Construcción del concepto de área de estudiantes de básica secundaria: una experiencia a partir de la aplicación de acciones sobre objetos concretos apoyada en el uso del software GeoGebra

Gisselle Paola Bayona Prieto

Trabajo para optar el título de Magíster en Informática para la Educación

Directora

Solange Roa Fuentes

Doctora en Didáctica de las Matemáticas

Codirector

Jorge Winston Barbosa Chacón

Magíster en Informática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Fisicomecánicas

Escuela de Ingeniería de Sistemas

Maestría en Informática para la Educación

Bucaramanga

2020

Agradecimientos

Infinitas gracias a Dios por regalarme la vida y haberme iluminado con su Espíritu Santo para llevar a cabo un logro más en mi existencia.

A mis evaluadores Dra. Olga Lucía Duarte Molina y Dr. Giovanny López Molina por el tiempo dedicado a la lectura de este trabajo, por su aportes, sugerencias y recomendaciones para mejorarlo

Estoy especialmente agradecida con la profesora Solange Roa Fuentes por su paciencia, sabiduría y apoyo.

Agradezco al profesor Jorge Winston Barbosa Chacón por todos sus valiosos comentarios y aportes.

Le agradezco con todo mi corazón a mi esposo Ramón Sanmiguel, aunque no alcanzan las palabras para describirlo, sin su ayuda y motivación no lo habría logrado.

Y con la misma alegría reconozco que quedo en deuda con mi madre Jahel Prieto Sarmiento por su incansable apoyo.

Contenido

Pág.

Lista de figuras

Pág.

Lista de tablas

Pág.

Lista de apéndices

Pág.

Resumen

Título: Construcción del concepto de área de estudiantes de básica secundaria: Una experiencia a partir de la aplicación de acciones sobre objetos concretos apoyada en el uso del Software GeoGebra.*

Autor: Gisselle Paola Bayona Prieto**

Palabras Claves: Área, Teoría APOE, GeoGebra.

Descripción
El presente trabajo da a conocer una propuesta de construcción del concepto de área para estudiantes de grado sexto de básica secundaria con la implementación de una secuencia de actividades acompañadas del software GeoGebra. El estudio tiene como propósito describir la ruta de construcción que posibilite formalizar el método cómo el educando emplea *acciones* concretas para lograr concebir dicha noción como un *objeto* abstracto. A partir de estos elementos se analizan las estructuras y los mecanismos que hacen parte de la *descomposición genética*, principal herramienta para poder detallar la construcción de la noción de área de figuras planas.

La indagación está orientada por la teoría APOE (*Acción, Proceso, Objeto y Esquema*), la cual fue creada por Dubinsky y sus colaboradores (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996) como proceso investigativo para el análisis cognitivo de los conocimientos matemáticos.

El software GeoGebra determinó el cambio de pensamiento en los estudiantes participantes en la investigación, esta herramienta tecnológica permite una participación activa del individuo en la construcción de su propio conocimiento, existe una interacción máquina-sujeto que motiva e interesa al estudiante por el aprendizaje matemático.

---

* Trabajo de grado

** Escuela de Ingeniería de Sistemas, Escuela de Educación, IPRED, directora: Solange Roa Fuentes Doctora en Didáctica de la Matemática, codirector: Jorge Winston Barbosa Chacón Magister en Informática

Summary

Title: Construction of the concept of the area of students of basic secondary education: An experience from the application of actions on concrete objects supported by the use of the Software GeoGebra.[*]

Author: Gisselle Paola Bayona Prieto[**]

Keywords: Area, APOE theory, GeoGebra.

Description
This paper presents a proposal for the construction of an area concept for sixth grade students of basic secondary education with the implementation of a sequence of activities accompanied by the GeoGebra software. The purpose of the study is to describe the construction route that will make it possible to formalize the method of how the student employs concrete actions to manage to conceive this notion as an abstract object. From these elements, the structures and mechanisms that are part of genetic decomposition are analyzed, the main tool to be able to detail the construction of the notion of area of flat figures.

The investigation is guided by the APOE theory (Action, Process, Object and Scheme), which was created by Dubinsky and his collaborators (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews and Thomas, 1996) as a research process for the cognitive analysis of mathematical knowledge.

The GeoGebra software determined the change of thought in the students participating in the research. This technological tool allows an active participation of the individual in the construction of his or her own knowledge; there is a machine-subject interaction that motivates and interests the student in mathematical learning.

[*] Degree work
[**] School of Systems Engineering, School of Education, IPRED, Director: Solange Roa Fuentes PhD in Didactics of Mathematics, Co-Director: Jorge Winston Barbosa Chacón Master's Degree in Computer Science

Introducción

El desarrollo del pensamiento espacial contiene elementos que potencian la construcción de pensamiento matemático. En este documento se presenta una propuesta que pretende llevar al estudiante a la construcción del concepto de área de figuras planas, desde la perspectiva de la teoría APOE. Dicha propuesta está organizada en sesiones de acompañamiento pedagógico mediado por el software GeoGebra.

El documento está organizado en cinco capítulos, el primer capítulo trata de las definiciones asociadas al tema de estudio teniendo, en cuenta que son temas relacionados con el nivel de básica secundaria en Colombia. En el segundo capítulo se explica la teoría APOE, elemento teórico y pedagógico que conduce la investigación; considerando que desde esta perspectiva es posible unir la práctica pedagógica al conocimiento y lograr impactar positivamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje. El tercer capítulo contiene el análisis del problema de estudio, los estudiantes han asumido el concepto de área como un algoritmo de base por altura sin tener en cuenta qué significado tiene; por tanto, se planteó como objetivo describir las estructuras (*acciones, procesos y objetos*) y mecanismos (interiorización, coordinación, encapsulación) mentales que desarrollan estudiantes de sexto grado a partir de la aplicación de acciones sobre objetos concretos para construir el concepto de área de figuras planas. El cuarto capítulo presenta todas las actividades acompañadas de cuestionarios para que el estudiante realice recubrimiento, aproximación, medición y comparación de superficies planas, cuestionando el propósito de esas acciones. El quinto capítulo registra la construcción de la noción de área, mostrando las ventajas que fue haber usado el software GeoGebra, es una herramienta que es amigable, dinámica y no está ligada el espacio o al tiempo.

1. El aprendizaje de la geometría en el contexto de la tecnología

La geometría es concebida como una de los bases de la formación de las personas, dado su aporte a la aplicabilidad contextual y al razonamiento lógico, así como al desarrollo de habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar y razonar deductivamente (Araya & Alfaro, 2010); aportes que han sido un motivo para la búsqueda de alternativas de mejoramiento en los procesos formativos en que la geometría es objeto de estudio. Como una muestra de ello, históricamente se ha sumado el compromiso por desarrollar recursos tecnológicos que amplíen las condiciones para aprender sobre geometría. Es aquí en donde, evolutivamente, se ha abierto paso los desarrollos de los denominados Software Educativos (SE), representando aquellos programas computacionales cuyas características (estructurales y funcionales) responden a intencionalidades formativas, además de ser elementos por favorecer el desarrollo de ciertas habilidades cognitivas (Vidal, Gómez, & Ruiz, 2010).

La naturaleza del SE para geometría ha evolucionado aportando continuamente ventajas y facilidades a los procesos educativos de esta disciplina. Han sido ejemplo de ello los tutoriales, los simuladores, la hipermedia, la multimedia y la colaboración, como atributos que han ido añadiendo a las diferentes generaciones de SE, aunque tal vez el más revolucionario ha sido la incorporación de la web a este tipo de aplicaciones (García-Peñalvo, 2002). Esto deja ver la marcada incidencia de la evolución de las tecnologías de la información y la comunicación al desarrollo de los SE para diferentes disciplinas, en donde las matemáticas y, particularmente, para geometría no han sido la excepción. Aquí vale indicar que, los beneficios obtenidos sobre el uso de la tecnología en los procesos formativos de geometría han sido importantes, siendo uno de ellos el manejo dinámico de objetos en diferentes registros de representación en escenarios interactivos; condición difícil de lograr con medios convencionales (no fácilmente manipulables). Así, el conocimiento obtenido a través de la exploración asume características no tradicionales en la práctica pedagógica (Magaña & Rangel, 2015)

Las anteriores ventajas surgidas desde el contexto de la tecnología deben ser igualmente consideradas en el contexto de los agentes educativos participantes y del currículo mismo. Esto implica que la implementación de un SE para geometría supone, también, repensar los roles, los procesos y las maneras de accionar que puedan estar muy cimentadas en las prácticas cotidianas, incluso de manera dominante.

En esta perspectiva los siguientes han sido algunos de los softwares para apoyar la geometría y en general el desarrollo del pensamiento matemático: Cabrí, GeoGebra, Scribus, Inkscape entre otros. De los cuales el apropiado para el caso de la presente investigación es GeoGebra y es escogido para los fines esperados en el proceso de aprendizaje planteado.

