículo llegue antes del tiempo establecido o llegue después. Así que el objetivo será encontrar una secuencia de rutas que minimicen las distancias, tiempos de recorridos y el cumplimiento de las ventanas de tiempo.

La presente investigación muestra la metaheurística “Optimización por enjambre de partículas evolutiva”, la cual permite optimizar problemas a partir de una población de soluciones iniciales denotadas como “partículas”, las cuales están en constante movimiento por todo el espacio de búsqueda, donde cada partícula tiene una posición y una velocidad, el objetivo es hacer que la partícula converja rápidamente hacia las mejores soluciones.

### 3. JUSTIFICACIÓN

El creciente flujo de transporte urbano es un factor que atañe directamente la movilidad en la ciudad viéndose seriamente afectada como consecuencia de su excesiva densificación y la falta de una autoridad única de transporte que defina las mejores estrategias y priorice las obras y acciones con base en información apropiada y estudios técnicos pertinentes<sup>2</sup>, estando asociado también con problemas de carácter estructural que se han intentado resolver con medidas que no han generado el impacto esperado, por el contrario se han efectuado planes de reducción del presupuesto vial causando deterioro de vías tanto secundarias como primarias, lo que genera manera un aumento en los costos de recuperación de las mismas.

En Bucaramanga y en los cuatro municipios del área metropolitana circulan alrededor de 478 mil vehículos, de los cuales 260 mil son motocicletas<sup>3</sup>.

Además, de todo lo anterior, existen otros problemas adicionales a la movilidad; que a continuación se pasa a discutir:

1. La mala planeación del flujo de automóviles particulares y de servicio público, cuyas causas se derivan de la mala distribución y adecuación de parqueaderos, la ineficiente asignación de rutas por las vías.

---

2 FUNCO HERENCIA. [en línea] disponible en: [http://funcoherencia.com/index.php?option=com\\_content&view=article&id=87&Itemid=89](http://funcoherencia.com/index.php?option=com_content&view=article&id=87&Itemid=89)

3 CHÍO, JUAN CARLOS. No solo con vías se mejora la movilidad en Bucaramanga [en línea] disponible en: <http://www.vanguardia.com/area-metropolitana/bucaramanga/319289-no-solo-con-vias-se-mejora-la-movilidad-en-bucaramanga>

2. La inseguridad es un factor que afecta de manera directa a la ciudad, ya que este ha contribuido al aumento de las tasas de motorización, pues los usuarios de transporte público prefieren en muchos casos invertir en sus propios vehículos que exponerse a usar este medio.
3. El actual sistema integrado de transporte que tiene la ciudad no es el más adecuado para atender las necesidades de los usuarios debido a que las rutas de buses no son las más óptimas, ya que: se deben realizar en la mayoría de los casos transbordos innecesarios, los cuales llevan directamente a un despilfarro en recursos que pueden ser aprovechados en la generación de rutas directas.
4. La puntualidad de los buses al arribar a sus estaciones, pues muchas veces no cumplen con la ventana de tiempo establecida.

Para mitigar el impacto del poco flujo vehicular por las causas expuestas, en casi todas las grandes ciudades del país se ha impuesto la medida del “pico y placa” para vehículos particulares, públicos y motos. Aunque la medida ha permitido en algunos casos disminuir el flujo vehicular no ha resuelto el problema de movilidad.

En cuanto a las medidas de restricción vehicular las cuales no han tenido una gestión, planeamiento y control eficiente han contribuido con el crecimiento exponencial del parque automotor, por lo tanto es preocupante que en muchos casos ni siquiera se han llegado a percatarse que la raíz del problema está en el modelo con que se afronta el tema por cuenta del uso masivo del automóvil: Miller Humberto Salas Rondón, líder del Grupo Investigación del ‘Sector del Transporte’, de la Universidad Pontificia Bolivariana, UPB, afirma que se requieren acciones complementarias como la implementación de un Sistema Integrado de Transporte Público; una mejor planeación del territorio, cambios en los usos del suelo, establecimiento de una jerarquización vial según la capacidad, mejorar la

accesibilidad y dar prioridad a las rutas para de esta manera hallar una solución eficaz a los problemas de cobertura, calidad, frecuencia y rutas en el municipio de Bucaramanga y una fracción de su área metropolitana<sup>4</sup>.

Los diferentes gobiernos han intentado solucionar este problema, implementando soluciones a corto plazo como el día sin carro, igualmente cambios en la infraestructura: el viaducto de La Novena, el Intercambiador de Neomundo y algunos proyectos que se encuentran en ejecución actualmente, para algunos expertos el rezago en materia de infraestructura es tal, que estas obras no resolverán del todo el problema de movilidad de la capital santandereana y su área metropolitana , sobre todo si la matrícula de carros y motos sigue creciendo al paso que lleva hasta ahora.

Este trabajo se realiza con el fin de mejorar el transporte describiendo rutas vehiculares que cubran la mayor parte del área metropolitana de Bucaramanga, siendo precisos en sus recorridos, que cumplan con una ventana de tiempo establecida y con el fin de brindar una estructura técnica operativa la cual asignará algunas rutas para evitar paralelismos mediante el planteamiento de un modelo de planificación de las rutas de transporte urbano partiendo de VRPTW (problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo).

Se decidió aplicar EPSO por las buenas soluciones que este genera en comparación con otras Meta-heurísticas. La EPSO por su carácter evolutivo y auto-adaptativo actuando en secuencia, cada uno con su propia probabilidad de producir no solo los mejores individuos sino también un promedio grupal mejor.

---

4 ARDILA, EUCLIDES KILÔ. No es sostenible la forma como nos transportamos en Bucaramanga [en línea] disponible en: <http://www.vanguardia.com/area-metropolitana/bucaramanga/323542-no-es-sostenible-la-forma-como-nos-trasportamos-en-bucaramanga>

## **4. OBJETIVOS**

### **4.1 OBJETIVO GENERAL**

Construir un modelo para el problema de ruteo de vehículos en el área metropolitana de Bucaramanga con restricción en las ventanas de tiempo para el transporte urbano mediante un algoritmo de optimización por enjambre de partículas evolutivo.

### **4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Realizar una revisión de literatura del problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW).
- Diseñar la red de transporte restringida a ciertos sectores o regiones del área metropolitana de Bucaramanga usando la herramienta Google Maps.
- Seleccionar el algoritmo para la solución del VRPTW de acuerdo a la revisión bibliográfica previamente realizada sobre algoritmos basados en la Metaheurística Optimización Evolutiva de Enjambre De Partículas (EPSO).
- Desarrollar el EPSO que resuelve el problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo utilizando el software MATLAB.
- Realizar un artículo publicable en base a trabajo de investigación realizado.

## **5. METODOLOGÍA**

El proyecto comprenderá las siguientes etapas, con la finalidad de cumplir los objetivos propuestos:

### **Revisión bibliográfica**

Ejecutar una búsqueda que permita profundizar en el análisis de las variables que inciden en el planteamiento de rutas de transporte urbano. Esta revisión se hará a partir de artículos publicados en revistas científicas y en la web.

Terminada la revisión bibliográfica se recopila la información relevante en un documento donde se presenten los diferentes métodos estudiados para el planteamiento de rutas de transporte, enfatizados el problema de vehículos con ventas de tiempo

### **Diseño**

Realizar por medio de la herramienta google maps la red de transporte restringida.

### **Selección del algoritmo**

De acuerdo a la revisión bibliográfica seleccionar el algoritmo de solución para el VRP-TW, basados en la Meta-heurística de optimización por enjambre de partículas evolutivo.

## **Formulación**

Definir y formular las características del modelo a desarrollar, entre ellas las restricciones y funciones objetivo.

## **Programación**

Programar en el software Matlab el algoritmo formulado previamente

## **Documentación**

Elaboración del libro de proyecto de grado. Este libro compila toda la información registrada hasta el momento junto con las conclusiones finales de la investigación. De igual manera se elabora un artículo en base a la investigación realizada.

## 6. REVISIÓN DE LA LITERATURA

En el Anexo A se muestra el análisis bibliométrico, realizado para esta investigación.

### 6.1. ANÁLISIS DE LA LITERATURA

En una primera aproximación, el problema que nos atañe se podría plantear como un problema VRP (Vehicle Routing Problem), de gran importancia tanto a nivel académico como práctico. Es una generalización del TSP y se encuentra dentro de los problemas de optimización combinatoria.

El problema clásico de Ruteo de Vehículos (VRP) consiste en hallar un conjunto de rutas de costo mínimo para una flota homogénea de vehículos que sirve a un conjunto de clientes dispersos geográficamente<sup>5</sup>. El primer problema planteado tipo VRP fue el del agente viajero o TSP (Travelling Salesman Problem) introducido por (Flood, 1956). Existen muchas variantes del VRP con la intención de capturar en forma más precisa algunas de las realidades del mundo de la logística. Entre las variantes se encuentran: MDVRP (MultiDepot VRP), VRPTW (VRP with Time Windows), CVRP (Capacitated VRP) y VRPSPD (VRP with simultaneous delivery and collection).

Para el presente proyecto se eligieron estas variantes que abarcan los casos más utilizados en la práctica y que con un estudio exhaustivo pueden satisfacer

---

<sup>5</sup> TOTH Paolo y VIGO Daniele, "The Vehicle Routing Problem". Society of Industrial and Applied Mathematics (SIAM) monographs on discrete mathematics and applications, Philadelphia, USA, 2002, pp. 1-23, 109-149.

necesidades específicas para plantear un determinado problema entre estas están:

El problema del agente viajero se puede plantear como sigue: Un vendedor viajero por cierto necesita visitar  $n$  puntos de la ciudad, sin importar el orden en que lo haga, cada uno exactamente una vez y en el menor tiempo posible<sup>6</sup>. El TPS se refiere al caso en que tenemos un solo depósito, un solo vehículo  $n$ , nodos que requieren servicio ubicados en una red (que puede ser dirigida o no), sin restricciones de capacidad del vehículo, sin restricciones de demanda de los clientes y sin restricciones de tiempo. El objetivo es minimizar la distancia recorrida pasando por todos los nodos exactamente una vez volviendo al nodo de origen (depósito).

El problema formulado por (Dantzig & Ramser, 1959) es una generalización del problema del agente viajero (TSP), quienes modelaron por primera vez el despacho de combustible a través de una flota de camiones a diferentes estaciones de servicio, desde una terminal, dando origen al Problema de Ruteo de Vehículos (VRP), que plantea la búsqueda de la solución óptima con diferentes restricciones tales como<sup>7</sup>: número de vehículos, su capacidad, lugares de destino (clientes) y demanda de los clientes, entre otras. Una formulación de éste tipo puede incluir un amplio número de variables y diversos parámetros.

Una extensión del clásico TSP, es decir el problema de los “ $m$ ” agentes viajeros puede ser asumido como un VRP como se mencionó anteriormente, en que las rutas permitidas son limitadas por la necesidad de que los objetos deben ser entregados desde un punto fuente hasta su destino por un vehículo de capacidad

---

6 BRUCE GOLDEN, RAGHAVAN S. y WASIL Edward, “The vehicle routing problem: latest advances and new challenges”. Springer, New York, 2008, pp. 3-122.

7 THE VRP WEB, Collaboration between AUREN and the Languages and Computation Sciences department of the University of Málaga by Bernabé Dorronsoro Díaz, última actualización: marzo de 2007, consultada en Abril de 2010, [en línea] disponible en: <http://neo.lcc.uma.es/radi-aeb/WebVRP/>.

finita. Capacitated VRP (CVRP) cuenta con un centro de depósito, “ $n$ ” vehículos con capacidad definida para cada uno<sup>8</sup>. Éstos deben salir y regresar al depósito después de cumplir una secuencia de visita a clientes que se debe definir<sup>9</sup>. Las restricciones que se deben tener en cuenta son las de visitar a todos los clientes una vez, satisfacer la demanda total y no sobrepasar la capacidad de carga máxima de cada vehículo<sup>10</sup>. El objetivo de este problema es minimizar el costo relacionado con la flota de vehículos, la suma del tiempo de viaje, y a su vez la demanda total la cual es determinística para este tipo de problema. Igualmente se encuentran problemas CVRP simétrico (Symmetric CVRP, SCVRP) y asimétrico (Asymmetric CVRP, ACVRP).

Dentro de los VRP existen diversas variaciones al modelo original, por ejemplo, el VRP with multiple depot (MDVRP) plantea que una compañía puede tener varios depósitos desde donde abastece a sus clientes. Si los clientes se encuentran agrupados alrededor de los depósitos, entonces el problema de distribución se puede modelar como varios VRP independientes. No obstante, si los clientes y los depósitos se localizan entremezclados tenemos un problema de MDVRP. En este tipo de problema se consideran varios depósitos, donde en cada uno de ellos existe una flota de vehículos. Cada depósito tiene a su cargo a un número de clientes, los cuales son atendidos por los vehículos asignados al depósito. El objetivo de este problema, junto al ya mencionado de reducir la distancia recorrida, es minimizar la flota de vehículos asignados a cada depósito. Un ejemplo de este se enfoca principalmente en la asignación (agrupamiento) de los clientes a los

---

8 OLIVERA Alfredo, “Heurísticas para problemas de ruteo de vehículos”, reporte de investigación, Instituto de Computación – Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay, 2004, [en línea] disponible en: <http://www.fing.edu.uy/inco/pedeciba/bibliote/reptec/TR0408.pdf>.

9 LEONORA Bianchi, BIRATTARI Mauro, CHIARANDINI Marco, MANFRIN Max y MASTROLILLI Ronaldo, “Metaheuristics for the Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands”, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3242, 2004, pp. 450-460.

10 LIBERTAD Tansini, URQUHART Maria, and VIERA Omar. Comparing assignment algorithms for the multi-depot vrp.

almacenes<sup>11</sup>, y compara los resultados obtenidos por seis heurísticas con asignación (asignación a través de urgencias, asignación paralela, asignación simplificada y barrido de asignación) obtenidos para resolver un problema de transporte para los mismos casos.

Algunos de las investigaciones realizadas son, por ejemplo, The Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP) en este problema se tiene un conjunto de puntos en un espacio métrico, un grupo de vehículos de cierta capacidad y una colección de rutas de vehículos empezando en un origen, los cuales cada uno deben visitar un punto determinado. Otro de los trabajos es The Precedence- Constrained TSP<sup>12</sup> que implica la existencia de un número finito de puntos que se deben visitar antes de visitar un punto definido. Estos problemas son muy importantes, y las soluciones planteadas en este artículo son muy interesantes.

Las ventanas de tiempo o The Time Windows (VRPTW) es otra de las variantes del VRP con la restricción adicional de una ventana de tiempo asociada a cada consumidor, definiendo un intervalo dentro del cual el consumidor debe ser atendido, el intervalo en el depósito es llamado horizonte de programación. En este tipo cada consumidor está asociado con un intervalo de tiempo llamado Time Window (Ventana de Tiempo). En el instante en el que los vehículos salen del centro de distribución, se da el tiempo de recorrido para cada arco y así mismo un tiempo de servicio adicional para cada consumidor. El servicio de cada consumidor debe empezar dentro de la ventana de tiempo asociada y el vehículo debe parar en el centro de consumo por instantes de tiempo<sup>13</sup>. En caso que el vehículo llegue antes del tiempo establecido, este debe esperar hasta el instante

---

11 PRASAD Chalasani and RAJEEV Motwani. Approximating capacitated routing and delivery problems. *SIAM Journal on Computing*, 28(6):2133–2149, 1999.

12 BIANCO L., MINGOZZI A., RICCARDELLI S., and SPADONI M.. Exact and heuristic procedures for the traveling salesman problem with precedence constraints, based on dynamic programming. *INFOR*, 32(1):19{32, 1994.

13 HERNÁN RESTREPO Jorge, MEDINA Pedro Daniel y CRUZ Eduardo Arturo, “Un problema logístico de programación de vehículos con ventanas de tiempo”, *Scientia et Technica – Universidad Tecnológica de Pereira*, Vol. 14, No 39, 2008.

de tiempo en el que el servicio deba empezar. Las ventanas de tiempo están definidas de tal manera que se asume que todos los vehículos salen del centro de distribución en el tiempo cero.

En este problema se debe encontrar una cantidad de recorridos simples con el mínimo costo de tal manera que cada ruta o recorrido visita el centro de distribución, cada centro de consumo es visitado solamente por una ruta, la suma de las demandas de los centros de consumo visitados por un recorrido no exceda la capacidad del vehículo, para cada centro de consumo el servicio comienza dentro de la ventana de tiempo y el vehículo se detiene por instantes de tiempo. Este tipo de problema tiene extensiones como VRPMTW, VRPTD y VRPSTW.

Este problema es también abordado en la tesis doctoral, para el cual usan el método llamado descomposición de Dantzig Wolfe (Dantzig & Wolfe, 1960). En este método el problema es dividido en dos, el problema maestro relacionado con el conjunto de particiones del problema que garantiza que cada cliente es visitado exactamente una vez, y el sub-problema es el problema de la ruta más corta, con restricciones adicionales (capacidad y ventana de tiempo)<sup>14</sup>. Esta tesis presenta de una manera clara los algoritmos usados y la parte matemática. Es un material para ser tenido en cuenta en el proyecto a desarrollar. En otro trabajo se presenta una solución para este problema con algoritmos genéticos<sup>15</sup>. El propósito fundamental de este trabajo es ser hábil para organizar diferentes rutas para cualquier problema de recolección o distribución para satisfacer todas las restricciones impuestas. Algunos algoritmos fueron implementados para la experimentación en el caso de criterio único y el de multi-criterio.

---

14 Parallelization of the Vehicle Routing Problem with Time Windows. PhD thesis, 2001.

15 MULTICRITERIA GENETIC ALGORITHMS FOR THE VEHICLE. Malek Rahoual, Boubekeur Kitoun, Mohamed-Hakim Mabed, and Vincent Bachelet † Féthia Benameur, MIC'2001 - 4th Metaheuristics International Conference.

En 1989, H. Min (Min, 1989) se interesó por un problema de la vida real de transporte de libros en una biblioteca, y desde ahí, planteó por primera vez la variación del VRP con entrega y recolección simultánea (VRPSPD). En su trabajo, planteó una aproximación a la solución que consistía en lo siguiente: (i) En primer lugar los clientes son “agrupados” (clusterizados) de forma que la capacidad del vehículo no sea excedida en cada grupo; (ii) un vehículo es asignado a cada cliente; y (iii) para cada grupo de clientes se resuelve el Problema del Agente Viajero (TSP)<sup>16</sup>. Las aplicaciones del VRPSPD son encontradas frecuentemente en los sistemas de distribución de las cadenas de abarrotes y alimentos, donde cada tienda de abarrotes usualmente presenta demandas tanto de entrega (comida o bebidas frescas) como de recolección (alimentos vencidos o botellas vacías) y es atendida en una sola visita del proveedor.

Respecto a los métodos de solución, de la revisión bibliográfica se hallaron tres categorías: métodos exactos, heurísticas y metaheurísticas.

Los métodos exactos son eficientes cuando la cantidad de variables no es considerable debido a restricciones de tiempo computacional y la limitación de memoria. Dentro de los métodos exactos se podría hablar de tres clases: búsqueda directa de árbol en la cual dicha búsqueda se realiza sobre todos los nodos de un árbol de acuerdo a criterios específicos propios de cada método como lo son: el algoritmo de asignación de cota inferior<sup>17</sup>, el algoritmo de ramificación y acotamiento, el árbol del centro de k-grados (k-degree center tree algorithm)<sup>18</sup> programación dinámica propuesta por Eilon, Watson Gandy y

---

16 GOKSAL, F.P., KARAOGLAN, I., ALTIPARMAK, F. A Hybrid Discrete Particle Swarm Optimization for Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pickup and Delivery. Jan. 2012, Computers & Industrial Engineering, 2012.

17 LAPORTE Gilbert, “The Vehicle Routing Problem: An overview of exact and approximate algorithms”, European Journal of Operational Research, Vol. 59, 1991, pp 345-358

18 YEPES PIQUERAS Víctor, “Optimización heurística económica aplicada a las redes de transporte del tipo VRPTW”, tesis doctoral, Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos – Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, 2002.

Christofides en 1971.; programación lineal y entera, dentro de esta clasificación se encuentra: el método de partición y generación de columnas, el método de flujo de vehículos de 2 índices y 3 índices el cual fue desarrollado para CVRPTW por Fisher y Jaikumar, 1981 (Fisher & Jaikumar, 1981) igualmente la formulación de 2 índices.

Las heurísticas proporcionan soluciones de aceptable calidad mediante la exploración del espacio de búsqueda<sup>19</sup>. El primer algoritmo que resulto efectivo para resolver el VRP en 1964 fue propuesto por Clarke y Wright (Clarke & Wright, 1964). Las heurísticas clásicas para resolver el VRP fueron desarrolladas entre 1960 y 1990<sup>20</sup>. Las cuales se clasifican en<sup>21</sup>: métodos constructivos como los algoritmos de los ahorros (Savings Algorithms) comprenden el algoritmo de los ahorros de Clarke y Wright, el algoritmo de los ahorros mejorado y el algoritmo de los ahorros basado en coincidencia (Matching-Based Savings Algorithms) y las heurísticas de inserción se encuentran dos algoritmos de dos fases cada uno, que aplican a problemas con un número de vehículos no específico. Estas heurísticas crean soluciones mediante sucesivas inserciones de clientes en las rutas; La heurística de inserción secuencial de Mole & Jameson (Mole & Jameson, 1976) utiliza parámetros para expandir una ruta en construcción; La heurística de inserción en paralelo de Christofides, Mingozzi & Toth (Christofides, Mingozzi, & Toth, 1979) es una heurística de inserción en dos fases que utiliza dos parámetros controlados  $\lambda$  y  $\mu$ <sup>22</sup>.

