LA “FUNCIÓN” DELTA DE DIRAC.
UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LAS DISTRIBUCIONES

ÁNGELA MARÍA GUZMÁN HERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2007

LA “FUNCIÓN” DELTA DE DIRAC.
UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LAS DISTRIBUCIONES

ÁNGELA MARÍA GUZMÁN HERNÁNDEZ

Trabajo presentado para optar al título de
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

Director
ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR ROA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

A Dios, mis padres y hermanos.

Agradecimientos

Especialmente:

A mis padres, Melva Hernández y Eduardo Guzmán; a mis hermanos Jesús Eduardo y Melvita por sus palabras de felicitaciones en los buenos momentos y por su compresión y aliento en momentos difíciles.

Un agradecimiento muy especial a mi director de monografía Dr. Élder Jesús Villamizar Roa; porque gracias a su invaluable colaboración este trabajo fue realizado.

TITLE: THE DIRAC DELTA FUNCTION.

AN INTRODUCTION TO THE DISTRIBUTIONS THEORY [*]

AUTHOR: ÁNGELA MARÍA GUZMÁN HERNÁNDEZ[**]

KEY WORDS: Dirac delta, distributions.

DESCRIPTION

In this work a bibliographical review about the Dirac delta is given. Indeed, we make an introduction to the Distributions theory. We give the definition of a distribution on the n-dimensional space, state some proporties, give some examples of distributions and remark the particular case of the Dirac function as an important example of Distribution on $\mathbb{R}^n$

The first chapter contains a summary about the Dirac function, standing out its diverse interpretations, as well as its more important properties which can be used in Differential equations courses.

In chapter two and three a revision of the distributions theory is given, we study some examples of distributions as for instance, the logarithm distribution, the main value distribution, the Step of Heaviside distribution, and review some operations on the distributions; set like the sum of distributions, the product betwen a function and a distribution, convergence on the in the distribution set $D'(\mathbb{R}^n)$, etc.

Finally, in chapter foura review about the Laplace Transform is given and then, we give some kind of aplications of the Laplace Transform on the function Dirac in differential equations problems.

[*] Monograph

[**] FACULTY OF SCIENCES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
ADVISER: ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR ROA.

TITULO: LA “FUNCIÓN” DELTA DE DIRAC.
UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LAS DISTRIBUCIONES [*]

AUTOR: ÁNGELA MARÍA GUZMÁN HERNÁNDEZ[**]

PALABRAS CLAVES: Función Delta de dirac, teoría de las distribuciones.

DESCRIPCIÓN

En el presente trabajo se hace una revisión bibliográfica sobre la función delta de Dirac, mas general aún, se hace una introducción a la teoría de las distribuciones, definidas sobre el espacio n-dimensional. Presentamos las principales propiedades de una distribución, estudiamos las operaciones y damos algunos ejemplos.

El primer capítulo contiene un resumen de la función delta de Dirac, resaltando sus diversas interpretaciones, así como también propiedades más importantes las cuales son usadas en cursos de Ecuaciones Diferenciales.

En el capítulo dos y tres realizamos una revisión de la teoria de las distribuciones, presentamos algunos ejemplos de distribución como es el caso de la Distribución Logaritmo, la Distribución Valor Principal, la distribución asociada a la funcioón escalón de Heaviside entre otras. También estudiamos las operaciones entre distribuciones como es el caso de la suma de distribuciones, el producto de una función por una distribución, división de distribuciones, la convergencia en el conjunto de las distribuciones $D'(\mathbb{R}^n)$ y la derivada de una distribución.

Concluimos el capítulo cuatro haciendo una revisión de la Transformada de Laplace de la función delta de Dirac y ejemplificaremos el uso de la misma en la resolución de cierto tipo de problemas de ecuaciones diferenciales.

---

[*] Monografía

[**] FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR ROA.

Contenido

Introducción

Una experincia bastante común para estudiantes de matemáticas, física e ingeníeria, en algún punto de su programa de pregrado, es encontrar la delta de Dirac, una entidad que sería un pico concentrado. Es común en libros de Ingeniería, como los de resistencia de materiales, teoría de control y de transmisión de calor, presentar y usar la delta de Dirac cuando intentan plantear y resolver algunas ecuaciones diferenciales. A pesar de que la aplicación delta funciona bien al tratar de explicar ciertas situaciones prácticas, los profesores alertan que no se trata de una función, sino de algo diferente. En general, los alumnos quedan con la curiosidad atizada y a veces también confusos en cuanto a la verdadera naturaleza de la delta. Queriendo responder la pregunta de qué es la delta de Dirac, hemos querido realizar el siguiente trabajo de monografía, esperando que pueda servir como material de consulta para estudiantes de matemáticas, física e ingeniería, que desde sus intereses de estudio necesitan esta herramienta.

Iniciamos este trabajo presentando una discusión sobre el origen de la ”función” delta de Dirac, a través de un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describe un sistema de masa-resorte, justificando la versión empírica de la definición de la delta de Dirac como una aplicación $\delta(x)$ que satisface

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{si } x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1. \tag{2}$$

Una aplicación $\delta(x)$ que satisface (1) y (2) causa cierto malestar para los matemáticos, a pesar de funcionar bien en varias situaciones de la Física. La verdad, una propiedad importante de la delta de Dirac es la siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\psi(x)dx = \psi(0). \tag{3}$$

De entrada, la expresión (3) es también bastante confusa y se hace necesario darle un sentido matemático correcto. Estos aspectos son considerados en el Capítulo 1 de este trabajo. La funcion δ de Dirac es un ejemplo de distibución (también llamada funcion generalizada). Las distribuciones fueron introducidas al final de los años veinte del siglo pasado por el físico inglés Paul DIRAC (1902-1984) en sus investigaciones sobre mecánica cuántica [3], donde él utiliza sistemáticamente la noción de función δ y de sus derivadas. Las bases matemáticas de la teoría de distribuciones las estableció el matemático soviético Serquéi SÓBOLIEV (1908-1989) en 1936 al resolver el problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales hiperbólicas [11], y en los años cincuenta el matemático francés Laurent SCHWARTZ (1915-2002) desarrolló sistemáticamente la teoría e indicó muchas de sus aplicaciones [9]. Hacer un análisis introductorio sobre el concepto de distribuciones será el objetivo del Capítulo 2. En este mismo Capítulo veremos que la función delta de Dirac, es en verdad un ejemplo de una distribución, complemetando las ideas introducidas en el Capítulo 1.

En el Capítulo 3, haremos un estudio sobre las operaciones básicas con distribuciones. Describiremos cómo se define la suma de distribuciones, el producto de una distribución por una función, la derivada de una distribución; además verificaremos la validez de la regla de Leibniz y realizaremos un corto análisis de la existencia de las primitivas de una distribución. Finalizaremos haciendo un pequeño análisis sobre la operación de división de distribuciones y la convergencia en distribuciones.

Para concluir el trabajo, en el Capítulo 4 haremos un pequeño análisis sobre el cálculo y la aplicación de la transformada de Laplace de la función delta de Dirac, aplicación dada en la resolución de un sistema masa-resorte modelado a través de una ecuación diferencial ordinaria.

El contenido de éste trabajo de monografía se basa en una revisión del material bibliográfico citado al final del texto. Esas fuentes nos permitieron elaborar este texto de una manera que esperamos sea bastante accesible y completa para los estudiantes de cursos de pregrado de matemáticas, física e ingeniería.

Capítulo 1

La delta de Dirac

El objetivo de este capítulo es hacer un análisis introductorio de lo que se conoce como función delta de Dirac, incluyendo motivaciones dadas por problemas físicos y propiedades fundamentales.

1.1. Orígenes de la delta de Dirac

La delta de Dirac (impropiamente llamada función delta de Dirac) es una “aplicación” δ introducida por primera vez por el físico inglés Paul Dirac, y que verifica las siguientes propiedades:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{si } x = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1. \tag{1.2}$$

¿Cómo es posible que exista una aplicación que verifique (1.1) y (1.2)? Rigurosamente no es posible. Tal aplicación no es una función, pues si lo fuera, debería asociar a cada número real, otro número real, y $+\infty$ no es un número. Además, como δ es cero en toda la recta, con excepción del punto cero, la integral debería ser cero, y no uno. Entre tanto, para malestar de los matemáticos, las expresiones (1.1) y (1.2) funcionan muy bien en varias situaciones de la física, como por ejemplo, en mecánica ondulatoria.

Consideremos por ejemplo el problema de describir un empuje o tirón muy rápido sobre un sistema, como un golpe de martillo o el efecto de una explosión. Por ejemplo, imaginemos que tenemos un oscilador no forzado que satisface la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2y = 0, \tag{1.3}$$

donde a_1, a_2 son constantes.

La ecuación (1.3) puede modelar una masa unitária unida a un resorte cuya constante de resorte es a_2 y se desliza sobre una mesa con un coeficiente de amortiguamiento a_1.

Supongamos que golpeamos la masa con un martillo una sola vez en el tiempo $t = t_0$ (véase la Figura (1.1)).

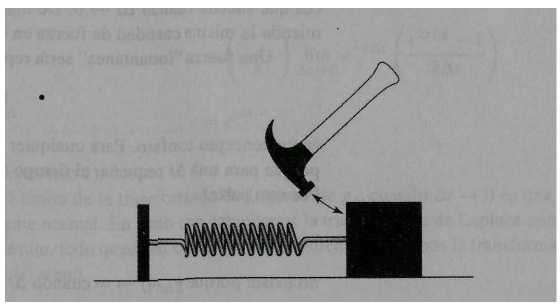

Figura 1.1: Golpe de un martillo.

