SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE VALOR EN LA FRONTERA MEDIANTE FUNCIONES DE GREEN

MICHAEL ALEXANDER RINCÓN VILLAMIZAR

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE VALOR EN LA FRONTERA MEDIANTE FUNCIONES DE GREEN

MICHAEL ALEXANDER RINCÓN VILLAMIZAR

Monografía presentada para optar al
título de Licenciado en Matemáticas

Director
JULIO CÉSAR CARRILLO ESCOBAR, Ph.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

A la persona que me dio todo para ser quien soy hoy día.

Al sol que ilumina los días de mi corazón.

Y a la hermana luna que ha estado conmigo siempre, aunque ahora este lejos.

AGRADECIMIENTOS

A mi abuela, por todo su cariño y apoyo que me dio para ser quien soy.

A mi familia, por su apoyo incondicional.

A Ledyz, Doña Nancy, Sergio y Andrés, por su amistad.

Al profesor Julio César Carrillo, por su amistad y sus enseñanzas.

A mis profesores Bernardo Mayorga, Gabriel Yáñez, Edilberto Reyes y Gildardo Guzmán que de una u otra forma aportaron algo a este trabajo.

A mis calificadores Gilberto Arenas y Rafael Castro por su disposición y aportes a este trabajo.

Y a mis compañeros de la universidad por todos los momentos compartidos.

Tabla de Contenido

RESUMEN

TÍTULO: SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE VALOR EN LA FRONTERA MEDIANTE FUNCIONES DE GREEN*

AUTOR: MICHAEL ALEXANDER RINCÓN VILLAMIZAR**

PALABRAS CLAVES: Problema de valor en la frontera, funciones de Green, distribuciones, operadores diferenciales.

DESCRIPCIÓN:

Consideremos el problema de valores en la frontera,

$$\begin{aligned} \alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = f(x) \quad & \text{si } x \in (a,b), \\ y(a) = y_a, \;\; y(b) = y_b, & \end{aligned}$$

en donde α, β, γ, y_a y y_b son constantes dadas y f es una función que podemos suponer continua en el intervalo compacto $[a,b]$. En esta monografía se presenta una revisión bibliográfica acerca de cómo encontrar las posibles soluciones de este problema mediante las funciones de Green.

En los dos primeros capítulos se presentan resultados del análisis funcional para operadores. En el tercer discutimos acerca de los operadores diferenciales y presentamos algunos ejemplos con el fin de ilustrar las ideas que posteriormente utilizamos en el último capítulo. En el cuarto capítulo, se presentan resultados para la solución de ecuaciones integrales. En el último capítulo se ilustra la técnica de la función de Green para la solución de problemas con condiciones en la frontera homogéneas y algunos ejemplos para ilustrar el caso no homogéneo.

Es importante mencionar que la técnica de la función de Green, discutida en el Capítulo 5, no funciona con alguna clase de problemas de valor en la frontera. Este tipo de problemas son resueltos mediante la técnica de la función de Green generalizada y su construcción se ilustra mediante un ejemplo. La discusión general de este tema no será considerada aquí.

*Dr. Julio César Carrillo Escobar, Director del Trabajo de Grado.

**Programa de Licenciatura en Matemáticas, Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander.

ABSTRACT

TITLE: SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM BY MEANS OF GREEN'S FUNCTIONS*

AUTHOR: MICHAEL ALEXANDER RINCÓN VILLAMIZAR**

KEYWORDS: Boundary value problem, Green's functions, distributions, differential operators.

DESCRIPTION:

Let us consider the following boundary value problem,

$$\alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = f(x) \quad \text{if } x \in (a,b),$$
$$y(a) = y_a, \;\; y(b) = y_b,$$

where α, β, γ, y_a y y_b are given constants and f is a given functions which may be assumed continuous on the compact set $[a,b]$. This undergraduate dissertation presents a literature review about how to solve the given boundary value problem by means of Green's functions.

In Chapters 1 and 2 are presented results about Functional Analysis for operators. In Chapter 3 is presented some results about differential operators and some examples to illustrate ideas that will be used in the last chapter. In Chapter 4 is presented results for the solution of integral equations. In Chapter 5 is illustrated the technique of Green's functions for the solution of problems with homogeneous boundary conditions and some examples to illustrate the nonhomogeneous case.

It is important to mention that the technique of Green's function, discussed in Chapter 5, does not work with some kind of boundary value problems. This type of problems are solved by means of the technique of generalized Green's function and its construction is illustrated by means of an example. The general discussion of this topic is not considered here.

*Dr. Julio César Carrillo Escobar, Undergraduate Dissertation Director.

**Undergraduate Program of Licentiate in Mathematics, School of Mathematics, Faculty of Science, Universidad Industrial de Santander.

Introducción

El problema de encontrar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias bajo ciertas condiciones iniciales o de frontera, es uno de los problemas más importantes que se encuentran en las matemáticas. En nuestro caso, estamos interesados en resolver el problema de valores en la frontera,

$$\begin{aligned} \alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = f(x) \quad & \text{si } x \in (a,b), \\ y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, & \end{aligned} \tag{1}$$

en donde α, β, γ, y_a y y_b son constantes dadas y f es una función que podemos suponer continua en el intervalo compacto $[a,b]$. Problemas de este tipo se necesita resolverlos cuando se considera, por ejemplo, la solución del problema unidimensional del flujo de calor en una varilla delgada ocupando un cierto intervalo en un eje horizontal, conocida la temperatura en los extremos de la varilla y en un tiempo inicial.

En un curso básico de ecuaciones diferenciales ordinarias se determinan las condiciones que garantizan que el problema de valor inicial asociado con la ecuación diferencial anterior, tiene una única solución y además se estudian las técnicas matemáticas para encontrarla. En un problema de valor en la frontera es necesario recurrir a otros métodos de solución.

Las técnicas usuales de solución de problemas de valor inicial en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales nos permiten construir una técnica de solución del problema (1). Esta técnica es conocida como el método de las funciones de Green, tópico que nos proponemos estudiar aquí.

En los dos primeros capítulos se presentan resultados del análisis funcional para operadores. En el tercer discutimos acerca de los operadores diferenciales y presentamos algunos ejemplos con el fin de ilustrar las ideas que posteriormente utilizamos en el último capítulo. En el cuarto capítulo, se presentan resultados para la solución de ecuaciones integrales. En el último capítulo se ilustra la técnica de la función de Green para la solución de problemas con condiciones en la frontera homogéneas y algunos ejemplos para ilustrar el caso no homogéneo.

Finalmente, comentamos acerca de algunos problemas de valor en la frontera para los cuales la técnica de la función de Green que utilizamos en el capítulo 5 no funciona para encontrar la solución de estos. La técnica para resolver este tipo de problemas da origen a una función conocida como la función de Green generalizada y su construcción se ilustra mediante un ejemplo.

Capítulo 1

Preliminares

Los operadores integrales aparecen de manera natural cuando resolvemos una ecuación diferencial y podemos expresar su solución como la integral de alguna función. De hecho las funciones de Green resultan ser núcleos de ciertos operadores integrales. Por lo cual estamos interesados en conocer algunas propiedades que tienen estos operadores y aplicar estas propiedades a nuestro estudio de las funciones de Green.

1.1. Operadores integrales

En lo que sigue trabajaremos con las funciones reales Riemann integrables en un intervalo compacto $[a, b]$. Denotaremos el conjunto de estas como $\mathcal{R} = \mathcal{R}(a, b)$. Es conocido que este conjunto es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ junto con la suma y multiplicación usual, por un escalar, de funciones reales. Para nuestros propósitos, es conveniente hacer que este espacio vectorial sea un espacio Euclidiano. Para cada par de funciones $f, g \in \mathcal{R}$, definimos la función

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\, dx. \tag{1.1}$$

Es fácil demostrar que esta función posee las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}(f, g) &= (g, f),\\ (f + g, h) &= (f, h) + (g, h),\\ (cf, g) &= c(f, g),\end{aligned}$$

para todo par de funciones $f, g \in \mathcal{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. La primera de estas propiedades permite establecer que la segunda y tercera propiedades también se cumplen en la segunda componente de la función (1.1).
La función (1.1) no cumple la propiedad de positividad del producto interno, ya que por ejemplo para la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$, si $x \neq 1$, y $f(x) = 1$, si $x = 1$ tenemos $f \in \mathcal{R}$ y $(f, f) = 0$, pero $f \neq 0$ en $[0, 1]$.

Este problema puede resolverse introduciendo una relación de equivalencia entre los elementos de este espacio. Sean f, g dos funciones en $\mathcal{R}$. Diremos que f *es equivalente a* g, lo cual se escribe como $f \approx g$, si

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx = 0.$$

En consecuencia, $(f, f) = 0$ si y solo si $f \approx 0$. Puede verse que el conjunto $\mathcal{V}$ de las distintas clases de equivalencia inducidas por esta relación es un espacio vectorial Euclidiano junto con el producto interno que define la función dada por (1.1), suponiendo que la igualdad de dos elementos de este espacio se considera en el sentido de las clases de equivalencia, por lo cual todo elemento de $\mathcal{R}$ puede considerarse como un elemento del espacio $\mathcal{V}$. Para nuestra discusión acerca de los operadores integrales, es importante introducir una norma en el espacio $\mathcal{V}$, pues en muchos resultados que demostraremos aquí, necesitamos las propiedades que esta tiene. Dada una función $f \in \mathcal{V}$ definiremos la norma de f, denotada $\|f\|$, como

$$\|f\| := (f, f)^{1/2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Definición 1.1 (Transformación integral con núcleo)**.** *Consideremos una función $K(x, y)$ definida y continua en el cuadrado $[a, b] \times [a, b]$. La transformación $\mathcal{K} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ definida como*

$$\mathcal{K}f(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) \, dy, \tag{1.2}$$

se llama **transformación integral con núcleo** *K.*

Observación 1.1. *De esta definición se deduce que si $f \in \mathcal{R}$ es una función dada, entonces $\mathcal{K}f$ es una función definida y continua en $[a, b]$, y con valores en $\mathbb{R}$. En efecto, si $f \in \mathcal{R}$ es una función dada, puesto que $K(x, y)$ esta definido en el cuadrado $[a, b] \times [a, b]$, la transformación $\mathcal{K}f$ es una función definida de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$. Ahora bien, puesto que el núcleo K es continuo en $[a, b] \times [a, b]$, se sigue que el núcleo K es uniformemente continuo. Así pues, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$, y $|y_1 - y_2| < \delta_\varepsilon$, tenemos*

$$|K(x_1, y_1) - K(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

Luego si $x, t \in [a, b]$, con $|x - t| < \delta_\varepsilon$ entonces

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}f(x) - \mathcal{K}f(t)| &= \left| \int_a^b [K(x, y) - K(t, y)] \, f(y) \, dy \right| \\
&\leq \int_a^b |K(x, y) - K(t, y)| \, |f(y)| \, dy \\
&< \varepsilon \int_a^b |f(y)| \, dy.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{x \to t} \mathcal{K}f(x) = \mathcal{K}f(t)$.

Ejemplo 1.1. *Sea* $K(x,y) = \cos(xy)$ *para* $x, y \in [0,\pi]$. *Dada* $f \in \mathcal{R}$, *entonces la transformación integral definida como*

$$\mathcal{K}f(x) = \int_0^{\pi} \cos(xy)\, f(y)\, dy,$$

es continua para cada $x \in [0,\pi]$.

Teorema 1.1. *Sea* $K(x,y)$ *un núcleo continuo en el cuadrado* $[a,b] \times [a,b]$ *entonces*

$$\|\mathcal{K}\| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2\, dx\, dy \right)^{1/2},$$

en donde

$$\|\mathcal{K}\| = \sup \{ \|\mathcal{K}f\| \mid \|f\| = 1 \}.$$

Demostración. Sean $f \in \mathcal{R}$ tal que $\|f\| = 1$ y $x \in [a,b]$, fijo. Entonces las funciones de y, $K(x,y)$, $f(y)$ son Riemann integrables en $[a,b]$. Considerando las funciones $K(x,y)$ y $f(y)$ como elementos del espacio $\mathcal{V}$, podemos aplicar las propiedades del producto interno en $\mathcal{V}$, en particular la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}f(x)|^2 &= \left| \int_a^b K(x,y) f(y)\, dy \right|^2 \\ &\leq \int_a^b |K(x,y)|^2\, dy \int_a^b |f(y)|^2\, dy \\ &= \int_a^b |K(x,y)|^2\, dy. \end{aligned}$$

Integrando respecto a x, desde a hasta b, obtenemos

$$\|\mathcal{K}f\| = \int_a^b |\mathcal{K}f(x)|^2\, dx \leq \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2\, dy\, dx.$$

Por lo tanto

$$\|\mathcal{K}\| = \sup \{ \|\mathcal{K}f(x)\| : \ \|f\| = 1 \} \leq \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2\, dx\, dy \right)^{1/2}. \qquad \square$$

Las propiedades de continuidad de una transformación lineal están estrechamente relacionadas con la propiedad de ser acotada. Las transformaciones integrales poseen una propiedad más fuerte que el hecho de ser acotada, la de ser completamente continua. Una transformación lineal $T : V_1 \to V_2$ se dice que es **completamente continua**, o **compacta**, si para cualquier sucesión (x_n) en V_1 con norma uniformemente acotada

(esto es, $\|x_n\| < c$ para algún $c > 0$ y para todo n), existe una subsucesión (x_{n_j}) de (x_n) y un elemento $y \in V_2$, tal que Tx_{n_j} converge a y.
Puede verse que la compacidad de una transformación lineal definida entre dos espacios Euclidianos implica el hecho de que la transformación esta acotada. En efecto, si $T : V_1 \to V_2$ es una transformación compacta no acotada, existe una sucesión $\{x_n\}$ en V_1, tal que $\|Tx_n\| \geq n\,\|x_n\|$. Hagamos $y_n = x_n/\,\|x_n\|$, entonces $\{y_n\}$ es una sucesión uniformemente acotada ya que $\|y_n\| \leq 1$ pero $\|Ty_n\| > n$. Por lo tanto Ty_n no admite subsucesiones convergentes, lo cual contradice el hecho de que T es compacta. Más aún, si V_1 es un espacio Euclidiano de dimensión finita, T es necesariamente compacta (ver [5]).
El siguiente teorema muestra que un núcleo continuo induce una transformación integral acotada.

Teorema 1.2. *Un núcleo continuo $K(x,y)$ en el cuadrado $[a,b] \times [a,b]$ define una transformación integral compacta.*

Demostración. Sea (f_n) una sucesión de funciones en $\mathcal{R}$ tales que $\|f_n\| \leq c$ para algún $c \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para $x \in [a,b]$, fijo y todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}f_n(x)| &= \left| \int_a^b K(x,y) f_n(y)\,dy \right| \\
&\leq \left(\int_a^b |K(x,y)|^2\,dy \right)^{1/2} \left(\int_a^b |f_n(y)|^2\,dy \right)^{1/2} \\
&\leq c \left(\int_a^b |K(x,y)|^2\,dy \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

como x es arbitrario, se sigue que la sucesión de funciones $(\mathcal{K}f_n)$ es uniformemente acotada. Veamos que esta sucesión de funciones es equicontinua[1] en $[a,b]$. Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$, y un $\varepsilon > 0$ dado. Puesto que $K(x,y)$ es continuo en $[a,b] \times [a,b]$, $K(x,y)$ es uniformemente continuo en $[a,b] \times [a,b]$. Por lo tanto, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$ entonces $|K(x_2,y) - K(x_1,y)| < \varepsilon$. Luego para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{K}f_n(x_2) - \mathcal{K}f_n(x_1)| &= \left| \int_a^b [K(x_2,y) - K(x_1,y)] f_n(y)\,dy \right| \\
&\leq \left(\int_a^b |K(x_2,y) - K(x_1,y)|^2\,dy \right)^{1/2} \left(\int_a^b |f_n(y)|^2\,dy \right)^{1/2} \\
&\leq \varepsilon (b-a)^{1/2} c,
\end{aligned}$$

siempre que $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$. Esto muestra que la sucesión de funciones $(\mathcal{K}f_n)$ es equicontinua en $[a,b]$. Por el teorema de Ascoli-Arzelá[2], podemos concluir que existe una subsucesión $(\mathcal{K}f_{n_k})$ de $(\mathcal{K}f_n)$ que converge uniformemente a una función f. Puesto que la

[1] Una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$, siendo $X \subset \mathbb{R}$, se dice que es equicontinua en X si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $x \in X$ y $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ entonces $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $x_0 \in X$.

[2] Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Toda sucesión equicontinua y acotada (no necesariamente uniformemente acotada) de funciones $f_n : K \to \mathbb{R}$ posee una subsucesión uniformemente convergente.

sucesión de funciones $(\mathcal{K}f_{n_k})$ es continua en $[a,b]$ y $\mathcal{K}f_{n_k} \to f$ uniformemente en $[a,b]$, se sigue que la función f es continua en $[a,b]$. Observe que $(\mathcal{K}f_{n_k})$ converge a f en $\mathcal{R}$ puesto que

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{K}f_{n_k} - f\| &= \lim_{k\to\infty} \left(\int_a^b |\mathcal{K}f_{n_k}(x) - f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_a^b \lim_{k\to\infty} |\mathcal{K}f_{n_k}(x) - f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esto prueba el teorema. □

Definición 1.2 (Transformaciones integrales simétricas)**.** *Una transformación integral $\mathcal{K}$ se dice* **simétrica** *si para cada $f, g \in \mathcal{R}$ tenemos $(\mathcal{K}f, g) = (f, \mathcal{K}g)$. Un núcleo real $K(x,y)$ se dice que es* **simétrico** *si $K(x,y) = K(y,x)$ para cada $x, y \in [a,b]$.*

Ejemplo 1.2. *El núcleo del Ejemplo 1.1 es simétrico. Verificar que la transformación integral inducida por este núcleo es simétrica.*

Solución. Sean $f, g \in \mathcal{R}$ entonces

$$\begin{aligned}
(f, \mathcal{K}g) &= \int_0^\pi f(x)\mathcal{K}g(x)\, dx \\
&= \int_0^\pi f(x) \int_0^\pi \cos(xy) g(y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^\pi \int_0^\pi g(y) \cos(xy) f(x)\, dy\, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi \int_0^\pi g(y) \cos(yx) f(x)\, dx\, dy \\
&= \int_0^\pi g(y) \int_0^\pi \cos(yx) f(x)\, dx\, dy \\
&= \int_0^\pi g(y) \mathcal{K}f(y)\, dy \\
&= (\mathcal{K}f, g).
\end{aligned}$$

□

Este es un caso particular del siguiente resultado.

Teorema 1.3. *La transformación integral $\mathcal{K}$ es simétrica si y solo si tiene un núcleo simétrico.*

Demostración. Supongamos que el núcleo $K(x, y)$ es simétrico y sean $f, g \in \mathcal{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}f, g) &= \int_a^b \mathcal{K}f(x)g(x)\,dx \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy\right)g(x)\,dx \\ &= \int_a^b \int_a^b K(x,y)f(y)g(x)\,dy\,dx,\end{aligned}$$

y de otra parte,

$$\begin{aligned}(f, \mathcal{K}g) &= \int_a^b f(y)\left(\int_a^b K(y,x)g(x)\,dx\right)dy \\ &= \int_a^b \int_a^b K(y,x)f(y)g(x)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Puesto que $K(x, y) = K(y, x)$, cambiando el orden de integración encontramos que $(f, \mathcal{K}g) = (\mathcal{K}f, g)$. Recíprocamente, supongamos que $K(x, y)$ no es simétrico, entonces existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $K(x_1, x_2) < K(x_2, x_1)$. Puesto que $K(x, y)$ es continuo en el cuadrado $[a, b] \times [a, b]$, existen intervalos $I_1 = [c_1, d_1]$ y $I_2 = [c_2, d_2]$ contenidos en $[a, b]$ tales que $x_1 \in I_1$, $x_2 \in I_2$ y

$$m = \sup\{K(x,y) \mid x \in I_1, y \in I_2\} \leq \text{ínf}\{K(x,y) \mid x \in I_2, y \in I_1\} = M.$$

Ahora bien, si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$, definimos la función característica de A como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Consideremos ahora las funciones $f(x)$ y $g(x)$, como las funciones características de los intervalos I_1 e I_2, respectivamente. Veamos que para estas funciones tenemos que $(f, \mathcal{K}g) \leq (\mathcal{K}f, g)$. En efecto,

$$\begin{aligned}(\mathcal{K}f, g) &= \int_a^b \left(\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy\right)g(x)\,dx \\ &= \int_{c_2}^{d_2} \int_{c_1}^{d_1} K(x,y)\,dy\,dx \\ &\geq M(d_1 - c_1)(d_2 - c_2),\end{aligned}$$

y también se tiene que,

$$
\begin{aligned}
(f, \mathcal{K}g) &= \int_a^b \left(\int_a^b K(x,y)g(y)\,dy \right) f(x)\,dx \\
&= \int_{c_1}^{d_1} \int_{c_2}^{d_2} K(x,y)\,dy\,dx \\
&\leq m(d_1 - c_1)(d_2 - c_2).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la transformación $\mathcal{K}$ no puede ser simétrica. $\square$

Teorema 1.4. *Los vectores propios correspondientes a distintos valores propios de una transformación integral simétrica, $\mathcal{K}$, son ortogonales.*

Demostración. Sean f, g dos vectores propios distintos de una transformación simétrica $\mathcal{K}$ correspondientes a los valores propios distintos α y β, respectivamente. Entonces $\mathcal{K}f = \alpha f$ y $\mathcal{K}g = \beta g$, luego

$$\alpha(f,g) = (\mathcal{K}f, g) = (f, \mathcal{K}g) = \beta(f,g).$$

Puesto que $\alpha \neq \beta$, se sigue que $(f,g) = 0$. $\square$

Definición 1.3 (Núcleos separables)**.** *Se dice que un núcleo $K(x,y)$ es* **separable** *si este núcleo puede expresarse como combinación lineal finita de productos de funciones, una de las cuales depende únicamente de x y la otra depende únicamente de y. Esto es,*

$$K(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} f_i(x) g_j(y),$$

en donde los $c_{ij} \in \mathbb{R}$ y las funciones $f_i, g_i : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Cuando un núcleo simétrico se puede expresar en la forma

$$K(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} h_i(x) h_j(y), \tag{1.3}$$

en donde $c_{ij} = c_{ji}$ y las funciones h_i son continuas en $[a,b]$, diremos que este núcleo es **simétrico separable**.

Ejemplo 1.3. *El núcleo $K(x,y) = 1 + \cos(x-y)$ es simétrico separable pues*

$$K(x,y) = 1 + \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

Teorema 1.5. *Sea $K(x,y)$ un núcleo simétrico separable el cual no es idénticamente nulo. Entonces existe un conjunto ortonormal de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$ en $\mathcal{R}$ y escalares reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ no nulos tales que $\mathcal{K}f_i(x) = \lambda_i f_i(x)$ para $i = 1, 2, \ldots, m$. También, si $g \in \mathcal{R}$ es ortogonal a f_i para cada i, entonces $\mathcal{K}g(x) = 0$. Los escalares λ_i son los únicos valores propios no nulos de $\mathcal{K}$, y existe solo un número finito de vectores propios linealmente independientes de $\mathcal{K}$ correspondiente a cada valor propio.*

Demostración. Sea S el conjunto de todas las funciones de la forma

$$d_1 h_1(x) + \cdots + d_n h_n(x).$$

Claramente este conjunto forma un espacio vectorial de dimensión q, donde q es el número de vectores linealmente independientes en el conjunto $h_1, \ldots, h_n$. Supongamos que el núcleo $K(x,y)$ esta definido en términos de las funciones $h_1(x), \ldots, h_n(x)$ como en (1.3). Entonces para cada $p(x) \in S$ tenemos que

$$\int_a^b K(x,y)p(y)\,dy = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\left(\int_a^b h_j(y)p(y)\,dy\right)h_i(x).$$

Esto demuestra que $\mathcal{K}$ transforma S en si mismo. Puesto que $K(x,y)$ es simétrico y $\dim V = q$, existen q funciones ortonormales f_i en S, $i = 1, 2, \ldots, q$, tales que $\mathcal{K}f_i(x) = \lambda_i f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, q$. Si $\lambda_i \neq 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ y $\lambda_i = 0$ para $i = m+1, \ldots, q$, tenemos demostrado el teorema. En caso contrario, $\lambda_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, q$, y tendremos que $\mathcal{K}f_i(x) = 0$, y por lo tanto $\mathcal{K}p(x) = 0$ para cualquier $p(x) \in S$, puesto que las funciones $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, q$, forman una base para S. Si fijamos $x \in [a,b]$, $K(x,y)$ es una función de y continua en $[a,b]$, que esta en S. Escribamos $K(x,y) = h(y)$, entonces

$$\mathcal{K}h(y) = \int_a^b K(x,y)h(y)\,dy = \int_a^b |\,h(y)|^2\,dy = 0.$$

De esto concluimos que $h(y) = 0$ para cada $y \in [a,b]$, y puesto que x es arbitrario, fijo, concluimos que $K(x,y) = 0$ lo cual contradice la hipótesis del teorema. Esto muestra que no todos los λ_i son cero, por lo cual podemos suponer que $\lambda_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $\lambda_i = 0$ para $i = m+1, \ldots, q$. Sea $g \in \mathcal{R}$ tal que g es ortogonal a las funciones f_i, para $i = 1, 2, \ldots, m$, y definamos

$$p(x) = g(x) - \sum_{j=m+1}^{q} (g(x), f_j(x))f_j(x).$$

Veamos que $p(x)$ es ortogonal también a las funciones f_i, $i = 1, 2, \ldots, q$. En efecto, supongamos que $i \leq m$. Entonces

$$(p(x), f_i(x)) = (g(x), f_i(x)) - \sum_{j=m+1}^{q} (g(x), f_j(x))(f_i(x), f_j(x)) = 0.$$

En el caso $i \geq m+1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(p(x), f_i(x)) &= (g(x), f_i(x)) - \sum_{j=m+1}^{q} (g(x), f_j(x))(f_i(x), f_j(x)) \\
&= (g(x), f_i(x)) - (g(x), f_i(x))(f_i(x), f_i(x)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ya que $(f_i(x), f_i(x)) = \|f_i(x)\| = 1$. Se sigue, del hecho que las funciones f_i forman una base para S, que la función $p(x)$ debe ser ortogonal a las funciones $h_1, \ldots, h_n$. Esto prueba que $\mathcal{K}p(x) = 0$, y como $\mathcal{K}f_j(x) = 0$ para $j = m+1, \ldots, q$, tenemos que $\mathcal{K}g = 0$. Ahora bien, dada una función F en $\mathcal{R}$ es claro que $\mathcal{K}F \in S$. Supongamos, $\mathcal{K}F(x) = \lambda F(x) \neq 0$. Entonces $F = (1/\lambda)\mathcal{K}F \in S$, por lo que podemos escribir

$$F(x) = a_1 f_1(x) + \cdots + a_q f_q(x),$$

para algunos $a_i = (F, f_i)$. Por el Teorema 1.4, tenemos que $a_i = 0$, salvo si f_i es asociado con un vector propio λ. Esto prueba el teorema. □

