

**Desarrollo de pensamiento algebraico a través de la justificación: un análisis de la actividad matemática de estudiantes de cuarto grado**

Luz Dary Suárez Gelves

Trabajo de grado para optar al título de Licenciada en Matemáticas

Directora

Solange Roa Fuentes

Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2026

## **Dedicatoria**

*A mis padres, por su amor, paciencia y apoyo incondicional durante todos estos años.*

*A mis hermanos, por estar siempre presentes.*

*Y, finalmente, a mi pareja, Iván; no existen palabras suficientes para expresar lo que  
siento por ti.*

**Tabla de contenido**

Introducción.....	8
1. Antecedentes .....	9
1.1 Aspectos relacionados con el desarrollo de pensamiento algebraico .....	10
1.2 Perspectiva del Ministerio de Educación Nacional .....	12
2. Planteamiento del problema.....	14
2.1. Objetivos.....	14
2.1.1. <i>Objetivo general</i> .....	14
2.1.2. <i>Objetivos específicos</i> .....	14
3. Elementos teóricos .....	15
4. Método .....	19
5. Diseño e implementación de instrumentos.....	20
5.1. Contexto y participantes .....	20
5.2. Implementación en el aula.....	20
5.3. Prueba diagnóstica.....	21
5.3.1. <i>Análisis a diagnóstica priori de la prueba</i> .....	22
5.3.2. <i>Análisis a posteriori de la prueba diagnóstica</i> .....	27
5.4. Talleres .....	40
5.4.1. <i>Taller 1</i> .....	40
5.4.1.1. Análisis a priori Taller 1 .....	40
5.4.1.2. Análisis a posteriori del taller 1 .....	42
5.4.2. <i>Taller 2</i> .....	47
5.4.2.1. Análisis a priori del Taller 2 .....	47
5.4.2.2. Análisis a posteriori del Taller 2.....	49
5.4.3. <i>Taller 3</i> .....	56
5.4.3.1. Análisis a priori del Taller 3 .....	56
5.4.3.2. Análisis a posteriori del Taller 3.....	59
5.4.4. <i>Taller 4</i> .....	68
5.4.4.1. Análisis a priori del Taller 4 .....	68
5.4.4.2. Análisis a posteriori del Taller 4.....	69
6. Conclusiones .....	74
7. Implicaciones y futuras investigaciones.....	75
Referencias .....	77
Apéndices .....	79

### Lista de Figuras

<b>Figura 1</b>	Actividad "¿Qué sigue y cuál es la regla?" .....	13
<b>Figura 2</b>	Secuencia geométrica de cuadrados.....	16
<b>Figura 3</b>	Diseño metodológico .....	19
<b>Figura 4</b>	Expresiones semióticas del estudiante A1. Prueba diagnóstica, tarea 1 .....	28
<b>Figura 5</b>	Producción del estudiante A11. Prueba diagnóstica, tarea 1 .....	29
<b>Figura 6</b>	Producción del estudiante A6. Prueba diagnóstica, tarea 1 .....	30
<b>Figura 7</b>	Producción del estudiante A23. Prueba diagnóstica, tarea 2 .....	31
<b>Figura 8</b>	Producción del estudiante A1. Prueba diagnóstica, tarea 2 .....	31
<b>Figura 9</b>	Producción del estudiante A14. Prueba diagnóstica, tarea 2 .....	32
<b>Figura 10</b>	Producción del estudiante A6. Prueba diagnóstica, tarea 2 .....	32
<b>Figura 11</b>	Producción del estudiante A8. Prueba diagnóstica, tarea 2 .....	33
<b>Figura 12</b>	Producción del estudiante A15. Prueba diagnóstica, tarea 2 .....	33
<b>Figura 13</b>	Producción del estudiante A14. Prueba diagnóstica, tarea 2 .....	34
<b>Figura 14</b>	Producción del estudiante A15. Prueba diagnóstica, tarea 3 .....	34
<b>Figura 15</b>	Producción del estudiante A19. Prueba diagnóstica, tarea 3 .....	35
<b>Figura 16</b>	Producción del estudiante A22. Prueba diagnóstica, tarea 3 .....	35
<b>Figura 17</b>	Producción del estudiante A12. Prueba diagnóstica, tarea 3 .....	36
<b>Figura 18</b>	Producción del estudiante A6. Prueba diagnóstica, tarea 4 .....	37
<b>Figura 19</b>	Producción del estudiante A1. Prueba diagnóstica, tarea 4 .....	38
<b>Figura 20</b>	Producción del estudiante A8. Prueba diagnóstica, tarea 5 .....	39
<b>Figura 21</b>	Producción del estudiante A15. Prueba diagnóstica, tarea 5 .....	40
<b>Figura 22</b>	Producción del estudiante A4. Taller 1, tarea 1 .....	44
<b>Figura 23</b>	Producción del estudiante A18. Taller 1, tarea 1 .....	44
<b>Figura 24</b>	Producción del estudiante A24 . Taller 1, tarea 1 .....	45
<b>Figura 25</b>	Producción del estudiante A23. Taller 1, tarea 2 .....	46
<b>Figura 26</b>	Producción del estudiante A18. Taller 1, tarea 2 .....	47
<b>Figura 27</b>	Producción del estudiante A21. Taller 2.....	53
<b>Figura 28</b>	Producción del estudiante A15. Taller 2.....	55
<b>Figura 29</b>	Producción del estudiante A6. Taller 2.....	55
<b>Figura 30</b>	Producción del estudiante A20. Taller 2.....	56
<b>Figura 31</b>	Producción del estudiante A22. Taller 2.....	56
<b>Figura 32</b>	Producción del estudiante A20. Taller 3, tarea 1 .....	59
<b>Figura 33</b>	Producción del estudiante A2. Taller 3, tarea 2 .....	59
<b>Figura 34</b>	Producción del estudiante A14. Taller 3, tarea 4.....	64
<b>Figura 35</b>	Producción del estudiante A25. Taller 3, tarea 4.....	65
<b>Figura 36</b>	Producción del estudiante A18. Taller 3, tarea 5.....	66
<b>Figura 37</b>	Producción del estudiante A1. Taller 4, tarea 1 .....	69
<b>Figura 38</b>	Producción del estudiante A15. Taller 4, tarea 2 y 3 .....	72
<b>Figura 39</b>	Producción del estudiante A25. Taller 4, tarea 4.....	72
<b>Figura 40</b>	Producción del estudiante A6. Taller 4, tarea 4 .....	73

**Lista de Tablas**

<b>Tabla 1</b>	Interacción con el estudiante A1. Prueba diagnóstica, tarea 1 .....	28
<b>Tabla 2</b>	Interacción con el estudiante A11. Prueba diagnóstica, tarea 1 .....	30
<b>Tabla 3</b>	Interacción con el estudiante A9. Prueba diagnóstica, tarea 3 .....	37
<b>Tabla 4</b>	Interacción con el estudiante A1. Taller 1, tarea 1 .....	43
<b>Tabla 5</b>	Interacción con el estudiante A1. Taller 1, tarea 2 .....	45
<b>Tabla 6</b>	Interacción con el estudiante A1. Taller 2 .....	49
<b>Tabla 7</b>	Interacción con el estudiante A6. Taller 2 .....	51
<b>Tabla 8</b>	Interacción con los estudiantes A6 y A15. Taller 2.....	53
<b>Tabla 9</b>	Interacción con el estudiante A14. Taller 3, tarea 3 .....	60
<b>Tabla 10</b>	Interacción con el estudiante A25. Taller 3, tarea 3 .....	62
<b>Tabla 11</b>	Interacción con el estudiante A14. Taller 3, tarea 4 .....	64
<b>Tabla 12</b>	Interacción con el estudiante A18. Taller 3. tarea 5 .....	66
<b>Tabla 13</b>	Interacción con el estudiante A20. Taller 3, tarea 5 .....	67
<b>Tabla 14</b>	Interacción con los estudiantes A1 y A23. Taller 4, tarea 1 .....	70
<b>Tabla 15</b>	Interacción con el estudiante A6. Taller 4, tarea 4 .....	73

## Resumen

**Título:** Desarrollo de pensamiento algebraico a través de la justificación: un análisis de la actividad matemática de estudiantes de cuarto grado.

**Autor:** Luz Dary Suárez Gelves

**Palabras clave:** pensamiento algebraico temprano, aritmética generalizada, equivalencias.

Este trabajo analiza y adapta la propuesta de enseñanza de Pinto, Ayala-Altamirano, Molina y Cañadas (2023) para estudiar el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en estudiantes de cuarto grado mediante la expresión y justificación de ideas matemáticas. Para ello, se implementaron actividades centradas en la generalización de patrones y la equivalencia de expresiones en un grupo de 30 estudiantes con edades comprendidas entre los 9 y 10 años. La propuesta incluyó una prueba diagnóstica y cuatro talleres, cada uno acompañado de análisis a priori y a posteriori, lo que permitió identificar los avances y dificultades de los estudiantes.

Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes logra reconocer regularidades simples y aplicar estrategias aritméticas para continuar secuencias, mientras que algunos alcanzan niveles más avanzados, formulando reglas generales que permiten hallar cualquier término de la secuencia sin necesidad de calcular los anteriores. Asimismo, se evidenció que los recursos verbales y gestuales, como funciones generativas del lenguaje, señalamientos y déicticos, apoyan la justificación de ideas y el razonamiento flexible.

Estos hallazgos evidencian la importancia de diseñar experiencias pedagógicas que integren el análisis de patrones, la argumentación y la generalización, promoviendo el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en educación primaria.

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa.

### Abstract

**Title:** Development of Algebraic Thinking through Justification: An Analysis of the Mathematical Activity of Fourth-Grade Students

**Author:** Luz Dary Suárez Gelves

**Keywords:** early algebraic thinking, generalized arithmetic, equivalence.

This study analyzes and adapts the teaching proposal by Pinto, Ayala-Altamirano, Molina, and Cañadas (2023) to examine the development of early algebraic thinking in fourth-grade students through the expression and justification of mathematical ideas. To this end, activities focused on pattern generalization and equivalence of expressions were implemented with a group of 30 students aged 9 to 10 years. The proposal included a diagnostic test and four instructional workshops, each accompanied by a priori and a posteriori analyses, which made it possible to identify students' progress and difficulties.

The results show that most students are able to recognize simple regularities and apply arithmetic strategies to continue sequences, while some reach more advanced levels by formulating general rules that allow them to determine any term in the sequence without calculating the previous ones. Additionally, verbal and gestural resources—such as generative linguistic functions, pointing, and deictic expressions—were found to support students' justification of ideas and flexible reasoning.

These findings highlight the importance of designing pedagogical experiences that integrate pattern analysis, argumentation, and generalization, thereby promoting the development of early algebraic thinking in primary education.

\* Degree Work

\*\* Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director: Solange Roa Fuentes. Doctor of Science specializing in Educational Mathematics.

## Introducción

Las matemáticas como una parte fundamental para el desarrollo de las sociedades, han estado ligadas a la actividad humana a lo largo de la historia. Pueden señalarse dos aspectos principales de su contribución: en primer lugar, en el desarrollo de la ciencia en áreas de aplicación como: la arquitectura, ingeniería, astronomía, entre otras; y, en segundo lugar, en el desarrollo del pensamiento lógico. En Colombia, en particular desde los inicios de la república, se ha considerado el pensamiento matemático como un conjunto de verdades absolutas donde se requiere el dominio y ejercitación de contenidos matemáticos compuestos por teoremas, axiomas y procedimientos algorítmicos para el desarrollo de este pensamiento (MEN, 2006).

Comúnmente los docentes consideran que el estudio del álgebra comienza en secundaria básicamente con la presentación polinomios y la resolución de ecuaciones, donde los estudiantes suelen pasar abruptamente de realizar operaciones con números naturales conocidos a la introducción de letras que representan cantidades que desconocen y por lo tanto carecen de significado y de sentido (Alegría, 2023). Diversos estudios (entre ellos Guzmán, 2013; Pinto & Ayala-Altamirano, 2021), consideran que el estudio del álgebra va más allá de la manipulación de expresiones simbólicas con el uso de letras; se plantea que este tipo de pensamiento se puede desarrollar desde los primeros niveles de la educación básica mediante el estudio de patrones, regularidades, la formulación de hipótesis y el planteamiento de generalizaciones.

El presente documento tiene el objetivo de estudiar y adaptar una propuesta de enseñanza planteada por Pinto, Ayala-Altamirano, Molina y Cañadas (2023) para promover el desarrollo de pensamiento algebraico temprano a través de fomentar las habilidades de expresión y justificación en estudiantes de primaria en el aula de matemáticas. Para esto se adaptan las tareas relacionadas con la aritmética generalizada y la equivalencia de expresiones.

## 1. Antecedentes

En este apartado, se presentan algunas investigaciones relacionadas con el desarrollo del pensamiento algebraico en primaria, que toman un rol importante para entender aspectos principales del problema que se busca estudiar.

Kaput (1995), en su artículo “*A Research Base Supporting Long Term Algebra Reform?*”, propone una reforma al pensamiento algebraico particularmente haciendo énfasis en cómo se desarrolla en la formación de los estudiantes. Para esto, tiene en cuenta las siguientes preguntas: ¿Qué tipos de reforma deben realizarse? ¿Qué tipo de álgebra de promoverse? Y ¿en qué escala de tiempo es posible aplicar una reforma? Para dar respuestas a estas preguntas, Kaput (1995), plantea tres dimensiones principales a abordar:

*Amplitud (Breadth)*: Hace referencia a la variedad de concepciones que existen sobre el estudio del álgebra, por ejemplo: el álgebra como generalización, abstracción y representación; álgebra como el estudio de funciones, relaciones y variación conjunta.

*Integración (Integration)*: Se relaciona con la integración curricular del álgebra con otras áreas del conocimiento.

*Pedagogía (Pedagogy)*: Movimiento hacia una pedagogía más activa y exploratoria, explotando particularmente las tecnologías electrónicas, y enfocándose en la forma en que el álgebra es experimentada por los estudiantes.

Kaput (1995) además plantea que se deberían realizar reformas a corto, medio y largo plazo; esto implica cambios curriculares, reformas en la formación docente y una reestructuración profunda del currículo que implique contenido nuevo y mayor flexibilidad.

A partir de lo anterior, distintos autores han propuesto diversas perspectivas sobre el álgebra y el modo en que debería desarrollarse su enseñanza. Por ejemplo, el libro *Algebra in the Early Grades* (Kaput, Carraher & Blanton, 2008) fue clave en consolidar y difundir el término “*Early Algebra*” o “Álgebra temprana”, donde se propone que el pensamiento algebraico puede potenciarse desde los primeros niveles de la educación.

En este contexto, Zubieta (2021), en su trabajo de maestría titulado *Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes del primer ciclo de escolaridad (1°-3°)*, realizó una intervención con estudiantes de primaria. El objetivo principal del proyecto es caracterizar el desarrollo del pensamiento algebraico de 14 estudiantes de primero, segundo y tercero de básica primaria. Para ello, desarrolla una propuesta didáctica basada en la teoría de la Objetivación (Radford, 2014). Para la caracterización, se establecieron cuatro criterios de observación y análisis: i. estrategias de conteo. ii. vinculación de un código numérico a una colección de objetos. iii. identificación de regularidades no numéricas y iv. reconocimiento de regularidades en secuencias numéricas y geométricas.

En los resultados de esta investigación indican que los estudiantes logran desarrollar pensamiento algebraico mediante actividades concretas (como el juego y materiales manipulativos) así como a través del trabajo colaborativo con el docente. En estos grados, los niños tienden a recurrir a sistemas concretos para reconocer regularidades y patrones, los cuales se van transformando progresivamente en representaciones simbólicas que permiten construir generalizaciones cada vez más sofisticadas.

En el mismo año Corredor y Pineda (2014), realizan un estudio sobre el desarrollo del proceso de generalización en estudiantes de básica primaria con edades comprendidas entre los 9 y 12 años. En este estudio se diseñaron y aplicaron un conjunto de tareas con base en las fases propuestas por Azarquiel (1993), estas son: Ver, Describir y Escribir.

En los resultados la autora muestra que los estudiantes logran identificar patrones en secuencias numéricas y geométricas buscando estrategias donde puedan comparar, representar, relacionar, comunicar e invertir.

Por su parte, Callejo, García-Reche y Fernández (2016) realizaron un estudio en una institución educativa con 264 estudiantes de primaria entre los 6 y 12 años de edad, de primero a quinto grado. Este estudio buscó analizar el pensamiento algebraico de los estudiantes cuando resolvían problemas de generalización de patrones lineales. Los resultados muestran que las estrategias utilizadas por los estudiantes al momento de resolver los problemas revelan formas de pensamiento algebraico que el docente puede identificar para comprender cómo piensan los estudiantes y favorecer el desarrollo de este pensamiento. Los resultados de este trabajo, muestran que es posible potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros niveles de la educación primaria, en particular a través de la generalización de patrones.

A continuación, se presenta un acercamiento al pensamiento algebraico, que guía el diseño y desarrollo de esta investigación.

### **1.1 Aspectos relacionados con el desarrollo de pensamiento algebraico**

Inicialmente, las investigaciones relacionadas con el estudio del álgebra se centraban en las dificultades que los estudiantes presentaban, en los errores y en la formalización de conceptos algebraicos. Por ejemplo: el uso de símbolos alfanuméricos al momento de representar variables en resolución de problemas. A partir de 1989, con la influencia del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, por sus siglas en inglés), se han buscado nuevas perspectivas de las matemáticas y formas de abordarlas (Saavedra, 2025).

En este sentido, Kieran (1996, como se citó en Kieran, 2004) define el pensamiento algebraico como:

Formas de pensar dentro de actividades para las cuales se puede usar el álgebra simbólica de letras como herramienta, pero que no son exclusivas del álgebra, que podrían realizarse sin usar ningún álgebra

simbólica de letras, como analizar relaciones entre cantidades, notar la estructura, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, demostrar y predecir. (p. 11).

Se destaca que el pensamiento algebraico no se limita al uso exclusivo de los símbolos, sino que reconoce procesos cognitivos como la modelación, justificación, entre otros, que pueden desarrollarse desde los primeros niveles de la educación.

En esta línea de investigación, Radford (2010a) aborda el pensamiento algebraico desde una perspectiva semiótico-cultural, donde trata la indeterminación de forma analítica, considerando que el uso de simbolismos alfanuméricos es solo una de las diversas formas semióticas de lograrlo. La teoría de la Objetivación, aborda los signos de forma más amplia, esto es, como términos lingüísticos escritos, orales, gestos, ritmo, y ve el pensamiento como una actividad reflexiva-sensorial mediada por signos, encarnada en la corporeidad de acciones.

Dentro del pensamiento algebraico, Pinto et al. (2023) mencionan cuatro prácticas que hacen parte del desarrollo de este pensamiento, estas son:

(a) *Generalizar*: se refiere a la acción de reconocer que algunos atributos de la situación matemática pueden cambiar, mientras que otro permanece invariante.

(b) *Representar*: emplear distintos medios para expresar ideas matemáticas generales, algunos convencionales y otros no, tales como los gestos, el ritmo al hablar y el lenguaje natural.

(c) *Razonar con estructuras y relaciones matemáticas*: tratar las generalizaciones como objetos en sí mismos. Es decir, implica que los niños empleen las generalizaciones en otras situaciones matemáticas.

(d) *Justificar*: se entiende como un proceso de interacción social que sucede en el aula y favorece el desarrollo de la comprensión y conocimientos del contenido, donde ayuda a determinar y explicar la verdad de una conjetura o afirmación. Los argumentos del proceso de justificación se construyen a partir de los conocimientos compartidos por la comunidad, es decir, se basan en ideas, definiciones y propiedades matemáticas que están al alcance conceptual de los niños.

Radford (2010b) considera que la generalización de patrones es una de las principales vías para introducir a los estudiantes al álgebra. Sin embargo, ¿qué significa generalización de patrones? Aquí Radford la define como: “la observación de una comunidad local que luego se generaliza a todos los términos de la secuencia y que sirve como garantía para construir expresiones de elementos de la secuencia que quedan fuera del campo perceptual” (p. 6)

## 1.2 Perspectiva del Ministerio de Educación Nacional

En Colombia, se desarrollaron los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) para el área de matemáticas en primaria y secundaria. El objetivo de estos documentos es fomentar y orientar el estudio de la fundamentación pedagógica de los miembros de la comunidad educativa, como instituciones educativas, docentes, etc., proporcionando una guía para el diseño, la implementación y la evaluación de programas en matemáticas en diferentes niveles educativos.

En los Estándares se proponen metas que se espera que los estudiantes alcancen en cuanto a conocimientos, habilidades y competencias en matemáticas; este documento busca ser posibilitador, promotor y orientador de los procesos curriculares que viven las instituciones.

Tanto en los lineamientos curriculares como en los estándares se mencionan cinco tipos de pensamiento: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Dados los intereses de este proyecto, nos centraremos en el pensamiento variacional, que se refiere al “reconocimiento, la percepción, la identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.” (MEN, 2006, p 21).

En los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas (MEN) se propone que, para fomentar este tipo de pensamiento en los primeros niveles de la educación básica, es necesario proponer actividades de generalización de patrones numéricos y geométricos, donde los estudiantes puedan visualizar, explorar y manipular números y figuras para determinar la forma en que una secuencia de figuras, números u objetos cambia, observando particularidades y patrones que les permitan llegar a proponer una generalización.

En el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos se proponen los siguientes estándares para los grados 4° y 5° de educación básica primaria:

- Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.
- Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
- Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
- Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.
- Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.

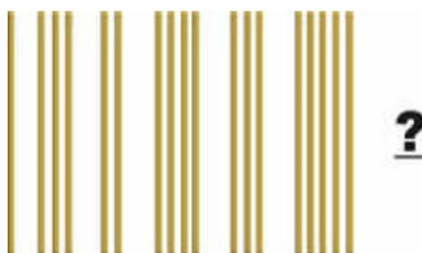
Para fomentar este pensamiento desde los niveles iniciales de la educación básica, se proponen actividades relacionadas con el análisis del cambio y la búsqueda de patrones, donde los estudiantes puedan explorar los problemas de diversas formas, realizando conjeturas sobre los patrones identificados y expresándolos mediante diferentes representaciones. Además, se busca que los estudiantes formulen

procedimientos o reglas que les permitan verificar o refutar las conjeturas promoviendo así el desarrollo del razonamiento algebraico y el proceso de generalización.

La siguiente situación es planteada por los lineamientos curriculares de matemáticas (1998, p. 55)

### Figura 1

Actividad "*¿Qué sigue y cuál es la regla?*"



*Nota:* Tomado de *Lineamientos curriculares: Matemáticas* (p. 55), por Ministerio de Educación Nacional, 1998, MEN.

Esta situación denominada *¿Qué sigue y cuál es la regla?*, se plantea lo siguiente: “Para este problema, los niños deben sacar sus palillos y organizarlos como se indica en la figura. El niño debe observar la secuencia que se presenta, descubrir cuál es el siguiente término de la secuencia y formular una regla de formación” (p. 55). En esta secuencia se propone que los estudiantes analicen de qué forma aumenta o cambia la cantidad de palillos que hay en cada posición. Por ejemplo, en la posición 1 hay 1 palillo, en la posición 2 hay 3 palillos, en la posición 3 hay 2 palillos. De esta forma, los estudiantes deben identificar un patrón de la secuencia observando con atención las regularidades del problema para luego predecir cuáles podrían ser los siguientes términos. La situación presenta dos posibles respuestas y diferentes maneras de analizar el problema

- En la primera solución se presenta una relación de correspondencia entre las posiciones y cantidades de los palitos, en las posiciones impares del problema se sigue la siguiente secuencia 1, 2, 3, 4, ... y en las posiciones pares la secuencia es 3, 4, 5, 6, ...
- En la segunda solución se puede ver que aumenta dos y disminuye un palito variando de manera intercalada.

Esta representación gráfica y numérica facilitan que los estudiantes reflexionen, expresen y respalden sus descubrimientos, promoviendo el paso de la observación tangible a la creación de conjeturas más abstractas.