---

19 WEE-KIT Ho, JUAY CHIN Ang y ANDREW Lim, "A hybrid search algorithm for the vehicle routing problem with time windows", International Journal on Artificial Intelligence Tools, Vol. 10, NO.3, 2001, pp 431-449.

20 AYALA RODRÍGUEZ Alexander y GONZÁLEZ BUTRÓN Edgar, "Asignación de rutas de vehículos para un sistema de recolección de residuos sólidos en la acera", Revista de Ingeniería - Universidad de Los Andes, No. 13, 2001, pp 5-11.

21 CONTARDO VERA Claudio Andrés, "Formulación y solución de un problema de ruteo de vehículos con demanda variable en tiempo real, trasbordos y ventanas de tiempo", Memoria para optar al título de ingeniero civil matemático, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, Santiago de Chile, Chile, 2005.

22 LAPORTE Gilbert, REANUD Jacques y BOCTOR Favez, "An improved petal heuristic for the vehicle routing problem", The Journal of the Operational Research Society, Vol. 47, No. 2, 1996, pp. 329- 336.

En los métodos de dos fases se encuentran: los métodos de asignación elemental Métodos de Agrupamiento Elemental (Elementary Clustering Methods): En este tipo de métodos se encuentran el algoritmo de barrido (sweep algorithm), el algoritmo basado en asignación generalizada (generalized-assignment-based algorithm) y la heurística basada en localización (location based heuristic); el algoritmo de ramificación y acotamiento truncados (Truncated Branch and Bound), en este algoritmo el árbol de búsqueda tiene tantos niveles como rutas de vehículos y cada nivel contiene un conjunto de rutas de vehículos; el algoritmo de los pétalos (Petal Algorithms). Este algoritmo es una extensión del algoritmo de barrido y se utiliza para generar varias rutas llamadas pétalos con el fin de hacer una selección final resolviendo un Set Partitioning Problem; el método de rutear primero y asignar después (Route-First, Cluster-Second Methods), este método consta de dos fases. En la primera se calcula una gran ruta que visita a todos los clientes resolviendo un TSP sin tener en cuenta las restricciones del problema. Luego en la segunda fase, esta ruta gigante se descompone en varias rutas factibles; y los procedimientos de búsqueda local (Local Search Procedures) se aplican para mejorar una solución ya obtenida, en estos procedimientos se define un conjunto de soluciones vecinas y parte de una solución primaria para luego reemplazarla por una solución vecina con menor costo<sup>23</sup>. Entre los diferentes procedimientos de búsqueda local se pueden observar: el operador  $\lambda$  (Lin S. , 1965), el algoritmo de Lin-Kernighan (Lin & Kernighan, 1973) , el operador Or-opt (Or, 1976) , operador de Van Breedam (Van Breedam, 1995) , GENI y GENIUS (Gendreau, Hertz, & Laporte, 1994) , algoritmo de transferencias cíclicas (Thompson & Psaraftis, 1993).

---

23 LAPORTE Gilbert, GENDREAU Michel y HERTZ Alain, "An approximation algorithm for the traveling salesman problem with time windows", Institute for Operation Research and de Management Science – Operations Research, Vol. 45, No. 4, 1998, pp 639-641.

Las metaheurísticas fueron desarrolladas hacia finales de la década de los 90 y se caracterizan por que realizan un procedimiento de búsqueda para encontrar soluciones de aceptable calidad<sup>24</sup>. Dentro de estas se encuentran Recocido Simulado<sup>25</sup>, Redes Neuronales<sup>26</sup>, Búsqueda Tabú<sup>27</sup>, Algoritmos Genéticos<sup>28</sup>, Algoritmos de Hormigas y Búsqueda de vecindades<sup>29</sup>.

Los algoritmos genéticos (Genetic Algorithms) inspirados en la teoría de la evolución darwiniana, este algoritmo parte de una población inicial de individuos que representan soluciones iniciales factibles, pero sub-óptimas<sup>30</sup>, luego las soluciones obtenidas en el algoritmo evolucionan mediante la aplicación de tres operadores: selección, cruzamiento y mutación que combinan y modifican a los individuos de la población creando una nueva<sup>31</sup>. Estos algoritmos solucionan el VRP clásico generando soluciones iniciales, las cuales representan cada viaje como una secuencia de ciudades, luego cruza dos soluciones, toma una sub-ruta que no necesariamente cumpla que inicie y termine en el depósito, y se determina el cliente más cercano que no esté en la sub-ruta, si la ruta no fuera factible esta

---

24 CORDEAU Jean-Francois, GENDREAU Michel, LAPORTE Gilbert, POTVIN Jean-Yves y SEMET Frédéric, "A guide to vehicle routing heuristics", The Journal of the Operational Research Society, Vol. 53, No. 5, 2002, pp 512- 522.

25 BRÄYSY Olli y WOUT Dullaert, "A fast evolutionary metaheuristic for the VRP with time windows", International Journal on Artificial Intelligence Tools, Vol. 12, 2003, pp 153-172.

26 CRESPO Eric, MARTÍ Rafael y PACHECO Joaquín, "Procedimientos Metaheurísticos en Economía y Empresa", Revista Electrónica de Comunicaciones y trabajos de ASEPUMA, 1ª Edición, Tirant lo Blanch, Valencia, España, 2007

27 GONZÁLEZ VAGAS Guillermo y GONZÁLEZ ARISTIZÁBAL Felipe, "Metaheurísticas aplicadas al ruteo de vehículos. Parte 1: formulación del problema", Revista de Ingeniería e Investigación – Universidad Nacional de Colombia, Vol. 26, No.3, 2006, pp 149-156.

28 GONZÁLEZ VAGAS Guillermo y GONZÁLEZ ARISTIZÁBAL Felipe, "Metaheurísticas aplicadas al ruteo de vehículos. Parte 2: algoritmo genético, comparación con una solución heurística", Revista de Ingeniería e Investigación – Universidad Nacional de Colombia, Vol. 27, No.1, 2007, pp 149- 157.

29 GONZÁLEZ VAGAS Guillermo y GONZÁLEZ ARISTIZÁBAL Felipe, "Metaheurísticas aplicadas al ruteo de vehículos. Parte 3: Genetic Clustering and Tabu Routing", Revista de Ingeniería e Investigación – Universidad Nacional de Colombia, Vol. 27, No.2, 2007, pp 106-113.

30 MOURKOUSIS George, PROTONOTARIOS Matew y Theodora Varvarigou, "Application of genetic algorithm to a large-scale multiple-constraint vehicle routing problem", International Journal of Computational Intelligence and Applications, Vol. 3, No. 1, 2003, pp 1-21.

31 HILLIER Frederick, Lieberman Gerald, "Introducción a la Investigación de Operaciones", Mc Graw Hill, novena edición, 2010.

se particiona generando de esta manera un descendiente u copia modificada de una de las soluciones. Para el VRP se consideran usualmente cuatro operadores de mutación: intercambio de la posición de dos nodos en una ruta, inversión del orden de la ruta; reinserción de un nodo en una ruta diferente a la original y selección de una su-bruta para insertarla en otro lugar de la solución<sup>32</sup>.

Por su parte los algoritmos de hormigas (Ant Colony optimization) inspirados en la estrategia que usan las colonias de hormigas en la búsqueda de alimentos, el modo de funcionamiento de estos algoritmos se resume así: Se inicializa el algoritmo colocando una hormiga en cada nodo. Para la construcción de caminos, se utiliza una regla probabilística que asigna una probabilidad igual a cero si el nodo ya fue visitado y diferente a cero para el caso contrario. La hormiga visita el nodo que tenga una probabilidad mayor. En cada arco, se actualiza la “feromona” y finaliza si se obtiene una solución inferior a una cota preestablecida, de lo contrario se recalculan probabilidades y la hormiga sigue construyendo soluciones<sup>33</sup>.

La búsqueda tabú (Tabu Search), consiste en realizar una búsqueda local aceptando soluciones que mejoran el comportamiento del costo de tal manera que en cada iteración al algoritmo se mueve de una solución (st) a otra mejor (st+1) dentro de un subconjunto de soluciones cercanas<sup>34</sup>. Para el VRP se debe responder a seis criterios: Algoritmo de búsqueda local, se genera una solución inicial de prueba, la cual puede ser cualquier secuencia de nodos, se inician las iteraciones seleccionando el mejor vecino inmediato que no esté descartado de la lista Tabú; Estructura de vecindad, se generan dos arcos (que unan dos nodos) y se eliminan dos de la solución actual, debe tenerse cuidado de descartar subtours

---

32 PETCH R. J. y SALHI S., “A GA Based Heuristic for the Vehicle Routing Problem with Multiple Trips”, *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, Vol. 6, No. 4, 2007, pp 591-613.

33 DOERNER Karl et all. “Savings Ants for the Vehicle Routing Problem”, *Lecture Notes in Computer Science – Applications of Evolutionary Computing*, Vol. 2279, 2001, pp 73-109.

34 GUPTA D.K. “Tabu search for vehicle routing problem”, *Intern. J. Computer Math*, Vol. 79, No. 6, 2002, pp 693-701.

que solamente inviertan la dirección de la ruta; Forma de los movimientos Tabú, enumerar los arcos de tal manera que un subtour inverso se convierta en tabú si los dos arcos que se eliminan se encuentren en la lista; Adición de un movimiento Tabú, en cada iteración del algoritmo, después de incluir dos arcos a la solución actual, también se incorporan estos dos arcos a la lista tabú; Tamaño máximo de la lista Tabú, se debe generar un criterio bajo el cual un par de arcos se inserte a la lista y salgan los que llevan más tiempo en ella; Regla de detención, criterio para detener el proceso puede ser después de un número consecutivo de iteraciones, donde no se produzca mejoras en la solución<sup>35</sup>.

Otras metaheurísticas utilizadas en el problema VRP son: Memoria Adaptativa (Adaptative Memory), es una mejora de la búsqueda tabú propuesto por Rochat y Taillard en 1995 (Rochat & Taillard, 1995) . Construye buenas soluciones mediante la combinación de otras buenas soluciones. Una memoria contiene los componentes de las soluciones visitadas y periódicamente se construye una nueva utilizando datos en la memoria y se mejora mediante un procedimiento de búsqueda local, la mejor solución es utilizada para actualizar la memoria<sup>36</sup>; Redes Neuronales (Neural Networks), modelo computacional compuesto de unidades interconectadas a través de conexiones fuertes, parecidas a las neuronas del cerebro humano. Se envía una señal desde una unidad a otra mediante una conexión y se modula a través del peso asociado; Recocido Simulado (Simulated Annealing), Método de búsqueda local aleatorio, en el cual una modificación a la solución actual que conduzca a un incremento en el costo solución puede ser aceptada; Recocido Determinístico (Deterministic Annealing), funciona de una manera similar al recocido simulado, salvo que utiliza una regla determinística para aceptar un movimiento.

---

35 LAPORTE Gilbert, HERTZ Alain y MITTAZ Michel, "A tabu search heuristic for the capacited arc routing problem", Institute for Operation Research and de Management Science – Operations Research, Vol. 48, No. 1, 2000, pp 129-135.

36 OLIVERA Alfredo y VIERA Omar. "Adaptive memory programming for the Vehicle routing problem with multiple trips", Computers and Operation Research, Vol. 34, 2007, pp 28–47.

Desde el año de 1990 Fleischmann introdujo la idea el VRP con uso múltiple de los vehículos (Fleischmann, 1990) , es decir se consideró un VRP en el cual un vehículo puede hacer más de un viaje en un periodo de planeación<sup>37</sup>. Brandao y Mercer en el año de 1997 (Brandao & Mercer, 1997) trabajaron este supuesto como VRP con múltiples viajes<sup>38</sup>, usando la búsqueda Tabú para su solución. Hasta el 2002 Prins (Prins, 2002) se introdujo el VRP con viajes múltiples de flota heterogénea, más adelante aparece el VRP con viajes múltiples periódico y con viajes múltiples independientes.

Los métodos de soluciones más usados para resolver las variaciones del VRP son en su mayoría metaheurísticas, entre ellas se pueden resaltar: búsqueda Tabú, algoritmos genéticos, algoritmo de memoria adaptativa, búsqueda de vecindades entre otros.

Entre los años 2002 y 2011, se desarrollaron métodos exactos de solución adaptables al CVRP y al VRPTW basados en primer lugar en la formulación de algoritmos de partición de conjuntos permitiendo la incorporación de restricciones adicionales que pueden ser usadas en la modelación de una situación específica, y en segundo lugar algoritmos basados en la generación de columnas, estos se derivan de pequeñas modificaciones de los algoritmos originales del VRP<sup>39</sup>.

---

37 AHMET Sen y KEREM Bülbül, "A survey on multi trip vehicle routing problem", VI International Logistics and Supply Chain Congress, Turkiye, 2008.

38 ERIC D.Taillard, LAPORTE Gilbert y GENDREAU Michel, "Vehicle routeing with multiple use of Vehicles", The Journal of the Operational Research Society, Vol. 47, No. 8, 1996, pp 1065- 1070.

39 BALDACCE Roberto, MINGOZZI Aristide y ROBERTI Roberto, "Recent exact algoritms for solving the vehicle routing problem under capacity and time windows constraints", European Journal of Operational Research, Vol. 218, 2011, pp 1-6.

Este desarrollo continuo hasta hoy en día un ejemplo de esto propone una variante del algoritmo de optimización de forrajeo bacteriana (OFB)<sup>40</sup> con la longitud del paso quimiotaxis variable en el tiempo y la estrategia global de aprendizaje que llamados aprendizaje de adaptación integral en la optimización de búsqueda de alimento bacteriana (ALCBFO). Un modelo de modulación no lineal decreciente de adaptación se utiliza para mantener un equilibrio bien entre la exploración y explotación del algoritmo propuesto. El mecanismo de aprendizaje integral mantiene la diversidad de la población bacteriana y por lo tanto alivia la convergencia prematura. En comparación con el clásico GA, PSO, la OFB original y sus dos versiones del OFB mejorado (OFB-LDC y OFB-NDC), el ACLBFO propuesto muestra un rendimiento significativamente mejor en la solución de problemas multimodales. También evaluaron el desempeño del método ACLBFO de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW). En comparación con los otros tres algoritmos BFO, el algoritmo propuesto es superior y confirma su potencial para resolver problemas de rutas de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW).

En los últimos años Colombia ha despertado su interés por el estudio de problemas VRP, especialmente en aplicaciones concretas, esto se evidencia de esta manera en la participación de congresos internacionales como el CLAIO (congreso latinoamericano de investigación de operaciones).

A continuación, se presentan algunas ponencias realizadas por investigadores colombianos:

---

40 LIJING, T., FUYONG, L., & HONG, W. Adaptive comprehensive learning bacterial foraging optimization and its application on vehicle routing problem with time windows. *Neurocomputing*, 2-7. 2015

- “Hybrid heuristic for the inventory location-routing problem”. En él se presenta un modelo de programación lineal entera mixta como método de solución a un problema de ruteo y localización de inventario<sup>41</sup>.
- “Sistema de soporte a decisiones para el diseño de rutas escolares en Coomunclaver Ltda.”. En este trabajo se implementa un algoritmo híbrido y una inserción del CVRP mediante un lenguaje de programación orientado a objetos con un sistema de información geográfica para resolver el VRP enfocado al diseño de rutas escolares<sup>42</sup>.
- “Vehicle routing problem with random components for the collection of perishable products”. En este trabajo se presenta un modelo matemático para solucionar un problema de tipo SVRP para la recogida de productos perecederos, el método de solución aplicado es un híbrido de dos fases compuesto por métodos exacto y búsqueda tabú<sup>43</sup>.

---

41 GUERRERO W. J., Prodhon C., VELASCO N. y AMAYA C. A., “Hybrid heuristic for the inventory location-routing problem”, XVI Latin-Ibero-American Conference on Operation Research / XLIV Brazilian Symposium on Operation Research (XVI CLAIO / XVIV SPBO), session especial No. 105451, Rio de Janeiro, Brazil, 2011

42 ARIAS-OSORIO Javier, DÍAZ BOHÓRQUEZ Carlos Eduardo y LAMOS DÍAZ Henry, “Sistema de soporte a decisiones para el diseño de rutas escolares en Coomunclaver Ltda”, XVI Latin-Ibero-American Conference on Operation Research / XLIV Brazilian Symposium on Operation Research (XVI CLAIO / XVIV SPBO), ponencia No. 102217, Rio de Janeiro, Brazil, 2011.

43 GONZÁLEZ LA ROTTA Elsa Cristina y ORJUELA CASTRO Javier Arturo, “Vehicle routing problem with random components for the collection of perishable products”, XVI Latin-Ibero-American Conference on Operation Research / XLIV Brazilian Symposium on Operation Research, (XVI CLAIO / XVIV SPBO), poster No. 105405, Rio de Janeiro, Brazil, 2011.

## 7. MARCO DE ANTECEDENTES

Carlos Andrés Zabala Arias, (2005)<sup>44</sup> de la Universidad de los Andes en su tesis de maestría en ingeniería industrial implemento sistema de colonias de hormigas con búsqueda local para dar solución al VRPTW con restricciones de capacidad. La estrategia de solución se implementó en 6 problemas conocidos en la literatura, se realizó un diseño de experimentos y un análisis estadístico de cada uno de ellos con el objeto de encontrar las mejores soluciones y conocer el efecto de los diferentes parámetros del sistema de colonia de hormigas en la función objetivo. Finalmente comparó las soluciones obtenidas con las soluciones reportadas en problemas de literatura para todas las estancias de 25, 50 y 100 clientes.

Juan José Bravo Bastidas<sup>\*</sup>, Juan Carlos Osorio Gómez y Juan Pablo Orejuela Cabrera,(2009)<sup>45</sup> pertenecientes a la Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística de la Universidad del Valle modelaron una metodología de priorización de despachos que combinaba la información proporcionada por varios de estos factores agrupados en una serie de indicadores de naturaleza logística, para el caso de los despachos desde una bodega a  $N$  puntos de venta, utilizando AHP como herramienta Multicriterio y determinando así la importancia de un cliente respecto a otro, para el caso de un sistema de reabastecimiento periódico de inventario, propusieron una metodología operativa para priorización de despachos en un entorno dinámico de envíos y mostraron la conveniencia de decidir acerca del despacho de vehículos con base a un grupo de indicadores de índole logístico en lugar de un solo indicador

---

44 ZABALA ARIAS Carlos Andrés, Implementación del sistema de colonia de hormigas con búsqueda local al problema de ruteo de vehículos con capacidad y ventanas de tiempo (CVRPTW), 2005, Universidad de los Andes

45 BRAVO BASTIDAS Juan José, OSORIO GÓMEZ Juan Carlos y OREJUELA CABRERA Juan Pablo Modelo para la priorización dinámica de despachos de vehículos utilizando el proceso analítico jerárquico, 2009, Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística- Universidad del Valle.

Julio Mario Daza, Jairo Montoya y Francesco Narducci, (2010)<sup>46</sup> de la Escuela de Ingenieros de Antioquia presentaron un procedimiento alternativo para resolver el problema de ruteo de vehículos con limitaciones de capacidad y flota homogénea. Propusieron un algoritmo metaheurística que constaba de la combinación de dos fases: Diseño de rutas y planificación de la flota, esta alternativa se aplicó sobre una instancia generada aleatoriamente y una instancia real arrojando resultados significativos al compararse con las heurísticas eventuales. Concluyeron que la aplicación de modelo de modelos heurísticos que implementan un proceso de programación de operaciones vehiculares puede presentar un comportamiento homogéneo y confiable ante diversas situaciones problemáticas reales del ruteo de vehículos.

En la Universidad Industrial de Santander - UIS, Adriana Lozada Díaz y Ricardo Andrés Cadena González (2012)<sup>47</sup>, abordaron el problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo en el área de la logística, para esta investigación se estudiaron y sistematizaron cinco heurísticas de construcción de rutas las cuales permitieron solucionar las instancias más comunes del VRPTW de manera rápida y eficiente, encontraron que las heurísticas que arroja mejores resultados en cuanto al costo de rutas era la heurísticas de inserción de Solomon. Diseñaron un código en lenguaje MATLAB capaz de solucionar el problema documentado y un documento tipo manual de procedimientos de la herramienta programada.

Juan Sepúlveda, John Wilmer Escobar y Wilson Adarme Jaimes,(2014)<sup>48</sup> de la Universidad Nacional de Colombia, analizaron las condiciones particulares de las

---

46DAZA Julio Mario, MONTOYA Jairo y NARDUCCI Francesco, Resolución del problema de enrutamiento de vehículos con limitaciones de capacidad utilizando un procedimiento metaheurístico de dos fases, 2010, Escuela de Ingeniería de Antioquia, Medellín (Colombia).