1.1 GeoGebra como apoyo en la construcción del Pensamiento Espacial.

El software de geometría dinámica GeoGebra fue creado en el año 2002 por Markus Hohenwarter como trabajo de grado de maestría en la Universidad de Salzburgo (Austria) con el propósito de integrar la geometría y el álgebra con la ventaja que fuera de uso libre; el enfoque pedagógico de este programa educativo es constructivista propuesto para ayudar al estudiante a fortalecer las habilidades visuales, cognitivas y metacognitivas.

El Software GeoGebra es una interface amigable, gratuita, dinámica, que facilita: su manejo, su visualización y la relación entre las matemáticas y las TIC con la finalidad de propiciar un cambio en la metodología de trabajo con los estudiantes y, por consiguiente, en los procesos de enseñanza y aprendizaje, propiciando en los estudiantes la inquietud de explorar e indagar sobre aspectos teóricos de las matemáticas (González, 2017).

La característica más destacable de GeoGebra es su doble percepción de los objetos: una en la vista gráfica (*geo*metría), otra en la vista algebraica (ál*gebra*); a todos los objetos que se ingresen en la ventana gráfica le corresponde una expresión en la ventana algebraica y viceversa (Torres & Racedo, 2014).

Un ejemplo de su presentación se da a la Figura 1, allí se ubica un punto A ingresado en la vista gráfica y el software genera las coordenadas de su ubicación en el plano cartesiano en la vista algebraica, en el mismo pantallazo se ingresa en la entrada la función sen(x), que aparece en la vista gráfica (Figura 1).

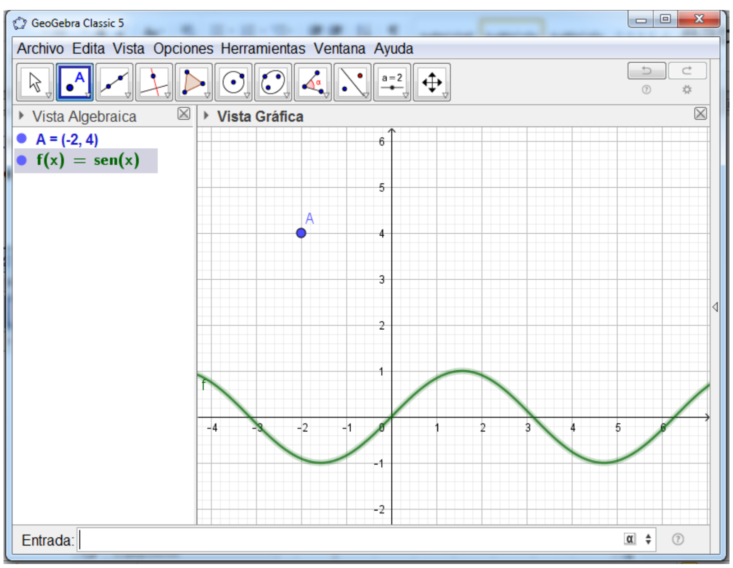


Figura 1. Vista algebraica y gráfica de GeoGebra Classic 5.0. Adaptada de GeoGebra 5.0.

La implementación del GeoGebra en el aula es de gran ayuda, como lo afirma Torres y Racedo (2014), en las últimas décadas se ha incrementado el número de docentes e investigadores que han estudiado la utilidad y las distintas aplicaciones de las TIC en diversas áreas, en particular y con un gran énfasis en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares.

En la Figura 2, se ilustra la presentación de la pantalla GeoGebra y se despliega el ícono de recta con las diferentes herramientas que se pueden usar.

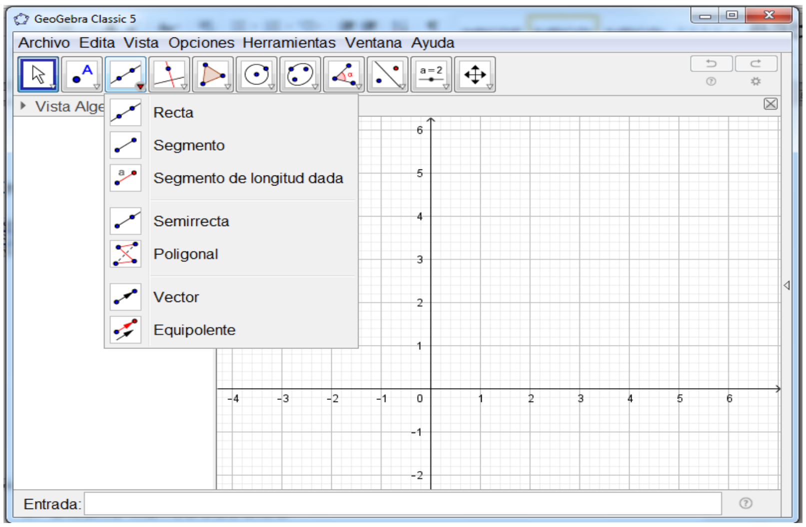


Figura 2. Íconos de la herramienta recta en GeoGebra Classic 5.0. Adaptado de GeoGebra 5.0.

GeoGebra cuenta con ocho herramientas que apoyan la construcción de cualquier representación geométrica bidimensional, los estudiantes pueden hacer uso de ellas para construir polígonos, medir sus ángulos, calcular sus lados, desarrollar conceptos como punto medio, punto de intercepción, etc. con la finalidad de brindar aprendizaje lúdico y duradero al educando (Figura 3).

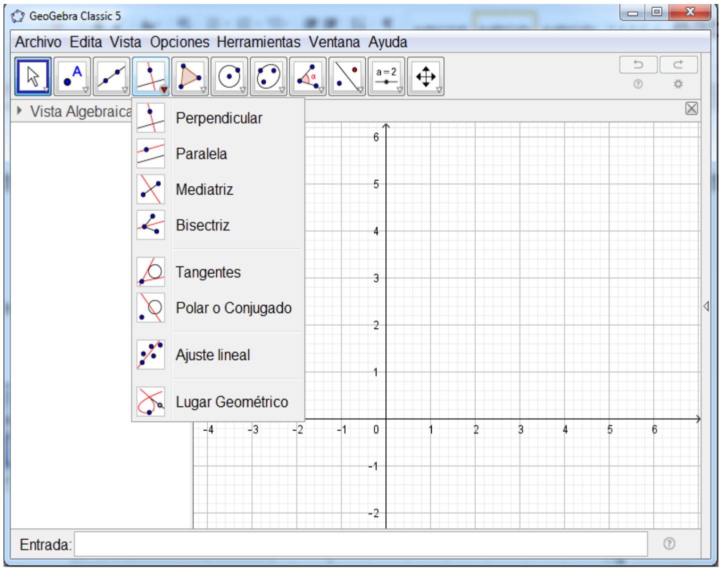


Figura 3. Íconos de la herramienta posiciones relativas de las rectas. Adaptado de GeoGebra 5.0

Licenciados como Llanos, Acuña y Martínez (2016) investigaron sobre el impacto de las TIC como herramienta de enseñanza, en el razonamiento geométrico de los estudiantes de primero medio del Liceo Polivalente Virgilio Arias de Chile, utilizando la metodología de diseño experimental puro e implementando una secuencia didáctica con el software GeoGebra enfocada a la enseñanza de simetrías en el plano; para la clasificación del razonamiento de los estudiantes se apoyaron en los niveles de razonamiento del Modelo Van Hiele; el cual se explica en la Figura 4. Su investigación permite observar que la utilización de la geometría dinámica genera mayor desarrollo en el razonamiento geométrico de los estudiantes en los niveles 2 y 3 del modelo Van Hiele por el hecho que el software GeoGebra brinda ventajas en términos de apoyo en el aula y en la visualización geométrica de los estudiantes.

