

Análisis de la estructura del campo gravitacional en los  
modelos de discos relativistas de Morgan y Morgan  
inmersos en un halo esferoidal de materia

Christian Camilo Meneses Benítez

Trabajo de grado para optar por el título de Físico

Director:  
Guillermo Alfonso González Villegas  
Físico, M.Sc., Ph.D.

Universidad Industrial de Santander  
Facultad de ciencias  
Escuela de Física  
Bucaramanga  
2022

# RESUMEN

**TÍTULO:** Análisis de la estructura del campo gravitacional en los modelos de discos relativistas de Morgan y Morgan inmersos en un halo esferoidal de materia.<sup>1</sup>

**AUTOR:** Christian Camilo Meneses Benítez.<sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVE:** Espacio-tiempo Conformestático, Discos Relativistas de Morgan-Morgan, Halo esferoidal de materia, Líneas de Campo Gravitacional.

## DESCRIPCIÓN:

El presente proyecto presenta el cálculo y análisis de la estructura del campo gravitacional en un espacio-tiempo conformestático axialmente simétrico correspondiente a la superposición de los discos relativistas de Morgan y Morgan y un halo esferoidal de materia (González and Pimentel, 2016). Se realiza un estudio de las propiedades del sistema compuesto mediante un análisis de las líneas de campo gravitacional, las cuales se definen como las curvas integrales de la cuadri-aceleración de observadores estacionarios con momento angular cero con respecto al eje de simetría (Semerák et al., 1999). Se describe el proceso por el cual se obtiene el tensor métrico capaz de describir el sistema compuesto mencionado anteriormente, y a partir de este se estudia el comportamiento de la cuadri-aceleración de dichos observadores. Las motivaciones del estudio se extienden a establecer un estudio físico en modelos galácticos similarmente cercanos a aquellos que se han obtenido a partir de observaciones, en cuanto a masa e influencia gravitacional se refiere.

---

<sup>1</sup>Trabajo de Grado

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias, Grupo de investigación en Relatividad y Gravitación. Escuela de Física. Director: Guillermo Alfonso Gonzalez Villegas, Ph.D.

# ABSTRACT

**TÍTULO:** Analysis of the structure of the gravitational field in the Morgan and Morgan relativistic disk models immersed in a spheroidal halo of matter. <sup>1</sup>

**AUTOR:** Christian Camilo Meneses Benítez. <sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVE:** Conformal space-time, Relativistic Morgan-Morgan disks, Spheroidal matter halo, Gravitational field lines.

## DESCRIPCIÓN:

The present project presents the calculation and analysis of the structure of the gravitational field in an axially symmetric conformastat space-time corresponding to the superposition of the relativistic Morgan and Morgan disks and a spheroidal halo of matter (González and Pimentel, 2016). A study of the properties of the composite system is carried out by means of an analysis of the gravitational field lines, which are defined as the integral curves of the four-acceleration of stationary observers with zero angular momentum with respect to the symmetry axis (Semerák et al., 1999). The process by which the metric tensor capable of describing the aforementioned composite system is obtained is described, and from this the behavior of the four-acceleration of these observers is studied. The motivations of the study are extended to establish a physical study in galactic models similarly close to those obtained from observations, as far as mass and gravitational influence are concerned.

---

<sup>1</sup>Degree Work

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias, Grupo de investigación en Relatividad y Gravitación. Escuela de Física. Director: Guillermo Alfonso Gonzalez Villegas, Ph.D.

# AGRADECIMIENTOS

Sin duda, hay demasiadas personas a las cuales deseo mostrar mi gratitud por todo ese apoyo brindado a lo largo de la realización de este proyecto y de mi vida universitaria. Incluso me permito mirar al pasado y agradecer a todos esos docentes que, desde el colegio, me han inspirado a estudiar esta maravillosa carrera, sin duda alguna ha sido una elección de la cual he disfrutado.

Agradezco a mi hermano Wilmer por ser la persona que me ha acompañado en cada pequeño logro de mi vida y lo ha celebrado junto a mí. Él me ha enseñado a ver el mundo desde perspectivas distintas, me ha orientado y ha sido mi más grande amigo. Sin él, no sería la persona que soy hoy en día. Le doy gracias a mi madre Amparo, quien me ha visto crecer y ha sido una persona importante a lo largo de mi vida.

Quisiera, también, agradecer a Lorena, mi novia. Quien en todo momento me ha brindado su apoyo y cariño. Comparto la idea de varios pensadores de la historia, una vida sin amor, carece de sentido. Agradezco a la señora Luz y a Mariana, quienes me han brindado comprensión y amistad en momentos difíciles.

Mi gratitud también va por aquellos amigos que en algún momento hicieron parte de mi vida. Ethan, quien sin darse cuenta ha sido un gran apoyo emocional. Agradezco a todos los amigos que me ha dado la universidad a Sharon, Katherin, Lizeth, David, Juan David, Francisco, Cristian, Tomás y Jean, han ocupado un lugar importante en mi vida. También, quisiera agradecerle a todos esos grandes amigos quienes aún están presentes desde hace muchos años a David, Santiago, Angie, Allison y Daniela.

Por último, quisiera darle las gracias a mi profesor, Guillermo González. Por toda la paciencia y apoyo a lo largo de este proyecto. Es un ejemplo para mí a nivel personal y profesional. Ha sido un gran maestro.

# DEDICATORIA

En primer lugar, me gustaría dedicar este proyecto a mi yo del pasado, a aquél Christian que soñaba con ser un físico, quien se esforzó tanto por alcanzar su meta y que sin duda no descansará hasta llegar aún más lejos.

Por otra parte, quiero dedicarle este logro, a aquellos que para mí son los gigantes que me brindaron sus hombros para ver más lejos. Mi hermano, quien con su sabiduría y apoyo logró guiarme desde que aprendía a leer. Mi profesor, quien fue capaz de estructurar las ideas necesarias. A aquellos científicos que hacen el arduo trabajo de investigación y redacción de sus ideas en esta área tan hermosa del conocimiento. Yendo aún más lejos, quisiera dedicar toda mi carrera a aquél campesino que se levanta a las tres de la mañana a labrar la tierra para tener un sustento para su familia; aquél comerciante que tiene más de setenta años y aún sigue trabajando para mantener a su familia; aquella madre de familia quien sola fue capaz de darle un futuro digno a sus hijos; a las personas que hacen parte del personal de salud, quienes salvan vidas a diario; a los docentes quienes dedican sus horas de descanso en buscar aquellas alternativas que los ayuden a mejorar como maestros; a todas esas personas que actúan por mero amor al prójimo; este trabajo de grado y todo lo que me define hoy en día, va dedicado a todas esas personas quienes a pesar de no conocerles o saber sus nombres, sé que están ahí y son los que aportan en pequeña o gran medida a las bases del sistema en el cuál coexistó con ellos. Sin todos ellos, la sociedad sería totalmente diferente.

Por último, quiero dedicarle estas líneas al lector, con sinceridad le digo que todo esto es fruto del esfuerzo y la pasión por la Física. Con la pasión suficiente y ciertas herramientas se puede llegar muy lejos, espero que si está pasando por una condición difícil, nunca se rinda y pueda lograr grandes cosas.

# CONTENIDO

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2. CAMPO GRAVITACIONAL</b>	<b>4</b>
2.1. Definición de Fuerzas . . . . .	5
2.2. Cuadri-aceleración para observadores co-móviles en un espacio-tiempo axialmente simétrico y estático . . . . .	7
2.2.1. Cuadri-aceleración para observadores co-móviles en un espacio-tiempo conformestático . . . . .	8
2.3. Líneas de Campo Gravitacional en un espacio-tiempo conformestático axialmente simétrico . . . . .	9
<b>3. SISTEMAS DE DISCOS DE MORGAN Y MORGAN INMERSOS EN HALOS DE MATERIA</b>	<b>13</b>
3.1. Tensor métrico . . . . .	13
3.2. Función potencial $U$ . . . . .	15
3.3. Componentes de la cuadriaceleración . . . . .	16
3.4. Líneas de Campo Gravitacional . . . . .	17
<b>4. CONCLUSIONES</b>	<b>29</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>31</b>

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

En física teórica existen problemas que son de gran fascinación y relevancia, entre los cuales se encuentra el estudio del campo gravitacional producido por una fuente de materia y los efectos de este sobre la dinámica de las partículas. Dicha importancia sobre el fenómeno se debe a que en la actualidad se conoce cómo funciona, pero debido a la complejidad de las diferentes ecuaciones se desconoce por completo las soluciones analíticas que se podrían obtener a partir de sistemas complejos compuestos por varios cuerpos. Lo anterior se explica a partir de los inicios del estudio del campo gravitacional, donde se entendía al fenómeno como gravitación newtoniana y servía para explicar ciertas observaciones de la época, tales como algunas órbitas de planetas y cuerpos celestes, y el estudio de la caída libre de cuerpos. Sin embargo, las aplicaciones puramente newtonianas de la gravitación no lograban explicar con precisión ciertos fenómenos, como es el caso de la precesión anómala del perihelio de la órbita de Mercurio o la deflexión de la luz por una distribución de masa (Epstein and Shapiro, 1980; McCrea, 1979; Schiff, 1960; Wechsler and Tinker, 2018; Will, 2014), para esto fue necesario una teoría más completa, la teoría general de la relatividad, la cual ayuda a describir apropiadamente las fuentes de campo gravitacional.

Desde que se estableció la teoría general de la relatividad han salido constantes estudios en diferentes áreas de la astrofísica. Estos están enfocados en las soluciones a las ecuaciones de Einstein, en su mayoría, de sistemas simples, conformado por un mismo tipo de cuerpo, lo que se puede interpretar como agujeros negros, estrellas masivas, discos de materia delgados, halos de materia, bulbos o cúmulos de estrellas (Anderson and Chruściel, 2005; Bičák et al., 1993; Hartle and Hawking, 1972; Letelier and Oliveira, 1987; Plebański, 1975). Por otro lado, llama la atención la dificultad que se tiene a la hora de encontrar soluciones de las ecuaciones de Einstein para sistemas compuestos. La no linealidad de las ecuaciones hace que el problema no se reduzca a una simple superposición de soluciones. Se debe abordar este tema con suma delicadeza, pues tiene un mayor grado de complejidad. Es por esto que se interpreta el problema a partir de simplificaciones donde se aplican condiciones de simetría, equilibrio termodinámico y otras con mayor relevancia como la condicionalidad de energía para que el sistema siga cumpliendo con los diferentes principios que plantea la relatividad general y sea una solución bien comportada (Curiel, 2017; Synge, 1960).

En la actualidad, se entiende que las galaxias, vistas desde las soluciones de las ecuaciones de Einstein, son sistemas complejos. Mediante observaciones se determinó que la composición más común de dichos sistemas está formada por bulbos de estrellas, cúmulos, brazos espirales, disco y halo de materia, entre otros (Lequeux, 1969). Esta complejidad limita los avances en el estudio de la astrofísica a partir de la relatividad general, en cuanto a soluciones analíticas. Como se mencionó anteriormente, no es posible hacer una superposición de los diferentes sistemas, debido al comportamiento no lineal de las ecuaciones de Einstein, pero sí es posible simplificar los cálculos introduciendo simetrías y comportamientos específicos, lo que permite llegar a una solución con mayor facilidad. Una vez se obtienen soluciones para un sistema compuesto, es posible unificarlo con otro, a partir de agregar ciertas condiciones a las ecuaciones. De este modo se obtienen las familias de soluciones a las ecuaciones de Einstein que permitan representar sistemas complejos en relatividad general.