Podemos escribir la ecuación forzada como

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2y = g(t),$$

donde

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{cuando } t \neq t_o, \\ \text{muy grande}, & \text{cuando } t = t_o. \end{cases}$$

Para tener más precisión y poder obtener una solución, necesitamos algún tipo de fórmula para $g(t)$. Como primer intento para derivar una fórmula, podríamos suponer que el martillo golpea con una fuerza constante grande durante un tiempo “pequeño”. De manera específica, digamos que el martillo está en contacto con la masa durante un intervalo pequeño de tiempo $2\Delta t$ y que la fuerza sobre la masa en ese intervalo es la constante k. Entonces, la función de forzamiento toma la forma

$$g_{\Delta t}(t) = \begin{cases} k, & \text{si} \quad t_o - \Delta t \leq t \leq t_o + \Delta t, \\ 0, & \text{otros valores de t.} \end{cases}$$

Consideremos a Δt y k como parámetros. Ambos están intimamente relacionados. De hecho, la fuerza externa sólo es diferente de cero para un intervalo de $2\Delta t$. Por consiguiente, cuanto más pequeño tomemos Δt, mayor debe ser k para comunicar el mismo empuje total. Escogemos $k = \frac{1}{2\Delta t}$, de manera que cuando $\Delta t \longrightarrow 0$, k sea grande:

$$g_{\Delta t}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta t}, & \text{si} \quad t_o - \Delta t \leq t \leq t_o + \Delta t, \\ 0, & \text{otros valores de t.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Con esta selección de k, el área bajo la gráfica de $g_{\Delta t}(t)$ es la misma que encontraríamos en un rectángulo con base $2\Delta t$ y altura $\frac{1}{2\Delta t}$. Es decir, el área es 1 sin importar qué escojamos para Δt (Véase la Figura (1.2)).

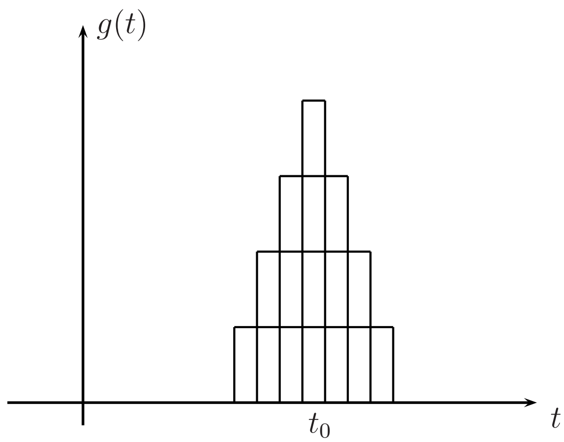

Figura 1.2: Gráfica de la función $g_{\Delta t}(t)$ para diferentes valores de Δt.

Como estamos modelando un golpe de martillo que se difunde muy rápidamente, nos gustaría hacer el intervalo Δt tan pequeño como sea posible.

Consideremos $\Delta t \longrightarrow 0$. De manera informal, cuando $\Delta t \longrightarrow 0$ estamos comprimiendo la misma cantidad de fuerza en un intervalo cada vez más corto.

Una fuerza "instantánea" sería representada por el límite cuando $\Delta t \longrightarrow 0$, que es obviamente ∞.

Informalmente hablando, se definie la delta de Dirac como el límite de una sucesión de funciones que tienden a cero en todo punto del espacio, excepto en un punto para el cual divergerían hacia el infinito; de ahí la "definición" dada por

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Formalmente hablando, la delta de Dirac, como veremos posteriormente, es un ejemplo de Distribución, está última definida como un funcional sobre cierto espacio vectorial de funciones.

1.2. Propiedad fundamental

Una propiedad importante de la delta de Dirac es la siguiente: Si $\psi(x)$ es una función real continua que se anula fuera de un intervalo acotado, entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\psi(x)dx = \psi(0). \tag{1.5}$$

Críticas, igualmente, se levantaron contra la expresión (1.5). ¡El integrando no es una función, y, por lo tanto, no puede ser integrado!

¿Qué hacer para dar sentido matemáticamente correcto a la expresión (1.5)? Esto se hace de modo satisfactorio a través de la Teoría de las Distribuciones introducida por Laurent Schwartz, teoría que explica otras expresiones formales como (1.5), comprendiendo, inclusive, derivadas de δ.

En lo que sigue comenzamos justificando (1.5) de modo riguroso. Consideramos una sucesión de funciones continuas $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con las siguientes propiedades:

$d_1)$ $K_n \geq 0$;

$d_2)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)dx = 1$;

$d_3)$ Dado $\varepsilon > 0$, y $\eta > 0$, existe η_0 tal que, para $\eta \geq \eta_0, \displaystyle\int_{|x|>\eta} K_n(x)dx < \varepsilon$.

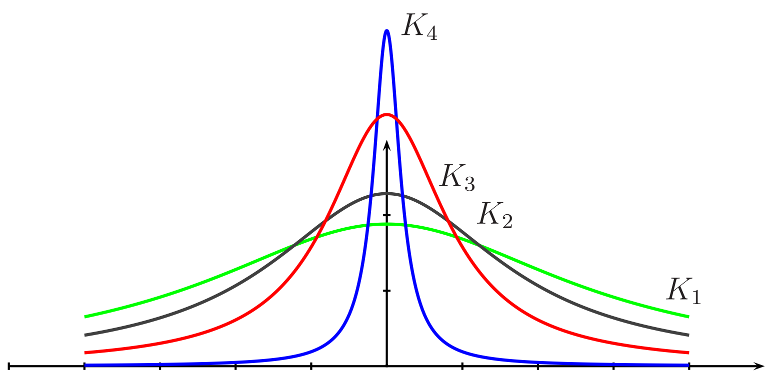

Figura 1.3: Áreas bajo las curvas $K_n(x)$.

Como podemos ver en la Fìgura (1.3), las áreas bajo las curvas $K_n(x)$ se acumulan junto al eje y. Estas funciones pueden ser entendidas de modo intuitivo como aproximaciones de δ. El lado izquierdo de (1.5) puede ser definido como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\psi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)\psi(x)dx, \tag{1.6}$$

donde los K_n satisfacen las propiedades $d_1)$, $d_2)$ y $d_3)$.

Nuestro objetivo a seguir, será demostrar que, con la definición (1.6), la expresión (1.5) es correcta.

Definición 1.1. *(Sucesión de Núcleos de Dirac) Una sucesión de funciones $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seccionalmente continuas* * *y satisfaciendo las propiedades $d_1, d_2,$ y d_3 es llamada una sucesión de núcleos de Dirac.*

Ejemplo 1.2. *Sea $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función seccionalmente continua, no-negativa y tal que*

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx < \infty.$$

* Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice seccionalmente continua si ella posee un número finito de discontinuidades (todas de primera especie) en cualquier intervalo acotado. En otras palabras, dados $a < b$ existen $a \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leq b$, tales que f es continua en cada intervalo abierto (a_j, a_{j+1}), $j = 1, \ldots, n-1$ y existen los límites $\lim_{x\to a_j^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a_j^-} f(x)$. Es claro que toda función continua es seccionalmente continua.

Notemos que si $K(x)$ se anula fuera de un intervalo acotado, la última integral es finita. Sea $\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx$. Entonces las funciones $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$K_n(x) = \frac{n}{\alpha} K(nx),$$

forman una sucesión de Núcleos de Dirac. De hecho, como K es no negativa, entonces $K_n \geq 0$ y así d_1 se verifica. Además se verifica d_2, ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)dx = \frac{n}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} K(nx)dx = \frac{n}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(z)}{n} dz = \frac{1}{\alpha}\alpha = 1.$$

Finalmente, para demostrar d_3, notemos que

$$\int_{|x|>\eta} K_n(x)dx = \frac{n}{\alpha} \int_{|x|>\eta} K(nx)dx = \frac{1}{\alpha} \int_{|s|>n\eta} K(s)ds.$$

Por otro lado, como $\int_{-\infty}^{\infty} K(s)ds < \infty$, entonces existe $\gamma > 0$ tal que

$$\int_{|s|>\gamma} K(s)ds < \varepsilon\alpha.$$

Así, si tomamos $\eta_0 > \frac{\gamma}{\eta}$, la condición d_3 se verifica.

El siguiente Teorema da una propiedad básica de los núcleos de Dirac.

Teorema 1.3. *Sea (K_n) una sucesión de Núcleos de Dirac, y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función seccionalmente continua y acotada. Sea*

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x-s)f(s)ds. \tag{1.7}$$

Entonces,

i) Las funciones f_n están bien definidas.

ii) Si K_n es par, entonces para cada x, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \dfrac{\lim_{s\to x^+} f(s) + \lim_{s\to x^-} f(s)}{2}$.

iii) La sucesión (f_n) converge, uniformemente[**], para f en todo intervalo acotado cerrado I que no contenga puntos de discontinuidad de f.

[**] Se dice que una sucesión de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge uniformente para una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\eta_o \in \mathbb{N}$ tal que $n > \eta_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Observación 1.4. *La función dada por la integral en (1.7), se llama "Producto de convolución de K_n y f", y se usa la notación $f_n = K_n * f$. Obviamente el producto de convolución puede ser definido para clases más amplias de funciones. Por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones absolutamente integrables y una de ellas es acotada, entonces el producto de convolución $f * g$ estará bien definido. Una propiedad importante del producto de convolución es la siguiente:*

$$f * g = g * f,$$

o sea

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)g(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds,$$

cuya demostración es inmediata, a través de un cambio de variable en la integración. Normalmente el producto de convolución se denomina simplemente convolución.