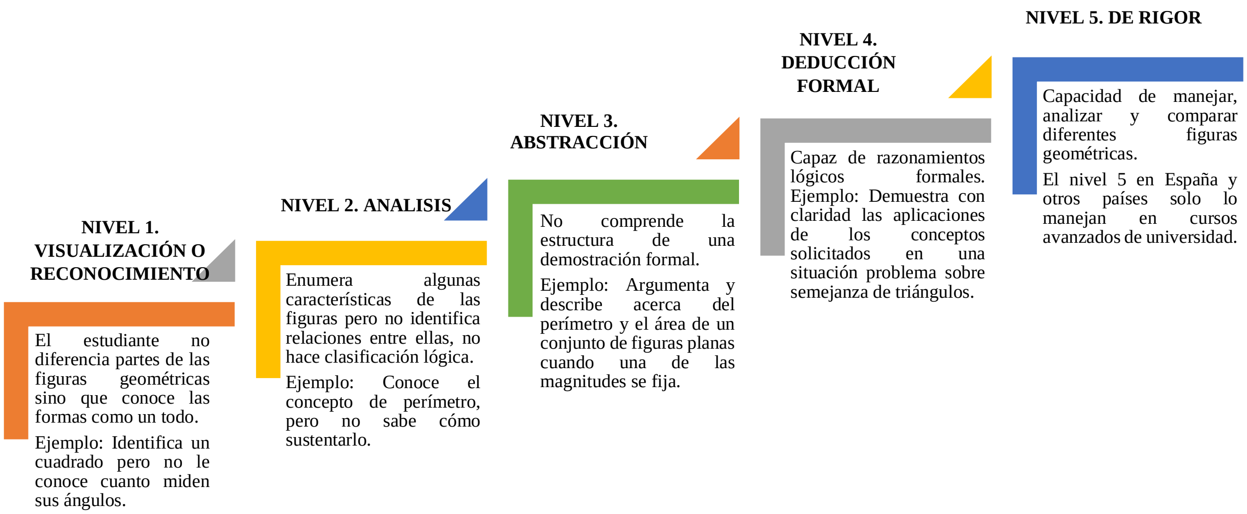
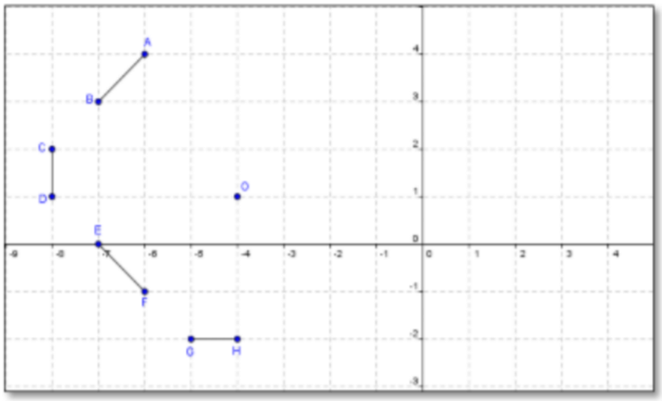


Figura 4. Modelo descriptivo del razonamiento según la Teoría Van Hiele. Adaptado de Figura los niveles de Van Hiele (1957) modificada por el autor.

A continuación, se presenta un ejemplo de una de las actividades realizadas con los estudiantes de primer nivel medio en el país de Chile, que se desarrolló con la herramienta GeoGebra (Figura 5), en ella se fortalece la habilidad de la visualización que es uno de los primeros niveles de razonamiento según Van Hiele; implicando no solo conocimientos de movimientos en el plano sino ubicación de puntos, nombre de los ejes y los cuadrantes, simetría axial y simetría central, entre otros.

8) En GeoGebra realiza los siguientes segmentos y encuentra las coordenadas de los puntos simétricos al reflejarlos respecto a O.



Punto	Coordenada
A'	
B'	
C'	
D'	
E'	
F'	
G'	
H'	

Figura 5. Actividad 3: simetría desarrollada con GeoGebra. Adaptado de Llanos, A. Acuña, G. Martínez, J. (2016). Impacto de las TIC en el razonamiento geométrico de los estudiantes del Liceo Polivalente Virginio Arias de Ñipas. (Tesis de pregrado). Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile. p. 82)

La geometría dinámica ofrecida por los programas interactivos permite desarrollar el criterio de veracidad a partir de la manipulación de los objetos y las propiedades de conservación, que son fácil de comprobar a través del uso de la herramienta. Por ejemplo, Vera-Maquera (2014) en la investigación "*Aplicación de una metodología usando el software GeoGebra para desarrollar la argumentación matemática en el contenido de las propiedades de los triángulos"* implementó la metodología de investigación acción con estudiantes de tercer grado de secundaria de la institución educativa Miguel Cortés de Perú y con ello buscó diagnosticar el nivel de desarrollo de la capacidad de argumentación. Para eso diseñó sesiones de aprendizaje de las propiedades de los triángulos incorporando la herramienta GeoGebra. Dentro de los principales resultados dicha investigación propone que: i) en la aplicación de las sesiones de aprendizaje, el software GeoGebra proporcionó un aprendizaje significativo; ii) Es válida la efectividad del uso de GeoGebra para desarrollar la habilidad de argumentación matemática.

En España, Ezquerro (2014) concuerda con otros académicos sobre el acceso afable al software y sus ventajas de manipulación. La investigación realizada por Ezquerro (2014) consta de tres partes: i) justificación del uso del software GeoGebra en el aula, ii) importancia que le dan los docentes a la geometría analítica y el manejo del software GeoGebra por parte de los mismos; y iii) percepción por parte de los estudiantes respecto al aprendizaje con el software GeoGebra en geometría analítica. La metodología empleada para la investigación se sustenta en el estudio bibliográfico y estudio de campo. La última parte se realiza con una intervención didáctica a los alumnos de 4° de secundaria de España, que se centra en la ecuación de la recta, los puntos de corte, y la distancia entre dos puntos con la herramienta GeoGebra. Ezquerro (2014) concluye que hubo buena aceptación por todos los integrantes de la investigación hacia el software y mejor disposición para el aprendizaje de la geometría analítica. Además, de destacar las cualidades del software para dicho nivel porque se pueden integrar tres campos esenciales del pensamiento matemático, como son la geometría, el álgebra y el cálculo Ezquerro (2014, pág. 27)

El estudio de Rodríguez (2011) es un ejemplo de aplicación de las características de GeoGebra relacionado con las recomendaciones hechas por la *National Council of Teachers Mathematics* (NCTM, 2000) dado que presenta las tecnologías como una ayuda para el docente, las TIC pueden optimizar la práctica educativa y al mismo tiempo fortalecer el conocimiento matemático; los procesos mentales que el estudiante necesita efectuar se aprecian a través de las herramientas tecnológicas como representaciones gráficas y ubicación espacial. Con su contribución muestra la importancia de la representación de los objetos en el plano generando razonamiento lógico e introduciendo a los estudiantes en la demostración formal de las matemáticas. Bajo el método de investigación acción - reflexión se llevó a cabo la indagación, estudiando la construcción del conocimiento bajo los criterios de la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel en estudiantes 7° de la Normal Superior del municipio de Falan, Colombia. Rodríguez (2011) obtuvo uno de los resultados principales como que el uso de software GeoGebra permite en los estudiantes la construcción mental de figuras geométricas logrando establecer propiedades de cuadriláteros y triángulos. También observó que mejora el aprendizaje significativo cuyo diseño está basado en la teoría de Ausubel, donde las actividades con los estudiantes consistían en la construcción del conocimiento, teniendo en cuenta los pre-saberes, realizando dos estrategias: el uso de manipulables físicos y el uso de la herramienta GeoGebra (Figura 6).

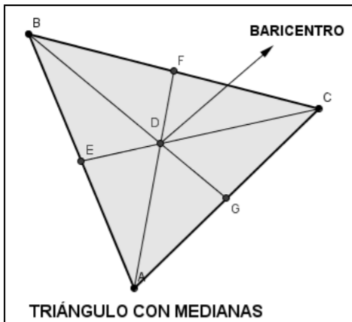


Figura 10

En la figura 2, E es el punto medio del segmento $\overline{AB}$, F el punto medio del segmento $\overline{BC}$ y G es el punto medio del segmento $\overline{AC}$.

12. Construye un triángulo con sus tres medianas, ubica el punto donde ellas se intersectan, llámalo D. Este punto D recibe el nombre de Baricentro. Realiza tu construcción tal como se indica en la figura 2

13. Cambia las posiciones de los vértices del triángulo y observa lo que sucede con el punto D. Según el tipo de triángulo que tengas (teniendo en cuenta la **clasificación según sus ángulos**), ¿dónde se sitúa el punto D?

Contesta la siguiente tabla:

Figura 6. Actividad implementada con GeoGebra: Medianas en un triángulo. Adaptado de Rodríguez, C. (2011). Construcción de Polígonos regulares y cálculo de áreas de superficies planas utilizando el programa GeoGebra: una estrategia metodológica para la construcción de aprendizajes significativos en estudiantes de grado séptimo. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia. p. 82).

Un argumento a favor de las habilidades de visualización, representación y construcción que se deben desarrollar en el pensamiento espacial es la indagación realizada por Sierra y Giraldo (2016), allí abordan la relación del Teorema de Pitágoras con el área de las figuras formadas sobre los catetos y la hipotenusa; durante el proceso se analizaron los errores, dificultades y/o obstáculos que se presentaban y que fueron abordados durante el desarrollo de la investigación. La metodología desarrollada se basa en un enfoque cualitativo bajo la intervención de la investigación acción; esta investigación se desarrolló con 32 estudiantes de grado octavo del colegio distrital Atanasio Girardot de Bogotá (Colombia) durante cuatro sesiones. Sierra y Giraldo (2016) proponen entre sus conclusiones que: El software GeoGebra permite al estudiante visualizar en un aspecto simultáneo infinidad de representaciones del teorema. No se pudo aprovechar al máximo el software porque solo se trabajó la vista algebraica. Se logró avanzar en el conocimiento del Teorema de Pitágoras, mejorando la representación y comunicación en los individuos intervenidos durante la investigación.