47 LOZADA DÍAZ Adriana y CADENA GONZÁLEZ Ricardo Andrés, Solución del problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW) mediante métodos heurísticos, 2012, Facultad de Ingenierías Físico mecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales, Universidad Industrial de Santander.

48 SEPÚLVEDA Juan, ESCOBAR John Wilmer y ADARME JAIMES Wilson Un algoritmo para el problema de ruteo de vehículos con entregas divididas y ventanas de tiempo (SDVRPTW) aplicado

PYMES del comercio al por menor, identificando recursos insuficientes en el uso de herramientas robustas para la solución de problemas de ruteo de vehículos mediante una heurística de inserción sencilla para el problema de ruteo de vehículos con entrega divididas y ventanas de tiempo (SDVRPTW), implementada en una plataforma tecnológica de fácil acceso como Microsoft Excel, validaron que el SDVRPTW es un enfoque adecuado para abordar el problema de ruteo de vehículos en compañías PYMES, obteniendo resultados computacionales que muestran cómo la heurística propuesta logra reducir aproximadamente en un 50% el número de vehículos empleados en las rutas por dichas compañías.

## 8. MARCO TEÓRICO

### 8.1 OPTIMIZACION COMBINATORIA

La optimización combinatoria es una rama de la optimización en matemáticas aplicadas y la ciencia de la computación, la cual estudia los problemas que se caracterizan por presentar una cantidad finita de soluciones factibles y trabajar con variables discretas.

En este sentido, la optimización combinatoria se dedica a la búsqueda de la mejor configuración de un conjunto de elementos presentes en un problema<sup>49</sup>. Los problemas de optimización combinatoria son aquellos que buscan una solución “óptima” o la que encuentra el valor máximo o mínimo dentro de un espacio finito o infinito numerable de soluciones factibles definido por la función objetivo.

El problema de optimización combinatoria se puede expresar en la siguiente manera<sup>50</sup>:

Minimizar o maximizar

$F s; \forall s \in S \text{ en } Z^E$   $Z$  es el conjunto de números enteros

Donde el conjunto  $E: \{1, 2, 3, n\}$

---

49 SÁNCHEZ, M. G. Las matemáticas del siglo XX: una mirada en 101 artículos. Págs. 115-120. Universidad de la Laguna, Sociedad Canaria Isaac Newton de profesores de matemáticas: Nivola. 2000.

50 GÓMEZ, David y RANGEL, Carlos. Formular las Metaheurística Búsqueda Tabú y Recocido Simulado para la solución del CVRP (Capacitated Vehicle Routing Problem). [en línea]. Bucaramanga (2011); 150 h. Trabajo de grado (Ingeniería Industrial). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas.

El conjunto de soluciones  $S$  es un conjunto del subconjunto  $Z^E$ .

Una función objetivo definida en  $Z^E$  a  $R$ .

El problema de optimización consiste en buscar una solución Dónde:

$s^* \in S$  tal que  $F s^* < F s$  para un problema de minimización.

$s^* \in S$  tal que  $F s^* > F s$  para un problema de maximización.

Dónde:

$F s$  Representa la función objetivo y mide la calidad de las decisiones

$S$  Es el conjunto de soluciones factibles que satisfacen ciertas restricciones del problema.

El objetivo entonces es, encontrar el máximo o el mínimo de una determinada función sobre un conjunto finito de soluciones.

### **Problemas combinatorios**

Los problemas de optimización combinatoria se encargan de encontrar la mejor solución posible o solución óptima, aquella que minimice o maximice determinada función objetivo, sujeta a un conjunto de restricciones<sup>51</sup>. Cuando hablamos de maximizar lo que se quiere es aumentar las utilidades, ventas, beneficios, rentabilidad entre otros, cuando se quiere minimizar o disminuir se habla de

---

51 MAREK L. A note on robustness tolerances for combinatorial optimization problems. Information Processing Letters. Vol. 110. 2010. p.725-729.

costos, paradas, distancias, tiempos inoperativos. De esta manera se podría decir que el problema de ruteo de vehículos es un problema de minimización, su objetivo es diseñar un modelo que establezca la mejor ruta con el menor costo, usando la cantidad mínima de vehículos.

Un modelo, “es una representación aproximada de la realidad. La construcción de un modelo implica la definición de un problema y la traducción del problema a relaciones matemáticas”<sup>52</sup>.

Los problemas combinatorios constan de los siguientes elementos:

- una función objetivo (F.O) que mide la efectividad de cada sistema de decisiones.
- un conjunto de variables de decisiones (variables independientes).
- un conjunto de restricciones que representan las limitaciones bien sea de capital, recursos etc.

Los problemas genéricos de optimización combinatoria requieren encontrar la solución más óptima sobre un conjunto finito de soluciones<sup>53</sup>. Por ende, las variables a usar han de ser de carácter discreto, restringiendo su dominio a una serie finita de valores. Si agrupamos las variables en conjuntos que representan grafos u objetos, lo ideal es ubicar dichas variables en determinadas posiciones, la técnica a usar es de carácter combinatorio.

---

52 TAHA, Hamdy. Investigación de Operaciones. 7ma. Edición. Pearson Educación. México, 2004. P3.

53 MAREK L. A note on robustness tolerances for combinatorial optimization problems. Information Processing Letters. Vol. 110. 2010. p.725-729.

Los problemas de rutas o redes de transporte se pueden presentar por grafos. Los vértices son los lugares que se deben visitar o las ciudades a las que hay que transportar ciertos bienes o servicios. Los arcos son las calles, carreteras, oleoductos, cables de transmisión de mensajes, etc., que sirven como vías de comunicación.

Los nuevos estudios de la optimización combinatoria se deben a la llegada de la computadora digital moderna. La mayoría de los métodos actualmente aceptados en la solución de los problemas de optimización combinatoria difícilmente se habrían tomado en serio hace 25 años, por la sencilla razón de que nadie había podido llevar a cabo los cálculos necesarios<sup>54</sup>.

Los problemas de optimización combinatoria son muy comunes en la vida real, se presentan tanto en distribución como en la organización de la producción, en el diseño de redes de telecomunicación y en problemas de ingeniería y reingeniería de software<sup>55</sup>. Estos tipos de problemas suelen clasificarse según la dificultad computacional que presentan.

## **8.2. COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL**

Desde el ámbito computacional un problema está conformado por “un conjunto de datos de entrada, un conjunto de datos de salida y una función que asigna a cada dato del problema, una salida correcta del mismo”<sup>56</sup>. En primer lugar, se deben definir las instancias del problema, los cuales son los datos de entrada

---

54 LAWLER, Eugene. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. Courier Dover, (1976); p 1-4. [en línea] [Consultado 7 Jun. 2013]. disponible en: <<http://www.plouffe.fr/simon/math/CombinatorialOptimization.pdf>>.

55 MARTÍ, Rafel. Procedimientos metaheurísticos en optimización combinatoria. En: Departament d'Estadística i Investigació Operativa. Facultat de Matemàtiques. Universitat de València. 60 p.

56 SCONTENT [en línea] disponible en: [https://scontent-atl3-1.xx.fbcdn.net/hphotos-xpl1/v/t1.0-9/12705734\\_1189094067784657\\_1215520532917095492\\_n.jpg?oh=2328012ef720c767267034e9c9a5c9ee&oe=5736628E](https://scontent-atl3-1.xx.fbcdn.net/hphotos-xpl1/v/t1.0-9/12705734_1189094067784657_1215520532917095492_n.jpg?oh=2328012ef720c767267034e9c9a5c9ee&oe=5736628E)

(parámetros). El problema puede ser resuelto mediante la implementación de un algoritmo, siendo una secuencia de pasos a seguir, que transforma los datos de entrada en datos de salida.

La complejidad computacional determina la eficiencia del algoritmo de acuerdo a la solución del problema. Esta eficiencia suele evaluarse mediante el tiempo que tarda el algoritmo en encontrar la solución o en ofrecer una salida y/o mediante el espacio computacional utilizado por el mismo, donde el espacio es básicamente el almacenamiento de datos en la computadora. De acuerdo a la complejidad computacional, los problemas pueden clasificarse en problemas tratables o problemas no tratables<sup>57</sup>.

Un problema es tratable cuando puede ser resuelto en tiempo polinómico (P), donde el tiempo de ejecución crece de forma polinomial con el tamaño de los datos de entrada. Sin embargo, existen problemas que no se pueden resolver en tiempo polinómico, pero las soluciones posibles pueden ser examinadas mediante métodos estocásticos para determinar buenas soluciones a esos problemas, este tipo de problemas son denominados NP. Dentro de la clase NP, se encuentra la subclase NP-completo, que son los más difíciles de resolver. La característica principal es que cualquier problema NP se puede transformar en él con un coste adicional en tiempo polinomial. Otra clase de problema es el Np-duro (NP-Hard), para los cuales al igual que para los NP y NP-completos no existe un algoritmo que determine su solución óptima en tiempo polinomial.

El problema de ruteo de vehículos se considera un problema de optimización combinatorio de tipo NP-Hard debido a que su solución óptima sólo puede ser obtenida para pequeñas instancias del problema.

---

57 MARTÍNEZ GARCÍA, F. Javier; MORENO PÉREZ, José A. Optimización por enjambre para la p-mediana continua y discreta. En: Actas del U congreso Español sobre Metaheurísticas, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados. 2007, p. 53-60, ISBN 978-84-690-3470-5.

### 8.3. MÉTODOS DE SOLUCIÓN

Los problemas de optimización combinatoria, tiene una gran importancia en aplicaciones prácticas, científicas e industriales, se han desarrollado diferentes métodos para solucionarlos, dando lugar a dos clases exactos y aproximados.

**Métodos exactos:** este tipo de métodos se caracterizan por “encontrar la solución óptima para cualquier instancia de cualquier problema en un tiempo acotado”<sup>58</sup>. Siendo muy utilizado para resolver problemas de tipo NP-HARD, aunque presenta cierto inconveniente por sus tiempos de desarrollo bastante elevado, ya que la solución crece exponencialmente con el tamaño del problema, gracias a los métodos aproximados se logra obtener una solución muy cercana a la óptima en tiempos razonables. A continuación, se describen las características básicas de algunos métodos exactos.

**Branch and Bound**<sup>59</sup> es uno de los métodos más usados para resolver problemas **NP-Hard.**, usa una estrategia de fraccionar y dominar, es decir, este método funciona a través de un árbol de búsqueda que inicia con un nodo denominado raíz y es quien se relaciona directamente con el problema a resolver. A partir de este surgen nuevos nodos donde el espacio de solución es dividido en sub-problemas, los cuales luego son optimizados de manera individual<sup>60</sup>.

Otro procedimiento muy utilizado es el **Método simplex** fue desarrollado en 1947 por George Dantzig. Este método parte de una solución inicial, y examina si alguna de las aristas de la posición actual conduce a una tasa positiva de

---

58 CHICANO GARCÍA, José Francisco. Metaheurísticas e Ingeniería del Software. Tesis doctoral. Universidad de Málaga, Lenguajes y ciencias de la computación. 2007. p, 46.

59 JOURDAN, BASSEUR, y TALBI. Hybridizing exact methods and metaheuristics: A taxonomy. En: European Journal of Operational Research. Diciembre, 2009. vol, 119. no, 3. p, 620–629

60 LI; HONG-GUI; LI, XING-GUO. Image segmentation with pseudo branch and bound algorithm. En: Proceedings of the Eighth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Baoding, 12-15 Julio de 2009, 5 p

mejoramiento de la función objetivo. En caso de presentarse una mejor solución, se realiza una iteración para moverse a esta posición y se examina la tasa de mejoramiento de cada arista de la misma. El algoritmo finaliza, cuando ninguna de las aristas de la actual posición conlleva a una tasa de mejoramiento positiva, estableciendo esta como la solución óptima<sup>61</sup>.

Entre otros métodos exactos aplicados al VRPTW se encuentran Branch and Cut<sup>62</sup>, Branch and Price<sup>63</sup>, Branch and Cut and Price<sup>64</sup>.

**Métodos aproximados:** ofrece la posibilidad de encontrar soluciones en tiempos razonables para los problemas de tipo **NP-Hard**, aunque estas soluciones no son las más óptimas, muchas se consideran muy cercanas a las óptimas. Este tipo de métodos se clasifican en: heurísticas y metaheurísticas.

**Heurísticas:** se puede definir como “un procedimiento que busca buenas soluciones a un costo computacional razonable, aunque no se garantice su optimalidad, e incluso, en algunos casos no se llegue a establecer que tan cerca este de la optimalidad y factibilidad”<sup>65</sup>. Se estableció que una heurística debe cumplir con los siguientes pasos:

1. Debe ser capaz de proporcionar aproximaciones de alta calidad al óptimo global.

---

61 HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. Introducción a la investigación de operaciones. 9° Ed. Ciudad de México, México: Mc Graw Hill. 2010, p. 81-88.

62 ASCHEUER N, FISCHETTI M, GRÖTSCHEL M. Solving the asymmetric traveling salesman problem with time Windows by branch-and-cut. Math Progr 2001; 90:475–506.

63 ADAM N. LETCHFORD, SAEIDEH D. NASIRI, AMAR Oukil. Pricing routines for Vehicle Routing with time windows on road networks. Computers & Operations Research, 2014; 51, 331–337.

64 ROPKE, S. , & CORDEAU, J. F. Branch and cut and price for the pickup and delivery problem with time windows. Transportation Science, 43 (3), 267–286. 2009

65 REEVES, C. Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems. 1995. Mc-Greenhill. Citado por: NASSER A, El-Sherbeny. Vehicle routing with time windows: An overview of exact, heuristic and metaheuristic methods. En: Journal of King Saud University. 2010. vol, 22. p, 126 - 127.

2. Debe ser robusta, es decir, ser flexible a los cambios presentados por el problema.
3. Debe poder aplicarse fácilmente a muchas instancias del problema y, de hecho, poder aplicarse a nuevos problemas a pesar de que casi siempre es desarrollada para la solución de un problema específico.
4. Las heurísticas pueden ser algoritmos estocásticos, pero no deben contener elementos subjetivos<sup>66</sup>.

Las técnicas heurísticas pueden dividirse principalmente en dos categorías: heurística constructiva y heurística de búsqueda local.

**Heurística constructiva** esta heurística añade un elemento más al problema en cada paso que se realiza, partiendo de una estructura inicialmente vacía hasta obtener una solución completa que satisfaciendo las restricciones del problema. Principalmente usado cuando el problema se resuelve mediante decisiones sucesivas como secuencias, rutas, líneas de ensamble entre otros.

**Heurística de búsqueda local** su estrategia se basa en la búsqueda de una mejor solución al rededor del punto en el que se encuentra, comienza su procedimiento desde una solución inicial que no necesariamente es aleatoria, empleando un operador para construir el mejor vecindario, y avanzan buscando mejoras hasta que encuentran una mejor solución en el vecindario, que reemplace la actual. Esta solución es denominada óptimo local. Cabe resaltar que cuando más grande sea el vecindario o vecindad, mayor calidad tendrán las soluciones

---

66 GILLI, M.; WINKER, P. Heuristic Optimization Methods in Econometrics. En: Université de Genève. Octubre 21 de 2007. 48 p.

ofrecidas por el programa, pero también repercutirá en la utilización de más tiempo computacional<sup>67</sup>.

**Metaheurísticas:** es un proceso de generación que guía una heurística subordinada que combina diferentes conceptos para explorar y explotar la búsqueda con la finalidad de encontrar buenas soluciones cercanas al óptimo. La mayoría de metaheurísticas están dirigidas a los problemas de optimización combinatoria. Este tipo de métodos se basan en fenómenos naturales como el comportamiento de las abejas, de las hormigas o de las partículas con el fin de evitar la principal desventaja de las heurísticas, caer en óptimos locales.

Clasificación de las metaheurísticas de Michel Gendreau y Jean-Yves Potvin (2005)<sup>68</sup>:

**Metaheurísticas de trayectoria:** Parten de una solución, y a través de la exploración del vecindario se va actualizando la solución actual, formando así una trayectoria. A diferencia de los procedimientos de población, los métodos de trayectoria manipulan una solución del espacio de búsqueda por iteración.

**Metaheurísticas basadas en población:** En cada iteración estas metaheurísticas trabajan con un conjunto de soluciones que son mejoradas mediante un proceso inteligente que se encarga de explorar el espacio de búsqueda. Dentro de estos métodos se pueden distinguir dos grupos principalmente: algoritmos evolutivos (Evolutionary Algorithms, EAs) y procedimientos alternativos que presentan algunos rasgos de los EAs, pero tienen características particulares que los diferencian.

---

67 GARCÍA SABATER, José Pedro; MAHEUT, Julien. Modelo y métodos de investigación de operaciones. Procedimientos para pensar. Modelado y resolución de problemas de organización industrial mediante programación matemática. En: Universitat Politècnica de València. Grupo de investigación ROGLE. Departamento de organización de empresas. Curso 2011/2012. 181 p.

68 GENDREAU, Michel y POTVIN, Jean-Yves. Metaheuristics in Combinatorial Optimization. En: Annals of Operations Research. 2005. vol,140. p, 189–213

Los Algoritmos evolutivos (EAs) están inspirados en el principio Darwiniano de la selección natural, fundamentado en la capacidad que tienen las especies de evolucionar y adaptarse a su medio ambiente. A partir de este principio, una población de soluciones generada aleatoriamente o mediante un método heurístico, evoluciona desde una generación a otra mediante la aplicación de operadores genéticos: selección, cruce y mutación.

Debido a que estos métodos presentan el inconveniente de que la población mejora en promedio de generación en generación, pero a menudo no generan soluciones casi óptimas, se han desarrollado híbridos en donde se emplean operadores de búsqueda local para reemplazar el proceso de mutación, mejorando la solución hasta encontrar un óptimo local.

**Búsqueda dispersa (SS)** la idea básica del SS (Search Scatter, SS) fue desarrollada por Glover entre 1963 y 1997. Fundamentalmente combina un conjunto de soluciones, llamado conjunto referencia, para crear nuevas soluciones. El procedimiento comienza a partir de un conjunto referencia inicial, generalmente creado mediante heurísticos. Se realizan combinaciones convexas y no convexas de un número variable de soluciones para generar candidatos dentro y fuera de las regiones convexas abarcadas por el conjunto referencia.

Optimización colonia de hormigas, Marco Dorigo junto con otros investigadores, introdujeron los primeros algoritmos ACO en la década de 1990. ACO es una metaheurística basada en el comportamiento de forrajeo de las hormigas reales. En cada ciclo, un número de hormigas artificiales secuencialmente construyen soluciones de manera aleatoria. Cada hormiga elige el siguiente elemento a ser incorporado en su solución actual de acuerdo a la información heurística y la cantidad de feromona asociada con ese elemento. La feromona representa la memoria del sistema, y se relaciona con soluciones previamente construidas.

Fundamentalmente, se define una distribución de probabilidad llamada probabilidad de transición, sobre todos los elementos a ser incorporados en la solución parcial actual. Cada vez que un elemento se selecciona por una hormiga, el nivel de feromona es actualizado adicionando nueva cantidad de feromona y utilizando la tasa de evaporación de feromona, que se encarga de eliminar parte de esta. Cuando todas las hormigas han construido una solución completa, el procedimiento se reinicia con los niveles de feromonas actualizados. Esto se repite para un determinado número de ciclos o hasta que se produce el estancamiento de búsqueda.

**8.3.1. Optimización por enjambre de partículas (PSO).** Esta metaheurística fue introducida por James Kennedy y Russel Eberhat en 1995 (Kennedy & Eberhat, 1995) y se basa en el comportamiento de las abejas. Es así como un enjambre de L abejas o partículas ayuda a la determinación de la solución de un problema de optimización combinatoria. Las partículas tienen una posición que está compuesta por H dimensiones y es la que ofrece una respuesta a la función objetivo del problema; para la actualización de esta posición, cada partícula tiene su vector de velocidad que es quien determina el siguiente movimiento de la misma<sup>69</sup>.

Es así como cada partícula tiene una posición denominada la mejor posición de la partícula (la que hasta el momento ofrece la mejor solución a la función objetivo) y el enjambre como tal tiene la mejor posición global, la cual es la mejor solución a la función objetivo de todas las mejores soluciones ofrecidas por todas las partículas.

El algoritmo original está constituido por un enjambre de L partículas, con masa y volumen despreciables, que se mueve sobre un espacio de H dimensiones. Para realizar este movimiento, el enjambre cuenta con términos asociados a la

---

69 AI, THE JIN; KACHJTYICHYANUKUL, Voratas. A particle swarm optimization for the vehicle routing problema with simultaneous pickup and delivery. En: Computers & Operations Research 36. 2009. 10 p

„memoria“ que tiene cada partícula acerca de su experiencia y las de sus vecinos, de manera que la partícula actualiza su velocidad con respecto al comportamiento del enjambre. En este ajuste se agrega una variable aleatoria que caracteriza una distribución más real del comportamiento de la población.

Chen y Yang<sup>70</sup> fueron unos de los primeros en aplicar la metaheurística PSO en su versión discreta, combinada con el procedimiento de búsqueda llamado Recocido simulado (SA, Simulated Annealing) para resolver el problema VRP básico.