Demostración. La parte i) es inmediata, pues el integrando en (1.7) es una función seccionalmente continua, para cada x fijo, e integrable. De hecho,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x-s)f(s)ds \right| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} K_n(y)dy < \infty,$$

ya que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mostremos la parte ii). Denotemos por $\overline{f}(x) = \frac{1}{2}[\lim_{s \to x^+} f(s) + \lim_{s \to x^-} f(s)]$. Debemos obtener una estimativa de $f_n(x) - \overline{f}(x)$. De acuerdo con la condición d_2 de los núcleos de Dirac,

$$f_n(x) - \overline{f(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(s)[f(x-s) - \overline{f}(x)]ds. \tag{1.8}$$

Podemos tomar un δ (el cuál será definido más adelante) tal que

$$f_n(x) - \overline{f}(x) = \int_{|s|>\delta} K_n(s)[f(x-s) - \overline{f}(x)]ds + \int_{|s|\leq\delta} K_n(s)[f(x-s) - \overline{f}(x)]ds = I_1 + I_2.$$

Recordando que K_n es una función par, tenemos que

$$I_2 = \int_0^{\delta} K_n(s)f(x+s)ds + \int_0^{\delta} K_n(s)f(x-s)ds - \int_0^{\delta} K_n(s)[\lim_{s \to x^+} f(s) + \lim_{s \to x^-} f(s)]ds.$$

De ahí

$$|I_2| \leq \int_0^{\delta} K_n(s)|f(x+s) - \lim_{s\to x^+} f(s)|ds + \int_0^{\delta} K_n(s)|f(x-s) - \lim_{s\to x^-} f(s)|ds.$$

Como f es seccionalmente continua, tenemos que

$$|f(x+s) - \lim_{s\to x^+} f(s)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f(x-s) - \lim_{s\to x^-} f(s)| < \varepsilon, \quad \text{para} \quad 0 < s < \delta.$$

Consecuentemente,

$$|I_2| \leq 2\varepsilon \int_0^{\delta} K_n(s)ds \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K_n ds = \varepsilon.$$

Ahora, con ese δ que acabamos de determinar, vamos a estimar I_1

$$|I_1| \leq 2M \int_{|s|>\delta} K_n(s)ds.$$

De ahí, por la condición d_3 de los núcleos de Dirac, tenemos que existe n_0 tal que, para $n \geq n_0$, obtenemos

$$|I_1| \leq 2M\varepsilon.$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $n \geq n_0$,

$$|f_n(x) - \overline{f(x)}| \leq (1+2M)\varepsilon,$$

y así concluimos la prueba de ii).

Para la parte iii), de manera similar a lo que fue realizado en la demostración de la parte ii), vamos a descomponer la integral (1.8) en dos partes. Sean a y b los extremos del intervalo I, esto es, $I = [a,b]$. Es claro que podemos tomar un $\eta > 0$ tal que el intervalo cerrado $I' = [a-\eta, b+\eta]$ no contenga puntos de discontinuidad de f. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in I'$ y $|x_1 - x_2| < \delta$, entonces $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

(Así, esto es la continuidad uniforme de f en el intervalo cerrado y limitado I').

$$f_n(x) - f(x) = \int_{|s|>\delta} K_n(s)[f(x-s) - f(x)]ds + \int_{|s|\leq\delta} K_n(s)[f(x-s) - f(x)]ds,$$

y entonces tenemos

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2M \int_{|s|>\delta} K_n(s)ds + \int_{|s|\leq\delta} K_n(s)|f(x-s) - f(x)|ds. \tag{1.9}$$

Tomando $\delta < \eta$, vemos que $x - s$ varía en I' si x recorre I. Consecutivamente, la segunda integral en (1.9) será estimada por

$$\varepsilon \int_{|s|\leq\delta} K_n(s)ds \leq \int_{-\infty}^{\infty} K_n(s)ds = \varepsilon.$$

Para estimar la primera integral en (1.9), usamos la condición d_3 de los núcleos de Dirac. Luego con ese $\varepsilon > 0$ dado, y el correspondiente $\delta > 0$, determinamos n_0 tal que la primera integral sea menor que ε para todo $n \geq n_0$. Con lo anterior concluimos que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 2M\varepsilon + \varepsilon,$$

para todo $x \in I$ y todo $n \geq n_o$. Esto significa la convergencia uniforme de f_n en I, y así el Teorema 1.3 queda demostrado. $\square$

Justificación de (1.5). Siendo ψ una función continua y acotada, por el Teorema 1.3, tenemos que

$$\psi(0) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(-s)\psi(s)ds.$$

Por lo tanto, si los núcleos de Dirac son funciones pares, esto es, si $K_n(s) = K_n(-s)$, obtenemos exactamente la expresión (1.5). $\square$

Capítulo 2

Distribuciones

2.1. Funcionales

La delta de Dirac no es una función, pero sí un *funcional lineal*, o más precisamente, una *distribución*. Antes de explicar lo que son funcionales y distribuciones, recordaremos nuevamente que una función es entendida como una regla que asocia a un elemento de un conjunto dado, llamado *dominio*, un único elemento de otro conjunto, denominado *recorrido o contradominio*. Un funcional es simplemente una aplicación cuyo dominio es un espacio vectorial dado y cuyo contradominio un conjunto numérico. Para nuestro estudio, tal conjunto numérico será siempre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Por ejemplo, consideremos el espacio vectorial dado por el conjunto de las funciones continuas en $\mathbb{R}$ denotado por $C(\mathbb{R})$ y definamos los funcionales F_1 y F_2 por:

$$\begin{array}{rcccc} F_1 & : & C(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & u(0)^2, \end{array} \tag{2.1}$$

$$\begin{array}{rcccc} F_2 & : & C(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{2\pi} u(t)dt. \end{array} \tag{2.2}$$

Definición 2.1. *(Funcionales lineales). Sea V un espacio vectorial dado con las operaciones suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, y sea $F : V \to \mathbb{R}$ un funcional definido sobre V. Se dice* *que F es un funcional lineal si*

$$F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in V,$$
$$F(\alpha \cdot u) = \alpha F(u), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad u \in V.$$

Ejemplo 2.2. *El funcional F_2 definido por* (2.2) *es lineal, en tanto que el funcional F_1 definido por* (2.1) *no lo es.*

2.2. Distribuciones

Iniciamos considerando el conjunto de las funciones *test* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, que se define como el conjunto de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciables tales que el conjunto de puntos donde f no es nula es acotado; esto es, si $Y = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$, entonces existe un número real M tal que $|x| < M$, para todo $x \in Y$.

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} \quad \text{es acotado}\}$$

Veamos el siguiente ejemplo de una función *test* definida en $\mathbb{R}$.

Consideremos previamente la función f definida como

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \end{array}$$

Observemos ante todo que cualquier derivada de f en el semieje $x > 0$ tiene la forma

$$P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}},$$

donde P es un polinómio en la variable $\frac{1}{x}$ (sin término independiente). Además, por la regla de L'Hôpital se sigue fácilmente que

$$\lim_{x \to 0^+} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = 0,$$

lo que muestra que, de hecho, f es una función infinitamente derivable en $\mathbb{R}$. A partir de f, obtenemos una función *test*. Para ello, tomemos dos números reales a y b tales que $a < b$.

Construyamos ahora una función *test* a partir de f. Sea

$$\begin{array}{rcl} f_{ab}\ :\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x-a)f(b-x) \end{array}$$

La función f_{ab} es una función *test*, ya que es infinitamente derivable y el conjunto de los puntos en que ella no es nula es acotado, como se ve en la figura 2.1.

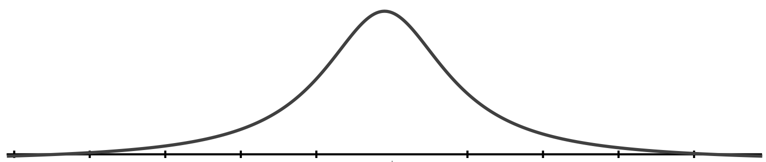

Figura 2.1: Gráfico de f_{ab}.

En $\mathbb{R}^n$, otro ejemplo de una función *test* es dado por

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{(|x|^2-1)^{-1}}, & \text{si } |x| < 1, \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

La diferenciabilidad de (2.3) se sigue de la diferenciabilidad de la función $f(t) = e^{\frac{1}{t}}$ si $t < 0$, $f(t) = 0$, si $t \geq 0$. Multiplicando $\phi(x)$ por una constante adecuada, obtenemos una nueva función $\psi(x) \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \psi dx = 1$, $\psi \geq 0$ y $\{x : \psi(x) \neq 0\} \subseteq \{x : |x| \leq 1\}$.

Definición 2.3. *Una distribución T (sobre $\mathbb{R}^n$) es un funcional lineal que tiene por dominio el espacio vectorial de las funciones test $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ y satisface la siguiente propiedad de continuidad:*

$$\textit{si} \quad \{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n) \quad \textit{es tal que} \quad \phi_n \to 0, \quad \textit{entonces} \quad T(\phi_n) \to 0.$$

Denotamos el conjunto de todas las distribuciones en $(\mathbb{R}^n)$ por $D'(\mathbb{R}^n)$ (o simplemente D').

Recordemos aquí que si $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, entonces diremos que $\{\phi_n\}$ converge a cero en $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, y escribimos $\phi_n \to 0$, si:

i) Existe $M > 0$ tal que $\phi_n(x) = 0$ cuando $|x| > M$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

ii) Las derivadas de cualquier orden D^{α} en ($\mathbb{R}^n$), satisfacen $|D^{\alpha}\phi_n| \to 0$.

2.3. De nuevo la delta de Dirac

Una vez que tenemos la definición de Distribución, estamos en condiciones de definir la delta de Dirac.

Consideremos el funcional

$$\begin{array}{rcccc} \delta & : & C_c^{\infty}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \phi & \longmapsto & \phi(0). \end{array}$$

Claramente, δ es lineal. Además, si $\{\phi_n\} \subset C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\phi_n \to 0$, entonces $\delta(\phi_n) = \phi_n(0) \to 0$. Así, el funcional δ es de hecho una distribución, llamada delta de Dirac.

Fijando un punto $a \in \mathbb{R}^n$, podemos definir el funcional

$$\begin{array}{rcccc} \delta_a & : & C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \phi & \longmapsto & \phi(a). \end{array}$$

Como antes, δ_a es una distribución, la cual es una delta de Dirac trasladada. De hecho, cuando $a = 0$, entonces $\delta_a = \delta$.