Con base en el panorama descrito hasta el momento, se plantea puntualmente en la siguiente sección la pregunta y objetivos de esta propuesta de trabajo.

## 2. Planteamiento del problema

El enfoque tardío y abrupto del álgebra dificulta una transición entre la aritmética y el álgebra, causa altas tasas de fracaso, desmotivación en los estudiantes y una desconexión entre el pensamiento numérico y algebraico; donde se trataba la aritmética práctica (para el comercio) y el álgebra como dos cosas distintas. Como plantea Kaput (2008), a partir de una mayor demanda de alfabetización matemática centrada en una “educación para todos” se busca la integración del álgebra desde los primeros niveles escolares, buscando evitar el salto abrupto en secundaria. Por tanto, se propone fomentar una interrelación permanente entre la aritmética y el álgebra trabajando desde edades muy tempranas con: el estudio de patrones, el proceso de generalización y el análisis de estructuras (Kaput, 2008).

Al respecto Zubieta (2021) menciona que los estudiantes no logran desarrollar pensamiento algebraico en los primeros niveles ya que, a menudo los recursos con los que interactúan son secuencias geométricas que se presentan en el papel. Esto no permite la posibilidad de manipular, construir, verificar sus conjeturas haciendo más difícil que logren visualizar, establecer conjeturas y predicciones acerca de regularidades. También se percibe la importancia de proponer actividades donde los estudiantes desarrollen los procesos propios de la actividad matemática como: modelar, resolver problemas; razonar; comunicar; comparar y ejercitar procedimientos. Esto puede ser posible a partir de la interacción del estudiante con el material concreto para fomentar la construcción del conocimiento y el desarrollo de pensamiento lógico.

Teniendo en cuenta lo anterior, se plantea los siguientes objetivos para este proyecto:

### 2.1. Objetivos

#### 2.1.1. *Objetivo general*

Adaptar e implementar una propuesta de enseñanza para estudiantes de cuarto grado (9-11 años) en una institución educativa pública de Bucaramanga, que promueva el desarrollo del pensamiento algebraico a través de la expresión y justificación de ideas matemáticas al resolver tareas relacionadas con la aritmética generalizada y la equivalencia de expresiones matemáticas.

#### 2.1.2. *Objetivos específicos*

- Diseñar un conjunto de tareas de aritmética generalizada y equivalencia de expresiones que promueva en los estudiantes la expresión y justificación de ideas matemáticas, evidenciando su pensamiento algebraico temprano.
- Identificar y describir los medios semióticos de objetivación que emergen cuando los estudiantes resuelven tareas de aritmética generalizada y equivalencia de expresiones.

- Analizar las estrategias, razonamientos y generalizaciones que los estudiantes emplean al enfrentar las tareas propuestas, evidenciando la construcción de estructuras algebraicas iniciales.

### 3. Elementos teóricos

En este apartado se exponen los elementos teóricos que proporcionan una base conceptual para entender el desarrollo del pensamiento algebraico y su aplicación en la educación primaria. Esta sección se enfoca en exponer contribuciones de varios autores que han investigado la manera en que los estudiantes forman significados en relación con el álgebra, ya sea mediante la generalización de patrones, el uso de expresiones simbólicas o la interpretación de la equivalencia. Específicamente, se rescatan los aportes de Radford (2010) acerca de los tipos de pensamiento algebraico, junto con los enfoques de Pinto et al. (2023), que establecen una base para el desarrollo de actividades en niños de básica primaria.

A partir de lo anteriormente Radford (2010) propone tres tipos de pensamiento algebraico:

**Factual:** este refiere a los medios semióticos de objetivación, como los gestos, el ritmo, los movimientos, la actividad perceptual y las palabras que el estudiante utiliza de forma concreta para describir la generalidad.

**Contextual:** se identifican los objetos generales y se denominan mediante una situación o frase "clave" que los caracteriza; por ejemplo, cuando los estudiantes expresan: "va incrementando de tres en tres", entre otros. Los gestos y palabras se reemplazan por expresiones clave, donde la incertidumbre queda implícita y la formulación algebraica constituye una descripción del concepto general.

**Simbólico:** hace referencia a los objetos generales y a las operaciones con ellos, expresados mediante el sistema semiótico alfanumérico. Aquí los estudiantes pasan de utilizar las frases o reglas clave a representar la generalidad mediante expresiones simbólicas alfanuméricas, que muestran no solo un caso particular, sino el objeto matemático en su forma general para cualquier término (Sánchez, 2016, p. 39).

Lo anterior muestra que para Radford (2010), el pensamiento algebraico no surge de manera inmediata en su forma simbólica mediante el uso de símbolos alfanuméricos, sino que se desarrolla a través de distintos niveles de representación. Los estudiantes inician manifestando la generalidad mediante herramientas tangibles y perceptuales (pensamiento factual), progresan hacia enunciaciones más verbales y contextualizadas (pensamiento contextual) y, finalmente, alcanzan la representación de la generalidad a través de expresiones simbólicas. Este viaje demuestra que el progreso del álgebra en la educación primaria demanda un proceso gradual donde cada nivel actúa como fundamento para el siguiente, promoviendo una comprensión más sólida y relevante de las ideas algebraicas.

Por otro lado, Pinto et al. (2023) menciona tres posibles enfoques del pensamiento algebraico estos son: aritmética generalizada, equivalencias y pensamiento funcional, sin embargo, para este trabajo nos enfocaremos en las dos primeras.

- i. Aritmética generalizada: Se refiere a utilizar las operaciones aritméticas como base para desarrollar pensamiento algebraico, poniendo el énfasis en sus propiedades y en la identificación de regularidades que se pueden generalizar más allá de número concretos.

Un ejemplo de este enfoque es el planteado por pinto et al. (2023), quienes propusieron un juego donde los estudiantes deban predecir que ocurría al sumar números pares e impares formulando conjeturas sobre las propiedades de los números mediante diversas representaciones (manipulativas, simbólicas y en lenguaje natural), generalizando estas propiedades más allá de casos concretos.

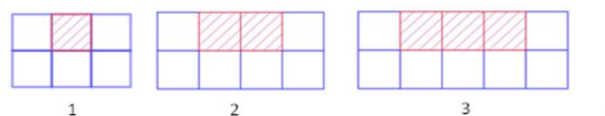
Radford (2010b) considera que la generalización es un medio para llegar al pensamiento algebraico; sin embargo, no toda generalización de patrones es algebraica, así como no toda simbolización lo es. No toda generalización es algebraica; algunas son aritméticas. Por ejemplo, si un estudiante ve la siguiente secuencia numérica: 3, 6, 9, 12, ..., podría decir: "Se suma 3 cada vez". Eso es una generalización aritmética, ya que está describiendo cómo continuar el patrón usando números concretos. En cambio, si el estudiante dice: "El valor en la posición  $n$  se obtiene multiplicando  $n$  por 3", esto ya es una generalización algebraica, pues no solo sigue el patrón con números concretos, sino que modela la situación para cualquier término.

Dentro del proceso de generalización Navas y Molina (2016) describe tres fases estas son: i) Ver, ii) Describir y iii) Escribir. Estas fases pueden evidenciarse a través de la siguiente actividad (Figura 1) propuesta por Corredor y Pineda (2014).

## Figura 2

### Secuencia geométrica de cuadrados

Observemos la siguiente secuencia:



- Dibuja las siguientes dos figuras.
- ¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición 7?
- ¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición 100?
- ¿Cuántos cuadrados hay en la figura de la posición  $n$ ?

*Nota:* Actividad propuesta por Corredor y Pineda (2014)

Ver: Observar una secuencia, ya sea numérica o geométrica, en la que los estudiantes identifiquen las variaciones y reconozcan los patrones en los elementos que cambian o permanecen constantes en cada término. Este constituye el primer paso hacia

la generalización, pues implica comparar lo que varía y lo que se mantiene constante, organizando la información para descubrir el patrón que explica la situación a partir del análisis de lo particular. En este proceso, las secuencias geométricas resultan especialmente útiles y atractivas, ya que su representación visual estimula el razonamiento y facilita la comprensión del patrón. Por ejemplo, en la actividad de Corredor y Pineda (2014) se espera que en un primer momento que los estudiantes observen detenidamente la secuencia reconociendo que en cada iteración se aumenta en un cuadrado la columna del centro de la figura. Esto puede generar que los estudiantes logren representar las siguientes dos figuras relacionando y comparando.

La implementación de secuencias geométricas facilita y vuelve esta fase más atractiva, dado que la representación visual fomenta el pensamiento y acelera la construcción del patrón.

Describir: Una vez que el estudiante haya realizado una observación profunda de los términos o características de la secuencia para abstraer, interpretar lo observado; se espera que logre expresar sus observaciones de forma oral o en un lenguaje natural las regularidades halladas. Este proceso implica que los estudiantes organicen y estructuren cognitivamente la información para formular, verificar o reformular conjeturas; su comunicación permite reflexión, discusión y mejora. Este proceso facilita la confirmación de las relaciones en las secuencias, promueve la creación de un lenguaje simbólico para comunicar conceptos algebraicos y permite una mejor transición desde la simple observación hasta una descripción exacta y entendible.

Para esta fase, en el ejemplo de Corredor y Pineda (2014), se espera que los estudiantes determinen la relación que existe entre la posición de las figuras con el número total de cuadrados con las preguntas b. y c. respectivamente. Además, los estudiantes pueden utilizar figuras y números concretos para describir la relación existente entre la posición de las figuras y el número de cuadros multiplicando el número de la posición por dos y sumando cuatro.

Escribir: En esa fase se requiere un mayor esfuerzo, ya que se espera que la expresión sea más precisa y completa para expresar lo observado. Esto implica el uso de diversas representaciones, escritos, dibujos, gráficos, tablas o una combinación de éstas (dibujos apoyados con palabras). Así, se promueve un avance paulatino que va desde la utilización de un lenguaje claro y explicativo hasta la adición de símbolos algebraicos que expresan conceptos matemáticos. Finalmente, en esta fase del ejemplo de Corredor y Pineda (2014) se espera que los estudiantes no solo usen números concretos si no que sean capaces de generalizar el patrón para cualquier posición de la secuencia como “la posición multiplicada por dos y al resultado le sumamos cuatro” (p. 111).

- ii. Equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones: Aquí se busca desarrollar la comprensión relacional del signo igual; así como razonar con expresiones, establecer la equivalencia entre distintas expresiones en términos generales y

plantear y resolver ecuaciones e inecuaciones. Se busca fomentar el pensamiento relacional, lo que implica considerar las expresiones desde una perspectiva estructural, en lugar de como procesos que se deben seguir paso a paso.

Kaput (2008) señala que uno de los obstáculos percibidos al pasar de la aritmética computacional al álgebra es, la noción de igualdad “=”, la cual separa el procedimiento del resultado y representa una dificultad en el aprendizaje posterior del álgebra. Para Silva (2021), una de las razones de esta dificultad se debe a la familiaridad con interpretar el signo “=” como el resultado de una operación, y no como una equivalencia. Respecto a lo anterior, Anglada (2017) propone que es necesario crear situaciones de aprendizaje en las que los niños reconozcan y definan la igualdad en términos de equilibrio, por ejemplo, utilizando la balanza para representar equivalencias y formas de expresión

- iii. **Pensamiento funcional:** Esta forma de pensar se centra en la generalización y expresión de la relación entre cantidades que varían de forma conjunta. Específicamente, la función, la relación entre cantidades y la variación conjunta entre las cantidades involucradas constituyen los elementos centrales para desarrollar el pensamiento algebraico en los primeros cursos. Anglada (2017) concibe el pensamiento funcional como relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, donde esta relación se puede representar mediante el uso de gráficas, formulas, tablas o enunciados. Para Pineda (2017), citado por Angarita (2024), el pensamiento funcional lo concibe como:

... un proceso cognitivo, que centra su potencial en las características necesarias para que un estudiante logre enfrentar una situación funcional, evidenciando acciones específicas como: hallar relaciones entre variables, identificar cómo se construye cada variable, analizar las implicaciones de una variable respecto a la otra, recurrir a diferentes representaciones, describir verbalmente la manera en que la función se va construyendo, predecir el comportamiento de la función en casos posteriores, entre otros. (p. 48)

Para Angarita (2024), los estudiantes hacen uso del pensamiento funcional cuando logran explicar las relaciones entre las variables o conjuntos encontrando una regla, patrón que describa esas relaciones permitiendo así la generalización la expresión.

A continuación, veremos un ejemplo del pensamiento funcional en primaria realizado por Blanton y Kaput (2004) citado por Angarita (2024):

Supongamos que estabas en un refugio de perros y querías contar todos los ojos de los perros que viste. Si hubiera un perro, ¿cuántos ojos habría? ¿Y si hubiera dos perros? ¿Tres perros? ¿100 perros? ¿Ves una relación entre el número de perros y el número total de ojos? ¿Cómo describirías dicha relación? ¿Cómo sabes que esto funciona? ¿Supongamos que quieres averiguar cuántos ojos y colas había? ¿Cuántos ojos y colas hay para un perro? ¿Dos perros? ¿Tres perros? ¿100

perros? ¿Cómo describirías la relación entre el número de perros y el número total de ojos y colas? ¿Cómo sabes que esto funciona? (p. 31)

Este problema se aplicó en diferentes grados de primaria. En primer grado se encontró que los estudiantes necesitaron la ayuda del docente y utilizaron el conteo saltado para predecir la cantidad total de ojos y colas en 7 perros, hallando que el patrón se duplica para el total de ojos y se triplica para el total de ojos y colas. En segundo grado los estudiantes lograron calcular la cantidad de ojos y colas para 100 perros usando su lenguaje natural, expresado en frases como: “tienes que duplicar la cantidad de perros para obtener la cantidad de ojos”. En tercer grado alcanzaron una mayor generalización al describir la relación de la siguiente manera: “no importa cuántos perros tengas, puedes multiplicarlo por 2”. Finalmente, en cuarto y quinto grado necesitaron menos datos para lograr la generalización del patrón.

Lo anterior muestra que, aunque los estudiantes no expresaron la relación de forma simbólica fueron capaces de expresar la relación entre las variables mediante el lenguaje natural prediciendo la cantidad total de ojos y colas desde un número concreto hasta expresar la relación para cualquier cantidad de perros.

#### 4. Método

Esta investigación es de tipo cualitativo-descriptivo, ya que busca comprender y analizar como los estudiantes expresan y justifican ideas matemáticas al resolver problemas de aritmética generaliza y equivalencia de expresiones. Este tipo de problemas proporciona una primera aproximación al razonamiento algebraico y a las relaciones de equivalencia, antes de introducir al aspecto simbólico del álgebra, que requiere un nivel superior de abstracción.

#### Figura 3

Diseño metodológico



A continuación, se describen cada una de las fases que hacen parte de este trabajo:

- 1. Diseño y aplicación de una prueba diagnóstica:** En esta primera fase se implementa una prueba diagnóstica a un grupo de 30 estudiantes de cuarto grado, en análisis del resultado permitirá identificar las fortalezas, dificultades y saberes

previos de los estudiantes al resolver problemas de aritmética generaliza y equivalencias.

2. **Diseño de talleres:** Una vez realizado el análisis de las respuestas de la prueba diagnóstica se diseñan cuatro talleres: dos talleres enfocados en aritmética generalizada y dos en equivalencias, para cada uno de los talleres se realiza un análisis a priori, que permite anticipar algunas posibles respuestas de los estudiantes.
3. **Implementación en el aula:** Los talleres serán implementados en el salón de clases bajo un ambiente de trabajo en equipo, en parejas. Se incentivarán debates y el intercambio de ideas, con el objetivo de impulsar el aprendizaje mediante la argumentación y el intercambio de diversas maneras de pensar.
4. **Análisis de los resultados:** Finalmente, se llevará a cabo un análisis de las respuestas y producciones de los estudiantes durante el desarrollo de los talleres, con el objetivo de evidenciar progresos en la expresión y justificación de ideas matemáticas dentro del pensamiento algebraico.

## 5. Diseño e implementación de instrumentos

### 5.1. Contexto y participantes

Este trabajo se desarrolla en un grupo 30 estudiantes de cuarto grado de una institución pública del departamento de Santander (Colombia), cuyas edades cuyas edades oscilan entre los 9 y 11.

La Institución Educativa es una entidad de carácter oficial que brinda formación académica a niños, jóvenes y adultos, ubicada en Bucaramanga (Santander, Colombia). Uno de los objetivos de la institución es guiar a los estudiantes hacia el desarrollo de valores como la tolerancia, responsabilidad, respeto con las sociedades y el entorno, en el marco de la inclusión y el desarrollo de competencias ciudadanas. Dadas las condiciones iniciales de este contexto, a continuación, se propone el primer instrumento, prueba diagnóstica.

### 5.2. Implementación en el aula

La implementación de tareas en el aula tiene como objetivo propiciar un entorno en el que los estudiantes construyan, comuniquen y justifiquen ideas matemáticas a través del trabajo colaborativo. Para ello se plantea que los estudiantes trabajen en grupos pequeños, lo que permite fomentar la interacción, el intercambio de ideas, estrategias y la argumentación. Esta dinámica permite a los estudiantes exponer sus razonamientos,

confrontar diversos puntos de vista y llegar a consensos sobre las soluciones. Todo esto con el fin de fortalecer así su comprensión sobre las relaciones y estructuras matemáticas presentes en las tareas.

A lo largo de las sesiones, la investigadora-docente recorre los grupos para observar las interacciones, hacer preguntas orientadoras y proporcionar retroalimentación pertinente que contribuya a profundizar en el pensamiento de los estudiantes. Este acompañamiento tiene como objetivo fomentar la reflexión, la justificación de los procedimientos y el intercambio de distintas maneras de pensar, lo que propicia un aprendizaje activo y en colaboración.

Una vez los grupos finalizan la resolución de las actividades, se lleva a cabo una fase de retroalimentación, en la que los estudiantes comparten sus estrategias y resultados, comparan los procedimientos utilizados y reflexionan sobre sus errores y aciertos. Finalmente, se realiza una discusión general guiada por la docente, en la que se socializan las diferentes formas de resolver los problemas y se destacan las ideas más relevantes surgidas durante el trabajo grupal.

De acuerdo con García (2018), este tipo de dinámica favorece el desarrollo de una ética comunitaria fundamentada en la participación activa, el diálogo abierto, la solidaridad y el pensamiento crítico. Por lo tanto, se busca establecer un entorno de cooperación a través de la implementación de tareas, el cual fomenta la creatividad, el razonamiento autónomo y la creación conjunta de significados matemáticos. Estos componentes son esenciales para que se desarrolle el pensamiento algebraico temprano.

### **5.3. Prueba diagnóstica**

Para esta primera fase se plantea 5 tareas para la prueba diagnóstica, con el objetivo de identificar saberes previos, habilidades y dificultades para adaptar y diseñar las actividades de tal manera que la propuesta de enseñanza se ajuste a las necesidades del grupo y posibilite determinar un punto de inicio para evaluar los progresos sobre el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

La primera tarea se basa en una secuencia de números para encontrar términos que faltan y la regla de formación; la segunda, en un problema contextual sobre ramos de flores que requiere llenar una tabla y generalizar cálculos; la tercera, en una secuencia geométrica que anima a distinguir el patrón de crecimiento y prever figuras; la cuarta, en un problema sobre recolección de basura que exige fijar una igualdad y conservar el equilibrio entre expresiones; y la quinta, en igualdades incompletas que posibilitan entender el signo igual como una relación más allá del mero resultado de una operación.

La Prueba está diseñada para un tiempo de trabajo individual de aproximadamente dos horas. A continuación, se realiza un análisis a priori sobre cada una de las tareas propuestas.

### 5.3.1. Análisis a diagnóstica priori de la prueba

#### Tarea 1

Observa la siguiente secuencia de números

5, 8, 11, \_\_, 17, \_\_, \_\_. ..

- a. ¿Cuáles son los números faltantes?
  - b. Explica con tus palabras qué hiciste para hallar esos números
  - c. Si seguimos la secuencia, ¿qué número estará en la **posición 15**? Justifica tu respuesta
  - d. Explica con tus propias palabras la regla que sigue la secuencia.
- 
- a. En esta tarea, se espera que los estudiantes reconozcan el patrón de crecimiento de la secuencia, entendiendo cómo están relacionados los términos. Por ejemplo, pueden determinar que para conseguir el segundo término se añade tres al primero ( $5 + 3 = 8$ ) y, de forma parecida, que para obtener el tercero se suma tres al segundo ( $8 + 3 = 11$ ). Este razonamiento inicial les posibilita identificar que los términos se incrementan "sumando tres unidades en relación con el anterior", lo cual representa una primera manera de objetivar la característica común, puesto que los estudiantes detectan semejanzas y diferencias entre los términos y consiguen reconocer la estructura numérica que ordena la secuencia.
  - b. Posteriormente, se espera que, al explicar con sus propias palabras cómo hallaron los números, expresen verbalmente la relación observada a través del lenguaje natural ("a cada número le sumo tres"). Esto posibilita determinar la forma en que los estudiantes entienden la relación entre los términos. Al implicar la descripción de una relación general entre los números, estas verbalizaciones representan una primera expresión de un pensamiento algebraico temprano.
  - c. Al intentar determinar un término más lejano, como el que ocupa la posición 15, se espera que algunos estudiantes logren objetivar la generalización de la regularidad observada, comprendiendo que la misma regla se mantiene sin importar la posición del término. Esta generalización puede expresarse sumando tres a cada término o estableciendo una relación funcional, como multiplicar la posición por tres y sumar dos (por ejemplo:  $5 = 1 \times 3 + 2$ ,  $8 = 2 \times 3 + 2$ ,  $11 = 3 \times 3 + 2$ ). Este razonamiento muestra un avance hacia la abstracción, donde el estudiante extrapola

la característica común y expresa una regla general que le permite determinar cualquier término de la secuencia.

- d. Por último, se espera que los estudiantes expresen con sus propias palabras la regularidad que ordena la secuencia, ya sea describiendo la acción que se repite o explicando la regla general que facilita la identificación de cualquier término. Al hacerlo, demuestran que comprenden la relación entre el valor y la posición de los términos, además de comunicar y justificar sus ideas matemáticas. Esta reflexión verbal ayuda al paso del cálculo aritmético a la generalización, que es característico de cómo se desarrolla el pensamiento algebraico en las primeras etapas.

### Tarea 2

Doña Marta tiene una floristería muy exitosa. El producto más comprado es un ramo de flores, el cual está compuesto por 4 flores de diferentes colores.

- a. Completa la siguiente tabla

Numero de ramos	1	2	3	4	5	6	7
Números de flores	4						

- b. Si tiene 44 flores ¿Cuántos ramos puede hacer?
- c. Si Doña Marta quiere preparar 10, 20 y 100 ramos, ¿cómo harías para calcular la cantidad de flores sin necesidad de realizar la tabla?
- a. Para este ítem se espera que el estudiante establezca una correlación entre el total de ramos y cantidad de flores, dado que cada ramo está compuesto por 4 flores, algunos estudiantes podrían llenar la tabla sumando de forma reiterativa 4, por ejemplo, para dos ramos suman  $4 + 4 = 8$ , para tres ramos  $4 + 4 + 4 = 12$ , y así sucesivamente, hasta completar los valores faltantes. Este tipo de razonamiento muestra que se tiene una comprensión inicial del patrón de crecimiento, que se fundamenta en la repetición de una acción (sumar cuatro cada vez), lo cual les facilita identificar el orden regular que estructura la secuencia.
- b. Se espera que el estudiante continúe utilizando la estrategia aditiva, es decir, sumando 4 repetidamente hasta alcanzar el número 44, de la siguiente manera:  $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 44$ , determinando así que puede hacer 11 ramos. En cambio, otros pueden optar por emplear estrategias más eficientes o de carácter relacional, como la multiplicación ( $4 \times 11 = 44$ ) o la división ( $44 \div 4 = 11$ ). Estas diferentes formas de abordar el problema permiten identificar distintos niveles de comprensión: desde una estrategia aritmética basada en la repetición hasta una comprensión más amplia que reconoce la relación funcional entre la cantidad de flores y la cantidad de ramos.