Ejemplo 1.4. *Encontrar los valores propios no nulos del núcleo $K(x,y) = e^x e^y$ en un intervalo compacto $[a,b]$.*

Solución. Debemos resolver $\mathcal{K}F(x) = \lambda F(x)$, es decir, $\int_a^b e^x e^y F(y)\,dy = \lambda F(x)$ con $\lambda \neq 0$. La integral del primer miembro de esta última igualdad no depende de x, por lo cual podemos escribir

$$e^x L = \lambda F(x), \quad \text{en donde}\, L = \int_a^b e^y F(y)\,dy.$$

Por lo tanto, $F(x) = \frac{L}{\lambda} e^x$ pues $\lambda \neq 0$. Sustituyendo en la expresión para L obtenemos

$$L = \frac{L}{\lambda} \int_a^b e^{2y}\,dy = \frac{L}{\lambda}\left(\frac{e^{2b} - e^{2a}}{2}\right).$$

Se sigue que

$$L\left(1 - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{e^{2b} - e^{2a}}{2}\right)\right) = 0.$$

Si $L = 0$ entonces $F(x) = 0$. En este caso cualquier número real λ sería un valor propio de $\mathcal{K}$. Si $L \neq 0$ entonces debemos tener que

$$1 - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{e^{2b} - e^{2a}}{2}\right) = 0,$$

de donde

$$\lambda = \frac{e^{2b} - e^{2a}}{2}.$$

Este es el único valor propio del núcleo K en cualquier intervalo compacto $[a,b]$. □

1.2. Valores propios de un operador integral simétrico

Teorema 1.6. *El número de valores propios no nulos distintos de una transformación integral simétrica $\mathcal{K}$ es contable. Para cada valor propio no nulo hay a lo más un número finito de vectores propios linealmente independientes.*

Demostración. Hemos probado que vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortonormales. Además, todo conjunto finito de vectores propios linealmente independiente puede ser sustituido por vectores propios ortonormales[3]. Por este hecho, podemos suponer que todo conjunto finito de vectores propios linealmente independiente es un conjunto ortonormal.
Sean f_i, $i = 1, 2, \dots, m$ un conjunto finito de vectores propios ortogonales, de un espacio con producto interno, con correspondientes valores propios λ_i lo cuales no necesariamente son distintos. Si $x \in [a, b]$ es fijo, la función $g(y) = K(x, y)$ esta en $\mathcal{R}$, por lo cual

$$(g(y), f_i(y)) = \int_a^b K(x, y) f_i(y)\, dy = \mathcal{K} f_i(x) = \lambda_i f_i(x).$$

Aplicando la desigualdad de Bessel, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 |\, f_i(x)|^2 \leq \int_a^b |\, K(x, y)|^2\, dy,$$

e integrando esta ecuación respecto a x, encontramos que

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \leq \int_a^b \int_a^b |\, K(x, y)|^2\, dy\, dx.$$

Observe que el lado derecho de esta desigualdad no depende de m. Por el Teorema 1.5 podemos concluir que hay a lo más un número finito de vectores linealmente independientes para un mismo valor propio no nulo. Esta desigualdad también implica que existe a lo más un número finito de vectores linealmente independientes cuyos correspondientes valores propios son mayores, en valor absoluto, que la unidad. Podemos contar los valores propios considerando aquellos que se encuentran en el intervalo $(1/2, 1)$, los que están en $(1/3, 1/2)$, y así sucesivamente. De esta forma demostramos que el número de valores propios es contable. $\square$

Observación 1.2. *Como es usual, podemos ordenar los valores propios de acuerdo con su valor absoluto para verlos en la siguiente forma:*

$$\lambda_{-1} \leq \lambda_{-2} \leq \ldots < 0 < \ldots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1.$$

[3]En un espacio Euclidiano, todo conjunto linealmente independiente puede ser ortonormalizado mediante el método de Gram-Schmidt.

donde la separación final ha sido afectada con respecto a los signos de los valores propios. Cada valor propio esta repetido un número de veces igual al número de vectores propios linealmente independientes asociado con cada uno de estos. El conjunto de los valores propios del operador $\mathcal{K}$, se conoce como el **espectro** *del operador.*

Del teorema anterior deducimos el siguiente resultado, en relación con el espectro del operador $\mathcal{K}$.

Corolario 1.1. *Si $\mathcal{K}$ tiene por lo menos un valor propio no nulo entonces existen enteros no negativos m, n, no simultáneamente nulos pero posiblemente infinitos, y un conjunto de vectores ortonormales f_i, $-\infty \leq -m \leq i \leq n \leq \infty$, $i \neq 0$ tales que $\mathcal{K}f_i(x) = \lambda_i f_i(x)$ con $\lambda_{-1} \leq \lambda_{-2} \leq \cdots < 0 < \cdots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$.*

Análogamente, como en el caso de las transformaciones lineales, podemos considerar el problema de la existencia de valores propios no nulos para una transformación integral simétrica $\mathcal{K}$. En tal sentido, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.7. *Sea $p = \sup\{(\mathcal{K}f, f) \mid \|f\| = 1\}$ y $q = \text{ínf}\{(\mathcal{K}f, f) \mid \|f\| = 1\}$. Entonces, si $p > 0$ este es el mayor valor propio no nulo de $\mathcal{K}$, y si $q < 0$ este es el menor valor propio no nulo de $\mathcal{K}$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{R}$ tal que $\|f\| = 1$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos que

$$|(\mathcal{K}f, f)| \leq \|\mathcal{K}f\| \|f\| = \|\mathcal{K}f\| \leq \|\mathcal{K}\| \|f\| = \|\mathcal{K}\| .$$

Esto prueba que el conjunto $\{(\mathcal{K}f, f) \mid \|f\| = 1\}$ es acotado. Por lo tanto, existen $p = \sup\{(\mathcal{K}f, f) \mid \|f\| = 1\}$, y $q = \text{ínf}\{(\mathcal{K}f, f) \mid \|f\| = 1\}$.
Es suficiente probar el resultado para p, puesto que si

$$p' = \sup\{(-\mathcal{K}f, f) \mid \|f\| = 1\} = -\text{ínf}\{(\mathcal{K}f, f) \mid \|f\| = 1\},$$

es el mayor valor propio de la transformación $-\mathcal{K}$, entonces $-p'$ debe ser el menor valor propio de la transformación $\mathcal{K}$ y $-p' = q$. Supongamos primero que p es un valor propio de $\mathcal{K}$. Entonces veamos que p debe ser el mayor de todos. En efecto, si $\mathcal{K}f = \lambda f$, con $\|f\| = 1$, entonces

$$\lambda = \lambda(f, f) = (\mathcal{K}f, f) \leq p.$$

Para probar el teorema solo basta mostrar que p es un valor propio de $\mathcal{K}$. Supongamos inicialmente que el núcleo K es simétrico separable. Entonces, si $p > 0$, el núcleo K no puede ser idénticamente nulo, y por lo tanto por el Teorema 1.5, existen m funciones ortonormales f_i, y correspondientes valores propios no nulos, con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m$, tales que para cada función g ortogonal a f_i, para cada i, $\mathcal{K}g = 0$. Sea V el espacio generado por las funciones f_i, y consideremos la función $h(x)$ en V definida por $h(x) =$

$\sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x)$. Puesto que $\mathcal{K} f_i(x) = \lambda_i f_i(x)$ para cada i, tenemos que $\mathcal{K}h \in V$. Por lo tanto

$$\{(\mathcal{K}h, h) \mid \|h\| = 1, h \in V\} \subset \{(\mathcal{K}f, f) \mid \|f\| = 1\},$$

luego

$$\lambda_1 = \sup\{(\mathcal{K}h, h) \mid \|h\| = 1, h \in V\} \leq \sup\{(\mathcal{K}f, f) \mid \|f\| = 1\} = p.$$

Probaremos ahora la desigualdad en sentido contrario, con lo cual tendremos que $p = \lambda_1$, y esto garantiza que p es un valor propio de $\mathcal{K}$. Si $f \in \mathcal{R}$ y $\|f\| = 1$, podemos escribir

$$f = h + g, \quad h \in V \text{ y } g \in V^{\perp},$$

en donde $V^{\perp}$ denota el complemento ortogonal de V. Luego $\mathcal{K}g = 0$, $\mathcal{K}f = \mathcal{K}h$ es un elemento de V y

$$(\mathcal{K}f, f) = (\mathcal{K}h, h + g) = (\mathcal{K}h, h).$$

También tenemos que $0 \leq \|h\| \leq \|f\| = 1$, ya que $(f, f) = (h+g, h+g) = (h, h) + (g, g)$. Elegimos f de tal forma que $(\mathcal{K}f, f) > 0$, y como $p > 0$, $(\mathcal{K}h, h) > 0$, $\|h\| \neq 0$, por lo cual

$$(\mathcal{K}f, f) = \|h\|^2 (\mathcal{K}\rho, \rho) \leq (\mathcal{K}\rho, \rho),$$

en donde

$$\rho(x) = \frac{h(x)}{\|h(x)\|}.$$

Claramente $\rho \in V$, y por lo tanto

$$\sup\{(\mathcal{K}f, f) \mid \|f\| = 1\} \leq \sup\{(\mathcal{K}\rho, \rho) \mid \|\rho\| = 1, \rho \in V\}.$$

Esto prueba que $p \leq \lambda_1$, lo cual implica que $p = \lambda_1$. Luego p es un valor propio, y el teorema queda demostrado para el caso de las transformaciones integrales con núcleo separable. Veamos que el resultado también es válido para transformaciones integrales con núcleo $K(x, y)$ continuo simétrico. Para realizar la prueba de esto usamos un resultado que verificaremos más adelante. Dado $\varepsilon > 0$, existe un núcleo simétrico separable $H(x, y)$ tal que

$$\int_a^b \int_a^b |\, K(x, y) - H(x, y)|^2 \, dx \, dy \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, existe una sucesión de núcleos simétricos separables, $K_n(x, y)$, tales que

$$\int_a^b \int_a^b |\, K(x, y) - K_n(x, y)|^2 \, dx \, dy \leq \frac{1}{n^2}.$$

Por el Teorema 1.1 tenemos que

$$\|\mathcal{K}-\mathcal{K}_n\|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |\, K(x,y)-K_n(x,y)|^2 \, dx \, dy \leq \frac{1}{n^2}.$$

Si hacemos $p_n = \sup\{(\mathcal{K}_n f, f) \mid \|f\| = 1\}$, entonces probaremos que $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_n$. Supongamos que $\|f\| = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\,(\mathcal{K}f,f)-(\mathcal{K}_n f,f)| &= |\,((\mathcal{K}-\mathcal{K}_n)f,f)| \\
&\leq \|(\mathcal{K}-\mathcal{K}_n)f\| \, \|f\| \\
&\leq \|\mathcal{K}-\mathcal{K}_n\| \\
&\leq \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

De estas desigualdades deducimos que

$$(\mathcal{K}_n f,f)-\frac{1}{n} \leq (\mathcal{K}f,f) \leq (\mathcal{K}_n f,f)+\frac{1}{n},$$

y por lo tanto

$$p_n - \frac{1}{n} \leq p \leq p_n + \frac{1}{n}.$$

Esto prueba la afirmación. Como $p > 0$, solo consideramos la sucesiones de núcleos para las cuales $p_n > 0$. Ya hemos probado el resultado para núcleos separables, luego, si f_n son las funciones propias del operador $\mathcal{K}_n$, podemos escribir

$$\mathcal{K}_n f_n = p_n f_n, \quad \|f_n\| = 1.$$

Demostraremos ahora que

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{K}f_n - p f_n\| = 0.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}f_n - p f_n\| &= \|\mathcal{K}f_n - \mathcal{K}_n f_n + \mathcal{K}_n f_n - p f_n\| \\
&\leq \|\mathcal{K}f_n - \mathcal{K}_n f_n\| + \|\mathcal{K}_n f_n - p f_n\| \\
&\leq \|\mathcal{K}f_n - \mathcal{K}_n f_n\| + \|p_n f_n - p f_n\| \\
&\leq \|\mathcal{K}-\mathcal{K}_n\| + |\, p_n - p|,
\end{aligned}$$

en donde el lado derecho de esta desigualdad tiende a cero cuando $n \to \infty$. Por el Teorema 1.2, $\mathcal{K}$ es un operador compacto, por lo cual existe una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) y un elemento $g \in \mathcal{R}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{K}f_{n_k} - g\| = 0.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\|g - pf_{n_k}\| &= \|g - \mathcal{K}f_{n_k} + \mathcal{K}f_{n_k} - pf_{n_k}\| \\ &\leq \|g - \mathcal{K}f_{n_k}\| + \|\mathcal{K}f_{n_k} - pf_{n_k}\| .\end{aligned}$$

Esta desigualdad implica que

$$\lim_{k\to\infty} \|g - f_{n_k}\| = 0.$$

Por lo tanto,

$$\|g\| = \lim_{k\to\infty} \|pf_{n_k}\| = \|p\| \neq 0.$$

Por último, probaremos que g es una función propia del operador $\mathcal{K}$, con correspondiente valor propio p. Observe que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{K}g - pg\| &\leq \|\mathcal{K}g - \mathcal{K}pf_{n_k} + \mathcal{K}pf_{n_k} - pg\| \\ &\leq \|\mathcal{K}g - \mathcal{K}pf_{n_k}\| + \|\mathcal{K}pf_{n_k} - pg\| \\ &\leq \|\mathcal{K}\| \, \|g - pf_{n_k}\| + |p| \, \|\mathcal{K}f_{n_k} - g\| ,\end{aligned}$$

en donde el lado derecho de esta desigualdad tiende a cero cuando $k \to \infty$. De aquí vemos que $\mathcal{K}g = pg$, con lo que hemos terminado la prueba del teorema. □

Teorema 1.8. *Si $K(x, y)$ es continuo y simétrico entonces $(\mathcal{K}f, f) = 0$ para cada f si y solo si $K(x, y) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $(\mathcal{K}f, f) = 0$ para cada f. Entonces si f y g son funciones dadas, tenemos que $(\mathcal{K}f + g, f + g) = 0$ y utilizando la identidad

$$(\mathcal{K}f + g, f + g) = (\mathcal{K}f, f) + (\mathcal{K}g, g) + 2(\mathcal{K}f, g),$$

que se deduce de las propiedades del producto interno y de la simetría del operador $\mathcal{K}$, encontramos que para cualesquiera funciones f y g, se tiene que $(\mathcal{K}f, g) = 0$. Hagamos $g = \mathcal{K}f$. Entonces $(\mathcal{K}f, \mathcal{K}f) = 0$, lo cual es cierto, si y solo si $\mathcal{K}f = 0$. Esto último es válido para cada $f \in \mathcal{R}$. Sea $x \in [a, b]$ fijo. Entonces para cada $y \in [a, b]$ podemos escribir $K(x, y) = h(y)$, y es claro que $h \in \mathcal{R}$, por lo cual $\mathcal{K}h = 0$, es decir,

$$\int_a^b |\, K(x, y)|^2 \, dy = 0.$$

Esto significa que $K(x, y) = 0$ para cada $y \in [a, b]$, y puesto que $x \in [a, b]$ fue fijado arbitrariamente, vemos que $K(x, y) = 0$ para cada $x, y \in [a, b]$. □

Teorema 1.9. *Sea $\mathcal{K}f_j = \lambda_j f_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, donde f_j son vectores propios ortonormales de K. Entonces existe un vector propio g de $\mathcal{K}$, con correspondiente valor propio no nulo λ, el cual es ortogonal a f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, si y solo si g es también un vector propio, con λ el valor propio no nulo del operador H cuyo núcleo es*

$$H(x, y) = K(x, y) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x) f_j(y).$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{H}g = \lambda g$, con $\lambda \neq 0$ y $g \neq 0$. Entonces,

$$\mathcal{H}f_j(x) = \mathcal{K}f_j(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)(f_i, f_j) = \mathcal{K}f_j(x) - \lambda_j f_j(x) = 0.$$

Por el Teorema 1.5, g debe ser ortogonal a las funciones $f_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Luego,

$$\lambda g = \mathcal{H}g = \mathcal{K}g - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x)(g, f_j) = \mathcal{K}g,$$

lo cual prueba que g es una función propia del operador $\mathcal{K}$, con valor propio λ.
Recíprocamente, si g es ortogonal a f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, cuando $\mathcal{K}f_j = \lambda_j f_j$, entonces $\mathcal{H}g = \mathcal{K}g = \lambda g$. □

Teorema 1.10. *Sea f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, una base de vectores propios ortonormales de $\mathcal{K}$ con correspondientes valores propios no nulos λ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Si $\mathcal{K}$ no tiene otros valores propios no nulos entonces*

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(x) f_j(y).$$

Demostración. El operador $\mathcal{H}$ correspondiente al núcleo $H(x, y)$, dado en el teorema anterior tiene, en virtud del Teorema 1.9 valores propios nulos. Por lo tanto, por el Teorema 1.8, $H(x, y)$ debe ser idénticamente cero, lo cual prueba el teorema. □

Teorema 1.11.

- *Si $i < N$, $\lambda_{i+1} = \sup\left\{(\mathcal{K}f, f) \mid \|f\| = 1, (f, f_j) = 0, j = 1, 2, \ldots, i\right\}$,*
- *Si $-i > M$, $\lambda_{-i-1} = \text{ínf}\{(\mathcal{K}f, f) \mid \|f\| = 1, (f, f_j) = 0, j = -1, -2, \ldots, -i\}$.*

Demostración. Cuando $N > 0$, por el Teorema 1.7, podemos escribir

$$\sup\left\{(\mathcal{K}f, f) \mid \|f\| = 1\right\} = \lambda_1.$$

Si $N > i$, hagamos

$$K_i(x, y) = K(x, y) - \sum_{j=i}^{i} \lambda_j f_j(x) f_j(y).$$

Entonces, por el Teorema 1.9, la transformación integral $\mathcal{K}_i$ tiene exactamente $\lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, \ldots$ valores propios positivos con correspondientes funciones propias $f_{i+1}, f_{i+2}, \ldots$. Se sigue que

$$\lambda_{i+1} = \sup\left\{(\mathcal{K}_i f, f) \mid \|f\| = 1\right\}.$$

Sin embargo, cuando f es ortogonal a f_j, $j = 1, \ldots i$, tenemos que $\mathcal{K}_i f = \mathcal{K} f$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lambda_{i+1} &\geq \sup \{(\mathcal{K}_i f, f) \mid \|f\| = 1, f \text{ ortogonal a } f_j, j = 1, 2, \ldots, i\} \\ &= \sup \{(\mathcal{K} f, f) \mid \|f\| = 1, f \text{ ortogonal a} f_j, j = 1, 2, \ldots, i\} \geq (\mathcal{K} f_{i+1}, f_{i+1}) = \lambda_{i+1}. \end{aligned}$$

Esto prueba la primera parte del teorema, pues estas desigualdades se convierten en igualdades. La segunda parte se prueba considerando la transformación integral $-\mathcal{K}$. □

1.3. Teoremas de expansión para transformaciones integrales

Cuando estudiábamos transformaciones lineales en espacios de dimensión finita, vimos que era posible encontrar vectores ortonormales tal que cualquier elemento del espacio $\mathbb{R}^n$ puede expresarse en términos de estos vectores. Queremos ver si este mismo resultado se verifica para espacios de dimensión infinita cuando la transformación lineal es, en particular, una transformación integral.

Teorema 1.12. *Sea $\{\lambda_i\}$, $-\infty \leq -M \leq i \leq N \leq \infty$, $i \neq 0$ el espectro del operador integral simétrico $\mathcal{K}$ asociado con los vectores propios $\{f_i\}$. Si g es un elemento de $\mathcal{R}$ entonces*

$$\mathcal{K} g = \sum_i \lambda_i (g, f_i) f_i = \sum_i (\mathcal{K} g, f_i) f_i, \tag{1.4}$$

y la serie converge absoluta y uniformemente en $[a, b]$.

Demostración. Para probar esto usamos la condición de Cauchy, es decir, la serie (1.4) converge absoluta y uniformemente en $[a, b]$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $|\, m|, |\, n| \geq N_1(\varepsilon)$ entonces

$$\sum_{i=m}^{n} |\lambda_i a_i f_i(x)| < \varepsilon, \quad a_i = (g, f_i).$$

Sea $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$A \geq \sup \left\{ \int_a^b |\, K(x, y)|^2 \, dy \mid x \in [a, b] \right\}.$$

Por la desigualdad de Bessel podemos escribir

$$\sum_i{}' \,|\, a_i|^2 \leq \|g\| \,,$$

en donde $'$ denota que en esta suma se excluye el caso en el que $i = 0$. Por lo tanto, la serie $\sum_i{}' |\, a_i|^2$ converge. Por la condición de Cauchy, existe $N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para cada $|\, n|\, , |\, m| \geq N_1(\varepsilon)$ tenemos

$$\sum_{i=m}^{n} |\, a_i|^2 < \frac{\varepsilon^2}{A}.$$

Por lo tanto, si $|\, n|\, , |\, m| \geq N_1(\varepsilon)$ tenemos por la desigualdad de Cauchy-Schwartz que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{n} |\, \lambda_i a_i f_i| &\leq \left(\sum_{m}^{n} |\, a_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=m}^{n} \lambda_i^2 \,|\, f_i|^2 \right)^{1/2} \\
&< \left(\frac{\varepsilon^2}{A} \right)^{1/2} \left(\int_a^b |\, K(x,y)|^2 \; dy \right)^{1/2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba la convergencia absoluta y uniforme de la serie $\sum_i \lambda_i a_i f_i$. Debemos ahora probar que esta serie converge a $\mathcal{K}g$. Si el número de valores propios es finito, por el Teorema 1.10, el núcleo es separable y

$$K(x,y) = \sum_i \lambda_i f_i(x) f_i(y).$$

De esto deducimos que

$$\mathcal{K}g = \sum_i \lambda_i (g, f_i) f_i,$$

lo cual prueba el teorema para este caso. Ahora consideremos el caso en el que el número de valores propios es infinito. Usando la notación del Corolario 1.1, supongamos que $N = M = \infty$, y los demás casos se tratan similarmente. Entonces,

$$\lim_{i \to \infty} \lambda_i = 0 = \lim_{i \to \infty} \lambda_{-i}.$$

Si denotamos por h una función ortogonal a las funciones

$$f_1, f_2, \ldots, f_j, f_{-1}, \ldots, f_{-j}, \tag{1.5}$$

y por el Teorema 1.11 tenemos

$$\|h\|^2 \lambda_{-j-1} \leq (\mathcal{K}h, h) \leq \|h\|^2 \lambda_{j+1}.$$

Por lo tanto, para cualquier sucesión de funciones h_j tales que h_j es ortogonal a todo elemento del conjunto de funciones dado en (1.5) y $\|h_j\| \leq B$ tenemos

$$\lim_{j \to \infty} |\, (\mathcal{K}h_j, h_j)| = 0. \tag{1.6}$$

Sea H_j otra sucesión de funciones con $\|H_j\| \leq B$ y H_j ortogonal al conjunto de funciones (1.5) para cada j. Entonces las funciones $(h_j \pm H_j)$ son también ortogonales a este conjunto de funciones para cada j y $\|h_j \pm H_j\| \leq 2B$. Utilizando la identidad

$$(\mathcal{K}s, t) = \frac{1}{4}\Big(\big(\mathcal{K}(s+t), s+t\big) - \big(\mathcal{K}(s-t), s-t\big)\Big), \quad s, t \in \mathcal{R}$$

encontramos que

$$\lim_{j\to\infty} |\,(\mathcal{K}h_j, H_j)| = 0. \tag{1.7}$$

Sea

$$h_j = g - \sum_{i=-j}^{j}{}'(g, f_i)f_i.$$

Entonces h_j es ortogonal al conjunto de funciones dado en (1.5) para cada j, y $\|h_j\| \leq \|g\|$. Ahora bien, Supongamos que $H_j = \mathcal{K}h_j$. Entonces

$$\begin{aligned} H_j = \mathcal{K}h_j = \mathcal{K}g - \sum_{i=-j}^{j}{}'(g, f_i)\mathcal{K}f_i = \mathcal{K}g - \sum_{i=-j}^{j}{}'(g, f_i)\lambda_i f_i \\ = \mathcal{K}g - \sum_{i=-j}^{j}{}'(g, \mathcal{K}f_i)f_i = \mathcal{K}g - \sum_{i=-j}^{j}{}'(\mathcal{K}g, f_i)f_i. \end{aligned}$$

Por lo tanto, H_j es ortogonal a $f_1, f_2, \ldots, f_j, f_{-1}, \ldots, f_{-j}$ y $\|H_j\| \leq \|\mathcal{K}g\|$. Por la ecuación (1.7), puesto que $H_j = \mathcal{K}h_j$, tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} |\,(\mathcal{K}h_j, \mathcal{K}h_j)| = 0,$$

lo cual significa que

$$\lim_{j\to\infty} \int_a^b \left| \mathcal{K}g - \sum_{i=-j}^{j}{}'\lambda_i(g, f_i)f_i \right|^2 dx = 0.$$

Por la convergencia uniforme podemos concluir que

$$\int_a^b \left| \mathcal{K}g - \sum_i \lambda_i(g, f_i)f_i \right|^2 dx = 0.$$

Luego, por la continuidad del integrando, tenemos que

$$\mathcal{K}g = \sum_i \lambda_i(g, f_i)f_i,$$

probando así el teorema. $\square$

Observación 1.3. *Este teorema puede ser visto como una extensión de la diagonalización de transformaciones lineales definidas sobre un espacio vectorial Euclidiano de dimensión n. Si escribimos la función g en la forma $\sum_i (g, f_i) f_i$ entonces usando las notaciones de las transformaciones lineales podemos ver que hay una base $\{f_i\}$ en la cual la función g tiene representación coordenada $[(g, f_i)]$, y se sigue que $\mathcal{K}g$ tiene la representación $[\lambda_i(g, f_i)]$ con respecto a la misma base.*

Se introduce el concepto de núcleo iterado, el cual hace posible obtener una expansión de nuestro núcleo semejante al caso de solo un número finito de valores propios y que nos permite una mayor comprensión del teorema anterior. Hay que recalcar que tal expansión no siempre es posible, aunque mostraremos que el operador K^n tiene tal expansión.