Recordando que la motivación para la introducción de la delta de Dirac era el modelo de un pico localizado, nos podemos preguntar si no sería posible obtener la delta de Dirac por un proceso de paso al límite, en el que una función, cuyo gráfico tiene la comprimida forma de campana, vaya siendo exprimida de tal modo que el área comprendida entre su gráfica y el eje x permanezca constante e igual a uno.

La respuesta a la pregunta es positiva (inclusive en el espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$). Analicemos, por comodidad, el caso unidimensional.

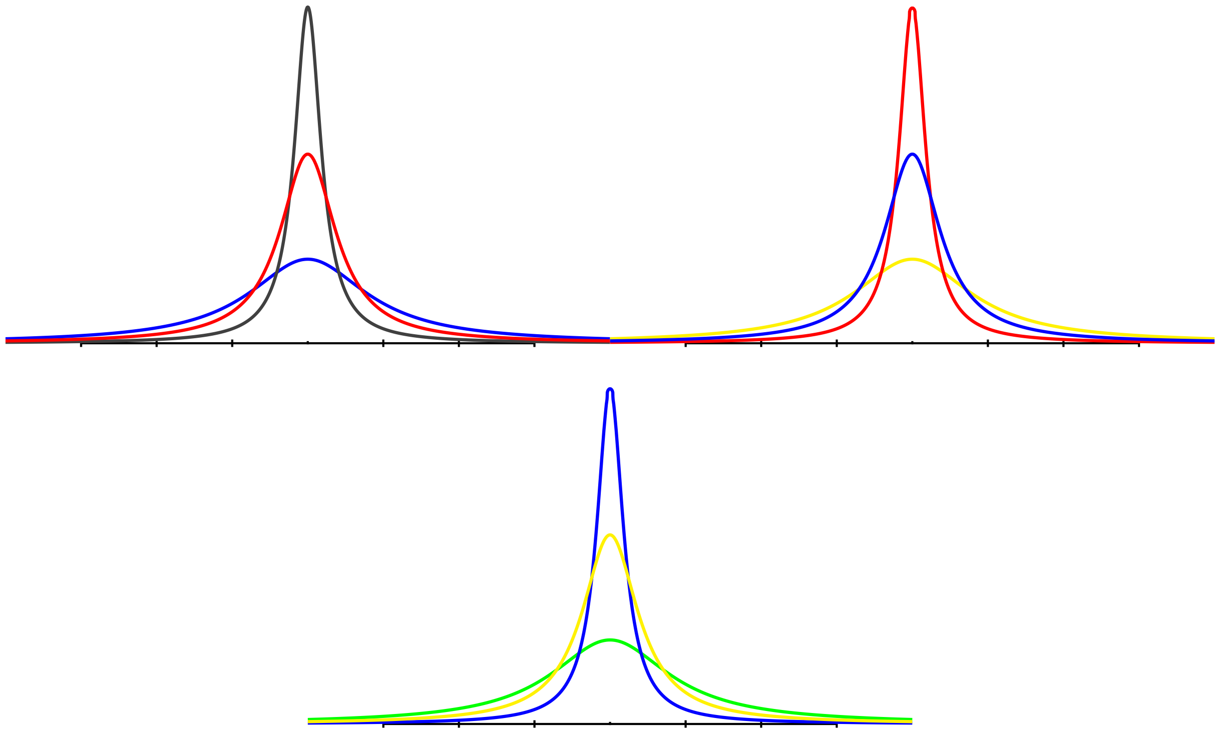

Figura 2.2: Convergencia hacia un pico concentrado.

Sea $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \phi_\varepsilon : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{\varepsilon}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \end{array}$$

Supongamos por comodidad que $\phi(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\phi(x) = \phi(-x)$.

Cuando ε tiende a cero, la función ϕ_ε tiende a un pico concentrado en el origen. (Ver la Figura (2.2)). Además, si hacemos $\varsigma = \frac{x}{\varepsilon}$ entonces $d\varsigma = \frac{1}{\varepsilon}dx$, y así,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\varepsilon dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\varsigma)\varepsilon d\varsigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\varsigma) d\varsigma \\ &= 1. \end{aligned}$$

La siguiente pregunta es saber en qué sentido podemos afirmar que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\phi_\varepsilon = \delta$.
En verdad, podemos ver que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\phi_\varepsilon(\psi) = \delta(\psi), \quad \forall\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

De hecho,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\phi_\varepsilon(\psi) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \phi_\varepsilon(x)\psi(x)dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \frac{1}{\varepsilon}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\psi(x)dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \phi(\varsigma)\psi(\varepsilon\varsigma)d\varsigma \\
&= \psi(0)\int \psi(\varsigma)d\varsigma \\
&= \psi(0).
\end{aligned}$$

El resultado muestra que la noción rigurosa de la delta es consistente con las espectativas físicas.

2.4. El escalón de Heaviside

Una distribución intimamente ligada a la delta de Dirac es el llamado "Escalón de Heaviside". De hecho, más adelante veremos que la "derivada" del escalón de Heaviside es la delta de Dirac. Iniciamos considerando la función

$$\begin{aligned}
h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x < 0, \\ \text{un valor arbitrario}, & \text{en } x = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Notemos que el valor de h en $x = 0$ es irrelevante, ya que en este no altera el valor de las integrales $\int_a^b h(x)dx$. (Véase la Gráfica (2.3)).
Definimos el funcional lineal F_h por:

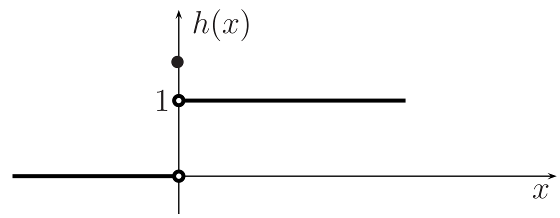

Figura 2.3: Función $h(x)$.

$$\begin{array}{rcccl} F_h & : & C_c^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \phi & \longmapsto & F_h(\phi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\phi(x)dx = \int_0^\infty \phi(x)dx. \end{array}$$

Notemos que, de hecho, el funcional F_h es lineal sobre el espacio vectorial $C_c^\infty(\mathbb{R})$, debido a las propiedades de linealidad de la integral. Veamos que F_h es en verdad una distribución.

Para ello, consideremos una sucesión $\{\phi_n\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\phi_n \to 0$. Notemos que existe $M > 0$ tal que $\phi_n(x) = 0$, si $|x| > M$, para todo n.

Entonces

$$|F_h(\phi_n)| = \left| \int_0^M \phi_n(x)dx \right| \leq \int_0^M |\phi_n(x)|dx \leq M. \max|\phi_n| \longrightarrow^{n\to\infty} 0.$$

Análogamente al caso de la delta de Dirac, podemos definir una nueva distribución definida por la traslación de la función h, (figura 2.4) esto es, dado $a \in \mathbb{R}$, definimos la nueva función

$$\begin{array}{rcccl} h_a & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} 1, & \text{si } x > a, \\ 0, & \text{si } x < a, \\ \text{otro valor}, & \text{en } x = a. \end{cases} \end{array}$$

Y consecuentemente definimos el funcional lineal

$$\begin{array}{rcccl} F_{h_a} & : & C_c^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \phi & \longmapsto & \int_{-\infty}^{\infty} h_a(x)\phi(x)dx = \int_a^\infty \phi(x)dx. \end{array}$$

Como antes, el funcional lineal F_{h_a} es una distribución sobre $\mathbb{R}$.

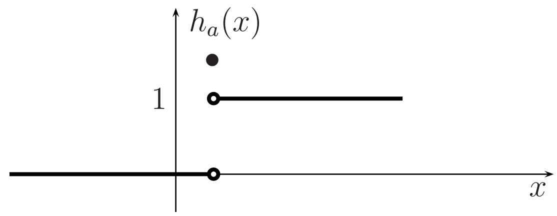

Figura 2.4: Función h_a.

2.5. Identificación de distribuciones con funciones ordinarias

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en intervalos acotados de la recta real $\mathbb{R}$, esto es, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, la integral $\int_a^b f(x)dx$ es finita. Con una función satisfaciendo las anteriores hipótesis, podemos definir una distribución. De hecho, consideremos el funcional

$$\begin{array}{rccc} F_f & : & C_c^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \phi & \longmapsto & \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx. \end{array}$$

El funcional F_f es una distribución. Claramente F_f es un funcional lineal. Por otro lado, sea $\{\phi_n\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\phi_n \to 0$. Si $A = \{x \in \mathbb{R} : \phi_n(x) \neq 0\}$, entonces existe $M > 0$ tal que $A_n \subset [-M, M]$, para todo n. Por lo tanto,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_n(x)dx \right| = \left| \int_{-M}^{M} f(x)\phi_n(x)dx \right| \leq \text{máx} \, |\phi_n| \int_{-M}^{M} |f(x)|dx.$$

Como f es integrable en intervalos acotados, entonces si $\phi_n \to 0$ tenemos que, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_n(x)dx \to 0$.

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable sobre cada bola B_{x_0} centrada en un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$B_{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\},$$

podemos asociar una distribución en $\mathbb{R}^n$. De hecho, podemos definir el funcional

$$\begin{array}{rcl} F_f \ : \ C_c^\infty(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx. \end{array}$$

El funcional F_f es lineal, y, siguiendo los mismos argumentos anteriormente usados, podemos ver que de hecho F_f es una distribución en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.4. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por*

$$\begin{array}{rcl} f \ : \quad \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & f(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}}, & si,\ (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & si\ (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases} \end{array}$$

Notemos que f es integrable en cada disco de $\mathbb{R}^2$. De hecho, basta verificar la integrabilidad sobre un disco centrado en el origen. Notemos que f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Sea $B_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \leq r\}$. Usando coordenadas polares, tenemos

$$\int_{B_0} f(x)dx = 2\pi \int_0^r f(r)rdr = 2\pi \int_0^r r^{-1}rdr = 2\pi \int_0^r dr = 2\pi r < \infty.$$

Así, podemos definir la distribución

$$\begin{array}{rcl} F_f \ : \ C_c^\infty(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\phi(x)dx}{|x|}. \end{array}$$

Como vimos anteriormente, dada una función integrable en intervalos acotados, podemos asociar a dicha función, una distribución. Una pregunta que surge de manera natural es saber si, dadas dos funciones distintas, les podemos asociar la misma distribución.