- c. En esta pregunta se busca que el estudiante no solo resuelva el problema para casos particulares, si no que generalice el patrón para cualquier caso, en donde la construcción de una tabla o la suma reiterada ya no es práctica. Para ello debe reconocer que la relación entre los ramos y las flores puede expresarse de modo general como: “cualquier número de ramos lo multiplico por cuatro” lo que facilita determinar el número de flores para cantidades de ramos como 10, 20 o 100. Así, la pregunta incita al estudiante a identificar y aplicar una regla general, lo cual contribuye a comprender la regularidad y promueve el desarrollo temprano del pensamiento algebraico.

### Tarea 3

Observa la siguiente secuencia

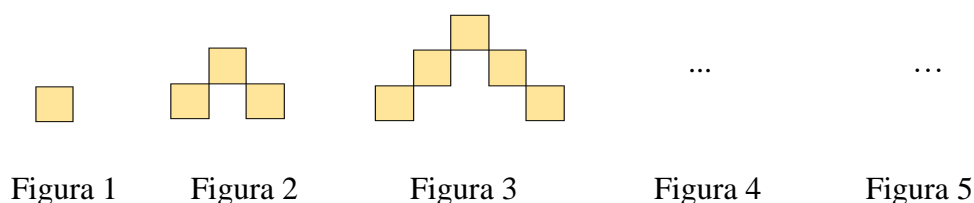


Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

Figura 5

- a. Dibuja las figuras 4 y 5.
  - b. ¿Qué diferencias notas entre una figura y la que le sigue?
  - c. Sin dibujarla, determina cuántos cuadritos tendría la figura número 10 y explica cómo lo descubriste.
  - d. Escribe la regla general que explica cómo crece la secuencia de figuras.
- a. Aquí se espera que los estudiantes construyan las figuras de los términos 4 y 5 que corresponden a la secuencia, lo que permite observar, comparar y analizar visualmente las regularidades de la secuencia. Este proceso promueve que el estudiante avance hacia una comprensión más abstracta, fortaleciendo la idea de que cada figura puede ser generada a partir de las anteriores, siguiendo un patrón.
- b. En este ítem se espera que el estudiante identifique y describa la regularidad presente en la secuencia, reconociendo la relación entre cada figura y la siguiente. En particular, se busca que observe que en cada iteración se añaden dos cuadros: uno a cada lado en la parte inferior de la figura, formando una ampliación diagonal. Este análisis promueve la capacidad de describir las variaciones y explicar por qué el patrón se mantiene en todas las configuraciones, lo que constituye una base importante para la generalización.
- c. Para calcular la cantidad de cuadritos en la figura número 10 se espera que los estudiantes cuenten los cuadritos de cada figura dando la siguiente secuencia numérica que corresponde a la cantidad de cuadritos de las figuras 1,3,5,7, ... La figura 1 tiene 1 cuadrito, a la figura 2 se le suman dos cuadritos  $1 + 2 = 3$  La figura 3 se le

suman otros dos cuadritos teniendo  $3 + 2 = 5$  y así sucesivamente sumar dos hasta llegar a la figura 10 que tendría 19 cuadritos.

- d. Finalmente se espera que los estudiantes generalicen el patrón mediante el lenguaje natural, por ejemplo: “se multiplica por dos y se resta uno”. Este paso evidencia un avance hacia la generalización simbólica, donde los estudiantes ya no dependen de la representación visual o del conteo, sino que reconocen una relación funcional entre el número de la figura y la cantidad de cuadros. Esta comprensión refleja el desarrollo del pensamiento algebraico temprano al establecer conexiones entre representaciones figurales, numéricas y verbales.

#### Tarea 4

En el colegio se realizó una jornada de recolección de basura. El grado tercero recogió 15 bolsas de basura, mientras que en los grados cuarto y quinto recogieron la misma cantidad de bolsas cada uno.

Si se sabe que en total se recogieron 55 bolsas, ¿Cuántas bolsas recogió cada uno de los grados cuarto y quinto?

El objetivo de este problema es explorar y evaluar la comprensión de la igualdad y el razonamiento relacional de los estudiantes a través de una situación contextualizada. En esta tarea se espera que primero los estudiantes lean e interpreten el enunciado para hallar la cantidad de bolsas que recogieron los grados cuarto y quinto. Para ello, se busca que establezcan una igualdad entre el total de bolsas y la suma de las que recogió cada grado de la siguiente forma:  $15 + x + z = 55$ , de tal manera que  $x$  y  $z$  representan las cantidades de bolsas de los grados cuarto y quinto, respectivamente. Luego deben buscar un número que, al sumarlo con 15, dé como resultado 55, obteniendo así que  $x + z = 40$ . Como cuarto y quinto recogieron la misma cantidad de bolsas, se tiene  $x + x = 40$ , es decir, un número que al sumarlo dos veces nos da 40. Mediante ensayo y error, los estudiantes concluyen que  $x = 20$ ; por lo tanto, cuarto y quinto recogieron 20 bolsas cada uno.

#### Tarea 5

Encuentra los números que completan la igualdad

- $3 + 2 = \underline{\quad} + 2$
- $8 + 15 = 7 + \underline{\quad}$
- $8 - 5 = \underline{\quad} + 1$
- $2 \times \underline{\quad} = 4 + 4$
- $5 + a + 6 = \underline{\quad} + a$

Para esta última tarea se espera que los estudiantes resuelvan equivalencias usando diversas operaciones como suma, resta y multiplicación para encontrar el número faltante: De tal manera que se logre identificar cómo entienden los estudiantes el signo igual, si lo

pueden concebir como una relación entre dos expresiones y no únicamente como el resultado de una operación. Esto nos ayudará también a identificar errores comunes, como operar solo el lado izquierdo y escribir el resultado a la derecha, sin considerar la relación de equivalencia de la igualdad.

- a. Se espera que los estudiantes conciban la igualdad como el resultado de una operación por lo tanto al colocar el número faltante después del signo igual es posible que sumen tres más dos dando como resultado el número cinco  $3 + 2 = \underline{5}$  o que sumen también el  $+2$  dando como otro resultado 7.
- b. Para este ítem se espera que, al no colocar de manera inmediata el número faltante después del signo igual, los estudiantes no interpreten la igualdad como el “resultado de una operación” si no que busquen analizar ambas expresiones y desarrollar la comprensión relacional del signo igual. En este caso, se busca que comparen ambas expresiones de la igualdad y encuentre el número que al sumarle 14 produzca el mismo valor que la suma de 8 y 15. Por lo tanto, los estudiantes pueden concluir que el número faltante es 9, fomentando el razonamiento relacional y no únicamente la aritmética mecánica.
- c. Teniendo en cuenta el ítem anterior, se espera que los estudiantes, al ver la igualdad, puedan determinar que 2 es el número que falta para mantener el equilibrio, dado que  $8 - 5 = 3$  y  $1 + 2 = 3$ . Con esta actividad se pretende que comprendan que no se trata únicamente de “realizar la operación y poner el resultado”, sino también de identificar el número que equilibra las dos expresiones. No obstante, algunos estudiantes podrían resolver primero la operación  $8 - 5$  y obtener como resultado 3, para luego considerar que deben sumar el “+1”, quedando de la siguiente forma:  $8 - 5 = 3 + 1$
- d. Se espera que los estudiantes reconozcan aquí que hay una multiplicación en un lado de la igualdad y una suma en el otro. Una primera dificultad podría ser que, al ver la expresión  $2 \times \underline{\quad} = 4 + 4$ , consideren que deben hallar un número que al multiplicarlo por 2 dé 4 (en este caso sería 2) y luego deban sumarle 4 de la siguiente forma:  $2 \times \underline{2} = 4 + 4 = 8$ . Otra posible respuesta por parte de los estudiantes podría ser que primero realicen la suma  $4 + 4 = 8$  y consideren que luego deben multiplicar el resultado por 2, de la siguiente forma:  $2 \times \underline{8} = 4 + 4$ . El propósito, no obstante, es que los estudiantes logren concluir que el número que falta es 4, porque  $2 \times 4 = 8$  y  $4 + 4 = 8$ . Esto les posibilita establecer equivalencias entre operaciones diferentes (de suma y de multiplicación).
- e. Finalmente, el objetivo de este ítem es analizar cómo los estudiantes entienden la presencia de una incógnita en una igualdad y si pueden tratarla analíticamente, llevando a cabo operaciones con ella, como la suma en este caso. Una posible respuesta por parte de los estudiantes es que no tomen en cuenta la incógnita y solo sumen  $5 + 6 = 11$ , asumiendo que los términos numéricos se pueden

agrupar y que la incógnita no modifica la operación, lo que resulta en la expresión  $11 + a = \_ + a$ . Esto evidenciaría una comprensión parcial, enfocado solo en el aspecto numérico. No obstante, si consiguen reconocer que el número que completa la equivalencia es 11 y lo expresan como  $5 + a + 6 = \underline{11} + a$ , demostrarían una concepción más profunda, donde la incógnita se entiende como un término fijo que se mantiene en igualdad mientras los números son transformados. Así, el ítem posibilita determinar hasta qué medida los estudiantes perciben la igualdad como un balance entre expresiones y cómo incorporan la presencia de una letra en este proceso.

### 5.3.2. Análisis a posteriori de la prueba diagnóstica

En este apartado se presenta el análisis de las respuestas de prueba diagnóstica realizada a los estudiantes de manera individual. El análisis se presenta retomando cada una de las tareas presentadas en el análisis a priori.

#### Tarea 1

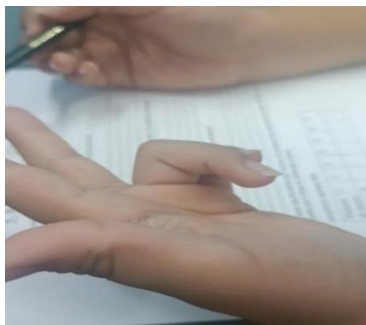
En esta primera tarea de la prueba se pedía a los estudiantes analizar la secuencia numérica (5, 8, 11,  $\_$ , 17,  $\_$ ,  $\_$  ...), donde debían hallar los números faltantes e identificar el patrón que seguía la secuencia. La mayoría de los estudiantes completó la secuencia escribiendo los números 14, 20 y 23, lo que evidencia que lograron identificar el incremento constante de tres unidades entre los términos. Este reconocimiento indica una comprensión de tipo factual, centrada en la observación directa del patrón aritmético presente en los datos visibles.

Durante el desarrollo de esta tarea, se observaron diversas expresiones semióticas de tipo verbal, escrita y corporal que reflejan los procesos de razonamiento empleados por los estudiantes. Algunas de las expresiones verbales y escritas fueron: “Conté de tres en tres”, “Empecé por el 5 y me di cuenta de que iban de 3 en 3 y simplemente coloqué los números que faltaban” o “A cada número se le sumaban 3, por ejemplo, al 5 le sumé 3 y obtuve 8, y así sucesivamente hasta llegar al 23”.

También se pudo observar la combinación de medios semióticos, como el uso de los dedos para contar como se muestra en la Figura 4.

**Figura 4**

*Expresiones semióticas del estudiante A<sub>1</sub>. Prueba diagnóstica, tarea 1*



En este caso, el estudiante utilizó los dedos para acompañar el conteo (“11, 12, 13, 14... [pausa] 15, 16, 17”), dejando una ligera pausa para separar los términos de la secuencia. Lo que evidencia un proceso de objetivación mediado por la acción corporal y verbal.

En general la mayoría de los estudiantes lograron encontrar el patrón de contar de tres en tres. Cuando se les pidió que hallaran el número que corresponde a la posición 15 varios estudiantes expresaron de manera escrita y verbal contar de “tres en tres” hasta llegar a lo que se les pedía entendiendo que la secuencia continúa aun cuando esta no sea visible. Sin embargo, en las respuestas obtenidas por parte de los estudiantes también se evidenciaron dificultades para reconocer la relación funcional entre la posición y el valor del término. A continuación, se muestra una conversación entre la profesora y el estudiante A<sub>1</sub> acerca del desarrollo de esta primera tarea.

**Tabla 1**

*Interacción con el estudiante A<sub>1</sub>. Prueba diagnóstica, tarea 1*

<b>L1</b>	Profesora: ¿Qué número está en la posición 5?
<b>L2</b>	A <sub>1</sub> : El 17[señala el número 17 con el lápiz]
<b>L3</b>	Profesora: ¿Y la 6?
<b>L4</b>	A <sub>1</sub> : El 20[señala el número 20 con el lápiz]
<b>L5</b>	Profesora: ¿y la 15?
<b>L6</b>	A <sub>1</sub> : El 23
<b>L7</b>	Profesora: ¿por qué el 23?

---

**L8**  $A_1$ : 23 por que usted acabo de decir 15. Entonces este sería el 15 [señala el 23] y tendría que poner que el 23 es el 15.

---

**L10** Profesora: ¿o sea el 23 es el 15? ¿Cómo es eso?

---

**L11**  $A_1$ : Porque si no es este, este, ni este, ni este, puede ser uno de esto dos [señala los números 20 y 23 con el lápiz]




---

**L12** Profesora: ¿o sea, dices que como ninguno de estos está en la posición 15 debe ser alguno de estos dos [señala los números 20 y 23]

---

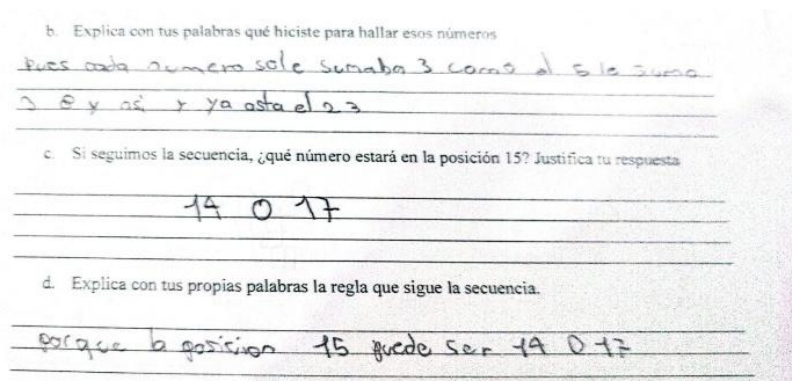
**L13**  $A_1$ : Ujumm[señal de afirmación]

---

En la interacción con este estudiante se evidencia una comprensión parcial de la relación funcional entre el número de orden y el valor correspondiente. El estudiante logra reconocer los valores asociados a los términos visibles de la secuencia (por ejemplo, identifica que en la posición 1 se encuentra el número 5, en la posición 2 el número 8, y así sucesivamente). No obstante, al solicitarle que determine un término que no está explícitamente representado, tiende a limitar su razonamiento a los valores observables. Esto sugiere una dificultad para generalizar la relación entre la posición y el valor correspondiente, lo cual indica que aún no logra establecer una regla general que le permita determinar cualquier término de la secuencia.

### Figura 5

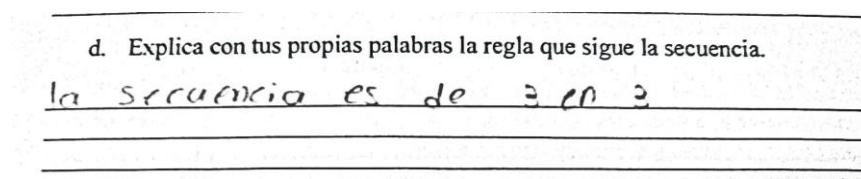
Producción del estudiante  $A_{11}$ . Prueba diagnóstica, tarea 1



**Tabla 2***Interacción con el estudiante A<sub>11</sub>. Prueba diagnóstica, tarea 1*

L1	Profesora: ¿Cuál número está en la posición 15?
L2	A <sub>11</sub> : El 14 o 17.
L3	Profesora: ¿Por qué el 14 o el 17?
L4	A <sub>11</sub> : Porque el 14 es menor que el 15.

En esta respuesta se evidencia que el estudiante A<sub>11</sub> no reconoce la posición 15 como un término ligado al lugar que ocupa dentro de la secuencia, sino que la interpreta como un número perteneciente al patrón numérico. Al ser preguntado por el número que estaría en la posición 15, el estudiante responde “14 o 17” justificando su respuesta con “porque el 14 es menor que el 15” (Tal como se muestra en la Figura 5). Esto muestra que A<sub>11</sub> asocia la posición con los valores próximos a dicho número en la secuencia, sin distinguir entre el orden de los términos y el valor de cada término. De esta manera, confunde el número de la posición con los elementos de la secuencia, lo que indica una dificultad para establecer una relación funcional entre ambas variables (posición–valor).

**Figura 6***Producción del estudiante A<sub>6</sub>. Prueba diagnóstica, tarea 1*

En general, la abducción evidenciada en las producciones de los estudiantes se manifiesta en el momento en que, a partir de la observación de los primeros términos de la secuencia, infieren o conjeturan que esta aumenta de tres en tres. Este razonamiento abductivo les permite establecer una posible regla que explica la regularidad identificada y, a partir de ella, generar los términos faltantes mediante un procedimiento recursivo, es decir, sumando tres al término anterior. No obstante, aunque esta estrategia permite continuar la secuencia y hallar cualquier término de manera sucesiva, no implica aún la formulación de una regla general explícita que relacione directamente la posición con su valor. En este sentido, la abducción da origen a una generalización de tipo aritmético.

**Tarea 2**

Para esta segunda tarea se propuso a los estudiantes resolver un problema contextual que seguía una relación del tipo  $4n$ . A partir de esta situación, los estudiantes debían completar una tabla en la que se relacionaba el número de ramos con el número total de flores y, posteriormente responder preguntas que implicaban generalizar la relación encontrada.

En esta actividad, la mayoría de los estudiantes completó correctamente la tabla, registrando los valores 8, 12, 16, 20, 24 y 28 en la fila correspondiente al número de flores. En general, utilizaron la estrategia de sumar reiteradamente 4, partiendo de la idea de que, si un ramo tiene 4 flores, entonces dos ramos deben tener 8 flores ( $4 + 4 = 8$ ) y así sucesivamente hasta completar toda la tabla.

Sin embargo, también se evidenció que algunos estudiantes presentaron dificultades para relacionar los datos de la tabla entre la cantidad de ramos y la cantidad de flores, como se muestra en el siguiente ejemplo:

### Figura 7

Producción del estudiante  $A_{23}$ . Prueba diagnóstica, tarea 2

2. Doña Marta tiene una floristería muy exitosa. El producto más comprado es un ramo de flores, el cual está compuesto por 4 flores de diferentes colores.

a. completa la siguiente tabla

Número de ramos	1	2	3	4	5	6	7
Números de flores	4	8	12	16	20	24	28

En este caso, la comunalidad encontrada por el estudiante  $A_{23}$  (ver Figura 7) sugiere, que al visualizar una secuencia simple en la fila de arriba y observar únicamente el número 4 en la fila de “numero de flores”, consideró que debía continuar la secuencia siguiendo la misma comunalidad, sin tener en cuenta la relación entre ambas filas.

### Figura 8

Producción del estudiante  $A_1$ . Prueba diagnóstica, tarea 2

2. Doña Marta tiene una floristería muy exitosa. El producto más comprado es un ramo de flores, el cual está compuesto por 4 flores de diferentes colores.

a. completa la siguiente tabla

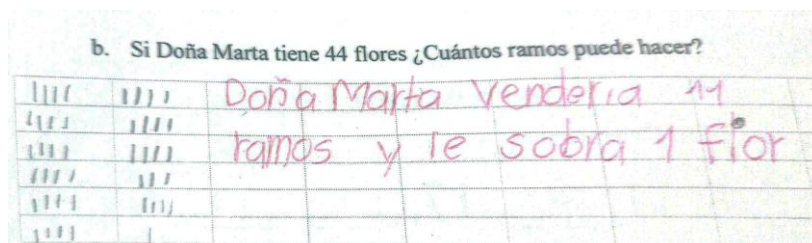
Número de ramos	1	2	3	4	5	6	7
Números de flores	4	4	4	4	4	4	28

Ahora, en la Figura 8, se observa que el estudiante completa la tabla escribiendo el número 4 en cada casilla correspondiente al número de flores y anota el 28 como la suma total de la fila. Esta respuesta evidencia que el estudiante comprende parcialmente la estructura de la tabla, pues reconoce el incremento en el número de ramos, pero no establece la relación funcional entre ambas magnitudes. En lugar de expresar la cantidad total de flores correspondientes a cada número de ramos, se limita a repetir el valor constante “4”, lo que indica una dificultad para relacionar ambas variables.

Por otro lado, En el ítem b, se pedía a los estudiantes explicar cómo habían determinado la cantidad de ramos que podía formar Doña Marta con las 44 flores disponibles. Las producciones evidencian diversas formas de razonamiento, entre ellas estrategias basadas en el conteo, la suma reiterada y la agrupación.

**Figura 9**

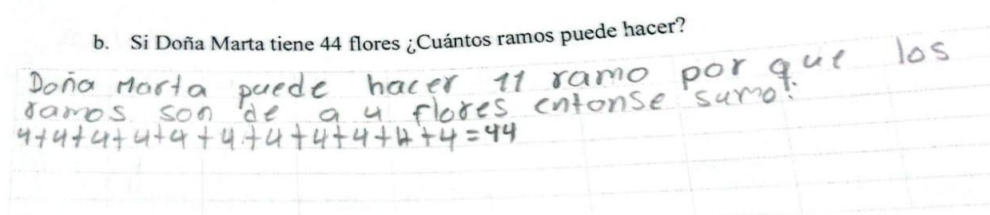
Producción del estudiante  $A_{14}$ . Prueba diagnóstica, tarea 2



En el caso de la figura 9, el estudiante utiliza una estrategia de conteo agrupado, formando grupos de cuatro palitos para representar la cantidad de flores que tiene cada ramo hasta completar las 44 flores. De esta manera, obtiene once grupos (cada uno correspondiente a un ramo). Esto revela que, aunque presenta una ligera imprecisión en el conteo —pues indica que le sobró una flor—, el estudiante razona correctamente en términos de agrupamiento. Desde la perspectiva del pensamiento factual (Radford, 2010), esta acción evidencia cómo el estudiante se apoya en manipulaciones concretas y perceptibles para establecer una relación entre cantidades, lo que le permite anticipar el resultado apoyándose en representaciones que, si bien no constituyen una expresión simbólica algebraica, sí operan como una forma de simbolización que media su razonamiento. A su vez, este tipo de razonamiento constituye una manifestación inicial de aritmética generalizada, en tanto el estudiante comienza a identificar una relación constante entre las variables (número de flores por ramo y número total de flores), aunque dicha relación se exprese de manera implícita mediante la acción de agrupar y no a través de un enunciado general.

**Figura 10**

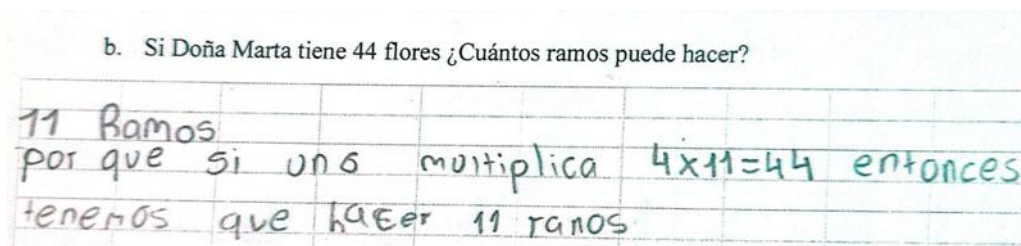
Producción del estudiante  $A_6$ . Prueba diagnóstica, tarea 2



Como se muestra en la figura 10, el estudiante  $A_6$  escribe: “Doña Marta puede hacer 11 ramos porque los ramos son de a 4 flores, entonces sumo  $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 44$ ”. Este procedimiento evidencia que comprende la relación funcional entre el número de ramos y el número de flores, aunque la representa se presenta mediante una estrategia de suma reiterada. Su respuesta refleja una comprensión factual del patrón de repetición, en la que logra operar correctamente con casos particulares cercanos, sin manifestar todavía un sentido de indeterminación que le permita generalizar a cualquier caso.