Definición 1.4 (Núcleo iterado)**.** *Definimos el núcleo iterado K^n como sigue: para $n = 1$, $K^1(x, y) := K(x, y)$, y para $n > 1$ se define*

$$K^n(x, y) = \int_a^b K(x, t) K^{n-1}(t, y)\, dt.$$

Ejemplo 1.5. *Encontrar K^n, $n \in \mathbb{N}$, para $K(x, y) = xy$ en $[0, 1]$*
Solución. Para $n = 1$ tenemos que $K^1(x, y) = xy$. Ahora,

$$K^2(x, y) = \int_0^1 K(x, t) K^1(t, y)\, dt = \int_0^1 xt^2 y\, dt = \frac{1}{3} xy,$$
$$K^3(x, y) = \int_0^1 K(x, t) K^2(t, y)\, dt = \frac{1}{3} \int_0^1 xt^2 y\, dt = \frac{1}{3^2} xy.$$

Afirmamos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$K^n(x, y) = \frac{1}{3^{n-1}} xy. \tag{1.8}$$

Usaremos inducción sobre n para probar la afirmación. Para $n = 1$ la proposición es cierta. Supongamos que es cierta para n y veamos que lo es para $n + 1$. Por hipótesis de inducción tenemos (1.8), Luego,

$$K^{n+1}(x, y) = \int_0^1 K(x, t) K^n(t, y)\, dt = \frac{1}{3^{n-1}} \int_0^1 xt^2 y\, dt = \frac{1}{3^n} xy.$$

Esto prueba la proposición para $n + 1$, y por consiguiente para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 1.13. *Si $\{\lambda_i\}$ y $\{f_i\}$ se definen como en el Teorema 1.12 entonces*

$$K^n(x, y) = \sum_i \lambda_i^n f_i(x) f_i(y), \;\; n = 2, 3, \ldots,$$

y la serie converge absoluta y uniformemente en $x, y \in [a, b]$.

Demostración. Para y fijo, definamos $g(x) = K^{n-1}(x, y)$. Entonces,

$$\mathcal{K}g(z) = \int_a^b K(z,t)g(t)\,dt = \int_a^b K(z,t)K^{n-1}(t,y)\,dt = K^n(z,y).$$

Por el Teorema 1.12, podemos ver que toda función de la forma $\mathcal{K}g(x)$ tiene una expansión en términos de las funciones propias del operador, dada por

$$\mathcal{K}g(x) = \sum_i (\mathcal{K}g, f_i) f_i(x).$$

En este caso,

$$(\mathcal{K}g, f_i) = \int_a^b K^n(u,y) f_i(y)\,du = \mathcal{K}^n f_i(y) = \lambda_i^n f_i(y).$$

Por el Teorema 1.12,

$$\mathcal{K}g(x) = \sum_i (\mathcal{K}g, f_i) f_i(x) = \sum_i \lambda_i^n f_i(y) f_i(x),$$

y la serie converge uniformemente para $x \in [a, b]$ y fijo. Veamos que la convergencia uniforme se verifica para $x, y \in [a, b]$. Observe que cuando $n = 2$ y $x = y$, tenemos

$$K^2(x,x) = \sum_i \lambda_i^2 \left| f_i(x) \right|^2, \quad x \in [a,b].$$

Observe que la convergencia de esta serie es uniforme, por lo que dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que si $|m|, |p| \geq N(\varepsilon)$ entonces

$$\sum_{i=m}^{p} \lambda_i^2 \left| f_i(x) \right|^2 < \varepsilon, \quad x \in [a,b].$$

Podemos escoger $N(\varepsilon)$ tal que $|\lambda_i| < 1$ para cada $i > N(\varepsilon)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=m}^{p} \lambda_i^n f_i(x) f_i(y) \right|^2 &\leq \sum_{i=m}^{p} |\lambda_i|^n \left| f_i(x) \right|^2 \sum_{i=m}^{p} |\lambda_i|^n \left| f_i(y) \right|^2 \\
&\leq \sum_{i=m}^{p} |\lambda_i|^2 \left| f_i(x) \right|^2 \sum_{i=m}^{p} |\lambda_i|^2 \left| f_i(y) \right|^2 \\
&\leq \varepsilon^2,
\end{aligned}$$

para todo $x, y \in [a, b]$. La condición de Cauchy nos garantiza entonces la convergencia uniforme. □

Teorema 1.14. *Si $\{\lambda_i\}$ y $\{f_i\}$ se definen como en el Teorema 1.12, los valores propios no nulos de K^n son λ_i^n. Más aún, si $S(r)$ es el conjunto de índices i tales que $\lambda_i^n = r \neq 0$, entonces el número de vectores propios linealmente independientes de K^n con valor propio r es el número de índices en $S(r)$.*

Demostración. Si $\mathcal{K}^n g = rg, r \neq 0$, entonces por la convergencia uniforme que demostramos en el teorema anterior podemos escribir

$$\mathcal{K}^n g = \sum_i \lambda_i^n (g, f_i) f_i.$$

Toda función propia de $\mathcal{K}$ correspondiente a un valor propio λ_i es también una función propia de $\mathcal{K}^n$ con valor propio correspondiente λ_i^n, dado que

$$\mathcal{K}^n f_i = \mathcal{K}^{n-1} \mathcal{K} f_i = \lambda_i \mathcal{K}^{n-1} f_i.$$

Por lo tanto, por el Teorema 1.4 debemos tener que $(g, f_i) = 0$, salvo si i esta en $S(r)$. Luego,

$$rg = \mathcal{K}^n g = \sum_{i \in S(r)} \lambda_i^n (g, f_i) f_i.$$

Esto muestra que g es una combinación lineal de funciones propias de $\mathcal{K}^n$ correspondiente a el valor propio λ_i^n. Por lo que debemos tener que $r = \lambda_i^n$, y que el número de funciones propias linealmente independiente de $\mathcal{K}^n$ para un valor propio r es exactamente el número de índices en $S(r)$. $\square$

Teorema 1.15. *Sea $K(x, y)$ un núcleo simétrico definido en el cuadrado $[a, b] \times [a, b]$. Entonces*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \left| K(x, y) - \sum_{i=-n}^{n}{}' \lambda_i f_i(x) f_i(y) \right|^2 dx = 0,$$

uniformemente en $[a, b]$.

Demostración. Sean

$$X = K(x, y),\ Y = \sum_{i=-n}^{n}{}' \lambda_i f_i(x) f_i(y).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left| K(x, y) - \sum_{i=-n}^{n}{}' \lambda_i f_i(x) f_i(y) \right|^2 &= \int_a^b |\, X - Y|^2 \, dx \\
&= (X - Y, X - Y) \\
&= (X, X) - (X, Y) - (Y, X) + (Y, Y).
\end{aligned}$$

Note que

$$(X, X) = \int_a^b K(x,y)K(x,y)\,dx = K^2(y,y),$$

$$\begin{aligned}(X, Y) = (Y, X) &= \int_a^b K(x,y) \sum_{i=-n}^{n}{}' \lambda_i f_i(x) f_i(y)\,dx \\ &= \sum_{i=-n}^{n}{}' \lambda_i f_i(y) \mathcal{K} f_i(y) \\ &= \sum_{i=-n}^{n}{}' \lambda_i^2 \,|\, f_i(y)|^2\,,\end{aligned}$$

$$(Y, Y) = \int_a^b \sum_{i=-n}^{n}{}' \lambda_i f_i(x) f_i(y) \sum_{i=-n}^{n}{}' \lambda_i f_i(x) f_i(y)\,dx = \sum_{i=-n}^{n}{}' \lambda_i^2 \,|\, f_i(y)|^2\,.$$

Esto último se deduce del hecho de que las funciones f_i son ortonormales, ya que el núcleo K es simétrico. Luego,

$$\int_a^b \left| K(x,y) - \sum_{i=-n}^{n}{}' \lambda_i f_i(x) f_i(y) \right|^2 dx = K^2(y,y) - \sum_{i=-n}^{n}{}' \lambda_i^2 \,|\, f_i(y)|^2\,.$$

El resultado se sigue inmediatamente del Teorema 1.13. $\square$

Definición 1.5 (Núcleo positivo definido y semidefinido)**.** *El núcleo simétrico $K(x,y)$ es llamado* **positivo definido** *cuando define una transformación definida positiva, esto es, cuando $(\mathcal{K}f, f) > 0$ para cada f en $\mathcal{R}$ y $f \neq 0$. Se llama positivo semidefinido cuando $(\mathcal{K}f, f) \geq 0$ para cada $f \in \mathcal{R}$.*

Teorema 1.16. *Si $K(x,y)$ es positivo semidefinido entonces $K(x,x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.*

Demostración. Supongamos que $K(z,z) < 0$ para algún $z \in [a,b]$. Entonces, por la continuidad del núcleo K, existe un intervalo I tal que $z \in I$ y además $K(x,y) < 0$ para $x, y \in I$. Sea $f(x)$ la función característica del intervalo I. Entonces

$$(\mathcal{K}f, f) = \int_I \int_I K(x,y)\,dx\,dy < 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $K(x,x) \geq 0$ para cada $x \in [a,b]$. $\square$

Teorema 1.17. *Si $K(x,y)$ es positivo semidefinido entonces*

$$K(x,y) = \sum_i \lambda_i f_i(x) f_i(y),$$

y la serie converge absoluta y uniformemente para cada $x, y \in [a,b]$.

Demostración. El núcleo

$$H(x,y) = K(x,y) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) f_i(y),$$

induce una transformación integral, la cual tiene valores propios no nulos

$$\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$$

Como estos valores propios son no negativos, el núcleo $H(x,y)$ debe ser positivo semidefinido y tenemos entonces por el Teorema 1.16 que para cada $x \in [a,b]$,

$$H(x,x) = K(x,x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left| f_i(x) \right|^2 \geq 0.$$

Luego,

$$\sum_{i} \lambda_i \left| f_i(x) \right|^2 \leq K(x,x).$$

Esto significa que la serie del lado izquierdo de esta desigualdad converge uniformemente, por lo cual si $\varepsilon > 0$ es dado, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que si $\left| n \right|, \left| m \right| \geq N(\varepsilon)$ entonces

$$\sum_{i=m}^{n} \lambda_i \left| f_i(x) \right|^2 < \varepsilon^2.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos que

$$\left| \sum_{i=m}^{n} \lambda_i f_i(x) f_i(y) \right|^2 \leq \sum_{i=m}^{n} \lambda_i \left| f_i(x) \right|^2 \sum_{i=m}^{n} \lambda_i \left| f_i(y) \right|^2 < \varepsilon^2 A^2,$$

en donde

$$A = \sup \left\{ K(y,y) \mid y \in [a,b] \right\} \geq \sum_{i} \lambda_i \left| f_i(y) \right|^2.$$

Aplicando nuevamente la condición de Cauchy obtenemos la convergencia uniforme de la serie para $y \in [a,b]$, cuando x es fijo, y de igual forma se muestra la convergencia uniforme para $x \in [a,b]$ cuando y es fijo. Ahora demostraremos que efectivamente la serie converge uniformemente a $K(x,y)$ para cada $x, y \in [a,b]$.
Puesto que

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left| K(x,y) - \sum_{i} \lambda_i f_i(x) f_i(y) \right|^2 dy \\
&\leq 2 \int_a^b \left| K(x,y) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) f_i(y) \right|^2 dy \\
&+ 2 \int_a^b \left| K(x,y) - \sum_{i>n} \lambda_i f_i(x) f_i(y) \right|^2 dy,
\end{aligned}$$

por el Teorema 1.15 concluimos que

$$\int_a^b \left| K(x,y) - \sum_i \lambda_i f_i(x) f_i(y) \right|^2 dy = 0, \quad x \in [a,b].$$

Luego,

$$K(x,y) = \sum_i \lambda_i f_i(x) f_i(y). \tag{1.9}$$

En (1.9), hagamos $x = y$. Entonces

$$K(x,x) = \sum_i \lambda_i \left| f_i(x) \right|^2.$$

Esta serie converge uniformemente, por lo que dado $\varepsilon > 0$, existe $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que si $m, n \geq M(\varepsilon)$, entonces

$$\sum_{i=m}^{n} \lambda_i \left| f_i(x) \right|^2 < \varepsilon. \tag{1.10}$$

Usando la desigualdad

$$\left(\sum_{i=m}^{n} \lambda_i f_i(x) f_i(y) \right)^2 \leq \sum_{i=m}^{n} \lambda_i \left| f_i(x) \right|^2 \sum_{i=m}^{n} \lambda_i \left| f_i(x) \right|^2,$$

junto con (1.10) obtenemos el resultado. $\square$

Capítulo 2

Series de Fourier generalizadas y espacios vectoriales completos

En este capítulo veremos qué condiciones nos permiten garantizar que una función admite una expansión en términos de un conjunto de funciones ortonormales. Ya en el capítulo anterior estudiamos un caso especial de funciones ortonormales, las funciones propias de un operador integral.

2.1. Series de Fourier generalizadas

Consideremos un espacio vectorial E real o complejo. Definimos la suma de una serie infinita de elementos de E como el límite de una sucesión de sumas parciales de elementos de E. O lo que es lo mismo, si $\{x_i\}$ es una sucesión de elementos de E escribimos

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, \tag{2.1}$$

cuando

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Esto último significa que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = 0.$$

Ejemplo 2.1. *Consideremos el conjunto de funciones complejas*

$$\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} :\ n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

junto con el producto interno dado por

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Podemos ver que este conjunto es ortonormal con este producto interno.

El siguiente teorema puede considerarse como una extensión de los teoremas más comunes usados para el cálculo de límites.

Teorema 2.1. *Sean E un espacio Euclidiano, y $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, $\{z_i\}$ sucesiones en E tales que $x = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$, $y = \lim\limits_{i\to\infty} y_i$, $z = \lim\limits_{i\to\infty} z_i$. Entonces*

(1) $\|x\| = \lim\limits_{i\to\infty} \|x_i\|$.

(2) $(x,y) = \lim\limits_{i\to\infty} (x_i, y_i)$.

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (z_i, u) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} z_i, u\right)$, *para cada $u \in E$.*

(4) $\displaystyle T\left(\sum_{i=1}^{\infty} z_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} T z_i$, *para cada transformación lineal continua T de E en E.*

Demostración. Como

$$|\|x_i\| - \|x\|| \leq \|x_i - x\|$$

(1) se deduce inmediatamente. La proposición (2) es consecuencia directa de la desigualdad

$$|(x_i, y_i) - (x,y)| \leq \|y_i\| \|x_i - x\| + \|x\| \|y_i - y\|.$$

Si en (2) hacemos $y_i = u$ y $x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} z_j$, se deduce (3). Si T es continua entonces

$$T(z) = \lim_{i\to\infty} T\left(\sum_{j=1}^{i} z_j\right) = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{i} T(z_j) = \sum_{j=1}^{\infty} T(z_j),$$

siempre que $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} z_j = z$. Esto prueba (4) y por lo tanto el teorema. □

La representación de x dada por (2.1) no nos dice algo acerca de las constantes a_i. Más aún, estas constantes pueden no ser únicas, como lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2. *En el espacio* $E = \mathcal{C}[0,1]$ *definimos para cada* $f \in \mathcal{C}[0,1]$,

$$\|f\| = \sup\{|\, f(t)| \mid t \in [0,1]\}\,.$$

Es fácil verificar que esta función de E *a* $\mathbb{R}$, *es una norma para* E. *Sea*

$$f_n(x) = \frac{x}{n(n-1)}, \quad n \neq 0, 1, \;\; f_1(x) = f_0(x) = 0,\, x \in [0,1].$$

Entonces $\|f_n\| \leq 1/n$ *para cada* n. *Definamos* $g_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$ *para cada* n. *Tenemos que*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n+1} g_i(x) - 0\right\| = \|f_{n+1}(x)\| \leq 1/(n+1).$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} 0 g_i(x).$$

Esto muestra que la función nula tiene una representación de la forma (2.1), *donde los coeficientes* a_i *no son únicos.*

Sin embargo, si la sucesión $\{x_i\}$ es ortonormal, entonces las constantes a_i en (2.1) pueden ser determinadas de forma única. Para ver esto, tomando el producto interno en ambos lados de (2.1) con x_j obtenemos:

$$(x, x_j) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, x_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (x_i, x_j) = a_j.$$

Por lo que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, x_i) x_i. \tag{2.2}$$

Una representación en la forma (2.2) de un elemento x se llama *serie de Fourier generalizada* de x relativa a la sucesión ortonormal $\{x_i\}$. Los coeficientes $a_i = (x, x_i)$ se llaman los *coeficientes de Fourier generalizados* de x relativos a $\{x_i\}$.

Teorema 2.2. *Si* $\{x_i\}$ *es una sucesión ortonormal en* E *y si* x, y *son elementos en* E *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, x_i) x_i$.

(2) $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (x, x_i)(x_i, y)$, *para cada* $y \in E$.

(3) $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, x_i)|^2$.

Demostración. Supongamos que (1) es válida entonces

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x, x_i) x_i, y \right) = \sum_{i=1}^{\infty}, (x, x_i)(y, y_i)$$

esto prueba (2). Si ponemos $y = x$ en (2) obtenemos (3). Probemos que (3) implica (2). Puesto que

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{i=1}^{n} (x, x_i) x_i \right\|^2 &= \left(x - \sum_{i=1}^{n} (x, x_i) x_i, x - \sum_{i=1}^{n} (x, x_i) x_i \right) \\
&= \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} |(x, x_i)|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} (x, x_i)(x, x_j)(x_i, x_j) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x, x_i)|^2,
\end{aligned}$$

se sigue de (3) que

$$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(x, x_i)|^2 \to 0, \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Por lo tanto (3) implica (1) y la prueba esta completa. $\square$

Las identidades (2) y (3) son conocidas como *identidades de Parseval*, y son generalizaciones de resultados análogos que se obtienen para el caso de los espacios de dimensión finita.
Los siguientes resultados nos indican cuando un elemento de un espacio vectorial E tiene una representación en la forma (2.2), adicionando ciertas condiciones sobre los elementos x_i. Empezamos con algunas definiciones.

Definición 2.1 (Conjunto denso)**.** *Sean A y B dos subconjuntos de E. El conjunto A es denso en B si todo elemento de B es el límite de una sucesión de elementos en A.*

Definición 2.2 (Conjunto linealmente denso)**.** *Un subconjunto A es linealmente denso en B, si el espacio generado por A es denso en B.*

Ejemplo 2.3. *Sean $E = \mathbb{R}^2$ y $A = \{(1, 2); (2, 3)\}$ entonces el espacio generado por A es E, así que A es linealmente denso en E.*

Teorema 2.3. *Sea $\{x_i\}$ una sucesión ortonormal linealmente densa en E. Entonces todo elemento $x \in E$ puede ser escrito en la forma (2.2).*

Demostración. Supongamos que la sucesión $\{x_i\}$, es linealmente densa en E. Esto significa que dado $x \in E$, existen $b_i(x)$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(x) x_i.$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_\varepsilon$ entonces

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} b_i(x) x_i \right\| < \varepsilon.$$

Sea $n = N_\varepsilon$, y hagamos $b_i(x) = 0$ para $i > N_\varepsilon$, entonces si $j \geq N_\varepsilon$ tenemos

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{j} (x, x_i) x_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{j} b_i(x) x_i \right\| < \varepsilon.$$

Esto demuestra que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, x_i) x_i. \qquad \square$$

Teorema 2.4. *Si S es un conjunto el cual es linealmente denso en E y $(x, z) = (y, z)$ para todo $z \in S$ entonces $x = y$. En particular, si $(x, z) = 0$ para todo $z \in S$ entonces $x = 0$.*

Demostración. Por hipótesis tenemos que $(x - y, z) = 0$, para todo $z \in S$ y por lo tanto, para toda combinación lineal de elementos de S. Puesto que S es linealmente denso en E, existe una sucesión (u_n) de elementos en el espacio generado por S tal que $x - y = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Luego,

$$(x - y, x - y) = (x - y, \lim_{n\to\infty} u_n) = \lim_{n\to\infty} (x - y, u_n) = 0,$$

dado que $u_n \in S$ para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual prueba que $x = y$. $\square$

Hasta aquí, no hemos mostrado teoremas acerca de la existencia de una sucesión linealmente densa en un espacio E, lo cual no siempre puede garantizarse, pues existen espacios Euclidianos en donde no podemos encontrar tal sucesión. No obstante, si se supone la existencia de tal sucesión, se puede mostrar que existe una sucesión ortonormal linealmente densa en E, gracias al método de Gram-Schmidt.

Teorema 2.5. *Si $\{y_n\}$ es linealmente denso en E entonces existe una sucesión ortonormal $\{x_i\}$ linealmente densa en E.*

Demostración. Sin perdida de la generalidad, supongamos que $\{y_n\}$ es linealmente independiente, pues si $\{y_i, y_1, \ldots, y_{i-1}\}$ es linealmente dependiente, podemos extraer un subconjunto que es linealmente independiente. Por el método de Gram-Schmidt podemos construir una sucesión ortonormal, como sigue:

$$x_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|};\ x_n = \frac{y_n - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}(y_n, x_j)x_j}{\left\| y_n - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}(y_n, x_j)x_j \right\|}.$$

Mostraremos que cada x_n esta bien definido. Veamos que

$$y_n - \sum_{j=1}^{n-1}(y_n, x_j)x_j \neq 0,$$

para cada $n \geq 2$. Si no fuera así, el conjunto $\{y_n, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ sería linealmente dependiente, pero esto implica que el conjunto $\{y_n, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ sería linealmente dependiente, pues cada x_j depende linealmente de $\{y_1, \ldots, y_j\}$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Es claro que $\|x_n\| = 1$ para cada n. Finalmente, probemos que la sucesión $\{x_n\}$ es ortonormal. Para $n = 2$, tenemos

$$(x_1, x_2) = \frac{1}{A_2}(x_1, y_2 - (y_2, x_1)x_1) = \frac{1}{A_2}[(x_1, y_2) - (x_1, y_2)] = 0,$$

en donde $A_2 = \|y_2 - (y_2, x_1)x_1\|$. Supongamos que $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ son ortogonales. Luego si $k < n$, entonces

$$\begin{aligned}(x_k, x_n) &= \frac{1}{A_n}(x_k, y_n - \sum_{j=1}^{n-1}(y_n, x_j)x_j) \\ &= \frac{1}{A_n}[(x_k, y_n) - (x_k, y_n)] = 0,\end{aligned}$$

en donde

$$A_n = \left\| y_n - \sum_{j=1}^{n-1}(y_n, x_j)x_j \right\|.$$

Por inducción sobre n, encontramos que $\{x_i\}$ es una sucesión ortonormal. Veamos que la sucesión $\{x_i\}$ es linealmente densa en E. Dado $z \in E$, existe una sucesión v_n en E tal que $z = \lim_{n\to\infty} v_n$, y cada v_n es una combinación lineal de los elementos y_i. Claramente, cada y_n es una combinación lineal de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Por lo tanto cada v_n es una combinación lineal de los elementos x_i. Esto prueba que la sucesión $\{x_n\}$ es linealmente densa en E. □

Observación 2.1. *Una sucesión* $\{x_i\}$ *se dice* **infinita y linealmente independiente** *cuando la ecuación* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i = \boldsymbol{0}$ *implica que* $b_i = 0$ *para cada* i*. Esto nos permite asegurar que los coeficientes en* (2.1) *son determinados de forma única cuando* x *tiene una representación en la forma* (2.1)*. Si una sucesión* $\{x_i\}$ *es infinita y linealmente independiente y todo elemento* x *en* E *puede escribirse en la forma* (2.1)*, decimos que la sucesión* $\{x_i\}$ *es una base para* E*. Hemos visto que ciertas sucesiones que son linealmente densas en* E *y ortonormales forman una base para* E*. La característica de ortonormalidad es importante pues nos permite formar una base, dado que se puede construir una sucesión que es infinita y linealmente independiente la cual es linealmente densa en* E *pero no forma una base para* E*.*

En el espacio $\mathcal{R}$, junto con el producto interno dado en (1.1), supongamos que $\{f_i\}$ es una sucesión de funciones ortonormales la cual es linealmente densa en $\mathcal{R}$. Esto implica que toda función $f \in \mathcal{R}$ tiene una expansión en la forma (2.2), esto es

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} (f, f_i) f_i(x) \right|^2 dx = 0. \tag{2.3}$$

Se dice entonces que la serie de Fourier para f, relativa a $\{f_i\}$ *converge en media*. La convergencia en media de una serie de Fourier no implica que dicha serie de Fourier converja en el sentido ordinario hacia la función f, en todo punto x. Más aún la serie no necesita ser convergente en el sentido ordinario. Cuando (2.3) es válido escribimos

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} (f, f_i) f_i(x). \tag{2.4}$$

Teorema 2.6. *Sea* $|g(x)|^2$ *integrable en* $c \leq x \leq d$*, donde* $a \leq c \leq d \leq b$*. Entonces, si la serie* (2.4) *converge o no en el sentido usual, la serie obtenida multiplicando cada término de* (2.4) *por* $g(x)$ *e integrando sobre* $c \leq x \leq d$ *converge a la integral de* fg *sobre* $c \leq x \leq d$*. Esto es*

$$\int_c^d f(x) g(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} (f, f_i) \int_c^d g(x) f_i(x)\, dx$$

Demostración. Como

$$\begin{aligned}
&\left| \int_c^d f(x) g(x) - \sum_{i=1}^{\infty} (f, f_i) \int_c^d g(x) f_i(x)\, dx \right|^2 \\
&= \left| \left(f(x) - \sum_{i=1}^{\infty} (f, f_i) f_i, g(x) \right) \right|^2 \\
&\leq \int_c^d |g(x)|^2 \, dx \int_c^d \left| f(x) - \sum_{i=1}^{\infty} (f, f_i) f_i \right|^2 \, dx \\
&\leq \int_c^d |g(x)|^2 \, dx \int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=1}^{\infty} (f, f_i) f_i \right|^2 \, dx,
\end{aligned}$$

por (2.3) obtenemos el resultado. □

Teorema 2.7. *Si f y f_i son continuas en el intervalo finito $c \leq x \leq d$, y si la serie* (2.4) *es uniformemente convergente en $c \leq x \leq d$, entonces esta serie debe ser convergente a f.*

Demostración. Sea

$$h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, f_i) f_i(x).$$

Como cada f_i es una función continua en el intervalo $[c, d]$, entonces para todo n la sucesión de funciones (s_n), en donde $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} (f_i, f) f_i(x)$, es continua en este intervalo y puesto que $s_n \to h$ uniformemente en $[c, d]$, la función $h(x)$ es continua. También de la convergencia uniforme de la serie (2.4) deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^d \left| h(x) - \sum_{i=1}^{n} (f, f_i) f_i(x) \right|^2 dx = 0.$$

De la desigualdad triangular tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_c^d |f(x) - h(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_c^d \left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} (f, f_i) f_i(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+ \left(\int_c^d \left| h(x) - \sum_{i=1}^{n} (f, f_i) f_i(x) \right|^2 dx \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

El lado derecho de esta desigualdad tiende a cero cuando $n \to \infty$, por lo cual el valor de la integral del lado izquierdo de esta desigualdad debe ser cero. Por la continuidad de f y h encontramos que $f = h$, como se quería demostrar. □

2.2. Teorema de aproximación

Nuestra meta en esta sección es probar un resultado clásico debido a Weierstrass conocido como *el teorema de aproximación de Weierstrass*, el cual nos dice que toda función de valor real continua sobre un intervalo finito $[a, b]$ puede ser aproximada por medio de una sucesión de polinomios. En rigor, estamos diciendo que para cada $\varepsilon > 0$, existe un polinomio p tal que $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$, cualquiera que sea $x \in [a, b]$. Como un corolario de este teorema deduciremos que un núcleo arbitrario puede ser aproximado mediante sucesiones de núcleos separables. También puede probarse que toda función continua en

$\mathbb{R}$ y con período 2π, puede ser aproximada uniformemente por una suma trigonométrica. Antes de probar este teorema, damos un resultado previo.