En el marco del estudio de la relatividad general, se han hecho importantes avances en las soluciones a las ecuaciones de Einstein, a pesar de su complejidad. Si se tienen en cuenta los cuerpos de estudio más frecuentes, como por ejemplo, las estrellas, planetas, galaxias o agujeros negros, se podría observar una simetría de carácter espacial, la simetría axial. Esta propiedad ha sido aplicada de forma directa a las ecuaciones de Einstein, reduciendo considerablemente las dificultades que se tenían a la hora de solucionar, obteniendo de esta forma estudios detallados de diferentes cuerpos con simetría axial en las galaxias (Bardeen and Piran, 1983; Godazgar and Reall, 2009; Reina and Treves, 1976). A pesar que el uso de simetrías espaciales suele reducir la complejidad de las ecuaciones de Einstein, no es el único camino que se ha tomado, como se mencionó anteriormente, al tener en cuenta el comportamiento del sistema que se desea estudiar. Es decir, si este tiene un carácter estático o estacionario, se encuentran estudios en los que se obtienen resultados de forma más sencilla, tal es el caso del estudio de agujeros negros inactivos o el modelamiento de discos con fluidos contrarrotantes (Esposito and Witten, 1975; Hernandez-Pastora and Martin, 1993; Quevedo, 1989) en el caso de soluciones estáticas. Para el caso de las soluciones estacionarias, se han modelado sistemas en equilibrio termodinámico (Harmark, 2004; Zhong, 1985).

A pesar que en la actualidad ya se cuenta con diferentes soluciones en el marco de la relatividad general para diferentes sistemas en astrofísica, se tienen muy pocas soluciones para sistemas compuestos. Recientemente, se han desarrollado soluciones a las ecuaciones de Einstein en discos delgados de materia y a partir de discontinuidades es posible llegar al concepto de un agujero negro en el interior con características y condiciones particulares, como su comportamiento estático que se interpreta como inactividad de este mismo (Gutiérrez-Piñeres et al., 2014; Lemos and Letelier, 1993, 1994). Por otro lado, también es posible contemplar algunas soluciones para sistemas compuestos por discos delgados sumergidos en halos de materia bajo una simetría axial (Gutiérrez-Piñeres et al., 2013; Vogt and Letelier, 2003). Sin embargo, para este último caso de los sistemas galácticos de discos y halos, no es posible encontrar referencias donde se aborde el tema del comportamiento del campo gravitacional a partir de las soluciones de las ecuaciones de Einstein. Para el caso de sistemas galácticos más complejos que los anteriores mencionados, tampoco es posible encontrar estudios que abarquen las soluciones a las ecuaciones de Einstein, ni tampoco se ha encontrado bibliografía que plantee dichas ecuaciones. Una vez se tienen las soluciones de las ecuaciones de Einstein, es posible el desarrollo de un tensor métrico que nos indicará posteriormente las

curvas integrales de la quadri-aceleración, esto a partir del elemento de línea, lo que nos daría como resultado las líneas de campo gravitacional (Semerák et al., 1999).

En otra instancia, hay una creciente relevancia al estudio de halos de materia, debido a que se cree que es la forma en la que se plantea de forma hipotética que está distribuida la materia oscura. Este concepto nace de la diferencia que se tiene entre los datos obtenidos acerca de la masa de las galaxias y la observable por diferentes medios, pues su nombre se atribuye a que con la tecnología actual no es posible observar este tipo de materia pues se plantea que no interactúa con la luz, es decir, la radiación. Por otra parte, se cree que el halo, entendido como la estructura de la materia oscura, en algunos casos, compone más del 90 % de la masa total de la galaxia. Sin embargo, es importante resaltar que la composición habitual de una galaxia no solamente se da en forma de discos y halos de materia, también están los agujeros negros, cúmulos de estrellas, bulbos, entre otros, que contribuyen significativamente en la masa total (Binney and Tremaine, 2011; Rubin and Ford Jr, 1970; Wechsler and Tinker, 2018).

En el presente trabajo de grado se llevará a cabo el análisis de la estructura del campo gravitacional en un espacio-tiempo conformestático axialmente simétrico generado por la superposición de discos relativistas de Morgan y Morgan y un halo esferoidal de materia. Se llevará a cabo a partir de la familia de soluciones de las ecuaciones de Einstein conocidas para este tipo de sistema (González and Pimentel, 2016; González and Pimentel, 2015), donde posteriormente, se hace un estudio del elemento de línea, el cual ayuda a determinar la quadri-aceleración y a partir de sus curvas integrales se determinan las líneas de campo gravitacional. Se planea modelar los resultados y analizar el comportamiento de estas en las regiones aledañas al disco. Se espera que los resultados obtenidos sean significativos en el estudio de sistemas galácticos, debido a que gran parte de la contribución de las fuerzas gravitacionales en la mayoría de las galaxias provienen del disco de estrellas y de lo que se cree es un halo de materia no visible que tiene grandes contribuciones gravitacionales, pues contiene gran parte de la masa de la galaxia.

## Capítulo 2

# CAMPO GRAVITACIONAL

En la mecánica Newtoniana, suele ser mucho más sencilla la interpretación del campo gravitacional por medio de fuerzas, que inducen aceleraciones en los cuerpos. Sin embargo, esta visión no se proyecta de la misma manera en relatividad general, pues no es una interpretación de carácter trivial. Esto debido a que en la mecánica Newtoniana se caracterizan los sistemas por tener únicamente tres dimensiones espaciales, mientras que en el estudio post-Newtoniano y de manera general en la física Moderna, se interpreta el espacio-tiempo como aquél sistema en cuatro dimensiones, donde una de estas corresponde a la dimensión temporal. Es por esto que se hace importante la implementación de diferentes técnicas para lograr una interpretación y un fundamento teórico que pueda contribuir en la correlación de términos tal como la aceleración de partículas en un sistema con dichas fuerzas y al mismo tiempo con la estructuración del espacio-tiempo.

En primer lugar, hay una interpretación que se puede adquirir de los diferentes estudios de Semerák, de Abramowicz y colaboradores ([Abramowicz et al., 1988, 1993](#); [Semerák, 1995](#)). Dichos estudios consisten en la descomposición de fuerzas, con la finalidad de definir diferentes tipos de aceleración en una partícula o masa de prueba. En este estudio se tienen en cuenta los diferentes tipos de movimiento en forma general y se caracterizan por separado las contribuciones al movimiento o trayectoria. La finalidad de este análisis es observar de forma significativa la contribución que tiene la gravedad en la aceleración de la partícula.

En segundo lugar, se encuentra una relación que ha sido estudiada con mayor frecuencia, la del campo gravitoelectromagnético. En esta se hace una relación directa con los diferentes términos que aparecen en las ecuaciones de las geodésicas y las ecuaciones de Maxwell, donde al igual que los campos eléctricos generados por cargas estacionarias y campos magnéticos que surgen a partir de cargas en movimientos, se hace la analogía con el campo gravitacional, donde hay masas estacionarias y masas en movimiento que contribuyen de diferentes maneras a su estructura. Al igual que en el electromagnetismo es posible introducir los términos de carga de prueba, en esta relación se introduce partículas o masas de prueba, cuyo movimiento en un sistema está definido por las ecuaciones de las geodésicas. Como resolución principal se encuentra que debido al cómo está definida la cuadri-aceleración en relatividad general se puede hacer una relación directa con la definición de un campo gravitacional, de la misma

manera como se definen las cargas y campos en las ecuaciones de Maxwell.

A pesar de no tratarse en el presente trabajo de grado los métodos de campo gravitoelectromagnético, sí se tiene en cuenta como argumento a la hora de tener un análisis de la estructura del campo gravitacional en relatividad general, pues esta generalización del concepto de campo se ha tratado en diversos artículos y publicaciones de interés. Sin embargo, debido a que los métodos de Semerák y de Abramowicz son mucho más pertinentes para los sistemas estudiados, se descarta la interpretación del campo gravitoelectromagnético (Holzmüller, 1870; Maartens and Bassett, 1998; Mach, 1872; Mashhoon, 2001; Ramos et al., 2018). Por último, es importante destacar la importancia que estos modelos tienen, pues permiten afirmar de manera coherente que la estructura del campo gravitacional en el espacio-tiempo se define como las curvas integrales de la cuadri-aceleración.

## 2.1. Definición de Fuerzas

Se considerará un espacio-tiempo estacionario axialmente simétrico con las coordenadas  $(t, \rho, \varphi, z)$  donde el elemento de línea se define de la forma

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{\rho\rho}d\rho^2 + g_{zz}dz^2. \quad (2.1)$$

De este modo, se tomará cada componente del tensor métrico de la forma

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -e^{2\psi}, & g_{t\varphi} &= -e^{2\psi}A, \\ g_{\varphi\varphi} &= e^{-2\psi}\rho^2 - e^{2\psi}A^2, & g_{\rho\rho} &= g_{zz} = e^{2(\lambda-\psi)}. \end{aligned}$$

Así, la ecuación (2.1) se reescribe de la forma

$$ds^2 = -e^{2\psi} (dt + Ad\varphi)^2 + e^{-2\psi} \{ \rho^2 d\varphi^2 + e^{2\lambda} (d\rho^2 + dz^2) \}, \quad (2.2)$$

donde  $A$  es una función que depende de las coordenadas  $\rho$  y  $z$ , es decir,  $A = A(\rho, z)$ .

En un campo estacionario axialmente simétrico las líneas de mundo más simples son orbitas circulares espaciales; es decir, donde  $\rho = \text{constante}$ ,  $z = \text{constante}$  y  $\Omega = d\varphi/dt = \text{constante}$ . De este modo para los observadores que se muevan a través de estas órbitas su cuadri-velocidad es

$$u^\alpha = u^t (1, 0, \Omega, 0), \quad (2.3)$$

definiendo las componentes covariante de la cuadri-velocidad

$$u_\alpha = g_{\alpha\beta}u^\beta, \quad (2.4)$$

donde la componente  $\varphi$  se expresa de la forma

$$u_\varphi = g_{\varphi t} u^t + g_{\varphi\varphi} u^\varphi = u^t \{g_{\varphi t} + g_{\varphi\varphi} \Omega\}, \quad (2.5)$$

Esta componente representa el momento angular en el espacio-tiempo que se ha definido. Al elegir un observador con momento angular igual a cero (*ZAMO* por sus siglas en inglés) se llega a la expresión

$$\Omega = \Omega_{ZAMO} = -\frac{g_{\varphi t}}{g_{\varphi\varphi}} = \omega, \quad (2.6)$$

de este modo la cuadri-velocidad de la ecuación (2.3) para el observador *ZAMO* queda de la forma

$$u^\alpha = u_{ZAMO}^\alpha = u^t (1, 0, \omega, 0). \quad (2.7)$$

Ahora, de la propiedad y definición del cuadri-vector velocidad donde  $u^2 = g_{\alpha\beta} u^{\alpha\beta} = -1$ , usando la relación (2.6), es posible determinar

$$u^2 = (u^t)^2 \left\{ g_{tt} - 2g_{t\varphi} \frac{g_{\varphi t}}{g_{\varphi\varphi}} + g_{\varphi\varphi} \frac{(g_{\varphi t})^2}{(g_{\varphi\varphi})^2} \right\} = -1. \quad (2.8)$$

Despejando la componente temporal de la cuadri-velocidad,  $u^t$ , aplicando nuevamente la relación de la ecuación (2.6), esta componente en términos de  $\omega$  queda de la forma

$$u^t = (-g_{tt} - g_{\varphi t} \omega)^{-1/2}. \quad (2.9)$$

Por otro lado, para definir la cuadri-aceleración es necesario tener en cuenta que esta se puede derivar a partir de las ecuaciones de las curvas geodésicas con un procedimiento que se ve detallado en el trabajo de [Semerák et al. \(1999\)](#).