**Figura 11**

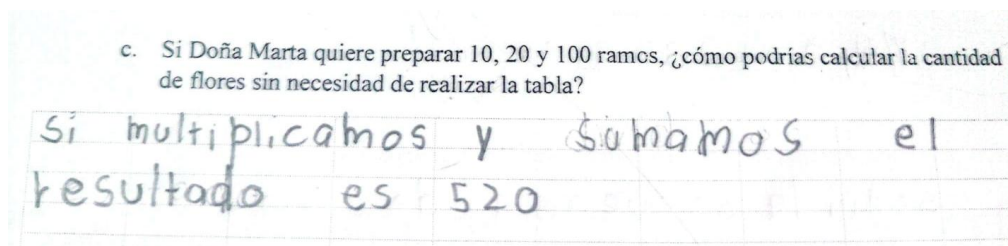
Producción del estudiante  $A_8$ . Prueba diagnóstica, tarea 2



Algunos estudiantes respondieron a este inciso utilizando la multiplicación (Ver Figura 11) como estrategia para determinar términos más lejanos sin necesidad de calcular los anteriores de manera secuencial. Este procedimiento evidencia un avance en la comprensión de la relación funcional entre las variables, al reconocer que la multiplicación permite obtener el número total de flores a partir del número de ramos, generalizando así el patrón identificado.

**Figura 12**

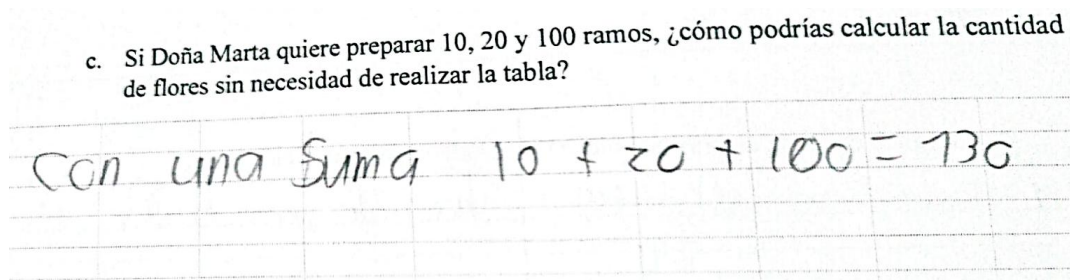
Producción del estudiante  $A_{15}$ . Prueba diagnóstica, tarea 2



Aunque el objetivo del ítem c era que los estudiantes encontraran una regla que generalizara el patrón identificado para cualquier caso, reconociendo que la relación entre el número de ramos y el número de flores podía expresarse mediante una regla general, - por ejemplo, mediante la idea: “Para hallar la cantidad de flores multiplico por 4 el número de ramos”-. varios estudiantes interpretaron la pregunta como que debían calcular la cantidad total de flores correspondientes a los tres casos. En la producción del estudiante  $A_{15}$  (Ver Figura 12) se observa esta interpretación, pues realiza un cálculo en el que combina la multiplicación y la suma, obteniendo un resultado único, 520. Este procedimiento refleja implícitamente que la estudiante multiplicó por cuatro cada uno de los valores (10, 20 y 100) y luego sumó los resultados. Aunque no expresa de manera explícita una regla general, su respuesta evidencia que entiende la relación funcional entre las variables y que es capaz de calcular la cantidad de flores para cualquier número concreto de ramos mediante la multiplicación, lo que refleja una forma de generalización aritmética que antecede a la expresión algebraica.

**Figura 13**

Producción del estudiante  $A_{14}$ . Prueba diagnóstica, tarea 2



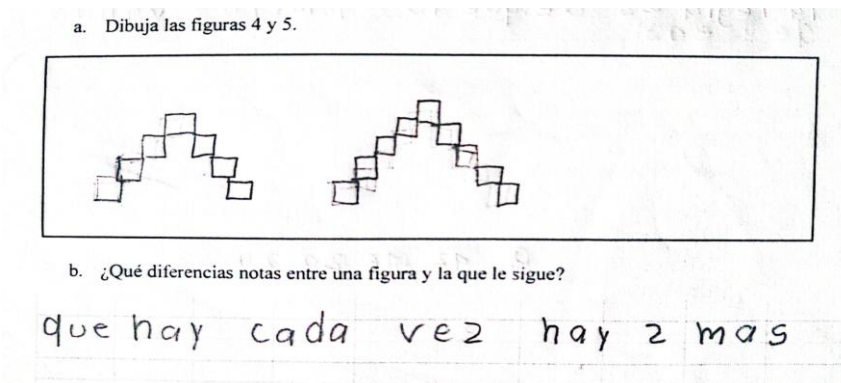
Otra interpretación que dieron los estudiantes en este ítem se puede ver figura 13, esta incluye el cálculo total de ramos, sumando los números 10, 20 y 100, dando como resultado 130. Esto evidencia que, en general, los estudiantes tuvieron dificultades para identificar la intención del ítem y para aplicar un procedimiento generalizable.

**Tarea 3**

La Tarea 3, tuvo como propósito identificar cómo los estudiantes reconocen y describen patrones de crecimiento, así como las estrategias que emplean para predecir términos no visibles de una secuencia figurar.

**Figura 14**

Producción del estudiante  $A_{15}$ . Prueba diagnóstica, tarea 3

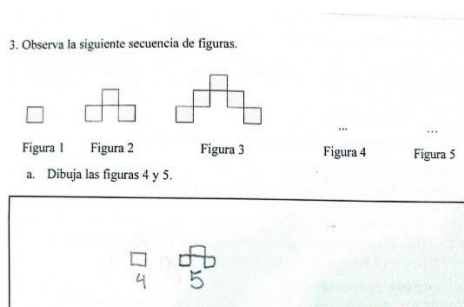


En general, la mayoría de producciones obtenidas por parte de los estudiantes en esta tarea evidencian que para construir las figuras 4 y 5 respectivamente, sumaron a cada lado de la figura un cuadro. Lo que indica que los estudiantes identificaron un patrón de crecimiento en la secuencia, estableciendo una relación entre cada figura y la siguiente. “o sea, acá sigue como la secuencia de dos; entonces, acá iría 7, y acá 9, pero entonces dibujos los cuadros”.

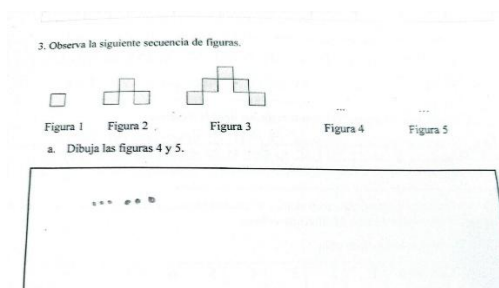
No obstante, dentro de las respuestas de los estudiantes también se encontraron producciones que difirieron notablemente del resto. Estos casos son particularmente significativos porque posibilitan el análisis de como algunos estudiantes interpretan la secuencia desde otros parámetros visuales o espaciales, lo que pone al descubierto distintas maneras de entender la regularidad.

**Figura 15**

Producción del estudiante  $A_{19}$ . Prueba diagnóstica, tarea 3

**Figura 16**

Producción del estudiante  $A_{22}$ . Prueba diagnóstica, tarea 3



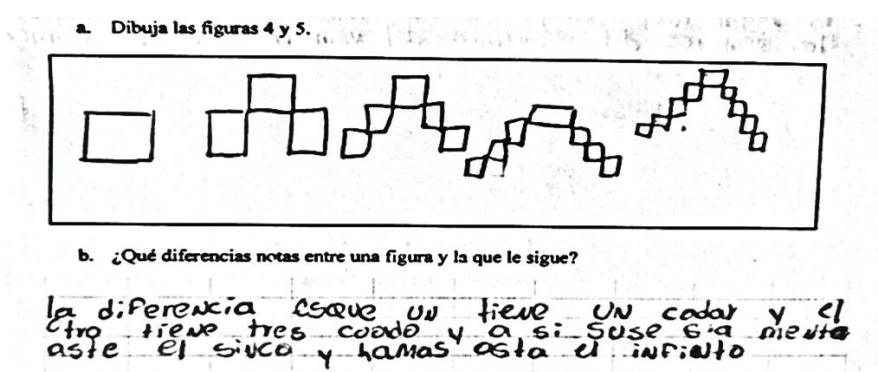
Vemos por ejemplo en la figura 15, en lugar de seguir un patrón de crecimiento añadiendo un cuadrado a cada lado de la figura siguiendo un patrón de dos en dos, el estudiante  $A_{19}$  interpretó la secuencia como una regularidad periódica, en la que las figuras se repiten en lugar de crecer progresivamente. En este sentido, su atención parece centrarse en la repetición de los elementos visuales más que en la transformación estructural de la figura. Por otro lado, en la figura 16 se observa que el estudiante interpreta los puntos suspensivos como parte de la tarea, dibujándolos en el recuadro correspondiente a las figuras 4 y 5, esto muestra que estudiante  $A_{22}$  no relaciona los puntos suspensivos como señal de continuidad o extensión de la secuencia. Desde el punto de vista semiótico, esta interpretación revela una dificultad en la lectura simbólica del enunciado, ya que el estudiante se centra en los aspectos visuales del texto sin reconocer su función representacional. En términos de objetivación, este caso muestra que no reconoció la función mediadora del signo como instrumento de generalización.

Ahora, para el segundo ítem de esta tarea donde se pide describir las diferencias entre una figura y la siguiente, se observa que, aunque la mayoría logró construir las figuras 4 y 5 de manera intuitiva siguiendo el patrón de crecimiento, las explicaciones escritas o verbales sobre las diferencias entre las figuras fueron más limitadas. Es decir, los estudiantes parecieron reconocer visualmente la regularidad en la secuencia —añadir dos cuadros a cada nueva figura— y la reprodujeron en sus construcciones, pero tuvieron dificultades al momento de expresar con claridad lo que habían identificado para este ítem.

Solo unos pocos estudiantes expresaron las diferencias entre una figura y la siguiente, con respuestas como: “que una es más pequeña y una es más grande”, “Que hay cada vez hay 2 más” o “que se suman 2”. Mientras que en la primera expresión hace referencia a una descripción perceptiva del cambio de tamaño en las figuras, las otras dos reflejan un reconocimiento más analítico del patrón de crecimiento, aludiendo a una relación cuantitativa de las figuras, estas producciones revelan distintos niveles de comprensión: algunos estudiantes se enfocan en elementos visuales, mientras que otros empiezan a reconocer patrones numéricos.

### Figura 17

Producción del estudiante  $A_{12}$ . Prueba diagnóstica, tarea 3

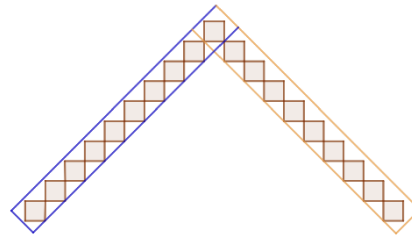
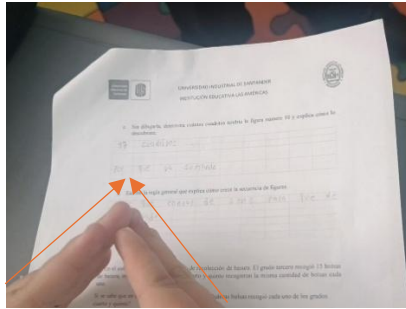


Ahora, observemos, por ejemplo, la Figura 17, donde el estudiante  $A_{12}$  compara la cantidad de cuadrados que tienen las figuras y utiliza expresiones como “hasta el infinito” y “sucesivamente”, que, si bien no están escritas correctamente, corresponden a lo que Vergel (2014) denomina funciones generativas del lenguaje. Estas no solo permiten describir acciones puntuales, sino también expresar procedimientos y acciones que pueden repetirse o imaginarse de forma reiterativa.

Finalmente, en los ítems c y d, donde se pedía a los estudiantes determinar cuántos cuadros tendría la figura número 10 y escribir una regla general que explicara cómo crece la secuencia de figuras, se evidenció que varios lograron reconocer una relación de crecimiento constante. Esto se refleja en expresiones como: “Tendría 19, porque en cada figura tiene dos cuadros más que la anterior”, “19 cuadros hay en la figura 10 y lo descubrí contando”, “Tiene que contar de 2 en 2 para que le dé el resultado”, “Se le suman 1 a cada lado, o sea 2 cuadritos”, “La frecuencia es sumar 2 cuadros más” o “Aumentando los dos cuadros”. Estas respuestas muestran que los estudiantes lograron identificar y expresar una regularidad aditiva, utilizando el lenguaje natural para comunicar una idea general sobre el patrón de crecimiento, una generalización recursiva.

**Tabla 3***Interacción con el estudiante A<sub>9</sub>. Prueba diagnóstica, tarea 3*

L1	Profesora: ¿Cómo hallaste la cantidad de cuadritos de la figura 10?
L2	A <sub>9</sub> : O sea, en cada lado hay 10, pero contando 10 porque arriba esta un cuadrito más que cuenta a cada lado 9 y le sumo dos, sería 17, ósea en total es 19, pero puse 17.



En este caso, la estudiante utiliza las manos para representar la forma de la figura como un medio semiótico concreto que le permite describir una regla generalizada, encontrando una relación entre la cantidad de cuadros en los lados y el número de la figura. Esto evidencia que reconoce que el crecimiento sigue un patrón constante. Su explicación —“O sea, en cada lado hay 10, pero contando 10 porque arriba hay un cuadrito más...” — muestra que combina el razonamiento aritmético con la percepción visual, intentando correlacionar los elementos de la figura con su representación numérica.

### Tarea 4

En esta tarea, se planteaba a los estudiantes un problema contextual cuyo propósito era que identificaran relaciones entre cantidades desconocidas, comprendiendo que las bolsas de cuarto y quinto debían ser equivalentes a la diferencia entre el total y las 15 bolsas, y entre sí. Así, la tarea promovía el pensamiento relacional y la comprensión de equivalencias en el contexto del problema.

**Figura 18***Producción del estudiante A<sub>6</sub>. Prueba diagnóstica, tarea 4*

Si se sabe que en total se recogieron 55 bolsas, ¿Cuántas bolsas recogió cada uno de los grados cuarto y quinto?

20 bolsas de 5<sup>o</sup> y las otras de 4<sup>o</sup>  
40 y 15 de 3<sup>o</sup>

5. Encuentra los números que completan la igualdad

a.  $3 + 2 = 7 + 2$   
b.  $8 + 15 = 14 + 37$   
c.  $8 - 5 = 3 + 1 = 4$   
d.  $2 \times 2 = 4 + 4 = 8$   
e.  $5 + a + 6 = 13 + a = 15$

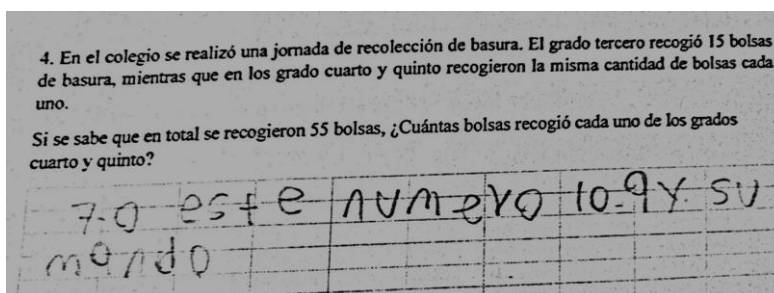
Handwritten calculations include:

- $55 - 15 = 40$
- $40 \div 2 = 20$
- $20 + 15 = 35$
- $35 + 20 = 55$
- $20 + 15 = 35$
- $35 + 20 = 55$
- $55 - 15 = 40$
- $40 \div 2 = 20$
- $20 + 15 = 35$
- $35 + 20 = 55$

En la Figura 18, se observa que la estudiante  $A_6$  que inicialmente emplea una estrategia de ensayo y error, probando distintas combinaciones numéricas para hallar un valor que, al duplicarlo y sumarle 15, dé como resultado 55. Sin embargo, tras varios intentos, el estudiante identifica un procedimiento más eficiente al restar 15 de 55 para obtener 40, y a partir de este resultado deduce que los grados cuarto y quinto recogieron 20 bolsas cada uno. Este cambio en la forma de resolver refleja una comprensión operativa de las relaciones numéricas y el uso de operaciones inversas como recurso para encontrar el valor desconocido. Si bien su actuación no necesariamente demuestra que conciba el signo igual como una relación de equivalencia entre dos expresiones, sí evidencia que el estudiante logra razonar relacionamente dentro de una situación contextualizada, estableciendo vínculos lógicos entre las cantidades involucradas para dar sentido a la igualdad planteada en el problema.

### Figura 19

Producción del estudiante  $A_1$ . Prueba diagnóstica, tarea 4



Por otro lado, el estudiante  $A_1$  aborda la tarea desde un enfoque distinto, sumando  $55 + 15$  y obteniendo como resultado 70, sin entender el contexto del problema ni la relación entre las cantidades involucradas; lo que sugiere que el estudiante únicamente se centra en los números presentes en el enunciado, aplicando una operación aritmética de forma mecánica sin considerar el contexto y relaciones de la situación.

### Tarea 5

El objetivo de esta última tarea era determinar la manera en que los estudiantes entendían el signo igual al resolver igualdades con distintas operaciones. En particular, se buscaba determinar si podían entender la igualdad como una relación de equivalencia entre dos expresiones, y no solamente como la obtención de un resultado. La mayor parte de las producciones demostró una comprensión operacional del signo igual, como se mostró en los análisis; sin embargo, algunos estudiantes pudieron demostrar signos de entendimiento relacional al equilibrar ambos lados de la igualdad.

**Figura 20**

Producción del estudiante A<sub>8</sub>. Prueba diagnóstica, tarea 5

5. Encuentra los números que completan la igualdad

a.  $3 + 2 = 5 + 2 = 7$

b.  $8 + 15 = 14 + 37$

c.  $8 - 5 = 3 + 1 = 4$

d.  $2 \times 2 = 4 + 4 - 8$

e.  $5 + a + 6 = 11 + a$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 15 \\ 14 \\ \hline 37 \end{array}$$

En relación con la comprensión del signo igual, la mayoría de las producciones de los estudiantes muestran que conciben la igualdad como el resultado de una operación y no como una equivalencia entre dos expresiones. En el ítem  $3 + 2 = \_ + 2$ , por ejemplo, en la figura 20 el estudiante A<sub>8</sub> completa la igualdad con el número cinco, lo que resulta en la expresión  $3 + 2 = 5 + 2 = 7$ . Esta respuesta evidencia que primero realiza la operación del lado izquierdo y después lleva el resultado al lado derecho, sin tener en cuenta que ambas partes deben representar cantidades equivalentes. Este proceso confirma que el signo igual se entiende como el concepto de "dar el resultado", en lugar de establecer una relación de equilibrio.

En el segundo ítem  $8 + 15 = 14 + \_$  podemos ver que el estudiante completa la igualdad con el número 37 resultado de realizar la operación de suma con  $8 + 15 + 14 = 37$ . El estudiante no compara las dos partes de la igualdad al sumar todos los valores que contiene la expresión, sino que las combina en una sola secuencia de adición. Esta forma de actuar muestra que existe una comprensión incipiente del signo igual desde un punto de vista operacional, la cual se caracteriza por buscar un resultado final en vez de identificar la igualdad como una relación de equivalencia entre dos expresiones.

De forma similar, en los ítems c y d, los estudiantes mantiene un patrón de razonamiento centrado en la obtención de un resultado final, lo que refuerza la idea de una comprensión predominantemente operacional del signo igual.

Finalmente, para el último ítem de esta tarea  $5 + a + 6 = \_ + a$ , varios estudiantes manifestaron comentarios como: ¿qué significa la  $a$ ?" o "la  $a$  es una vocal", lo que evidencia que aún no reconocen la letra como una incógnita o como una cantidad que participa en la igualdad. Tal como se preveía en el análisis a priori, la mayoría resolvió el ejercicio sumando únicamente los números 5 y 6, obteniendo 11, sin reconocer el papel que cumple la letra en la igualdad.

**Figura 21**

Producción del estudiante  $A_{15}$ . Prueba diagnóstica, tarea 5

5. Encuentra los números que completan la igualdad

a.  $3 + 2 = \underline{3} + 2$

b.  $8 + 15 = 14 + \underline{a}$

c.  $8 - 5 = \underline{2} + 1$

d.  $2 \times \underline{4} = 4 + 4$

e.  $5 + a + 6 = \underline{11} + a$

Por otro lado, Solo 3 estudiantes consiguieron establecer una relación de equivalencia entre las dos expresiones (ver figura 21), a diferencia de las respuestas anteriores (ver figura 20) que muestran un entendimiento operacional del signo igual. En los diferentes ítems, se observa que el estudiante  $A_{15}$  no solo calcula un resultado final, sino que también intenta conservar la igualdad entre las dos partes de la igualdad, determinando los valores necesarios para que esta se cumpla.

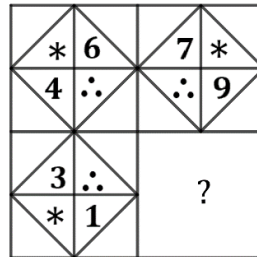
**5.4. Talleres**

Teniendo en cuenta el análisis a posteriori de la prueba diagnóstica, se diseñaron los siguientes talleres con el propósito de atender las dificultades evidenciadas en torno a la comprensión de la aritmética generalizada y las relaciones de equivalencia. En particular, se identificaron limitaciones en la capacidad de los estudiantes para reconocer y expresar regularidades en secuencias numéricas y figurativas, así como para establecer relaciones de igualdad entre expresiones que representen el mismo valor. Por ello, los talleres buscan favorecer la formulación de reglas generales, la interpretación del signo igual como una relación de equilibrio, y la justificación de los procedimientos empleados, promoviendo así un tránsito desde el razonamiento basado en casos particulares hacia formas de pensamiento más generalizadas y estructurales.

**5.4.1. Taller 1****5.4.1.1. Análisis a priori Taller 1**

Este taller está compuesto por dos tareas que se proponen a través de diferentes ítems, a continuación, se propone un análisis a priori de la actividad que se espera genere en los estudiantes participantes de este estudio.

1. Observa la siguiente imagen



- Dibuja el cuadrado que falta en la secuencia.
- Explica con tus palabras qué patrón o idea usaste para hacerlo.
- Si tuvieras que explicarle a un amigo cómo continuar la secuencia, ¿qué pasos o regla le dirías que siguiera?

2. Observa la siguiente secuencia

<b>Fila A</b>		<b>2</b>		<b>5</b>		<b>8</b>		<b>11</b>	
<b>Fila B</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>...</b>

- Escribe los 7 primeros números de la fila A.
- Si se continúa esta secuencia, ¿en qué fila estará el número 25? Justifica tu respuesta.
- Si tienes el número 53, ¿a cuál fila pertenece? Justifica tu respuesta.
- ¿Cómo podrías encontrar cualquier número de la fila A sin necesidad de escribir toda la secuencia?

La secuencia numérico-figurativa que se propone en Tarea 1, busca que los estudiantes empleen diversos recursos semióticos —como el lenguaje natural, el conteo, los gestos, los dibujos y las expresiones escritas— para expresar y justificar sus ideas. Se espera que, a partir del análisis de las figuras, los estudiantes identifiquen similitudes y diferencias, considerando tanto la estructura espacial como la numérica. Por ejemplo, podrían observar que los símbolos \* y :: parecen girar en sentido horario; aunque también es posible interpretarlo de otra forma: el símbolo \* se mantiene en las esquinas del cuadrado mientras que el símbolo :: se ubica siempre en el interior de la figura.

En cuanto a los números, que aparecen en la secuencia numérico-figurativa que se propone en la Tarea 1, se aprecia que no solo siguen un movimiento giratorio, sino que también un incremento constante. En el cuadro inferior izquierdo aparecen los números 1 y 3; en el superior, 4 y 6; y en el derecho, 7 y 9. Si se considera que la secuencia gira en sentido horario, podría interpretarse el siguiente patrón:  $1 + 3 = 4$ ,  $4 + 3 = 7$ , por lo que en el cuadro faltante se tendría  $7 + 3 = 10$ . De manera similar, en la otra

secuencia se cumple  $3 + 3 = 6$ ,  $3 + 3 + 3 = 9$  y, siguiendo el patrón,  $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ . En este caso, se estaría sumando 3 de forma constante.