Sea I el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definido como $-a_i \leq x_i \leq a_i$, $a_i > 0$. En el caso de que el subconjunto I es infinito, omitimos los signos de igualdad. Sean $\delta > 0$, $x \in I$ dados y

$$D_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \delta\}.$$

Entonces $I \cap D_\delta(x)$ es el conjunto de puntos de I que están en la hiperesfera de radio δ y centro x. Denotemos $I \cap C(D_\delta(x)) = I - D_\delta(x)$, entonces es claro que estos conjuntos son disyuntos y su unión es todo I. Ahora, para cada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de I, sea $\{K_m(x;y)\}$ una sucesión de funciones reales en la variable $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, integrables en I. Con estas convenciones enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 2.8. *Sea $\delta_1 > 0$ dado. Supongamos que para x fijo y para cada δ tal que $0 < \delta < \delta_1$, las siguientes condiciones se satisfacen:*

(1) $\displaystyle\int_{I\cap D_\delta(x)} |K_m(x;y)|\,dy \leq A(x)$, *independiente de m.*

(2) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \int_{I\cap D_\delta(x)} K_m(x;y)\,dy = 1.$

(3) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \int_{I\cap C(D_\delta(x))} K_m(x;y)f(y)\,dy = 0.$

Entonces, cuando x es un punto de continuidad de f tenemos

$$\lim_{m\to\infty} \int_I K_m(x;y)f(y)\,dy = f(x).$$

Demostración. Observe que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_I K_m(x;y)f(y)\,dy - f(x)\right| \\
&= \left|\int_{I\cap D_\delta(x)} K_m(x;y)f(y)\,dy + \int_{I\cap C(D_\delta(x))} K_m(x;y)f(y)\,dy - f(x)\right| \\
&\leq \left|\int_{I\cap D_\delta(x)} K_m(x;y)f(y)\,dy - f(x)\right| + \left|\int_{I\cap C(D_\delta(x))} K_m(x;y)f(y)\,dy\right|.
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{I\cap D_\delta(x)} K_m(x;y)f(y)\,dy - f(x)\right| &\leq \left|\int_{I\cap D_\delta(x)} K_m(x;y)(f(y) - f(x))\,dy\right| \\
&\quad + \left|\left(\int_{I\cap D_\delta(x)} K_m(x;y)\,dy - 1\right)f(x)\right|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_I K_m(x;y)f(y)\,dy - f(x)\right| \\
&\leq \left|\int_{I\cap D_\delta(x)} K_m(x;y)(f(y)-f(x))\,dy\right| \\
&+ \left|\left(\int_{I\cap D_\delta(x)} K_m(x;y)\,dy - 1\right)f(x)\right| \\
&+ \left|\int_{I\cap C(D_\delta(x))} K_m(x;y)f(y)\,dy\right|.
\end{aligned}$$

Por la continuidad de f en x, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_x > 0$ tal que para cada $y \in I \cap D$ tenemos

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(1+A(x))}. \tag{2.5}$$

Para este mismo ε, existe $N_1(x) \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N_1(x)$, con $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left|\int_{I\cap D_\delta(x)} K_m(x;y)\,dy - 1\right| < \frac{\varepsilon}{3(1+|f(x)|)}. \tag{2.6}$$

Por último, existe $N_2(x) \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N_2(x)$,

$$\left|\int_{I\cap C(D_\delta(x))} K_m(x;y)f(y)\,dy\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.7}$$

Sea $N(x) = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Entonces, si $m \geq N(x)$, al combinar las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.7), obtenemos

$$\left|\int_I K_m(x;y)f(y)\,dy - f(x)\right| < \varepsilon,$$

lo cual prueba el teorema. □

Corolario 2.1. *Si f es acotada y uniformemente continua en I, y si para cada $x \in \mathcal{J}$, donde $\mathcal{J}$ es un subconjunto de I, tenemos que $A(x) \leq A$, y las sucesiones en* (2) *y* (3) *del teorema anterior convergen uniformemente en $\mathcal{J}$, entonces*

$$\lim_{m\to\infty} \int_I K_m(x;y)f(y)\,dy = f(x),$$

uniformemente en $\mathcal{J}$.

Demostración. Bajo estas hipótesis podemos garantizar que existen δ y N que dependen exclusivamente de ε en $\mathcal{J}$, en la prueba del teorema anterior. □

La idea de nuestra demostración del teorema principal de esta sección, será encontrar una sucesión de funciones $K_m(x;y)$ que satisfaga las hipótesis del Teorema 2.8 y de tal forma que la sucesión de funciones,

$$\int_I K_m(x;y)f(y)\,dy,$$

sea una sucesión de polinomios en x.

Teorema 2.9 (Teorema de Weierstrass)**.** *Sea f una función de valor real continua sobre un intervalo compacto J en $\mathbb{R}^n$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un polinomio p tal que $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in J$.*

Demostración. Sea I el intervalo $-c_i \leq x \leq c_i$, $c_i > 0$, y suponemos que $\sum_{i=1}^n c_i^2 \leq \frac{1}{4}$. Sea J el intervalo $-b_i \leq x \leq b_i$, y supongamos que J esta contenido en el interior de I. La función f inicialmente definida en J, puede ser extendida de tal forma que sea acotada y uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ definamos $x'_j = b_j$ si $x_j > b_j$, $x'_j = -b_j$ si $x_j < -b_j$ y $x_j = b_j$ si $-b_j \leq x_j \leq b_j$. Entonces, si $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ definimos $f(x) = f(x')$. Por lo tanto, la función f queda definida, cuando $x \notin J$, y su valor corresponde al valor de f en un punto de frontera de J. De esta manera garantizamos que f sea acotada y uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.
Para $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ en I, definamos

$$\frac{1}{h_m} = \int_I (1 - \|y\|^2)^m\,dy,$$
$$K_m(x;y) = (1 - \|x-y\|^2)^m h_m,$$
$$g_m(x) = \int_I K_m(x;y)f(y)\,dy.$$

Puesto que $\sum_{i=1}^n c_i^2 \leq \frac{1}{4}$, tenemos que $\|x-y\| \leq \left(\sum_{i=1}^n 4c_i^2\right)^{1/2} \leq 1$, por lo cual $\|x-y\|^2 \leq 1$. Esto nos garantiza que $K_m(x;y) \geq 0$ para cada $x, y \in I$. Es claro que la sucesión de funciones g_m son polinomios en las n variables $x_1, \ldots, x_n$. Elegimos δ menor que la mínima distancia entre el intervalo J y la frontera de I. Entonces para cada $x \in J$, el conjunto $D_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \delta\}$ se encuentra en I. Si $C = \left\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| < 1/\sqrt{m\delta}\right\}$ tenemos para m suficientemente grande

$$\frac{1}{h_m} \geq \int_C (1 - \|y\|^2)^m\,dy \geq \int_C \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m dy = q_1(m)^{-n/2}\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m,$$

en donde q_1 es una constante positiva, pues el volumen de una hiperesfera de radio r en $\mathbb{R}^n$ es proporcional a r^n. También, como $\lim\limits_{m\to\infty}(1 + x/m)^m = e^x$ tenemos para alguna constante q_2,

$$\frac{1}{h_m} \geq q_2 m^{-n/2}. \tag{2.8}$$

Cuando $x \in J$ y $y \in I \cap C(D_\delta(x))$, $\|y-x\| \geq \delta$. Entonces

$$0 \leq K_m(x;y) \leq (1-\delta^2)^m h_m \leq (1-\delta^2)^m m^{n/2} q_2^{-1} \leq q_3 m^{-n} \tag{2.9}$$

para alguna constante q_3.
Por (2.9), concluimos $\lim\limits_{m\to\infty} K_m(x;y) = 0$ uniformemente para $x \in J$ y $y \in I \cap C(D_\delta(x))$.
Puesto que f es acotada tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} \int_{I\cap C(D_\delta(x))} K_m(x;y) f(y)\, dy = 0,$$

uniformemente en J.
Sea $R = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| < \delta\}$, y $x \in J$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{D_\delta(x)} K_m(x;y)\, dy &= \int_{D_\delta(x)} (1-\|y-x\|^2)^m h_m\, dy \\
&= \int_R (1-\|y-x\|^2)^m h_m\, dy \\
&= \int_I (1-\|y-x\|^2)^m h_m\, dy - \int_{I\cap C(R)} (1-\|y-x\|^2)^m h_m\, dy.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\left| \int_{D_\delta(x)} K_m(x;y)\, dy - 1 \right| \leq \int_{I\cap C(R)} K_m(\mathbf{0};y)\, dy \leq q_3 m^{-n} \, | \, I | \, .$$

Esto último tiende a cero uniformemente en J. Hemos mostrado que la sucesión $\{K_m(x;y)\}$ satisface las hipótesis del Teorema 2.8, por consiguiente la sucesión de polinomios g_m converge uniformemente a f en J. □

Corolario 2.2. *Si $K(x,y)$ es simétrico y continuo en $[a,b]\times[a,b]$ entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un polinomio simétrico $P(x,y)$ tal que $|K(x,y) - P(x,y)| < \varepsilon$ para $x, y \in [a,b]$.*

Demostración. Por el Teorema anterior, existe un polinomio

$$G(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} g_{ij} x^i y^j,$$

tal que

$$|K(x,y) - G(x,y)| < \varepsilon.$$

Definamos

$$P(x,y) = \frac{1}{2}\big(G(x,y) + G(y,x)\big) = \sum_{i,j=0}^{n} p_{ij} x^i y^j,$$

en donde

$$p_{ij} = \frac{1}{2}\big(g_{ij} + g_{ji}\big) = p_{ji}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|K(x,y) - P(x,y)| &= \left| K(x,y) - \frac{1}{2}\big(G(x,y) + G(y,x)\big) \right| \\
&= \left| \frac{2K(x,y) - G(x,y) - G(y,x)}{2} \right| \\
&= \frac{1}{2}\left| \big(K(x,y) - G(x,y)\big) + \big(K(x,y) - G(y,x)\big) \right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left| K(x,y) - G(x,y) \right| + \frac{1}{2}\left| K(y,x) - G(y,x) \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba el resultado. □

2.3. Espacios vectoriales completos

Recordemos que un espacio métrico se dice que es completo cuando toda sucesión de Cauchy converge en dicho espacio. Esto aplica también para el caso de los espacios vectoriales Euclidianos. Es sabido que el espacio $\mathbb{R}^n$ es completo y se puede verificar que el espacio $\mathcal{R}$ no es completo. Un espacio vectorial Euclidiano completo se llama espacio de *Hilbert*. El concepto de completez en un espacio vectorial involucra la noción de norma, pero esta no necesita ser definida en términos de un producto interno como en el caso de los espacios de Hilbert. Un espacio vectorial se dice que es normado si podemos corresponder a cada elemento $x \in V$ un número $\|\cdot\|$, la norma de x, con las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0$.

2. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.

3. $\|kx\| = |k|\|x\|$, para cada escalar k.

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para cada $x, y \in V$.

Un espacio normado completo se denomina espacio de *Banach*. Claramente, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach pero el recíproco no es cierto. Aunque un espacio normado no sea completo, se puede mostrar que todo espacio normado V puede ser extendido de tal forma que su extensión sea un espacio normado completo H y tal que V es denso en H. Esto lo enunciamos en el siguiente teorema, cuya demostración omitimos.

Teorema 2.10. *Todo espacio normado V puede ser completado para formar un espacio normado completo B, llamado el* completo[1] *de V, tal que V es denso en B. Más aún, si V es Euclidiano entonces $V = B$.*

Los siguientes dos resultados para los espacios de Hilbert, no son ciertos en general para espacios Euclidianos, ya que estos pueden no ser completos.

Teorema 2.11. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H. Entonces $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ es un elemento de H si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, en cuyo caso $a_n = (x, x_n)$.*

Demostración. Para $n > m$ tenemos

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j - \sum_{j=1}^{m} a_j x_j \right\| = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} a_j x_j \right\| = \sum_{j=m+1}^{n} |\, a_j|^2 ,$$

ya que la sucesión $\{x_n\}$ es ortonormal. Por lo tanto si $\sum_{j=1}^{\infty} |\, a_j|^2$ es convergente, vemos que la sucesión $\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\}$ es de Cauchy. Puesto que H es un espacio de Hilbert, toda sucesión de Cauchy es convergente. Así,

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j,$$

existe si y solo si $\sum_{j=1}^{\infty} |\, a_j| < +\infty$. Si esto último es el caso, entonces

$$(x, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j, x_n \right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (x_j, x_n) = a_n. \qquad \square$$

Teorema 2.12. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H. Si x es el vector nulo siempre que $(x, x_n) = 0$ para cada n, entonces la sucesión $\{x_n\}$ es linealmente densa en H.*

Demostración. Sea y un elemento de H. Por la desigualdad de Bessel tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\,(y, x_n)|^2 \leq \|y\|^2 < +\infty.$$

[1] Ver pág. 129 de [5].

Por lo tanto, por el Teorema 2.11,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(y, x_n)x_n,$$

es un elemento de H. Por lo tanto, la ortonormalidad de la sucesión $\{x_n\}$ asegura que

$$(y - \sum_{n=1}^{\infty}(y, x_n)x_n, x_k) = 0, \quad \text{para todo}\, k.$$

La hipótesis del teorema implica que

$$y - \sum_{n=1}^{\infty}(y, x_n)x_n = 0.$$

Esto demuestra que la sucesión $\{x_n\}$ es linealmente densa en H. □

Sabemos que todo espacio vectorial de dimensión finita n es isomorfo a $\mathbb{R}^n$, lo cual significa que podemos representar los elementos de cualquier espacio de dimensión finita como una enúpla ordenada de números reales. Veremos si en el caso de los espacios de dimensión infinita también es posible.

Teorema 2.13. *Si H es un espacio de Hilbert real (o complejo) y si existe una sucesión $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, de vectores ortonormales en H, la cual es linealmente densa en H, entonces existe una correspondencia uno a uno entre los elementos de H y $\mathbb{R}^\infty$ (ó $\mathbb{C}^\infty$), la cual preserva las operaciones de adición, multiplicación por escalares y producto interno.*

Demostración. Consideramos solo el caso en el que H es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. Por los Teoremas 2.3 y 2.11, todo elemento de H puede ser expresado de forma única como

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, \; \sum_{i=1}^{\infty} |\, a_i|^2 < +\infty, \quad \text{con } a_i = (x, x_i).$$

Definamos entonces la transformación

$$\begin{array}{cccc} T: & H & \longrightarrow & \mathbb{R}^\infty \\ & x & \mapsto & [a_1, a_2, \ldots]. \end{array}$$

Veamos que esta transformación es lineal. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in H$. Entonces, si

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, \; y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i,$$

tenemos

$$\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha a_i + \beta b_i) x_i.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= [\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \ldots] \\ &= [\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots] + [\beta b_1, \beta b_2, \ldots] \\ &= \alpha [a_1, a_2, \ldots] + \beta [b_1, b_2, \ldots] \\ &= \alpha T(x) + \beta T(y). \end{aligned}$$

Esto prueba que la transformación T es lineal. Para ver que es uno a uno, sean $x, y \in H$ tales que $T(x) = T(y)$ entonces

$$[a_1, a_2, \ldots] = [b_1, b_2, \ldots].$$

Luego $a_i = b_i$ para cada i, es decir, $(x, x_i) = (y, x_i)$ para cada i. Como la sucesión $\{x_n\}$ es linealmente densa en H, por el Teorema 2.4 tenemos $x = y$. Esto prueba que la transformación es uno a uno. Ahora, si $[u_1, u_2, \ldots] \in \mathbb{R}^{\infty}$ entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |\, u_i|^2 < +\infty$ y por el Teorema 2.11 concluimos que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} u_i x_i$ es un elemento de H. Es claro que $T(u) = [u_1, u_2, \ldots]$, por lo cual la transformación T es sobreyectiva. Solo nos falta ver que T preserva el producto interno. Sean $x, y \in H$, entonces

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i, \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i \right) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j (x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i,$$

en donde hemos utilizado el hecho de que la sucesión $\{x_n\}$ es ortonormal. Por consiguiente,

$$(T(x), T(y)) = ([a_1, a_2, \ldots], [b_1, b_2, \ldots]) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = (x, y). \qquad \square$$

Teorema 2.14. *Toda transformación lineal acotada L definida sobre un espacio vectorial normado V en otro espacio normado V_1 puede ser únicamente extendida sobre el completo, B, de V tal que esta continúa siendo lineal y acotada. La norma de la extensión es la misma que la de L y el recorrido es el completo de V_1, B_1.*

Demostración. Definimos la extensión de L, $\widetilde{L}$, como sigue:

$$\widetilde{L}x = \begin{cases} Lx & \text{si } x \in V, \\ \lim\limits_{n\to\infty} Lx_n & \text{si } x \in B, \end{cases}$$

siendo (x_n) una sucesión en V tal que $x_n \to x$. En primer lugar debemos garantizar que este límite existe. Puesto que $x_n \to x$, la sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy. Por definición de transformación acotada, tenemos

$$\|Lx_n - Lx_m\| \leq \|L\| \|x_n - x_m\| .$$

Por lo tanto, la sucesión (Lx_n) es de Cauchy en V_1, y esto garantiza la convergencia de esta sucesión a $z \in B_1$, el completo de V_1.
Veamos que la transformación $\widetilde{L}$ esta bien definida. Si $x \in V$, el resultado es claro. Supongamos pues que $x \in B$ pero no en V, y sea (y_n) otra sucesión en V que converge a x, entonces como L es acotada tenemos

$$\|Ly_n - z\| \leq \|Ly_n - Lx_n\| + \|Lx_n - z\| \leq \|L\| \|y_n - x_n\| + \|Lx_n - z\| .$$

Esto prueba que

$$\lim_{n\to\infty} Lx_n = \lim_{n\to\infty} Ly_n = z.$$

Por lo tanto, la transformación $\widetilde{L}$ esta bien definida. Es claro de esta definición que $\widetilde{L}$ es lineal. Veamos que esta transformación es acotada. Puesto que,

$$\|Lx_n\| \leq \|L\| \|x_n\| ,$$

se sigue que

$$\left\|\widetilde{L}x\right\| \leq \|L\| \|x\| .$$

Por último, probemos la unicidad de esta extensión. Sea M una transformación lineal acotada en B que coincide con L en V. Si $x \in B$, y (x_n) es una sucesión en V tal que $x_n \to x$, por la continuidad de L y M tenemos

$$\widetilde{L}x = \lim_{n\to\infty} Lx_n = \lim_{n\to\infty} Mx_n = \widetilde{M}x. \qquad \square$$

Recordemos que toda transformación lineal definida entre dos espacios vectoriales de dimensión finita puede ser representada por medio de una matriz, la matriz de transformación. De igual forma podemos hacer lo mismo en el caso de los espacios vectoriales de dimensión infinita mediante una matriz infinita. Sea V un espacio de dimensión infinita y supongamos que V tiene una base ortonormal $\{x_n\}$. Para cada i, tenemos que

$$Tx_i = \sum_{j=1}^{\infty} t_{ji}x_j.$$

Definamos la correspondencia

$$T \sim [t_{ij}](x), \quad t_{ji} = (Tx_i, x_j). \tag{2.10}$$

Así pues, asociamos a toda transformación lineal una matriz infinita por medio de (2.10), pero no se sigue, como en el caso de los espacios de dimensión finita, que toda matriz infinita defina una transformación lineal. Es decir, dada una matriz $[t_{ij}]$, puede que no exista una transformación lineal T tal que $(Tf_i, f_j) = t_{ji}$, para alguna base f_i de V. El siguiente teorema nos da una condición para que esto sea cierto.

Teorema 2.15. *Sea $\{x_n\}$ una base ortonormal en un espacio de Hilbert H. La transformación* (2.10) *define una correspondencia uno a uno entre las clases de todos los operadores lineales acotados de H a H y la clase de todas las matrices infinitas $[t_{ij}]$ con la propiedad*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} t_{ij} b_i \right|^2 \leq k \sum_{i=1}^{\infty} |\, b_i|^2, \tag{2.11}$$

para alguna constante k y para toda sucesión $\{b_i\}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\, b_i|^2 < +\infty.$$

Demostración. Si T es un operador lineal acotado y $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |\, b_i|^2 < +\infty$, entonces por el Teorema 2.11, $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$ es un elemento de H , y por el Teorema 2.1 tenemos

$$(Ty, x_j) = \left(T \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i, x_j \right) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i (T x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i t_{ji}.$$

Por la parte (3) del Teorema 2.2, podemos escribir

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |\,(Ty, x_j)|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{\infty} b_i t_{ji} \right|^2 \\ &= \|Ty\|^2 \\ &\leq \|T\|^2 \, \|y\|^2 \\ &= \|T\|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\, b_i|^2, \end{aligned}$$

lo cual prueba (2.11) con $k = \|\, T\|^2$. Recíprocamente, supongamos que (2.11) es válida. Para m fijo, sea $b_i = \delta_{im}$. Entonces por la ecuación (2.11) tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\, t_{jm}|^2 \leq k, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Por el Teorema 2.11 concluimos que $\sum_{j=1}^{\infty} t_{jm} x_j \in H$.
Introducimos el operador T definido como

$$Tx_m = \sum_{j=1}^{\infty} t_{jm} x_j,$$
$$T\left(\sum_{j=1}^{N} a_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{N} a_j T x_j.$$

Esto definirá un operador T sobre el espacio S generado por $\{x_j\}$. Luego,

$$(Tx_m, x_i) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} t_{jm} x_j, x_i\right) = t_{im}. \tag{2.12}$$

Si $y = \sum_{j=1}^{N} a_j x_j$, tenemos

$$Ty = \sum_{j=1}^{N} a_j T x_j = \sum_{j=1}^{N} a_j \sum_{i=1}^{\infty} t_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j t_{ij} x_i.$$

Por lo tanto,

$$\|Ty\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{N} t_{ij} a_j \right|^2 \leq k \sum_{j=1}^{N} |\, a_j|^2 = k \|y\|^2 .$$

Lo cual muestra que la transformación es acotada en S, y puesto que S es denso en H (por el Teorema 2.12), por el Teorema 2.14 T puede ser extendida con la misma cota a H. Veamos que T es la única transformación acotada de H a H con la propiedad (2.12). Sea L otro operador acotado en H tal que

$$(Lx_m, x_i) = (Tx_m, x_i), \quad i, m = 1, 2, \ldots$$

Luego, por el Teorema 2.4 $Tx_m = Lx_m$ para cada m. Por lo tanto si $z = \sum_{i=1}^{\infty} d_i x_i \in H$, entonces por el Teorema 2.1 que

$$Lz = \sum_{i=1}^{\infty} d_i L x_i = \sum_{i=1}^{\infty} d_i T x_i = Tz. \qquad \square$$

Teorema 2.16. *La clase de operadores lineales de E a E acotados en un espacio vectorial Euclidiano, es un espacio vectorial. Si k es un escalar y $[T]$ y $[S]$ son las representaciones matriciales, con respecto a una base ortonormal $\{x_n\}$, de los operadores acotados T y S, entonces las representaciones matriciales de kT, $T+S$ y TS son $k[T]$, $[T]+[S]$ y $[T][S]$ respectivamente. Si $y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$ esta en E y $[T] = [t_{ij}](x) \sim T$, entonces Ty tiene la representación $[t_{ij}][b_i]$.*

Demostración. Sean $[T] = [t_{ij}]$, $[S] = [s_{ij}]$ las representaciones matriciales de las transformaciones T y S respectivamente. Esto significa que

$$Tx_i = \sum_{j=1}^{\infty} t_{ji} x_j, \quad t_{ji} = (Tx_i, x_j), \quad Sx_i = \sum_{j=1}^{\infty} s_{ji} x_j, \quad s_{ji} = (Sx_i, x_j).$$

Por lo tanto,

$$(T+S)x_i = \sum_{j=1}^{\infty} (t_{ji} + s_{ji}) x_j, \quad t_{ji} + s_{ji} = ((T+S)x_i, x_j).$$

Esto prueba que la representación matricial de la transformación $T+S$ es la matriz $[t_{ij} + s_{ij}] = [T] + [S]$. De forma similar se verifica que la representación matricial de la transformación kT es $k[T]$. Veamos que la transformación TS tiene la representación matricial $[T][S]$. La matriz de transformación de TS viene dada por $[u_{ij}]$ donde $u_{ji} = (TSx_i, x_j)$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} u_{ji} = (TSx_i, x_j) = (T(Sx_i), x_j) &= \left(T\left(\sum_{m=1}^{\infty} s_{mi} x_m \right), x_j \right) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} s_{mi} T x_m, x_j \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} s_{mi} (Tx_m, x_j) = \sum_{m=1}^{\infty} s_{mi} t_{jm}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[u_{ji}] = \left[\sum_{m=1}^{\infty} s_{mi} t_{jm} \right] = [T][S]$.