La cuadri-aceleración se expresa como

$$a_\alpha = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu, \alpha} u^\mu u^\nu. \quad (2.10)$$

Sustituyendo las componentes de la cuadri-velocidad del observador *ZAMO*, la ecuación (2.7) en la ecuación (2.10) queda de la forma

$$a_\alpha = -\frac{1}{2} \{g_{tt, \alpha} u^t u^t + 2g_{t\varphi, \alpha} u^t u^\varphi + g_{\varphi\varphi, \alpha} u^\varphi u^\varphi\}, \quad (2.11)$$

$$a_\alpha = -\frac{(u^t)^2}{2} \{g_{tt, \alpha} + 2g_{t\varphi, \alpha} \omega + g_{\varphi\varphi, \alpha} \omega^2\}. \quad (2.12)$$

La derivada con respecto a  $\alpha$  para cada componente de la métrica queda de la forma

$$\begin{aligned} g_{tt,\alpha} &= -2(e^{2\psi})\psi_{,\alpha}, & g_{t\varphi,\alpha} &= (-e^{2\psi}A)_{,\alpha}, \\ g_{\varphi\varphi,\alpha} &= (e^{-2\psi}\rho^2 - e^{2\psi}A^2)_{,\alpha}, & g_{\rho\rho,\alpha} &= g_{zz,\alpha} = 2e^{2(\lambda-\psi)}(\lambda_{,\alpha} - \psi_{,\alpha}). \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (2.12) la cuadri-aceleración queda expresada como

$$a_\alpha = (u^t)^2 \left\{ (e^{2\psi})\psi_{,\alpha} + \omega (e^{2\psi}A)_{,\alpha} - \frac{\omega^2}{2} (e^{-2\psi}\rho^2)_{,\alpha} + \frac{\omega^2}{2} (e^{2\psi}A^2)_{,\alpha} \right\}. \quad (2.13)$$

Siguiendo los modelos de separación de fuerzas que se estudian ampliamente en los trabajos de [Abramowicz et al. \(1993\)](#), donde posteriormente son complementados a partir de los análisis de [Semerák \(1995\)](#). Se observa que la ecuación (2.13), representa la componente gravitacional de la cuadri-aceleración.

## 2.2. Cuadri-aceleración para observadores co-móviles en un espacio-tiempo axialmente simétrico y estático

Considerando el mismo espacio-tiempo estacionario axialmente simétrico de la sección anterior y observando el elemento de línea de la ecuación (2.1). Para que este espacio-tiempo sea estático debe cumplir con que  $g_{t\varphi} = g_{\varphi t} = 0$ , lo que implica a su vez que  $\omega = 0$  para un observador *ZAMO*. Teniendo en cuenta esta simplificación la cuadri-velocidad queda de la forma

$$u^\alpha = u^t (1, 0, 0, 0), \quad (2.14)$$

donde

$$u^t = (-g_{tt})^{-1/2} = e^{-\psi}. \quad (2.15)$$

Por último, la ecuación (2.13) se reduce a

$$a_\alpha = (e^{-\psi})^2 [(e^{2\psi})\psi_{,\alpha}] = \psi_{,\alpha}. \quad (2.16)$$

Con esto último es posible trazar las líneas de campo gravitacional conociendo la función potencial  $\psi$  que se defina. Se debe tener en cuenta que es posible replicar los mismos cálculos a partir de diferentes métricas.

El resultado obtenido anteriormente es algo interesante, pues, a pesar de no ser la única forma a la cual llegar a la líneas de un campo gravitacional, permite darle una interpretación de movimiento relativista en términos de “fuerzas”, es decir, en analogía con la física clásica, donde se estudia el movimiento a partir de fuerzas. Cuando los observadores son estacionarios con momento angular cero respecto al eje de simetría es posible determinar la curvas integrales de la cuadri-aceleración donde al darle una interpretación análoga con el estudio newtoniano se obtienen las líneas de campo gravitacional para un sistema relativista (Einstein, 1922; Hawking and Israel, 1989; Schwarzschild, 1916).

### 2.2.1. Cuadri-aceleración para observadores co-móviles en un espacio-tiempo conformestático

La métrica conformestática hace referencia a un espacio-tiempo estático donde su parte espacial es conformalmente plana. Para el estudio de la cuadri-aceleración se parte de la métrica conformestática en coordenadas cilíndricas  $x^\alpha = (t, \rho, \varphi, z)$ ,

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} (d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2). \quad (2.17)$$

De este modo se identifican las componentes no nulas del tensor métrico

$$g_{tt} = -e^\psi, \quad g_{\rho\rho} = g_{zz} = e^{-\psi}, \quad g_{\varphi\varphi} = \rho e^{-\psi}.$$

Nótese que en la sección anterior para un espacio-tiempo axialmente simétrico, estático y estacionario, las componentes del tensor métrico son diferentes, sin embargo el procedimiento para calcular las componentes de la cuadri-aceleración es el mismo. También se encuentran ciertas similitudes, donde el término cruzado de la métrica, es decir, el elemento  $g_{\alpha\beta}$  donde  $\alpha \neq \beta$  es igual a cero. Para ambos casos se puede definir la misma cuadri-velocidad y por consiguiente para un observador co-móvil en un espacio-tiempo conformestático axialmente simétrico las componentes de la cuadri-aceleración se definen como

$$a_\alpha = -\frac{1}{2} g_{tt,\alpha} u^t u^t = \psi_{,\alpha}. \quad (2.18)$$

La solución a la que se llega en la ecuación (2.18) es igual a la que se llegó en la ecuación (2.16), esto es debido a que la métrica conformestática axialmente simétrica usada es una particularización de una métrica estática axialmente simétrica. Como se mencionó anteriormente, la métrica conformestática hace referencia a que su parte espacial es conformalmente plana.

### 2.3. Líneas de Campo Gravitacional en un espacio-tiempo conformestático axialmente simétrico

En coordenadas generalizadas  $x^\alpha = (t, x_1, x_2, x_3)$ , la métrica conformestática se escribe como

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} dl^2, \quad (2.19)$$

con

$$dl^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2, \quad (2.20)$$

el elemento de longitud en las coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ . A partir del estudio de [González and Pimentel \(2016\)](#) se observa que la función  $\psi$  satisface la ecuación

$$\nabla^2 \psi = k \nabla \psi \cdot \nabla \psi, \quad (2.21)$$

donde

$$\nabla \psi = \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) \quad (2.22)$$

y

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right), \quad (2.23)$$

donde  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$  son los factores de escala de las coordenadas generalizadas.

La ecuación (2.21) se puede escribir como

$$\nabla^2 (e^{-k\psi}) = 0, \quad (2.24)$$

y así

$$e^{-k\psi} = 1 - U, \quad (2.25)$$

donde  $U$  es cualquier solución de la ecuación de Laplace que se anule en el infinito

$$\nabla^2 U = 0 \quad , \quad U|_\infty = 0. \quad (2.26)$$

Para el caso de simetría axial, tomando  $x_1 = \varphi$ , se tiene que  $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$  y así la ecuación de Laplace para  $U$  se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right) = 0. \quad (2.27)$$

Ahora, la aceleración está dada por

$$a_\alpha = \psi_{,\alpha} = \frac{1}{k} \frac{U_{,\alpha}}{1 - U}. \quad (2.28)$$

Así, las líneas de campo se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = a^\alpha \rightarrow dx^\alpha = a^\alpha d\lambda = g^{\alpha\beta} a_\beta d\lambda. \quad (2.29)$$

Con  $\psi = \psi(x_2, x_3)$ , se tiene que

$$a_\alpha = (0, 0, a_2, a_3), \quad (2.30)$$

y así

$$\begin{aligned} dx^0 &= 0, & dx^2 &= e^{2\psi} a_2 d\lambda / h_2^2, \\ dx^1 &= 0, & dx^3 &= e^{2\psi} a_3 d\lambda / h_3^2, \end{aligned} \quad (2.31)$$

de donde se obtiene la ecuación

$$d\lambda = \frac{e^{-2\psi} h_2^2 dx_2}{a_2} = \frac{e^{-2\psi} h_3^2 dx_3}{a_3}. \quad (2.32)$$

Simplificando,

$$\frac{a_3 dx_2}{h_3^2} - \frac{a_2 dx_3}{h_2^2} = 0, \quad (2.33)$$

reemplazando la ecuación (2.28) y simplificando se obtiene

$$\frac{U_{,3} dx_2}{h_3^2} - \frac{U_{,2} dx_3}{h_2^2} = 0. \quad (2.34)$$

Para resolver la ecuación, se multiplica la ecuación (2.34) por  $h_1 h_2 h_3$ ,

$$\frac{h_1 h_2}{h_3} U_{,3} dx_2 - \frac{h_1 h_3}{h_2} U_{,2} dx_3 = 0, \quad (2.35)$$

De este modo para solucionar la ecuación se requiere definir una función cuyas derivadas incluya los factores de escala y la función auxiliar  $U$ .

Definiendo entonces  $V = V(x_2, x_3)$  mediante las ecuaciones

$$V_{,2} = \frac{h_1 h_2}{h_3} U_{,3}, \quad (2.36)$$

$$V_{,3} = -\frac{h_1 h_3}{h_2} U_{,2}, \quad (2.37)$$

de tal manera que la ecuación 2.35 toma la forma

$$V_{,2} dx_2 + V_{,3} dx_3 = dV = 0, \quad (2.38)$$

cuya solución es

$$V(x_2, x_3) \equiv \text{constante}, \quad (2.39)$$

y así las líneas de campo de  $a_\alpha$  son las curvas de  $V(x_2, x_3)$  constante.

Para determinar la función  $V(x_2, x_3)$  se debe resolver el sistema de las ecuaciones (2.36) y (2.37), lo cual solo es posible si se satisface la condición de integrabilidad

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_2} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x_3} \right\}. \quad (2.40)$$

Reemplazando (2.36) y (2.37) en la ecuación (2.40) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right\} = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right\}, \quad (2.41)$$

es decir,

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial x_3} \right\} = 0, \quad (2.42)$$

la cual es la ecuación de Laplace (2.27). Así la condición de integrabilidad (2.40) se satisface idénticamente dado que  $U(x_2, x_3)$  es solución de la ecuación (2.27).