La respuesta es negativa. Analizamos el caso en el cual las funciones son continuas o continuas por partes; sin embargo el resultado vale para otra clase de funciones, como lo es la clase de funciones integrables.

Teorema 2.5. *Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $F_f = F_g$. Entonces $f = g$.*

Demostración. Si $F_f = F_g$ entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x)dx, \quad \forall\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}).$$

Queremos mostrar que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Supongamos por contradicción que f es diferente de g. Entonces existe algún punto $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \neq g(a)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $g(a) < f(a)$. Sea $\varsigma = g(a) - f(a)$. Como las funciones f y g son continuas, entonces existe un $\beta > 0$ tal que $g(x) - f(x) > \frac{\varsigma}{2}$ para todo $x \in [a-\beta, a+\beta] \subset \mathbb{R}$.

Consideremos la función test $\phi = g_{a-\beta,a+\beta}$ definida por

$$g_{a-\beta,a+\beta}(x) = g(x-(a-\beta))g(a+\beta-x),$$
$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Notemos que $\phi \geq 0$ y que

$$\{x \in \mathbb{R} : \phi(x) \neq 0\} \subset [a-\beta, a+\beta].$$

Consecuentemente tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x)-f(x)]\phi(x)dx > \frac{\varepsilon}{2}\int_{a-\beta}^{a+\beta} \phi(x)dx > 0.$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x)dx \neq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx.$$

Esto es $F_f \neq F_g$, contradiciendo la hipótesis.

La reciproca es fácilmente verificable. □

El resultado puede ser extendido fácilmente al caso de funciones integrables en intervalos acotados pero con conjuntos de puntos de discontinuidad finitos. En este caso tenemos que $f(x) = g(x)$ en todos los puntos excepto posiblemente en el conjunto E, formado por la unión de los puntos de discontinuidad de f y g. La demostración se sigue repitiendo el argumento anterior en cada intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R} - E$.

2.6. La distribución logaritmo

Ya conocida la identificación de funciones integrables en intervalos acotados con una distribución, presentamos a continuación la distribución logaritmo, la cual presenta gran interés en varias situaciones prácticas.

La distribución logaritmo es definida como

$$\begin{array}{rcccl} T_{\log|x|} & : & C_c^{\infty}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \phi & \longmapsto & T_{\log|x|}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \log|x|\phi(x)dx. \end{array}$$

La definición anterior tiene sentido verificando que la función $\log|x|$ es integrable en intervalos acotados. Sabemos que una primitiva de la función logaritmo, para $x > 0$, en la función $x \log x - x$. Si existe algún problema de integrabilidad, debe ser alrededor de $x = 0$. Considerando $a > 0$ y la integral

$$\int_{-a}^{a} \log|x|dx,$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} \log|x|dx \leq \int_{-a}^{a} |\log|x||dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2[x - x\log x]_{\varepsilon}^{a} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2[a - \varepsilon - \varepsilon\log\varepsilon] \\ &= 2a < \infty. \end{aligned}$$

Así, la función $\log|x|$ es integrable en intervalos acotados, y entonces, de acuerdo con la identificación dada en la sección anterior, tenemos que la distribución $T_{\log|x|}$ asociada a la función $\log|x|$, está bien definida.

2.7. La distribución valor principal $VP\left[\frac{1}{x}\right]$

La noción de “Valor Principal” (VP), debida a Cauchy, ofrece una manera de dar significado a ciertas integrales impropias divergentes. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no es localmente integrable; sin embargo, puede ser vista como una distribución. De hecho, asociamos a $f(x) = \frac{1}{x}$ la distribución

$$\begin{array}{rcl} VP\left[\frac{1}{x}\right] : C_c^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & VP\left[\frac{1}{x}\right](\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{1}{x}\phi(x)dx. \end{array}$$

La existencia del límite se deduce del argumento a seguir.

Para probar que de hecho $VP\left[\frac{1}{x}\right]$ es una distribución, tenemos que verificar que

$i)$ $VP\left[\frac{1}{x}\right](\alpha\phi_1+\phi_2) = \alpha VP\left[\frac{1}{x}\right](\phi_1) + VP\left[\frac{1}{x}\right](\phi_2)$, $\alpha\in\mathbb{R}, \phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ (linealidad),

$ii)$ $VP\left[\frac{1}{x}\right](\phi_n)\to 0$ cuando $\phi_n\to 0$ (continuidad).

La linealidad se sigue de las propiedades de linealidad de la integral. De hecho,

$$\begin{aligned} VP\left[\frac{1}{x}\right](\alpha\phi_1+\phi_2) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{1}{x}[\alpha\phi_1(x)+\phi_2(x)]dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|\geq\varepsilon}\alpha\frac{1}{x}\phi_1(x)dx + \int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{1}{x}\phi_2(x)dx\right) \\ &= \alpha VP\left[\frac{1}{x}\right](\phi_1) + VP\left[\frac{1}{x}\right](\phi_2). \end{aligned}$$

Probemos ahora $ii)$. Sea (ϕ_n) una sucesión de funciones en $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\phi_n\to 0$. Por el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$\phi_n(x) = \phi_n(0) + \int_0^x \phi_n'(s)ds.$$

Sea $s = tx$. Entonces $ds = xdt$, y así

$$\phi_n(x) = \phi_n(0) + x\int_0^1 \phi_n'(tx)dt.$$

Definamos la función $\psi_n(x)$ como $\psi_n(x) = \int_0^1 \phi_n'(tx)dt$.

Sea $M>0$ tal que $\phi_n(x)=0$ para todo x con $|x|>M$ y todo n.

Como

$$\int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\frac{1}{x}\phi_n(x)dx = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\frac{1}{x}\phi_n(0)dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\psi_n(x)dx$$

y

$$\int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\frac{1}{x}\phi_n(0)dx = \phi_n(0)\int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\frac{1}{x}dx = 0,$$

obtenemos

$$VP\left[\frac{1}{x}\right](\phi_n) = \int_{|x|\leq M}\psi_n(x)dx.$$

Por lo tanto,

$$VP\left[\frac{1}{x}\right](\phi_n) \leq 2M \max_{[-M,M]} |\psi_n(x)| \leq 2M \max |\phi_n'| \to 0, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

y así completamos la prueba de $ii)$.

Capítulo 3

Operaciones básicas con distribuciones

Ya conocido el concepto de distribución, una pregunta natural es saber qué tipo de operaciones podemos realizar con ellas. En el presente capítulo describiremos cómo se define la suma de distribuciones, el producto de una distribución por una función, la derivada de una distribución; además, verificamos la validez de la regla de Leibniz y hacemos un corto análisis de la existencia de primitivas de una distribución. Finalicemos haciendo un pequeño análisis sobre la operación de división de distribuciones y la convergencia en $D'(\mathbb{R}^n)$.

3.1. Suma de distribuciones

Dadas dos distribuciones T_1 y T_2, la suma $T_1 + T_2$ es otra distribución, definida como

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 \ : \ C_c^\infty(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto (T_1 + T_2)(\phi) = T_1(\phi) + T_2(\phi). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Para ver que $(T_1 + T_2)$ es de hecho una distribución, consideramos una sucesión de funciones *test* $(\phi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces

$$(T_1 + T_2)(\phi_n) = T_1(\phi_n) + T_2(\phi_n) \to 0,$$

ya que $T_1(\phi_n) \to 0$ y $T_2(\phi_n) \to 0$ puesto que T_1 y T_2 son distribuciones en $\mathbb{R}^n$.

La linealidad del funcional $T_1 + T_2$ se verifica fácilmente, debido a la linealidad de T_1 y T_2.

Análogamente podemos definir el producto de una distribución T por un número real α. De hecho, αT es una distribución definida por:

$$\begin{aligned} \alpha T \ : \ C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \ &\longrightarrow \qquad\qquad \mathbb{R} \\ \phi \qquad &\longmapsto \ (\alpha T)(\phi) = \alpha(T(\phi)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Es fácil verificar que αT es de hecho una distribución sobre $\mathbb{R}^n$.

En efecto, si $\phi(n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_n \to 0$, entonces $(\alpha T)(\phi_n) = \alpha(T(\phi_n)) \to \alpha 0 = 0$, ya que $T \in D'(\mathbb{R}^n)$. La linealidad de αT se sigue de la linealidad de T.

Con lo anterior deducimos que el conjunto de todas las distribuciones sobre $\mathbb{R}^n$, $D'(\mathbb{R}^n)$, forma un espacio vectorial con la suma $(+)$ y el producto escalar $(\cdot)$ definido por (3.1) y (3.2).

3.2. Producto de una función por una distribución

Dada una función f y una distribución T, queremos dar un sentido al producto fT. Considerar tal producto es importante no solo desde el punto de vista teórico, sino también desde el punto de vista de las aplicaciones; de hecho, expresiones de la forma fT aparecen, por ejemplo, cuando se considera el momento de una función distribuida aplicada en una viga.

Iniciamos observando que si g es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que es integrable en intervalos acotados, y si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, entonces el producto $f \cdot g$ también es integrable en los intervalos acotados de $\mathbb{R}$. De hecho, si $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, entonces

$$\int_a^b f \cdot g \leq \int_a^b |f \cdot g| \leq M \int_a^b |g| < \infty.$$

En la desigualdad anterior hemos usado el hecho de que toda función continua en un cerrado alcanza su máximo valor.