El estudio de Urrea-Buitrago (2018) muestra que la herramienta GeoGebra tiene carácter offline y que sirve de puente entre el razonamiento y la comunicación matemática; el docente investigador no solo reafirma la necesidad de utilizar la tecnología para potenciar la pertinencia de la educación de sus educandos, sino que toma decisiones que afectan indiscutiblemente el aprendizaje de los mismos. Es importante mencionar que esta investigación en particular se llevó a cabo en una institución rural con estudiantes de grado sexto, con el objetivo de fortalecer en los estudiantes el proceso de modelación de las características del triángulo analizado bajo la teoría de Van Hiele; la metodología empleada es de carácter cualitativo descriptivo. Las conclusiones obtenidas son que a partir de la aplicación de la unidad didáctica y los laboratorios virtuales y de acuerdo a lo establecido en el modelo de Van Hiele, los estudiantes de grado sexto, avanzaron hasta el nivel 2.

Fue posible y efectivo el trabajo de aula desarrollado, a partir de la ejecución de la unidad didáctica diseñada, teniendo en cuenta aspectos del contexto y la mediación de los laboratorios virtuales construidos en el software GeoGebra, ya que permiten fortalecer el pensamiento geométrico y promover la motivación en los estudiantes.

1.2 La construcción de conceptos matemáticos.

1.2.1 Pensamiento Espacial. El objetivo del presente trabajo es analizar los conceptos de área y perímetro de polígonos que poseen estudiantes de sexto grado de secundaria, por ello se considera oportuno definir el pensamiento matemático y, en específico, el pensamiento espacial. Por consiguiente, en este apartado se discuten algunas definiciones de pensamiento matemático (Cantoral, y otros, 2005); (Mason, Burton, & Stacey, 1982) y las principales características del pensamiento espacial ((Ministerio de Educación Nacional, 2006); (De Miguel González, 2015). Finalmente, estos elementos se enfocan en la problemática relacionada con los conceptos de área y perímetro en educación básica.

El pensamiento matemático está presente de manera informal en todos los contextos de la vida humana; aún en las edades tempranas, por ejemplo, en los juegos en los que los niños realizan múltiples labores de índole matemático: construir patrones, manipular formas espaciales, contar y comparar cantidades, entre otras. En un sentido formal se refieren, según Cantoral et al., (2005), al pensamiento matemático en dos perspectivas: i) Asigna el concepto de pensamiento matemático como la forma de pensar de las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas, y ii) Interpretar el pensamiento matemático como una porción de un ambiente científico en que los conceptos y técnicas matemáticas emergen y prosperan en la resolución de problemas. En suma, los autores mencionados concluyen que el pensamiento matemático es “por una parte, la actividad de pensar sobre tópicos matemáticos y por otro, procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis” (Cantoral, y otros, 2005, pág. 20). Dichos procesos se combinan a través de las etapas de formación integral del ser humano, lo que potencia la construcción de conocimiento matemático cuando los individuos se enfrentan a los desafíos del entorno en que se desarrollan.

Para una mirada más detallada sobre el pensamiento matemático se puede considerar el libro *Thinking Mathematically* de Mason, Burton y Stacey, (1982) quienes resaltan que este pensamiento es un proceso dinámico entre las ideas y la comprensión; a mayor manejo de complejidad de las ideas matemáticas se aumenta la facilidad de la comprensión; proceso que está fuertemente influenciado por las creencias y los sentimientos del aprendiz. Pensar matemáticamente requiere poner a prueba las ideas propias, con la suficiente confianza, de tal manera que, al enfrentarlas con el aspecto emocional de los procesos de pensamiento, se piense de manera efectiva.

En Colombia, el pensamiento matemático, según el Ministerio de Educación Nacional (MEN), está estructurado en cinco tipos de pensamiento: pensamiento numérico y sistemas numéricos; pensamiento espacial y sistemas geométricos; pensamiento métrico y sistemas de medida; pensamiento aleatorio y sistemas de datos; y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. A continuación, aparece una descripción de dichos pensamientos:

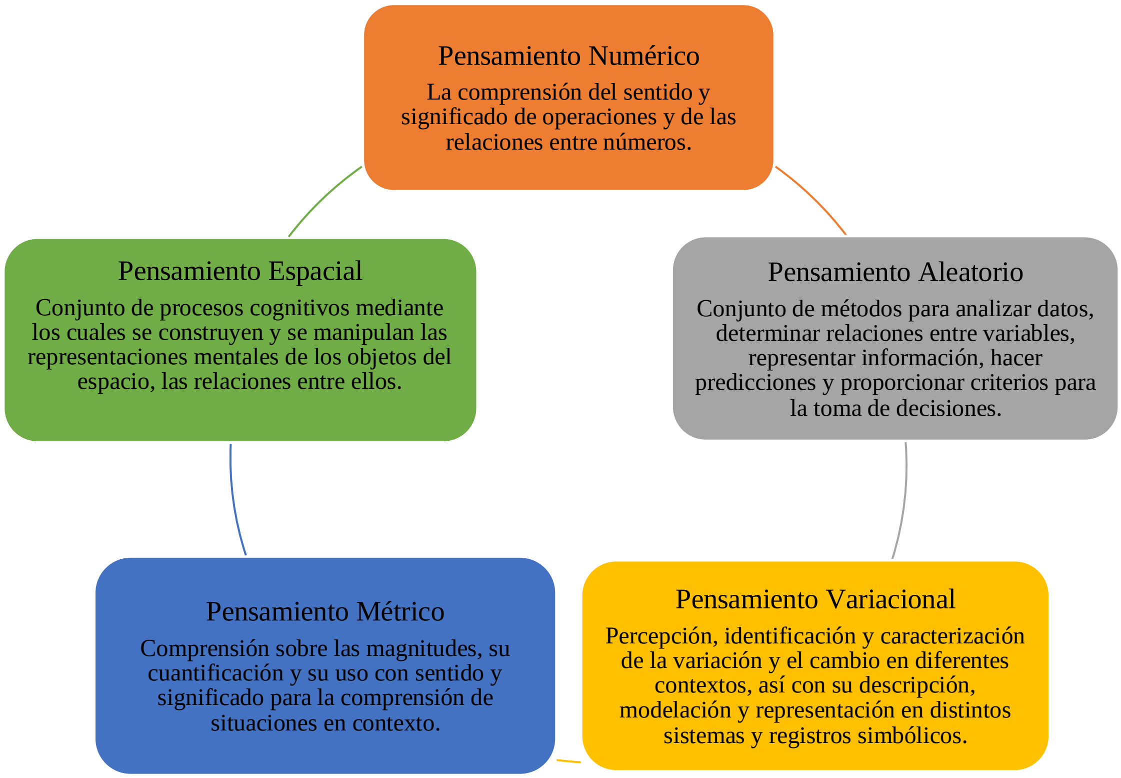


Figura 7. Una visión general de los 5 componentes del pensamiento matemático. Adaptada de Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Serie Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Los cinco tipos de pensamiento matemático están definidos para complementarse entre sí; dado que, de una u otra manera, un tipo de pensamiento necesita de los otros. Cada uno de ellos está compuesto por conocimientos, habilidades y actitudes que se proponen al estudiante para que logre desempeñarse en cualquier contexto.

Variados estudios, entre ellos los de Feria et al., (2006), han sustentado que, para incrementar el pensamiento espacial en los niños es esencial confrontarlos con situaciones problemáticas de ubicación, orientación, medición y distribución del espacio, lo que potencia el desarrollo de habilidades de percepción visual, razonamiento y construcción. De tal manera que las competencias estrechamente ligadas al pensamiento espacial son: visualización, representación y razonamiento. A continuación, se presenta una síntesis de las reflexiones de Bonilla et al. (2002) sobre los procesos asociados al pensamiento espacial (ver Figura 8).

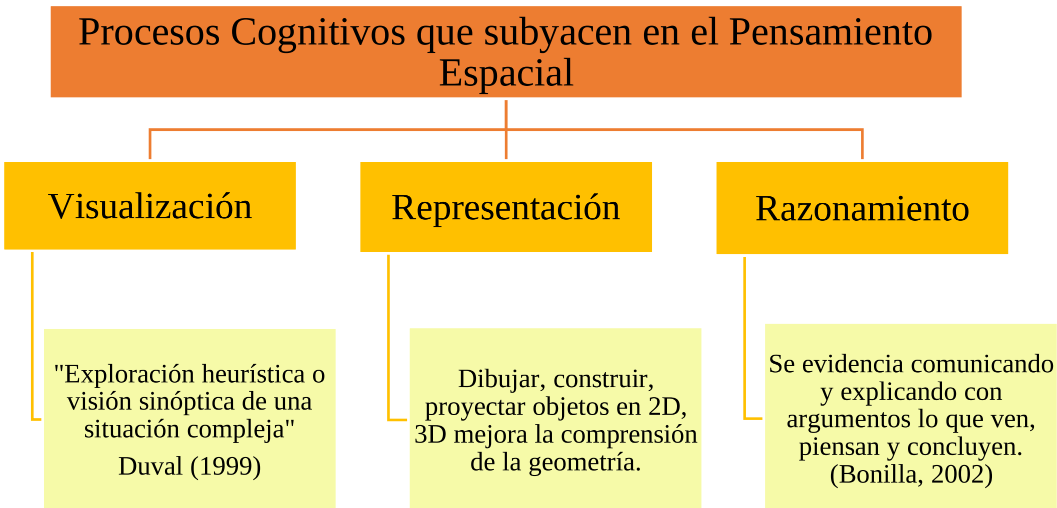


Figura 8. Procesos cognitivos que subyacen en el pensamiento espacial. Adaptado de Bonilla (2002, p. 40).