Para encontrar  $V(x_2, x_3)$  se integra el sistema de las ecuaciones (2.36) y (2.37). Así, integrando la ecuación (2.36) con respecto a  $x_2$  se obtiene

$$V(x_2, x_3) = \int V_{,2} dx_2 = \int \frac{h_1 h_2}{h_3} U_{,3} dx_2, \quad (2.43)$$

lo cual se puede escribir como

$$V(x_2, x_3) = f(x_2, x_3) + g(x_3), \quad (2.44)$$

donde  $f(x_2, x_3)$  es la integral indefinida de  $V_{,2}(x_2, x_3)$  con respecto a  $x_2$  y  $g(x_3)$  es una función que solo depende de  $x_3$ , la constante de integración con respecto a  $x_2$ .

Para determinar  $g(x_3)$  se deriva (2.43) con respecto a  $x_3$

$$V_{,3} = f_{,3}(x_2, x_3) + g'(x_3), \quad (2.45)$$

y así

$$g'(x_3) = V_{,3} - f_{,3}, \quad (2.46)$$

utilizando entonces la ecuación de (2.37) se obtiene

$$g'(x_3) = -\frac{h_1 h_3}{h_2} U_{,2} - f_{,3}, \quad (2.47)$$

integrando entonces la ecuación anterior se obtiene

$$g(x_3) = \int g'(x_3) dx_3. \quad (2.48)$$

La condición de integrabilidad vista en la ecuación (2.40) garantiza la existencia de las integrales y que el resultado es el mismo si se empieza integrando la ecuación (2.37) en lugar de la ecuación (2.36).

# Capítulo 3

## SISTEMAS DE DISCOS DE MORGAN Y MORGAN INMERSOS EN HALOS DE MATERIA

Las ecuaciones de Einstein suelen ser problemáticas por su número elevado de ecuaciones a resolver, también está su carácter no lineal y las condiciones que se deben seguir para que sus soluciones sean bien comportadas e interpretadas correctamente. Es por esto que se deben tener diferentes consideraciones a la hora de intentar resolver un sistema. Los sistemas complejos como los discos inmersos en halos de materia, son el candidato perfecto para el estudio de las líneas de campo gravitacional desde una perspectiva analítica, pues las soluciones parten de diferentes consideraciones que reducen la complejidad del cálculo.

Lo primero a tener en cuenta es la implementación de diferentes simetrías para reducir el número de ecuaciones a resolver, a su vez, introducir ciertas condiciones que delimitan la complejidad en la resolución del problema, planteado directamente un sistema conformado por discos delgados de materia, en el marco de las soluciones de Morgan y Morgan, sumergidos en halos de materia esferoidales en un espacio-tiempo conformestático y axialmente simétrico.

### 3.1. Tensor métrico

En primera instancia, se parte del estudio de soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein, con la métrica conformestática (Synge, 1960) en coordenadas cilíndricas  $x^\alpha = (t, r, z, \varphi)$ ,

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi} (dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2), \quad (3.1)$$

donde  $\psi$  es una función continua en las coordenadas  $r$  y  $z$ , debido a la simetría axial. Por otro lado, se exige que la función posea simetría de reflexión alrededor del plano  $z = 0$ .

Conociendo la forma en la que se solucionan las función  $\psi$  se conoce a su vez, el tensor métrico, pues se conoce que el elemento de línea se expresa de la forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (3.2)$$

Una vez establecidas las descripciones pertinentes del elemento de línea en las ecuaciones (3.1) y (3.2), es posible pasar a la interpretación del tensor momento, el cual contiene toda la información sobre las fuentes de campo gravitacional. Debido a la forma en la que se reduce el número de elementos independientes de este, es posible plantear las condiciones de energía, para que el sistema que se desea estudiar sea un sistema físico bien comportado (González and Pimentel, 2015). Del análisis anterior se llega a que las condiciones de energía se reducen a la desigualdad

$$\nabla^2 \psi \geq \nabla \psi \cdot \nabla \psi, \quad (3.3)$$

Dicho de otra forma, para satisfacer (3.3) se necesita encontrar la función  $\psi$  que satisfaga la ecuación

$$\nabla^2 \psi = k \nabla \psi \cdot \nabla \psi, \quad (3.4)$$

donde  $k \geq 1$ ; de esta forma se garantiza que la presión,  $p$  y la densidad,  $\rho$  tengan un buen comportamiento físico. Como se indica el trabajo de González and Pimentel (2016) esta forma en particular de satisfacer las condiciones de energía conduce a la ecuación de estado para el fluido en el halo

$$p = \frac{\rho}{3(2k-1)}, \quad (3.5)$$

desde esta ecuación es posible ver los diferentes tipos de fluidos que se obtienen a partir de variar el valor de  $k$ .

La ecuación (3.4) se puede reescribir como  $\nabla^2 (e^{-k\psi}) = 0$ , donde  $e^{-k\psi}$  se toma como solución a la ecuación de Laplace  $\nabla^2 U = 0$ , sin embargo, para garantizar que el espacio-tiempo sea asintóticamente plano, se tomó la relación entre la función  $\psi$  y la función  $U$  como (González and Pimentel, 2015)

$$e^{-k\psi} = 1 - U, \quad (3.6)$$

con

$$U|_\infty = 0. \quad (3.7)$$

El análisis hecho anteriormente sin condicionalidades adicionales describe un espacio-tiempo con la presencia de una fuente de campo gravitacional únicamente interpretada como un halo

de materia de forma esferoidal. Para que el sistema que se tiene hasta el momento se pueda interpretar como un disco delgado de materia sumergido en un halo, es necesario introducir como condición una discontinuidad en  $z = 0$  en la primera  $z$ -derivada del tensor métrico, pues permite darle una interpretación física a la singularidad. La discontinuidad se puede resumir en la expresión

$$b_{\alpha\beta} = 2g_{\alpha\beta,z} \Big|_{z=0^+} \neq 0. \quad (3.8)$$

Con la información adquirida anteriormente, es posible encontrar soluciones al sistema planteado, sin embargo, se trabaja en coordenadas esferoidales oblatas  $(\xi, \eta, \varphi)$ , pues este tipo de coordenadas se adaptan mejor a la simetría del sistema y generan un radio de corte de manera natural para el disco.

## 3.2. Función potencial $U$

Las coordenadas esferoidales oblatas se relacionan con las coordenadas cilíndricas mediante las transformaciones

$$r^2 = a^2 (1 + \xi^2) (1 - \eta^2), \quad (3.9)$$

$$z = a\xi\eta, \quad (3.10)$$

donde  $0 \leq \xi < \infty$  y  $-1 \leq \eta \leq 1$ . Las coordenadas del disco de radio  $a$  son  $\xi = 0$  y  $0 \leq \eta^2 \leq 1$ . Es necesario que  $U$  sea función de  $\eta^2$  para garantizar la simetría de reflexión alrededor del plano del disco.

A partir del cálculo anterior, la función  $U$  se considera como solución a la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas, pero únicamente teniendo en cuenta los términos pares (Webster, 2016), de la forma

$$U(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (3.11)$$

donde  $C_{2n}$  son constantes,  $q_{2n}(\xi) = i^{2n+1} Q_{2n}(i\xi)$ , siendo  $Q_{2n}(i\xi)$  las funciones de Legendre de segundo tipo de argumento imaginario, y  $P_{2n}(\eta)$  son los polinomios de Legendre de orden  $2n$ .

Para obtener soluciones particulares se debe restringir la suma que se muestra en (3.11), con la finalidad de analizar el comportamiento de las cantidades físicas. Una forma de restringir esta suma es considerando  $U$  como el potencial gravitacional de los discos finitos newtonianos obtenidos en el estudio de González and Reina (2006), donde las constantes  $C_{2n}$  son

encontradas a partir de propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Legendre y tienen la forma

$$C_{2n} = \frac{K_{2n}}{(2n+1)q_{2n+1}(0)}, \quad (3.12)$$

donde

$$K_{2n} = \frac{M}{2a} \left[ \frac{\pi^{1/2} (4n+1) (2m+1)!}{2^{2m} (m-n)! \Gamma(m+n+3/2)} \right], \quad (3.13)$$

si,  $n \leq m$ ; y  $C_{2n} = 0$  si  $n > m$ , para  $m \geq 1$ ; por lo tanto, la suma queda restringida por el valor de  $m$ . En la ecuación (3.13)  $M$  y  $a$ , son la masa total y el radio del disco newtoniano. Considerando las tres primeras soluciones particulares (González and Pimentel, 2015), es decir, las funciones  $U_m$  con  $m = 1, 2, 3$ , estas tienen la forma

$$U_1(\xi, \eta) = -\tilde{M} \left[ \cot^{-1} \xi + \frac{(3\eta^2 - 1)}{4} ((3\xi^2 + 1) \cot^{-1} \xi - 3\xi) \right], \quad (3.14)$$

$$U_2(\xi, \eta) = -\tilde{M} \left[ \cot^{-1} \xi + \mathbf{K} (3\eta^2 - 1) + \mathbf{L} (35\eta^4 - 30\eta^2 + 3) \right], \quad (3.15)$$

$$U_3(\xi, \eta) = -\tilde{M} \left[ \cot^{-1} \xi + \mathbf{N} (231\eta^6 - 315\eta^4 + 105\eta^2 - 5) \right. \\ \left. - \tilde{M} \left[ \frac{7}{6} \mathbf{K} (3\eta^2 - 1) + \frac{21}{11} \mathbf{L} (35\eta^4 - 30\eta^2 + 3) \right] \right], \quad (3.16)$$

donde

$$\tilde{M} = \frac{M}{a}, \\ \mathbf{K} = \frac{5}{14} [(3\xi^2 + 1) \cot^{-1} \xi - 3\xi], \\ \mathbf{L} = \frac{3}{448} \left[ (35\xi^4 + 30\xi^2 + 3) \cot^{-1} \xi - 35\xi^3 - \frac{55}{3}\xi \right], \\ \mathbf{N} = \frac{5}{8448} \left[ (231\xi^6 + 315\xi^4 + 105\xi^2 + 15) \cot^{-1} \xi - 231\xi^5 - 238\xi^3 - \frac{231}{5}\xi \right]. \quad (3.17)$$

### 3.3. Componentes de la cuadiaceleración

Como se vio en el capítulo anterior es posible replicar el cálculo de las componentes de la aceleración a partir de cualquier métrica, conociendo el tensor métrico de esta. De este modo,

en la métrica conformestática (Synge, 1960) en coordenadas cilíndricas,  $x^\alpha = (t, r, z, \varphi)$  se define la cuadri-velocidad de un observador co-móvil como

$$\begin{aligned} u^\alpha &= (u^t, 0, 0, 0), \\ u^t &= (-g_{tt})^{-1/2} = e^{-\psi}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

por lo tanto, las componentes de la aceleración se definen como

$$a_\alpha = -\frac{1}{2}g_{tt,\alpha}u^t u^t = \psi_{,\alpha}. \quad (3.19)$$

De la ecuación (3.6), donde se evidencia la relación de la función  $\psi$  con la función  $U$ , es posible redefinir las componentes de la cuadri-aceleración como

$$a_\alpha = \frac{1}{k} \left( \frac{U_{,\alpha}}{1-U} \right). \quad (3.20)$$

Nótese que las funciones  $U$  en este caso cumplen el papel de funciones potenciales, del mismo modo en el que se definen en mecánica newtoniana, y no están relacionadas con la aceleración de la misma manera que las funciones de campo potencial en dicha mecánica, pues en este caso aparece la constante  $k$  y el término inverso del potencial.