Finalmente, si $y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$, tenemos que

$$Ty = \sum_{i=1}^{\infty} b_i T x_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sum_{j=1}^{\infty} t_{ji} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} t_{ji} b_i \right) x_j.$$

Luego, la representación matricial de Ty es $\left[\sum_{i=1}^{\infty} t_{ji} b_i \right]$, es decir $[t_{ij}][b_i]$, lo que demuestra la afirmación. $\square$

Capítulo 3

Operadores diferenciales

Empezaremos a estudiar los problemas de valor en la frontera utilizando las herramientas que hasta aquí hemos visto. Solo nos limitamos a considerar problemas de valor en la frontera del intervalo $[0, 1]$, pues el caso general de un intervalo $[a, b]$, se reduce a ser considerado en el intervalo $[0, 1]$, mediante el cambio de variable $t = a + (b - a)u$, con $u \in [0, 1]$. Por lo tanto, el problema (1), considerado en la introducción de esta monografía, se resolverá en el intervalo $[0, 1]$. Un problema de valor en la frontera típico para ecuaciones diferenciales ordinarias puede ser escrito en la forma $\mathcal{L}u = f$, donde $\mathcal{L}$ es un operador diferencial lineal ordinario, u es una función desconocida la cual debe satisfacer esta ecuación y las condiciones de frontera impuestas, y f es una función conocida. El método general que ya hemos desarrollado para operadores lineales nos sugiere que una forma de determinar la función u sería encontrar el operador el cual es inverso a $\mathcal{L}$. Es decir, encontrar un operador $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{L}\mathcal{H} = \mathcal{H}\mathcal{L} = \mathcal{I}$, el operador identidad. En el caso en que tal operador exista y pueda ser escrito en forma de operador integral, el núcleo de este operador es conocido como la función de Green del operador $\mathcal{L}$.

3.1. El inverso de un operador diferencial

Para fijar ideas supongamos que $\mathcal{L}$ un operador lineal diferencial ordinario actuando sobre un espacio de funciones dado. Denotamos el operador inverso de $\mathcal{L}$ por $\mathcal{L}^{-1}$ y el cual satisface $\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L} = \mathcal{I}$. Deseamos encontrar el inverso del operador diferencial $\mathcal{L}$, para ello suponemos que $\mathcal{L}^{-1}$ es un operador integral con núcleo $K(x, t)$, es decir,

$$\mathcal{L}^{-1}u(x) = \int K(x, t)u(t)\, dt.$$

Aplicando en ambos miembros de esta última ecuación el operador $\mathcal{L}$, y suponiendo la validez de este resultado, tenemos que

$$u(x) = \mathcal{I}u(x) = \mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}u(x) = \mathcal{L}\int K(x, t)u(t)\, dt,$$

y como $\mathcal{L}$ es un operador lineal en la variable x debemos tener

$$u(x) = \int \mathcal{L}K(x,t)u(t)\,dt. \tag{3.1}$$

Si hacemos $\mathcal{L}K(x,t) = g(x,t)$ entonces

$$u(x) = \int g(x,t)u(t)\,dt.$$

Continuando con la búsqueda de condiciones para la validez de este resultado, supongamos que la función u es continua y que $u(t) \neq 0$ para cada t. Sea $x = x_0$ fijo, entonces

$$u(x_0) = \int g(x_0,t)u(t)\,dt.$$

Derivando respecto a t, encontramos que $0 = g(x_0,t)u(t)$, para $t \neq x_0$, entonces $g(x_0,t) = 0$. Puesto que x_0 fue fijado arbitrariamente, tenemos que $g(x,t)$ debe ser cero cuando $x \neq t$ y cuando $x = t$, la integral del lado derecho debe reducirse a $u(x)$. Para que esta afirmación sea siempre válida, la función $g(x,t)$ no puede ser una función en el sentido usual, porque puede probarse que no hay una función ordinaria que cumpla con esta condición. Sin embargo, esta dificultad puede arreglarse introduciendo la función *delta de Dirac*[1]; aunque, como lo veremos después, esta función no es una función ordinaria. Escribamos $g(x,t) = \delta(x-t)$. Por lo tanto,

$$u(x) = \int \delta(x-t)u(t)\,dt, \tag{3.2}$$

en donde $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$. No sabemos aún qué significa lo que hemos llamado función delta de Dirac, así que para comprender mejor este concepto, hacemos una breve introducción a la teoría de las distribuciones.

3.2. Introducción a las distribuciones

Como ya hemos visto, el problema de invertir un operador diferencial dado se reduce a encontrar una función $g(x,t)$ tal que para cada función continua $u(x)$ tengamos

$$u(x) = \int g(x,t)u(t)\,dt.$$

También es claro que la continuidad de $u(x)$ nos permite demostrar que $g(x,t) = 0$ si $x \neq t$, y cuando $x = t$, entonces el valor de esta integral debe ser precisamente $u(x)$. En el sentido usual, no existe una función que cumpla estas condiciones. No obstante, existe una función que sí cumple estas condiciones. Fue Dirac él que introdujo esta función en *Los Principios de la Mecánica Cuántica*, la cual se convirtió en la célebre función

[1]Ver pág. 391 de [4].

delta de Dirac. Tiempo después, Schwartz en su libro *Théorie des Distributions* definió rigurosamente esta función como una *función generalizada* o *distribución.*
La función delta de Dirac, $\delta(x)$, aparece de manera natural en la física matemática y se puede mostrar usando argumentos físicos que esta función cumple las siguientes propiedades:

(1) $\delta(x) = 0$ cuando $x \neq 0$.

(2) Si $x = 0$, $\delta(x)$ no esta definida.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1.$

De estas propiedades se deduce que $\delta(x)$ no es una función en el sentido usual. No obstante, estas condiciones si se cumplen cuando en lugar de funciones hablamos de distribuciones. Por ejemplo, como el símbolo $\delta(x-t)$ no es una función en el sentido usual no podemos asegurar que (3.1) implique (3.2). La teoría de las distribuciones sí nos permite asegurar que este es el caso.
Comenzamos nuestra introducción con algunas definiciones.

Definición 3.1 (Soporte de una función)**.** *Sean $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una función. El soporte de f, denotado por* $\operatorname{sop}(f)$*, es la clausura del conjunto de puntos en donde f no se anula. Esto es,*

$$\operatorname{sop}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Diremos también que f tiene soporte compacto si $\operatorname{sop}(f)$ *es un conjunto compacto.*

Definición 3.2 (Función de prueba)**.** *Una función de prueba es una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ que se anula fuera de algún intervalo finito.*

Ejemplo 3.1. *La función definida como*

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}\frac{1}{(1-x)^2}} & si\ x \in (0,1), \\ 0 & si\ x \notin (0,1), \end{cases}$$

es una función de prueba.

Sea $\mathscr{K}$ el conjunto de todas las funciones de prueba. Si $\phi \in \mathscr{K}$, entonces ϕ tiene soporte compacto. En efecto, como $\phi \in \mathscr{K}$ entonces existe un intervalo finito, digamos (a,b), tal que $\phi(x) = 0$ para cada $x \notin (a,b)$. Luego, si X es el dominio de ϕ entonces $\{x \in X : \phi(x) \neq 0\} \subset (a,b)$. De esto, $\operatorname{sop}(\phi) \subset [a,b]$. Así, $\operatorname{sop}(\phi)$ es acotado y por lo tanto compacto. Denotamos $\mathcal{C}_0^\infty$ el conjunto de las funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ que tienen soporte compacto. Podemos resumir nuestra observación hecha anteriormente diciendo que $\mathscr{K} \subset \mathcal{C}_0^\infty$. Es fácil probar que $\mathscr{K}$ es un espacio vectorial sobre F, siendo $F = \mathbb{R}$ ó $F = \mathbb{C}$.
En $\mathscr{K}$ introducimos ahora una noción de convergencia.

Definición 3.3 (Convergencia en $\mathscr{K}$). *Decimos que la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ en $\mathscr{K}$ converge a la función $\phi(x) \in \mathscr{K}$ si las siguientes condiciones se cumplen:*

(1) *Existe un intervalo $[a, b]$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\phi_n(x) = 0$ y $\phi(x) = 0$ para cada $x \notin [a, b]$.*

(2) *Para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $\phi_n^{(k)}(x) \to \phi^{(k)}(x)$ uniformemente en $[a, b]$.*

Para notar esto, escribiremos $\phi_n(x) \to \phi(x)$ en $\mathscr{K}$.

Definición 3.4. *Dado un funcional F en $\mathscr{K}$, diremos que F es continuo si para cada sucesión $\phi_n(x) \to \phi(x)$ en $\mathscr{K}$ tenemos que $F(\phi_n(x)) \to F(\phi(x))$.*

Definición 3.5 (Distribución). *Dado un funcional F en $\mathscr{K}$, diremos que F es una distribución si F es continuo.*

Ejemplo 3.2. *Sea $F : \mathscr{K} \to \mathbb{C}$ definido por $F(\phi) = \phi'(0)$. Verificar que F es una distribución.*

Solución. Claramente F es un funcional en $\mathscr{K}$. Veamos que F es continuo. Supongamos que $\phi_n(x) \to \phi(x)$ en $\mathscr{K}$. Entonces $\phi_n(x) \to \phi(x)$ uniformemente en algún intervalo $[a, b]$. Por lo tanto, $\phi_n'(x) \to \phi'(x)$ uniformemente en $[a, b]$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que el intervalo contiene el punto $x = 0$. Entonces $\phi_n'(0) \to \phi'(0)$, o lo que es lo mismo que $F(\phi_n(x)) \to F(\phi(x))$. Luego F es continuo y por lo tanto es una distribución. $\square$

Antes de definir la función delta de Dirac, introducimos un producto interno en el espacio $\mathscr{K}$. Dados $\phi, \psi \in \mathscr{K}$ definimos

$$(\phi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\psi(x)\, dx.$$

La razón por la cual se introduce este producto interno en $\mathscr{K}$, es por el hecho de que algunas distribuciones pueden escribirse en términos de la notación introducida antes.

Ejemplo 3.3. *La distribución definida por*

$$F(\phi) = \int_0^1 \phi(x)\, dx,$$

se puede escribir como

$$F(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(x)\phi(x)dx = (\chi_{[0,1]}(x), \phi(x)).$$

La función delta de Dirac se definirá en términos de la notación de producto interno que introducimos anteriormente.

Definición 3.6 (Función delta de Dirac)**.** *La función delta de Dirac se define como aquella distribución tal que*

$$(\delta(x - x_0), \phi(x)) := \phi(x_0). \tag{3.3}$$

Con esta definición se puede verificar que

$$\int \phi(x)\delta(x-a)dx = \phi(a), \tag{3.4}$$

$$\int \phi(x)\delta'(x-a)dx = -\phi'(a). \tag{3.5}$$

siempre que a se encuentre en el interior del intervalo de integración.
Por la definición de producto interno en el espacio $\mathscr{K}$, la ecuación (3.3) puede escribirse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\psi(x)dx = \phi(x_0). \tag{3.6}$$

Cuando un funcional F puede escribirse en la forma $F(\phi) = (s(x), \phi)$, para alguna función $s(x)$, diremos que tal función es una función simbólica.

Definición 3.7 (Función simbólica)**.** *Una función $s(x)$ se llama simbólica cuando existe un funcional F de $\mathscr{K}$ a $\mathbb{C}$ tal que*

$$F(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x)\phi(x)\,dx,$$

para toda $\phi \in \mathscr{K}$.

Observación 3.1. *Si f es integrable, entonces el funcional*

$$F(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\,dx,$$

es continuo, y por lo tanto es una distribución. De ello, toda función integrable es simbólica. El recíproco de esta afirmación es falso, ya que por ejemplo la función $\delta(x)$ no es integrable en el sentido usual. Se puede mostrar que las funciones simbólicas pueden ser tratadas como si fuesen funciones en el sentido usual. Una ecuación que involucre funciones simbólicas debe ser interpretada en el sentido de que cuando se multiplica la ecuación por una función de prueba arbitraria y luego se integra en $(-\infty, \infty)$, el resultado es correcto y los términos de la nueva ecuación son escalares.

Dado un operador diferencial $\mathcal{L}$ y la ecuación diferencial $\mathcal{L}u = f$, vimos que la solución de este problema se reduce a encontrar una función tal que $\mathcal{L}g(x,t) = \delta(x - t)$. Claramente, la función $g(x,t)$ no puede ser una función en el sentido usual. En realidad, se podrá ver que la función $g(x,t)$ es una función simbólica por lo que al aplicar el operador $\mathcal{L}$ a la función $g(x,t)$, se obtiene una función simbólica. Cuando definimos función simbólica, lo hicimos en términos de funciones ordinarias. ¿Porqué no hacerlo de igual forma para definir la derivada de una función simbólica? Es claro que esta definición se debe cumplir para funciones ordinarias. Si f es una función de clase $\mathcal{C}^1$ entonces para cada $\phi \in \mathscr{K}$ tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\,dx.$$

Esto nos da motivos para dar la siguiente definición.

Definición 3.8 (Derivada de una función simbólica)**.** *Dada una función simbólica $s(x)$, diremos que $s'(x)$ es la derivada de $s(x)$, si para cada $\phi \in \mathscr{K}$ tenemos*

$$\int_{-\infty}^{\infty} s'(x)\phi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} s(x)\phi'(x)\,dx.$$

Ejemplo 3.4. *Determinar la derivada simbólica de la función $\delta(x)$.*

Solución. Sea $\phi \in \mathscr{K}$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)\phi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi'(x)dx = -\phi'(0).$$

Esto significa que la derivada simbólica de la función $\delta(x)$ origina el funcional en $\mathscr{K}$ que asigna a cada $\phi \in \mathscr{K}$, el valor $-\phi'(0)$. □

Ejemplo 3.5. *Determinar la derivada simbólica de la función $f(x) = |x|$.*

Solución. Sea $\phi \in \mathscr{K}$ entonces tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |x|'\phi(x)\,dx &= -\int_{-\infty}^{\infty} |x|\phi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} (-x)\phi'(x)\,dx - \int_{0}^{\infty} x\phi'(x)\,dx\\ &= -\int_{-\infty}^{0} \phi(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} \phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x)\phi(x)\,dx.\end{aligned}$$

De aquí que $|\,x|' = \operatorname{sgn}(x)$, en donde la función signo está definida como

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0,\\ 0 & \text{si } x = 0,\\ 1 & \text{si } x > 0.\end{cases}$$ □

Ejemplo 3.6. *Probar que $f(x)\delta'(x) = f(0)\delta'(x) - f'(0)\delta(x)$.*

Solución. Sea $\phi \in \mathscr{K}$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\phi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} (f(x)\phi(x))'\delta(x)\,dx.$$

Utilizando las reglas usuales de derivación encontramos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\phi(x)dx = -f(0)\phi'(0) - f'(0)\phi(0). \tag{3.7}$$

Apelamos ahora a las siguientes igualdades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(0)\phi'(x)\delta(x)dx = f(0)\phi'(0),$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(0)\phi(x)\delta(x)dx = f'(0)\phi(0).$$

De la primera igualdad se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(0)\phi(x)\delta'(x)dx = -f(0)\phi'(0).$$

Sustituyendo estas igualdades en (3.7) se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(f(0)\delta'(x) - f'(0)\delta(x))\phi(x)\,dx.$$

Por lo tanto,

$$f(x)\delta'(x) = f(0)\delta'(x) - f'(0)\delta(x). \qquad \square$$

Continuando con el problema inicial, sean $\phi, \psi \in \mathscr{K}$ y $\mathcal{L}$ un operador diferencial dado. Consideremos la ecuación $\mathcal{L}\phi = \psi$. Si suponemos que $\mathcal{L}^{-1}$ existe y tiene la forma de un operador integral con núcleo K entonces $\mathcal{L}^{-1}\phi(x) = \int K(x,t)\phi(t)\,dt$. Luego,

$$\phi(x) = \mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}\phi(x) = \int \mathcal{L}K(x,t)\phi(t)\,dt = \int \delta(x-t)\phi(t)\,dt.$$

De aquí, $\mathcal{L}K(x,t) = \delta(x-t)$. Por supuesto que estas igualdades deben ser entendidas en el contexto de las funciones simbólicas.

3.3. El adjunto de un operador diferencial

Un operador diferencial de segundo orden es aquel que tiene la forma

$$\mathcal{L} = a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x),$$

donde a, b y c son funciones de x continuas. Consideramos el conjunto $L^2[0,1]$ de todas las funciones reales definidas en $[0,1]$ que son cuadrado integrable en $[0,1]$ (según Lebesgue para asegurar la completitud del espacio) o equivalentemente, tales que $\int_0^1 |\,u(x)|^2\,dx < +\infty$. Este conjunto es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación de un escalar por una función. Como es natural, introducimos un producto interno en este conjunto. Dados $u, v \in L^2[0,1]$, definimos $(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx$. Dado un operador diferencial $\mathcal{L}$ restringimos nuestro espacio con la convención de que $\mathcal{L}u \in L^2[0,1]$ siempre que $u \in L^2[0,1]$. Consideramos también condiciones de frontera para nuestro operador diferencial $\mathcal{L}$. Tomamos nuestras condiciones de frontera como sigue:

$$B_1(u) := a_{10}u(0) + a_{11}u'(0) + b_{10}u(1) + b_{11}u'(1) = 0, \tag{3.8}$$
$$B_2(u) := a_{20}u(0) + a_{21}u'(0) + b_{20}u(1) + b_{21}u'(1) = 0, \tag{3.9}$$

donde a_{ij}, b_{ij} son constantes dadas. De las ecuaciones (3.8) y (3.9) se presentan dos casos que serán de interés para nosotros.

Definición 3.9 (Condiciones de frontera no mixtas y periódicas)**.** *Se dice que las condiciones de frontera asociadas a un operador diferencial son:*

- **no mixtas***, si estas condiciones solo involucran la derivada de la función en 0 ó 1, pero no en ambos. Un típico ejemplo de este tipo de condiciones es*

$$au(0) + bu'(0) = 0;$$

- **periódicas** *si estas condiciones tienen la forma*

$$u(0) = u(1); \quad u'(0) = u'(1).$$

Con estas convenciones, definiremos el dominio de un operador diferencial $\mathcal{L}$ como el conjunto de las funciones $u \in L^2[0,1]$ las cuales tienen segunda derivada continua a trozos y que satisface las condiciones (3.8) y (3.9).

Ya sabiendo en donde actúa un operador diferencial, procedemos como en el caso de los operadores integrales definiendo un nuevo operador partiendo de uno ya dado. Cuando definíamos el adjunto de un operador integral $\mathcal{K}$, lo definimos como aquel que cumple la condición $(\mathcal{K}f, g) = (f, \mathcal{K}^* g)$; podríamos entonces pensar en definir el adjunto de un operador diferencial mediante la ecuación

$$(\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}^* v).$$

Para fijar estas ideas consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.7. *Sea $\mathcal{L} = \frac{d}{dx}$ sobre el espacio generado por las funciones de $L^2[0,1]$ tales que $v(0) = 2v(1)$. Entonces*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u, v) &= \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx = u(1)v(1) - u(0)v(0) - \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx \\ &= u(1)v(1) - u(0)v(0) + (u, \mathcal{L}^* v).\end{aligned}$$

en donde $\mathcal{L}^* = -\frac{d}{dx}$. *Teniendo en cuenta que* $v(0) = 2v(1)$*, podemos escribir*

$$(\mathcal{L}u, v) = v(1)[u(1) - 2u(0)] + (u, \mathcal{L}^* v).$$

Si aceptamos que $(\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}^* v)$*, debemos tener que* $u(1) = 2u(0)$*. Por lo tanto, el operador cumplirá la condición* $(\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}^* v)$*, siempre que* $u(1) = 2u(0)$*.*

Este ejemplo nos motiva entonces a dar la siguiente definición.

Definición 3.10. *Sea* $\mathcal{L}$ *un operador diferencial dado actuando sobre un subespacio* M *de* $L^2[0, 1]$*.*

- *El adjunto formal de* $\mathcal{L}$*,* $\mathcal{L}^*$*, es el operador diferencial tal que* $(\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}^* v)$*, para todo* $u, v \in M$*.*
- *El operador es llamado formalmente autoadjunto si* $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$
- *Si el operador es formalmente autoadjunto, y además el espacio en donde actúan ambos operadores es el mismo, diremos que el operador es autoadjunto.*

Inicialmente habíamos considerado el operador

$$\mathcal{L}u = a(x)\frac{d^2u}{dx^2} + b(x)\frac{du}{dx} + c(x)u,$$

para el puede comprobarse que su adjunto esta dado como

$$\mathcal{L}^* v = \frac{d^2}{dx^2}(av) - \frac{d}{dx}(bv) + c(x)v.$$

Con un poco más de esfuerzo puede probarse que si $J(u, v) = avu' - u(av)' + buv$, llamada la conjunción de las funciones u y v, entonces para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\int_\alpha^\beta (v\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^* v)dx = J(u, v)\Big|_\alpha^\beta.$$

Ejemplo 3.8. *Sea* $\mathcal{L}$ *el operador diferencial definido por*

$$\mathcal{L}u(x) = -\frac{1}{w(x)}(p(x)u'(x))' + q(x)u(x),$$

en donde $w(x) > 0$*. Mostrar que* $\mathcal{L}$ *es formalmente autoadjunto, si el producto escalar se toma como*

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)w(x)\, dx.$$

Solución. Aplicando dos veces integración por partes obtenemos

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}u, v) &= \int_0^1 \mathcal{L}u(x)v(x)w(x)\,dx \\
&= \int_0^1 v(x)\Big(-\frac{1}{w(x)}(p(x)u'(x))' + q(x)u(x)\Big)w(x)\,dx \\
&= \int_0^1 -(p(x)u'(x))'v(x) + q(x)u(x)v(x)w(x)\,dx \\
&= \int_0^1 q(x)u(x)v(x)w(x)\,dx + \Big[-p(x)u'(x)v(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 (-p(x)u'(x))v'(x)\,dx \\
&= \int_0^1 q(x)u(x)v(x)w(x)\,dx + \Big[-p(x)u'(x)v(x)\Big]_0^1 - \Big[-p(x)u(x)v'(x)\Big]_0^1 \\
&\qquad + \int_0^1 -(p(x)v'(x))'u(x)\,dx \\
&= \Big[-p(x)(u'(x)v(x) - u(x)v'(x))\Big]_0^1 \\
&\qquad + \int_0^1 u(x)\Big(-\frac{1}{w(x)}(p(x)v'(x))' + q(x)v(x)\Big)w(x)\,dx \\
&= \Big[-p(x)(u'(x)v(x) - u(x)v'(x))\Big]_0^1 + (u, \mathcal{L}^*v).
\end{aligned}
$$

Luego, $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ y así vemos el operador es formalmente autoadjunto. Note que el operador será autoadjunto si

$$\Big[-p(x)(u'(x)v(x) - u(x)v'(x))\Big]_0^1 = 0. \qquad \square$$

Veamos ahora algunos resultados que relacionan las soluciones de las ecuaciones $\mathcal{L}u = 0$ y $\mathcal{L}^*u = 0$.

Teorema 3.1. *Si u es solución de $\mathcal{L}u = 0$ y si v es solución de $\mathcal{L}^*v = 0$, $J(u,v)$ es constante.*

Demostración. Por definición de $J(u,v)$ tenemos,

$$J(u,v) = \int_\alpha^\beta (v\mathcal{L}u - v\mathcal{L}^*u)\,dx = 0.$$

Luego, el valor de $J(u,v)$ en $x = \alpha$ y $x = \beta$ debe ser el mismo para α y β arbitrarios, así $J(u,v)$ es constante. $\square$

Corolario 3.1. *Sea $\mathcal{L}$ formalmente autoadjunto. Si u_1 y u_2 son soluciones de $\mathcal{L}u = 0$, entonces $J(u_1, u_2)$ es una constante cuyo valor depende de u_1 y u_2.*

Demostración. Como $\mathcal{L}$ es autoadjunto, tenemos $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$. Así u_1 es solución de $\mathcal{L}u = 0$, y u_2 es solución de $\mathcal{L}^*u = 0$. El resultado se sigue inmediatamente del teorema anterior. $\square$

Corolario 3.2. *Sea $\mathcal{L}$ es formalmente autoadjunto. Si u_1 y u_2 son soluciones de $\mathcal{L}u = 0$ y si $J(u_1, u_2) = 0$ para algún valor x tal que $p(x) \neq 0$, entonces u_1 y u_2 son linealmente dependientes.*

Demostración. Por el Corolario anterior, $J(u_1, u_2) = 0$ para cada x. Además, puesto que $\mathcal{L}$ es formalmente autoadjunto, $\mathcal{L}$ debe tener la forma

$$\mathcal{L}u = (pu')' + qu.$$

Por lo tanto

$$J(u_1, u_2) = pu_1u_2' - u_2(pu_1)' + p'u_1u_2 = p(u_1u_2' - u_1'u_2) = 0,$$

y como $p(x) \neq 0$ tenemos

$$u_1u_2' - u_1'u_2 = 0.$$

Esto implica que

$$\frac{u_1u_2' - u_1'u_2}{u_2^2} = 0.$$

Integrando esta ecuación encontramos que (u_1/u_2) es constante para cada x, lo cual prueba que u_1 y u_2 son linealmente dependientes. $\square$

3.4. Problemas no homogéneos y operadores simbólicos

Aplicaremos ahora lo que hemos visto a problemas de valor en la frontera no homogéneos. Un problema de valor en la frontera no homogéneo tiene la forma

$$\mathcal{L}u = f, \quad u(0) = c, u(1) = d, \tag{3.10}$$

en donde $\mathcal{L}$ es un operador diferencial dado, c y d son constantes dadas y f es una función conocida. Una forma de atacar este problema es escribir $u = u_1 + u_2$ donde u_1 y u_2 son dos funciones tales que

$$\mathcal{L}u_1 = f, \quad u_1(0) = 0, u_1(1) = 0,$$

y

$$\mathcal{L}u_2 = 0, \quad u_2(0) = c, u_2(1) = d.$$

Para aplicar esta idea será necesario extender las ideas que tenemos sobre operadores diferenciales como lo hicimos al extender la noción de derivada de una función simbólica. Esto se debe a que podemos encontrar funciones u que no están en el dominio del operador diferencial $\mathcal{L}$. Para fijar ideas, supongamos que el dominio del operador diferencial $\mathcal{L}$ es M, y denotemos el adjunto de este operador por $\mathcal{L}^*$, el cual tendrá por dominio, M^*. Convenimos en que las funciones de M^* son las funciones de prueba para el operador $\mathcal{L}$. Consideremos una función w que no este en M. Observemos que si v es una función de prueba para $\mathcal{L}$, $(\mathcal{L}^*v, w)$ esta definido. Por definición del operador adjunto de $\mathcal{L}$, tenemos que

$$(\mathcal{L}^*v, w) = (v, \mathcal{L}w). \tag{3.11}$$

Esto nos permite definir la función simbólica $\mathcal{L}w$. Para entender mejor estas ideas, consideremos el operador diferencial

$$\mathcal{L}u(x) = a(x)\frac{d^2u}{dx^2} + b(x)\frac{du}{dx} + c(x)u(x),$$

y como ya hemos visto el operador adjunto de $\mathcal{L}$ es

$$\mathcal{L}^*u(x) = \frac{d^2}{dx^2}(au) - \frac{d}{dx}(bu) + c(x)u(x).$$

Definiremos entonces $\mathcal{L}v$ cuando v no se encuentra en el dominio del operador, pues es posible que la función v no se encuentre en el dominio de $\mathcal{L}$ pero si en el dominio de $\mathcal{L}^*$. Para ello, tomemos el dominio del operador adjunto como el conjunto de las funciones u de $L^2[0,1]$ tales que $u(0) = u(1) = 0$. Sea v una función de prueba para el operador $\mathcal{L}$. Entonces

$$(\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}^*v) = \int_0^1 u\left[\frac{d^2}{dx^2}(av) - \frac{d}{dx}(bv) + c(x)v\right]\,dx.$$

De aquí obtenemos, después de haber aplicado integración por partes,

$$(\mathcal{L}u, v) = u(1)a(1)v'(1) - u(0)a(0)v'(0) + \int_0^1 [au'' + bu' + cu]v\,dx.$$

Podemos escribir esta última igualdad más reducida utilizando las propiedades de la función delta de Dirac. Esto nos da

$$(\mathcal{L}u, v) = \int_0^1 [au'' + bu' + cu - u(1)a(1)\delta'(x-1) + u(0)a(0)\delta'(x)]v\,dx.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u(x) = a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x)&\\ - a(1)u(1)\delta'(x-1) + a(0)u(0)\delta'(x).&\end{aligned} \tag{3.12}$$

Por lo tanto, el problema (3.10) es equivalente a encontrar funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ tales que

$$\begin{aligned} u_1(x) &= f(x), \quad u_1(0) = u_1(1) = 0, \\ u_2(x) &= -a(1)d\delta'(x-1) + a(0)c\delta'(x). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.9. *Resolver el problema*

$$u''(x) = f(x), \quad u(0) = c, u(1) = d,$$

siendo c y d constantes dadas y f una función en $L^2[0,1]$.