Considerando los aportes generados a través de la historia, por investigadores interesados en el desarrollo del pensamiento espacial, el MEN en 1998 define dicho pensamiento como:

> El conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales. (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 37)

Este concepto hace vislumbrar los atributos del pensamiento espacial, pero si se trata de describir lo que implica el desarrollo de este pensamiento, es necesario detallar y explicar dichos atributos; por lo que llama la atención el trabajo realizado por De Miguel González (2015) que define este pensamiento como:

> El vehículo para los problemas de estructuración, la búsqueda de respuestas y soluciones que expresan las cuestiones relacionadas con la disposición y la estructura de los objetos sobre el espacio. El pensamiento espacial puede ser aprendido como consecuencia de adquirir los procesos:
>
> - Conocimiento y conceptualización del espacio: cómo se calcula, sistemas coordenados, naturaleza de los espacios (dimensionalidad).
> - Representación del espacio a través de diferentes proyecciones, perspectivas, principios de diseño gráfico, etc. que permiten comunicar información espacial estructurada.
> - Razonamiento del espacio con mecanismos de extrapolación o interpolación, análisis de eventos para la determinación de tendencias y la toma de decisiones. (De Miguel González, 2015, pág. 1322)

Con base en lo expuesto en la presente investigación se asume el pensamiento espacial en aras de la construcción mental de los objetos del espacio dando oportunidad a que los estudiantes fundamenten sus conocimientos en situaciones del contexto, que promuevan el desarrollo de habilidades que sean útiles para resolver una situación. Al respecto, centramos la atención en los conceptos de perímetro y área de figuras planas para el grado sexto de secundaria; con la ventaja que en este nivel escolar se puede transversalizar a otras áreas del conocimiento fortaleciendo la visualización, comunicación, representación, razonamiento y transferencia o aplicabilidad por medio de la utilización del Software GeoGebra.

1.2.2 El Concepto de Área en la Educación Básica. Algunos estudios han escudriñado aspectos epistemológicos asociados a la construcción del concepto de área, se conoce de culturas como los sumerios, egipcios y fenicios que resolvieron problemas concernientes a: i) áreas de polígonos, ii) a la superficie contenida en una circunferencia, y iii) a las relaciones que puedan establecerse con las áreas contenidas tanto para las curvas como para los polígonos; los cuales se conservan registrados en tablillas y/o papiros con los procedimientos usados para dicho cálculo (Londoño & Prada, 15 de Marzo de 2012).

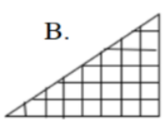
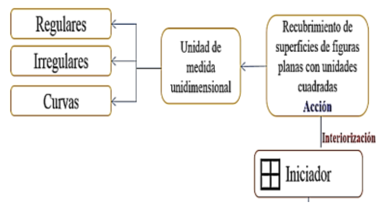
El nombre de área, etimológicamente, se deriva de las raíces latinas del adjetivo árido y de la palabra ardor o arder, es por esta razón que tiene mucha relación con el significado de la palabra en sus comienzos cuando se usaba para referirse a un terreno ausente de sembrado o baldío en el que se esparcía el trigo para ser secado al sol. Posteriormente, se le llamó también así al terreno explanado para edificar los templos católicos y luego por generalización a cualquier terreno desprovisto de sembrado. Actualmente la Real Academia de la Lengua Española define área como "el espacio de tierra comprendido entre ciertos límites" (Real Academia Española, 2014).

En el currículo escolar de un gran número de países está organizado el desarrollo de los conceptos relacionados con áreas de figuras geométricas (NTCM, 2000), resaltando la necesidad de combinar la geometría con los números. Desde la didáctica de la matemática y basándose en la teoría APOE creada por Dubinsky (1996) es interesante la investigación realizada por Londoño y Palacio (2018) titulada: "*Estructuras y Mecanismos Mentales para la construcción de noción de área: un acercamiento con estudiantes de secundaria*". En la cual abordan la problemática que se presenta en las universidades relacionada con el concepto de integral y lo hacen con una estrategia que busca transformar la manera de pensar que conciben los estudiantes de octavo y décimo grado sobre la noción de área de figuras planas; las autoras proponen una interacción entre los pensamientos espacial, variacional y numérico a partir de la descripción de las estructuras y los mecanismos mentales, denominada descomposición genética, que sustentan en la construcción de un "objeto matemático" (concepto matemático). Con base en dicha descripción se diseñan e implementan un conjunto de actividades diseñadas con el fin de promover en los estudiantes la construcción de relaciones entre el concepto de área y los diferentes pensamientos matemáticos. Londoño y Palacios (2018), hacen énfasis en el área de figuras planas expresadas en términos algebraicos relacionándolas con productos notables y factorización, para luego realizar el análisis del concepto de recubrimiento de superficies bajo la curva en cálculo infinitesimal. En dicho trabajo se problematiza sobre la importancia de establecer conexiones entre el pensamiento geométrico con "*acciones"* concretas (recubrimiento), el algebraico con la generalización de "*procesos"* (productos algebraicos) y el variacional con la creación mental en el estudiante del "objeto" matemático: área de una superficie plana.

Para mostrar la metodología de cuestionario sustentado en las estructuras y los mecanismos mentales presentados en la *descomposición genética* a de la teoría APOE usada en la investigación de Londoño y Palacios (2018, pág. 42), p. 42) se presenta a continuación una tabla con un ejemplo de la relación entre la pregunta (1) y la acción concreta de recubrimiento y la *descomposición genética*.

Tabla 1.

Relación de la pregunta uno con las estructuras y los mecanismos.

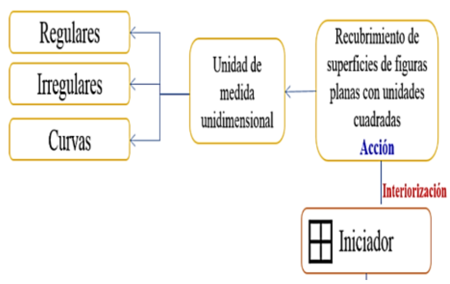
Pregunta	Objetivo	Argumento Hipotético Del Estudiante	Estructura	Mecanismo
P1. **¿Cuántos cuadrados se necesitan para recubrir la superficie de cada figura?** A.  B. 	Emplea métodos alternativos para el reconocimiento de la noción de área como número de unidades cuadradas que recubren la superficie.	**R$_1$.** Empleo de solo cuadrados completos. **R$_2$.** Conteo de cuadrados completos y aproximación. **R$_3$.** Conteo de cuadrados completos y con los incompletos formar unidades cuadradas.	**Acción Iniciadora – Recubrimiento** 	**Interiorización** Logra identificar el recubrimiento de superficies sin necesidad de hacer un conteo de recubrimiento de la superficie, no de manera física sino mental.

Nota. Recuperado de Londoño, M. Palacio, Y. (2018). Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de noción de área: un acercamiento con estudiantes de secundaria. (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Colombia. p. 50

El análisis de los datos indica que la mayoría de los estudiantes optaron por el conteo de cuadrados y la formación de nuevos cuadrados a partir de los incompletos, como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 2.

Clasificación de los estudiantes según la respuesta entregada.

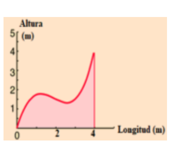
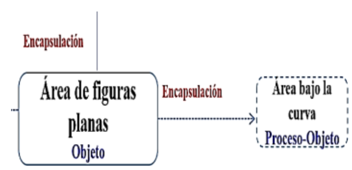
Caso 1.	**Caso 2.**	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
		R_1 Conteo de solo cuadrados completos.	**Acción Iniciadora – Recubrimiento** 	**Interiorización** Logra identificar el recubrimiento de superficies sin necesidad de hacer un conteo de recubrimiento de la superficie, no de manera física sino mental.
	E10-3.	**R_2** Conteo de cuadrados completos y aproximación.		
E8-1 **E8-2** **E8-3** **E8-4** **E8-5**	**E10-1** **E10-4** **E10-5**	**R_3** Conteo de cuadrados completos y con los incompletos formar unidades cuadradas.		