### 3.4. Líneas de Campo Gravitacional

Siguiendo los procedimientos del capítulo anterior para la determinación de las líneas de campo gravitacional para un espacio-tiempo conformestático y haciendo uso de la calculadora simbólica MAXIMA, a partir del potencial  $U(\xi, \eta)$  se determinaron las curvas integrales de la cuadri-aceleración  $V(\xi, \eta)$  en coordenadas esferoidales oblatas.

Los factores de escala de las coordenadas esferoidales oblatas son:

$$\begin{aligned} h_\xi &= a\sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{1 + \xi^2}}, \\ h_\eta &= a\sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{1 - \eta^2}}, \\ h_\phi &= a\sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A partir del estudio de las curvas integrales de la cuadri-aceleración en coordenadas esferoidales oblatas se determina por medio de transformaciones de coordenadas se pueden obtener las líneas de campo expresadas en coordenadas cilíndricas,  $x^\alpha = (t, r, z, \varphi)$  pues de este modo se facilita su interpretación y análisis.

De esta forma las funciones  $V(\xi, \eta)$  se expresan como

$$V_1(\xi, \eta) = -\tilde{M}\eta \left[ \eta^2 + \frac{3}{2}\mathbf{H}(\xi(1-\eta^2)) \right], \quad (3.22)$$

$$V_2(\xi, \eta) = -\tilde{M}\eta \left[ \eta^4 + (1-\eta^2) \left( \frac{15}{7}\mathbf{H} + \frac{3}{448}\mathbf{I} \right) \xi \right], \quad (3.23)$$

$$V_3(\xi, \eta) = -\tilde{M}\eta \left[ \frac{1}{4224}(\mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F}) + (1-\eta^2) \left( \left( \frac{5}{2}\mathbf{H} + \frac{9}{704}\mathbf{I} + \frac{5}{8448}\mathbf{J} \right) \xi + \mathbf{S} \right) \right], \quad (3.24)$$

donde

$$\mathbf{D} = [(17325\eta^6 - 33075\eta^4 + 18375\xi^2 - 2625) \ln(\xi^2 + 1)],$$

$$\mathbf{E} = [(34650\eta^6 - 66150\eta^4 + 36750\xi^2 - 5250) \xi \cot^{-1} \xi],$$

$$\mathbf{F} = [(5049\eta^6 - 1575\eta^4 + 875\xi^2 - 125)],$$

$$\mathbf{H} = [(\xi^2 + 1) \cot^{-1} \xi - \xi],$$

$$\mathbf{I} = \left[ (140\eta^2 - 60) \left( (7\xi^4 + 10\xi^2 + 3) \cot^{-1} \xi - \frac{21\xi^3 + 23\xi}{3} \right) \right],$$

$$\mathbf{J} = \left[ (1386\eta^4 - 1260\eta^2 + 210) \left( (33\xi^6 + 63\xi^4 + 35\xi^2 + 15) \cot^{-1} \xi - \frac{165\xi^5 + 260\xi^3 + 103\xi}{5} \right) \right],$$

$$\mathbf{S} = [(1386\eta^4 - 1260\eta^2 + 210) (5 \ln(\xi^2 + 1))].$$

Para cada función  $\psi_m(r, z)$ , donde  $m = 1, 2, 3$ , hay una única solución para la función  $V(r, z)$ . Aquí se observa que

$$\psi(r, z) \equiv \text{constante} \quad (3.25)$$

para cualquier valor de  $r$  y  $z$  representa las líneas equipotenciales de la distribución de materia, y

$$V(r, z) \equiv \text{constante} \quad (3.26)$$

representa las líneas de campo de la misma distribución de materia. Se eligen las coordenadas cilíndricas para la representación gráfica, debido a la ventaja que se obtiene a la hora de analizar e interpretar los resultados.

A partir de los diferentes resultados realizados con la calculadora simbólica, se grafican las siguientes figuras, con la finalidad de observar el comportamiento de las líneas de campo y equipotenciales.