El modelo PSO combina dos tipos de aprendizaje para cada partícula del enjambre y un objetivo fijo que es común a cada una de ellas. El primer tipo de aprendizaje de la partícula está asociado a la experiencia personal que ésta desarrolla en la medida en que se desplaza por el espacio de búsqueda. Este comportamiento trata a los miembros del enjambre como seres aislados, y recibe el nombre de “comportamiento cognitivo”.

El segundo tipo de aprendizaje corresponde al término que se relaciona con el aprendizaje que obtiene la partícula de su interacción con el enjambre. Éste es denominado “comportamiento social”, y se relaciona con la experiencia del vecindario de cada partícula

La posición simboliza la ubicación de la partícula en un tiempo  $t$ ,  $V_t$  simboliza la velocidad de la partícula en un tiempo  $t$  ecuación (1),  $Y_p$  y  $Y_g$  son denominados grados de proximidad y según su valor determinarán la dirección de la velocidad de la partícula,  $X_p$  y  $X_g$  son la mejor posición local conocida y la mejor posición global conocida respectivamente,  $X_{ij}$  es la posición en cada partícula,  $Ram$  simboliza un número aleatorio que pertenece al conjunto  $[0,1]$  y  $W$  es una constante de equilibrio ecuación (2).

---

70 CHEN AL, YANG GK, WU ZM. Hybrid discrete particle swarm optimization algorithm for capacitated vehicle routing problem. Journal of Zhejiang University Science A 2006;7(4):607--14.

$$x_t = x_{t-1} + V_t \quad (1)$$

$$V_t = (W * V_{t-1}) + ((Y_p * Ram) * (X_p - x_{ij})) + ((Y_g * Ram) * (X_g - X_{ij})) \quad (2)$$

Para el uso de las ecuaciones del PSO es necesario en algunos casos trasladar los datos de un espacio discreto a uno continuo, a esto se le denomina codificar los datos, en estos casos se utiliza la ecuación que se enuncia a continuación, donde  $X_{max}$  y  $X_{min}$  son el rango de valores,  $Y_i$  es el número a modificar y  $n$  es la cantidad de números del conjunto ecuación (3).

$$X_{ij} = X_{min} + (X_{max} - X_{min}) * \frac{(Y_i - 1 + Ram)}{n} \quad (3)$$

En un momento será necesario decodificar para obtener la ruta que genera el PSO, de este modo, para decodificar el conjunto lo único que hay que hacer es organizar los datos de menor a mayor, y colocar el dato de menor valor al número más pequeño en el conjunto original y el segundo menor al siguiente más pequeño, y así sucesivamente hasta que se decodifique completamente el número.

**8.3.2. Optimización evolutiva por enjambre de partículas (EPSO).** Es un algoritmo de optimización meta-heurístico el cual se caracteriza por combinar los planteamientos de los algoritmos Estrategias Evolutivas (EE) y Optimización de Enjambre de Partículas (PSO). Por lo tanto, EPSO esta inspiración en la biología de la evolución de las especies mediante una selección Darwinística y los comportamientos de distintos grupos de especies animales, donde trata de imitar el movimiento colectivo o social de bandadas de aves, cardúmenes de peces o enjambres de abejas como un conjunto de partículas que evoluciona en el espacio de búsqueda motivado por tres factores: inercia, memoria y cooperación.

El mecanismo del algoritmo EPSO se puede describir de la siguiente manera: para una iteración dada existe un conjunto de soluciones o alternativas denominadas agentes que al igual que en PSO cada uno de estos compuestos de los siguientes atributos.

- Un vector que almacena la posición actual (localización) de la partícula  $i$  en el espacio de búsqueda.
- Un vector que almacena la posición de la mejor solución encontrada por la partícula  $i$  hasta el momento.
- Un vector que almacena la posición de la mejor solución encontrada por el enjambre hasta el momento.
- Un vector que almacena el gradiente (dirección) según el cual se moverá la partícula
- Almacena el valor de adecuación de la solución actual (vector  $x_i$ ).
- Almacena el valor de adecuación de la mejor solución local encontrada hasta el momento.
- Almacena el valor de adecuación de la mejor solución global encontrada hasta el momento

Cada partícula está definida por una posición en el espacio de búsqueda y una velocidad  $V_i$ . En un momento dado, hay al menos una partícula que tiene la mejor posición en el espacio de búsqueda. La población de las partículas reconoce tal posición ( $gBest$ ), entonces las partículas tienden a moverse en esa dirección, además cada partícula es atraída a su mejor posición anterior ( $pBest_i$ ). Las

partículas se reproducen y evolucionan a lo largo de un número de generaciones según los siguientes pasos.

- Replicación: cada partícula es replicada un número de  $r$  veces, dando lugar a nuevas partículas iguales.
- Mutación: los parámetros estratégicos ( $w$ ) que afectan el movimiento de las partículas son mutados.
- Reproducción: de cada partícula se genera un sucesor según la regla de movimiento de la partícula.
- Evaluación: cada sucesor será evaluado con una función objetivo.
- Selección: por un torneo estocástico u otro proceso de selección, las mejores partículas sobreviven para formar una nueva generación.

La regla de movimiento de las partículas (de una iteración  $k$  a la iteración  $k+1$ ) es la siguiente:

$$S_i^{k+1} = S_i^k + V_i^{k+1} \quad (4)$$

$$V_i^{k+1} = W_{i0}^* V_i^k + W_{i1}^* (pbest_i - S_i^k) + W_{i2}^* (gbest^* - S_i^k) \quad (5)$$

En la ecuación (4) el símbolo  $*$  significa que esos parámetros presentaran una evolución producto del proceso de mutación. En cuanto a los pesos ( $W$ ) la regla de mutación es:

$$W_{ik}^* = W_{ik} + \tau N(0,1) \quad (6)$$

Donde  $\tau$  es el parámetro de aprendizaje, fijado externamente, el cual controla la amplitud de las mutaciones,  $N(0,1)$  es una variable aleatoria con distribución de Gauss (media 0 y varianza 1) y  $W_{ik}$  varía a medida que progresa el algoritmo de la siguiente manera:

$$W_{ik} = W_{max} - \frac{W_{max} - W_{min}}{iter_{max}} * iter \quad (7)$$

Además, la mejor solución global es mutada de la siguiente manera.

$$gbest^* = gbest + W_{i3}^* N(0,1) \quad (8)$$

Donde  $W_{i3}^*$  también es un parámetro de aprendizaje y este suele llamársele también el cuarto parámetro estratégico. Este controla la amplitud del vecindario de  $gbest$  donde es más probable encontrar la mejor solución global o al menos una mejor solución que el  $gbest$  actual. El peso  $W_{i3}^*$  también es mutado acorde a la regla de mutación general descrita anteriormente.

La estructura de la ecuaciones (4) y (5) son muy parecidas a la regla de movimiento de PSO (ecuaciones (1) y (2)), pero con respecto a EPSO no sólo se ve en el comportamiento evolutivo de las partículas, sino también en los pesos que afectan al movimiento de estas a medida que se avanza en el espacio de búsqueda, es decir, los parámetros de ponderación  $c_i$  en PSO que se definían como  $c_1 = c_2 = 2$ , en EPSO son reemplazados por  $W_{ik}^*$  mutación de  $W_{ik}$  que se caracteriza no por ser constantes sino por su carácter auto-adaptivos, permitiendo ajustar automáticamente sus parámetros o comportamientos en respuesta a la manera en que progresa la solución del problema. EPSO contiene dos mecanismos (evolutivo y auto-adaptivo) actuando en secuencia, cada uno con su propia probabilidad de producir no solo mejores individuos, sino también un

promedio grupal mejor. La evolución permite que en cada recombinación se induzca un movimiento en dirección al óptimo, entonces, la selección que actúa sobre una generación que es en promedio mejor que la precedente, produce una nueva generación que será mejor que la primera generación de partículas. Que sea auto-adaptivo suma otro interés al método, esta evita en gran medida la necesidad de un ajuste fino de los parámetros iniciales del algoritmo, porque se espera que el procedimiento aprenda (en el sentido evolucionario) las características del espacio de búsqueda y corrija (autoajuste) los pesos en orden a generar una adecuada tasa de progreso hacia el óptimo. Esta característica da robustez al modelo. Esto significa, que independientemente de los valores iniciales, el algoritmo converge al óptimo o un resultado próximo.

#### **8.4. PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS (VRP)**

El VRP es uno de los problemas de optimización combinatoria más importantes y ampliamente estudiado, con muchas aplicaciones del mundo real, en la logística de distribución y del transporte (Toth & Vigo, 2002). Fue introducido por primera vez por Dantzig y Ramser<sup>71</sup>, cuando estudiaron la aplicación real en la distribución de gasolina a las estaciones de servicio y propusieron la formulación matemática de este problema.

El VRP consiste en una serie de clientes que se encuentran geográficamente dispersos, donde cada cliente presenta una demanda, se tiene un depósito y una flota de vehículos con capacidad limitada. Su objetivo es minimizar el costo de las rutas, cada vehículo sirve una única ruta durante el periodo de planificación, teniendo esta que iniciar y terminar en un depósito central, para servir un conjunto de clientes con demandas conocidas.

---

71 DANTZIG G. B., RAMSER J. H.. The Truck Dispatching Problem. Management Science, Vol 6. No 1, Oct. 1959, pp. 80 - 91.

Algunos objetivos que generalmente se plantean para resolver este tipo de problemas son<sup>72</sup>:

- La Minimización del costo de transporte total, dependiendo de la distancia total de viaje o el tiempo total del viaje y el costo fijo asociado con los vehículos usados.
- Reducción del número de vehículos requeridos para servir a todos los clientes, teniendo en cuenta el equilibrio de las rutas, para el tiempo de viaje y la carga del vehículo.
- Minimización de la penalización asociada con el servicio parcial de los clientes. este tipo de situaciones se presentan cuando la capacidad que tiene el vehículo no puede satisfacer la demanda total del cliente.
- El equilibrio de las rutas, por tiempo de viaje y por carga del vehículo.

**8.4.1. Problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW).** El problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo, “Vehicle Routing Problem with time Windows” (VRPTW), es una extensión del modelo básico de ruteo. Consiste en diseñar un conjunto posible de rutas para una flota de vehículos de igual capacidad, que salen y llegan a un depósito. Una ruta inicia cuando un vehículo sale del depósito y recorre cierta zona definida por las restricciones del problema y culmina en el momento que su capacidad es totalmente usada o ya no puede servir otro cliente, porque no se cuenta con la capacidad suficiente.

---

72 TOTH, Paolo y VIGO, Daniele. The Vehicle Routing Problem. En: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987. vol.9., p. 4.

Los clientes están dispersos en un área geográfica y cada uno tiene asociado un intervalo de tiempo, en el que se permite el servicio de recogida o despacho. Se pueden presentar dos situaciones que el vehículo puede llegar después del tiempo establecido para el inicio del servicio o que el vehículo llegue antes. En la primera situación, se incurre en una penalización del objetivo y en la segunda, se introduce un tiempo de espera en el horario de la ruta.

Las ventas de tiempo en un sistema pueden ser de dos tipos:

- Problemas de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo fuertes (VRPHTW): En este problema no se permiten entregas por fuera de los intervalos de tiempo establecido.
- Problemas de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo suaves (VRPSTW): En este caso se pueden realizar entregas cuando el vehículo llegan antes del inferior de la ventana de tiempo, pero con una penalización pertinente.

A continuación, se presenta la formulación matemática del VRPTW<sup>73</sup>:

**Función objetivo:** Expresa el costo total. Se pretende optimizar el tiempo total de recorrido  $C_{ij} = \sum t_{ij}$ , donde  $t_{ij}$  es el tiempo de recorrido entre dos clientes  $i$  e  $j$ . El costo de la función objetivo es el tiempo de viaje asignado a cada ruta.

$$\text{Minimizar } \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} C_{ij} x_{i,jk} \quad (16)$$

Sujeto a:

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in \Delta+i} x_{ijk} = 1 ; \forall i \in N \quad (17)$$

---

73 TOTH Paolo, VIGO Daniele. "The vehicle routing problem". SIAM monographs on discrete mathematics and applications. Philadelphia 2002. Ibid. p, 158

Dado  $N = V\{0, n + 1\}$  que representa el conjunto de clientes a excepción del depósito; la restricción (17) asigna a cada cliente exactamente una ruta de vehículo.  $j \in \Delta + (i)$  Es el conjunto de grafos completos que parten de  $i$  y llegan a  $j$ .

$$\sum_{j \in \Delta + (0)} x_{ojk} = 1; \quad \forall k \in K \quad (18)$$

$$\sum_{i \in \Delta - (n+1)} x_{i,n+1,k} = 1; \quad \forall k \in K \quad (19)$$

Las restricciones (18) y (19) limitan el número de rutas por vehículo a una, y caracterizan el flujo que debe seguir la flota. La primera hace referencia al número de veces que un vehículo sale del depósito y la segunda, el número de veces que llega  $j \in \Delta + (0)$ , es el conjunto de grafos completos que parten del depósito a todos los clientes y  $j \in \Delta - (n + 1)$  es el conjunto de grafos que parten de todos los clientes hacia el depósito.

$$\sum_{i \in \Delta - (j)} x_{ijk} - \sum_{i \in \Delta + (j)} x_{jik} = 0 ; \quad \forall k \in K, j \in N \quad (20)$$

La restricción (20) asegura que a cada cliente solo llegue un vehículo y el mismo salga de él. Esta restricción permite que en el modelo no se formen ciclos. Al evitar repeticiones en la asignación de rutas.

$$x_{ijk}(w_{ik} + s_i + t_{ij} - w_{jk}) \leq 0 ; \quad \forall k \in K, (i, j) \in A \quad (21)$$

La restricción (21) asegura que el vehículo  $k$  no pueda comenzar el servicio, si la suma del tiempo de viaje de  $i$  a  $j$ , la duración del servicio  $i$  y el tiempo total acumulado al inicio del servicio  $i$  ( $w_{ik}$ ) es mayor que la venta de tiempo de  $j$  o del cliente siguiente.

$$a_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk} \leq w_{ik} \leq b_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk}; \forall k \in K, i \in N \quad (22)$$

Para un vehículo  $k$  dado, la restricción (22) hace que  $w_{ik} = 0$  cada vez que el cliente  $i$  no es visitado por el vehículo  $k$ . Igualmente, garantiza que el inicio de servicio en el cliente  $i$  se lleve a cabo dentro de la ventana de tiempo correspondiente.

$$E_i \leq w_{ik} \leq L; \forall k \in K, i \in \{0, n+1\} \quad (23)$$

La restricción (23) hace que cada cliente sea servido dentro del intervalo de tiempo general  $[a_0, b_0] = [a_{n+1}, b_{n+1}] = [E, L]$ , asociada a los nodos de llegada y de salida (deposito).

$$\sum_{i \in N} d_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk} \leq Q; \forall k \in K \quad (24)$$

La restricción (24) indica que la suma de las demandas de los clientes de una ruta no debe exceder la capacidad del vehículo  $k$ .

$$x_{ijk} \geq 0; \forall k \in K, (i, j) \in A \quad (25)$$

La restricción (25) impone condiciones de no negatividad a las variables del modelo

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}; \forall k \in K, (i, j) \in A \quad (26)$$

La restricción (26) indica la naturaleza binaria de las variables.

En resumen, el VRPTW se formula formalmente así:

$$\text{Minimizar } \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} C_{ij} t_{i,jk} \quad (27)$$

Sujeto a:

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk} = 1; \forall i \in N \quad (28)$$

$$\sum_{j \in \Delta^+(0)} x_{ojk} = 1; \forall k \in K \quad (29)$$

$$\sum_{i \in \Delta^-(n+1)} x_{i,n+1,k} = 1; \forall k \in K \quad (30)$$

$$\sum_{i \in \Delta^-(j)} x_{ijk} - \sum_{i \in \Delta^+(j)} x_{ijk} = 0; \forall k \in K, j \in N \quad (31)$$

$$x_{ijk}(w_{ik} + s_i + t_{ij} - w_{jk}) \leq 0; \forall k \in K, (i,j) \in A \quad (32)$$

$$a_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk} \leq w_{ik} \leq b_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk}; \forall k \in K, i \in N \quad (33)$$

$$E_i \leq w_{ik} \leq L; \forall k \in K, i \in \{0, n+1\} \quad (34)$$

$$\sum_{i \in N} d_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk} \leq Q; \forall k \in K \quad (35)$$

$$x_{ijk} \geq 0; \forall k \in K, (i,j) \in A \quad (36)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}; \forall k \in K, (i,j) \in A \quad (37)$$

Cada ruta tiene asociado un tiempo de programación o tiempo acumulado  $T$ , que se define como la suma de los tiempos de recorrido, los tiempos de espera y los tiempos de servicio en cada cliente visitado. La solución final se expresa con los tiempos totales de recorrido  $\sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} C_{ij} t_{i,jk}$  y los tiempos totales de programación o tiempo acumulado de las rutas  $\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} + s_i + t_{ei}$ , donde  $t_e$ , es la suma de los tiempos de espera. Se incurre en tiempos de espera cuando el tiempo programado de la ruta o tiempo acumulado parcial es menor al inicio de la ventana de tiempo del cliente que se visita  $t_e = a_i - T$  y  $t_e > 0$ ;  $t_e = 0$  si  $a_i - T \leq 0$ .

## 9. RED DE TRANSPORTE

La planificación de un sistema de transporte urbano, comprende la definición de rutas, horarios, frecuencias, asignación de vehículos y personal; es importante realizar esta planificación debido a la importancia que ha tomado el transporte público urbano en nuestros días, ya que un alto número de los viajes realizados dentro de la ciudad son hechos por este tipo de transporte.

Es necesario definir ciertos parámetros que servirán para la consecución del modelo de optimización, uno de estos la red de rutas de transporte urbano, siendo esta el primer paso para la adecuada planificación de un sistema de transporte, con este fin se describen las principales características y las vías de comunicación con mayor relevancia de Bucaramanga y su área metropolitana.

El área metropolitana conformada por Bucaramanga, Piedecuesta, Florida y Girón está ubicada sobre el Valle del Río de Oro. Se distingue en ella dos sectores de diferente conformación física: uno formado por la meseta y otro por el valle. Posee una extensión de  $1.479Km^2$ ; creada mediante la Ordenanza No. 020 del 15 de diciembre de 1981 por la Asamblea de Santander, en la cual se ponía en funcionamiento un área metropolitana, conformada por Bucaramanga, como gran centro urbano o núcleo principal y las poblaciones contiguas de Girón y Floridablanca. En el año de 1984, se expidió la ordenanza No. 048 en la cual se autoriza la entrada del municipio de Piedecuesta al Área Metropolitana de Bucaramanga, lo cual fue formalizado el 2 de marzo de 1985, con el Decreto 0332 "Por el cual se integra el municipio de Piedecuesta al Área Metropolitana de Bucaramanga"<sup>74</sup>. Su población es de 1.132.367 habitantes<sup>75</sup>.

---

74 ÁREA METROPOLITANA DE BUCARAMANGA [en línea] disponible en: <http://www.amb.gov.co/>.

**Figura 1. Mapa del Área metropolitana de Bucaramanga**



Fuente: <http://www.amb.gov.co/>

### **Vías de comunicación:**

La Ciudad de Bucaramanga cuenta con un Plan de Ordenamiento Territorial (POT), el cual clasifica las vías de la ciudad en dos tipos Las vías llamadas Arterias Tipo y las vías de la Red local del municipio.

Las Vías de Arteria Tipo están divididas: en Vías Tipo V-0. Tienen una sección transversal mayor de 60 metros. Vías Tipo V-1. Tienen una sección transversal entre 60m y 40 m. Vías Tipo V-2. Tiene entre 30 m y 40 m de sección transversal. Vías Tipo V-3. Tienen entre 25 m y 30 m de sección transversal.

---

75 DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO NACIONAL DE ESTADÍSTICA -DANE. Proyecciones de Población departamentales y municipales por área 2005 – 2020 [http://www.dane.gov.co/files/investigaciones/poblacion/proyepobla06\\_20/ProyccionMunicipios2005\\_2020.xls](http://www.dane.gov.co/files/investigaciones/poblacion/proyepobla06_20/ProyccionMunicipios2005_2020.xls)

Entre las vías de arteria tipo podemos encontrar:

Carrera 15: Es del tipo V-2. En el sector de la Rosita se convierte en Diagonal 15 es una de la más importantes por su permanente movimiento de transporte sobre todo de servicio público. Inicia en el sector norte de la ciudad de la vía que viene de Santa Marta y en el sector de la puerta del sol termina para convertirse en la Autopista Bucaramanga - Floridablanca - Piedecuesta.

Carrera 27: Es del tipo V-2. Conocida también como Avenida Prospero Pinzón, cruza la ciudad de Norte a Sur. Inicia en la Universidad Industrial de Santander y cruza la ciudad de norte a sur. En el sector de la puerta del sol está ubicado el intercambiador del mismo nombre de donde se desprenden vías hacia la autopista a Floridablanca y una continuación de la carrera 27 continua hasta el sector entre los barrios la Victoria y la Sallé donde se convierte en la Autopista a Girón y Lebrija, de esta vía se inicia la Carretera hacia Barrancabermeja.