Otra interpretación posible es que la secuencia corresponde a los múltiplos de 3:  $3 \times 1 = 3$ ,  $3 \times 2 = 6$ , y así sucesivamente hasta llegar al cuarto cuadro faltante, donde  $3 \times 4 = 12$ .

Finalmente, algunos estudiantes podrían plantear una tercera interpretación, considerando que la secuencia sigue un incremento de dos unidades en los números consecutivos:  $1 + 2 = 3$ ,  $4 + 2 = 6$ ,  $7 + 2 = 9$  y, por tanto,  $10 + 2 = 12$ .

La Tarea 2 de este taller es una adaptación de un problema tomado de *Colombia Aprendiendo* (2021), mediante la cual se busca un acercamiento a las secuencias numéricas a partir de la identificación de regularidades y del uso de diversos recursos semióticos, como el conteo, las señalizaciones, entre otros. Mediante esta tarea se pretende que los estudiantes reconozcan, describan y justifiquen el patrón que sigue cada fila, analizando las similitudes y diferencias presentes entre los números y reconociendo la relación existente entre su posición y su valor dentro de la secuencia.

Al observar la serie, los niños pueden notar que en la Fila A aparecen los números 2, 5, 8, 11, ..., los cuales aumentan de tres en tres, mientras que en la Fila B se encuentran los números 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, ..., que completan los valores intermedios siguiendo una alternancia entre sumar dos y sumar uno. Este análisis permite evidenciar que los estudiantes identifican la estructura numérica de ambas filas, reconociendo que cada una sigue una regla distinta, pero relacionada con la otra.

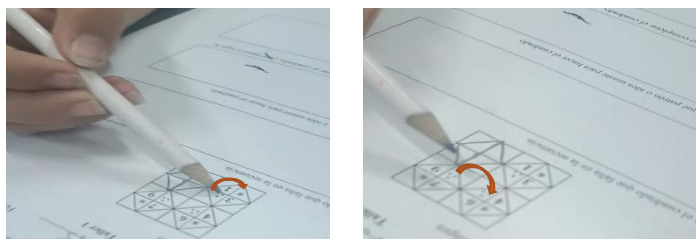
Además, al reflexionar sobre estas regularidades, se espera que los estudiantes comiencen a objetivar la característica común de la secuencia, es decir, a establecer propiedades que surgen a partir de las similitudes observadas en los casos particulares. En este proceso, pueden extrapolar la regularidad encontrada para anticipar qué número aparecería en una posición determinada o a qué fila pertenecería un número dado, mostrando así indicios de un proceso de generalización.

#### **5.4.1.2. Análisis a posteriori del taller 1**

En este análisis se examinan las estrategias y procedimientos que los estudiantes utilizan para resolver tareas de secuencias numérico-figurativas. Se estudia cómo identifican patrones, distinguen elementos constantes y variables, y aplican recursos como el conteo, la observación o la aritmética para justificar y completar los ítems.

**Tabla 4***Interacción con el estudiante A<sub>1</sub>. Taller 1, tarea 1*

- 
- L1 A<sub>1</sub>: Estos signos [señala los símbolos  $\therefore$  y  $*$  con el lápiz] se podrían poner porque son los mismos que hay en todos, entonces eso debería ponerlos y lo de los números si me tocaría por otra forma porque esos no puedo poner los mismos.



- 
- L2 Profesora: ¿Y por qué crees que no podría ser los mismos números?
- 
- L3 A<sub>1</sub>: porque no le encuentro la lógica porque no podría repetir los mismos números y ponerlo acá [señala el espacio vacío de la secuencia], sería como una copia y de copiarlo de aquí a aquí, lo que si sabes es que podemos copiar estos signos porque van en todos los cositos.
- 

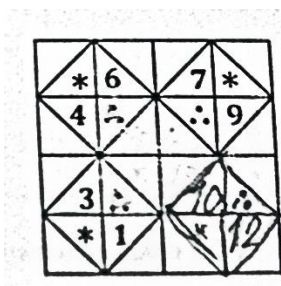
En esta interacción con el estudiante se evidencia que aborda la tarea principalmente desde una comparación visual entre los elementos que componen cada cuadro de la secuencia. Cuando afirma “se podrían poner porque son los mismos que hay en todos”, haciendo referencia a los símbolos  $*$  y  $\therefore$ , muestra que reconoce una característica común entre los cuadros e identifica qué elementos se mantienen constantes en la secuencia. Sin embargo, frente a los números expresa que “no podría repetir los mismos números”, argumentando que no tendría “lógica” simplemente copiarlos, lo cual indica que distingue entre lo que se repite y lo que varía, pero sin lograr aún establecer una regla o relación que permita determinar cómo varían dichos números. Es decir, aunque reconoce que los números no pueden ser los mismos, no logra identificar una regularidad entre los números.

Posteriormente el estudiante tiende a realizar operaciones (como la suma) entre los números presentes e intentar llevar ese resultado al cuadro faltante, lo que muestra que no establece una relación entre los números de la secuencia, sino que recurre a operaciones aritméticas sin un fundamento relacional dentro del contexto de la tarea.

Además, se aprecia cómo el estudiante utiliza acciones factuales, como los movimientos con el lápiz para señalar, junto con expresiones deícticas espaciales como “acá” y “aquí”, lo cual muestra que pone en juego el espacio, el cuerpo y el lenguaje de manera simultánea para orientar su interpretación de la situación. Según Vergel (2014), el uso de deícticos espaciales permite observar cómo el lenguaje simbólico incorpora una dimensión lingüística que evidencia la manera en que evolucionan las fórmulas corpóreas a través de acciones, gestos, palabras, entre otros, elementos que en una fórmula algebraica suelen quedar implícitos y no permiten ver esa evolución.

**Figura 22**

Producción del estudiante  $A_4$ . Taller 1, tarea 1



En general, se evidenció que la mayoría de los estudiantes identificó un patrón para continuar la secuencia numérica, que consiste en “contar de dos en dos” entre los elementos numéricos presentes en cada cuadro. A partir de esa regla y observando que de un cuadro al siguiente se “lleva 1” en la secuencia, varios de ellos concluyen que los números correspondientes al cuadro faltante serían 10 y 12. Además, al notar que los símbolos \* y ∴ aparecen de manera reiterada en todos los cuadros visibles, los estudiantes deducen que estos también deberían aparecer en el cuadro faltante. No obstante, aunque reconocen los elementos que deberían conformar dicha figura y reconocen una organización espacial al colocar los números en diagonal (y lo mismo para los símbolos), no identifican la forma en que estas posiciones van rotando de un cuadro a otro dentro de la secuencia como en la figura 22.

**Figura 23**

Producción del estudiante  $A_{18}$ . Taller 1, tarea 1

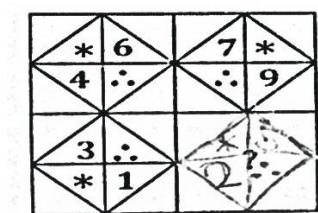
b. Explica con tus palabras qué patrón o idea usaste para hacer el cuadrado.

Los números: los del mismo cuadrado se llevan 2 y algunos se llevan 1  
 Las figuras: Los puntos van al centro y los asteriscos para afuera

Vemos, por ejemplo, el caso del estudiante  $A_{18}$  en la figura 23, donde identifica el patrón entre los cuadrados y lo expresa diciendo que “se llevan 2” y que “algunos se llevan 1”, haciendo referencia a que, al pasar de un cuadro a otro, los números cambian según esa relación. Además, respecto a los símbolos, el estudiante recurre a deícticos espaciales como “van al centro” o “para fuera” para describir la estructura espacial que ocupan dichos símbolos; lo cual evidencia que usa el espacio y el lenguaje para organizar y comunicar su forma de pensar matemáticamente.

**Figura 24**

Producción del estudiante  $A_{24}$ . Taller 1, tarea 1



Por otro lado, se identificó otra estrategia utilizada por algunos estudiantes para determinar los números que faltan. En este caso, su razonamiento se basó en “contar cuántos números había y cuáles faltaban”. Es decir, el estudiante parte de la idea de que la secuencia está compuesta por los números naturales consecutivos ya presentes en los cuadros visibles y concluye que los números faltantes deberían ser el 2 y el 5, porque son los que no aparecen en la cuadrícula. Sin embargo, en este razonamiento se omite el número 8, el cual tampoco está presente, pero los estudiantes parecen pasarlo por alto al centrarse únicamente en aquellos números que identifican de forma más inmediata como en el caso de la figura 24.

En relación con la segunda tarea del taller, correspondiente a la secuencia numérica propuesta por Colombia Aprendiendo (2021), la mayoría de los estudiantes identificó que la fila A sigue un patrón de “contar de tres en tres” o “sumar 3 en 3”. La identificación del patrón les permitió resolver los ítems a, b y c, extrapolando el patrón para ubicar números más lejanos dentro de la secuencia.

**Tabla 5**

Interacción con el estudiante  $A_1$ . Taller 1, tarea 2

L1  $A_1$ : ¿Tengo que terminar de hacer los siete números que faltan aquí, en estos cuadritos? [señala los espacios vacíos que están entre los números de la fila A]

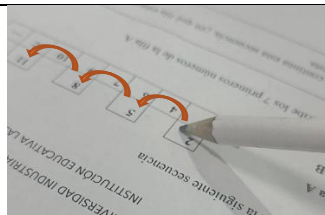


L2 Profesora: ¿Cuáles siete números que faltan?

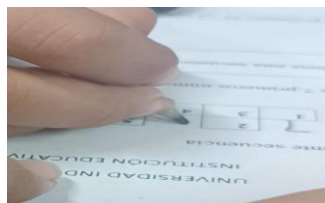
L3  $A_1$ : Estos siete números, porque mire, acá dice “Escribe los 7 primeros números de la fila A”

L4 Profesora: Si...

L5  $A_1$ : Los primeros siete, y solamente hay 1, 2, 3 y 4 [señala los números 2, 5, 8 y 11 respectivamente] tengo que escribir el 5, el 6 y el 7.



L6	Profesora: ¿Por qué el 5, el 6 y el 7?
L7	A <sub>1</sub> : El 5 no, toca que escribir los números que falta ahí para poder hacerlo.
L8	Profesora: Pero dice que los primeros siete números que pertenezca a la fila A.
L9	A <sub>1</sub> : 1, 2, 3 y 4 [señala los números 2, 5, 8 y 11 respectivamente], pero solamente hay cuatro; no hay siete.
L10	Profesora: Aquí, estos puntos [señala los puntos suspensivos] significan que esta secuencia continúa de manera infinita.
L11	A <sub>1</sub> : Continua de manera infinita, pero tengo que poner los números para que se completen siete y listo. *Procede a colocar el número 1 en la fila A*.

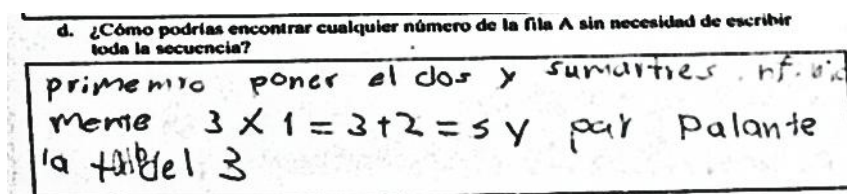


L12	Profesora: Pero el 1 pertenece a la fila B, no puede pertenecer tanto a la fila A como a la B.
L13	A <sub>1</sub> : Ah, ya sé, el 7 no está repetido acá.

La transcripción evidencia como el estudiante A<sub>1</sub> logra identificar los números visibles que pertenecen a la fila A; sin embargo, al intentar extender la secuencia, el estudiante no logra reconocer la regularidad entre los números. En lugar de aplicar un patrón, tiende a asumir que los números que faltan deben estar ubicados entre los espacios que hay en los números de la fila A.

### Figura 25

Producción del estudiante A<sub>23</sub>. Taller 1, tarea 2

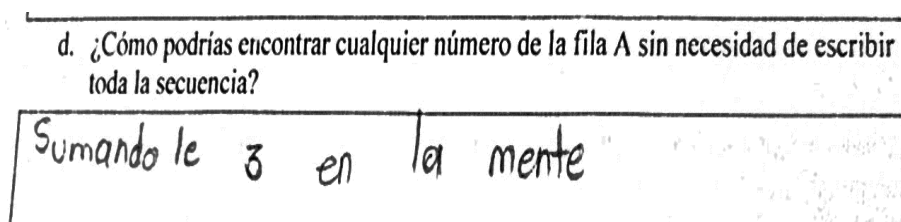


En la Figura 25 se observa que el estudiante A<sub>23</sub> describe una estrategia para determinar cualquier número de la fila A. En su producción escribe: “Primero poner el dos y sumar tres infinitamente”, lo cual evidencia que reconoce el valor inicial de la secuencia (el 2) y que concibe el patrón como una acción reiterada de sumar tres. El uso de la palabra “infinitamente” sugiere que el estudiante concibe que la regla puede aplicarse de manera reiterativa.

Sin embargo, al introducir posteriormente la expresión “ $3 \times 1 = 3 + 2 = 5$  y de par palante la tabla del 3”, se observa un avance en su forma de razonar el patrón, ya que deja de apoyarse exclusivamente en la suma reiterada y comienza a emplear la multiplicación como una forma más abreviada y general para describir la relación. De este modo, el estudiante pasa de una generalización aditiva (“sumar 3 infinitamente”) a una generalización multiplicativa, al expresar la regla de la secuencia mediante una estructura del tipo  $3 \times n + 2$ , donde “ $n$ ” representa la posición del término.

### Figura 26

Producción del estudiante  $A_{18}$ . Taller 1, tarea 2



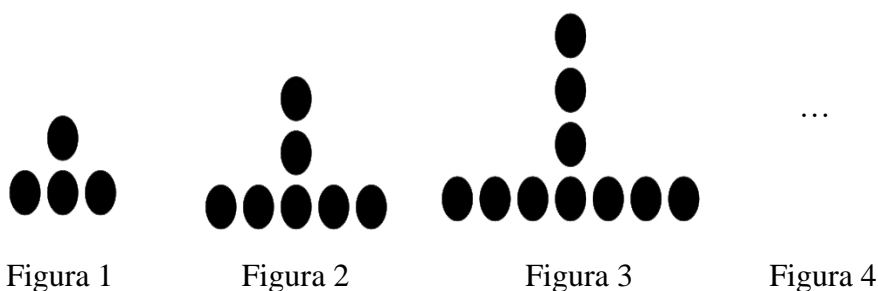
Aunque el propósito del ítem era que los estudiantes determinaran una regla general que permitiera hallar cualquier término de la secuencia sin recurrir a la estrategia de “suma reiterada”, la formulación de la pregunta incluía la condición de hacerlo sin necesidad de escribir toda la secuencia. Por lo tanto, se esperaba que los estudiantes construyeran una regla que permitiera determinar cualquier término sin tener que listar los anteriores. Sin embargo, la mayoría terminó interpretando esta condición no como una invitación a formalizar una regla general, sino como una restricción únicamente sobre el registro escrito. En consecuencia, consideraron que podían “contar de tres en tres” mentalmente y utilizaron expresiones como “sumándole 3 en la mente” o “pensando de tres en tres”, como se evidencia en el caso de la Figura 26.

## 5.4.2. Taller 2

### 5.4.2.1. Análisis a priori del Taller 2

Este taller se apoya en una secuencia de figuras que da lugar a diferentes ítems orientados a que los estudiantes identifiquen, extiendan y generalicen patrones figurales, así como a que desarrollen estrategias para describir, representar y justificar relaciones presentes en la secuencia.

1. Diego presenta la siguiente secuencia



- a. Dibuja las figuras 4 y 5
- b. ¿Cómo cambia el número de círculos de una figura a la siguiente?
- c. Completa la siguiente tabla

Número de la figura	1	2	3			6		8
Número de círculos	4		10		16		22	

- d. ¿Cómo podrías saber cuántos círculos hay en la figura 21 sin dibujarla?
- e. Si Santiago utiliza 43 círculos ¿A que numero de figura corresponde?  
Justifica tu respuesta.
- f. Diego quiere construir la figura 21. Explica con palabras lo que debe hacer para construirla.
- g. Escribe un mensaje dirigido a un compañero que no asistió a la clase, explicándole de manera clara y detallada el procedimiento que utilizas para calcular rápidamente el número de círculos en la figura 200.

En este taller se presenta una secuencia figurativa en la cual el número de círculos aumenta de forma constante, creciendo de tres en tres, lo cual corresponde a una relación funcional lineal de la forma  $3n + 1$ , donde  $n$  representa el número de la figura. A partir de la construcción de las figuras 4 y 5 —manteniendo la estructura y la distribución espacial originales— se busca que los estudiantes identifiquen, comparen y analicen visualmente la variación entre las figuras que conforman la secuencia.

La pregunta “¿Cómo cambia el número de círculos de una figura a la siguiente?” orienta a que el estudiante haga explícita la regularidad de manera escrita, transitando desde una percepción comparativa entre casos cercanos hacia la verbalización del patrón hallado. En este proceso, algunos pueden formular enunciados como “cada vez se suman tres círculos” o “en cada lado se agrega un círculo”, lo que evidencia una interpretación más estructural del cambio entre figuras. Otros, en contraste, podrían limitarse a señalar que “una figura tiene más círculos que la otra” sin reconocer la constancia del incremento, mostrando un análisis aún centrado en lo perceptivo y no en la regularidad numérica subyacente.

De manera complementaria, las preguntas que invitan a completar la tabla, determinar cuántos círculos tiene la figura 21 o identificar qué figura corresponde a 43 círculos buscan extrapolar la regularidad hacia casos más lejanos, favoreciendo el tránsito hacia procesos de generalización. En este punto algunos estudiantes pueden continuar empleando estrategias recursivas —como sumar de tres en tres sucesivamente— dependiendo del cálculo del término anterior para poder obtener el siguiente.

Finalmente, el último ítem —que solicita escribir un mensaje dirigido a un compañero ausente explicando el procedimiento para calcular el número de círculos en la figura 200— tiene como propósito analizar si el estudiante es capaz de formular una regla general y expresarla de manera explícita. En este punto se busca evidenciar si el estudiante puede deducir una expresión directa que permita determinar el valor para cualquier término de la secuencia, por ejemplo: “multiplico por 3 y sumo 1”.

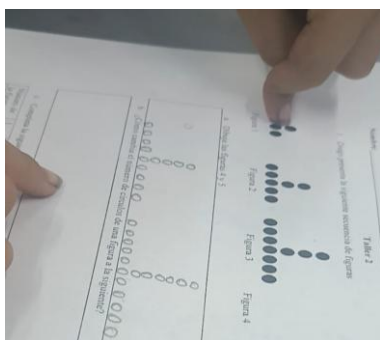
Otra forma de justificar esta regla consiste en reconocer la estructura figural: la secuencia mantiene un círculo central fijo y, alrededor de él, se agregan círculos hacia la izquierda, hacia la derecha y hacia arriba en una cantidad equivalente al número de cada figura. A partir de esta observación es posible inferir que el total de círculos corresponde a tres veces el número de la figura —debido a las tres direcciones en las que crece la estructura— más un círculo adicional correspondiente al punto central. En consecuencia, la cantidad total de círculos puede describirse como  $n + n + n + 1$ , siendo  $n$  el número asociado al término de la secuencia figural.

#### 5.4.2.2. Análisis a posteriori del Taller 2

##### Tabla 6

*Interacción con el estudiante A<sub>1</sub>. Taller 2*

L1 A<sub>1</sub>: Es que, aquí en lo que vi, es que esta figura es la más pequeñita, esta es un poquito más grande, y esta es la más grande, entonces hice una más grande y la otra más grande que la anterior.



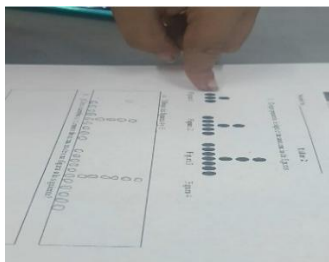
L2 Profesora: ¿Cómo son más grandes?

L3 A<sub>1</sub>: Porque van subiendo lo números de la cantidad

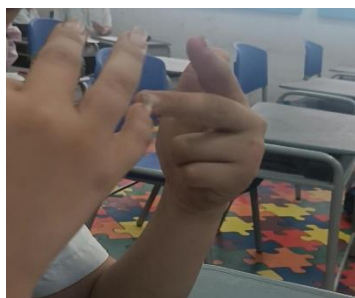
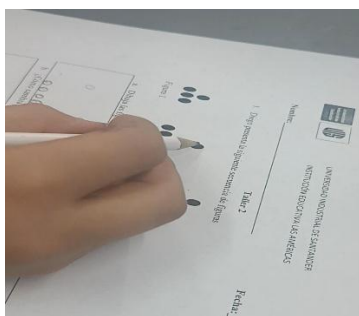
L4 Profesora: ¿Cómo van subiendo?

L5 A<sub>1</sub>: Mire, acá hay 3,4[señala la figura 1], acá hay 1,2,3,4,5,6,7[cuenta los círculos de la figura 2], y aquí va 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10[cuenta los círculos de la figura 3], aquí va 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13 cuenta los círculos de la

figura 4 y aquí va 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16 [cuenta los círculos de la figura 5].



- L6** Profesora: ¿Cómo van aumentando?
- L7**  $A_1$ : Van aumentando por el número de los circulitos.
- L8** Profesora: ¿Cómo aumentan?
- L9**  $A_1$ : Aumentan... Yo creo que van de dos en dos, acá hay 1,2,3,4... [cuenta la cantidad de las figuras 1 y 2] va aumentando de... [procede a contar con las manos] va aumentado de tres en tres, entonces va aumentado la cantidad.



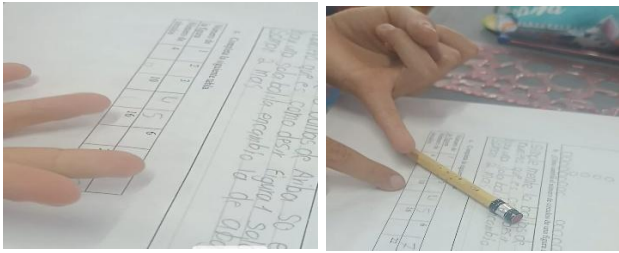
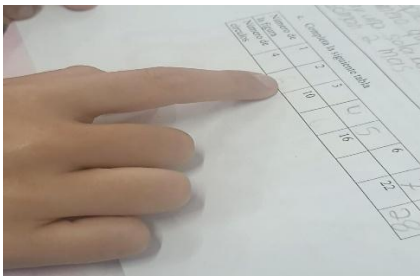

En el segundo ítem del taller se observa que el estudiante  $A_1$  inicia su explicación a partir de una observación visual de las figuras, destacando las diferencias de tamaño (“esta figura es la más pequeñita, esta es un poquito más grande”). Este enfoque muestra que, en un primer momento, su razonamiento se apoya en aspectos perceptuales antes que en relaciones numéricas o estructurales.

No obstante, a medida que avanza la interacción con la profesora y mediante preguntas guiadas, como: “¿Cómo van aumentando?”, orientadas a promover el razonamiento del estudiante  $A_1$ , este empieza a establecer relaciones entre el tamaño de las figuras y la cantidad de elementos que las conforman. Al intentar precisar cómo se da dicho aumento, el estudiante propone inicialmente que “van de dos en dos”, pero, a través de acciones factuales como el conteo acompañado de señalamientos con el lápiz y los dedos, busca confirmar o ajustar su hipótesis, concluyendo finalmente que la cantidad de círculos aumenta de tres en tres. De esta manera, se evidencia una transición desde una descripción cualitativa, basada en características visuales como el tamaño, hacia una descripción cuantitativa, en la que el estudiante considera el número de elementos como criterio para explicar el crecimiento de las figuras.

Este proceso evidencia cómo el estudiante moviliza acciones factuales para objetivar una relación numérica, avanzando desde una percepción visual hacia la identificación de una regularidad.