Figura 3.1

*Líneas equipotenciales,  $\psi_1(r, z), k = 2$*

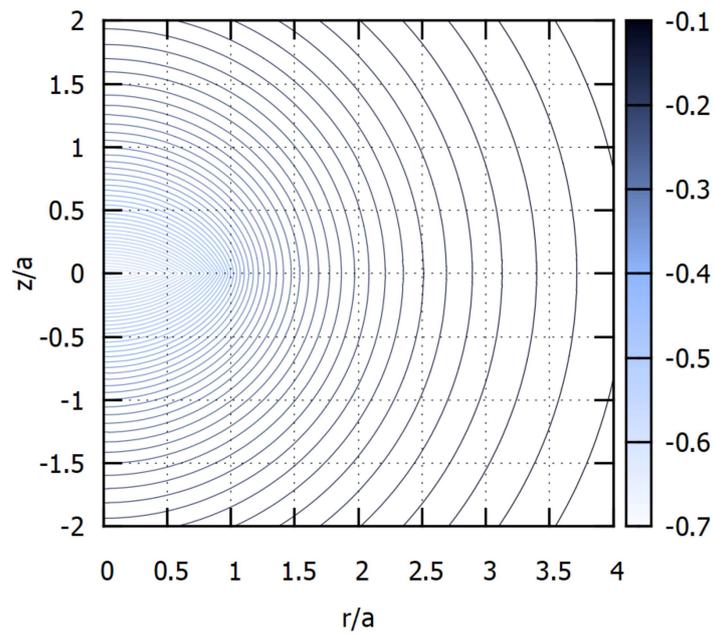


Figura 3.2

Líneas equipotenciales,  $\psi_1(r, z)$ ,  $k = 200$

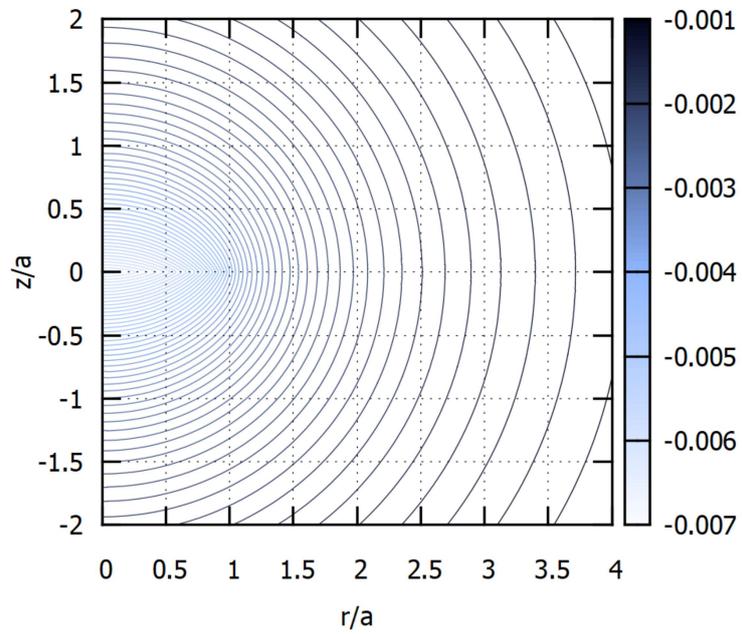


Figura 3.3

Líneas equipotenciales,  $\psi_1(r, z)$ ,  $k = 20000$

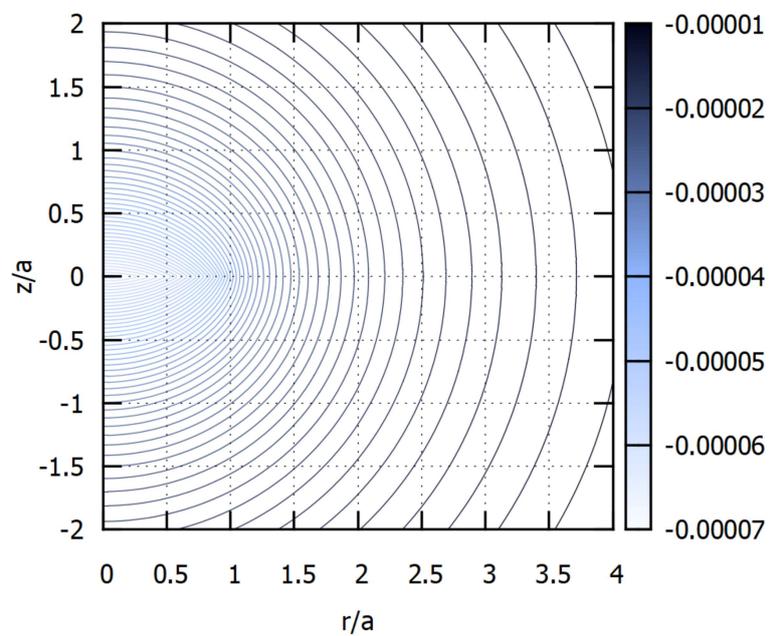


Figura 3.4

Líneas equipotenciales,  $\psi_2(r, z)$ ,  $k = 2$

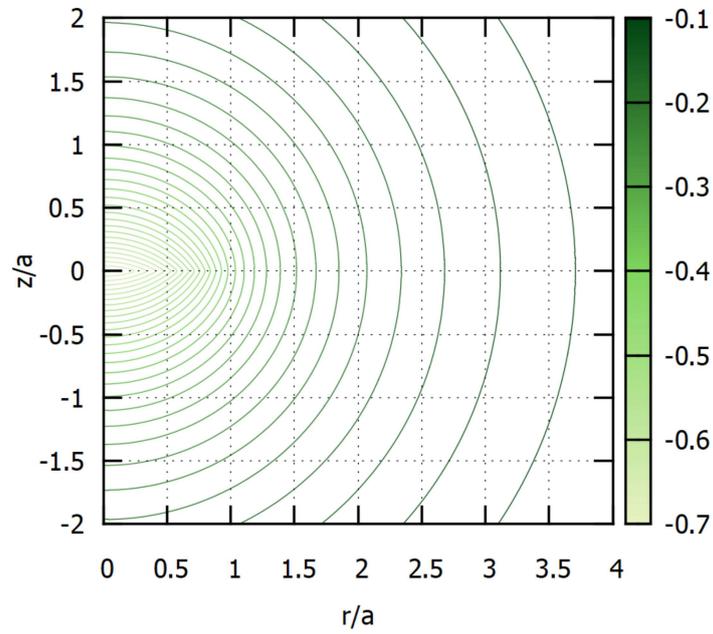


Figura 3.5

Líneas equipotenciales,  $\psi_2(r, z)$ ,  $k = 200$

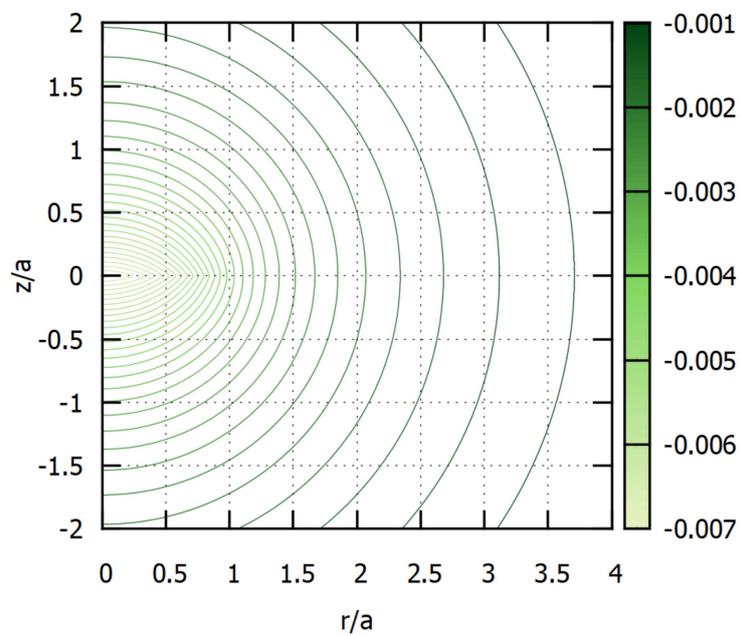


Figura 3.6

Líneas equipotenciales,  $\psi_2(r, z)$ ,  $k = 20000$

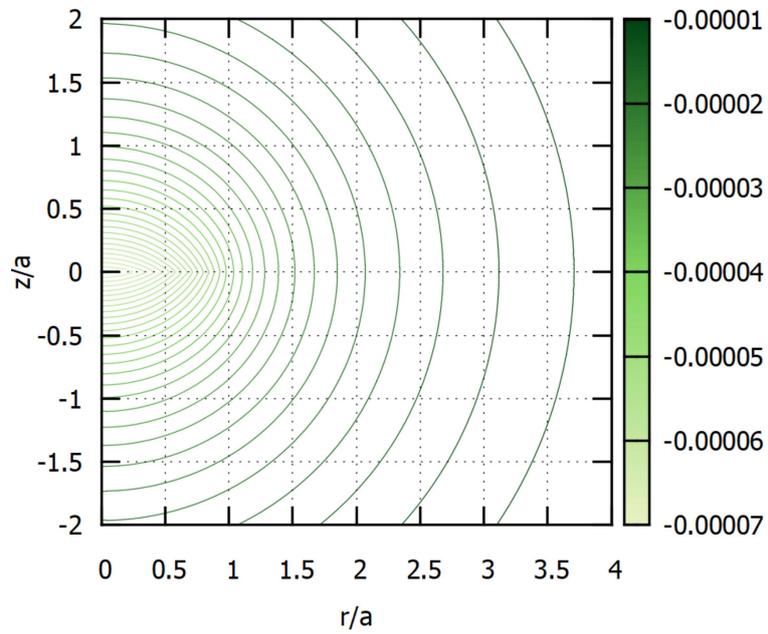


Figura 3.7

Líneas equipotenciales,  $\psi_3(r, z)$ ,  $k = 2$

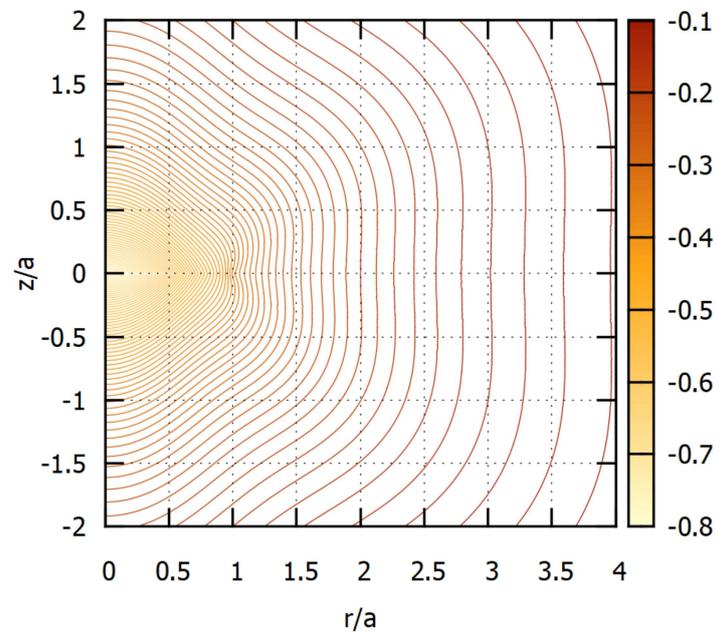


Figura 3.8

Líneas equipotenciales,  $\psi_3(r, z)$ ,  $k = 200$

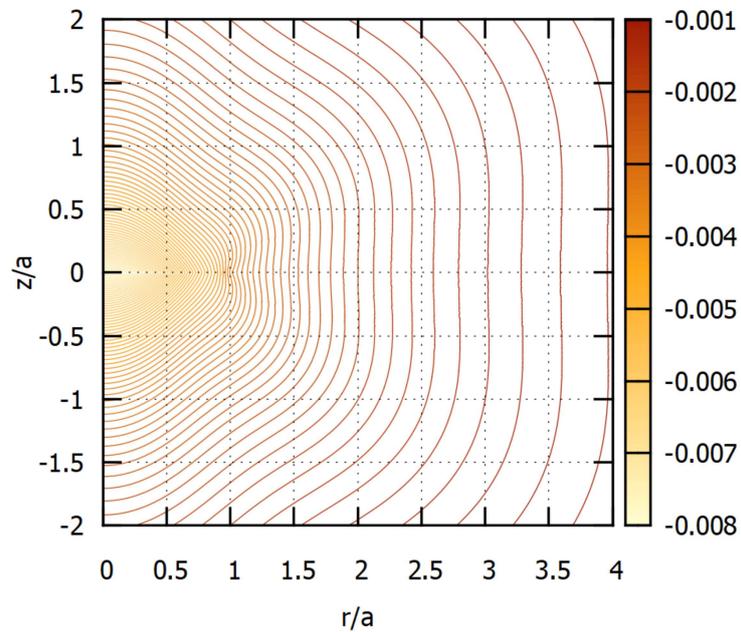
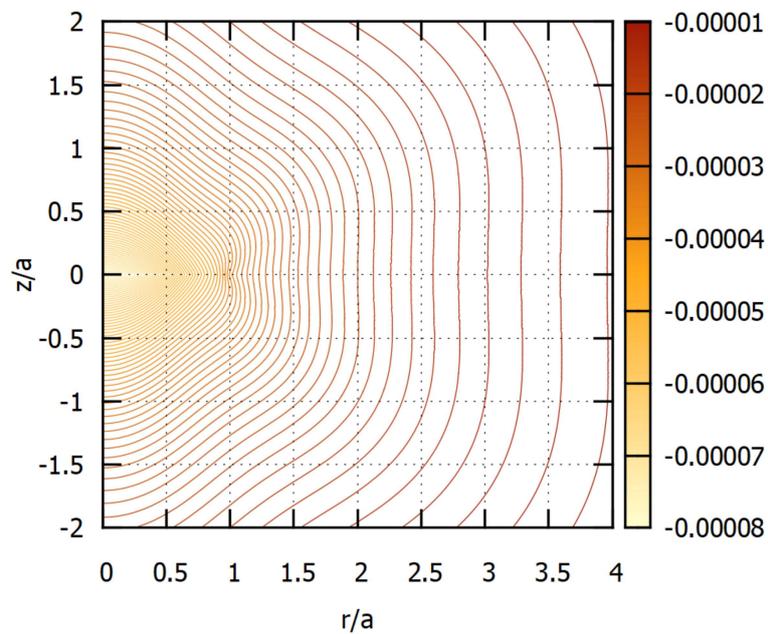


Figura 3.9

Líneas equipotenciales,  $\psi_3(r, z)$ ,  $k = 20000$

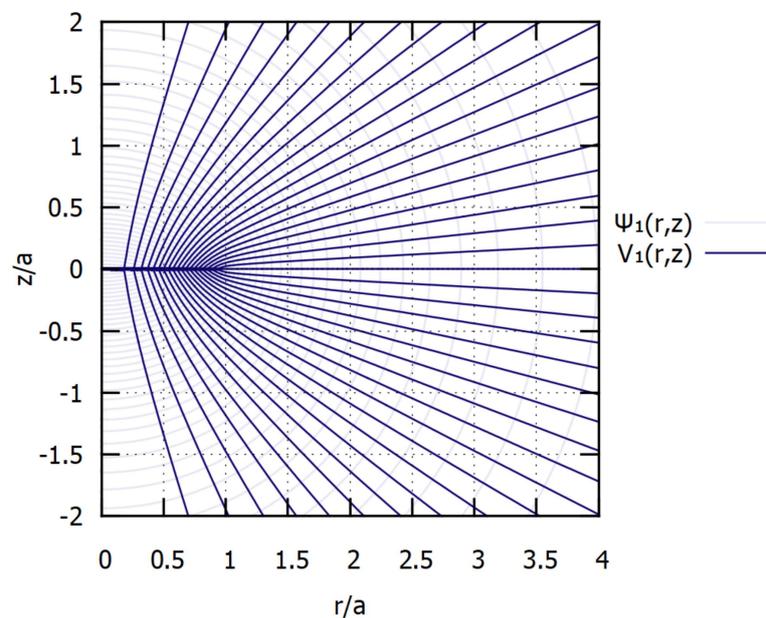


De las figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 se puede observar que conforme aumenta el valor de  $k$  disminuye la magnitud de las líneas equipotenciales, esto se explica a partir de

la ecuación de estado, donde al aumentar el valor de  $k$  disminuye la presión acercándose a tener un fluido de polvo, sin embargo, su estructura y forma no presenta cambios. A pesar que las líneas equipotenciales de  $\psi_1(r, z)$  y  $\psi_2(r, z)$  son similares, hay que tener en cuenta que no tienen la misma magnitud y cerca al disco  $z = 0$  y  $0 < r < 1$ , se identifican las principales diferencias pues para  $\psi_2(r, z)$  se observa una ligera curvatura, mientras que para  $\psi_1(r, z)$  la discontinuidad se hace mucho más notoria. En el caso de las líneas equipotenciales de  $\psi_3(r, z)$  se observa un comportamiento similar que las otras dos funciones cerca del disco, sin embargo para  $r > 1$  se observa una curvatura que en las otras dos soluciones no se observan.