## **9.1. TRANSPORTE URBANO**

Desde el punto de vista logístico una red de transporte urbano es importante ya que involucra la distribución y recolección de carga, alimentos, pasajeros, entre otros; el transporte independientemente de su naturaleza representa en promedio el 28% de los costos de transporte, variando entre el 13% y el 75% (Elcio Grassia, Logística de Ultima Milha: Competitividad empresarial y desafíos de logística urbana), por consiguiente es indispensable gestionar de manera adecuada el método de transporte y el diseño de rutas más óptimas.

El sistema de transporte público constituye uno de los determinantes de la eficiencia económica de las ciudades y de la integración social de sus habitantes<sup>76</sup>.

En el área metropolitana de Bucaramanga, los modos de transporte urbano tradicional de pasajeros (buses; busetas; y microbuses - colectivos) transportan en promedio un total de 27 millones de personas, que equivale a 85,6% del total de usuarios de la ciudad, los cuales están siendo atendidos por 11 empresas de transporte tradicional siendo estas: Cootragas, Cotrander, Oriental de Transporte, Transpiedecuesta, Transcolombia, Transportes San Juan, Transportes villa de San Carlos, Empresa unitransa, metropolitana de servicios Públicos, Lusitana y Transgiron<sup>77</sup>; estas empresas se vincularon al sistema de transporte masivo del área metropolitana de Bucaramanga "Metrolínea" en la cual las empresa, sus socios y propietarios de vehículos se vincularon como socios de las operadoras MOVILIZAMOS S.A. quien tiene adjudicado el 41% del transporte masivo y METRO5 PLUS el cual atenderá el 59% restante. Metrolínea transportó el 14,4% restante de los 27 millones de personas.

El principal enfoque de la investigación es el rediseño de rutas y frecuencias de los buses Pretroncales del sistema integrado de transporte Metrolínea, se tuvo en cuenta que estas rutas llevan a cabo una tarea principal definida como la jornada que realiza cada bus desde el inicio del primer recorrido hasta que el último termina. Cada bus inicia su recorrido desde unas de las principales estaciones distribuidas en las diferentes zonas de la ciudad y retornando a ellas al finalizar la tarea.

El caso de estudio se centrará en un modelo de transporte urbano de pasajeros de la ciudad de Bucaramanga y parte de su área metropolitana, para reducir las

---

76 RODRÍGUEZ MARÍN, J. C. y DÍAZ CONTRERAS, J. A. (2014). Evaluación de impacto del sistema de transporte Metrolínea: revisión de metodologías. *Equidad & Desarrollo* (22), 121-135.

77 TRANSPORTES LUSITANIA Sobre la empresa [en línea] disponible en: <http://www.transporteslusitania.com/sobre-la-empresa>

estancias del problema se dará un enfoque hacia el Sistema Integrado de Transporte Masivo del Área Metropolitana de Bucaramanga “Metrolínea”, el cual presta el servicio en las rutas principales y secundarias, cubriendo una gran parte del área metropolitana.

El sistema está conformado por corredores viales troncales, pretroncales y alimentadores, estaciones de transferencia, portales y cuenta con buses articulados con capacidad para 160 pasajeros compuesto por 2 vagones, buses padrones con capacidad para 90 pasajeros y buses alimentadores con capacidad de 48 pasajeros, y un sistema de recaudo y control. El sistema se inauguró el 22 de diciembre del 2009 como una prueba piloto , inició su operación con una flota de 131 buses articulados a finales de enero del 2010 con una inversión total de 1018 632 millones (a pesos constantes del 2008) y una tarifa \$1400 ,con una fase inicial que comprendía un corredor troncal de 9 km<sup>78</sup>, el cual iba desde la avenida Quebrada seca hasta Papi Quiero Piña en el municipio de Floridablanca, al igual que 14 km de corredores pretroncales que recorrían : La carrera 27 , el par vial de las calle 10 y 11, los sectores de Bucarica, la cumbre y el centro de Bucaramanga ; igualmente 50 km de rutas alimentadoras que recorrían los diferentes barrios de Bucaramanga y Floridablanca.

Actualmente Metrolínea tiene establecidas 36 rutas, cuenta con un corredor Troncal de 34,6 km que va desde la avenida Quebrada seca hasta la estación Temprana en el municipio de Piedecuesta, cabe resaltar que este corredor cuenta con un carril exclusivo para los buses troncales, que son atendidos por dos rutas (T1, T3), con 316,6 km de corredores pretroncales que recorren las principales vías de la ciudad y 196,5 km de rutas alimentadoras que cubren gran parte de los barrios de la ciudad de Bucaramanga, Floridablanca y Piedecuesta. (Anexo B. caracterización de rutas).

---

78 REVISTA DINERo El próximo diciembre metrolinea inicia pruebas del sistema [en línea] disponible en: <http://www.dinero.com/actualidad/noticias/articulo/el-proximo-22-diciembre-metrolinea-inicia-fase-pruebas-del-sistema/88720>

Teniendo en cuenta lo anterior este trabajo no tiene como intención encontrar un número óptimo de buses ya que estos son fijos, por consiguiente, lo que se pretende es rediseñar las rutas del sistema y la debida asignación de buses a estas, con el fin de mejorar el tiempo de servicio, disminuir el tiempo de viaje de los pasajeros y la distancia recorrida por los buses. En la investigación se analizan las rutas actuales del sistema y se consideran los procesos de optimización que ha realizado Metrolínea para algunas rutas; estos procesos se han aplicado en rutas Troncales que tienen un tipo de recorrido cíclico por lo cual sería redundante trabajar en este tipo de rutas; se observó que los corredores de las rutas pretroncales son las que mayor distancia abarcan, no cuentan con un carril exclusivo durante todo el recorrido, es decir comparten la calzada con el transporte particular, motorizado y no motorizado entre otros, lo cual se ve reflejado principalmente en los tiempos de viaje; es por ello que la base de la investigación será constituida por algunas rutas pretroncales; para su elección se consideraron algunos factores como : cantidad de paradas , tiempo de viaje y distancia recorrida; gran cantidad de estas rutas se caracterizan por utilizar el mismo corredor vial a lo largo de su recorrido, de igual manera algunas rutas por su longitud son divididas.

A continuación, en la tabla 2 se presenta la caracterización de las rutas pretroncales que serán objeto de estudio.

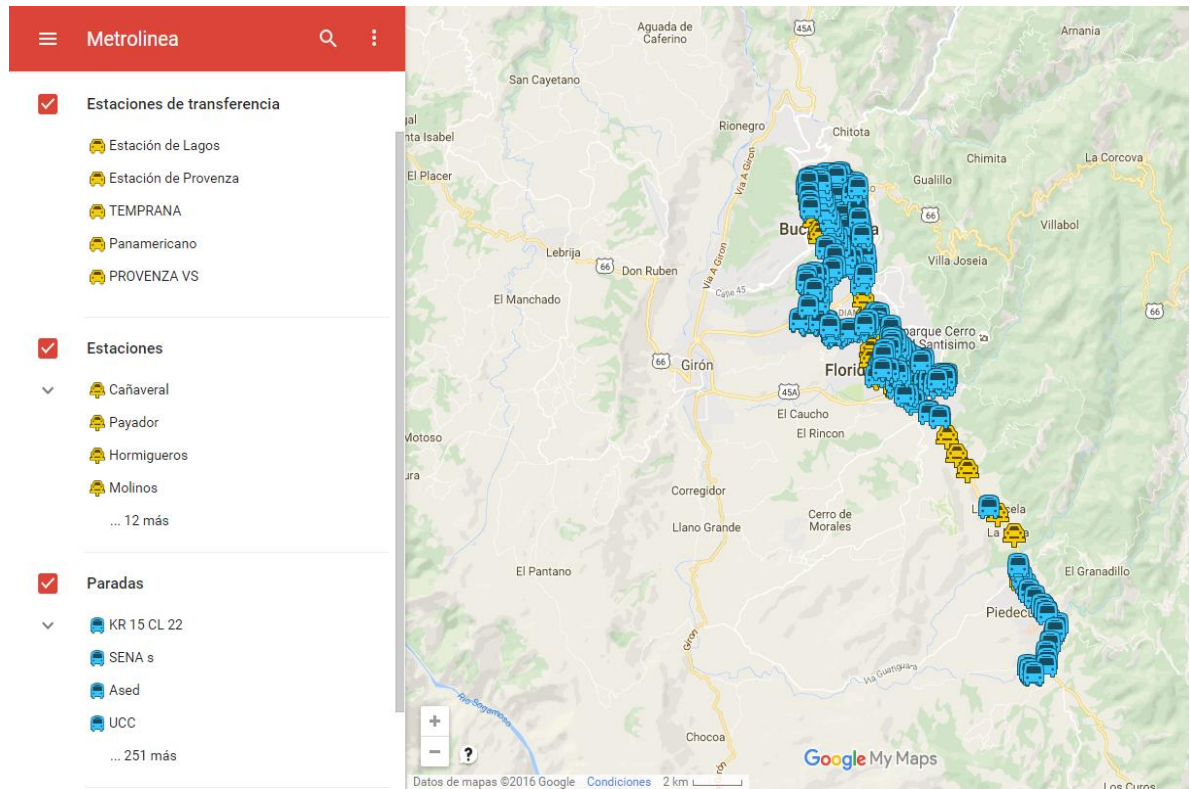
Una vez realizada la red urbana (ver Ilustración 2. Red urbana), que se tomó con base a la ubicación geográfica de las paradas realizadas por las rutas anteriormente caracterizadas (Anexo D. Coordenadas de las Paradas de Metrolínea), la contextualización del problema de transporte urbano y establecido los tiempos de viaje, distancias recorridas y paradas de las rutas pretroncales que serán usadas para establecer el modelo de solución.

**Tabla 2. Caracterización de rutas**

<b>RUTA</b>	<b>Longitud (Km)</b>	<b>FV Requerida (HP)</b>	<b>No. De Ciclos x Día (Despachos)</b>	<b>Recorrido (inicio-fin)</b>
<b>P1A</b>	<b>11,1</b>	<b>7</b>	<b>6,00</b>	<b>Estación Quebrada seca-Cumbre</b>
<b>P1</b>	<b>20,4</b>		<b>88,00</b>	
<b>P1B</b>	<b>9,3</b>		<b>5,00</b>	
<b>P2A</b>	<b>12,5</b>	<b>10</b>	<b>9,00</b>	<b>Parque estación UIS-CUMBRE</b>
<b>P2</b>	<b>25</b>		<b>80,00</b>	
<b>P2B</b>	<b>12,5</b>		<b>5,00</b>	
<b>P3</b>	<b>27,2</b>	<b>10</b>	<b>105,00</b>	<b>Bucarica Floridablanca- Parque estación UIS</b>
<b>P5</b>	<b>8,6</b>	<b>1</b>	<b>10,00</b>	<b>Bucarica-Cañaveral</b>
<b>P6</b>	<b>19,2</b>	<b>7</b>	<b>99</b>	<b>Lago Floridablanca- Parque estación UIS</b>
<b>P8</b>	<b>49,8</b>	<b>15</b>	<b>86,00</b>	<b>Portal del valle Piedecuesta- Parque estación UIS</b>
<b>P10</b>	<b>25,6</b>	<b>17</b>	<b>139,00</b>	<b>Provenza-Parque estación UIS</b>
<b>P11</b>	<b>3,5</b>	<b>1</b>	<b>67,00</b>	<b>Cañaveral-Lagos III</b>
<b>P13</b>	<b>20,2</b>	<b>8</b>	<b>75,00</b>	<b>Lagos Floridablanca- Parque estación UIS</b>

Fuente: Metrolínea, modificado Autores

**Figura 2. Red urbana. Anexo C. Red urbana Completa.**



## **9.2. MODELO DE OPTIMIZACIÓN DE RUTAS DE TRANSPORTE URBANO.**

El problema de ruteo para vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW) es un problema conocido NP-Hard. Casi todos los métodos propuestos para el VRPTW están dedicados a un problema estático en el que todos los datos son conocidos antes de que se construya la ruta y no cambian a partir de entonces. El avance de la comunicación y la tecnología de la información hace que los empresarios más conscientes de la importancia de las estrategias de gestión del justo a tiempo. En la última década, expresar transbordos actividades y negocios de comercio electrónico han experimentado un rápido crecimiento, estos desarrollos han dado lugar a un crecimiento gradual de una nueva clase de problemas, conocido como problemas de programación de ruteo en tiempo real y donde el tamaño del

problema cambia los parámetros después de que las rutas de los vehículos son construidas<sup>79</sup>.

Además, esta investigación adiciona al clásico VRPTW la optimización de la red de transporte urbano (UTNDP) el cual se considera un problema NP-Hard<sup>80</sup>, por lo difícil del cálculo de la función objetivo el cual también es sujeto de estudio y al igual que el VRPTW se le han aplicado heurísticas en busca de una buena solución para dicho problema, es tal el caso de (Fan & Machemehl, 2006) donde usan un método basado en búsqueda tabú y recocido simulado; al igual que se han propuesto algoritmos genéticos<sup>81</sup> para tratar el problema de planificación de la red de tránsito<sup>82</sup>. También se han usado los algoritmos evolutivos en los sistemas de apoyo de decisión para las redes de transporte urbanas como los presenta (Borne, Fayeche, Hammadi, & Maouche) para una regulación de tiempo real de tráfico dentro de un sistema de transporte. En (Bruno & Laporte, 2002) es presentado un sistema de apoyo de decisión para el plan de tránsito público conecta una red de computadoras que usa la heurística allí enunciada. Éste es un sistema de apoyo de decisión interactivo visual que se probó con datos reales de la ciudad de Milán.

**9.2.1. Características del modelo.** Con base a las revisiones literarias hechas en la presente investigación se caracteriza el modelo de la siguiente manera:

---

79 MEI-SHIANG CHANG, SHYANG-RUEY CHEN Y CHE-FU HSUEH, Real-time vehicle routing problem with time windows and simultaneous delivery pickup demands, department of business administration chung hua university

80 BAAJ M. H. and MAHMASSANI H., "An AI\_Based Approach for Transit Route System Planning and Design," J. Advanced Transportation **25**, 187–210 (1991).

81 FAN W. and MACHEMEHL R. B., "Using a Simulated Annealing Algorithm to Solve the Transit Route Network Design Problem," J. Transportation Engineering-ASCE **132**, 122–132 2006

82 CHAKROBORTY P., "Genetic Algorithms for Optimal Urban Transport Design," Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering **18**, 184–200 (2003).

- Se conoce el número vehículos, el tiempo de servicio, las frecuencias, las paradas iniciales y finales de cada ruta y las horas de funcionamiento del sistema.
- Se cuenta con un conjunto de flotas de vehículos de igual capacidad, que salen y llegan a un depósito, de modo que se visiten todos los destinos a un costo mínimo, satisfaciendo restricciones horarias y de capacidad.
- Cada ruta inicia cuando un vehículo sale del depósito y recorre cierta zona definida por las restricciones del problema y culmina cuando el recorrido ha sido servido en el depósito.
- Las paradas están dispersas en el área geográfica de Bucaramanga y su área metropolitana y cada una tiene asociado un intervalo de tiempo, o ventana de tiempo en el cual esperan ser atendidas.
- A lo largo del servicio se presenta una entrega y recogida simultanea de pasajeros en algunas paradas.
- Se asumen que la demanda es conocida y constante en cada parada.
- Las ventanas de tiempo están definidas para cada parada, si el vehículo llega antes del límite inferior a la ventana de tiempo, se genera una disminución en el tiempo de servicio de la ruta; en el caso de que el vehículo llegue fuera del límite superior de la ventana de tiempo se genera aumento en el tiempo de servicio.
- Las rutas se acoplan a una red urbana con características: Cruces de caminos, calles, destinos autorizados, distancias, velocidades, restricciones (semáforos, obras en las vías, giros prohibidos, entre otros).

- Cada parada debe ser visitada dentro de cada ciclo (viaje) con una frecuencia establecida.

## FORMULACIÓN MATEMÁTICA

La red de transporte se representa por medio del grafo completo  $G = (V, A)$  donde  $V = \{0, \dots, n\}$  es el conjunto de vértices  $A \in (i, j)$  y es el conjunto de arcos, con  $i \neq j$ .

Los vértices  $i = 1, \dots, n$  corresponden a las paradas. La ventana de tiempo general asociada a los nodos de partida y de llegada se representa como  $[a_0, b_0] = [a_{n+1}, b_{n+1}] = [E, L]$ , donde representan las salidas de los depósitos más tempranas posible y las llegadas a los depósitos más tardía posible respectivamente.

Toda ruta factible, corresponde a un camino  $G = (V, A)$  que inicia y termina en uno de los depósitos.

El sistema de transporte consta de un conjunto de vehículos igual a  $K$  con capacidad limitada igual a  $Q$  toneladas.

Para cada arco  $A \in (i, j)$ , Se definen:

- $c_{ij}$  Costo no negativo correspondiente a cada arco  $A \in (i, j)$ , y asociado a la distancia, tiempo, flota, o una combinación ponderada de ellas. Representa el costo del camino más corto recorrido entre dos nodos  $i, j$ .

- $C_{ij}$  Representa el costo de la función objetivo asociado al tiempo de viaje asignado a cada ruta.
- $t_{ij}$  =Tiempo de viaje para cada arco  $A \in (i, j)$ , que es equivalente a una unidad de costo.  $C_{ij} = t_{ij}$
- Se debe cumplir la desigualdad triangular  $c_{ij} \leq c_{ih} + c_{hj}$  y  $t_{ij} \leq t_{ih} + t_{hj}$ .
- Variables de decisión de naturaleza binaria.  $x_{ijk}, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j$   
 $x_{ijk} = 1$ , si en la solución, el vehículo va de  $i$  a  $j$ .  
 $x_{ijk} = 0$ , si en la solución, el vehículo no va de  $i$  a  $j$ .
- Para cada nodo  $V = \{0, \dots, n\}$  se definen:
  - $s_i$  =Tiempo de duración del servicio para cada cliente.
  - $d_i$  = Demanda del nodo  $i$ , de tipo determinística.
  - $p_i$  = Solicitud de recogida de pasajeros
  - Un intervalo de tiempo  $[a_i, b_i]$ , con  $i \in V$ , llamado Ventana de Tiempo, dentro del cual un cliente puede ser servido.
  - La variable  $a_i$ , representa el tiempo más cercano de inicio de servicio en el cliente  $i$ .
  - La variable  $b_i$ , es el tiempo más lejano de inicio de servicio, o lo mismo, el fin de la ventana correspondiente al cliente  $i$ .
  - $W_i$ , instante en el que el vehículo  $k$ , comienza a servir al cliente  $i$ , o cliente actual.
  - $W_j$ , instante en el que el vehículo  $k$ , comienza a servir al cliente  $j$  o cliente siguiente.
- Existe una solución factible si se cumplen las siguientes dos condiciones:

- $a_0 = E \leq \min_{i \in v \setminus \{0\}} b_i - t_{0i}$ , donde, es el tiempo disponible para servir al cliente  $i$ , saliendo del depósito.  $E$  representa el tiempo más tardío en el que se puede salir del depósito en función del cliente con ventanas de tiempo más prontas a cerrarse en el horizonte de programación.
- $b_{n+1} = L \geq \min_{i \in v \setminus \{0\}} a_i + s_i + t_{i,n+1}$ , donde  $a_i + s_i + t_{i,n+1}$ , es el tiempo que tarda un vehículo en llegar del último cliente servido hasta el depósito.  $L$  es el tiempo más temprano en el que se puede llegar al depósito, después de haber servido a todos los clientes. Si la llegada al depósito es mayor que  $L$ , no se garantiza el servicio a todos los clientes, debido a que al menos uno de ellos no será visitado.

Una solución es factible cuando en un arco  $G = (V, A)$ , cumple con las siguientes restricciones:

**Restricción de tiempo:** Si la suma del tiempo de viaje de  $i$  a  $j$ , la duración del servicio en  $j$  y el intervalo correspondiente al inicio de la ventana de tiempo de  $j$ , superan el tiempo más tardío posible en el que el siguiente cliente permite el servicio.

$$a_i + s_i + t_{ij} > b_j.$$

**Restricciones de capacidad:** Si la cantidad de pasajeros recogidos y/o entregados simultáneamente en cada parada no exceda la capacidad del vehículo.

$$p_{i-1} - d_i + p_i \leq Q$$

El problema VRPTW es un problema de optimización combinatoria debido a la naturaleza discreta de sus variables. Existen miles de posibilidades de encontrar una solución que cumpla con las condiciones matemáticas y mejore la función objetivo que se establezca.

El modelo se formula matemáticamente de la siguiente forma:

### **Variables de decisión**

- $x_{ijk}$  es una variable binaria que indica si el arco  $(i,j)$  es recorrido o no por el vehículo  $k$ .

$x_{ijk} = 1$  si el vehículo  $k$  recorre el arco  $(i,j)$  ; 0 en el caso contrario.

- $D_{ik}$  el número de pasajeros que descienden (entregas) en la parada  $i$ .
- $P_{ik}$  el número de pasajeros recogidos en la parada  $i$ .
- $w_{ik}$  tiempo de inicio del servicio en la parada  $i$  por el vehículo  $k$ .