Solución. En este caso $\mathcal{L}u = \frac{d^2u}{dx^2}$ y $a(x) = 1$ para cada x. Este operador es formalmente autoadjunto, lo que significa que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$. Por lo tanto por la ecuación (3.12), el problema se transforma en

$$\mathcal{L}u = f(x) - d\delta'(x-1) + c\delta'(x).$$

Escribiremos la solución u en la forma $u_1 + u_2$, en donde u_1 satisface la ecuación $\mathcal{L}u_1 = f(x)$ con las condiciones de frontera $u_1(0) = u_1(1) = 0$, y u_2 satisface la ecuación $\mathcal{L}u_2 = -d\delta'(x-1) + c\delta'(x)$. Para la primera ecuación, sea $g(x,t) = (x-t)H(x-t) - x(1-t)$, en donde $H(x)$ denota la función de Heaviside, $x \geq 0$ y $t \leq 1$. Entonces la solución de $\mathcal{L}u = f(x)$ con las condiciones de frontera $u(0) = u(1) = 0$, es

$$u_1(x) = \int_0^1 g(x,t)f(t)\,dt = \int_0^x (x-t)f(t)\,dt - x\int_0^1 (1-t)f(t)\,dt.$$

Verificamos esta afirmación primero observando que la función $g(x,t)$ satisface la ecuación $\mathcal{L}g(x,t) = \delta(x-t)$. En efecto, utilizando la derivada en el sentido de las distribuciones tenemos que

$$\begin{aligned} g'(x,t) &= (x-t)H'(x-t) + H(x-t) - (1-t) \\ &= (x-t)\delta(x-t) + H(x-t) - (1-t). \end{aligned}$$

Derivando de nuevo, respecto a x, obtenemos

$$g''(x,t) = (x-t)\delta'(x-t) + 2\delta(x-t).$$

Sea $\phi(x)$ una función de prueba. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 g''(x,t)\phi(t)\,dt &= \int_0^1 (x-t)\delta'(x-t)\phi(t)\,dt + \int_0^1 2\delta(x-t)\phi(t)\,dt \\ &= 2\phi(x) - [((x-t)\phi(x))']_{x=t} = \phi(x). \end{aligned}$$

Esto prueba la afirmación. Así pues,

$$\mathcal{L}u_1(x) = \int_0^1 \mathcal{L}g(x,t)f(t)\,dt = \int_0^1 \delta(x-t)f(t)\,dt = f(x).$$

Para la segunda ecuación, observemos que $\mathcal{L}\dfrac{\partial g}{\partial t} = -\delta'(x-t)$. Por lo cual

$$\mathcal{L}\frac{\partial g}{\partial t}\bigg|_{t=1} = -\delta'(x-1),$$

y

$$\mathcal{L}\frac{\partial g}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -\delta'(x).$$

Luego,

$$\mathcal{L}\left(d\frac{\partial g}{\partial t}\bigg|_{t=1} - c\frac{\partial g}{\partial t}\bigg|_{t=0}\right) = -d\delta'(x-1) + c\delta'(x).$$

De esto último vemos que la solución a la ecuación $\mathcal{L}u_2 = -d\delta'(x-1) + c\delta'(x)$ es

$$u_2(x) = d\frac{\partial g}{\partial t}\bigg|_{t=1} - c\frac{\partial g}{\partial t}\bigg|_{t=0}. \tag{3.13}$$

Note que

$$\frac{\partial g}{\partial t}\bigg|_{t=1} = -H(x-1) + x = x$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -H(x) + x = x-1,$$

para cada $x \in [0,1]$. Sustituyendo en (3.13) encontramos que

$$u_2 = dx - c(x-1).$$

Combinando estos resultados podemos decir que la solución a nuestro problema es

$$\begin{aligned} u(x) = u_1(x) + u_2(x) &= \int_0^1 g(x,t)f(t)\,dt + dx - c(x-1) \\ &= \int_0^x (x-t)f(t)\,dt - x\int_0^1 (1-t)f(t)dt + dx - c(x-1). \end{aligned} \qquad \square$$

Capítulo 4

Ecuaciones integrales

Las ecuaciones en las cuales la función incógnita aparece bajo un signo integral son conocidas como ecuaciones integrales. Estas ecuaciones se clasifican en varios tipos. Por ejemplo, si el intervalo de integración es fijo, la ecuación se denomina ecuación de tipo Fredholm. Si el intervalo de integración depende de una variable, la ecuación es de tipo Volterra. Para ser mas explícitos, la ecuación integral

$$f(x) = \int_a^x K(x,z)y(z)\,dz, \tag{4.1}$$

en donde y es una función desconocida y f es una función dada, es conocida como una ecuación de Volterra de primer orden con núcleo $K(x,z)$. Una ecuación de Fredholm de primer orden con núcleo $K(x,z)$ es de la forma

$$f(x) = \int_a^b K(x,z)y(z)\,dz. \tag{4.2}$$

Las correspondientes ecuaciones de segundo orden tienen la forma

$$y(x) + \int_a^x K(x,z)y(z)\,dz = f(x), \tag{4.3}$$

y

$$y(x) + \int_a^b K(x,z)y(z)\,dz = g(x). \tag{4.4}$$

Cuando una ecuación integral es de segundo orden, en la práctica es más fácil el manejo de estas, que una ecuación integral de primer orden y, afortunadamente, la mayor parte de los problemas de la física matemática pueden convertirse en una ecuación integral de segundo orden. Por esta razón, y por el hecho de que las ecuaciones de Volterra son un caso especial de las ecuaciones de Fredholm cuando el núcleo $K(x,t)$ se anula cuando t se encuentra fuera de la región dependiente de x, solo consideramos aquí las ecuaciones de Fredholm.

Para nuestros propósitos, supongamos que tenemos una ecuación integral de la siguiente forma

$$\phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\phi(t)\,dt = f(x), \tag{4.5}$$

en donde el núcleo $K(x,t)$ y λ se suponen conocidos, y queremos determinar la función desconocida ϕ para todas las funciones f de alguna clase conveniente. El dominio de integración y el recorrido de x se suponen fijos. Como en las ecuaciones diferenciales, también se presentan los problemas de existencia y unicidad de soluciones y además necesitamos algún método para determinar estas soluciones.

4.1. Método de las aproximaciones sucesivas

Recordemos la notación que utilizamos para los operadores integrales. Si K es un núcleo dado entonces

$$\mathcal{K}\phi(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)\,dt. \tag{4.6}$$

Entonces, la ecuación integral planteada en (4.5) se convierte en

$$\phi - \lambda\mathcal{K}\phi = f. \tag{4.7}$$

Observe que esta ecuación puede escribirse en la forma

$$T\phi(x) = \phi(x), \tag{4.8}$$

en donde $T\phi(x) = f(x) + \lambda K\phi(x)$. Es claro que T es un operador lineal con dominio en un conjunto de funciones dado. De la ecuación (4.8) podemos concluir que una solución de la ecuación integral (4.7) es un punto fijo[1] para el operador T. En el caso de los espacios métricos, podemos citar el *Teorema del punto fijo de Banach* (ver [2]) el cual nos asegura que toda contracción[2] definida en un espacio métrico completo posee un único punto fijo. Una prueba clásica de este teorema consiste en definir una sucesión de funciones, que resulta ser una sucesión de iteraciones, y probar que esta sucesión es de Cauchy. Este hecho garantiza la existencia de un número real que cumple con la condición de ser un punto fijo para el operador T. Lo anterior nos da una idea de cómo demostrar la existencia de una solución para la ecuación integral (4.7); definiremos la siguiente sucesión de iteraciones y veremos que esta sucesión converge a una función que satisface la ecuación integral (4.7).

[1]En un espacio métrico X, un **punto fijo** de una función $f : X \to X$ es un elemento $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

[2]Si (X,d) es un espacio métrico, una **contracción** es una función $f : X \to X$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ tenemos $d(f(x), f(y)) \leq rd(x,y)$, en donde r es una constante en el intervalo $[0,1)$.

Sea $\phi_0(x) = f(x)$ y para $n \geq 1$

$$\phi_n(x) = T\phi_{n-1}(x). \tag{4.9}$$

De esta forma obtenemos lo que se conoce como las **aproximaciones sucesivas** para la solución de la ecuación (4.7). Es natural denotar los términos de esta sucesión de la forma $\phi_n(x)$, si se piensa en el hecho de que esta sucesión puede ser uniformemente convergente a una función que resulta ser solución de (4.7), y por consiguiente un punto fijo para el operador T.

Puede mostrarse por medio de (4.9) que la sucesión $\phi_n(x)$ puede escribirse en la forma

$$\phi_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \mathcal{K}^m f(x), \tag{4.10}$$

en donde $\mathcal{K}^m$ denota el m-ésimo núcleo iterado que definimos en el Capítulo 1. Si probamos la convergencia uniforme de la serie en (4.10) entonces podemos intercambiar las operaciones de integración y suma cuando se toma el límite de esta serie.

Ahora bien, supongamos que hemos demostrado la convergencia uniforme de la serie en (4.10). Entonces la función límite de la sucesión $\phi_n(x)$ es un punto fijo para el operador T. En efecto, si

$$\phi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathcal{K}^n f(x),$$

entonces

$$\begin{aligned} T\phi(x) = f(x) + \lambda\mathcal{K}\phi(x) &= f(x) + \lambda\Big(\mathcal{K}f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathcal{K}^{n+1} f(x)\Big) \\ &= f(x) + \lambda\mathcal{K}f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n+1} \mathcal{K}^{n+1} f(x) \\ &= f(x) + \lambda\mathcal{K}f(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda^n \mathcal{K}^n f(x) = \phi(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T\phi(x) = \phi(x)$, lo que muestra que la función ϕ satisface la ecuación integral (4.7). Resumimos nuestra discusión en el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Consideremos la ecuación de Fredholm de segundo orden*

$$\phi - \lambda\mathcal{K}\phi = f,$$

con núcleo $K(x,t)$ y supongamos que

- *f es cuadrado integrable.*

- $\displaystyle\int_a^b \int_a^b K(x,t)^2 \, dx \, dt = B^2 < +\infty.$
- $|\lambda B| < 1.$

Entonces esta ecuación de Fredholm tiene una única solución

$$\phi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathcal{K}^n f(x),$$

la cual es una serie uniformemente convergente y se llama **serie de Neumann**.

Demostración. Ya hemos visto que la serie dada por el teorema, es solución de la ecuación de Fredholm considerada. Por lo tanto, solo nos falta demostrar que efectivamente esta serie es uniformemente convergente, y además que esta solución es única. Puesto que

$$(\mathcal{K}f(x))^2 = \left(\int_a^b K(x,t) f(t) \, dt \right)^2,$$

se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales que

$$(\mathcal{K}f(x))^2 \leq \|f\|^2 \int_a^b K(x,t)^2 \, dt.$$

Integrando ambos miembros de esta desigualdad respecto a x obtenemos

$$\|\mathcal{K}f\|^2 \leq \|f\|^2 \int_a^b \int_a^b K(x,t)^2 \, dt \, dx = \|f\|^2 B^2,$$

de donde,

$$\|\mathcal{K}f\| \leq \|f\| \, |B| \, .$$

Ahora bien,

$$(\mathcal{K}^2 f(x))^2 = [\mathcal{K}(\mathcal{K}f)(x)]^2 \leq \|\mathcal{K}f\|^2 \int_a^b K(x,t)^2 \, dt,$$

por lo tanto

$$\left\|\mathcal{K}^2 f\right\|^2 \leq \int_a^b \|\mathcal{K}f\|^2 \int_a^b K(x,t)^2 \, dt \, dx = \|\mathcal{K}f\|^2 B^2,$$

luego

$$\left\|\mathcal{K}^2 f\right\| \leq \|\mathcal{K}f\| \, |B| \leq \|f\| \, |B|^2 \, .$$

Por inducción sobre n, se demuestra que

$$\|\mathcal{K}^n f\| \leq \|f\| \,|\, B|^n \,.$$

Combinando este resultado con la ecuación (4.10), tenemos

$$\begin{aligned}
\|\phi_n(x)\| &= \left\| f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \mathcal{K}^m f(x) \right\| \\
&\leq \|f(x)\| + \sum_{m=1}^{n} |\, \lambda^m| \, \|\mathcal{K}^m f(x)\| \\
&\leq \|f(x)\| + \sum_{m=1}^{n} |\, \lambda^m| \, \|f\| \,|\, B|^m \\
&= \|f\| \sum_{m=0}^{n} |\, \lambda B|^m \,.
\end{aligned}$$

Puesto que $|\, \lambda B| < 1$, la serie $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} |\, \lambda B|^m$ converge. Luego, por el criterio M de Weierstrass concluimos que la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ converge uniformemente.
Veamos ahora la unicidad de esta solución. Sean $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ dos soluciones de la ecuación (4.7). Entonces

$$\phi_1 - \lambda \mathcal{K} \phi_1 = f, \quad \phi_2 - \lambda \mathcal{K} \phi_2 = f.$$

Restando estas ecuaciones obtenemos

$$w(x) - \lambda \mathcal{K} w(x) = 0,$$

en donde $w(x) = \phi_1(x) - \phi_2(x)$. Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales, y como $w(x) = \lambda \mathcal{K} w(x)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left| w^2(x) \right| = \lambda^2 \,|\, \mathcal{K} w(x)|^2 &\leq \lambda^2 \int_a^b K(x,t)^2 \, dt \int_a^b w^2(t) \, dt \\
&= \lambda^2 \, \|w(x)\|^2 \int_a^b K(x,t)^2 \, dt,
\end{aligned}$$

de donde

$$\|w(x)\|^2 \leq \lambda^2 B^2 \, \|w(x)\|^2 \,.$$

Por consiguiente,

$$(1 - \lambda^2 B^2) \, \|w(x)\|^2 \leq 0.$$

Puesto que el primer factor en esta ecuación es positivo, debemos tener que $\|w(x)\|^2 \leq 0$, lo cual solo es posible si y solo si $w(x) = 0$. Esto demuestra la unicidad de la solución. $\square$

Ahora enunciamos un teorema que nos da una condición necesaria y suficiente para la existencia de una solución para la ecuación integral (4.7). Dada una ecuación integral de la forma (4.7) con núcleo $K(x,t)$, el operador adjunto $\mathcal{K}^*$ de $\mathcal{K}$ es el operador integral dado como

$$\mathcal{K}^*\psi(x) = \int K(t,x)\psi(t)\,dt.$$

Entonces, la ecuación integral adjunta de la ecuación (4.7) esta dada como

$$\psi - \lambda\mathcal{K}^*\psi = g,$$

en donde g es una función dada. Los operadores adjuntos satisfacen la relación

$$(\mathcal{K}\phi, \psi) = (\phi, \mathcal{K}^*\psi).$$

Con la notación empleada anteriormente consideremos las siguientes ecuaciones integrales:

$$\phi - \lambda K\phi = f, \tag{4.11}$$
$$\phi - \lambda K\phi = 0, \tag{4.12}$$
$$\psi - \lambda K^*\psi = g, \tag{4.13}$$
$$\psi - \lambda K^*\psi = 0. \tag{4.14}$$

Entonces tenemos el siguiente teorema cuya demostración omitimos.

Teorema 4.2 (La alternativa de Fredholm)**.** *Si las ecuaciones homogéneas* (4.12) *y* (4.14) *no tienen soluciones no triviales entonces las ecuaciones no homogéneas* (4.11) *y* (4.13) *tienen solución única, respectivamente, para cualesquiera funciones f y g cuadrado integrables. Si las ecuaciones homogéneas* (4.12) *y* (4.14) *tienen soluciones no triviales (funciones propias) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$ y $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ entonces el número de tales soluciones, las cuales son linealmente independientes, es el mismo para cada ecuación. En tal caso, la ecuación no homogénea* (4.11) *tiene una solución si y solo si f es ortogonal a las funciones propias ψ_i de la ecuación* (4.13)*; es decir,*

$$(\psi_i, f) = 0, \tag{4.15}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

De forma similar, podemos ver que la ecuación (4.13) tiene solución si y solo si

$$(\phi_i, g) = 0, \tag{4.16}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Ejemplo 4.1. *Aplicar el método de las aproximaciones sucesivas para resolver la ecuación*

$$\phi(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,s)\phi(s)\,ds = 1,$$

en donde

$$K(x,s) = \begin{cases} x^2 & si\ x \in [0,s], \\ s & si\ x \in [s,1]. \end{cases}$$

Solución. Podemos aplicar el método de las aproximaciones sucesivas aquí, sin saber sí en verdad estas aproximaciones convergen. No obstante, lo que nos interesa es la convergencia de estas aproximaciones, puesto que la función límite es la solución de la ecuación integral planteada. Sea

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 |K(x,s)|^2\,dx\,ds.$$

De aquí vemos que $B^2 = \frac{11}{60}$, y en este caso $\lambda = \frac{1}{2}$ por lo que $|\lambda B| < 1$. Luego, el Teorema 4.1 garantizan la convergencia de las aproximaciones que nos da este método. Como la aproximación inicial es $\phi_0(x) = f(x) = 1$, entonces la aproximación de primer orden es

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 K(x,s)\cdot 1\,ds \\ &= 1 + \frac{1}{1}\left[\int_0^x s^2\,ds + \int_x^1 x\,ds\right] \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

Similarmente, se obtiene la aproximación de segundo orden

$$\phi_2(x) = 1 + \frac{9x}{16} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{48} - \frac{17x^5}{240} + \frac{x^6}{72}. \qquad \square$$

4.2. Ecuaciones integrales simétricas

Dada una ecuación integral cuyo núcleo es simétrico, podemos aplicar los resultados ya vistos sobre transformaciones integrales simétricas, para obtener resultados acerca de dicha ecuación integral. Por ejemplo, sabemos que todo núcleo continuo simétrico, el cual no es idénticamente nulo, tiene valores y vectores propios y que todos los valores propios de un núcleo simétrico real son reales. Es importante recordar estos resultados pues dada una ecuación integral en la cual el núcleo es simétrico, podríamos considerar la posibilidad de expresar una función f en una serie de la forma

$$f(x) = \sum_i (f,\phi_i)\phi_i(x),$$

en donde $\{\phi_i\}$ es una sucesión ortonormal de funciones. De esto, debemos saber bajo qué condiciones esto es posible, y también cómo podríamos asegurar que la sucesión de funciones ϕ_i es completa, es decir, esta genera un espacio de dimensión infinita.

Teorema 4.3. *Toda función f cuadrado integrable es ortogonal a todas las funciones ϕ_i del núcleo simétrico $K(x,t)$ si y solo si $(K(x,t), f(t)) = 0$. Para que una sucesión de funciones $\{\phi_i\}$ sea completa, es necesario y suficiente que $(K(x,t), f(t)) \neq 0$ para cada $f \neq 0$.*

Demostración. Las funciones propias ϕ_i son soluciones no triviales de

$$\lambda_i \mathcal{K}\phi_i(x) = \lambda_i (K(x,t), \phi_i(t)) = \phi_i(x). \tag{4.17}$$

Supongamos que f es una función cuadrado integrable ortogonal al núcleo $K(x,t)$. Entonces

$$(K(x,t), f(x)) = \mathcal{K}f(t) = 0. \tag{4.18}$$

Ahora bien, en (4.17) formamos el producto interno con f para obtener

$$(\phi_i, f) = \lambda_i(\mathcal{K}\phi_i, f) = \lambda_i(\phi_i, \mathcal{K}f).$$

El lado derecho de esta igualdad es cero por (4.18), por lo tanto f es ortogonal a ϕ_i para cada i.
Supongamos ahora que f es ortogonal a todas las funciones propias de $K(x,t)$, y debemos mostrar que $\|\mathcal{K}f\| = 0$. Definamos el núcleo

$$K_n(x,t) = K(x,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}(\phi_i(x)\phi_i(t)). \tag{4.19}$$

Puesto que f es ortogonal a ϕ_i para cada i, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}f(x) &= (K(x,t), f(t)) \\ &= \left(K(x,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}(\phi_i(x)\phi_i(t)), f(t) \right) \\ &= \mathcal{K}_n f(t), \end{aligned}$$

en donde $\mathcal{K}_n$ es el operador integral cuyo núcleo esta dado por (4.19). Luego,

$$\|\mathcal{K}f\| = \|\mathcal{K}_n f\| \leq \|\mathcal{K}_n\| \, \|f\| \, .$$

El teorema quedará demostrado si podemos probar que

$$\|\mathcal{K}_n\| = \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} \to 0, \quad \text{cuando } n \to \infty. \tag{4.20}$$

Para ver esto, note que

$$(\mathcal{K}\phi_i, \phi_i) = \left(\frac{1}{\lambda_i}\phi_i, \phi_i\right) = \frac{\|\phi_i\|^2}{\lambda_i}$$

y

$$(\mathcal{K}\phi_i, \phi_i) \leq \|\mathcal{K}\phi_i\| \, \|\phi_i\| \leq \|\mathcal{K}\| \, \|\phi_i\|^2 \, .$$

De estas desigualdades se sigue que

$$\frac{1}{\lambda_i} \leq \|\mathcal{K}\| \, .$$

Ahora bien, escribamos $\psi_i(x) = \mathcal{K}\phi_i(x)$. Entonces

$$\|\mathcal{K}\phi_i\|^2 = (\mathcal{K}\phi_i, \mathcal{K}\phi_i) = (\mathcal{K}\phi_i, \psi_i) = (\phi_i, \mathcal{K}\psi_i) = \left(\phi_i, \frac{\mathcal{K}\phi_i}{\lambda_i}\right),$$

y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\|\mathcal{K}\phi_i\|^2 \leq \frac{\|\phi_i\| \, \|\mathcal{K}\phi_i\|}{|\,\lambda_i|},$$

Esto prueba que $\|\mathcal{K}\| = \dfrac{1}{\lambda_i}$. Usando este resultado junto con el hecho de que el núcleo simétrico $K_n(x,t)$, obtenemos

$$\|\mathcal{K}_n\| = \frac{1}{|\lambda_{n+1}|},$$

y como los valores propios tienden a infinito, esto demuestra (4.20). Por lo tanto, el conjunto de funciones propias genera todo el espacio, lo que demuestra el teorema. □

Cuando un núcleo no es degenerado, es decir cuando este no es separable, el espacio generado por el conjunto de las funciones propias de tal núcleo genera un espacio de dimensión infinita, que puede ser o no un espacio de Hilbert, en el cual se encuentran nuestras soluciones. El siguiente teorema nos da condiciones para que haya una expansión de una función dada por medio de una serie de funciones propias a partir de un núcleo simétrico dado.