### Tabla 7

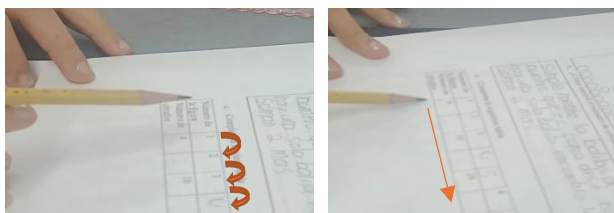
Interacción con el estudiante  $A_6$ . Taller 2

<b>L1</b>	Profesora: ¿Qué número crees que va ahí?
<b>L2</b>	$A_6$ : 5, 6, 7, 8, 9,10[cuenta con los dedos] ya está el número acá [señala el número 10 en la tabla], ¿y en el medio sería un 6?
	
<b>L3</b>	Profesora: ¿Cómo así?
<b>L4</b>	$A_6$ : Es que mira, aquí es 6 en 6.
<b>L5</b>	Profesora: ¿Por qué 6 en 6?
<b>L6</b>	$A_6$ : Porque tú cuentas 6 y te llega 10[señala el número 10 en la tabla], pero yo creo que es un número menos para que pueda llenar esto [señala la casilla que sigue después del 4].
	
<b>L7</b>	Profesora: ¿Por qué dices que el 6 debe ir ahí?
<b>L8</b>	$A_6$ : No, no es que diga que debe ir ahí, si no que uno dice 4,5,6,7,8, 9[cuenta con los dedos] ... entonces ¿5 para que de 10?
	
<b>L9</b>	Profesora: ¿y por qué debe dar 10?
<b>L10</b>	$A_6$ : Porque aquí ya hay el número 4, 10, 16, 22 [señala los números respectivamente] bueno, entonces yo creería que tenía que encontrar el 6 en 6.
<b>L11</b>	Profesora: ¿Pero por qué 6 en 6? No entiendo.

**L12** A<sub>6</sub>: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 [cuenta con los dedos] aunque ya está aquí el 10 entonces toca uno menos para que pueda colocar aquí [señala la casilla que sigue después del 4] entonces sería como el 5, pero entonces no me daría lo que yo necesito.

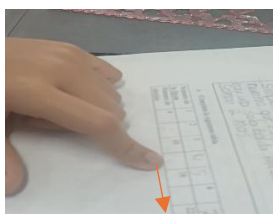
**L13** Profesora: ¿Y qué es lo necesitas?

**L14** A<sub>6</sub>: Es que no entiendo aquí, 1,2,3,4,5,6 [señala con el lápiz los respectivos números] y sigue la secuencia y también toca seguir la secuencia [señala la fila de la cantidad de círculos].



**L15** Profesora: ¿Y cómo se sigue esa secuencia?

**L16** A<sub>6</sub>: ... pues en 5 en 5, no; 6 era el único que me daría que aquí para adelante.



**L17** Profesora: ¿Y qué iría acá [señala la casilla que sigue después del 4]?

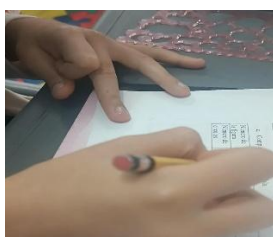
**L18** A<sub>6</sub>: Mmm... 2, no. Sería la mitad de 4, es 2, pero no tiene nada que ver ahí, ¿no?

**L19** Profesora: No, no tiene nada que ver.

**L20** A<sub>6</sub>: ... el 3.

**L21** Profesora: ¿Por qué el 3?

**L22** A<sub>6</sub>: 4, 5, 6, 7 [cuenta con los dedos y escribe el 7], 7, 8, 9, 10 [pausa], 11, 12, 13 [pausa y escribe el 13], 14, 15, 16 [pausa], 17, 18, 19 [pausa y escribe el 19].”



**L23** Profesora: ¿Y cómo estás segura de que son esos números?

**L24** A<sub>6</sub>: Porque siguen la secuencia pasando como el 6.

**Figura 27***Producción del estudiante A<sub>21</sub>. Taller 2*

c. Completa la siguiente tabla

Número de la figura	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de círculos	4	6	10	6	16	6	22	6

En la interacción con la estudiante A<sub>6</sub> se evidencia que intenta determinar los números que deben ubicarse en las casillas vacías de la tabla sin considerar cómo se relacionan las filas entre sí. Al analizar la fila correspondiente al “número de círculos”, la estudiante señala que la secuencia sigue un patrón de “6 en 6”, basándose únicamente en los valores visibles de esa misma fila. Para justificar sus elecciones, recurre al conteo con los dedos y a la señalización de los números en la tabla, lo que evidencia un razonamiento apoyado en acciones factuales. En un momento propone que el número que debe colocarse entre el 4 y el 10 es 6 (como ocurre también con el estudiante A<sub>21</sub> en la Figura 27), porque al sumarlo con 4 obtiene 10; sin embargo, luego reconsidera su decisión y sugiere un número menor. Esta forma de proceder evidencia que la estudiante centra su atención en la regularidad inmediata de los números visibles, sin establecer un criterio general que le permita relacionar de manera coherente las dos filas de la tabla.

Por otra parte, cuando la estudiante expresa: “Es que no entiendo aquí, 1, 2, 3, 4, 5, 6 [señala con el lápiz los respectivos números] y sigue la secuencia y también toca seguir la secuencia [señala la fila de la cantidad de círculos]”, surge la hipótesis de que la razón por la cual no considera la relación entre las filas podría estar relacionada con la disposición horizontal de los datos. En actividades previas —como la prueba diagnóstica y el taller anterior— los estudiantes habían trabajado secuencias numéricas con estructura horizontal; por ello, es posible que A<sub>6</sub> perciba las dos filas como secuencias independientes, sin establecer algún tipo de relación, y que ignore las casillas de “Número de la figura” y “Número de círculos”.

En general, en los ítems d y e, varios estudiantes llegaron a la respuesta contando o sumando de “3 en 3”, reconociendo que cada figura se le suman tres círculos o que en cada esquina de la figura aumenta 1 círculo y, como son tres esquinas, entonces se aumenta 3 cada vez, Asimismo, otros estudiantes recurren a la estrategia de multiplicar por 3 y sumar 1, lo que les permite determinar términos más lejanos de la secuencia.

**Tabla 8***Interacción con los estudiantes A<sub>6</sub> y A<sub>15</sub>. Taller 2*

L1	Profesora: ¿Cómo lo están haciendo?
L2	A <sub>15</sub> : Nosotras estábamos viendo una figura que nos diera 21, entonces pues nosotras pensamos que es 21 + 21 da 42, Cuando llega nuestra



**Figura 28***Producción del estudiante A<sub>15</sub>. Taller 2*

d. ¿Cómo podrías saber cuántos círculos hay en la figura 21 sin dibujarla?

porque multiplicamos por 3 y sumamos 1

$$3 \times 21 + 1 = 64$$

En la interacción con las estudiantes A<sub>6</sub> y A<sub>15</sub> se observa que, en un primer momento, orientaron su trabajo a buscar una figura cuyo total de círculos fuera 21, en lugar de determinar cuántos círculos contiene la figura número 21. Posteriormente, al analizar visualmente las representaciones, identificaron que la secuencia crece “de tres en tres”, lo cual comprobaron agrupando los círculos de cada figura en conjuntos de tres y notar que siempre queda un círculo sobrante. A partir de este análisis, plantearon que si  $7 \times 3 = 21$ , entonces debían añadir el círculo que siempre sobra en cada figura, lo que las llevó a considerar la expresión  $21 + 1$ , aunque aún bajo la idea inicial de “buscar una figura que diera 21 círculos”. Tras la interacción con la estudiante A<sub>14</sub>, lograron revisar su interpretación y reorientar su razonamiento hacia la figura 21. Una vez aclarada la intención de la actividad, A<sub>6</sub> y A<sub>15</sub> consiguieron enunciar de manera explícita la regla que generaliza el patrón “multiplicar por 3 y sumar 1” como se evidencia en la Figura 28. Esta afirmación, basada en el análisis estructural del crecimiento de la secuencia, evidencia más una generalización de naturaleza algebraica que aritmética, puesto modela la situación para cualquier término.

**Figura 29***Producción del estudiante A<sub>6</sub>. Taller 2*

Diego debe colocar 21 círculos bajando y 43 horizontales

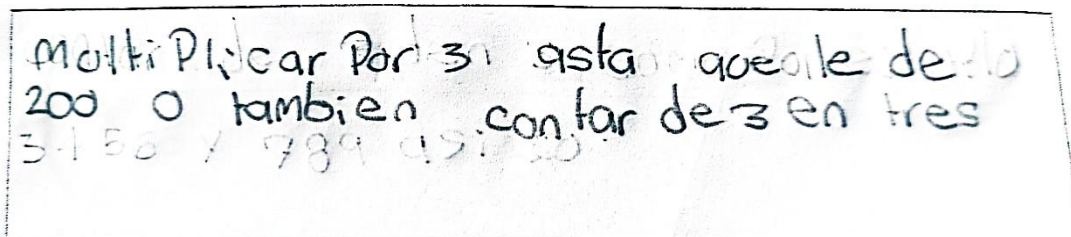
$$\begin{array}{r} 43 \\ + 21 \\ \hline 64 \end{array}$$

En el ítem f, que solicita a los estudiantes explicar con palabras cómo podrían construir la figura 21 de la secuencia, la mayoría interpretó que debían calcular la cantidad total de círculos y no la descripción del proceso de construcción de la figura 21. Por ello, sus respuestas se centraron en el conteo o en operaciones aritméticas, por ejemplo, “contando de 3 en 3” o “ $21 \times 3 = 63 + 1 = 64$ ” (ver figura 28). En contraste, dos estudiantes lograron reconocer la intención del ítem y describieron el proceso de construcción obteniendo respuestas como: “debe hacer la primera figura e ir sumándole

por cada lado 1 hasta 21”, evidenciando que reconoce la estructura de la secuencia figural, en la que cada figura incorpora un círculo adicional en cada “lado”, de modo que la figura 21 tendría 21 círculos por lado. En el caso del otro estudiante, escribe: “Diego debe colocar 21 círculos bajando y 43 horizontal” como se evidencia en la Figura 29, el estudiante reconoce la estructura espacial de forma vertical y horizontal, a diferencia del estudiante anterior, quien describe la figura considerando tres.

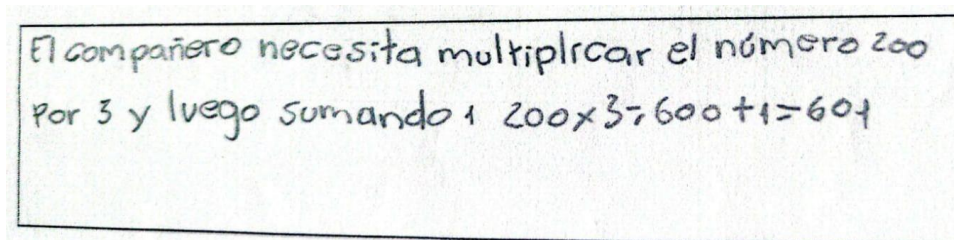
### Figura 30

Producción del estudiante  $A_{20}$ . Taller 2



### Figura 31

Producción del estudiante  $A_{22}$ . Taller 2



En el último ítem del taller, la mayoría de producciones se ubican en niveles de razonamiento factual y contextual, expresándose mediante acciones como: “contar de 3 en 3” o “sumar 3 infinitamente”, lo cual muestra que los estudiantes reconocen el patrón, pero desde procedimientos repetitivos. No obstante, algunas respuestas comienzan a avanzar hacia un pensamiento más algebraico. Esto se evidencia en la Figura 30 donde el estudiante  $A_{20}$  escribe: “multiplicar por 3 hasta que de 200 o también contar de 3 en 3” lo que indica que empieza a reconocer una relación más generalizable. Por otro lado, en la Figura 31, el estudiante  $A_{22}$  :“El compañero necesita multiplicar el número por 3 y luego sumando 1  $200 \times 3 = 600 + 1 = 601$ ” identifica una estructura funcional del tipo  $3x + 1$ . Que, aunque el estudiante no use símbolos alfanuméricos en este caso logra establecer la relación entre las variables encontrado una regla generalizando la expresión (Angarita, 2024).

## 5.4.3. Taller 3

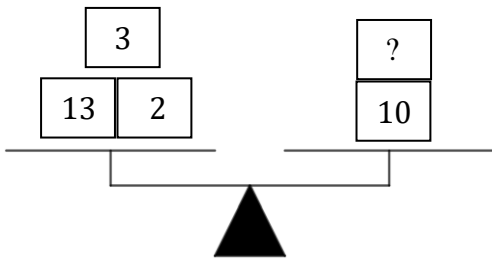
### 5.4.3.1. Análisis a priori del Taller 3

Este taller introduce situaciones en las que el estudiante debe establecer relaciones de equivalencia entre expresiones numéricas. Esto resulta fundamental para fomentar el pensamiento relacional en contextos de igualdades y sentencias numéricas, en los que la aplicación de procedimientos se sitúa en un segundo plano y se prioriza el análisis de las relaciones entre las expresiones involucradas.

- Juan afirma que sumar  $2 + 6 + 4$  da el mismo resultado que sumar  $11 + 1$ .  
¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta

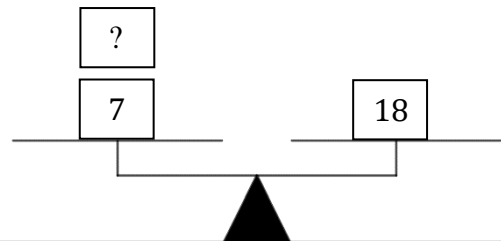
- Observa las siguientes balanzas y encuentra el número que las equilibra.

a.



Halla el número que falta y justifica tu respuesta:

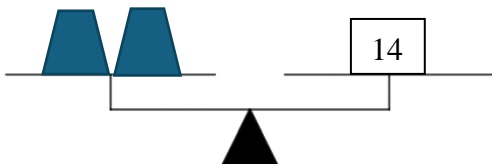
b.



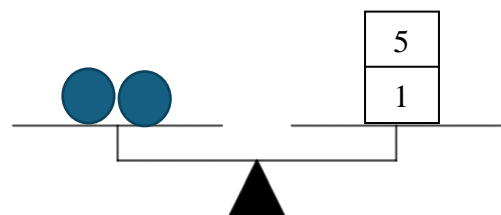
Halla el número que falta y justifica tu respuesta:

- Halla cuánto vale cada figura y justifica tu respuesta.

a.



b.



4. Tengo suficientes monedas de 100, 200 y 500. Necesito cancelar 1500 con estas monedas y debe haber por lo menos una moneda de cada denominación. ¿Como lo puedo hacer? Haz una lista de todas las posibilidades.
5. Observa las siguientes equivalencias y determina si son verdaderas o falsas
  - a.  $9 + 3 = 3 + 9$
  - b.  $81 = 8 + 1$
  - c.  $1 + 2 + 4 = 1 + 6$
  - d.  $5 + 4 = 9 + 1$

En el primer ítem se busca que los estudiantes comparen las expresiones  $2 + 6 + 4$  y  $11 + 1$  y justifiquen si ambas son equivalentes. Se espera, por ejemplo, que realicen las operaciones y concluyan que las dos expresiones producen el mismo valor, reconociendo que, aunque tienen estructuras distintas, representan el mismo resultado. De este modo, el ítem apunta a que los estudiantes identifiquen que diferentes combinaciones aditivas pueden generar un mismo número y que la equivalencia no depende de la forma de la expresión, sino de la relación de igualdad entre sus valores.

En concordancia con Anglada (2017), se propusieron las tareas 2 y 3 relacionadas con el uso de balanzas para que los estudiantes perciban la igualdad como equilibrio. En la segunda tarea se espera que comparen expresiones numéricas y expliquen qué número permite que ambas partes sean equivalentes. Por ejemplo, podrían razonar que si " $13 + 2 + 3 = 18$  y en el otro lado aparece 10, entonces falta 8 para que quede igual", concluyendo así que el valor que equilibra la balanza es 8, y proceder de manera similar en el otro ítem de la tarea.

Por su parte, en la tercera tarea se plantea que los estudiantes determinen el valor de las figuras que equilibran la balanza. Por ejemplo, podrían decir: "si entre las dos figuras suman 14, entonces cada una vale 7 porque 14 dividido en dos da 7", o, en el otro ítem, podrían argumentar: "si  $1 + 5 = 6$  en el otro lado, entonces cada figura vale 3 porque son dos figuras y 6 dividido en dos da 3".

Posteriormente, en la cuarta tarea, donde los estudiantes deben cancelar \$1500 usando monedas de \$100, \$200 y \$500 asegurando que haya por lo menos una de cada denominación, el propósito es que exploren diferentes combinaciones y comparen sus resultados. Esta actividad busca que reconozcan que distintas descomposiciones numéricas pueden representar el mismo valor, reforzando la idea de equivalencia aritmética desde una situación cotidiana.

Finalmente, en la última tarea, donde los estudiantes deben determinar si ciertas equivalencias son verdaderas o falsas, el propósito es que expliquen y justifiquen las relaciones que establecen entre las expresiones presentadas. Se busca que argumenten por qué consideran que una igualdad se mantiene o no, evidenciando una comprensión de la equivalencia como relación entre expresiones.

### 5.4.3.2. Análisis a posteriori del Taller 3

El propósito de esta pregunta es introducir el concepto de igualdad entre expresiones numéricas, incitando a los estudiantes a analizar si dos sumas diferentes pueden generar el mismo resultado y justificar su respuesta.

#### Figura 32

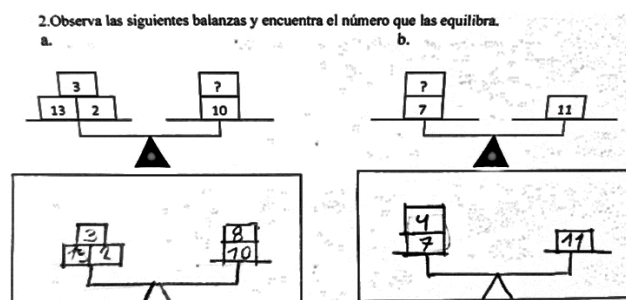
Producción del estudiante  $A_{20}$ . Taller 3, tarea 1

9; Porque da el mismo resultado

En la primera tarea de este taller, ningún estudiante presentó dificultades para reconocer que las expresiones  $2 + 6 + 4$  y  $11 + 1$  son equivalentes, dado que ambas conducen al mismo resultado. Ante preguntas como ‘¿importa que en las dos expresiones estén sumando cantidades diferentes?’, los estudiantes respondían: ‘No, no importa porque dan el mismo resultado’. Cuando se les preguntaba qué ocurriría si se modificara alguno de los números, varios estudiantes señalaban que, en ese caso, las expresiones dejarían de ser equivalentes; por ejemplo, comentaban que, si en lugar de 11 se tuviera 10, entonces  $10 + 1$  daría 11 y ya no coincidiría con el resultado de la otra expresión.

#### Figura 33

Producción del estudiante  $A_2$ . Taller 3, tarea 2



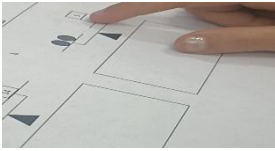
En la segunda tarea del taller, que consistía en hallar un número tal que equilibrara la balanza, los estudiantes no presentaron dificultades para determinar el valor que mantiene la equivalencia en los dos ítems. Por ejemplo, en la Figura 33 la estudiante  $A_2$  expresó: “Aquí, sumando todo esto da 18, y aquí hay 10; para que dé el mismo resultado, tiene que acá uno poner 8 para que dé 18, para que la balanza se equilibre.” Esta respuesta evidencia un razonamiento basado en la compensación de cantidades, mediante el cual la estudiante no se limita solo a efectuar cálculos, sino que establece una relación entre las cantidades de ambos lados con el propósito de mantener el equilibrio. De manera similar,

los demás estudiantes resolvieron el segundo ítem aplicando este mismo tipo de razonamiento.

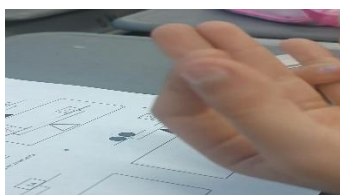
En la tercera tarea de este taller se buscaba trabajar la noción de equivalencia junto con el uso de incógnitas, con el propósito de favorecer el desarrollo del pensamiento relacional, promoviendo el establecimiento de igualdades entre cantidades e incógnitas representadas mediante figuras. En las producciones de la mayoría, se observa que los estudiantes hallaban el valor de cada figura mediante expresiones de equivalencia, como “porque  $7 + 7 = 14$ , que es lo mismo que del otro lado” o “porque  $3 + 3 = 6$  y da lo mismo que  $5 + 1 = 6$ ”, evidenciando cómo comienzan a explicitar y objetivar sus razonamientos, un paso clave para la comprensión de relaciones matemáticas.

**Tabla 9**

*Interacción con el estudiante A<sub>14</sub>. Taller 3, tarea 3*

L1	A <sub>14</sub> : ¿Cuál es la mitad de 5 y 1? ¿O solamente 5?
L2	Profesora: ¿Qué es lo que estás intentando hacer?
L3	A <sub>14</sub> : ¿Cuál será la mitad para poder saberlo más rápido [señala el 5]?
	
L4	Profesora: ¿Cuál número?
L5	A <sub>14</sub> : Este [señala el 1 y el 5], 5 y 1, ¿sería como 6? Se combinan y se forma 6.
L6	Profesora: ¿Cómo así que se combinan?
L7	A <sub>14</sub> : Digo 1 y 5, ¿15? ¿O cuál es la mitad de 15?
L8	Profesora: ¿Por qué crees que se combinan como si fueran 15?
L9	A <sub>14</sub> : Porque acá solamente hay un dígito y están unidos [señala el número 14 del ítem a], entonces se pondrían así unidos.
L10	Profesora: Pero acá [señala el 1 y el 5], por ejemplo, están separados, no están unidos.
L11	A <sub>14</sub> : Entonces, la mitad de 5 y la mitad 1.
L12	Profesora: ¿Para qué estas hallando la mitad de 5?
L13	A <sub>14</sub> : Para hallar el número, porque acá [señala el ítem a] también la mitad de 14 es 7.
L14	Profesora: Pero mira, acá hay un 5 y un 1, entonces, ¿qué puedes hacer ahí?
L15	A <sub>14</sub> : Ahhh, entonces este número [señala el 5] con este [señala una de las figuras], y este [señala el 1] lo dejo con este [señala la otra figura].
L16	Profesora: Bueno... te están preguntado cuando vale cada figura.
L17	A <sub>14</sub> : Cada figura... esta [señala la figura del ítem a], cada figura vale 7 porque la mitad de 14 es 7
L18	Profesora: ¿Y por qué la mitad de 14?
L19	A <sub>14</sub> : No sé... porque digamos que las dos valen 14, entonces mitad y mitad a cada una.
L20	Profesora: Si, las dos valen 14...

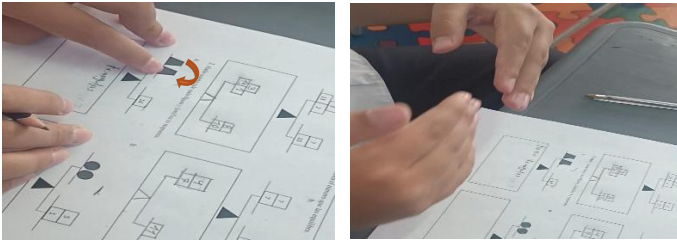

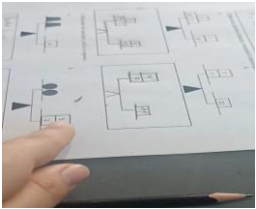
L21	$A_{14}$ : No, una vale 14, la otra hay que compartir, entonces se quedan con mitad y mitad para que fuera más fácil. La mitad de 14 es 7, y aquí sí ya no entiendo, porque acá [señala el 1 y el 5] ya es de dos... la mitad de 5 es 2.5, colocaría ahí.
L22	Profesora: ¿Qué significa ese 2.5?
L23	$A_{14}$ : La mitad de las bolitas.
L24	Profesora: ¿Y qué hacemos con el 1 de allá?
L25	$A_{14}$ : No sé...no sé qué hacer... pues se lo agrego para que combinen 6, y la mitad de 6 es 3.
L26	Profesora: ¿Y qué significa ese 3 entonces?
L27	$A_{14}$ : Pues, digamos, él tiene 6 y le comparten entonces 3 y 3, y quedan iguales
L28	Profesora: ¿Y si le agregara otra bolita?
L29	$A_{14}$ : La mitad de 6 es 3... le quitaría 2[forma grupos de a dos con los dedos], cada una quedaría con 2,2,2.