**Función objetivo:** Expresa el costo total (1). Se pretende optimizar el tiempo total de recorrido  $C_{ij} = \sum t_{ij}$  , donde  $t_{ij}$  es el tiempo de recorrido entre dos clientes  $i$  e  $j$ .

El costo de la función objetivo es el tiempo de viaje asignado a cada ruta.

$$\text{Minimizar } \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} C_{ij} x_{i,jk} \quad (1)$$

Sujeto a:

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in \Delta+i} x_{ijk} = 1 ; \forall i \in N \quad (2)$$

Dado  $N = V\{0, n + 1\}$  que representa el conjunto de clientes a excepción del depósito; la restricción (2) asigna a cada cliente exactamente una ruta de vehículo.

$j \in \Delta + (i)$  Es el conjunto de grafos completos que parten de  $i$  y llegan a  $j$ .

$$\sum_{j \in \Delta + (0)} x_{ojk} = 1; \quad \forall k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{i \in \Delta - (n+1)} x_{i,n+1,k} = 1; \quad \forall k \in K \quad (4)$$

Las restricciones (3) y (4) limitan el número de rutas por vehículo a una, y caracterizan el flujo que debe seguir la flota. La primera hace referencia al número de veces que un vehículo sale del depósito y la segunda, el número de veces que llega  $j \in \Delta + (0)$ , es el conjunto de grafos completos que parten del depósito a todos los clientes y  $j \in \Delta - (n + 1)$  es el conjunto de grafos que parten de todos los clientes hacia el depósito.

$$\sum_{i \in \Delta - (j)} x_{ijk} - \sum_{i \in \Delta + (j)} x_{jik} = 0 ; \quad \forall k \in K, j \in N \quad (5)$$

La restricción (5) asegura que a cada cliente solo llegue un vehículo y el mismo salga de él. Esta restricción permite que en el modelo no se formen ciclos. Al evitar repeticiones en la asignación de rutas.

$$D_{ik} + P_{ik} \leq Q \quad \forall k \in K, \forall i \in V \quad (6)$$

La restricción (6) garantiza que la carga del vehículo  $k$  al salir del nodo  $i$ ; tiene que ser siempre inferior a la capacidad del vehículo.

$$x_{ijk} (P_{ik} + p_j - P_{jk}) = 0 \quad \forall i, j \in V, \forall k \in K \quad (7)$$

$$x_{ijk}(D_{ik} + d_j - D_{jk}) = 0 \quad \forall i, j \in V, \forall k \in K \quad (8)$$

Las restricciones (7) y (8) establecen que si cada arco  $(i,j)$  es visitado por un vehículo  $k$ ; la cantidad a ser entregada por cada vehículo tiene que disminuir en un  $d_j$  mientras que la cantidad recogida debe aumentar en un  $P_j$ .

$$x_{ijk}(w_{ik} + s_i + t_{ij} - w_{jk}) \leq 0; \quad \forall k \in K, (i,j) \in A \quad (9)$$

La restricción (9) asegura que el vehículo  $k$  no pueda comenzar el servicio, si la suma del tiempo de viaje de  $i$  a  $j$ , la duración del servicio  $i$  y el tiempo total acumulado al inicio del servicio  $i$  ( $w_{ik}$ ) es mayor que la venta de tiempo de  $j$  o del cliente siguiente.

$$a_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk} \leq w_{ik} \leq b_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk}; \quad \forall k \in K, i \in N \quad (10)$$

Para un vehículo  $k$  dado, la restricción (10) hace que  $w_{ik} = 0$  cada vez que el cliente  $i$  no es visitado por el vehículo  $k$ . Igualmente, garantiza que el inicio de servicio en el cliente  $i$  se lleve a cabo dentro de la ventana de tiempo correspondiente.

$$E_i \leq w_{ik} \leq L; \quad \forall k \in K, i \in \{0, n+1\} \quad (11)$$

La restricción (11) hace que cada cliente sea servido dentro del intervalo de tiempo general  $[a_0, b_0] = [a_{n+1}, b_{n+1}] = [E, L]$ , asociada al nodo de llegada y de salida (deposito).

$$D_{ik} \geq 0 \quad \forall k \in K, (i,j) \in A \quad (12)$$

$$P_{ik} \geq 0 \forall k \in K, (i,j) \in A \quad (13)$$

$$w_{ik} \geq 0 \forall k \in K, (i,j) \in A \quad (14)$$

Las restricciones (12), (13) y (14) imponen las condiciones de no negatividad a las variables del modelo

$$x_{ijk} \in \{0,1\}; \forall k \in K, (i,j) \in A \quad (15)$$

La restricción (15) indica la naturaleza binaria de las variables.

## 10. APLICACIÓN DE LA OPTIMIZACIÓN EVOLUTIVA POR ENJAMBRE DE PARTICULAS

El algoritmo de EPSO se basa en un conjunto de partículas que evolucionan en el espacio de búsqueda tratando de encontrar un punto óptimo en el mismo. A diferencia de PSO, la evolución no sólo se ve en el comportamiento de las partículas sino también en los pesos que afectan al movimiento de estas a medida que se avanza en el espacio de búsqueda. Una de las características más importantes es que es un método autoadaptivo, que ajusta automáticamente sus parámetros o comportamientos en respuesta a la manera en que progresa la solución del problema<sup>83</sup>.

La adaptación es típicamente comandada por reglas. En la mayoría de los casos estas reglas son heurísticas, en este caso se emplea la técnica del vecino más cercano, la cual según la revisión de la literatura ha sido estudiada por varios autores. Desde que esta heurística fue desarrollada por Salomon en 1987 para el problema VRPTW en el que plantea que se inicie cada ruta buscando un cliente que no haya sido considerado en alguna ruta y que se encuentre cerca al depósito principal, en cada interacción subsecuente, la heurística busca al cliente más cercano al último cliente añadiendo a la ruta, y lo adiciona al final de la ruta recién construida. Una nueva ruta se inicia cada vez que el proceso de búsqueda falla al encontrar un lugar de inserción para algún cliente.

Para la selección del método que se estudia en este proyecto se basó en el conocimiento adquirido en la revisión bibliográfica, luego de revisar la literatura científica del VRPTW y teniendo en cuenta el planteamiento y formulación matemática del modelo propuesto en esta investigación el cual considera una

---

83 MIRANDA V., and FONSECA N., "EPSO-Best-Of-Two-Worlds Meta-Heuristic Applied To Power System Problems," Proceedings Congress on Evolutionary Computation, vol. 2, pp. 1080-1085, Honolulu, Hawaii, USA, 2002.

minimización de costos en cuanto a aspectos espaciales (distancias) y temporales (ventanas de tiempo), es fundamental a la hora de la selección de clientes en una ruta, e igualmente es importante la consecución y el acceso de la información de esta heurística que es considerada un punto fundamental en la apropiación del conocimiento y por lo tanto de la implementación de la técnica del vecino más cercano.

Un método autoadaptativo requiere que el algoritmo desarrolle por sí mismo un proceso de cambio de su comportamiento, en lugar de obedecer una regla externa. Esto es como si el método tiene algún tipo de inteligencia en su algoritmo<sup>84</sup>.

### **10.1. HEURISTICA DEL VECINO MÁS CERCANO**

El vecino más cercano es una heurística de inserción secuencial para el VRPTW, esta se basa en las extensiones de las heurísticas del modelo clásico del ruteo de vehículos (Rosenkrantz, Stearns y Lewis (1977)), con la diferencia de que en este enfoque se incorporan métricas que integran la dimensión espacial y la temporal.

El algoritmo halla una solución basada en la cercanía de dos nodos o clientes adyacentes. En el enfoque temporal de la heurística del vecino más cercano, se usa una métrica o medida que hace un balance ponderado entre la cercanía geográfica de los clientes y el tiempo de recorrido respectivo de un nodo a otro.

En esta aproximación, un cliente cercano geográficamente no implica factibilidad en términos de tiempo, por esta razón el costo de la ruta al insertar un cliente hace

---

84 MIRANDA V., and FONSECA N., "New Evolutionary Particle Swarm Algorithm (EPSO) Applied to Voltage/Var Control," Proceedings of 14th Power Systems Computation Conference (PSCC'02), Sevilla, Spain, 24-28 Jun, 2002

un balance entre estos dos parámetros, y asigna los clientes a la ruta dando prioridad a aquellos cuyo “balance” sea menor.

Si se tiene una ruta  $(0, \dots, u_i, 0)$ , se define el costo de insertar el cliente  $u_j$  a continuación de  $u_i$  en la ruta como:

$$C_{ij} = \delta_1 d_{ij} + \delta_2 T_{ij} + \delta_3 V_{ij}, \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0$$

$$T_{ij} = w_j - (w_i + \delta_i)$$

$$V_{ij} = b_i - (w_j + \delta_i + t_{ij})$$

Donde los parámetros  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , y  $\delta_3$  son no negativos y suman 1.

- El término  $d_{ij}$ , es la distancia directa entre dos nodos y mide su cercanía geográfica (Se asume que cada unidad de distancia es equivalente a una unidad de tiempo de recorrido).
- El valor de  $T_{ij}$  indica la diferencia entre la hora de comienzo del servicio  $j$  en y la del fin del servicio en  $i$ , midiendo la cercanía de los clientes en términos temporales. Este parámetro minimiza el menor tiempo de recorrido y el menor tiempo de espera entre dos clientes.
- Por otro lado,  $V_{ij}$  mide la urgencia de realizar la inserción. La urgencia se define como la diferencia entre la hora de arribo a  $j$  (sin incluir la espera) y la última hora a la que se podría arribar a dicho cliente. Este parámetro prioriza los clientes a insertar teniendo en cuenta la diferencia de tiempo más tardía para servir al cliente  $j$ .

Diferentes valores de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , y  $\delta_3$ , arrojan resultados distintos, según el enfoque que se quiera dar al modelo.

- Si se busca insertar los clientes en las rutas minimizando su cercanía geográfica, se dará menor valor a  $\delta_1$ .
- Si se priorizan clientes por su cercanía temporal, menores valores de  $\delta_2$ , guiarán la heurística a que forme rutas con valores ponderados de tiempo y distancia menores.
- Si existen clientes cuyo tiempo de servicio más tardío está alejado del horizonte de planeación de rutas, el coeficiente  $\delta_3$ , debe ser menor para que se garantice el servicio a clientes críticos.

#### 10.1.1. Procedimiento.

- A cada uno de los coeficientes  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , y  $\delta_3$ , se asigna un valor teniendo en cuenta el enfoque que se quiera dar al modelo. La suma de los tres términos debe ser igual a 1.
- Se calculan los costos  $C_{ij}$  desde el depósito hasta cada uno de los clientes. Al hacer este cálculo es importante tener en cuenta que el término  $T_{ij}$  desde el depósito hasta el cliente  $j$ , es igual al tiempo de inicio de servicio en  $j$ ,  $w_j$ , porque el depósito no tiene asociado un tiempo de inicio del servicio; por lo tanto  $w_j = 0$ . La Métrica  $V_{ij}$ , es equivalente a la diferencia entre el final de la ventana de tiempo en el cliente  $j$  y su tiempo de recorrido desde el depósito  $t_{0j}$ , así:

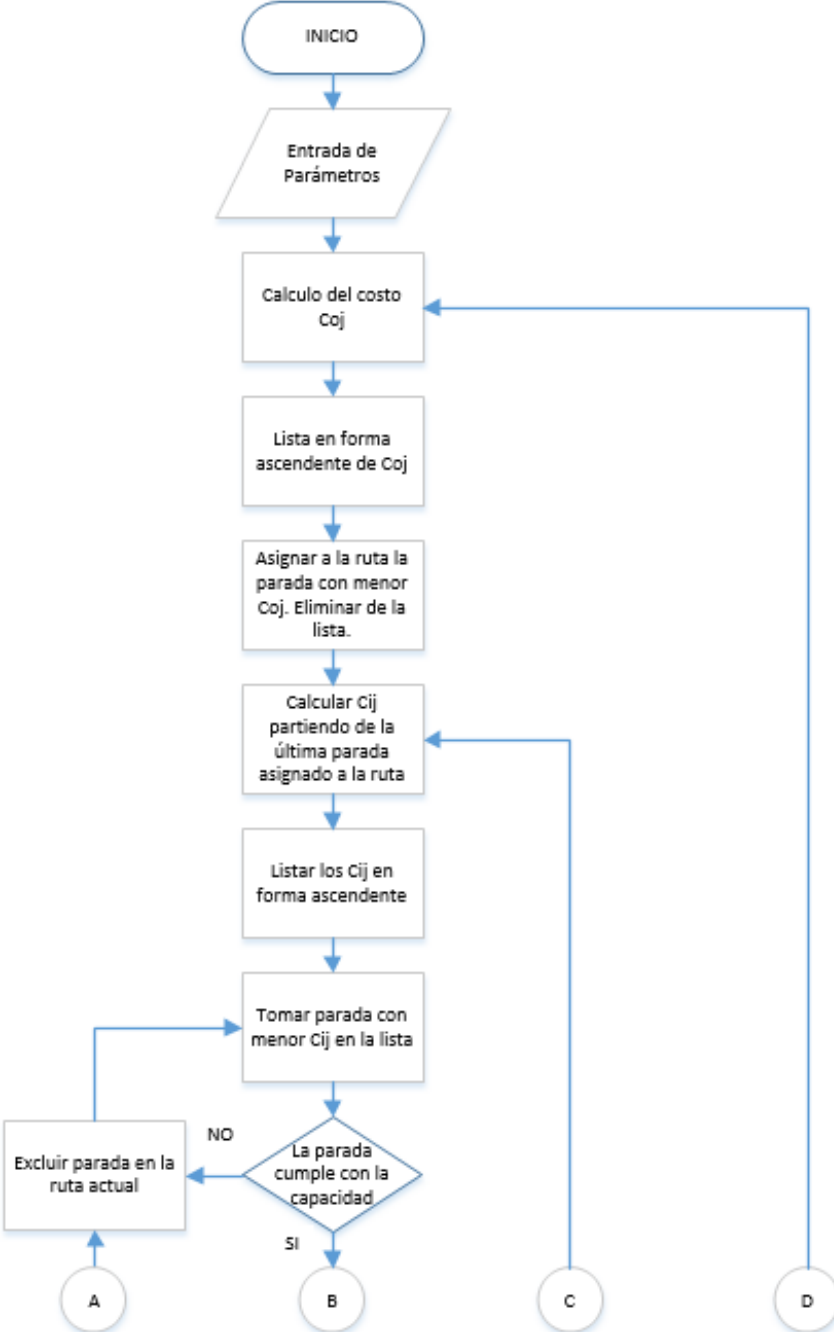
$$t_{ij} = w_j$$

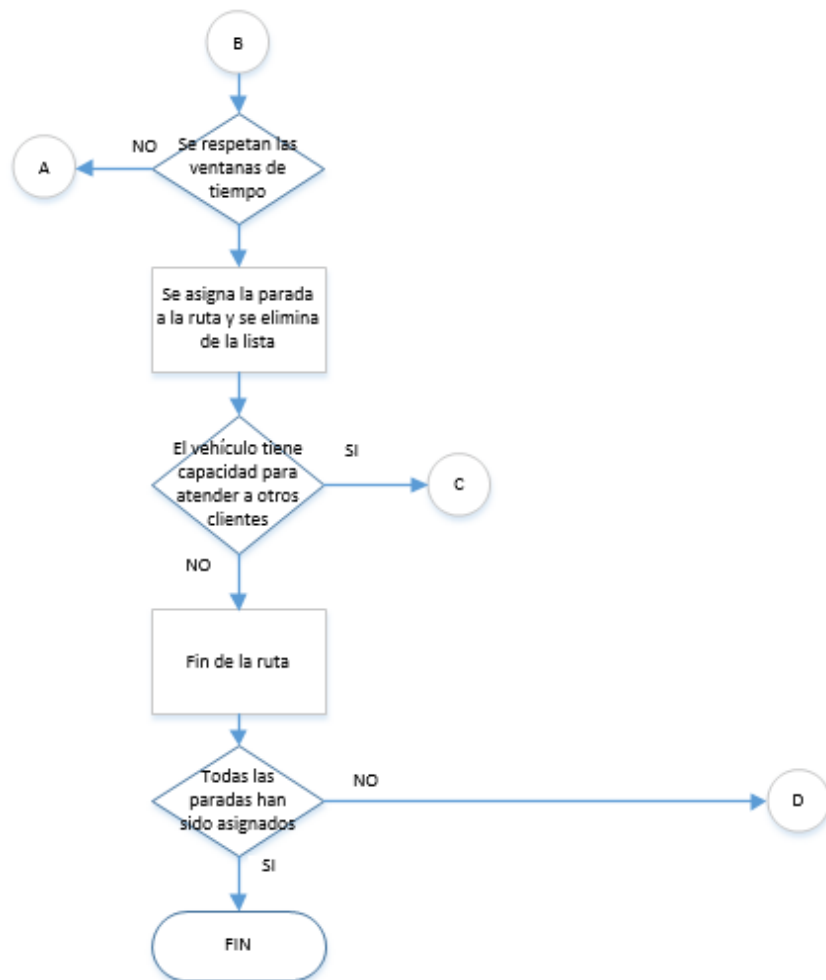
$$v_{ij} = b_j - t_{oj}$$

- Se listan los costos  $C_{0j}$  en orden ascendente. El algoritmo selecciona el cliente inicial de una ruta como el más cercano al depósito, según la medida  $C_{0j}$ , dentro de los clientes no visitados.
- Se calculan los costos  $C_{ij}$  partiendo del último cliente asignado a la ruta, desde y hacia cada uno de los clientes restantes y se listan de manera ascendente. En cada paso se selecciona al cliente no visitado que sea más cercano al último cliente de la ruta en términos del parámetro calculado, considerando solamente las inserciones factibles, y se agrega al final de la ruta parcialmente formada.
- Para que una inserción sea factible, la suma de las demandas asociadas con los clientes de la ruta parcialmente formada no debe exceder la capacidad del vehículo. Igualmente se debe observar que el tiempo de llegada al cliente  $j$ , no debe ser mayor que el tiempo más tardío en el que el cliente  $j$  permite el servicio.
- Si una inserción es no factible, se busca en la lista el segundo costo menor y se inserta en la ruta, si el segundo costo es no factible se buscan en la lista aquellos clientes que no violen las restricciones de capacidad y de ventanas de tiempo, siempre y cuando se respete el orden ascendente.
- Cuando no haya más clientes para insertar en la ruta actual, se crea una nueva hasta que todos los clientes sean visitados.

El procedimiento del algoritmo de vecino más cercano puede observarse gráficamente en la ilustración 3 mediante un diagrama de flujo.

Figura 3. Diagrama de flujo para el algoritmo de vecino más cercano.



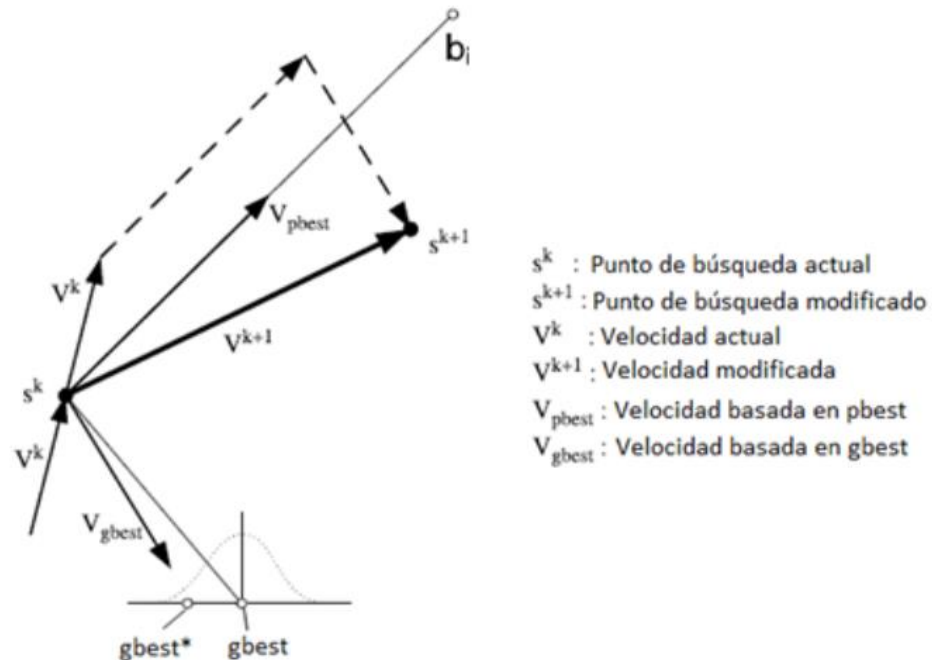


## 10.2. EL MECANISMO DEL ALGORITMO EPSO

Como se definió anteriormente en la sección 7.3.1.1 Optimización evolutiva por enjambre de partículas (EPSO), en resumen, la EPSO se mueven de manera similar que la PSO mediante la suma de los vectores de inercia, memoria y cooperación como lo muestra la ilustración 4, cada uno de estos vectores en

EPSO en ponderado de forma evolutiva y auto adaptativa los cuales son los mecanismos característicos de esta metaheurística.

**Figura 4. Concepto de la modificación de un punto de la búsqueda en EPSO.**



Fuente: Rolando M. Pringles, Vladimiro Miranda y Francisco Garcés. Expansión Óptima del Sistema de Transporte Implementando EPSO.