Teorema 4.4 (Hilbert-Schmidt)**.** *Toda función f cuadrado integrable puede ser expresada en la forma*

$$f(x) = \mathcal{K}g(x) = (K(x,t), g(t)), \tag{4.21}$$

donde g es alguna función cuadrado integrable y $\mathcal{K}$ es un operador lineal integral acotado con núcleo simétrico $K(x,t)$. La función f tiene una representación en términos de las funciones propias ϕ_i de $\mathcal{K}$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(\phi_i, f)\phi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\phi_i, g)}{\lambda_i}\phi_i(x). \tag{4.22}$$

Demostración. Solo probaremos la convergencia uniforme de la serie en (4.21). Puesto que

$$(\phi_i, f) = (\phi_i, \mathcal{K}g) = (\mathcal{K}\phi_i, g) = \frac{1}{\lambda_i}(\phi_i, g),$$

la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos permite escribir

$$\left(\sum_{i=m}^{n} |\,(\phi_i, f)\phi_i|\right)^2 = \left(\sum_{i=m}^{n} |\,(\phi_i, g)\phi_i/\lambda_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i=m}^{n}(\phi_i, g)^2\right)\left(\sum_{i=m}^{n}\phi_i^2/\lambda_i^2\right).$$

Por la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\phi_i, g)^2 \leq \|g\|^2 < +\infty.$$

Luego la serie $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}(\phi_i, g)^2$ es convergente. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, con $m, n \geq N_\varepsilon$, tenemos

$$\left|\sum_{i=m}^{n}(\phi_i, g)^2\right| < \varepsilon.$$

Ahora bien,

$$(K(x,t), \phi_i(t)) = \mathcal{K}\phi_i(x) = \frac{\phi_i(x)}{\lambda_i}.$$

Utilizando nuevamente la desigualdad de Bessel, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{p}\phi_i^2/\lambda_i^2 \leq \int_a^b K(x,t)^2\,dt < +\infty,$$

ya que $K(x,t)$ es acotado. Se sigue que la serie $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i^2/\lambda_i^2$ es convergente. Para este mismo ε, existe $N_\varepsilon^* \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N_\varepsilon^*$, entonces

$$\left|\sum_{i=m}^{n}\phi_i^2/\lambda_i^2\right| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, si $m, n \geq \text{máx}\{N_\varepsilon, N_\varepsilon^*\}$

$$\sum_{i=m}^{n} |(\phi_i, f)\phi_i| < \varepsilon.$$

Esto prueba la convergencia uniforme de la serie infinita en (4.21). Ahora demostremos que la serie en (4.21) converge a f. Es suficiente mostrar que la serie converge en media a f, pues f y ϕ_i son funciones uniformemente continuas. Puesto que,

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{i=1}^{n} (\phi_i, f)\phi_i \right\| &= \left\| \mathcal{K}g - \sum_{i=1}^{n} (\phi_i, g)\phi_i/\lambda_i \right\| \\ &= \|\mathcal{K}_n g\|, \end{aligned}$$

en donde $\mathcal{K}_n$ es dado por (4.19). Luego, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\|\mathcal{K}_n g\| \leq \|\mathcal{K}_n\| \, \|g\| = \frac{\|g\|}{|\lambda_{n+1}|},$$

y como el lado derecho de esta desigualdad tiende a cero cuando $n \to \infty$, se sigue que $\|\mathcal{K}_n g\| \to 0$ y de esta manera vemos que la serie en (4.22) converge a f. □

Capítulo 5

Funciones de Green

5.1. Definiciones, ejemplos y resultados

Con las ideas que hasta aquí hemos visto, estamos listos para poder definir lo que entendemos por función de Green de un operador diferencial dado y la utilidad de la misma para resolver un problema de valor en la frontera. Dado un operador diferencial $\mathcal{L}$, nos interesa saber cómo encontrar la función de Green del operador y qué propiedades posee. Recordemos que cuando nos enfrentamos al problema de encontrar el inverso del operador diferencial $\mathcal{L}$, tomamos como supuesto que el operador inverso es un operador integral y mostramos que el núcleo de este operador, $g(x,t)$, satisface la ecuación $\mathcal{L}g(x,t) = \delta(x-t)$. En primer lugar, veamos cómo aparece la función de Green de un operador diferencial dado de forma natural.
Consideremos el problema de valor en la frontera

$$u''(x) = f(x), \tag{5.1}$$
$$u(0) = u(l) = 0, \tag{5.2}$$

en donde f es una función que podemos suponer continua en el intervalo $[0,l]$. Para encontrar la solución de este problema aplicaremos el método de variación de parámetros. Observando las condiciones de frontera dadas podemos suponer que tal solución tiene la forma

$$u(x) = A(x)x + (l-x)B(x), \tag{5.3}$$

en donde A y B son funciones que debemos determinar. Derivando obtenemos

$$u'(x) = A'(x)x + A(x) + B'(x)(l-x) - B(x). \tag{5.4}$$

Para reducir el orden de la ecuación (5.1), suponemos que las funciones $A(x)$ y $B(x)$ satisfacen $A'(x)x + B'(x)(l-x) = 0$. Entonces la ecuación (5.4) se convierte en

$$u'(x) = A(x) - B(x).$$

Por lo tanto

$$u''(x) = A'(x) - B'(x) = f(x).$$

Así pues, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones, con incógnitas $A'(x)$ y $B'(x)$:

$$\begin{aligned} A'(x)x + B'(x)(l - x) = 0, \\ A'(x) - B'(x) = f(x). \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones encontramos que

$$A'(x) = \frac{(l-x)f(x)}{l}, \tag{5.5}$$

$$B'(x) = \frac{-xf(x)}{l}. \tag{5.6}$$

Integrando estas ecuaciones y combinando estos resultados con la ecuación (5.3) encontramos que la solución del problema $u'' = f(x)$ es

$$u(x) = \frac{x}{l}\int_b^x (l-t)f(t)\,dt - \frac{l-x}{l}\int_a^x tf(t)\,dt,$$

en donde a, b son constantes que determinaremos utilizando las condiciones de frontera. Haciendo $x = 0$ encontramos que

$$\int_a^0 tf(t)\,dt = 0.$$

Como f es arbitraria, obtenemos que $a = 0$. Cuando $x = l$ se obtiene

$$\int_b^l (l-t)f(t)\,dt = 0,$$

de donde $b = l$. Por lo tanto, la solución del problema propuesto sujeto a las condiciones de frontera dadas resulta ser

$$u(x) = \frac{x}{l}\int_l^x (l-t)f(t)\,dt - \frac{l-x}{l}\int_0^x tf(t)\,dt. \tag{5.7}$$

Podemos escribir esta solución en la forma $\displaystyle\int_0^l K(x,t)f(t)\,dt$ para alguna función K. Sea

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x(t-l)}{l} & \text{si } 0 \le t \le x, \\ \dfrac{t(x-l)}{l} & \text{si } x \le t \le l. \end{cases}$$

Entonces la ecuación (5.7) puede escribirse en la forma

$$u(x) = \int_0^l G(x,t) f(t)\, dt. \tag{5.8}$$

Podemos ahora observar qué propiedades satisface la función $G(x,t)$. En primer lugar, vemos que esta función satisface la ecuación $u''(t) = 0$ con las condiciones de frontera $u(0) = u(l) = 0$, es decir, para $t \neq x$ tenemos que

$$\begin{gathered} \frac{d^2}{dt^2} G(x,t) = 0, \\ G(x,0) = G(x,l) = 0. \end{gathered}$$

Podemos ver que la función G es continua en $t = x$, dado que

$$\lim_{t \to x^-} G(x,t) = \frac{t(t-l)}{l} = \lim_{t \to x^+} G(x,t).$$

Sin embargo, la derivada de la función G respecto a t es discontinua en $t = x$. En efecto,

$$\frac{d}{dt} G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x}{l} & \text{si } 0 \leq t < x, \\ \dfrac{x-l}{l} & \text{si } x < t \leq l. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$G'(x, x^+) - G'(x, x^-) = -1.$$

Por último, la función G es simétrica en sus argumentos, esto significa que $G(x,t) = G(t,x)$. A continuación resumimos las propiedades que encontramos hasta aquí.

(1) $\dfrac{d^2}{dt^2} G(x,t) = 0$, si $t \neq x$.

(2) $G(x,0) = G(x,l) = 0$.

(3) La función G es continua en $t = x$.

(4) $G'(x, x^+) - G'(x, x^-) = -1$.

(5) $G(x,t) = G(t,x)$.

Hasta aquí hemos seguido un método de solución inductivo, es decir dado el problema encontramos su solución, pero podemos demostrar que sí existe una función que cumpla con estas propiedades, entonces la solución del problema propuesto sujeto a las condiciones de frontera impuestas esta dada por (5.8). Más aún, si la solución del problema esta dada por (5.8), entonces esta ecuación debe ser considerada en el sentido de las distribuciones, ya que

$$\frac{d^2}{dt^2}G(x,t) = \delta(x-t), \quad \text{para cada } t.$$

En efecto, de las ecuaciones (5.8) y (5.1) es claro que

$$u(x) = \int_0^l G(x,t)u''(t)\,dt.$$

Integrando por partes dos veces, encontramos que

$$u(x) = (Gu' - G'u)\Big|_0^l + \int_0^l \frac{d^2G}{dt^2}u(t)\,dt,$$

en donde $'$ denota la derivada respecto a t. El término $(Gu' - G'u)\Big|_0^l$ es cero por la condición (2) y las condiciones de frontera dadas en (5.2). Por lo tanto,

$$u(x) = \int_0^l \frac{d^2G}{dt^2}u(t)\,dt.$$

Por la condición (1) esta integral es cero siempre que $t \neq x$, y cuando $t = x$, el valor de esta integral debe ser precisamente $u(x)$. Esto solo es posible cuando $\frac{d^2}{dt^2}G(x,t) = \delta(x-t)$. Con este ejemplo vemos la validez de suponer que un operador diferencial dado tiene como inverso un operador integral, afirmación hecha en la Sección 3.1. La discusión anterior nos conduce a definir la función de Green de un operador diferencial dado.

Definición 5.1 (Función de Green asociada a un operador diferencial)**.** *Dado un operador diferencial $\mathcal{L}$ definido sobre el conjunto de las funciones u de $L^2[0,1]$ tales que $B_1(u) = a$, $B_2(u) = b$, diremos que la función $G(x,t)$ es una* **función de Green** *asociada al operador, si la función G satisface*

$$\mathcal{L}G(x,t) = \delta(x-t), \quad B_1(G) = B_2(G) = 0.$$

Observación 5.1. *Note que no hemos incluido en esta definición la unicidad de tal función. Además, es claro que cuando la función de Green existe, depende de las condiciones de frontera impuestas sobre el operador $\mathcal{L}$.*

Ejemplo 5.1. *La función de Green del operador $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2}$ definido en el espacio de las funciones de $L^2[0,1]$ tales que $u(0) = u(l) = 0$ es*

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{x(t-l)}{l} & si\ 0 \leq t \leq x, \\ \dfrac{t(x-l)}{l} & si\ x \leq t \leq l. \end{cases}$$

Las ideas de la Sección 3.4 junto con las funciones de Green nos dan una poderosa técnica para resolver problemas con condiciones de frontera no homogéneas. Para ilustrar esto, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2. *Resolver el problema*

$$u'' - 2ru' + u = f(x), \quad u(0) = a, u(1) = b,$$

en donde r, a, b *son constantes conocidas, y* f *es una función continua en* $[0, 1]$.

Solución. De la Sección 3.4 sabemos que el problema dado es equivalente a resolver

$$\mathcal{L}u = f(x) - b\delta'(x-1) + a\delta'(x),$$

en donde $\mathcal{L}u = u'' - 2ru' + u$. Primero encontremos la función de Green del operador $\mathcal{L}$. Observe que la ecuación diferencial homogénea asociada $\mathcal{L}$, tiene dos soluciones, e^{rx} y xe^{rx}. Puesto que la función de Green debe satisfacer las condiciones de frontera homogéneas, esto nos da la siguiente forma alternativa para la función de Green del operador $\mathcal{L}$:

$$h(x,t) = \begin{cases} xe^{rx} & \text{si } 0 \leq x \leq t, \\ (x-1)e^{rx} & \text{si } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Esta función no es continua en $t = x$, por lo que debemos redefinirla para que lo sea. Hagamos $t \to x$ en ambos casos y multipliquemos la función h por los respectivos límites laterales. Definimos, de nuevo, la función

$$h(x,t) = \begin{cases} x(t-1)e^{r(x+t)} & \text{si } 0 \leq x \leq t, \\ t(x-1)e^{r(x+t)} & \text{si } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Puede observarse que la derivada de la función de Green respecto a x es discontinua en $x = t$, y tiene un salto de magnitud $-e^{2rx}$, no obstante queremos que esta función cumpla con la condición $G'(x, x^-) - G'(x, x^+) = -1$ lo cual se garantiza dividiendo en ambos casos por e^{2rx}. Por lo tanto, la función de Green del operador $\mathcal{L}$ viene dada por

$$G(x,t) = \begin{cases} x(t-1)e^{r(x-t)} & \text{si } 0 \leq x \leq t, \\ t(x-1)e^{r(x-t)} & \text{si } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Luego, la solución del problema $\mathcal{L}u_1 = f(x)$ sujeto a las condiciones de frontera $u_1(0) = u_1(1) = 0$ viene dada por

$$u_1(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t)\, dt.$$

Finalmente, resolvemos la ecuación

$$\mathcal{L}u_2 = -b\delta'(x-1) + a\delta'(x). \tag{5.9}$$

La misma idea que fue usada en la Sección 3.4 nos da la solución para resolver esta última ecuación diferencial, es decir, la ecuación (3.13) nos da la siguiente solución para la ecuación (5.9):

$$u_2(x) = b\frac{\partial G}{\partial t}\bigg|_{t=1} - a\frac{\partial G}{\partial t}\bigg|_{t=0}.$$

Ahora

$$\frac{\partial G}{\partial t}\bigg|_{t=1} = xe^{r(x-1)}, \quad \frac{\partial G}{\partial t}\bigg|_{t=0} = (x-1)e^{rx}.$$

Luego

$$u_2(x) = bxe^{r(x-1)} - a(x-1)e^{rx}.$$

Por lo tanto, la solución al problema es

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt + bxe^{r(x-1)} - a(x-1)e^{rx}. \qquad \square$$

Estos dos ejemplos nos dan una técnica que podemos utilizar de manera general para encontrar la función de Green de un operador diferencial dado. Consideremos un operador diferencial de la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + q,$$

sujeto a condiciones de frontera no mixtas

$$B_1(u) = a_1u(0) + b_1u'(0), \quad B_2(u) = c_1u(1) + d_1u'(1),$$

en donde $p(x) \neq 0$ en $[0,1]$, q es una función conocida y a_1, b_1, c_1 y d_1 son constantes dadas. Primero debemos encontrar la solución al problema

$$\mathcal{L}G = \delta(x-t), \quad B_1(G) = B_2(G) = 0.$$

Sean v_1 y v_2 soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada, y w_1 y w_2 combinaciones lineales de v_1 y v_2 que satisfagan la condiciones $B_1(w_1) = 0$ y $B_2(w_2) = 0$, respectivamente. Inicialmente consideramos la función

$$g(x,t) = \begin{cases} w_1(x) & \text{si } x < t, \\ w_2(x) & \text{si } x > t. \end{cases}$$

Observemos que la continuidad de la función de Green se garantiza siempre multiplicando la función $w_2(x)$ por $w_1(t)$ y $w_1(x)$ por $w_2(t)$ y definiendo nuevamente la función g como sigue

$$g(x,t) = \begin{cases} w_1(x)w_2(t) & \text{si } x \leq t, \\ w_2(x)w_1(t) & \text{si } x \geq t. \end{cases}$$

Derivando esta ecuación respecto a x obtenemos

$$g'(x,t) = \begin{cases} w_1'(x)w_2(t) & \text{si } x < t, \\ w_2'(x)w_1(t) & \text{si } x > t. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$g'(t^-,t) - g'(t^+,t) = w_1'(t)w_2(t) - w_2'(t)w_1(t).$$

Esto puede escribirse en términos de $J(w_1, w_2)$, puesto que

$$\begin{aligned} J(w_1,w_2) &= pw_1'w_2 - w_1(pw_2)' + p'w_1w_2 \\ &= pw_1'w_2 - w_1(pw_2' + p'w_2) + p'w_1w_2 \\ &= pw_1'w_2 - pw_1w_2' - p'w_1w_2 + p'w_1w_2 \\ &= p(w_1'w_2 - w_1w_2'). \end{aligned}$$

Dividiendo por $p(t)$, lo cual es posible pues $p(t) \neq 0$ en $[0,1]$, obtenemos

$$g'(t^-,t) - g'(t^+,t) = \frac{J(w_1,w_2)}{p(t)}. \tag{5.10}$$

Si para algún valor de t tenemos que $J(w_1, w_2) = 0$, el Corolario 3.2 implicaría que w_1 y w_2 son linealmente dependientes, lo cual contradice lo que hemos supuesto. Por lo tanto $J(w_1, w_2) \neq 0$ para cada t. Así podemos dividir en ambos lados de la ecuación (5.10) por $J(w_2, w_1)$, teniendo en cuenta que $J(w_1, w_2) = -J(w_2, w_1)$, para obtener

$$\frac{g'(t^-,t)}{J(w_2,w_1)} - \frac{g'(t^+,t)}{J(w_2,w_1)} = \frac{-1}{p(t)}.$$

Esto nos permite definir la función de Green, de tal forma que su derivada respeto a x tenga un salto de discontinuidad de magnitud $-1/p(t)$. Entonces

$$G(x,t) = \begin{cases} w_1(x)w_2(t)/J(w_2,w_1) & \text{si } x \leq t, \\ w_2(x)w_1(t)/J(w_2,w_1) & \text{si } x \geq t. \end{cases}$$

Luego, la solución del problema $\mathcal{L}u = f$ sujeta a las condiciones de frontera $B_1(u) = B_2(u) = 0$, es

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt.$$

Podemos encontrar ahora la solución al problema general

$$\mathcal{L}u = f, \quad B_1(u) = a,\, B_2(u) = b.$$

Nuevamente usaremos las ideas de la Sección 3.4 para resolver el problema propuesto. Sea u una función prueba para el operador $\mathcal{L}$. Entonces

$$(\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v) = \int_0^1 u[-(pv')' + qv]\, dx,$$

de donde

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}u, v) &= \int_0^1 v[-(pu')' + qu]\, dx - p(u'v - v'u)\Big|_0^1 \\
&= \int_0^1 v[-(pu')' + qu]\, dx - p(1)(u'(1)v(1) - v'(1)u(1)) \\
&\quad + p(0)(u'(0)v(0) - v'(0)u(0)) \\
&= \int_0^1 v[-(pu')' + qu]\, dx - p(1)\int_0^1 (u'(1)\delta(x-1) \\
&\quad + u(1)\delta'(x-1))v(x)\, dx \\
&\quad + p(0)\int_0^1 (u'(0)\delta(x) + u(0)\delta'(x))v(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el problema general se reduce a resolver

$$\mathcal{L}u = f(x) - p(1)(u'(1)\delta(x-1) + u(1)\delta'(x-1)) + p(0)(u'(0)\delta(x) + u(0)\delta'(x)).$$

Para continuar con el estudio de las funciones de Green, enunciamos el siguiente teorema de existencia, clásico de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual nos permitirá demostrar las propiedades que tiene la función de Green de un operador diferencial dado.

Teorema 5.1. *Sean p, q, y f funciones de x continuas a trozos en $[0,1]$ y supongamos que $p(x) > 0$ para cada x en este intervalo. Entonces existe una función continua u tal que $p(x)u'(x)$ existe y es continua para cada x, la cual satisface $u(0) = u'(0) = 0$ y*

$$(pu')' - qu = f,$$

para cada x tal que ambos miembros de esta igualdad sean funciones de x continuas.

Usando este resultado demostramos el siguiente teorema.

Teorema 5.2. *Sea $\mathcal{L}$ el operador diferencial dado por*

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x). \tag{5.11}$$

Entonces la función de Green, $G(x,t)$ asociada al operador $\mathcal{L}$, satisface para cada $x \neq t$, la ecuación homogénea asociada a este operador diferencial. Cuando la definición del operador $\mathcal{L}$ se extiende como se hizo en la Sección 3.4, la función de Green es continua, pero su derivada tiene un salto de discontinuidad, en $x = t$, de magnitud $(-1/p(t))$.

Demostración. Supongamos primero que $q = 0$ y sea $g_0(x,t)$, la solución de la ecuación $\mathcal{L}u = \delta(x-t)$, es decir

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}g_0(x,t)\right) = \delta(x-t).$$

Integrando dos veces obtenemos

$$g_0(x,t) = -H(x-t)\int_t^x \frac{du}{p(u)} + \alpha(t)\int_t^x \frac{du}{p(u)} + \beta(t),$$

en donde $\alpha(t), \beta(t)$ son constantes de integración. De la ecuación anterior vemos que la función $g_0(x,t)$ es continua para cada x, y su derivada es discontinua en $x = t$, en donde tiene un salto de magnitud $-1/p(t)$. Consideremos ahora el caso en el que $q \neq 0$. Sea $G(x,t)$ la función de Green asociada al operador L, y supongamos que $G(x,t) = g_0(x,t) + h(x,t)$. Entonces, la función $h(x,t)$ satisface la ecuación

$$\mathcal{L}h(x,t) = -q(x)g_0(x,t),$$

es decir

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dh}{dx}\right) + q(x)h(x,t) = -q(x)g_0(x,t).$$

Puesto que la función $q(x)g_0(x,t)$ es continua, las funciones $h(x,t)$, $p(x)\frac{dh}{dx}$ y $\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dh}{dx})$ resultan ser funciones continuas para cada x. Se sigue entonces que la función de Green $G(x,t)$ también es continua. Veamos que la derivada de la función de Green es discontinua en $x = t$ y tiene un salto de magnitud $-1/p(t)$. Puesto que $G'(x,t) = g_0'(x,t) + h'(x,t)$, entonces

$$\begin{aligned} G'(x,x^-) - G(x,x^+) &= g_0'(x,x^-) - g_0'(x,x^+) + h'(x,x^-) - h'(x,x^+) \\ &= \frac{-1}{p(x)} + h'(x,x^-) - h'(x,x^+), \end{aligned}$$

pero como la función $\frac{dh}{dx}$ es continua, debemos tener que $h'(x,x^-) - h'(x,x^+) = 0$. Por lo tanto,

$$G'(x,x^-) - G(x,x^+) = \frac{-1}{p(x)}. \qquad \square$$

Usando este teorema podemos probar ahora la unicidad de la función de Green.

Teorema 5.3. *Sea $\mathcal{L}$ el operador diferencial dado por* (5.11)*. Entonces si $G(x,t)$ y $H(x,t)$ son funciones de Green asociadas a este operador tenemos, para cada $x, t \in [0,1]$*

$$G(x,t) = H(x,t).$$

Demostración. Sean $t_0 \in [0,1]$ fijo, $K(x,t_0) = G(x,t_0) - H(x,t_0)$ para $x \in [0,1]$. Veamos que $K(x,t_0)$ es idénticamente nulo en este intervalo. Como G y H son funciones de Green asociadas al operador $\mathcal{L}$ tenemos

$$\mathcal{L}G(x,t_0) = \delta(x - t_0), \quad \mathcal{L}H(x,t_0) = \delta(x - t_0).$$

Por lo tanto, la función $K(x,t_0)$ es solución al problema $\mathcal{L}K(x,t_0) = 0$. Además, como G y H son continuas en $[0,1]$, se sigue que la función $K(x,t_0)$ también es continua en $[0,1]$. Observe que para $x \neq t_0$, la función $K'(x,t_0)$ es continua pues

$$\begin{aligned} K'(t_0^-,t_0) - K'(t_0^+,t_0) &= G'(t_0^-,t_0) - G'(t_0^+,t_0) - H'(t_0^-,t_0) + H'(t_0^+,t_0) \\ &= -\frac{1}{p(t_0)} + \frac{1}{p(t_0)} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $K'(x,t_0)$ es continua en $[0,1]$. Estos hechos implican la continuidad de la función $K''(x,t_0)$ ya que si $\mathcal{L}K(x,t_0) = 0$ entonces

$$p(x)K''(x,t_0) = -p'(x)\frac{d}{dx}K(x,t_0) + q(x)K(x,t_0).$$

Hemos mostrado que $K(x,t_0)$ es una función continua solución al problema $\mathcal{L}K(x,t_0) = 0$ sujeto a ciertas condiciones de frontera homogéneas en $[0,1]$, el cual no tiene soluciones no triviales. Por lo tanto debemos tener $K(x,t_0) = 0$ para cada $x \in [0,1]$. Como t_0 es arbitrario esto prueba el teorema. $\square$

Teorema 5.4. *Sea $G(x,t)$ la función de Green asociada al operador $\mathcal{L}$ actuando sobre algún subespacio de $L^2[0,1]$ definido mediante unas condiciones de frontera, y sea $H(x,t)$ la función de Green asociada al operador $\mathcal{L}^*$ actuando sobre el subespacio de $L^2[0,1]$ definido por las condiciones de frontera asociadas al operador $\mathcal{L}^*$. Entonces*

$$G(x,t) = H(t,x).$$

Más aún, cuando $\mathcal{L}$ es autoadjunto, $G(x,t)$ es una función simétrica de x y t.