En la interacción con la estudiante  $A_{14}$  se observa que intenta extrapolar la estrategia utilizada en el ítem a: al ver el número 14 en el lado derecho de la balanza, asigna este valor a una de las figuras y divide la cantidad restante entre las demás para mantener el equilibrio, de manera que cada figura vale 7. Sin embargo, al enfrentarse a un segundo ítem con una estructura diferente (1+5) en el lado derecho, tiende a aplicar la misma estrategia de manera directa, dividiendo el número 5 y asignando 2,5 a una de las figuras. Otra de las estrategias que utiliza consiste en asignar directamente cada número a una figura, de modo que una bolita vale 5 y la otra 1.

No obstante, a través de las preguntas guiadas por la docente, la estudiante comienza a objetivar su pensamiento: analiza la situación y expresa explícitamente su razonamiento, como se evidencia en la línea 24 cuando dice: “pues se lo agrego para que combinen 6, y la mitad de 6 es 3”. Del mismo modo, al responder a la situación “¿Y si le agregara otra bolita?”, recurre a acciones factuales, como agrupar los dedos de dos en dos, para representar el valor de cada bolita. De esta manera, mediante la guía docente, su razonamiento se transforma en un objeto de conocimiento visible y compartible, facilitando la construcción y comprensión de relaciones de equilibrio en la balanza.

**Tabla 10***Interacción con el estudiante A<sub>25</sub>. Taller 3, tarea 3*

L1	A <sub>25</sub> : En estos dos [señala las figuras] será que hay 7 en cada uno porque $7 \times 1$ , $7$ y $7 \times 2 = 14$ , será que puede ser 7 en cada uno de estos para que de 14 y pues este liviano [Usa las manos para representar el equilibrio de la balanza].
	
L2	Profesora: ¿Por qué crees debe haber 7 en cada una?
L3	A <sub>25</sub> : Porque esta liviano y $7 \times 1$ da 7 y $7 \times 2 = 14$ .
L4	Profesora: ¿Cómo así que esta liviano?
L5	A <sub>25</sub> : Que esté... igual.
L6	Profesora: ¿Y qué tiene que ver con que este igual?
L7	A <sub>25</sub> : Que debería tener el mismo peso.
L8	Profesora: Ok... debería tener el mismo peso.
L9	A <sub>25</sub> : Use la lógica de la gravedad, porque la gravedad mantiene el peso [mueve las manos para representar el movimiento de una balanza], entonces eso esta liviana y eso es lo que pienso.
	
L10	Profesora: ¿Y ahora para esta [señala el segundo ítem de la tarea 3]?
	
L11	A <sub>25</sub> : Pues 3, porque $5 + 1$ da 6 y pues si dividimos 6 da 3.
L12	Profesora: ¿Y si hubiera, por ejemplo, otro círculo ahí?
L13	A <sub>25</sub> : ... creo que debería ser los 6 completos.
L14	Profesora: ¿Cómo así que 6 completo?
L15	A <sub>25</sub> : ... de pronto hubiera que aumentar otro número más.
L16	Profesora: ¿Cómo así que aumentar otro número más?
L17	A <sub>25</sub> : Pues estos dos son 6 [señala las dos figuras], y 6 queda igual.
L18	Profesora: ¿Qué pasaría si estos fueran 6 [señala las figuras]?, o sea, ¿te refieres a que cada uno es 6 o los dos son 6?
L19	A <sub>25</sub> : Los dos son 6, para que este liviano.

L20	Profesora: ¿Qué pasaría si cada una fuera 6[señala las figuras]?
L21	A <sub>25</sub> : Pues terminaría este [señala las figuras] más pesado.
L22	Profesora: ¿Y cómo podrían tener el mismo peso?
L23	A <sub>25</sub> : ... yo digo que deberíamos aumentarle otro número, o sea, otra bolita; nos toca aumentarle otro número.
L24	Profesora: O sea, dices que, si le pongo otra bolita acá [señala las figuras], debo aumentar...
L25	A <sub>25</sub> : Un número para que quede...
L26	Profesora: ¿Y cuánto le aumentarías?
L27	A <sub>25</sub> : Yo le aumentaría 6... ah no, si cada una es 6... ¿qué número le aumentaría? ... entonces debería aumentarle 12, porque 12... debería aumentarle; 15+6 da 21, y las tres dan 21[señala las figuras].
L28	Profesora: ¿Cómo así? explícalo mejor.
L29	A <sub>25</sub> : Porque $6 \times 1$ 6, $6 \times 2$ 12, y $6 \times 3$ 21, ah no, 18. Pues hay puedo utilizar el 12.
L30	Profesora: Y si, por ejemplo, no pudieras agregar nada acá [señala la parte derecha de la balanza], o sea, necesariamente debe ser 6, y acá se le agregara otra bolita, entonces, ¿cómo podrías hallar cuánto vale cada bolita?
L31	A <sub>25</sub> : Pues porque si lo tenemos así y le meto otra bolita, empieza a caer, porque el peso pesa más que este [señala las figuras]. Entonces ahí puedo darme cuenta que si esta, y esta son 3 y este es otro 3 y como es más peso se cae este [Señala las figuras] y sume este para arriba.
L32	Profesora: Tú me dices que esos valen 3, ¿no?, imaginemos que todavía no tienen un valor, y yo le agrego otra bolita, y necesitamos que estén del mismo peso.
L33	A <sub>25</sub> : ... entonces se debería ser cada bolita de a 2. Si necesariamente necesitamos que quede igual necesitamos que la otra bolita valga 2 y las otra dos valgan 2, para que queden del mismo peso.

En la interacción con el estudiante A<sub>25</sub>, se observa que en el primer ítem de la tercera tarea no presenta dificultades para determinar el valor de cada figura, concluyendo que cada una vale 7 y que, como son dos entonces  $7 \times 2 = 14$ , manteniendo la equivalencia de la balanza. Además, complementa su razonamiento con acciones factuales como gestos y deícticos espaciales —por ejemplo, el uso de las manos para representar el equilibrio de la balanza y el empleo de expresiones como “acá” y “este” para señalar elementos concretos—. Las acciones corpóreas funcionan como representaciones no simbólicas que le permiten expresar de manera intuitiva la idea de equivalencia, mientras que los deícticos cumplen una función referencial que contribuye a situar los objetos y relaciones en el espacio de la interacción.

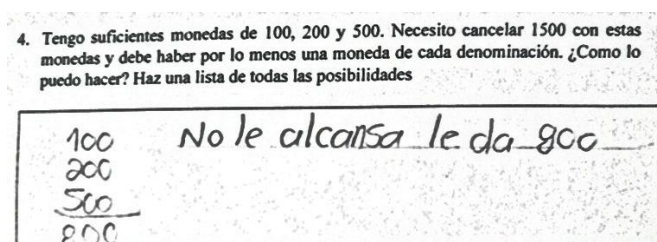
Ahora, en el segundo ítem de la tercera tarea, donde debían hallar el valor de las figuras(círculos) teniendo en cuenta la expresión del lado derecho ( $1 + 5$ ), el estudiante suma los números teniendo como resultado 6 y luego dividiéndolo entre las dos figuras obtenido que cada figura vale 3. Ante la pregunta de la docente “¿Y si hubiera, por ejemplo, otro círculo ahí?”, A<sub>25</sub> intenta ajustar las cantidades realizando operaciones aditivas y multiplicativas. Este comportamiento evidencia un avance en la comprensión

relacional de la igualdad, pues pasa de pensar en “hallar un número para mantener la igualdad” a razonar proporcionalmente sobre cómo modificar una cantidad cuando se altera el número de elementos.

Además, el estudiante recurre a términos físicos como “gravedad”, “liviano” y “peso” para explicar los momentos de equilibrio y desequilibrio. Aunque estas expresiones no son formales, revelan su esfuerzo por justificar la relación de igualdad mediante argumentos vinculados al contexto físico de la balanza.

### Figura 34

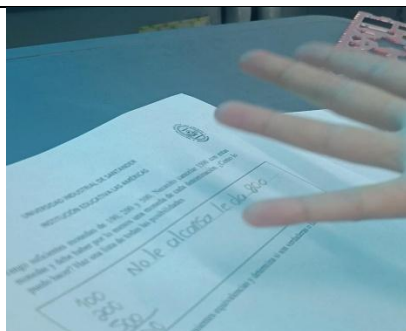
Producción del estudiante  $A_{14}$ . Taller 3, tarea 4



### Tabla 11

Interacción con el estudiante  $A_{14}$ . Taller 3, tarea 4

L1	$A_{14}$ : Dice: “tengo suficientes monedas de 100,200 y 500 para que, de 1500”, pero le da 800, no le alcanza.
L2	Profesora: Pero dice que tengo suficientes monedas, o sea, tengo muchas de 100,200 y 500.
L3	$A_{14}$ : ¿Ah, de cada una?
L4	Profesora: Siii.
L5	$A_{14}$ : Entonces sí le daría
L6	Profesora: ¿Cómo le daría?
L7	$A_{14}$ : Con dos de 500[señala el número 500], y dos de 200[señala el número 200] y una de 100[señala el número 100].
L8	Profesora: ¿Y esa es la única manera que yo podría obtener 1500?
L9	$A_{14}$ : Nooo ... otra manera, 2 y 2 4, 2,4,6,8,10[cuenta de 2 en 2 con los dedos], listo ya tengo los 10 en 200, y aquí es 1,2,3,4,5[cuenta con los dedos] ya 1500 con las de 200 y con las de 100.



L10	Profesora: O sea, ¿existen diferentes formas de llegar a 1500?
L11	A <sub>14</sub> : Siii

Con respecto a la cuarta tarea, varios estudiantes presentaron dificultades para interpretar la intención del enunciado. Algunos se limitaron a sumar directamente los valores  $100 + 200 + 500$  y concluyeron que “no alcanza” porque el total es 800, como ocurre inicialmente con el estudiante  $A_{14}$  (ver Figura 34). Sin embargo, a partir de la intervención de la profesora (L2), el estudiante comienza a reconsiderar la situación y a reconocer que dispone de múltiples monedas de cada denominación (L3–L7), lo que le permite proponer una primera combinación válida para obtener 1500. Posteriormente, ante la pregunta de si existe una única manera de llegar al total (L8), el estudiante identifica otra combinación posible mediante conteos sucesivos de monedas de 200 y 100 (L9); aunque en este caso omite el uso de las monedas de 500, su respuesta evidencia que empieza a explorar distintas descomposiciones aditivas que pueden alcanzar el mismo valor total. Finalmente, en L10-L11 el estudiante reconoce explícitamente que existen diversas formas de obtener 1500, mostrando un avance significativo respecto a su interpretación inicial del problema.

### Figura 35

Producción del estudiante  $A_{25}$ . Taller 3, tarea 4

4. Tengo suficientes monedas de 100, 200 y 500. Necesito cancelar 1500 con estas monedas y debe haber por lo menos una moneda de cada denominación. ¿Como lo puedo hacer? Haz una lista de todas las posibilidades

$$\begin{array}{l}
 200 + 700 + 500 + 200 + 200 + 100 + 200 = 1500 \\
 500 + 500 + 200 + 200 + 100 = 1500 \\
 200 + 200 + 100 + 200 + 200 + 700 + 500 = 1500
 \end{array}$$

Asimismo, en la Figura 35 se observa la producción del estudiante  $A_{25}$ , quien generó distintas combinaciones de monedas que suman exactamente 1500 y, además, respetó la condición de incluir al menos una moneda de cada denominación (100, 200 y 500). Su respuesta evidencia una mayor flexibilidad para explorar diversas descomposiciones aditivas del número 1500, en contraste con otros estudiantes que se limitaron a realizar cálculos directos o pasaron por alto alguna de las condiciones planteadas.

**Figura 36**

Producción del estudiante  $A_{18}$ . Taller 3, tarea 5

5. Observa las siguientes equivalencias y determina si son verdaderas o falsas
- $9 + 3 = 3 + 9$  ✓
  - $81 = 8 + 1$  ✗
  - $1 + 2 + 4 = 1 + 6$  ✓
  - $5 + 4 = 9 + 1$  ✗
  - $7 + 3 = 8 + 10$  ✗

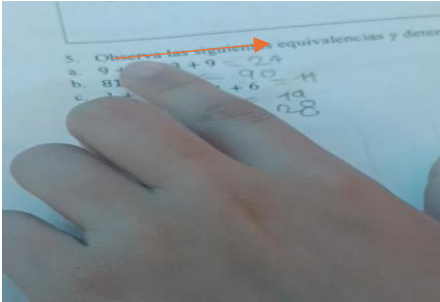
**Tabla 12**

Interacción con el estudiante  $A_{18}$ . Taller 3, tarea 5

L1	$A_{18}$ : $3 + 9$ da 12 y $9 + 3$ da 12.
L2	Profesora: Pero yo veo que ahí los números están como intercambiados ¿no?
L3	$A_{18}$ : ...
L4	Profesora: Crees que eso afecta la igualdad
L5	$A_{18}$ : No, porque da el mismo resultado
L6	Profesora: ¿Y qué tiene que ver con que dé el mismo resultado?
L7	$A_{18}$ : Porque así sumemos este [señala el 3 de la parte derecha de la igualdad] y este [señala el 9 de la parte derecha de la igualdad]... da 12 y sumamos estos [señala la expresión $9 + 3$ ] también da 12.
L8	Profesora: Y si yo colocara por ejemplo aquí no 3 [señala el 3 de la parte derecha de la igualdad] si no 12 por ejemplo, o sea si reemplazo ese 3 por el 12.
L9	$A_{18}$ : Pues sería 20, porque acá sería 20 [señala la expresión derecha de la igualdad] y acá 12 [señala la expresión derecha de la igualdad] entonces no será lo mismo, sería diferente resultado.

En general, en esta última tarea los estudiantes lograron identificar con facilidad si las igualdades propuestas eran verdaderas o falsas (ver Figura 36), apoyándose principalmente en la comparación de los resultados que obtenían al efectuar las operaciones. Cuando se les preguntaba por qué consideraban que una igualdad era correcta o si el orden de los términos importaba, en varios casos respondían que “si eran iguales porque daban el mismo resultado” o que orden de los términos no importaban por que “era parecido a la multiplicación” haciendo referencia que en la multiplicación no importa el orden de los factores puesto que da el mismo resultado. El diálogo con el estudiante  $A_{18}$  ilustra esta forma de razonar: al analizar la igualdad  $9 + 3 = 3 + 9$ , reconoce que ambas expresiones dan 12 y, aunque la profesora señala que los números están intercambiados, la estudiante sostiene que esto no afecta la igualdad porque el resultado permanece igual. Además, cuando se le plantea modificar uno de los valores, por ejemplo, reemplazar el 3 por un 12, concluye que la igualdad dejaría de ser verdadera, pues los resultados ya no coincidirían

**Tabla 13***Interacción con el estudiante A<sub>20</sub>. Taller 3, tarea 5*

<b>L1</b>	Profesora: Acá, ¿por qué 24?
<b>L2</b>	A <sub>20</sub> : Porque esto da 24[señala toda la expresión con el dedo].
	
<b>L3</b>	Profesora: ¿Y qué estás haciendo ahí para que te de 24?
<b>L4</b>	A <sub>20</sub> : Sumando [señala toda la expresión con el dedo].
<b>L5</b>	Profesora: ¿Y qué haces con este igual?
<b>L6</b>	A <sub>20</sub> : ¿Lo sumo?
<b>L7</b>	Profesora: ¿Por qué lo sumas?
<b>L8</b>	A <sub>20</sub> : Porque tengo que sumar estos dos [Señala la expresión que está en el lado derecho del igual] para que me dé el resultado.
<b>L9</b>	Profesora: Ok... ¿y por qué tienes que sumar esos dos [Señala la expresión que está en el lado derecho del igual]?
<b>L10</b>	A <sub>20</sub> : ... Porque aquí tiene que sumar para ver si son verdaderas o falsas.
<b>L11</b>	Profesora: Pero yo aquí veo un igual, ¿qué significa ese igual para ti?
<b>L12</b>	A <sub>20</sub> : Pues lo que da este resultado, pero ese resultado no da este número [señala el 3 que está a la derecha del signo igual]
<b>L13</b>	Profesora: ¿Entonces que da?
<b>L14</b>	A <sub>20</sub> : Da 12
<b>L15</b>	Profesora: 12... y está el igual, ¿igual a qué?
<b>L16</b>	A <sub>20</sub> : ... tengo que... es la misma suma, pero simplemente diferentes números, o sea, 9 + 3 y 3 + 9. Por eso colocan el igual, para separarlos.
<b>L17</b>	Profesora: Ok... dices que esto [señala la expresión izquierda de la igualdad] es igual a esto [señala la expresión derecha de la igualdad], ¿sí? ¿Y crees que eso es igual a 24?
<b>L18</b>	A <sub>20</sub> : Sí
<b>L19</b>	Profesora: ¿Por qué?
<b>L20</b>	A <sub>20</sub> : Porque estamos sumando diferentes números

En el caso del estudiante A<sub>20</sub>, se evidencia que interpreta la igualdad centrándose en el resultado de una operación. Al sumar  $9 + 3$  obtiene 12, pero al observar que en el otro lado del signo igual aparece un 3 y no el 12, asume que también debe incorporarlo al cálculo, interpretando el “=” como la continuación de la suma. De manera similar, resuelve otros ítems, como el ítem b ( $80 = 8 + 1$ ), en el cual no verifica si la igualdad es verdadera o falsa; en su lugar, suma todos los números y obtiene 90. Esto muestra que

su comprensión del signo igual sigue centrada en el cálculo y no en la relación de equivalencia entre expresiones.

#### 5.4.4. Taller 4

##### 5.4.4.1. Análisis a priori del Taller 4




En este taller se plantean igualdades que permiten introducir la resolución de ecuaciones a partir de incógnitas representadas mediante figuras y letras, con el propósito de que los estudiantes identifiquen relaciones numéricas, determinen valores desconocidos y justifiquen sus procedimientos.

- Halla cuanto equivale cada figura y escribe como hallaste la respuesta.

$$\heartsuit + \heartsuit + \heartsuit = 12$$

$$\smiley + \smiley - \heartsuit = 6$$

$$\lightning + \smiley + \heartsuit = 10$$

 = <input type="text"/>	 = <input type="text"/>
 = <input type="text"/>	<input type="text"/>

- Resuelve las siguientes ecuaciones

a.  $25 + \triangle = 51$

b.  $62 - \odot = 1$

¿Qué número representa el triángulo?

¿Qué número representa el sol?

- Resuelve la siguiente ecuación

$$x + 5 = 12$$

¿Qué número representa la letra  $x$ ?

Justifica tu respuesta.

- Diego resolvió la ecuación  $x + x = 12$  y afirmó que el valor de  $x$  es 5.

¿Consideras que su resultado es correcto? Justifica tu respuesta.

En la primera tarea se plantea un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas representadas por figuras, con el objetivo de introducir de manera visual e intuitiva y de forma conjunta el concepto de incógnita y la idea de igualdad, fomentando así el

desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Una posible estrategia de los estudiantes para la solución de esta primera tarea podrá ser el observar que la suma de los tres corazones es igual a 12, lo que los podría llegar a deducir que cada corazón representa el número 4. Luego, al reemplazar este valor en la segunda igualdad, deben encontrar el número que, sumado dos veces y restando 4 (el valor del corazón), dé como resultado 6, obteniendo así el número 5. Finalmente, al sustituir estos valores en la última igualdad, determinan que la figura del rayo representa el número 1.

De manera similar, las siguientes ecuaciones tienen como objetivo incentivar a los estudiantes a transitar del uso de incógnitas representadas mediante figuras al uso de letras que las simbolizan, promoviendo así el desarrollo del pensamiento relacional y la capacidad de abstracción. En estas actividades, los estudiantes deben resolver ecuaciones con una sola incógnita, relacionando las letras con los valores desconocidos y justificando cómo llegaron a sus soluciones fortaleciendo la noción del signo igual como una relación de equivalencia y avanzando hacia un razonamiento más simbólico y generalizado.

#### 5.4.4.2. Análisis a posteriori del Taller 4

**Figura 37**

*Producción del estudiante A<sub>1</sub>. Taller 4, tarea 1*

The figure shows three equations written in blue ink:

$$\heartsuit + \heartsuit + \heartsuit = 12$$

$$\smiley + \smiley - \heartsuit = 6$$

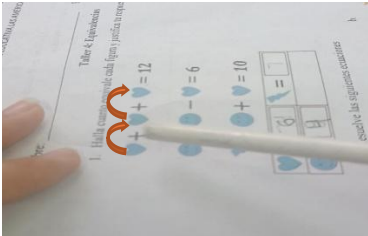
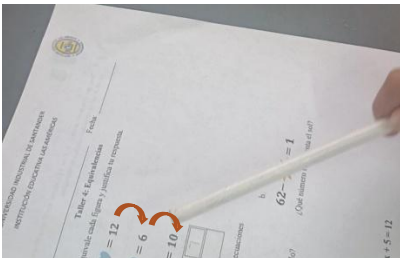
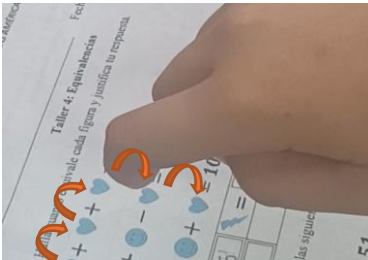
$$\lightning + \smiley + \heartsuit = 10$$

Below the equations is a legend table with two rows and two columns:

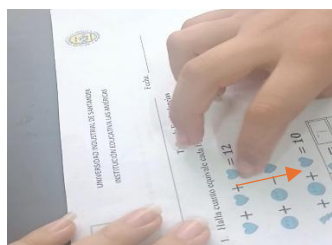
$\heartsuit =$	4	$\lightning =$	5
$\smiley =$	1		

En la primera tarea, la mayoría de los estudiantes no presentó dificultades para reconocer que una figura podía representar un valor numérico. De hecho, identificaron con rapidez que cada corazón equivalía a 4, al observar que la suma de tres corazones daba como resultado 12. No obstante, al llegar a la segunda ecuación (en la que se suman dos caritas felices y se resta un corazón) surgieron dificultades conceptuales. En particular, muchos estudiantes interpretaron el signo “menos” como si fuera una suma, de modo que, en lugar de buscar un número que, al sumarlo dos veces y restarle 4 (valor del corazón), diera como resultado 6, procedían a sumar 4 en lugar de restarlo. Bajo esta interpretación errónea, concluían que el número que debía asignarse a la carita feliz era 1, ya que “dos veces 1 más 4 es 6” (ver Figura 37). Este error evidencia que, aunque los estudiantes lograron comprender la asignación de valores a las figuras en situaciones simples, aún muestran dificultades en el manejo de operaciones con distintos signos dentro de una misma ecuación.

**Tabla 14***Interacción con los estudiantes  $A_1$  y  $A_{23}$ . Taller 4, tarea 1*

L1	Profesora: ¿Qué están haciendo los corazones?
L2	$A_1$ : Que están sumando y me dio 12. Acá yo pienso que es $3 + 3 + 6$ , sería 12.
	