Figura 3.10

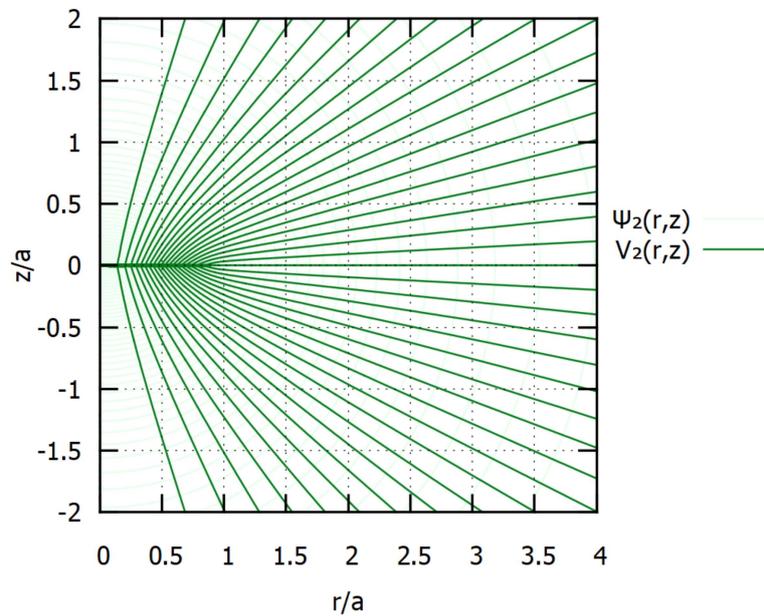
Líneas de campo,  $V_1(r, z)$ .



*Nota.* En la figura se observan las líneas de campo  $V_1(r, z)$  y las líneas equipotenciales  $\psi_1(r, z)$ .

Figura 3.11

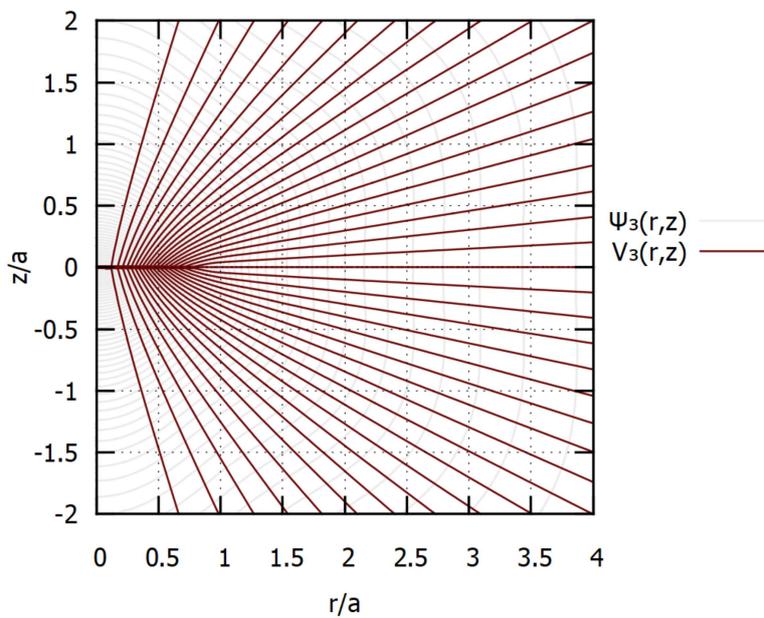
Líneas de campo,  $V_2(r, z)$ .



*Nota.* En la figura se observan las líneas de campo  $V_2(r, z)$  y las líneas equipotenciales  $\psi_2(r, z)$ .

Figura 3.12

Líneas de campo,  $V_3(r, z)$ .

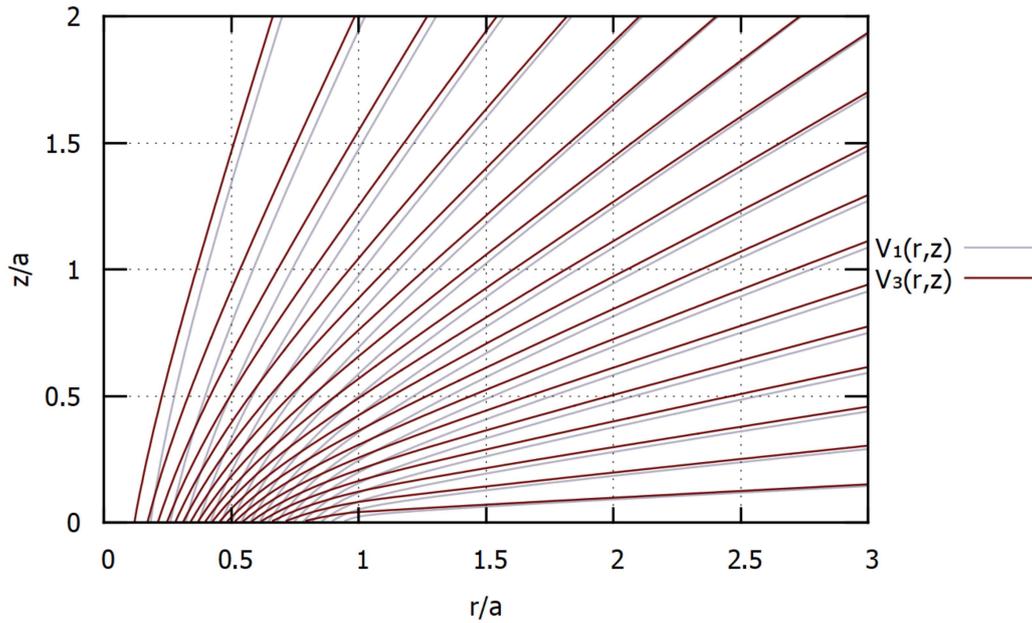


*Nota.* En la figura se observan las líneas de campo  $V_3(r, z)$  y las líneas equipotenciales  $\psi_3(r, z)$ .

En las figuras 3.10, 3.11, 3.12, se observa que las líneas de campo gravitacional y las líneas equipotenciales son perpendiculares entre sí, las primeras no están ligadas al valor de  $k$ . Las líneas de campo cerca al disco se ven curvadas, se ve un comportamiento donde en el infinito son rectas, mientras que cerca a la distribución de masa se curvan. En la figura 3.13 se observan las diferencias directas entre las líneas de campo para las soluciones  $V_1(r, z)$  y  $V_3(r, z)$ , con la finalidad que cerca del disco las líneas fuesen más notorias.

Figura 3.13

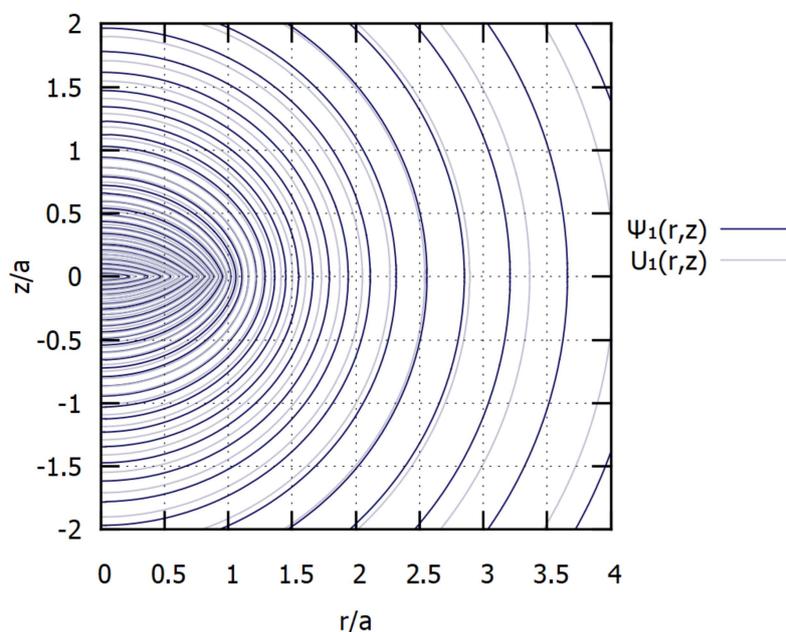
*Comparación líneas de Campo,  $V_1(r, z)$  y  $V_3(r, z)$ .*



*Nota.* En la figura se observan las líneas de campo  $V_1(r, z)$  y  $V_3(r, z)$ .

Figura 3.14

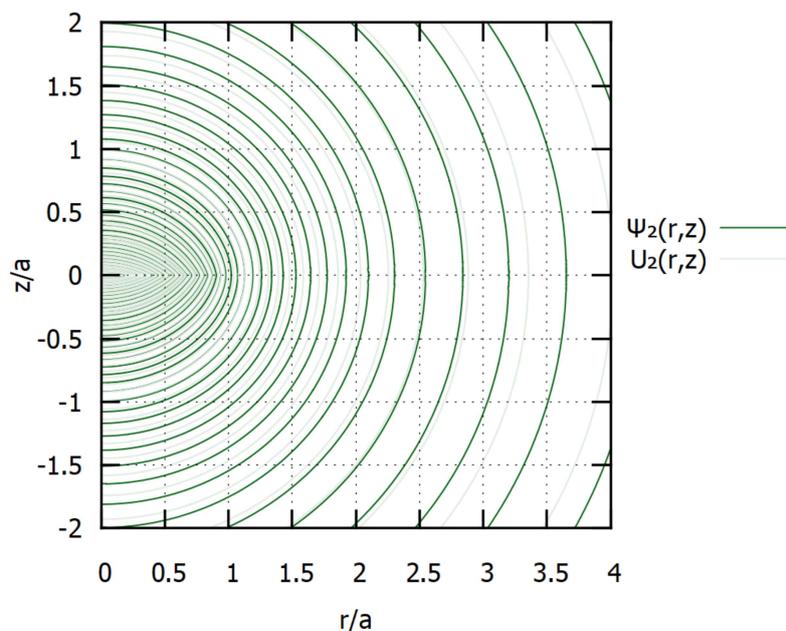
Comparación líneas equipotenciales,  $\psi_1(r, z)$  y  $U_1(r, z)$ ,  $k = 15200$ .



*Nota.* En la figura se observan las líneas equipotenciales  $\psi_1(r, z)$  y  $U_1(r, z)$  que corresponde a una distribución de un disco de materia únicamente.

Figura 3.15

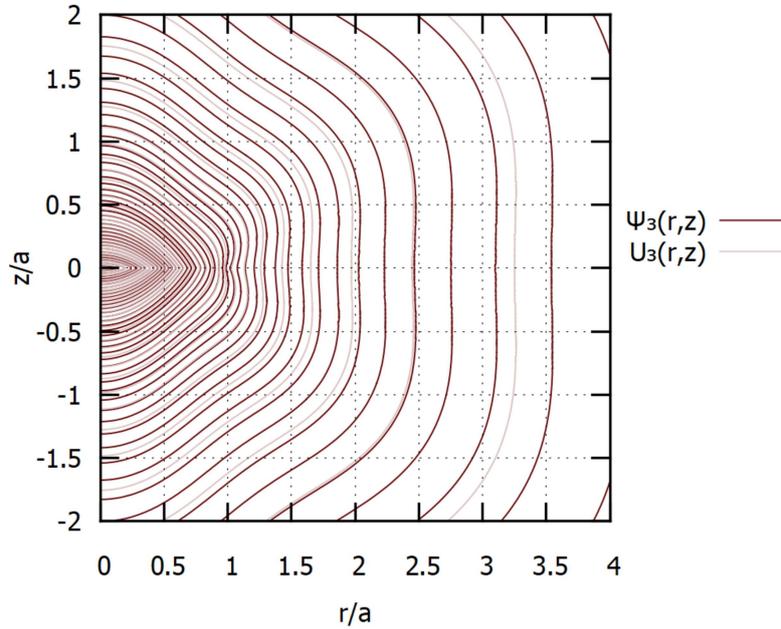
Comparación líneas equipotenciales,  $\psi_2(r, z)$  y  $U_2(r, z)$ ,  $k = 15200$ .