Así, de acuerdo con la identificación entre funciones y distribuciones analizada en la Sección (3.2), la definición de producto debe ser introducida de tal forma que, en este caso particular, valga

$$fT_g = T_{fg}.$$

Como

$$T_{fg}(\phi) = \int f(x)g(x)\phi(x)dx = T_g(f\phi), \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

lo anterior sugiere que definamos el producto de una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por una distribución $T \in D'(\mathbb{R}^n)$, como

$$\begin{array}{rcl} fT \ : \ C_c^\infty(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & (fT)(\phi) = T(f\phi), \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \end{array} \tag{3.3}$$

De la expresión (3.3), es evidente por qué la función f debe ser de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. La verdad, el producto de f por una función *test*, debe ser otra función *test*.

No es dificil ver que el funcional fT es también otra distribución. De hecho, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces,

$$fT(\alpha\phi_1+\phi_2) = T(f(\alpha\phi_1+\phi_2)) = T(\alpha f\phi_1+f\phi_2) = \alpha T(f\phi_1)+T(f\phi_2) = \alpha(fT)(\phi_1)+(fT)(\phi_2).$$

Por otro lado, si $(\phi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\phi_n \to 0$, entonces

$$(fT)(\phi_n) = T(f\phi_n) \to 0, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

ya que si $\phi_n \to 0$, entonces

$$f\phi_n \to 0, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Ejemplo 3.1. *Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x$, y sea T la distribución valor principal, esto es, $T = VP\left[\frac{1}{x}\right]$.*

Así tenemos:

$$\begin{aligned} (fT)(\phi) &= (x)VP\left[\frac{1}{x}\right](\phi) = VP\left[\frac{1}{x}\right](x\phi) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \phi(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1(\phi). \end{aligned}$$

Luego $xVP\left[\frac{1}{x}\right] = 1$. (La distribución asociada a la función constante 1).

Ejemplo 3.2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^{\infty}(\mathbb{R})$ y consideremos la distribución δ_a (delta de Dirac trasladada). Veamos cómo se da el producto entre f y δ_a.*

$$f\delta_a(\phi) = \delta_a(f\phi) = (f\phi)(a) = f(a)\phi(a) = f(a)\delta_a(\phi), \quad \forall \phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}),$$

luego

$$\begin{array}{rcl} f\delta_a \ : \ C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & f\delta_a(\phi) = f(a)\delta_a(\phi), \end{array}$$

o sea

$$f\delta_a = f(a)\delta_a.$$

En particular, si $a = 0$ (esto es $\delta_a = \delta$), entonces $f\delta = f(0)\delta$.

Desafortunadamente no es posible definir una operación de producto en el espacio de las distribuciones que sea asociativa, conmutativa y compatible con el producto entre una función infinitamente derivable y una distribución, como fue definido anteriormente. Una razón de esto es la siguiente. Si el producto $(\cdot)$ entre dos distribuciones cualquiera existiese, podríamos considerar la distribución

$$T = \delta \cdot VP\left[\frac{1}{x}\right].$$

Tendríamos entonces

$$xT = x\left(\delta \cdot VP\left[\frac{1}{x}\right]\right) = x\delta \cdot VP\left[\frac{1}{x}\right] = 0 \cdot VP\left[\frac{1}{x}\right] = 0.$$

Por otro lado, tendríamos también

$$\begin{aligned} xT = T \cdot x = \delta \cdot & \left(VP\left[\frac{1}{x}\right] \cdot x\right) \\ = \delta \cdot & \left(x \cdot VP\left[\frac{1}{x}\right]\right) \\ = \delta \cdot & \left(xVP\left[\frac{1}{x}\right]\right) \\ = \delta \cdot & 1 \\ = \delta. & \end{aligned}$$

En muchos problemas que involucran ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, por ejemplo, problemas en los cuales aparecen ondas de choque [7], se hace necesario introducir el producto para cierta clase de distribuciones. En los ultimos años se han realizado esfuerzos con miras a conseguir buenas definiciones de producto entre distribuciones, y parte de ello se hace mediante la introducción de *Espacios de funciones generalizadas*. Este aspecto es bastante delicado y requiere conocimientos más avanzados del análisis matemático. No iremos con detalles puesto que ello se sale de los objetivos de este trabajo. El lector interezado puede consultar, por ejemplo, el libro de Shilov [10].

3.3. Derivada de una distribución

Consideremos una función f que sea derivable y cuya derivada f' sea continua. Consideremos en seguida las distribuciones asociadas a f y f', dadas por T_f y $T_{f'}$.

Una pregunta natural es saber si existe alguna relación entre T_f y $T_{f'}$.

Usando integración por partes y sabiendo que ϕ se anula fuera de un conjunto acotado, ya que $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, tenemos:

$$T_{f'}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)dx.$$

Notando que la derivada de una función *test* es otra función *test*, podemos escribir

$$T_{f'}(\phi) = -T_f(\phi'), \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}). \tag{3.4}$$

La noción de derivada de una distribución debe ser introducida de manera que sea consistente con la noción clásica de derivada, esto es, de manera que cuando la distribución es de la forma T_f, con f continuamente diferenciable, tengamos

$$(T_f)' = T_{f'}.$$

Motivados por la expresión (3.4), presentamos la definición formal de derivada de una distribución $T \in D'(\mathbb{R}^n)$, como:

$$\begin{array}{rcccc} (\partial_{x_j} T) & : & C_c^\infty(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \phi & \longmapsto & (\partial_{x_j} T)(\phi) = -T(\partial_{x_j}\phi). \end{array} \tag{3.5}$$

No es dificil verificar que cada $\partial_{x_j} T$ es una distribución en $\mathbb{R}^n$. Continuando el proceso, concluimos que toda distribución es, de hecho, infinitamente derivable. En particular, para una derivada D^k de orden k en $\mathbb{R}^n$, tenemos, de la ecuación (3.5),

$$\begin{aligned} D^k T \ : \ C_c^\infty(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\longmapsto D^k T(\phi) = (-1)^k T(D^k \phi). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dadas dos distribuciones T y $S \in D'(\mathbb{R}^n)$, tenemos que la derivada D^k de orden k en $\mathbb{R}^n$, es dada por

$$D^k(S+T) = D^k S + D^k T.$$

De hecho, si $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, tenemos:

$$\begin{aligned} D^k(S+T)(\phi) &= (-1)^k (S+T)(D^k\phi) \\ &= (-1)^k S(D^k\phi) + (-1)^k T(D^k\phi) \\ &= D^k S(\phi) + D^k T(\phi) \\ &= (D^k S + D^k T)(\phi). \end{aligned}$$

Observación 3.3. *Sabemos que no toda función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es derivable. Sin embargo es curioso ver que introducimos un espacio mayor (las distribuciones), espacio que contiene el conjunto de las funciones integrables en conjuntos acotados a través de la identificación $f \longmapsto T_f$, en el cual podemos derivar indefinidamente.*

El potencial de la aplicabilidad de la derivada de una distribución aparece en el estudio de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias, una vez que tenemos más objetos para ser considerados como posibles soluciones.

El cálculo clásico para funciones de varias variables es inadecuado cuando se desea tener una teoría simple y general para tratar las ecuaciones diferenciales, en particular, las ecuaciones diferenciales parciales. Así por ejemplo, las dos ecuaciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0, \tag{3.7}$$

no tienen las mismas soluciones. La primera ecuación es satisfecha por la función $u(x,y) = |x|$ en tanto que $\frac{\partial u}{\partial x}$ no está definida para $x = 0$. Una forma de hacer que las dos ecuaciones tengan las mismas soluciones es suplementar el espacio de soluciones *admisibles por el espacio de distribuciones, donde sabemos que la derivación es posible. Así, a pesar de que la función* $|x|$ *no es diferenciable en el sentido clásico, la función* $u(x, y) = |x|$ *también satisfará la segunda ecuación en* (3.7)*, hablando en términos de distribuciones. Situaciones como esta motivan la definición de derivada de distribuciones.*

Ejemplo 3.4. *Consideremos la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \cos(x)$*, y tomamos la distribución asociada*

$$\begin{array}{rcccl} T_{\cos(x)} & : & C_c^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \phi & \longmapsto & \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x) \cdot \phi(x) dx. \end{array}$$

Por (3.6) *tenemos*

$$\begin{aligned} DT_{\cos(x)}(\phi) &= -T_{\cos(x)}(D\phi) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)\phi'(x)dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(x)\phi(x)dx \quad \textit{(integración por partes)} \\ &= -T_{\operatorname{sen}(x)} \end{aligned}$$

O sea, la derivada de la distribución $\cos(x)$ es la distribución $-\operatorname{sen}(x)$, como era de esperarse.

Ejemplo 3.5. *(La derivada del escalón de Heaviside)*
Consideremos nuevamente la función de Heaviside H*, definida por*

$$\begin{array}{rcccl} H & : & \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \textit{si } x < 0, \\ 1, & \textit{si } x > 0. \end{cases} \end{array}$$

Calculemos la derivada de la distribución asociada a H*. Por* (3.6) *tenemos*

$$\begin{aligned} D(T_H)(\phi) &= -T_H(D\phi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\phi'(x)dx \\ &= -\int_{0}^{\infty} \phi'(x)dx \end{aligned}$$

$$= \phi'(0) = \delta(\phi), \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Luego

$$D(T_H) = \delta \quad \textit{(la delta de Dirac).}$$

Análogamente podemos ver que

$$D(T_{H_a}) = \delta_a,$$

donde H_a es la función de Heaviside trasladada, esto es,

$$\begin{array}{rcl} H \ : \ \mathbb{R} - \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0, & \text{si } x < a, \\ 1, & \text{si } x > a. \end{cases} \end{array}$$

Ejemplo 3.6. *Consideremos la función $f(x) = \log|x|$, $x \neq 0$. Calculemos la derivada de la distribución asociada a $f(x)$. Por* (3.6) *tenemos*

$$\begin{aligned} D(T_{\log|x|})(\phi) &= -T_{\log|x|}(D\phi) \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} (\log|x|)\phi'(x)dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \int_\varepsilon^\infty (\log x)\phi'(x)dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x)\phi'(x)dx \right\} \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ -(\log\varepsilon)\phi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{x}\phi(x) + (\log\varepsilon)\phi(-\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x)dx \right\} \\ &= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \{(\log\varepsilon)(\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)\} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x}\phi(x)dx \\ &= VP\left[\frac{1}{x}\right](\phi), \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$D(T_{\log|x|}) = VP\left[\frac{1}{x}\right].$$

Ejemplo 3.7. *Consideremos la función $f(x) = -x$ y la distribución dada por la derivada de la distribución delta de Dirac. Calculemos $fD\delta = -xD\delta$.*

$$-xD\delta(\phi) = D\delta(-x\phi)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\delta(D(-x\phi)) = -\delta(-x\phi' - \phi) \\
&= \delta(x\phi') + \delta(\phi) \\
&= \delta(\phi), \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Luego la distribución delta de Dirac puede ser vista como el producto de la función $f(x) = -x$ por la derivada de la misma delta de Dirac.