L3	Profesora: Ok...
L4	$A_1$ : Y aquí sería 3 [señala la primera carita feliz de la segunda ecuación], 1 [señala la segunda carita feliz de la segunda ecuación] y 2 [señala el corazón de la segunda ecuación]
L5	Profesora: ¿Por qué $3 + 3 + 6$ ?
L6	$A_1$ : Porque se me vino a la cabeza
L7	Profesora: Pero eso tiene que tener alguna razón...
L8	$A_1$ : Profe, es que usted siempre me confunde más.
L9	Profesora: Bueno... se están sumando los corazones [señala la primera ecuación]... ¿Cuántos corazones son?
L10	$A_1$ : Son 12, y aquí son 6 y aquí 10 [señala los resultados de las ecuaciones].
	
L11	Profesora: Estás sumando 3 corazones, ¿no? Y esos 3 corazones deben ser igual a 12.
L12	$A_1$ : Profe, yo diría que es 1,2,3,4,5 [cuenta los corazones] y aquí sería 1,2,3 [cuenta las caritas felices] y aquí sería 1 [cuenta el rayo].
	
L13	Profesora: ¿Cómo así? Explicame mejor
L14	$A_1$ : Cada uno equivale un punto y yo las cuento de uno en uno.
L15	Profesora: ... estamos primero en esta expresión [señala la primera ecuación]
L16	$A_{23}$ : es $4 + 4$ , 8 y 4, 12.
L17	Profesora: ¿Qué más?

L18	$A_{23}$ : ...
L19	Profesora: ¿Por qué $4 + 4 + 4$ ?
L20	$A_1$ : Él (Estudiante $A_{23}$ ) me dijo $2 + 2, 4; 2 + 2, 4;$ y $4 + 4, 8;$ y $2 \times 8. 16.$
L21	Profesora: ¿Y tú qué piensas sobre lo que tu compañero dice?
L22	$A_{23}$ : ...
L23	$A_1$ : Profe, una ayudita...
L24	Profesora: ... Estas sumando 3 corazones, eso está claro ¿no? Esos tres corazones deben ser igual a 12, o sea, la suma de esos 3 corazones debe ser igual a 12.
L25	$A_1$ : Y también ¿no se ha puesto a pensar si quitar esto [señala el tercer corazón de la ecuación] sería $6 + 6, 12$ de una vez?
L26	Profesora: ¿Cómo así?
L27	$A_1$ : Que si no huera esta fila [ señala la línea de corazones vertical] sería $6 + 6, 12.$



A diferencia de la mayoría de los estudiantes (quienes tendieron a asignar un único valor a cada tipo de figura), el estudiante  $A_1$  muestra una comprensión menos consolidada sobre lo que representan las figuras en las expresiones. Aunque reconoce que las figuras pueden representar valores, asigna distintos valores a una misma figura dentro de la misma ecuación. Por ejemplo, en L2 propone que los corazones podrían valer 3, 3 y 6 para justificar que  $3 + 3 + 6 = 12$ . Esta forma de proceder indica que, aunque el estudiante reconoce la necesidad de mantener la equivalencia, no logra establecer un criterio claro para determinar cuánto vale cada figura. De hecho, ante la pregunta de la profesora sobre la razón de los valores utilizados,  $A_1$  responde que “se le vino a la cabeza”, lo cual evidencia que su razonamiento se basa en intentos espontáneos más que en una interpretación estructural de la expresión.

Incluso cuando su compañero  $A_{23}$  propone que los cada uno de los corazones podrían valer 4, obteniendo así  $4 + 4 + 4 = 12$ ,  $A_1$  parece no asimilar esta idea. Posteriormente, al plantear que “si quitara esta fila sería  $6 + 6, 12$ ”, vuelve a modificar los valores asignados a las figuras sin sostener un criterio claro, lo cual indica que su atención se centra en ajustar números para obtener el resultado esperado y no en analizar la estructura de la relación entre las figuras. Es decir, el estudiante reconoce que las figuras pueden representar valores y que la expresión debe mantener la equivalencia, no establece un criterio claro que le permita interpretar y justificar de forma coherente los valores que le asigna a cada figura dentro de las ecuaciones.

**Figura 38**

Producción del estudiante  $A_{15}$ . Taller 4, tarea 2 y 3

2. Resuelve las siguientes ecuaciones

a.  $25 + \triangle = 51$   
 ¿Qué número representa el triángulo?  
 El triángulo equivale a 25

b.  $62 - \star = 1$   
 ¿Qué número representa el sol?  
 El sol equivale a 61

3. Resuelve la siguiente ecuación

$7 + 5 = 12$

¿Qué número representa la letra  $x$ ? Justifica tu respuesta.

El número que representa a la  $x$  equivale es el 7 siete para que de 12 el resultado final

En las tareas 2 y 3 de este taller, los estudiantes no presentaron dificultades para resolver las ecuaciones, asignando sin problema un valor tanto a las figuras como a la letra  $x$ . Por ejemplo, en la Figura 38, el estudiante  $A_{15}$  afirma: “El número que representa a la  $x$  es 7 para que dé 12 el resultado final”. Asimismo, cuando se les preguntaba si la  $x$  podía representar un valor, respondían afirmativamente. En el caso de la estudiante  $A_6$ , su comentario —“Mi hermana me explicó que las  $x$  también valen y pueden tener un valor”— sugiere que ha tenido experiencias previas con el uso de incógnitas y reconoce que la  $x$  puede representar un valor.

En contraste, en la prueba diagnóstica, particularmente en la tarea 5 (ítem e:  $5 + a + 6 = \_ + a$ ), los estudiantes no lograban concebir la  $a$  como una incógnita, sino únicamente como una letra sin valor numérico, expresando comentarios como “la  $a$  es una letra”. Estas respuestas evidenciaban resistencia a interpretar dicha letra como la representación de un número. Una posible explicación es que la estructura de la igualdad utilizada en la prueba diagnóstica podía permitir que la  $a$  tomara cualquier valor, lo que generó confusión, especialmente si los estudiantes seguían entendiendo la igualdad como el resultado de una operación. Otra hipótesis es que los estudiantes están más familiarizados con el uso de la  $x$  como incógnita y no han trabajado con otras letras, lo cual podría haber facilitado su interpretación en las tareas de este taller.

**Figura 39**

Producción del estudiante  $A_{25}$ . Taller 4, tarea 4

no porque el resultado de la  $x$  es 7 y no es 3.

En la última tarea de este taller, uno de los errores más comunes que presentaron los estudiantes fue asumir que la nueva situación estaba relacionada con la anterior y, por ello, trasladó directamente el valor de la  $x$  (7) sin analizar la estructura de la nueva

ecuación. Esto llevó a respuestas como la del estudiante  $A_{25}$  (ver Figura 39), quien escribió: “me parece el resultado de la  $x$  es 7 y no es 3”, evidenciando que no revisó la igualdad propuesta en esta tarea, sino que reutilizó el valor obtenido previamente.

**Tabla 15**

*Interacción con el estudiante  $A_6$ . Taller 4, tarea 4*

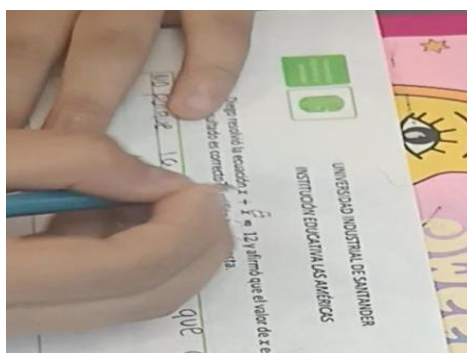
L1	Profesora: ¿Qué piensas de la situación?
L2	$A_6$ : No es correcto, porque hay solo dos $x$ ; ya que $3 + 3$ da 6, no nos alcanzaría 12. Entonces nosotras dijimos que era 6, ya que $6 + 6$ sí daría 12.
L3	Profesora: Ok... y si yo digiera que, por ejemplo, acá $3 + 9$ [señala la expresión $x + x$ ], ¿estaría bien o no?
L4	$A_6$ : Sería... sí, porque aquí podríamos colocar 9, y $9 + 3$ daría 12.
L5	Profesora: Aquí le estamos asignamos a este $x$ 3 y a este [señala el segundo $x$ ] 9, ¿no? Y si yo te preguntara ¿cuánto vale $x$ ?
L6	$A_6$ : Sería... o sea, ¿tienen que tener el mismo número?
L7	Profesora: ¿Por qué?
L8	$A_6$ : Porque se supone que... usted nos dice que cuánto valía $x$ , o sea, nos estaría preguntando por las dos $x$ ; si sumamos $9 + 3$ no se sabría cuál sería el resultado de la $x$ , en cambio 6 es el mismo 6 y sabemos que da $x$ .

Varios estudiantes señalaron que el valor de cada  $x$  era 6, basándose en que  $6 + 6 = 12$ . Sin embargo, cuando se les preguntó si también era válido asignar 3 a una  $x$  y 9 a la otra, muchos respondieron afirmativamente porque la suma igualmente daba 12. Esto evidencia que, cuando una misma incógnita se presenta varias veces en una expresión, algunos estudiantes interpretan que cada una puede tomar un valor distinto de manera independiente, siempre que el resultado final se mantenga.

Este mismo razonamiento se observa en la estudiante  $A_6$ , quien inicialmente también consideró válida la asignación de valores distintos a las  $x$  (L4). No obstante, cuando se le cuestionó cuánto valía  $x$  si una tomaba el valor de 3 y la otra el de 9 (L5), reconoció que la incógnita debía representar un único valor, puesto que asignar números diferentes impediría determinar con claridad el valor de  $x$  (L6-L8).

**Figura 40**

*Producción del estudiante  $A_6$ . Taller 4, tarea 4*



Otra respuesta significativa es la de la estudiante  $A_6$ , quien afirmó: “Por ejemplo, si esta  $x$  tuviera un sombrero así, ¿no? Ahí sí yo diría que  $3 + 9$ , pero como son iguales las  $x$ , ahí sí yo diría que  $6 + 6$ ; o sea, necesitaría otra letra o otro número”. Con esta explicación, la estudiante señala que solo sería válido asignar valores distintos (3 y 9) si las incógnitas fueran diferentes; es decir, si una de ellas tuviera algún “diferenciador”, como el “sombrero” (ver Figura 40) que menciona. En otras palabras, reconoce implícitamente que una misma incógnita debe mantener un único valor y que, para permitir otros valores, sería necesario introducir una nueva incógnita.

## 6. Conclusiones

Los resultados de la implementación muestran que los estudiantes de cuarto grado pueden avanzar en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano cuando se les propone un conjunto de tareas que fomentan la expresión y justificación de ideas matemáticas. En particular, las actividades centradas en la generalización de patrones y la equivalencia de expresiones permitieron identificar avances significativos, así como dificultades persistentes que orientan futuras propuestas de enseñanza.

La mayoría de los estudiantes utilizó generalizaciones aritméticas para continuar las secuencias, como sumar o contar 3 cada vez para hallar términos lejanos. Sin embargo, algunos lograron establecer generalizaciones más algebraicas, expresadas mediante reglas como “multiplico por 3 y sumo 1”, que permiten determinar cualquier término de la secuencia sin necesidad de escribir los términos anteriores. Este tipo de producción se considera una generalización algebraica temprana, ya que identifica regularidades y relaciones funcionales entre los términos, formulando estrategias que trascienden el cálculo de casos particulares.

En relación con las secuencias, se evidenció que varios estudiantes logran identificar patrones en secuencias de estructura simple (por ejemplo, 2, 5, 8...) donde reconocen el incremento de tres en tres. Sin embargo, al enfrentarse a secuencias con estructuras más complejas, como la presentada en la segunda tarea del Taller 1 y organizada en dos filas (A y B), muchos no reconocieron su estructura y mostraron dificultades para continuarla, ubicando números en los espacios de la Fila A sin considerar la estructura global. Dificultades similares surgieron en la tarea con la tabla horizontal del Taller 2, donde algunos estudiantes interpretaron las filas como secuencias independientes en lugar de establecer la relación entre las variables. Estos hallazgos evidencian la necesidad de fortalecer experiencias que permitan a los estudiantes analizar la estructura y relaciones de una secuencia, identificar regularidades y justificar sus elecciones.

El uso de balanzas y figuras para representar incógnitas constituye una estrategia eficaz para introducir la noción de equivalencia y la idea de incógnita de manera intuitiva. Al trabajar con balanzas dibujadas y asociarlas con figuras que representan valores

desconocidos, los estudiantes pueden explorar las relaciones entre cantidades de forma visual, facilitando el razonamiento sobre la igualdad y el equilibrio, así como la justificación de sus elecciones.

Respecto a la equivalencia y la resolución de ecuaciones, los estudiantes mostraron avances al asignar valores coherentes a figuras o letras y al resolver igualdades sencillas. No obstante, algunos todavía interpretan el signo igual como una indicación de realizar una operación y no como una relación que expresa equilibrio entre dos expresiones. Esto evidencia la necesidad de continuar promoviendo tareas que permitan comparar, transformar y justificar la equivalencia, de manera que los estudiantes desarrollen un manejo más profundo del uso de las letras como generalizadores.

Además de las producciones escritas, se identificó que ciertos recursos lingüísticos y gestuales apoyaron de manera significativa la expresión y justificación de ideas matemáticas. Las funciones generativas del lenguaje —como “siempre”, “sucesivamente” o “cada vez”— permitieron a los estudiantes formular reglas generales y expresar la regularidad de un patrón, incluso cuando no lograban representarlo completamente por escrito. Por su parte, acciones como señalar, contar con los dedos o usar las manos para representar cantidades se convirtieron en herramientas clave para externalizar el razonamiento y argumentar sobre la secuencia o la relación entre valores. Asimismo, el uso de deícticos espaciales como “aquí”, “acá” o “este” les permitió referirse a elementos específicos de la tarea para sostener sus explicaciones y justificar los pasos que seguían. En conjunto, estos recursos muestran que la generalización y la argumentación en el pensamiento algebraico temprano se construyen no solo a partir de lo verbal o simbólico, sino también a través de gestos y marcadores del lenguaje cotidiano que facilitan la estructuración y comunicación del razonamiento matemático.

Finalmente, la utilización de figuras para representar distintas incógnitas en tareas similares a la primera del Taller 4 podría favorecer la transición hacia sistemas de ecuaciones lineales, al ofrecer un registro visual e intuitivo de las relaciones entre cantidades. Al sustituir letras por figuras, se reduce la carga simbólica del lenguaje algebraico y se facilita la exploración de múltiples relaciones entre las igualdades. Esta estrategia permite un manejo más flexible y significativo de la equivalencia y contribuye a preparar gradualmente a los estudiantes para abordar la resolución de sistemas de ecuaciones en niveles iniciales.

## **7. Implicaciones y futuras investigaciones**

Los resultados de este estudio pueden orientar la planificación de actividades que promuevan la expresión y justificación de ideas matemáticas en estudiantes de primaria, así como el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. La introducción de secuencias numéricas y figurales ofrece oportunidades para que los estudiantes identifiquen patrones, reconozcan regularidades y formulen conjeturas, mientras que el uso de figuras como incógnitas brinda la posibilidad de resolver ecuaciones e incluso

acercarse a sistemas de ecuaciones simples, lo que podría fortalecer la comprensión de la equivalencia y de las relaciones funcionales entre cantidades. Para atender la dificultad en la interpretación del signo igual, se podría sugerir diseñar actividades que refuercen la noción de equivalencia, como el uso de balanzas físicas o digitales que permitan representar visualmente la igualdad entre expresiones.

Asimismo, estos hallazgos abren oportunidades para futuras investigaciones, especialmente en torno al desarrollo de la capacidad de generalizar patrones, trabajar con secuencias numéricas y figurales, y abordar sistemas de ecuaciones en niveles iniciales de primaria. Los resultados evidencian que la incorporación temprana de tareas centradas en la aritmética generalizada y la equivalencia de expresiones contribuye al desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de cuarto grado. Una de las principales implicaciones radica en la necesidad de que los procesos de enseñanza incluyan oportunidades constantes para que los estudiantes expresen y justifiquen sus ideas matemáticas, ya que estas prácticas potencian la construcción de significado y favorecen el tránsito hacia formas más abstractas de razonamiento. En relación con las dificultades observadas en la interpretación de relaciones entre filas de tablas, se podrían proponer actividades que incluyan más ejemplos con relaciones explícitas entre filas y columnas, acompañadas de preguntas que guíen a los estudiantes en el análisis de dichas relaciones.

Preguntas que podrían guiar estudios posteriores incluyen: ¿Cómo influye la estructura de la secuencia en la identificación de patrones y regularidades? ¿De qué manera el uso de figuras como incógnitas contribuye al razonamiento algebraico temprano en estudiantes de primaria? También sería valioso explorar el impacto de intervenciones más prolongadas que integren progresivamente expresiones algebraicas simbólicas, con el fin de comprender cómo evolucionan las concepciones de los estudiantes sobre la igualdad, la variable y la estructura algebraica.

### Referencias

- Alegría, L. (2023). Concepciones de los docentes de matemáticas en educación básica primaria respecto al desarrollo del pensamiento algebraico temprano.
- Angarita Celis, L. M. (2024). Pensamiento funcional en básica primaria: Generalización y sistemas de representación [Trabajo de maestría, Universidad Industrial de Santander].
- Anglada Pozo, M. L. (2017). Propuesta didáctica para trabajar el pensamiento algebraico en el segundo ciclo de educación infantil usando regletas de Cuisenaire [Trabajo de fin de máster, Universidad Internacional de La Rioja]. Repositorio UNIR. <https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/13804/Anglada%20Pozo%20C%20Mar%C3%ADa%20Lourdes.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Bustos, Á., & Zubieta, G. (2019). Desarrollo y cambios en las maneras de justificar matemáticamente de estudiantes cuando trabajan en un ambiente sociocultural. *Enseñanza de las Ciencias*, 37(3), 129–148. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2506>
- Callejo, M. L., García-Reche, A., & Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 5–25.
- Colombia Aprende. (2021). *Calendario matemático: Grandes pensadores*.
- Corredor, Á., & Pineda, M. (2014). Proceso de generalización: una perspectiva de estudiantes de básica primaria [Tesis de licenciatura, Universidad Industrial de Santander].
- Flores, Á. H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, 19(1), 63–98.
- García, O. (2018). Desarrollo de pensamiento algebraico temprano: construcción de una comunidad matemática en el aula. [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander].
- Guzmán, B. (2013). Una propuesta para desarrollar pensamiento algebraico desde la básica primaria a través de la aritmética generalizada.
- Kaput, J. J. (1995). *A research base supporting long-term algebra reform?* Ponencia presentada en la 17ª reunión anual del North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Columbus, OH. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Kaput, J. J., Carragher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2008). *Algebra in the early grades*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (2004). *Algebraic thinking in the early grades: What is it?* *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas: Potenciar el pensamiento matemático ¡un reto escolar!*
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares: Matemáticas*. MEN.

- Navas Polanco, A. C., & Molina Linares, H. A. (2015). Dificultades y errores en el proceso de generalización de una secuencia gráfico-numérica [Trabajo de grado de especialización, Universidad Pedagógica Nacional]. Universidad Pedagógica Nacional.
- Pinto, E., Molina, M., Ayala-Altamirano, C., & Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria [Development of algebraic thinking through justification in elementary education]. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(1), 149–173. <https://ensciencias.uab.cat/article/view/v41-n1-pinto-ayala-molina/5835-pdf-es>
- Parra, M. M., Zapata, M. M., Toro, J., & Durango Urrego, J. H. (2010). Contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 29, 66–81. <http://revistavirtual.ucn.edu.co/>
- Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 119–134. <https://doi.org/10.1080/14794800903569741>
- Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2), 37–62.
- Saavedra, I. (2025). Procesos de objetivación emergentes de la actividad con generalización de patrones: Una experiencia con universitarios indígenas. *Trabajo de Grado para Optar al título de Magíster en Educación Matemática*, Universidad Industrial de Santander.
- Sánchez, L. (2016). Desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela a partir de una actividad matemática mediada por GeoGebra. *Trabajo de Maestría*, Universidad del Valle.
- Silva, G. (2021). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de primaria a través de equivalencias. *Universidad Autónoma de Querétaro*. [RI006496.pdf](#)
- Samper, C., & Toro, J. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentación en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 50, 367–382. Recuperado de <http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/828/1346>
- Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años)*. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/11349/2608>
- Zubieta, C. (2021). Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes del primer ciclo de escolaridad (1°-3°). *Tesis de Maestría*, Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/81135/1069402493.2022.pdf?sequence=5&isAllowed=y>

## Apéndices

### Apéndice A.



### **Formulario de Asentimiento Informado para menos de edad y Consentimiento de padres de familia, tutores o representantes del menor**

**Título del Proyecto:** Desarrollo de pensamiento algebraico a través de la justificación: un análisis de la actividad matemática de estudiantes de cuarto grado.

A través de este documento le invitamos a participar en la investigación titulada “*Desarrollo de pensamiento algebraico a través de la justificación: un análisis de la actividad matemática de estudiantes de cuarto grado*”. Su participación en este estudio es completamente voluntaria: usted puede aceptar o rechazar libremente, tomarse el tiempo que considere necesario para decidir y retirarse en cualquier momento, sin que esta decisión afecte su desempeño en la asignatura de matemáticas ni su proceso académico.

La investigación se llevará a cabo dentro de las clases de matemáticas en la Institución Educativa Las Américas, durante 5 a 6 sesiones de trabajo con una duración aproximada de dos horas cada una. El propósito principal es implementar una propuesta de enseñanza basada en actividades diseñadas para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, promoviendo en los estudiantes el reconocimiento de patrones, la comprensión de equivalencias y la aritmética generalizada, así como la expresión y justificación de sus razonamientos matemáticos.

Si usted acepta participar, le solicitaremos compartir evidencias del trabajo que realice, ya sea en hojas de papel, en el cuaderno o mediante registros de lo desarrollado en el tablero, entre otros medios. Asimismo, se le pedirá participar en actividades, pruebas diagnósticas y talleres, los cuales podrán incluir tanto producciones escritas como explicaciones orales. También nos interesa observar las formas en que expresa sus ideas a través del lenguaje corporal, gestual u oral al momento de resolver una actividad; por esta razón, está previsto realizar videograbaciones de cada una de las sesiones.

Es importante señalar que su nombre, rostro e información personal no serán publicados y estarán resguardados de forma segura por los investigadores. La información recolectada será de uso exclusivo de los responsables del estudio, con el único propósito de analizar, validar o ajustar las actividades diseñadas en torno al desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Todos los datos obtenidos —incluyendo respuestas, procedimientos, explicaciones y actividades matemáticas realizadas durante la investigación— serán tratados con carácter confidencial y no se emplearán para fines distintos a esta investigación. La investigadora responsable, Luz Dary Suárez Gelves, estudiante de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS), será quien resguarde y proteja la información.

Al participar, otros alumnos también tendrán la oportunidad de beneficiarse de su experiencia al impulsar nuevos métodos para promover el pensamiento algebraico temprano en la educación primaria. Por ejemplo, cuando se trata de resolver problemas relacionados con la equivalencia de expresiones y la aritmética generalizada.

Usted no tiene que firmar este documento, por favor hágalo sólo si desea participar en la investigación.

A continuación, firma de los estudiantes:

**Nombre:** \_\_\_\_\_

**Firma:** \_\_\_\_\_

**Fecha:** \_\_\_\_\_

\*No aplica la inclusión de testigos.

La autora de la investigación, Luz Dary Suárez Gelves, CERTIFICA QUE:

✓ He explicado al menor de qué se trata la investigación de manera completa y cuidadosa; además, confirma que, a su mejor saber y entender, el menor comprende claramente los beneficios de la investigación y que su participación en ella no implica riesgo alguno.

✓ He brindado todas las oportunidades para que el/la menor hiciera preguntas sobre el estudio y las he respondió todas de manera clara. Además, abrimos canales de comunicación para las dudas que puedan emerger durante el desarrollo de la investigación.

✓ El presente consentimiento ha sido otorgado en forma libre de todo apremio y de manera voluntaria por quien lo suscribe.

✓ He entregado una copia de esta hoja de información formulario de consentimiento al menor y al acudiente y/o tutor.

A continuación, firman las partes:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
**Nombre del acudiente y/o tutor:**  
**tutor:**

**Cedula del acudiente y/o**

\_\_\_\_\_  
Luz Dary Suárez Gelves  
Cedula: 1005162543