Nota: Recuperado de Londoño, M. Palacio, Y. (2018). Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de noción de área: un acercamiento con estudiantes de secundaria. (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Colombia. p. 66)

Londoño y Palacios (2018) lleva al estudiante a la construcción mental del concepto de área a través de la formulación de preguntas. En particular la última pregunta (P6) que busca motivar el mecanismo de encapsulación (aprehensión) del conocimiento, para alcanzar el objeto matemático: área bajo la curva. En la siguiente tabla se muestra el análisis a priori de la última pregunta.

Tabla 3.

Relación de la pregunta seis con las estructuras y los mecanismos.

Pregunta	**Objetivo**	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
P6. **Luis necesita cambiar el color de la pared de color rosa a color azul ¿Cuántos metros cuadrados aproximados tiene la superficie de la pared que necesita pintar?**  	Calcular el valor aproximado del área de la superficie bajo la curva desde el establecimiento de relaciones entre la noción de área y la situación planteada.	**AC$_1$.** Área bajo la curva con cuatro rectángulos. **AC$_2$.** Área bajo la curva con ocho rectángulos. **AC$_3$.** Área bajo la curva con n rectángulos.	**Proceso - Objeto Área Bajo La Curva** 	**Encapsulación** Se puede considerar como la formalización que el estudiante logra por medio de las relaciones entre el conteo y la medición del recubrimiento de superficies.

Nota: Recuperado de Londoño, M. Palacio, Y. (2018). Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de noción de área: un acercamiento con estudiantes de secundaria. (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Colombia. p. 60)

El concepto de área también ha sido estudiado desde la perspectiva de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (2007). Esta teoría se encuentra dentro de la didáctica de la matemática como un modelo de interacción, que se da generalmente en clase, entre el profesor y los estudiantes, alrededor de un saber tratado. En particular Castillo (2015) diseña una secuencia didáctica para estudiantes de sexto grado en Perú. La secuencia está compuesta por dos actividades en donde se formulan preguntas reflexivas que buscan potencializar el pensamiento espacial del educando, al utilizar diferentes unidades de medida para calcular el área de polígonos. En dicha investigación se inicia con exponer a los estudiantes ante la necesidad de medir figuras geométricas representadas en hojas de cartulina. Los resultados muestran que los estudiantes usan una hoja cuadriculada para medir el área con cuadrados, descomponiendo y recomponiendo las figuras en caso de ser necesario; salvo en el caso de un triángulo los estudiantes no hallaron correctamente la medida. La segunda secuencia busca que los estudiantes diferencien que, según la unidad de medida usada (cuadrados, triángulos o rectángulos), se determina el área de una figura; en este caso se proponen dos situaciones: ¿por qué si están midiendo la misma figura los valores son diferentes?, es aquí donde las acciones de los estudiantes giran en torno a representar cada una de las posturas de las situaciones y dar explicación a lo que sucede. De esta manera se llega a la fase de institucionalización con algunos estudiantes, pero la autora concluye que es necesario seguir implementando la utilización de diferentes de unidades de medida, antes de llegar a la construcción de fórmulas establecidas para el área de figuras planas (Freudenthal, 1983).

Se ha publicado una cantidad considerable de evidencias sobre el desarrollo del concepto de área en la educación secundaria entre ellas, (Guevara, 2018); (Rodríguez, 2011); (Facco, 2003);

(Corberán, 1996) indagado en diferentes grados de escolaridad. Estos estudios han aportado estrategias para abordar la construcción del concepto en los estudiantes; algunos con material concreto, otro con acción reflexiva de preguntas y unos pocos con geometría dinámica usando diferentes softwares. En el trabajo de doctorado de Corberán (1996) se han apoyado otros trabajos de investigación dada la riqueza de actividades allí propuestas; en este mismo sentido, el presente trabajo también se apoya en sus actividades para llevarlas al ambiente dinámico de las TIC. No solo se interesan los investigadores por analizar el proceso de aprendizaje, sino también referente a las dificultades de diferenciación de los conceptos de área y perímetro que presentan la mayoría de estudiantes.

1.2.3 El Concepto de Perímetro en la Educación Básica. En algunos cursos escolares se considera estudiar el origen del concepto de perímetro en la historia de las matemáticas (Bourbaki, 1994). Para empezar, se examina la etimología de la palabra perímetro, la cual procede del griego $\boldsymbol{\pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma}$ (perímetro = medida del rededor), compuesta por:

*El prefijo $\pi\varepsilon\rho\iota$ (alrededor), la palabra $\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$ (medida)***.**

Estudios previos han hallado datos históricos relacionados con el concepto de perímetro, algunos ejemplos de ello son:

1. El papiro de Rhind es una obra redactada por el escriba Ahmes hacia el año 1650 a. de C. que contiene 85 problemas sobre aritmética, estereometría, geometría, cálculo de pirámides y variados problemas prácticos como una muestra de que los egipcios desarrollaban. También

utilizaban una regla precisa relativa a la circunferencia: *la razón entre el área de un círculo y su circunferencia es la misma que entre el área del cuadrado circunscrito al círculo y su perímetro*. (Morales, 2002, pág. 7)

2. La longitud de cualquier circunferencia dividida entre la medida de su diámetro siempre da el mismo número como resultado, representado por la letra griega π. Denominada por lo griegos de esta forma por ser la letra por la que comienza la palabra $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$ = perímetro. (Márquez, 2008, pág. 35)

3. Eratóstenes nació en Grecia en el año 284 a. de C. matemático, astrónomo, geógrafo y filósofo. Fue el tercer director del Museo de Alejandría desde el año 236 a. de C. hasta su muerte en el año 192 a. de C., fue el primero que utilizó la palabra geografía, basándose en los postulados de Euclides y en la geometría ya existente en su época determina con una alta aproximación la longitud de la circunferencia terrestre. (López, Refolio, Rubio, & Moreno, 2007, pág. 3)

En la actualidad, en Colombia se incluye en los Lineamientos curriculares (MEN, 1998), en los Estándares de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006) y a nivel internacional en los Estándares Norteamericanos (NTCM, 2000) el concepto de perímetro de polígonos. Este concepto es tratado en la educación primaria de nuestro país en el currículo de matemáticas para los grados tercero y cuarto. Situación que se juzgaría a bien, como afirman varios autores como Díaz (2006), Márquez (2008), Gruessing (2011), Guevara (2018), en los casos donde se profundiza en la construcción del conocimiento a través del desarrollo de las habilidades de la visualización, representación y razonamiento geométrico (Duval, 1999, pág. 32). De la misma manera, influyen el contexto propicio para el estudiante y la formación del docente en cuanto al fortalecimiento del pensamiento espacial en sus alumnos (González A. , 2018).

Al considerar los aportes de la humanidad a la resolución de problemas que tienen que ver con perímetro y compararlos con el trato poco significativo que se le ha dado en los grados escolares de casi toda la básica primaria; se obtiene como resultado que las respuestas de la mayoría de los estudiantes respecto al concepto de perímetro son: "¿la suma de todos los lados?" y se refieren en tono de pregunta porque no están seguros de lo que están diciendo. Por lo tanto, existen varios estudios que soportan esta situación y que han tratado de diezmar la problemática al respecto.

Márquez (2008) menciona la importancia del lenguaje acertado en el desarrollo del concepto de perímetro, producto de su experiencia en la enseñanza secundaria donde observa que: i) Para los estudiantes es poco evidente la diferencia entre perímetro y área; suele ser fácil olvidar las fórmulas e intercambiar los números que representan uno u otro concepto. ii) La mayoría de los estudiantes ante la pregunta de qué es perímetro responden "la suma de todos los lados (Márquez, 2008, pág. 35). Además, cita a Duval (2004, pág. 32-42; 74-83) quien expresa que "la actividad matemática en los cursos de Geometría se realiza en dos registros: el de las figuras y el del lenguaje natural" Márquez (2008, pág. 38); lo cual indica que los estudiantes necesitan estudiar y familiarizarse con las figuras y sus propiedades de manera interactiva con las definiciones, los teoremas, etc. por medio de actividades de comparación de figuras donde los sistemas de representación sean variados entre números, letras (fórmulas) y figuras.

Márquez (2008) en una revisión que hace a varios textos escolares analiza las definiciones que estos presentan y señala:

- En el texto Matemáticas libro taller 3° pp. 112 – 113, el aprendiz tiene la obligación de identificar las partes de las figuras, pero según la RAE una figura es un espacio cerrado por líneas o superficies. Lo cual no se especifica en dicho libro.