Demostración. Si G y H son las funciones de Green asociadas a los operadores $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^*$ respectivamente, entonces tenemos que para cada t

$$\mathcal{L}G(x,t) = \delta(x - t), \quad \mathcal{L}^*H(x,t) = \delta(x - t).$$

Como $\mathcal{L}^*$ es el adjunto del operador $\mathcal{L}$ debemos tener $(H, \mathcal{L}G) = (G, \mathcal{L}^*H)$, es decir,

$$\begin{aligned} \int_0^1 H(x,t)\mathcal{L}G(x,s)\,dx &= \int_0^1 G(x,s)\mathcal{L}^*H(x,t)\,dx, \\ \int_0^1 H(x,t)\delta(x-s)\,dx &= \int_0^1 G(x,s)\delta(x-t)\,dx. \end{aligned}$$

Luego

$$H(s,t) = G(t,s).$$

Esto prueba que la afirmación del teorema, pues s es arbitrario. Si el operador es autoadjunto tendremos que $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$, lo cual implica que $H(x,t) = G(x,t)$, y por lo que mostramos anteriormente, $G(t,x) = H(x,t) = G(x,t)$ esto nos da la simetría de la función de Green, asociada a un operador autoadjunto $\mathcal{L}$, respecto a sus argumentos. $\square$

Teorema 5.5. *Sea w una solución única, salvo una constante, de la ecuación diferencial homogénea autoadjunta:*

$$\mathcal{L}w = -(pw')' + qw = 0, \quad B_1(w) = B_2(w) = 0.$$

Entonces la ecuación no homogénea, sujeta a condiciones no mixtas

$$\mathcal{L}u = f, \quad B_1(u) = B_2(u) = 0,$$

tiene solución si y solo si

$$(w,f) = \int_0^1 f(x)w(x)\,dx = 0. \tag{5.12}$$

Demostración. Supongamos que las condiciones de frontera son no mixtas, y sea u una solución de la ecuación $\mathcal{L}u = f$. Entonces,

$$(w,f) = (w,\mathcal{L}u) = (\mathcal{L}w,u) = 0.$$

Esto es posible pues $\mathcal{L}$ es autoadjunto. Recíprocamente, supongamos que $(w,f) = 0$ y veamos que la ecuación $\mathcal{L}u = f$ tiene solución. Sea v una solución de $\mathcal{L}u = 0$ independiente de w. Utilizamos aquí la técnica que usamos en el Ejemplo 5.2 para construir la función de Green del operador dado y, sin perdida de generalidad, con las condiciones de frontera $u(0) = u'(0) = 0$. Supongamos que la función de Green tiene la forma

$$g(x,t) = c_1(t)v(x) + c_2w(x).$$

De la condición de frontera $v(0) = v'(0) = 0$ tenemos que

$$g(x,t) = v(x), \quad x < t.$$

Para $x > t$ escogemos

$$g(x,t) = w(x).$$

A fin de asegurar la continuidad de la función $g(x,t)$, hagamos que $x \to t$ en ambos casos para obtener

$$g(x,t) = \begin{cases} v(x)w(t) & \text{si } x < t, \\ w(x)v(t) & \text{si } x > t. \end{cases}$$

Solo nos falta asegurar, que el salto de discontinuidad de la derivada tenga magnitud -1, para ello dividimos la función $g(x,t)$ en ambos casos por $J(v,w)$. Esto es posible pues la función $J(v,w)$ no cero ya que si lo fuera para algún x, las funciones w y v serían linealmente dependientes, por el Corolario 3.2, lo cual contradice lo que hemos supuesto. Por lo tanto, la función de Green tendrá la forma

$$G(x,t) = \frac{v(x)w(t)}{J(v,w)}H(t-x) + \frac{w(x)v(t)}{J(v,w)}H(x-t).$$

Así pues, la solución al problema $\mathcal{L}u = f$ sujeto a las condiciones $u(0) = u'(0) = 0$ resulta ser

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt.$$

Por el Corolario 3.1, $J(v,w)$ es constante. Por lo tanto la solución de $\mathcal{L}u = f$ puede escribirse de la forma

$$u(x) = \frac{v(x)}{J(u,v)}\int_x^1 w(t)f(t)\,dt + \frac{w(x)}{J(u,v)}\int_0^x v(t)f(t)\,dt.$$

Escribimos esta misma expresión en la forma

$$u(x) = -\frac{v(x)}{J(u,v)}\int_0^x w(t)f(t)\,dt + \frac{v(x)}{J(u,v)}\int_0^1 w(t)f(t)\,dt + \frac{w(x)}{J(u,v)}\int_0^x v(t)f(t)\,dt.$$

Usando la condición dada en (5.12) obtenemos

$$u(x) = \frac{w(x)}{J(u,v)}\int_0^x v(t)f(t)\,dt - \frac{v(x)}{J(u,v)}\int_0^x w(t)f(t)\,dt. \tag{5.13}$$

Por construcción es claro que la función u satisface la ecuación $\mathcal{L}u = f$. Solo nos falta demostrar que la función $u(x)$ efectivamente satisface las condiciones de frontera del problema, esto es debemos probar que

$$B_1(u) = a_1u(0) + b_1u'(0) = 0, \quad B_2(u) = a_2u(0) + b_2u'(0) = 0,$$

en donde a_1, a_2, b_1, b_2 son constantes conocidas. Puesto que $u(0) = u'(0) = 0$, entonces $B_1(u) = 0$. Haciendo $x = 1$ en (5.13) y usando (5.12) encontramos

$$u(1) = \frac{w(1)}{J(v,w)}\int_0^1 f(t)v(t)\,dt.$$

Derivando en (5.13), haciendo $x = 1$ y teniendo en cuenta (5.12) encontramos que

$$u'(1) = \frac{w'(1)}{J(v,w)}\int_0^1 f(t)v(t)\,dt.$$

Luego

$$B_2(u) = \frac{B_2(w)}{J(v,w)} \int_0^1 f(t)v(t)\,dt.$$

Como $B_2(w) = 0$, se sigue que $B_2(u) = 0$ y hemos probado el teorema. □

Observación 5.2. *El teorema anterior también es válido para condiciones de frontera de la forma* (3.8) *y* (3.9)*, no obstante no demostramos aquí este caso pues no será de nuestro interés este caso.*

5.2. Equivalencia entre las ecuaciones integrales y diferenciales

Consideremos la ecuación diferencial

$$\mathcal{L}u = -f, \tag{5.14}$$

en donde $\mathcal{L}$ es un operador diferencial autoadjunto de segundo orden como en (5.11), y f es una función continua a trozos definida en $[0,1]$. Dadas unas condiciones homogéneas sobre la frontera de $[0,1]$, podemos expresar la solución de (5.14) de la forma

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt, \tag{5.15}$$

en donde $G(x,t)$ es la función de Green, asociada con el operador $\mathcal{L}$ en $[0,1]$ y que satisface las mismas condiciones de frontera de la función desconocida u.
En esta sección, estudiamos el problema de valor en la frontera general asociado con la familia lineal de ecuaciones diferenciales

$$\mathcal{L}u + \lambda\rho u = -f, \rho > 0 \tag{5.16}$$

que dependen de un parámetro λ. Como antes, $\mathcal{L}$ esta dado como (5.11), f es una función continua a trozos en $[0,1]$, y suponemos que las condiciones de frontera son homogéneas. Si la función de Green, $G(x,t)$, existe para el operador $\mathcal{L}$ bajo las condiciones de frontera dadas, entonces la solución $u(x)$ de (5.16) puede ser expresada en la forma (5.15). Escribiendo

$$\phi(x) = \lambda\rho u(x) - f(x), \tag{5.17}$$

se sigue que $\mathcal{L}u = \phi(x) + 2f(x)$. Por lo tanto,

$$u(x) = \lambda \int_0^1 G(x,t)\rho(t)u(t)\,dt + g(x), \tag{5.18}$$

en donde

$$g(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt. \tag{5.19}$$

De aquí se ve que resolver el problema de valor en la frontera (5.16) es equivalente a resolver la ecuación integral (5.18). Note que cuando $f = 0$, la ecuación integral (5.18) se convierte en

$$u(x) = \lambda \int_0^1 G(x,t)\rho(t)u(t)\,dt. \tag{5.20}$$

Sea $z(x) = u(x)\sqrt{\rho(x)}$ y $K(x,t) = G(x,t)\sqrt{\rho(x)\rho(t)}$ entonces la ecuación (5.20) se convierte en

$$z(x) = \lambda \int_0^1 K(x,t)z(t)\,dt. \tag{5.21}$$

Podemos ahora aplicar la teoría que ecuaciones integrales que ya vimos hasta aquí, pues el núcleo de (5.21) es simétrico, ya que el operador $\mathcal{L}$ es autoadjunto. Combinando los resultados obtenidos en las secciones anteriores podemos ver que las siguientes posibilidades se dan para la relación entre los problemas de valor en la frontera para ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas.

Para λ fijo, toda solución de la ecuación homogénea asociada a (5.16) es idénticamente nula, pues λ no es un valor propio del operador $\mathcal{L}$. Por lo tanto, la ecuación (5.16) tiene una única solución para f arbitraria, o para algún valor $\lambda = \lambda_i$, la ecuación homogénea asociada a (5.16) tiene una solución no trivial u_i, si λ_i es un valor propio del operador $\mathcal{L}$; la solución de la ecuación (5.16) para $\lambda = \lambda_i$, existe si y solo si

$$\int_0^1 \rho u_i f(x)\,dx = 0,$$

se cumple para cada función propia asociada con λ_i.

Además, existe una sucesión de valores propios $\{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, \ldots,$ con funciones propias asociadas u_i, las cuales forman un conjunto infinito de funciones ortogonales tales que

$$\int_0^1 \rho u_i u_k\,dx = 0, \quad \text{si } i \neq k, \quad \int_0^1 \rho u_i^2\,dx = 1.$$

Si con la función de Green apropiada como núcleo, podemos representar una función g como una función continua a trozos en la forma

$$g(x) = \int_0^1 G(x,t)\phi(t)\,dt,$$

entonces g puede ser expresada en términos de las funciones propias como la serie

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x),$$

en donde

$$c_n = \int_0^1 g(x)\rho(x)u_n(x)dx,$$

esta serie es uniformemente convergente.

5.3. Transformación integral inducida por una función de Green

En esta sección estudiamos las propiedades de la función de Green asociada a un operador diferencial $\mathcal{L}$ utilizando las propiedades que ya hemos visto acerca de las transformaciones integrales. Sea pues $\mathcal{L}$ un operador diferencial actuando sobre un cierto subespacio de funciones de $L^2[0,1]$. Supongamos que podemos encontrar la función de Green, $G(x,t)$, del operador $\mathcal{L}$. Para $f \in L^2[0,1]$ definimos

$$\mathcal{G}f = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt.$$

Claramente esto define una transformación integral en $L^2[0,1]$, cuyo núcleo es precisamente la función de Green del operador dado. Note que la solución de la ecuación $\mathcal{L}u = f$ es $u = \mathcal{G}f$, por lo tanto $\mathcal{G}^{-1} = \mathcal{L}$. Es natural pensar en estudiar las propiedades de esta transformación integral pues ya hemos visto que el inverso de un operador diferencial es precisamente un operador integral, así que podemos aplicar los resultados que hemos visto aquí sobre los operadores integrales.
Supongamos que $\mathcal{L}$ es autoadjunto. Entonces por el Teorema 5.3, la función de Green $G(x,t)$ es simétrica respecto a sus argumentos, por lo tanto, por el Teorema 1.3, la transformación $\mathcal{G}$ es simétrica. El Teorema 1.4, nos permite asegurar que las funciones propias de la transformación $\mathcal{G}$, correspondientes a valores propios distintos, son ortogonales. Además, por el Teorema 1.6, sabemos que el número de valores propios distintos es contable y que para cada valor propio, existe a lo más un número finito de vectores propios linealmente independientes.
Estos resultados son de gran utilidad a la hora de expresar la función de Green en términos de las funciones propias de la transformación $\mathcal{G}$.
Consideremos el problema de encontrar los valores y vectores propios de la transformación $\mathcal{G}$, esto implica que debemos encontrar funciones $f \in L^2[0,1]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathcal{G}f = \lambda f.$$

Aplicando el operador $\mathcal{L}$ en ambos miembros de esta igualdad encontramos que

$$\mathcal{L}\mathcal{G}f = \mathcal{L}(\lambda f) = \lambda \mathcal{L}f,$$

teniendo en cuenta que $\mathcal{G} = \mathcal{L}^{-1}$, la ecuación puede escribirse como sigue

$$f = \lambda \mathcal{L} f,$$

luego si $\lambda \neq 0$ tenemos

$$\mathcal{L} f = \frac{1}{\lambda} f.$$

Por lo tanto, el problema de encontrar los valores propios de la transformación integral $\mathcal{G}$ es equivalente, de cierta forma, a encontrar los valores propios del operador diferencial $\mathcal{L}$. De estas ecuaciones se deduce que si λ_i es un valor propio no nulo del operador $\mathcal{L}$ entonces $1/\lambda_i$ es un valor propio para la transformación integral inducida por la función de Green del operador $\mathcal{L}$. Por lo tanto, si f_i es una función propia del operador $\mathcal{L}$ asociada al valor propio λ_i, entonces f_i es una función propia para la transformación $\mathcal{G}$ correspondiente al valor propio $1/\lambda_i$.

Ejemplo 5.3. *Encontrar los valores y vectores propios de la transformación integral definida por la función de Green del operador* $\mathcal{L} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ *sobre el espacio de funciones de las funciones de* $L^2[0,1]$ *tales que* $u(0) = u(1) = 0$.

Solución. Haciendo algunas modificaciones en el Ejemplo 5.1 podemos ver que la función de Green viene dada por

$$G(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & \text{si } 0 \leq x \leq t, \\ t(1-x) & \text{si } t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Encontrar los valores propios de este operador es equivalente a resolver el problema.

$$-u'' = \frac{1}{\lambda} u \quad \text{con } \lambda \neq 0, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

No consideramos los valores $\lambda < 0$. Sabemos que la solución a esta ecuación diferencial es

$$u(x) = c_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x\right),$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Haciendo $x = 0$, tenemos $c_1 = 0$. Para $x = 1$, $c_2 \operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) = 0$. Si $c_2 = 0$, $u = 0$ y cualquier $\lambda \neq 0$ sería un valor propio. Supongamos pues que $c_2 \neq 0$ entonces $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Por lo que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda_n = 1/n^2\pi^2$ es un valor propio, asociado a la función propia $u_n(x) = \sin(n\pi x)$. $\square$

Al considerar la función de Green como núcleo de la transformación integral inducida por esta, es natural pensar en expresar el núcleo de esta transformación en términos de los vectores propios de dicha transformación integral.
Supongamos que la transformación integral $\mathcal{G}$, inducida por la función de Green de un operador diferencial $\mathcal{L}$, tiene valores propios s_i con correspondientes vectores propios f_i. Entonces, $s_i = 1/\lambda_i$ donde λ_i es un valor propio no nulo del operador integral $\mathcal{L}$. Entonces por el Teorema 1.12, si $f \in L^2[0,1]$ tenemos

$$\mathcal{G}f = \sum_i s_i(f, f_i)f_i = \sum_i \frac{1}{\lambda_i}(f, f_i)f_i, \tag{5.22}$$

y la serie converge uniformemente para cada x en $[0,1]$. Si es posible encontrar los valores propios del operador $\mathcal{L}$, entonces la representación de $\mathcal{G}f$ en (5.22) es válida. Sin embargo, existen otros resultados que nos dan una representación de la función de Green, si la consideramos nuevamente como el núcleo de una transformación integral.

Teorema 5.6. *Si la transformación integral inducida por una función de Green asociada a un operador $\mathcal{L}$ es positiva definida, entonces*

$$G(x,t) = \sum_n \frac{f_n(x)f_n(t)}{\lambda_n},$$

y la serie converge uniformemente en $x, t \in [0,1]$.

Demostración. Puesto que la transformación integral inducida por la función de Green del operador $\mathcal{L}$ es positivo semidefinida, por el Teorema 1.17 podemos concluir el resultado. □

Observe que si las hipótesis de este teorema se cumplen también podemos afirmar que (5.22) es valida para cada $x, t \in [0,1]$.

Ejemplo 5.4. *Consideremos la función de Green del Ejemplo 5.3. Los valores propios de la transformación inducida por esta función son positivos. Por lo tanto $G(x,t)$ es positivo semidefinido, y por el Teorema 5.6 tenemos*

$$G(x,t) = \sum_n \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(n\pi x)}{n^2\pi^2},$$

en donde la suma varia sobre $\mathbb{Z}$; por lo que podemos escribir

$$G(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(n\pi t)}{n^2\pi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(n\pi t)}{n^2\pi^2},$$

y la convergencia es uniforme para cada $x, t \in [0,1]$.

Por medio de la función de Green expresada como una serie, podemos también expresar la solución de un problema de valor en la frontera no homogéneo sujeto a las condiciones de frontera que satisface la función de Green. En efecto, dado un operador diferencial $\mathcal{L}$, consideremos la ecuación $\mathcal{L}u = f$ con ciertas condiciones de frontera homogéneas. Entonces sabemos que la solución a esta ecuación es $u = \mathcal{G}f$, donde el operador $\mathcal{G}$ designa la transformación inducida por la función de Green asociada al operador. En tal sentido tenemos el siguiente resultado

Teorema 5.7. *En las hipótesis del Teorema 5.6, la solución del problema $\mathcal{L}u = f$ sujeto a ciertas condiciones de frontera homogéneas es*

$$u(x) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n}(f, f_n)f_n(x),$$

y la serie converge uniformemente para cada $x \in [0,1]$.

Demostración. Por el Teorema 5.5, tenemos que

$$G(x,t) = \sum_n \frac{f_n(x)f_n(t)}{\lambda_n}.$$

Multiplicando en ambos miembros de la ecuación anterior por $f(t)$ en integrando entre 0 y 1, obtenemos

$$\int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} f_n(x) \int_0^1 f_n(t)f(t)\,dt.$$

La integración término a término se garantiza por la convergencia uniforme de la serie para cada $t \in [0,1]$. Es claro que la serie que resulta después de integración es uniformemente convergente para $x \in [0,1]$. Puesto que $u = \mathcal{G}f$, entonces

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} f_n(x) \int_0^1 f_n(t)f(t)\,dt = \sum_n \frac{1}{\lambda_n}(f, f_n)f_n(x). \quad \square$$

Ejemplo 5.5. *La solución de la ecuación diferencial*

$$-u'' = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

es, por el Teorema 5.6,

$$u(x) = \sum_n \frac{1}{n^2\pi^2} a_n \operatorname{sen}(n\pi x),\ x \in [0,1],$$

en donde $a_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\operatorname{sen}(n\pi t)dt$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Puesto que $a_{-n} = -a_n, n \in \mathbb{Z}$, podemos escribir

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2} a_n \operatorname{sen}(n\pi x),$$

para todo $x \in [0,1]$.

Comentarios finales

Hasta aquí no hemos dicho que dado un problema de valor en la frontera siempre podemos encontrar la función de Green asociada a la ecuación diferencial que involucra el problema. Realmente, existen problemas de valor en la frontera para los cuales no podemos encontrar la función de Green utilizando las técnicas que hemos estudiado hasta ahora. En esta sección comentaremos brevemente un ejemplo que ilustra una técnica para resolver este tipo de problemas. Tal técnica involucra una función, que se conoce como la **función de Green generalizada** y como su nombre lo indica es una generalización de las funciones de Green que conocemos hasta ahora.
Consideremos el problema

$$u'' + \pi^2 u = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0, \tag{5.23}$$

donde $f(x)$ es una función dada en $L^2[0,1]$. Suponemos que la función de Green asociada a la ecuación diferencial dada, existe. Entonces usaremos la técnica del Ejemplo 5.2 para construirla. La función de Green, $G(x,t)$, debe satisfacer

$$G_{tt} + \pi^2 G = \delta(x-t), \quad G(x,0) = G(x,1) = 0. \tag{5.24}$$

Suponemos que la función de Green tiene la forma

$$G(x,t) = \begin{cases} A\cos\pi t + B\,\mathrm{sen}\,\pi t & 0 \le t < x, \\ C\cos\pi t + D\,\mathrm{sen}\,\pi t & x < t \le 1. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera dadas, hacemos $t = 0$ y encontramos que $A = 0$, y para $t = 1$ tenemos que $C = 0$, y como la función de Green es continua en $t = x$, debemos tener $B = D$. Ahora bien, integrando la ecuación (5.24) en el intervalo $[x-h, x+h]$, con $h > 0$, encontramos que

$$\int_{x-h}^{x+h} (G_{tt} + \pi^2 G)\,dt = \int_{x-h}^{x+h} \delta(x-t)\,dt. \tag{5.25}$$

Haciendo que $h \to 0$ en (5.25) y por la condición de salto de discontinuidad de la derivada, respecto a t, tenemos

$$G_t\Big|_{x^-}^{x^+} = 1,$$

de donde

$$\pi D \cos \pi x - \pi B \cos \pi x = 1. \tag{5.26}$$

Como $B = D$, se sigue que la ecuación (5.26) es imposible de resolver, lo que prueba que la función de Green como la construimos usualmente no existe.
Para evitar este problema, consideremos primero el problema homogéneo asociado:

$$u_{tt} + \pi^2 u = 0, \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{5.27}$$

Este problema admite soluciones no triviales las cuales son múltiplos arbitrarios de $\operatorname{sen} \pi t$. Sea $v(t) = \operatorname{sen} \pi t$. Entonces multiplicando ambos miembros de la ecuación (5.24) e integrando de 0 hasta 1, encontramos que

$$\int_0^1 v(G_{tt} + \pi^2 G)\, dt = \int_0^1 v\delta(x-t)\, dt,$$
$$(vG_t - v_t G)\Big|_0^1 + \int_0^1 G(u_{tt} + \pi^2 u)\, dt = v(x).$$

De esto concluimos que $v(x) = 0$, lo cual es absurdo. Este hecho se debe a que la función $v(t)$ no es ortonormal a la función $\delta(x-t)$. Más aún, el Teorema 5.5 garantiza que el problema (5.23) no tendrá solución, si $f(x)$ no es ortogonal a $v(t) = \operatorname{sen} \pi t$. Por consiguiente, aclaramos que en este problema, la función $f(x)$ debe ser ortogonal a la solución del problema (5.27). Por lo tanto, debemos suponer que la función de Green asociada al problema (5.23) satisface la ecuación

$$G_{tt} + \pi^2 G = g(x,t), \quad G(x,0) = G(x,1) = 0,$$

en donde la función $g(x,t)$ se escoge de modo que sea ortogonal a la solución de la ecuación (5.27). Si esto es así, la solución del problema (5.23) esta dada por

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t)\, dt.$$

Por lo tanto, de la ecuación anterior deducimos que

$$u(x) = \int_0^1 g(x,t) u(t)\, dt.$$

Es claro que la función $g(x,t)$ no puede ser $\delta(x-t)$, pues esta función no es ortogonal a la solución de la ecuación (5.27). No obstante, sí podemos suponer que la función $g(x,t)$ tiene la forma

$$g(x,t) = \delta(x-t) + F(x,t),$$
$$G_{tt} + \pi^2 G = \delta(x-t) + F(x,t), \quad G(x,0) = G(x,1) = 0, \tag{5.28}$$

en donde la función $F(x,t)$ se escoge de tal manera que $v(t) = \operatorname{sen} \pi t$ sea ortogonal a $\delta(x-t) + F(x,t)$. Puede demostrarse que $F(x,t)$ tiene la forma $\alpha v(t)v(x)$ donde α es una constante que garantizará la ortogonalidad deseada. En efecto, si $F(x,t)$ tiene dicha forma, entonces

$$\int_0^1 v(t)[\delta(x-t) + \alpha v(x)v(t)]\, dt = v(x)\left[1 + \alpha \int_0^1 v^2(t)\, dt\right] = 0,$$

si

$$\alpha = -\frac{1}{\displaystyle\int_0^1 v^2(t)\, dt}.$$

En nuestro caso, como $v(t) = \operatorname{sen} \pi t$ tenemos que $\alpha = -2$. Volviendo a nuestro problema de encontrar la función de Green para este problema, podemos ver que la solución de (5.28) es de la forma

$$G(x,t) = \frac{(\operatorname{sen} \pi x)(t \cos \pi t)}{\pi} + \begin{cases} A \cos \pi t + B \operatorname{sen} \pi t & 0 \leq t < x, \\ C \cos \pi t + D \operatorname{sen} \pi t & x < t \leq 1, \end{cases}$$

en donde el primer término del lado derecho de esta igualdad es la solución particular de la ecuación diferencial

$$u_{tt} + \pi^2 u = -2 \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \pi t.$$

Las condiciones de frontera nos dan

$$G(x,0) = 0 = A, \quad G(x,1) = 0 = -\frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi x - C.$$

Integrando la ecuación (5.28) en el intervalo $[x-h, x+h]$, $h > 0$, junto con la continuidad de la función de Green en $t = x$ y la condición de salto de discontinuidad de la derivada en $t = x$, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$A \cos \pi x + B \operatorname{sen} \pi x = C \cos \pi x + D \operatorname{sen} \pi x,$$
$$-\pi C \operatorname{sen} \pi x + \pi D \cos \pi x - \pi A \operatorname{sen} \pi x - \pi B \cos \pi x = 1.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones encontramos que

$$A = 0,$$
$$B = -\frac{1}{\pi} \cos \pi x + D,$$
$$C = -\frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi x,$$
$$D = \text{función arbitraria de } x.$$

Por lo tanto la función de Green generalizada viene dada por

$$G(x,t) = 2D(x)\operatorname{sen}\pi t + \frac{(\operatorname{sen}\pi x)(t\cos\pi t)}{\pi} - \begin{cases} \frac{1}{\pi}\cos\pi x\operatorname{sen}\pi t & 0 \le t \le x, \\ \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi x\cos\pi t & x \le t \le 1. \end{cases}$$

Con $G(x,t)$ determinada, podemos encontrar la solución del problema considerado inicialmente. Sea $\mathcal{L}u = u_{tt} + \pi^2 u$. Entonces la solución del problema $\mathcal{L}u = f(x)$ sujeto a las condiciones de frontera $u(0) = u(1) = 0$ es

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt. \tag{5.29}$$

Note que como $\mathcal{L}u = u_{tt} + \pi^2 u$, en la ecuación (5.29) podemos escribir

$$\int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt = \int_0^1 G(x,t)\mathcal{L}u\,dt.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(x,t)\mathcal{L}u\,dt &= (Gu' - G'u)\Big|_0^1 + \int_0^1 u(t)\mathcal{L}G\,dt \qquad (5.30) \\ &= \int_0^1 u(t)(G_{tt} + \pi^2 G)\,dt \\ &= \int_0^1 u(t)[\delta(x-t) - 2\operatorname{sen}\pi x\operatorname{sen}\pi t]\,dt \\ &= u(x) - 2\operatorname{sen}\pi x\int_0^1 u(t)\operatorname{sen}\pi t\,dt. \end{aligned}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (5.30) es cero por las condiciones de frontera. Por lo tanto,

$$u(x) = M\operatorname{sen}\pi x + \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt,$$

en donde M es una constante. Observe que la solución $u(x)$ no depende de la función $D(x)$ puesto que

$$\int_0^1 D(x)f(t)\operatorname{sen}\pi t\,dt = D(x)\int_0^1 f(t)\operatorname{sen}\pi t\,dt = 0$$

El problema (5.23) puede ser considerado de una manera más general

$$\mathcal{L}u = f(x), \quad u(0) = a,\ u(1) = b.$$

en donde $\mathcal{L}$ es un operador diferencial de segundo orden definido en el subespacio de las funciones de $L^2[0,1]$ que satisfacen las condiciones de frontera del problema y suponemos que la función de Green en el sentido usual no existe. No obstante no entraremos en detalles para este caso.

Conclusiones

En esta monografía, se expuso de forma detallada la solución del problema de valor en la frontera considerado en la ecuación (1) en el intervalo $[0, 1]$, pues este problema es equivalente al problema considerado en el intervalo $[a, b]$ aplicando un cambio de variable conveniente.
El estudio de la solución de este problema mediante funciones de Green es interesante debido a que involucra matemáticas avanzadas, razón por la cual esta técnica no se estudia en pregrado, al menos en un curso básico de ecuaciones diferenciales ordinarias. Fue interesante haber realizado un estudio detallado de los resultados del Análisis Funcional necesarios para desarrollar la técnica de solución para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales mediante las funciones de Green.
En un futuro espero que los estudiantes de pregrado de carreras a fines al consultar esta monografía, vean la claridad con que se exponen los resultados expuestos y así haya un interés en ellos por estudiar seriamente estos temas.

Bibliografía

[1] Kendall E. Atkinson. *An introduction to numerical analysis.* John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1989.

[2] Robert G. Bartle. *Introducción al análisis matemático.* Editorial Limusa, México, 1982. Translated from the English by Ma. Cristina Gutiérrez González.

[3] Michael D. Greenberg. *Applications of Green's functions in science and engineering.* Prentice-Hall, New Jersey, 1971.

[4] Richard Haberman. *Elementary applied partial differential equations.* Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, second edition, 1987. With Fourier series and boundary value problems.

[5] G. F. Roach. *Green's functions.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1982.

[6] Ivar Stakgold. *Green's functions and boundary value problems.* John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1979. A Wiley-Interscience Publication, Pure and Applied Mathematics.

[7] Ivar Stakgold. *Green's functions and boundary value problems.* Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1998. A Wiley-Interscience Publication.