3.4. Regla de Leibniz

El objetivo de está sección es mostrar que dada una distribución $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ y una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, vale la regla de Leibniz:

$$
D(fT) = DfT + fDT. \tag{3.8}
$$

Para demostrar (3.8), consideramos $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, y así tenemos que

$$
D(fT)(\phi) = -(fT)(D\phi) = -T(fD\phi).
$$

Por otro lado, como f y ϕ son infinitamente diferenciables, tenemos

$$
\begin{aligned}
-T(fD\phi) &= -T(D(f\phi) - \phi Df) \\
&= -T(D(f\phi)) + T(\phi Df) \\
&= DT(f\phi) + T(Df\phi) \\
&= fDT(\phi) + DfT(\phi),
\end{aligned}
$$

lo cual muestra (3.8).

Ejemplo 3.8. *Consideremos la distribución T_{H_a} asociada a la función de Heaviside y sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Puesto que $D(T_{H_a}) = \delta_a$, por (3.8) tenemos

$$
D(fT_{H_a}) = f(a)\delta_a + DfT_{H_a}.
$$

Ejemplo 3.9. *Consideremos la distribución* $T_{|x|}$ *asociada a la función valor absoluto y calculemos la derivada de* $T_{|x|}$*. Calculemos* $D(T_{|x|})$*.*
Notemos que $|x| = xH + x(H-1)$, $x \neq 0$ *donde*

$$\begin{array}{rcl} H \ : \ \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & H(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0, \\ 1, & si\ x > 0. \end{cases} \end{array}$$

Por la regla de Leibniz (3.8)*, obtenemos*

$$\begin{aligned} D(T_{|x|}) &= D(xT_H + xT_{H-1}) \\ &= D(xT_H) + D(xT_{H-1}) \\ &= T_H + xD(T_H) + T_{H-1} + xD(T_{H-1}) \\ &= T_H + x\delta + T_{H-1} - x\delta \\ &= 2T_H - T_1, \end{aligned}$$

donde T_1 *es la distribución asociada a la función constante* 1*.*

Observación 3.10. *El lector ya debe haber notado que el hecho de considerar* $|x| = xH + x(H-1)$ *para* $x \neq 0$*, sin considerar* $|x| = 0$*, si* $x = 0$*, no es relevante, ya que sabemos que la derivación de la distribución* $T_{|x|}$ *viene dada por una integral, y por tanto la integral en el intervalo* $(-\infty, \infty)$ *es igual a la integral en* $(-\infty, 0)$ *sumando la integral en el intervalo* $(0, \infty)$*.*

3.5. Primitiva de una distribución

El objetivo de esta sección es probar que dada cualquier distribución $S \in D'(\mathbb{R}^n)$, siempre existe otra distribución $T \in D'(\mathbb{R}^n)$, tal que $DT = S$. Este hecho es muy importante, ya que nos indica que toda distribución tiene una primitiva.
Iniciamos observando que dada una función *test* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, la primitiva $\int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt$ no es necesariamente una función *test*. Veamos la siguiente proposición.

Proposición 3.11. *(Primitiva de una función test). Sea* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. *Entonces existe* $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ *tal que* $\psi' = \phi$ *si y solo si,* $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = 0$.

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\psi' = \phi$.

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt &= \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \phi(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \psi'(t)dt \\ &= \lim_{b\to\infty} [\psi(b) - \psi(-b)] = 0, \quad \text{ya que} \quad \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$) Recíprocamente, supongamos que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = 0$. Consideremos la función

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt.$$

Es claro que $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, ya que como $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, ella se anula fuera de un conjunto de la forma $[-M, M]$ y lo mismo ocurrirá con ψ. Además, por el Teorema Fundamental del Cálculo, $\psi' = \phi$. □

Observación 3.12. *La Proposición* (3.11) *es fácilmente demostrable en el caso de* $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.13. *(Existencia de una primitiva). Dada una distribución* $T \in D'(\mathbb{R})$, *existe* $S \in D'(\mathbb{R})$ *tal que* $DS = T$.

Demostración. Consideremos una función $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ que satisfece la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 1.$$

Dada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, escribiremos ϕ en la forma

$$\phi = [\phi - a\psi] + a\psi,$$

donde

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt.$$

Recordemos que como $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, entonces $a < \infty$. Notamos también que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\phi(t) - a\psi(t)]dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt - a \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt - a \\
&= a - a \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Consecuentemente, debido a la Proposición (3.11) tenemos que existe $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$h' = \phi - a\psi.$$

Así, dada una distribución $T \in D'(\mathbb{R})$, consideremos la distribución $S \in D'(\mathbb{R})$ definida por

$$
\begin{aligned}
S \ : \ C_c^\infty(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\phi \quad &\longmapsto \quad S(\phi) = -T(h).
\end{aligned}
$$

Afirmamos que $DS = T$. De hecho,

$$
\begin{aligned}
DS(\phi) &= -S(D\phi) \\
&= -S(-\phi) \\
&= T\left(\int_{-\infty}^{x} \left\{\phi'(t) - \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(s)ds\right]\psi(t)\right\} dt\right) \\
&= T(\phi),
\end{aligned}
$$

ya que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(s)ds = 0$. $\square$

Observación 3.14. *De manera análoga a la demostración del Teorema 3.13, podemos generalizar dicho resultado para distribuciones en* $\mathbb{R}^n$.

Proposición 3.15. *(Primitiva de la distribución nula). Sea* $T \in D'(\mathbb{R})$ *una distribución en* $\mathbb{R}$ *tal que* $DT = 0$. *Entonces* $T = C$, *donde* C *es la distribución constante, esto es,*

$$T(\phi) = C \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Demostración. Como $DT = 0$, entonces tenemos que

$$DT(\phi) = -T(\phi') = 0, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}). \tag{3.9}$$

Usando la misma notación del Teorema (3.13), tenemos

$$T(\phi) = T(\phi - a\psi) + T(a\psi).$$

Notemos que $\phi - a\psi$ es la derivada de una función *test*, y por lo tanto, por (3.9),

$$T(\phi - a\psi) = 0.$$

Así,

$$T(\phi) = T(a\psi) = aT(\psi) = T(\psi)\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx,$$

como queríamos demostrar. $\square$

Por la proposición anterior sabemos que si dos distribuciones T_1 y $T_2 \in D'(\mathbb{R})$ son tales que $DT_1 = DT_2$, entonces T_1 y T_2 difieren por una constante.

Como aplicación de la última observación, supongamos que queremos saber cuál es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dx} = \delta. \tag{3.10}$$

Sabemos que $\frac{dT_H}{dx} = \delta$, donde T_H es la distribución asociada a la función de Heaviside; por lo tanto, la solución de la ecuación (3.10) es

$$T = T_H + C,$$

donde C es la distribución asociada a la función constante C.

3.6. División de distribuciones

Dada una distribución T en $\mathbb{R}^n$ y una función f de clase $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, el problema de la división consiste en encontrar otra distribución S tal que $fS = T$. Si f no se anula en ningún punto, la solución obvia es $S = \frac{1}{f}t$ y la solución es única. El problema puede a veces tener solución aunque f se anule en algún punto. Por ejemplo, si T_1 es la distribución asociada a la función constante 1 y $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, una solución es

$$S_0 = VP\left[\frac{1}{x}\right].$$

Más generalmente, $S = S_0 + c\delta$, también es solución.

Si una distribución W satisface $xW = T_1$, es claro que $x(W - S_0) = 0$. Entonces $W - S_0$ se anula para $x \neq 0$ y el soporte de $W - S_0$, el cuál se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$ fuera de los cuales $W - S_0$ es nulo en el conjunto $\{0\}$.

Se puede mostrar que $W-S_0$ es una combinación lineal de δ y sus derivadas. Además, cualquier combinación que contenga derivadas de δ de orden positivo no se anula cuando es multiplicada por $f(x) = x$.Ver [5].

En conclusión $S = VP\left[\frac{1}{x}\right] + c\delta$, donde c constante, es la solución general de $xS = T_1$.

Consideremos el problema $xS = T$, $T \in D'(\mathbb{R})$. Si $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $f(0) = 0$, se sigue por el Teorema Fundamental del Cálculo, que

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt = x\int_0^x f'(\tau t)d\tau t = x\beta(x), \quad \beta \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

Fijando una función $\gamma \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\gamma(0) = 1$ y aplicando el raciocinio anterior a la función $\phi(x) - \phi(0)\gamma(x)$ con $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, concluimos que

$$\phi(x) = \phi(0)\gamma(x) + x\beta(x), \quad \beta \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Así, la expresión

$$\begin{array}{rccc} S \ : & C_c^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \phi & \longmapsto & T(\phi) = T\left(\frac{\phi-\phi(0)\gamma}{x}\right), \end{array}$$

define una distribución que satisface $xS = T$, y la solución general se obtine adicionando un multiplo de δ. La verificación de la última afirmación se deja al lector; así mismo, referimos al lector interesado en conocer más detalles sobre el problema de división de distribuciones a la referencia ver [5].