*Nota.* En la figura se observan las líneas equipotenciales  $\psi_2(r, z)$  y  $U_2(r, z)$  que corresponde a una distribución de un disco de materia únicamente.

Figura 3.16

Comparación líneas equipotenciales,  $\psi_3(r, z)$  y  $U_3(r, z)$ ,  $k = 15200$ .



*Nota.* En la figura se observan las líneas equipotenciales  $\psi_3(r, z)$  y  $U_3(r, z)$  que corresponde a una distribución de un disco de materia únicamente.

De las figuras 3.14, 3.15, 3.16, se observa que las líneas equipotenciales de  $\psi_i(r, z)$  tienen la misma forma que las de las funciones  $U_i(r, z)$ , con  $i = 1, 2, 3$ , es importante saber que las funciones  $U(r, z)$  representan únicamente las soluciones de potencial para una distribución correspondiente a un disco de materia, cálculos que se han profundizado en las soluciones de potencial gravitacional a partir de un análisis newtoniano en el trabajo de [González and Reina \(2006\)](#). A pesar de tener la misma forma se destaca que los valores no sean los mismos, por la forma en la que se define  $\psi$  en términos de  $U$  (Ver ecuaciones 3.14-3.16).

# Capítulo 4

## CONCLUSIONES

En primer lugar, en este trabajo a partir de las soluciones de potenciales gravitacionales de discos finitos relativistas inmersos en un halo esferoidal de materia de [González and Pimentel \(2015\)](#), se realizó un estudio de la cuadri-aceleración y sus diferentes componentes, para determinar de forma analítica la componente gravitacional de la cuadri-aceleración y sus curvas integrales, que a su vez representan las líneas de campo. Visto desde otra perspectiva, se determinó cómo varía la estructura de las líneas equipotenciales y líneas de campo en un espacio conformestático a partir de una distribución de masa que coincide con un disco relativista finito y un halo esferoidal de materia que se extiende por todo el espacio-tiempo.

En segundo lugar, se obtuvo una comparación directa entre las diferentes soluciones de los potenciales gravitacionales y sus respectivas líneas de campo, así mismo, se comparó la distribución de masa mencionada anteriormente con soluciones a partir de un modelo Newtoniano de discos finitos. Uno de los resultados que más destaca es precisamente que el modelo que se tiene para un disco finito en la mecánica Newtoniana solo se encuentran diferencias en su magnitud con respecto al modelo relativista de un disco finito inmerso en un halo esferoidal de materia. Esto nos indica que la presencia del halo esferoidal que surge a partir de las soluciones a las ecuaciones de Einstein en un espacio-tiempo conformestático, no afecta a las líneas de campo.

Por último, se plantea la discusión con respecto a tener diferentes soluciones de potenciales gravitacionales para diferentes distribuciones de masa, inmersos en un halo esferoidal de materia. Debido a la forma que tiene la función auxiliar de  $U$  en la ecuación (3.6), se puede tomar cualquier función tanto cumpla con la condición de ser menor que 1, esto también implica cumplir con la ecuación de Laplace. De este modo, se pueden anexar cuantas funciones potenciales se quiera tanto se mantenga la condición inicial, abriendo así la posibilidad de obtener sistemas complejos a partir de soluciones conformestáticas. Este, sin duda alguna, es un resultado importante que nos indica que en la métrica conformestática se reduce drásticamente la dificultad que se tenía para la superposición de soluciones, limitándola únicamente a cumplir con la condición de  $\{U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n < 1\}$ , donde  $U_i$  con  $i = 1, 2, 3 \dots n$  representa los diferentes potenciales gravitacionales de diversas distribuciones de masa. Este proyecto de investigación se llevó a cabo con la finalidad de dar los primeros pasos en un

---

perfil profesional encaminado y especializado en relatividad general, como objetivo principal se planteó la búsqueda del conocimiento complementario de esta área de investigación en la Física. Se ha logrado no solo cumplir con los objetivos planteados en el proyecto de investigación presente, también se dejaron presentes las bases para un futuro proyecto de investigación.

# REFERENCIAS

- Abramowicz, M. A., Carter, B., and Lasota, J.-P. (1988). Optical reference geometry for stationary and static dynamics. *General Relativity and Gravitation*, 20:1173–1183.
- Abramowicz, M. A., Nurowski, P., and Wex, N. (1993). Covariant definition of inertial forces. *Classical and Quantum Gravity*, 10(10):L183.
- Anderson, M. T. and Chruściel, P. T. (2005). Asymptotically simple solutions of the vacuum einstein equations in even dimensions. *Communications in Mathematical Physics*, 260(3):557–577.
- Bardeen, J. M. and Piran, T. (1983). General relativistic axisymmetric rotating systems: Coordinates and equations. *Physics Reports*, 96(4):205–250.
- Bičák, J. c. v., Lynden-Bell, D., and Katz, J. (1993). Relativistic disks as sources of static vacuum spacetimes. *Phys. Rev. D*, 47:4334–4343.
- Binney, J. and Tremaine, S. (2011). *Galactic dynamics*, volume 13. Princeton University Press.
- Curiel, E. (2017). A primer on energy conditions. In *Towards a theory of spacetime theories*, pages 43–104. Springer.
- Einstein, A. (1922). The general theory of relativity. In *The Meaning of Relativity*, pages 54–75. Springer.
- Epstein, R. and Shapiro, I. I. (1980). Post-post-newtonian deflection of light by the sun. *Phys. Rev. D*, 22:2947–2949.
- Esposito, F. and Witten, L. (1975). On a static axisymmetric solution of the einstein equations. *Physics Letters B*, 58(3):357–360.
- Godazgar, M. and Reall, H. S. (2009). Algebraically special axisymmetric solutions of the higher-dimensional vacuum einstein equation. *Classical and Quantum Gravity*, 26(16):165009.
- González, G. A. and Pimentel, O. M. (2016). Static thin disks with haloes as sources of conformastatic spacetimes. *Phys. Rev. D*, 93:044034.
- González, G. A. and Pimentel, O. M. (2015). Axially symmetric relativistic thin disks immersed in spheroidal matter haloes. *Journal of Physics: Conference Series*, 600(1):012015.

- González, G. A. and Reina, J. I. (2006). An infinite family of generalized Kalnajs discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 371(4):1873–1876.
- Gutiérrez-Piñeres, A. C., González, G. A., and Quevedo, H. (2013). Conformastatic disk-haloes in einstein-maxwell gravity. *Phys. Rev. D*, 87:044010.
- Gutiérrez-Piñeres, A. C., Garcia-Reyes, G., and González, G. A. (2014). Exact relativistic models of thin disks around static black holes in a magnetic field. *International Journal of Modern Physics D*, 23(01):1450010.
- Harmark, T. (2004). Stationary and axisymmetric solutions of higher-dimensional general relativity. *Phys. Rev. D*, 70:124002.
- Hartle, J. B. and Hawking, S. W. (1972). Solutions of the einstein-maxwell equations with many black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 26(2):87–101.
- Hawking, S. W. and Israel, W. (1989). *Three hundred years of gravitation*. Cambridge University Press.
- Hernandez-Pastora, J. L. and Martin, J. (1993). New static axisymmetric solution of the einstein field equations. *Classical and Quantum Gravity*, 10(12):2581.
- Holzmüller, G. (1870). *Über die Anwendung der Jacobi-Hamilton’schen Methode auf den Fall der Anziehung nach dem electrodynamischen Gesetze von Weber*. Druck von Ehrhardt Karras.
- Lemos, J. P. S. and Letelier, P. S. (1993). Superposition of morgan and morgan discs with a schwarzschild black hole. *Classical and Quantum Gravity*, 10(6):L75.
- Lemos, J. P. S. and Letelier, P. S. (1994). Exact general relativistic thin disks around black holes. *Phys. Rev. D*, 49:5135–5143.
- Lequeux, J. (1969). *Structure and evolution of galaxies*. Taylor & Francis.
- Letelier, P. S. and Oliveira, S. R. (1987). Exact self-gravitating disks and rings: A solitonic approach. *Journal of Mathematical Physics*, 28(1):165–170.
- Maartens, R. and Bassett, B. A. (1998). Gravito-electromagnetism. *Classical and Quantum Gravity*, 15(3):705.
- Mach, E. (1872). *Die Gestalten der Flüssigkeit. Die Symmetrie*. Calve.
- Mashhoon, B. (2001). Gravitoelectromagnetism. In *Reference Frames and Gravitomagnetism*, pages 121–132. World Scientific.
- McCrea, W. (1979). Einstein: Relations with the royal astronomical society. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, 20:251.
- Plebański, J. F. (1975). Some solutions of complex einstein equations. *Journal of Mathematical Physics*, 16(12):2395–2402.
- Quevedo, H. (1989). General static axisymmetric solution of einstein’s vacuum field equations in prolate spheroidal coordinates. *Phys. Rev. D*, 39:2904–2911.

- Ramos, J., de Montigny, M., and Khanna, F. (2018). Weyl gravitoelectromagnetism. *General Relativity and Gravitation*, 50(7):83.
- Reina, C. and Treves, A. (1976). Axisymmetric gravitational fields. *General Relativity and Gravitation*, 7(10):817–838.
- Rubin, V. C. and Ford Jr, W. K. (1970). Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *The Astrophysical Journal*, 159:379.
- Schiff, L. I. (1960). Possible new experimental test of general relativity theory. *Phys. Rev. Lett.*, 4:215–217.
- Schwarzschild, K. (1916). Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 189–196.
- Semerák, O. (1995). What forces drive the relativistic motion? *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 110:973–991.
- Semerák, O., Zellerin, T., and Žáček, M. (1999). The structure of superposed Weyl fields. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 308(3):691–704.
- Synge, J. L. (1960). Relativity: the general theory. *North-Holland, Amsterdam*.
- Vogt, D. and Letelier, P. S. (2003). Exact general relativistic perfect fluid disks with halos. *Phys. Rev. D*, 68:084010.
- Webster, A. G. (2016). *Partial differential equations of mathematical physics*. Courier Dover Publications.
- Wechsler, R. H. and Tinker, J. L. (2018). The connection between galaxies and their dark matter halos. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 56(1):435–487.
- Will, C. M. (2014). The confrontation between general relativity and experiment. *Living Reviews in Relativity*, 17(1):1–117.
- Zhong, Z. (1985). Generation of new solutions of the stationary axisymmetric einstein equations by a double complex function method. *Journal of Mathematical Physics*, 26(10):2589–2595.