- Otro texto es el Taller de Matemáticas Rayuela 4° pp. 73-75, por una parte, incurre en el supuesto que el interlocutor debe estar al tanto del concepto de polígono regular e irregular, y por otro, plantean una situación problema de una ventana cuadrada y sus divisiones en nueve vidrios cuadrados iguales propenden a desorientar el concepto de perímetro con el de área.
- En el texto Matemáticas 4° pp. 119-120, hablan del contorno de una figura en relación al perímetro, no obstante, la palabra contorno es poco utilizada en el contexto de los estudiantes de este nivel.
- En textos de educación secundaria, aparecen fórmulas sin especificar si es para polígonos regulares.
- En los otros textos suceden situaciones parecidas a las nombradas anteriormente. Márquez (2008, págs. 39-46)

Luego, Márquez (2008) en su trabajo presenta los resultados de la implementación de la estrategia "aprender enseñando" a través de guías de trabajo sobre perímetro, con estudiantes de séptimo grado que enseñan a sus compañeros fortaleciendo la habilidad de la comunicación matemática; esta estrategia inicia la experiencia con actividades relacionadas con el reconocimiento de figuras geométricas y de términos como borde y polígono. Así logra afianzar el concepto de perímetro tanto en figuras planas, como en sólidos. Para evaluar los resultados se presenta un test a todos los estudiantes intervenidos en la indagación; con base en los datos concluye que la mayoría de ellos reconocen el concepto de perímetro en figuras planas por medio de la acción gráfica pero aún persiste la necesidad de aplicar una fórmula.

En cuanto a investigar la construcción del concepto de perímetro independiente del concepto de área en la escuela, es poco común, esto tal vez debido a que los aportes de los investigadores han sido en su mayoría, como ha sucedido en la historia de la geometría, el perímetro está relacionado con otros conceptos y estrechamente relacionado con el concepto de área.

Recientemente se ha publicado un aporte valioso referente a los conceptos de área y perímetro, visto desde la perspectiva del conocimiento de los docentes (González A. , 2018). En él se indaga cómo están preparados los docentes en formación de últimos semestres de licenciatura, para enseñar perímetro y área. González (2018) se apoya en Petrou y Goulding (2011) para determinar que el conocimiento del profesor de matemáticas es una relación tridimensional, basada en el contexto del estudiante, de los tres conocimientos que debe tener éste: i) conocimiento del currículo, ii) conocimiento de la materia y iii) conocimiento pedagógico del contenido (González A. , 2018, pág. 25). Seccionar de tal manera el conocimiento ha sido un trabajo de décadas intervenido por varios investigadores interesados en el aprendizaje de los estudiantes pero que como algunos de ellos afirman, como Menon (1998), que docentes en formación tuvieron que enfrentarse a enseñar perímetro y área de tal manera que la comprensión de estos dos conceptos es limitada, proyectan la imagen de docentes que van a enseñar procedimientos como fórmulas descontextualizadas, sin análisis profundo del concepto y, a su vez, sustraigan oportunidades a los educandos para que resuelvan situaciones problemas relacionados con el tema. En la siguiente figura González (2018, pág. 25) toma el gráfico de Petrou y Goulding (2011) para mostrar la relación entre el contexto y el conocimiento del profesor.

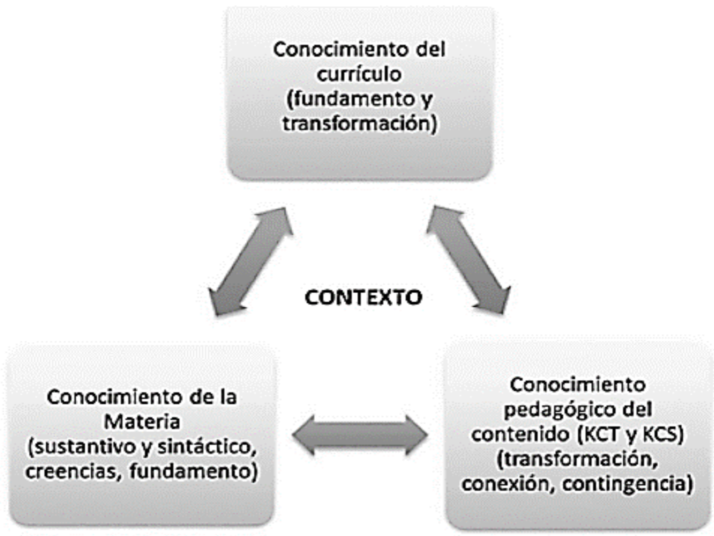


Figura 9. Síntesis de los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza. Adaptado de Petrou, M. Goulding, M. (2011). Conceptualising teachers' mathematical knowledge in teaching. En T. Rowland y K. Ruthven (Eds.), Mathematical knowledge in teaching, (pp. 9-25). Dordrecht, Países Bajos: Springer. Doi: 10.1007/978-90-481-9766-8_2. p. 21)

En el trabajo de González (2018, pág. 28) se analizan las creencias y conocimientos previos de los docentes de matemáticas, y toma un ejemplo concerniente al presente trabajo en desarrollo, comenta que algunos docentes piensan que si el perímetro de una figura aumenta entonces el área de la misma también debe aumentar. De igual forma, concluye que existe entre participantes de la investigación una dificultad en la comprensión de situaciones donde se presenta disminución del perímetro de una figura y ellos supongan que hay una disminución en el área de la misma figura. González (2018) no solo observa esta situación como algo común en la mayoría de los docentes en formación de matemáticas; sino que en su estudio evidencia docentes con poco conocimiento de las definiciones formales de los conceptos en estudio: área y perímetro. D'Amore y Fandiño (2007) atribuye esta concepción errónea no solo a la falta de comprensión de los conceptos de área y perímetro, sino que también se encuentra falencia en la naturaleza didáctica de la enseñanza.

Estrategias como: i) enseñar la geometría usando únicamente figuras convexas, de esta manera, transmite la idea que es adecuado omitir las figuras cóncavas; ii) utilizar figuras estándar: cuadrados, rectángulos y triángulos; iii) casi no se presentan situaciones problema que relacionen, de manera específica, perímetro y área de una misma figura, antes bien se recalcan las diferencias y no las relaciones; iv) pocas situaciones problema que contengan transformaciones sobre las figuras, implicando que se conserve o varíe área o perímetro (D'Amore, 2007, págs. 46-49)

Y, por otro lado, obtiene un alto porcentaje de docentes en formación que desarrollan una actividad relacionada con el perímetro y el área con facilidad de uso rutinario de procedimientos; una explicación de este hecho es la acostumbrada intervención de estos conceptos matemáticos a partir de la educación primaria según la perspectiva de aplicación de fórmulas. Otra de las conclusiones relevantes de González (2018) es que los docentes en formación omiten características de los conceptos de perímetro y área, cosa que conlleva a incapacidad de transferir la información a nuevas situaciones. También los sujetos de estudio estaban expuestos a relacionar los conceptos tratados con el concepto de fracción, por lo que observó la falta de interrelación entre los conceptos mencionados y la avanzada en los estudios no reflejan consistentemente que los docentes en formación estén preparados en estos conocimientos.

González (2018) sugiere que desde las escuelas de formación docente se fomente el conocimiento de la materia, se promueva la comprensión de los conceptos y se favorezca la habilidad de comunicación matemática a través de situaciones de diferentes contextos que sean gradualmente retadoras según el nivel de estudios. Además, propone la socialización de diferentes soluciones a situaciones problema planteadas.

2. Constructos de la Teoría APOE

La teoría APOE es una teoría de la didáctica de las matemáticas que explica la construcción de conocimiento matemático. Ha sido aplicada en diferentes estudios sobre la comprensión de conceptos y/o nociones matemáticas. Recientemente Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktac, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller, (2014) presentaron un acercamiento detallado sobre la construcción de objetos abstractos a partir de la aplicación de *acciones* sobre *objetos* concretos. Este resultado ha sido aplicado en el estudio de conceptos como sistemas de ecuaciones lineales y transformaciones lineales. Además del estudio de conceptos básicos de matemáticas en los primeros grados escolares como área, raíz cuadrada, técnicas de conteo, entre otros.

Referente a las prácticas de aula, la teoría APOE se convierte en una herramienta descriptiva y predictiva, dado que permite al docente en su rol de investigador, reconocer las estructuras mentales que un estudiante puede lograr frente a un tipo específico de actividad matemática. Entonces el aula de matemáticas se percibe como un laboratorio experimental en donde se diseñan y rediseñan actividades sustentadas en modelos cognitivos (descomposiciones genéticas) que fomentan un tipo de actividad matemática reflexiva desde la perspectiva del profesor.

Es de nuestro interés describir las estructuras mentales y sus relaciones, que dan paso a la construcción de modelos que fomentan la comprensión de conceptos matemáticos, lo cual se hace a continuación (Figura 10).

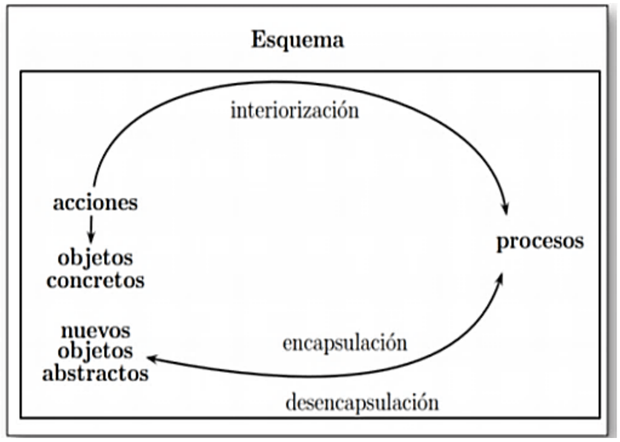


Figura 10. Construcción de Objetos Abstractos a partir de la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos. Adaptado de Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York: Springer Science. p. 18).