**10.2.1. Descripción detallada del algoritmo EPSO.** En un espacio binario, una partícula puede parecer moverse cerca o lejos al cambiar varios números de sus coordenadas binarias o bits, además la velocidad que tiene esta partícula puede ser descrita por el número de bits cambiados por iteración, es por esto que una partícula con cero bits cambiados no se mueve, mientras que esta se mueve lo más lejos posible al cambiar por completo todas sus coordenadas binarias<sup>85</sup>. La solución a este dilema es la definición de la trayectoria, velocidad y movimiento. Los cuales se pueden definir en términos de las probabilidades de cambio para

85 MUÑOZ SARMIENTO Oscar Javier, Tesis de pregrado: Aplicación del algoritmo metaheurístico optimización evolutiva por enjambre de partículas (EPSO) a la alternativa de asignación de energía eléctrica: minimización de pagos finales (PCM), Universidad Industrial de Santander, Pág. 47.

que una variable cambie de un estado al otro, es por esto que en el algoritmo binario una partícula se mueve en cada una de sus coordenadas en un espacio restringido de [0 1] dependiendo de su velocidad, donde cada  $V$  representa la probabilidad de que una de las variables de decisión de la partícula tome determinado valor. En otras palabras, si para una partícula la velocidad de una de sus variables de decisión es  $V=0.20$ , entonces hay una probabilidad del veinte por ciento de que esta variable tome el valor de 1, y un ochenta por ciento de probabilidad de tomar el valor de 0.

Pero la velocidad en el algoritmo EPSO no está representada como una probabilidad. En la sección 7.3.1.1 se muestra la velocidad se rige bajo la siguiente ecuación.

$$V_i^{k+1} = W_{i0}^* V_i^k + W_{i1}^* (pbest_i - S_i^k) + W_{i2}^* (gbest^* - S_i^k)$$

Es por esto que se utiliza la función sigmoide para convertir la expresión de la velocidad en una probabilidad.

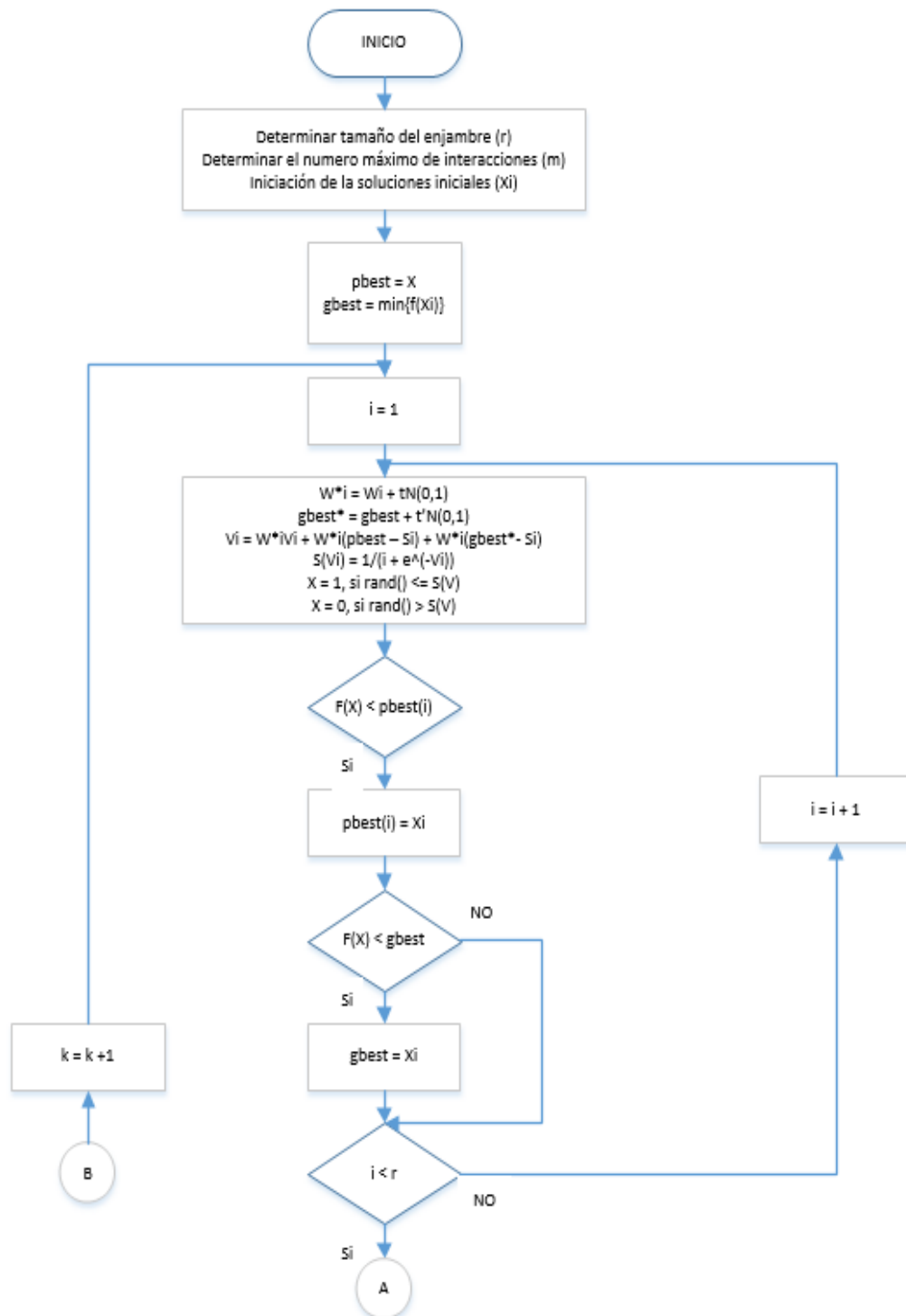
$$K_{(v_i^k)} = 1/(1 + e^{-(v_i^{k-1})})$$

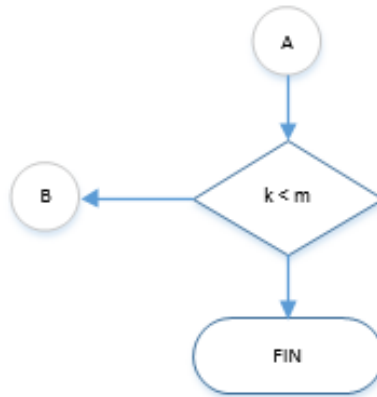
Y por último la regla de movimiento de la partícula de una iteración  $k$  a una iteración  $k + 1$  está dada por la siguiente ecuación:

$$S_i^{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } rand() \leq K_{(v_i^k)} \\ 0 & \text{si } rand() > K_{(v_i^k)} \end{cases}$$

En resumen, el diagrama de flujo de EPSO binario es dado por la ilustración 5.

Figura 5. Diagrama de flujo de EPSO binario.





### 10.3. DISEÑO DE LA SOLUCION

La metaheurística EPSO es concebida a partir de un PSO con operadores evolutivos el cual resuelve problema con variables continuas y el VRPTW es un problema de optimización combinatoria, por consiguiente, se requiere representar la solución a este problema, de una manera en que se convierten las permutaciones de clientes en valores posición, para de esta forma crear el enjambre de partículas.

- Para la solución de un VRPTW, teniendo en cuenta un PSO, la permutación entera  $Y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{il}, \dots, y_{iN})$ , donde  $i$  representa la partícula  $i$ -ésima y  $l$  representa el cliente  $l$ -ésimo.
- Cada solución inicial generada es una permutación de todos los clientes, la conversión se realiza aplicando la siguiente ecuación:

$$x_{il} = x_{min} + \frac{(x_{max} - x_{min})}{n * [y_{il} - 1 + rand()]}$$
 (10.4)

Donde:

$y_{il}$ :  $l$ -ésima dimensión De la solución  $i$ -ésima (cliente).

$x_{il}$ :  $l$ -ésima dimensión de la partícula  $i$ -ésima en el espacio del enjambre (valor posición de cada cliente en la partícula).

rand (): número aleatorio distribuido uniformemente en [0,1].

$n$ : Número de clientes.

$x_{min}$ : Valor de frontera mínimo del valor posición de la partícula en el espacio del enjambre.

$x_{max}$ : Valor de frontera máximo del valor posición de la partícula en el espacio del enjambre.

Mediante el siguiente ejemplo se muestra cómo se realiza la transformación de la permutación de clientes (solución codificada) a sus valores posición equivalente en el espacio solución del PSO utilizando la ecuación (10.4), en donde los valores frontera mínimo y máximo ( $x_{min}$  y  $x_{max}$ ) son seleccionados de forma arbitraria:

$y_i = (3, 4, 2, 5, 1, 6)$  solución codificada.

$n = 6$  Número de clientes.

$x_{min} = 1$

$x_{max} = 10$

El vector de posición equivalente a la solución codificada se muestra en la tabla3:

**Tabla 3. Ejemplo para la conversión de las soluciones en valores posiciones continuas**

Dimensión ( $l$ )	1	2	3	4	5	6
Solución codificada( $y_i$ )	3	4	2	5	1	6
Vector posición( $x_i$ )	2.9177	4.8203	6.9363	8.4473	1.2364	9.9559

De igual forma es necesario realizar el proceso inverso denominado decodificación de la solución PSO. La solución encontrada en el espacio de solución PSO deberá decodificarse como una solución del problema original, que está dada por medio de una permutación de clientes. Es por ello que los valores continuos de posición del vector  $x_i$ , se convierten nuevamente a la solución codificada  $y_i$  utilizando Rank Order Value (ROV). El ROV es una técnica propuesta por Bo, Wang y Jing<sup>86</sup> la cual convierte los valores continuos de las partículas en permutación de clientes.

La aplicación del ROV, siguiendo con la instancia de los 6 clientes y suponiendo que el vector de posición que se tiene es resultado de haber implementado el PSO, la conversión a la permutación de clientes se presenta en la tabla 4:

**Tabla 4Ejemplo para la aplicación del ROV.**

Dimensión ( $l$ )	1	2	3	4	5	6
Vector posición( $x_i$ )	4.728	7.213	9.874	3.936	1.633	6.700
Solución codificada( $y_i$ )	3	5	6	2	1	4

86 LIU, Bo, WANG, Ling y JIN, Yi-hui. An effective hybrid PSO-based algorithm for flow shop scheduling with limited buffers. En: Computers & Operations Research. 2008. Vol. 35, pp. 2791–2806. DOI10.1016/j.cor.2006.12.013.

Teniendo en cuenta lo anterior se presenta de manera formal el algoritmo para resolver el VRPTW utilizando PSO con operadores evolutivos (EPSO).

Algoritmo EPSO aplicado al VRPTW:

1. Iniciar las partículas usando la heurística del vecino más cercano
2. Repetir mientras se cumpla el criterio de parada.
3. Para cada partícula:
  - 3.1 Calcular el valor de los costos.
  - 3.2 Si el valor del costo es mejor que el valor de costo anterior establecer el actual valor como el nuevo pbest.
  - 3.3 Fin.
4. Escoger la partícula con mejor valor de costo en todo el enjambre como gbest.
5. Para cada partícula
  - 5.1 Convertir la solución en su respectivo vector posición.
  - 5.2 Calcular la velocidad de las partículas.
  - 5.3 Actualizar la posición de las partículas.
  - 5.4 Convertir las partículas a su respectiva permutación codificada.
  - 5.5 Aplicar el operador de cruce.
  - 5.6 Aplicar el operador de mutación.
  - 5.7 Fin.
6. Regresar al paso 3.
7. Fin

## 8. Establecer el gbest como la mejor solución global.

En el paso 1 se inicializan las soluciones mediante la generación de un conjunto de soluciones (soluciones codificadas), en donde cada una de ellas va a estar representada como una permutación de todos los clientes de la instancia. Una manera intuitiva de obtener dicho conjunto es generando la permutación aleatoriamente, de manera análoga a la generación de las partículas en el PSO básico Kennedy y Eberhart<sup>87</sup>. Sin embargo, con el fin de garantizar una población inicial de mejor calidad, ésta es generada utilizando el algoritmo del vecino más cercano.

En el paso 3 se calcula el valor de la función de costos para cada solución. En este caso, se obtiene el valor esperado de la función objetivo para cada solución del VRPTW.

En los pasos 3.2 - 4, se llevan a cabo las siguientes actividades:

1. Actualización del pbest: el pbest es un vector de tamaño  $m$ , donde cada elemento contiene el mejor valor del costo de la partícula  $m$ -ésima en todo el proceso iterativo. En la primera iteración el pbest es igual a los valores del costo hallados en ese momento y a partir de la segunda iteración, este vector se actualiza si el costo de al menos una partícula en ese instante, es mejor al valor anterior.
2. Actualización del gbest: teniendo en cuenta el pbest, se escoge el mejor valor de costo de todas las partículas con el fin de identificar la mejor partícula.

---

<sup>87</sup> KENNEDY, James y EBERHART, Russell. Particle Swarm Optimization. En: Natural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference. S.I.: s.n. 1995. pp. 1942–1948.

En el paso 5 se realiza la actualización del enjambre de la siguiente manera: como ya se mencionó, en el PSO las partículas se mueven en un espacio continuo, por lo que es necesario convertir las soluciones codificadas en sus valores posición equivalente usando la ecuación (10.4). Con el fin de realizar la actualización de la velocidad y la posición de cada partícula, se utilizan las ecuaciones descritas en este capítulo. Una vez se hayan actualizado estos valores, las partículas se convierten de nuevo a la permutación de clientes usando el ROV y de esta forma, llevar a cabo el proceso de aplicación de los operadores evolutivos de cruce y mutación.

El proceso se repite hasta que se haya satisfecho el criterio de calidad, estableciendo al gbest como la mejor solución global del problema.

## **OPERARADORES EVOLUTIVOS**

Como se señaló anteriormente los parámetros de la PSO varían de un problema a otro, por lo que encontrar los valores óptimos de estos no es una tarea sencilla dado a las varias limitaciones las cuales están asociadas principalmente a configuraciones de los parámetros propios de la heurística como lo establecieron en su trabajo Shanmugam, Ganesan y Vanathi. Dado que el enjambre puede converger prematuramente por dos razones:

- Un gran flujo de información entre las partículas asociados a grandes valores de coeficientes de aceleración.
- La convergencia a la mejor solución se podría ver demorada innecesariamente por bajas asignaciones en los coeficientes tanto de aceleración, inercia y demás, por el tamaño del espacio multidimensional en el cual se va a mover el enjambre.

En este trabajo se utilizó secuencialmente un operador de cruce simple el cual es aplicado a todo el enjambre con el *gbest*, seguido por un operador de mutación basado en el intercambio de genes<sup>88</sup>.

#### Algoritmo de Implementación del operador evolutivo de cruce

1. Para cada solución codificada  $Y_i$ .
  - 1.1. Seleccionar aleatoriamente un punto  $p$  entre 1 y  $N$
  - 1.2. Intercambiar los valores de la solución codificada con el *gbest* codificado
  - 1.3. Fin

#### Algoritmo de Implementación del operador evolutivo de mutación

1. Para cada solución cruzada
  - 1.1. Seleccionar dos puntos  $p_1$  y  $p_2$  e intercambiarlos
  - 1.2. Fin

---

88 GALVÁN NÚÑEZ, Silvia Adriana; ARIAS, Javier; LAMOS, Henry. Optimización por simulación basado en un sistema evolutivo de optimización de enjambre de partículas para el problema de ruteo de vehículos con demandas estocásticas. Tesis de maestría de ingeniería industrial. Bucaramanga. Universidad Industrial de Santander. 2012

## 11. ANALISIS DE RESULTADOS

En esta sección se describe el diseño utilizado y el resultado obtenido al implementar el framework EPSO. En primer lugar, se presenta la configuración de los parámetros del EPSO, seguido por la presentación del resultado obtenido.

El framework EPSO fue programado en Matlab 8.3 y ejecutado en un equipo con procesador Intel Core i3-4005U y 6GB de RAM. Dentro de los parámetros del EPSO, se establecieron los siguientes valores: número de partículas:  $m = 20$ ; coeficientes de aceleración:  $c_p = 1$  y  $c_g = 1,5$ ; inercia:  $w = 0,7$ ; valores frontera para convertir las soluciones en partículas:  $x_{min} = 0,1$  y  $x_{max} = 0,7$  y el número de iteraciones del algoritmo es igual a 100.

Los datos para cargar con el fin de dar solución al modelo propuesto se pueden ver en el anexo E. Matriz de datos, las entregas y recogidas son generadas como una distribución normal con media de 45 la cual es la capacidad media de un bus tipo padrón y desviación estándar de 10; un tiempo de servicio para cada nodo “parada” de 2 min 30 segundos; el inicio de la ventana de tiempo para cada nodo es igual al tiempo de ir del depósito al nodo en condiciones ideales de tráfico. Igualmente, en el anexo F. Matriz de distancias, se pueden apreciar el valor de la distancia de ir del depósito a el nodo y de nodo a nodo, esta matriz de distancias gracias al software de ruteo Bee uis desarrollado en el proyecto de grado titulado “Un algoritmo evolutivo para el problema de distribución de recursos post-desastres sísmicos en la ciudad de Bucaramanga”<sup>89</sup>. El número de nodos “paradas” son de 274 por las cuales pasan las rutas troncales del sistema

---

89 BARRERA NAVARRO, Anbres Ricardo; HERNANDEZ GOMEZ, Angie Paola. Un algoritmo evolutivo para el problema de distribución de recursos post-desastres sísmicos en la ciudad de Bucaramanga. Proyecto de grado de ingeniería industrial. Bucaramanga. Universidad Industrial de Santander. 2016.

Metrolínea distribuidas a lo largo de Bucaramanga y área metropolitana, y un depósito ubicado en la estación de transferencia de Metrolínea Provenza.

El framework EPSO arrojó el siguiente resultado:

**Tabla 5. Tabla de rutas**

TABLA DE RUTAS		
RUTA	Cliente	Nombre
RUTA 1	275	Estación de Provenza
	270	CL 104 KR 25
	269	TR Metropolitana CL 103
	268	Plaza Mercado Campesino
	275	Estación de Provenza
RUTA 2	271	Iglesia Santamaria De Los Lagos
	275	Estación de Provenza
	226	KR 2W CL 64
	275	Estación de Provenza
RUTA 3	5	Payador
	275	Estación de Provenza
RUTA 4	272	Lagos III
	275	Estación de Provenza
RUTA 5	224	CL 61 KR 1W
	275	Estación de Provenza
RUTA 6	225	KR 32A CL 19 S
	275	Estación de Provenza
RUTA 7	274	La Canasta
	275	Estación de Provenza
RUTA 8	122	KR 7 CL 5 S
	157	CL 11 KR 18
	1	Temprana
	275	Estación de Provenza

La tabla de rutas (tabla 5) contiene 8 rutas de las 250 que se obtuvieron mediante el framework, generando un costo de 452,470 unidades monetarias; las 250 rutas se presentan en el anexo H.



## 12. CONCLUSIONES

- Para el desarrollo del presente trabajo se realizó un estudio de los temas relacionados con el problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW), los cuales fueron aplicados a un problema real en el Sistema Integrado de Transporte Masivo del Área Metropolitana de Bucaramanga “Metrolínea”.
- Los objetivos planteados para la presente investigación se cumplieron totalmente. Se desarrolló un algoritmo EPSO que resuelve el problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo utilizando el software MATLAB.
- A partir de la revisión literaria se determinó que la mejor forma de resolver el VRPTW es mediante el uso de metaheurística, por ello se seleccionó la EPSO debido a las buenas soluciones que esta genera en relación con otras, por sus mecanismos evolutivos y autoadaptativo actuando en secuencia, cada uno con su propia probabilidad de producir no solo mejores individuos, sino también un promedio grupal mejor.
- Para el desarrollo del modelo de transporte fue necesario diseñar una red de transporte restringida con la ayuda de la herramienta Google Maps, esta red contiene cada una de las paradas de las rutas objeto de estudio.
- La ruta generada no contempla la situación real, es decir, toma independientemente la misma parada en sentido Norte-sur y sur-norte como dos rutas diferentes, de esto radica la gran cantidad de rutas generadas.

- El modelo no se ajusta al entorno real, se rige netamente por la formulación matemática de este.

### 13. RECOMENDACIONES

- Para futuras investigaciones se recomienda tomar el Problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo como un problema clusterizado con múltiples sub- depósitos y un depósito central para obtener una mejor calidad de los resultados.
- El presente proyecto servirá como base para futuras investigaciones ya que en la Universidad Industrial de Santander no se encuentran antecedentes de proyectos de grado que solucionen el problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo usando la metaheurística EPSO.
- Con el fin de que la solución sea factible en términos económicos y se ajuste más a la realidad, se recomienda para futura investigaciones definir los nodos y paradas como un solo punto en donde se pueda entrar y salir de este, con esto se reduciría el número de nodos y la cantidad de rutas.
- Se recomienda para futuras investigaciones, modelar la demanda del sistema al igual que las ventanas de tiempo, ya que estas son basadas en experiencia adquirida mediante el estudio de Metrolínea.