3.7. Convergencia en $D'(\mathbb{R}^n)$

Dada una sucesión de distribuciones $(T_n)_{n=1}^\infty$ en $D'(\mathbb{R}^n)$, es interesante saber cómo se define la posible convergencia de $(T_n)_{n=1}^\infty$ a una distribución $T \in D'(\mathbb{R}^n)$. Esta noción de convergencia constituye el objetivo de esta sección.

Definición 3.16. *(Convergencia en $D'(\mathbb{R}^n)$). Dada una sucesión $(T_n)_{n=1}^\infty \in D'(\mathbb{R}^n)$, se dice que (T_n) converge a una distribución $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ si*

$$T_n(\phi) \to T(\phi), \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Ejemplo 3.17. *Si* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *con* $\phi \geq 0$ *y* $\int_{\mathbb{R}^n} \phi dx = 1$*, entonces cuando* $\varepsilon \to 0$*, tenemos que* $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \to \delta$ *en* $D'(\mathbb{R}^n)$*.*

De hecho, si $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, como fue visto en el Capítulo 1, tenemos que

$$\phi_\varepsilon \psi = \frac{1}{\varepsilon^n} \int \phi(x)\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \to \psi(0).$$

El gráfico de la función $\phi_\varepsilon(x)$ tiene forma de campana; el soporte de ϕ_ε es el conjunto de puntos donde ϕ_ε no es nula, decrece con ε y la altura crece de forma que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon dx = 1.$$

Esto corresponde con la descripción heurística de la función delta de Dirac δ.

Capítulo 4

Transformada de Laplace de la función delta de Dirac

El objetivo de este capítulo es ver que es posible obtener la Transformada de Laplace de la función delta de Dirac. Sabemos que existen posibles problemas de ecuaciones diferenciales, por ejemplo problemas de masa y resorte, o de un circuito eléctrico en serie, en los cuales aparecen fuerzas externas discontinuas (ver Capítulo 1). Un ejemplo de ese tipo de funciones externas puede ser un delta de Dirac. La Transformada de Laplace es una valiosa herramienta para resolver problemas de esta índole; en este sentido se hace necesario saber cómo calcular la Transformade de Laplace de la función delta de Dirac.

Iniciamos recordando la definición y algunas propiedades de la Transformada de Laplace. Si f es una función definida para $t \geq 0$, entonces la función

$$\mathcal{L}\left\{f(x)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \tag{4.1}$$

se llama *Transformada de Laplace de* f, siempre que la integral converja.

Es claro que cuando la integral (4.1) converge, el resultado es una función de s.

Una propiedad importante de la Transformada de Laplace es la linealidad. De hecho se tiene la siguiente proposición.

Proposición 4.1. *Sea $f_1, \ldots, f_n$ funciones definidas para $t \geq 0$ tales que*

$\mathcal{L}\{f_1\},\ldots,\mathcal{L}\{f_n\}$ existen. Entonces,

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_j(t)\right\}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathcal{L}\{f_j(t)\},$$

para cualquier $\alpha_j\in\mathbb{R}, j=1,\ldots,n.$

La demostración de la Proposición (4.1) se sigue de la linealidad de la operación de integración.

Para resolver problemas de ecuaciones diferenciales necesitamos cacular la Transformada de Laplace de derivadas de una función f

$$\mathcal{L}\left\{f^k(t)\right\}.$$

El siguiente teorema nos permite calcular la Transformada de Laplace de la n-ésima derivada de f.

Teorema 4.2. *Si f, f',$\ldots$,f^{n-1} son continuas en $[0,\infty)$, son de orden exponencial *, y si $f^n(t)$ es seccionalmente continua en $[0,\infty)$, entonces*

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\}=S^n\mathcal{L}\{f(t)\}-S^{n-1}f(0)-\ldots f^{n-1}(0).$$

Además de la necesidad de conocer la Transformada de Laplace de la n-ésima derivada de una función f, es necesario recordar el concepto de la transformada inversa de Laplace, incluyendo propiedades de la linealidad.

Definición 4.3. *Si $F(s)$ es la Transformada de Laplace de una función $f(t)$, esto es $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$, decimos que $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $F(s)$, y se denota*

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

.

Proposición 4.4. *Sean $F_1(s),\ldots,F_n(s)$ las Transformadas de Laplace de las funciones $f_1(t),\ldots,f_n(t)$, respectivamente, y sean $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ naturales reales. Entonces*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j F(j)(s)\right\}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathcal{L}^{-1}\{F_j(s)\}.$$

*Se dice que una función f es de orden exponencial α si existen constantes $M>0$ y $T>0$, tales que $|f(t)|\leq Me^{\alpha t}$, para todo $t>T$.

Después de este corto resumen de ciertas propiedades de la Transformada de Laplace, volvamos nuevamente a la función $g_{\Delta t}$ definida en el Capítulo 1.

$$g_{\Delta t}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta t}, & \text{si } t_0 - \Delta t \leq t \leq t_0 + \Delta t, \\ 0, & \text{otros casos.} \end{cases}$$

Dado $t_0 > 0$, para cualquier $\Delta t > 0$ podemos calcular, $\mathcal{L}\left\{g_{\Delta t}(t)\right\}$. De hecho,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{g_{\Delta t}(t)\right\} &= \int_0^\infty g_{\Delta t}(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{t_0-\Delta t}^{t_0+\Delta t} \frac{1}{2\Delta t} e^{-st} dt \\ &= \left(\frac{1}{2\Delta t}\right)\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)\Big|_{t=t_0-\Delta t}^{t=t_0+\Delta t} \\ &= \left(\frac{1}{2\Delta t}\right)\left(-\frac{e^{-s(t_0+\Delta t)} - e^{-s(t_0-\Delta t)}}{s}\right) \\ &= \frac{e^{-t_0 s}}{s}\left(\frac{e^{s\Delta t} - e^{-s\Delta t}}{2\Delta t}\right). \end{aligned}$$

Al calcular el límite de esta cantidad cuando $\Delta t \to 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \mathcal{L}\left\{g_{\Delta t}\right\} &= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{e^{-t_0 s}}{s}\right)\left(\frac{e^{s\Delta t} - e^{-s\Delta t}}{2\Delta t}\right) \\ &= \left(\frac{e^{-t_0 s}}{s}\right)\lim_{\Delta t \to 0} e^{-s\Delta t}\left(\frac{e^{2s\Delta t} - 1}{2\Delta t}\right) \\ &= e^{-t_0 s}. \end{aligned}$$

Así pues, tenemos que el límite de la Transformada de Laplace de $g_{\Delta t}$ cuando $\Delta t \to 0$ es la función

$$\mathcal{L}\left\{\delta_{t_0}(t)\right\} = e^{-t_0 s}.$$

Volvamos ahora a la ecuación del oscilador armónico, con constante de resorte a_2 y coeficiente de amortiguamiento a_1, que es golpeado con martillo una sola vez en el tiempo $t = t_0$.

Para este ejemplo escojamos condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$. Es decir, el resorte está alargado una unidad con respecto a su estado de reposo y luego se suelta con velocidad 0. Con la función delta de Dirac podemos escribir el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_2y=\delta_{t_0}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0. \tag{4.2}$$

Ahora empleemos la Transformada de Laplace para resolver el problema de valor inicial (4.2).

Al aplicar la Transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación (4.2), y usando la linealidad de la Transformada de Laplace, obtenmos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\}+a_1\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}+a_2\mathcal{L}\left\{y\right\}=\mathcal{L}\left\{\delta_{t_0}\right\}.$$

Usando las fórmulas para la Transformada de Laplace de la primera y segunda derivada, encontramos

$$S^2\mathcal{L}\left\{y\right\}-Sy(0)-y'(0)+a_1S\mathcal{L}\left\{y\right\}-a_1y(0)+a_2\mathcal{L}\left\{y\right\}=\mathcal{L}\left\{\delta_{t_0}\right\}.$$

Al sustituir las condiciones iniciales y evaluar $\mathcal{L}\left\{\delta_{t_0}\right\}$, tenemos

$$S^2\mathcal{L}\left\{y\right\}-S+a_1S\mathcal{L}\left\{y\right\}-a_1+a_2\mathcal{L}\left\{y\right\}=e^{-t_0S}.$$

Despejando $\mathcal{L}\left\{y\right\}$ resulta

$$\mathcal{L}\left\{y\right\}=\frac{S+a_1}{S^2+a_1S+a_2}+\frac{e^{-t_0S}}{S^2+a_1S+a_2}.$$

Por consiguiente,

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S+a_1}{S^2+a_1S+a_2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-t_0S}}{S^2+a_1S+a_2}\right\}.$$

La solución de la ecuación depende del valor de la constante del resorte y el coeficiente de amortiguamiento. Es de esperarse que se presente discontinuidad en $t=t_0$, justo cuando se aplica la fuerza de impulso.

REFERENCIAS

[1] CORDARO P.D., KAWANO A.O. *Delta de Dirac. Uma Introdução á Teoría das Distribuições para a Engenharía*. Livraría da Física, Editora Unicamp, 2002.

[2] DE FIGUEREIDO D. *Analise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[3] DIRAC Paul. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 1930.

[4] FOLLAND G.B. *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton Univ. Press, 1976.

[5] HOUNIE J.*Teoría elementar das distribuições* . 12° Coloquio Brasileiro de matemática, IMPA, 1979.

[6] IORIO R.J. IORIO V. *Ecuações Diferenciais Parciais* . Una Introdução. IMPA, Rio de Janeiro, 1988.

[7] IORIO V. *E.D.P. Un curso de graduação*. IMPA, Rio de Janeiro, 1989.

[8] LAURENTZ E. *Partial Diferential Equations*. Ame. Math. Soc., 1992.

[9] SCHWARTZ Laurent. *Théorie des distributions*. Tomos 1 y 2, París, 1950-1951.

[10] SHÍLOV Serguéi. *Generalizad Function and Partiel Differential Equations*. Gordon and Breach, New York, 1968.

[11] SÓBOLIEV Serguéi. *Repertorio Matemático*. Vol. 1 (1936), pág. 39-72 (en ruso).