## BIBLIOGRAFÍA

ADAM N. LETCHFORD, SAEIDEH D. NASIRI, AMAR Oukil. Pricing routines for Vehicle Routing with time windows on roadnetworks. *Computers & Operations Research*, 201451, 331–337.

AHMET Sen y KEREM Bülbül, “A survey on multi trip vehicle routing problem”, VI International Logistics and Supply Chain Congress, Turkiye, 2008.

AI, THE JIN; KACHJTYICHYANUKUL, Voratas. A particle swarm optimization for the vehicle routing problema with simultaneous pickup and delivery. En: *Computers & Operations Research* 36. 2009. 10 p

ARDILA, EUCLIDES KILÔ. No es sostenible la forma como nos transportamos en Bucaramanga [en línea] disponible en: <http://www.vanguardia.com/area-metropolitana/bucaramanga/323542-no-es-sostenible-la-forma-como-nos-transportamos-en-bucaramanga>

ÁREA METROPOLITANA DE BUCARAMANGA [en línea] disponible en: <http://www.amb.gov.co/>.

ARIAS-OSORIO Javier, DÍAZ BOHÓRQUEZ Carlos Eduardo y LAMOS DÍAZ Henry, “Sistema de soporte a decisiones para el diseño de rutas escolares en Coomunclaver Ltda”, XVI Latin-Ibero-American Conference on Operation Research / XLIV Brazilian Symposium on Operation Research (XVI CLAIO / XVIV SPBO), ponencia No. 102217, Rio de Janeiro, Brazil, 2011.

ASCHEUER N, FISCHETTI M, GRÖTSCHEL M. Solving the asymmetric traveling salesman problem with time Windows by branch-and-cut. *Math Progr* 2001; 90:475–506.

AYALA RODRÍGUEZ Alexander y GONZÁLEZ BUTRÓN Edgar, “Asignación de rutas de vehículos para un sistema de recolección de residuos sólidos en la acera”, *Revista de Ingeniería - Universidad de Los Andes*, No. 13, 2001, pp 5-11.

BAAJ M. H. and MAHMASSANI H., “An AI\_Based Approach for Transit Route System Planning and Design,” *J. Advanced Transportation* 25, 187–210 1991.

BALDACCE Roberto, MINGOZZI Aristide y ROBERTI Roberto, “Recent exact algoritms for solving the vehicle routing problem under capacity and time windows constraints”, *European Journal of Operational Research*, Vol. 218, 2011, pp 1-6.

BARRERA NAVARRO, Anbres Ricardo; HERNANDEZ GOMEZ, Angie Paola. Un algoritmo evolutivo para el problema de distribución de recursos post-desastres sísmicos en la ciudad de Bucaramanga. Proyecto de grado de ingeniería industrial. Bucaramanga. Universidad Industrial de Santander. 2016.

BAYAS MEZA, Patricio G., Estudio y propuesta de nuevas rutas y líneas de transporte público urbano del distrito metropolitano de quito, caso de aplicación corredor sur occidental del sistema metro bus, tesis grado, Magister en ingeniería industrial y productividad, 2011, Escuela politécnica nacional Facultad de ingeniería química y agroindustria.

BIANCO L., MINGOZZI A., RICCARDELLI S., and SPADONI M.. Exact and heuristic procedures for the traveling salesman problem with precedence constraints, based on dynamic programming. *INFOR*, 32(1):19{32, 1994.

BRAVO BASTIDAS Juan José, OSORIO GÓMEZ Juan Carlos y OREJUELA CABRERA Juan Pablo Modelo para la priorización dinámica de despachos de vehículos utilizando el proceso analítico jerárquico, 2009, Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística- Universidad del Valle.

BRÄYSY Olli y WOUT Dullaert, “A fast evolutionary metaheuristic for the VRP with time windows”, International Journal on Artificial Intelligence Tools, Vol. 12, 2003, pp 153-172.

BRUCE GOLDEN, RAGHAVAN S. y WASIL Edward, “The vehicle routing problem: latest advances and new challenges”. Springer, New York, 2008, pp. 3-122.

CHAKROBORTY P., “Genetic Algorithms for Optimal Urban Transport Design,” Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering 18, 184–200 2003.

CHEN AL, YANG GK, WU ZM. Hybrid discrete particle swarm optimization algorithm for capacitated vehicle routing problem. Journal of Zhejiang University Science A 2006;7(4):607--14.

CHICANO GARCÍA, José Francisco. Metaheurísticas e Ingeniería del Software. Tesis doctoral. Universidad de Málaga, Lenguajes y ciencias de la computación. 2007. p, 46.

CHÍO, JUAN CARLOS. No solo con vías se mejora la movilidad en Bucaramanga [en línea] disponible en: <http://www.vanguardia.com/area-metropolitana/bucaramanga/319289-no-solo-con-vias-se-mejora-la-movilidad-en-bucaramanga>

CONTARDO VERA Claudio Andrés, “Formulación y solución de un problema de ruteo de vehículos con demanda variable en tiempo real, trasbordos y ventanas de

tiempo”, Memoria para optar al título de ingeniero civil matemático, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile, Santiago de Chile, Chile, 2005.

CORDEAU Jean-Francois, GENDREAU Michel, LAPORTE Gilbert, POTVIN Jean-Yves y SEMET Frédéric, “A guide to vehicle routing heuristics”, The Journal of the Operational Research Society, Vol. 53, No. 5, 2002, pp 512- 522.

CRESPO Eric, MARTÍ Rafael y PACHECO Joaquín, “Procedimientos Metaheurísticos en Economía y Empresa”, Revista Electrónica de Comunicaciones y trabajos de ASEPUMA, 1ª Edición, Tirant lo Blanch, Valencia, España, 2007

DANTZIG G. B., RAMSER J. H.. The Truck Dispatching Problem. Management Science, Vol 6. No 1, Oct. 1959, pp. 80 - 91.

DAZA Julio Mario, MONTOYA Jairo y NARDUCCI Francesco, Resolución del problema de enrutamiento de vehículos con limitaciones de capacidad utilizando un procedimiento metaheurístico de dos fases, 2010, Escuela de Ingeniería de Antioquia, Medellín (Colombia).

DEPARTAMENTO ADMINISTRATIVO NACIONAL DE ESTADÍSTICA -DANE. Proyecciones de Población departamentales y municipales por área 2005 – 2020 [http://www.dane.gov.co/files/investigaciones/poblacion/proyepobla06\\_20/ProyeccionMunicipios2005\\_2020.xls](http://www.dane.gov.co/files/investigaciones/poblacion/proyepobla06_20/ProyeccionMunicipios2005_2020.xls)

DOERNER Karl et all. “Savings Ants for the Vehicle Routing Problem”, Lecture Notes in Computer Science – Applications of Evolutionary Computing, Vol. 2279, 2001, pp 73-109.

ERIC D.Taillard, LAPORTE Gilbert y GENDREAU Michel, "Vehicle routing with multiple use of Vehicles", The Journal of the Operational Research Society, Vol. 47, No. 8, 1996, pp 1065- 1070.

FAN W. and MACHEMEHL R. B., "Using a Simulated Annealing Algorithm to Solve the Transit Route Network Design Problem," J. Transportation Engineering-ASCE 132, 122–132 2006

FUNCO HERENCIA. [en línea] disponible en: [http://funcoherencia.com/index.php?option=com\\_content&view=article&id=87&Itemid=89](http://funcoherencia.com/index.php?option=com_content&view=article&id=87&Itemid=89)

GALVÁN NÚÑEZ, Silvia Adriana; ARIAS, Javier; LAMOS, Henry. Optimización por simulación basado en un sistema evolutivo de optimización de enjambre de partículas para el problema de ruteo de vehículos con demandas estocásticas. Tesis de maestría de ingeniería industrial. Bucaramanga. Universidad Industrial de Santander. 2012

GARCÍA SABATER, José Pedro; MAHEUT, Julien. Modelo y métodos de investigación de operaciones. Procedimientos para pensar. Modelado y resolución de problemas de organización industrial mediante programación matemática. En: Universitat Politècnica de València. Grupo de investigación ROGLE. Departamento de organización de empresas. Curso 2011/2012. 181 p.

GENDREAU, Michel y POTVIN, Jean-Yves. Metaheuristics in Combinatorial Optimization. En: Annals of Operations Research. 2005. vol,140. p, 189–213

GILLI, M.; WINKER, P. Heuristic Optimization Methods in Econometrics. En: Université de Genève. Octubre 21 de 2007. 48 p.

GOKSAL, F.P., KARAOGLAN, I., ALTIPARMAK, F. A Hybrid Discrete Particle Swarm Optimization for Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pickup and Delivery. Jan. 2012, Computers & Industrial Engineering, 2012.

GÓMEZ, David y RANGEL, Carlos. Formular las Metaheurística Búsqueda Tabú y Recocido Simulado para la solución del CVRP (Capacitated Vehicle Routing Problem). [en línea]. Bucaramanga (2011); 150 h. Trabajo de grado (Ingeniería Industrial). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas.

GONZÁLEZ LA ROTTA Elsa Cristina y ORJUELA CASTRO Javier Arturo, “Vehicle routing problem with random components for the collection of perishable products”, XVI Latin-Ibero-American Conference on Operation Research / XLIV Brazilian Symposium on Operation Research, (XVI CLAIO / XVIV SPBO), poster No. 105405, Rio de Janeiro, Brazil, 2011.

GONZÁLEZ VAGAS Guillermo y GONZÁLEZ ARISTIZÁBAL Felipe, “Metaheurísticas aplicadas al ruteo de vehículos. Parte 1: formulación del problema”, Revista de Ingeniería e Investigación – Universidad Nacional de Colombia, Vol. 26, No.3, 2006, pp 149-156.

GONZÁLEZ VAGAS Guillermo y GONZÁLEZ ARISTIZÁBAL Felipe, “Metaheurísticas aplicadas al ruteo de vehículos. Parte 2: algoritmo genético, comparación con una solución heurística”, Revista de Ingeniería e Investigación – Universidad Nacional de Colombia, Vol. 27, No.1, 2007, pp 149- 157.

GONZÁLEZ VAGAS Guillermo y GONZÁLEZ ARISTIZÁBAL Felipe, “Metaheurísticas aplicadas al ruteo de vehículos. Parte 3: Genetic Clustering and Tabu Routing”, Revista de Ingeniería e Investigación – Universidad Nacional de Colombia, Vol. 27, No.2, 2007, pp 106-113.

GUERRERO W. J., Prodhon C., VELASCO N. y AMAYA C. A., “Hybrid heuristic for the inventory location-routing problem”, XVI Latin-Ibero-American Conference on Operation Research / XLIV Brazilian Symposium on Operation Research (XVI CLAIO / XVIV SPBO), session especial No. 105451, Rio de Janeiro, Brazil, 2011

GUPTA D.K. “Tabu search for vehicle routing problem”, Intern. J. Computer Math, Vol. 79, No. 6, 2002, pp 693-701.

HERNÁN RESTREPO Jorge, MEDINA Pedro Daniel y CRUZ Eduardo Arturo, “Un problema logístico de programación de vehículos con ventanas de tiempo”, Scientia et Technica – Universidad Tecnológica de Pereira, Vol. 14, No 39, 2008.

HILLIER Frederick, Lieberman Gerald, “Introducción a la Investigación de Operaciones”, Mc Graw Hill, novena edición, 2010.

HILLIER, Frederick S.; LIEBERMAN, Gerald J. Introducción a la investigación de operaciones. 9° Ed. Ciudad de México, México: Mc Graw Hill. 2010, p. 81-88.

JOURDAN, BASSEUR, y TALBI. Hybridizing exact methods and metaheuristics: A taxonomy. En: European Journal of Operational Research. Diciembre, 2009. vol, 119. no, 3. p, 620–629

KENNEDY, James y EBERHART, Russell. Particle Swarm Optimization. En: Natural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference. S.I.: s.n. 1995. pp. 1942–1948.

LAPORTE Gilbert, “The Vehicle Routing Problem: An overview of exact and approximate algorithms”, European Journal of Operational Research, Vol. 59, 1991, pp 345-358

LAPORTE Gilbert, GENDREAU Michel y HERTZ Alain, “An approximation algorithm for the traveling salesman problem with time windows”, Institute for Operation Research and de Management Science – Operations Research, Vol. 45, No. 4, 1998, pp 639-641.

LAPORTE Gilbert, HERTZ Alain y MITTAZ Michel, “A tabu search heuristic for the capacited arc routing problem”, Institute for Operation Research and de Management Science – Operations Research, Vol. 48, No. 1, 2000, pp 129-135.

LAPORTE Gilbert, REANUD Jacques y BOCTOR Fayez, “An improved petal heuristic for the vheicle routeing problem”, The Journal of the Operational Research Society, Vol. 47, No. 2, 1996, pp. 329- 336.

LAWLER, Eugene. Combinatorial Optimization: Networks and Matroids. Courier Dover, (1976); p 1-4. [en línea] [Consultado 7 Jun. 2013]. disponible en: <<http://www.plouffe.fr/simon/math/CombinatorialOptimization.pdf>>.

LEONORA Bianchi, BIRATTARI Mauro, CHIARANDINI Marco, MANFRIN Max y MASTROLILLI Monaldo, “Metaheuristics for the Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands”, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3242, 2004, pp. 450-460.

LI; HONG-GUI; LI, XING-GUO. Image segmentation with pseudo branch and bound algorithm. En: Proceedings of the Eighth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Baoding, 12-15 Julio de 2009, 5 p

LIBERTAD Tansini, URQUHART Maria, and VIERA Omar. Comparing assignment algorithms for the multi-depot vrp.

LIJING, T., FUYONG, L., & HONG, W. Adaptive comprehensive learning bacterial foraging optimization and its application on vehicle routing problem with time windows. *Neurocomputing*, 2-7. 2015

LIU, Bo, WANG, Ling y JIN, Yi-hui. An effective hybrid PSO-based algorithm for flow shop scheduling with limited buffers. En: *Computers & Operations Research*. 2008. Vol. 35, pp. 2791–2806. DOI10.1016/j.cor.2006.12.013.

LOZADA DÍAZ Adriana y CADENA GONZÁLEZ Ricardo Andrés, Solución del problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW) mediante métodos heurísticos, 2012, Facultad de Ingenierías Físico mecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales, Universidad Industrial de Santander.

MAREK L. A note on robustness tolerances for combinatorial optimization problems. *Information Processing Letters*. Vol. 110. 2010. p.725-729.

MAREK L. A note on robustness tolerances for combinatorial optimization problems. *Information Processing Letters*. Vol. 110. 2010. p.725-729.

MARTÍ, Rafel. Procedimientos metaheurísticos en optimización combinatoria. En: *Departament d'Estadística i Investigació Operativa. Facultat de Matemàtiques. Universitat de València*. 60 p.

MARTÍNEZ GARCÍA, F. Javier; MORENO PÉREZ, José A. Optimización por enjambre para la p-mediana continua y discreta. En: *Actas del U congreso Español sobre Metaheurísticas, Algoritmos Evolutivos y Bioinspirados*. 2007, p. 53-60, ISBN 978-84-690-3470-5.

MEI-SHIANG CHANG, SHYANG-RUEY CHEN Y CHE-FU HSUEH, Real-time vehicle routing problem with time windows and simultaneous delivery pickup demands, department of business administration chung hua university

MIRANDA V., and FONSECA N., “EPSO-Best-Of-Two-Worlds Meta-Heuristic Applied To Power System Problems,” Proceedings Congress on Evolutionary Computation, vol. 2, pp. 1080-1085, Honolulu, Hawaii, USA, 2002.

MIRANDA V., and FONSECA N., “New Evolutionary Particle Swarm Algorithm (EPSO) Applied to Voltage/Var Control,” Proceedings of 14th Power Systems Computation Conference (PSCC'02), Sevilla, Spain, 24-28 Jun, 2002

MOURKOUSIS George, PROTONOTARIOS Matew y Theodora Varvarigou, “Application of genetic algorithm to a large-scale multiple-constraint vehicle routing problem”, International Journal of Computational Intelligence and Applications, Vol. 3, No. 1, 2003, pp 1-21.

MULTICRITERIA GENETIC ALGORITHMS FOR THE VEHICLE. Malek Rahoual, Boubekeur Kitoun, Mohamed-Hakim Mabed, and Vincent Bachelet † Féthia Benameur, MIC'2001 - 4th Metaheuristics International Conference.

MUÑOZ SARMIENTO Oscar Javier, Tesis de pregrado: Aplicación del algoritmo metaheurístico optimización evolutiva por enjambre de partículas (EPSO) a la alternativa de asignación de energía eléctrica: minimización de pagos finales (PCM), Universidad Industrial de Santander, Pág. 47.

OLIVERA Alfredo y VIERA Omar. “Adaptive memory programming for the Vehicle routing problem with multiple trips”, Computers and Operation Research, Vol. 34, 2007, pp 28–47.

OLIVERA Alfredo, “Heurísticas para problemas de ruteo de vehículos”, reporte de investigación, Instituto de Computación – Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay, 2004, [en línea] disponible en: <http://www.fing.edu.uy/inco/pedeciba/bibliote/reptec/TR0408.pdf>.

Parallelization of the Vehicle Routing Problem with Time Windows. PhD thesis, 2001.

PETCH R. J. y SALHI S., “A GA Based Heuristic for the Vehicle Routing Problem with Multiple Trips”, *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, Vol. 6, No. 4, 2007, pp 591-613.

PRASAD Chalasani and RAJEEV Motwani. Approximating capacitated routing and delivery problems. *SIAM Journal on Computing*, 28(6):2133–2149, 1999.

REEVES, C. *Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems*. 1995. McGraw-Hill. Citado por: NASSER A, El-Sherbeny. Vehicle routing with time windows: An overview of exact, heuristic and metaheuristic methods. En: *Journal of King Saud University*. 2010. vol, 22. p, 126 -127.

REVISTA DINERO El próximo diciembre metrolínea inicia pruebas del sistema [en línea] disponible en: <http://www.dinero.com/actualidad/noticias/articulo/el-proximo-22-diciembre-metrolínea-inicia-fase-pruebas-del-sistema/88720>

RODRÍGUEZ MARÍN, J. C. y DÍAZ CONTRERAS, J. A.. Evaluación de impacto del sistema de transporte Metrolínea: revisión de metodologías. *Equidad & Desarrollo* (22), 121-135. 2014

ROPKE, S. , & CORDEAU, J. F. Branch and cut and price for the pickup and delivery problem with time windows. *Transportation Science*, 43 (3), 267–286. 2009

SÁNCHEZ, M. G. Las matemáticas del siglo XX: una mirada en 101 artículos. Págs. 115-120. Universidad de la Laguna, Sociedad Canaria Isaac Newton de profesores de matemáticas: Nivola. 2000.

SCONTENT [en línea] disponible en: [https://scontent-atl3-1.xx.fbcdn.net/hphotos-xpl1/v/t1.0-9/12705734\\_1189094067784657\\_1215520532917095492\\_n.jpg?oh=2328012ef720c767267034e9c9a5c9ee&oe=5736628E](https://scontent-atl3-1.xx.fbcdn.net/hphotos-xpl1/v/t1.0-9/12705734_1189094067784657_1215520532917095492_n.jpg?oh=2328012ef720c767267034e9c9a5c9ee&oe=5736628E)

SEPÚLVEDA Juan, ESCOBAR John Wilmer y ADARME JAIMES Wilson Un algoritmo para el problema de ruteo de vehículos con entregas divididas y ventanas de tiempo (SDVRPTW) aplicado a las actividades de distribución de PYMEs del comercio al por menor, 2014, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellin

TAHA, Hamdy. Investigación de Operaciones. 7ma. Edición. Pearson Educación. México, 2004. P3.

THE VRP WEB, Collaboration between AUREN and the Languages and Computation Sciences department of the University of Málaga by Bernabé Dorronsoro Díaz, última actualización: marzo de 2007, consultada en Abril de 2010, [en línea] disponible en: <http://neo.lcc.uma.es/radi-aeb/WebVRP/>.

TOTH Paolo y VIGO Daniele, "The Vehicle Routing Problem". Society of Industrial and Applied Mathematics (SIAM) monographs on discrete mathematics and applications, Philadelphia, USA, 2002, pp. 1-23, 109-149.

TOTH Paolo, VIGO Daniele. "The vehicle routing problem". SIAM monographs on discrete mathematics and applications. Philadelphia 2002. Ibid. p, 158

TOTH, Paolo y VIGO, Daniele. The Vehicle Routing Problem. En: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987. vol.9., p. 4.

TRANSPORTES LUSITANIA Sobre la empresa [en línea] disponible en: <http://www.transporteslusitania.com/sobre-la-empresa>

WEE-KIT Ho, JUAY CHIN Ang y ANDREW Lim, “A hybrid search algorithm for the vehicle routing problem with time windows”, International Journal on Artificial Intelligence Tools, Vol. 10, N0.3, 2001, pp 431-449.

YEPES PIQUERAS Víctor, “Optimización heurística económica aplicada a las redes de transporte del tipo VRPTW”, tesis doctoral, Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos – Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, 2002.

ZABALA ARIAS Carlos Andrés, Implementación del sistema de colonia de hormigas con búsqueda local al problema de ruteo de vehículos con capacidad y ventanas de tiempo (CVRPTW), 2005, Universidad de los Andes

# **ANEXOS**

(Ver documentos adjuntos)