Con *objetos* concretos se hace referencia a todo aquello que está relacionado con el uso de objetos físicos reales o imaginarios (González & Roa-Fuentes, 2017). En el caso del trabajo realizado por Ilana Arnon, los *objetos* concretos usados para la construcción de fracciones equivalentes, corresponde a sectores circulares realizados en papel que los estudiantes podían comparar.

Con base en las estructuras *acciones, procesos, objetos y esquemas*, y los mecanismos de interiorización, encapsulación y coordinación entre otros, es posible describir aspectos cognitivos sobre la construcción de conceptos matemáticos. En el caso de esta investigación para el área de figuras planas. Por tanto, la comprensión matemática es entendida en este estudio como la respuesta que un individuo (estudiante) genera frente a su interacción con problemas matemáticos escolares en un contexto social, que promueve la construcción y reconstrucción de *acciones, procesos y objetos*.

A continuación, se presenta una descripción general de las estructuras y mecanismos, y se toma como ejemplo el concepto área.

Las *acciones* son las primeras estructuras que un individuo puede construir para comprender un concepto matemático. Estas inician con su experiencia con el medio en que se desarrollan y con la posibilidad de resolver diferentes problemas matemáticos. Las estructuras han sido definidas en algunos trabajos como las primeras nociones o ideas matemáticas sobre cierto concepto matemático. Como proponen Arnon et al., (2014), las *acciones* se realizan paso a paso y están condicionadas por estímulos externos que el individuo debe seguir para realizar una transformación específica. Según Arnon *et al*., (2014), "las acciones son fundamentales para Teoría APOE, porque permite el desarrollo de otras estructuras. En particular, los procesos son interiorizaciones de *acciones y objetos* mentales que surgen debido a la aplicación de las acciones. Nuevas *acciones* conducen al desarrollo de estructuras de orden superior" (p. 20).

Para el concepto de área en estudiantes de primaria, frente a una situación que requiere calcular el área de una figura plana, un estudiante puede definir un patrón de medida y establecer relaciones específicas de recubrimiento y conteo. En este caso los estudiantes no están necesariamente condicionados por la mecanización de una fórmula.

La interiorización de *acciones* es el resultado de la reflexión que genera el individuo cuando resuelve variados problemas asociados con el concepto de interés. De esta manera las *acciones* que realizaba de manera externa, ahora las realiza en su mente. Como resultado del mecanismo de interiorización se da paso a una estructura *proceso*. Las *acciones* que antes realizaba el individuo de manera externa ahora las realiza de manera mental, y sin necesidad de llevarlas a cabo paso a paso.

Para el caso del cálculo de área de figuras planas, por ejemplo, el estudiante no está condicionado por un patrón de medida, ni por el cálculo exacto del área. En la estructura *proceso* de área juega un rol fundamental la noción de aproximación; como resultado de su experiencia, el estudiante puede componer diferentes figuras a partir de figuras con áreas conocidas, para encontrar valores aproximados y/o exacto del área de nuevas figuras. Incluso puede comparar el área de figuras diferentes en composición, pero un valor de superficie igual, mayor o menor, sin necesidad de calcular el valor exacto de cada región.

En la construcción de diferentes conceptos matemáticos, se ha señalado la importancia de la construcción de *acciones y procesos* en los primeros niveles escolares. Esto dado que, en el nivel universitario, por ejemplo, los estudiantes generalmente no evidencian la construcción de *objetos* asociados a conceptos matemáticos avanzados. Por tanto, es fundamental asegurar la construcción de conceptos y nociones básicas más allá de la mecanización y repetición de algoritmos. Ya que el conocimiento matemático siempre debe posibilitar la evolución y construcción de nuevas estructuras.

Una vez un individuo logra una estructura *proceso*, es posible que la encapsule en un *objeto*. La diferencia entre estas dos estructuras radica en que la primera es dinámica y la segunda es estática. De tal manera que una estructura *objeto* permite que el individuo considere la posibilidad de realizar nuevas transformaciones sobre él, o que pueda generar nuevos objetos a partir de operar objetos preexistentes (Arnon, y otros, 2014).

En el caso del área, en educación básica secundaria, podría esperarse que los estudiantes puedan componer y descomponer figuras planas sin alterar su área. Además, dado el valor del área de una figura plana, pueden construir diferentes figuras que corresponden con el valor numérico asignado.

Esto permite pensar en una manera estática del área, que fomenta la construcción futura de un *esquema*.

Dada la evolución del tipo de problemas y la experiencia del estudiante con nuevos conceptos, este *esquema* puede albergar nociones asociadas a la representación geométrica de expresiones algebraicas del tipo $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$; así como la noción de área bajo la curva que fundamenta el concepto de integral.

En general los *esquema*s son una colección coherente de *acciones*, *procesos*, *objetos* y otros *esquema*s que están relacionados a través de los mecanismos de interiorización, coordinación, encapsulación, tematización, entre otros. Todo esto asociado con un concepto o noción matemática particular. Para el caso del área y como se mencionó en el párrafo anterior, el *esquema* puede partir de acciones específicas de recubrimiento, conteo y aproximación para llegar a nociones más abstractas, relacionadas por ejemplo con el cálculo del área bajo una curva a partir de la construcción de sucesiones de sumas de Riemann, que desembocan en el concepto formal de la integral.

Como se ha mencionado en cientos de trabajos, la coherencia de un *esquema* está determinada por la capacidad del individuo para determinar si se puede utilizar para hacer frente a una situación matemática en particular (Arnon, y otros, 2014).

Con base en las estructuras y los mecanismos descritos, la teoría APOE define la *descomposición genética* como un modelo cognitivo que permite señalar cómo un individuo puede construir un concepto matemático. Por tanto, este modelo se considera el corazón de la Teoría APOE, ya que en ella se describen las estructuras y los mecanismos que un estudiante puede seguir para construir un concepto o noción matemática (Arnon, y otros, 2014).

En el capítulo cuatro se describe el Ciclo de investigación que propone esta teoría y que sustenta metodológicamente esta investigación. Allí se propone la descomposición genética estructurada para el concepto de área.

3. Planteamiento del Problema y Objetivos de la Investigación.

3.1 Análisis y Formulación del Problema

Un gran número de retos en la actualidad, al igual que los que existieron al comienzo de algunas civilizaciones como la de los egipcios, tienen su fundamento en la geometría (Boyer, 1968); importancia que, desde entonces, es planteada por gran parte de los entes educativos, al buscar conectar el sentido y la función pedagógica de esta disciplina con el progreso y superación humana.

Desde este panorama, la enseñanza de la geometría busca desarrollar procesos de pensamiento como: el razonamiento, el planteamiento y resolución de problemas, la comunicación, la modelación, la elaboración, la comparación y ejercitación de procedimientos (Ministerio de Educación Nacional, 1998). Esta ciencia aporta al ser humano habilidades que lo hacen competente para contribuir al desarrollo de la creatividad, y de la innovación; cualidades indispensables que, de ser cultivadas desde las escuelas, apoyarán el desarrollo escolar en sus diferentes etapas y niveles.

La afirmación anterior, ha dado pie para que algunos matemáticos se interesen por proponer un currículo y metodología principalmente sustentado en el pensamiento geométrico; como lo hacen

Camargo y Acosta (2012) cuando afirman: “La geometría es una de las ramas de la matemática que debe ocupar un lugar privilegiado en los currículos escolares, debido a su aporte a la formación del individuo desde sus diferentes dimensiones” (Camargo & Acosta, 2012, pág. 4). Sin embargo, esto no se evidencia en gran parte de las aulas colombianas de educación básica y media, lo que traslada a la educación superior un inconveniente para el aprendizaje.

De esta problemática se puede enunciar: i) La brecha entre los estudiantes egresados de la secundaria y los que ingresan a la universidad está marcada en un 41% por el nivel de preparación educativo con el que se gradúan (Ferreyra, Avitabile, Botero, Haimovich, & Urzúa, 2017) y ii) La problemática se viene presentando desde hace varias décadas, lo que se refleja en los bajos puntajes obtenidos por Colombia en pruebas estandarizadas a nivel internacional. Por ejemplo, el informe del Programa Internacional para la Evaluación (PISA) del año 2018 (último reporte), muestra que Colombia pasó de 390 a 391 puntos (marcado con una línea punteada roja) indicando muy poco avance respecto al rendimiento promedio de los países pertenecientes a la OCDE (línea celeste) que tienen alrededor de 100 puntos por encima de Colombia (ver Figura 10).

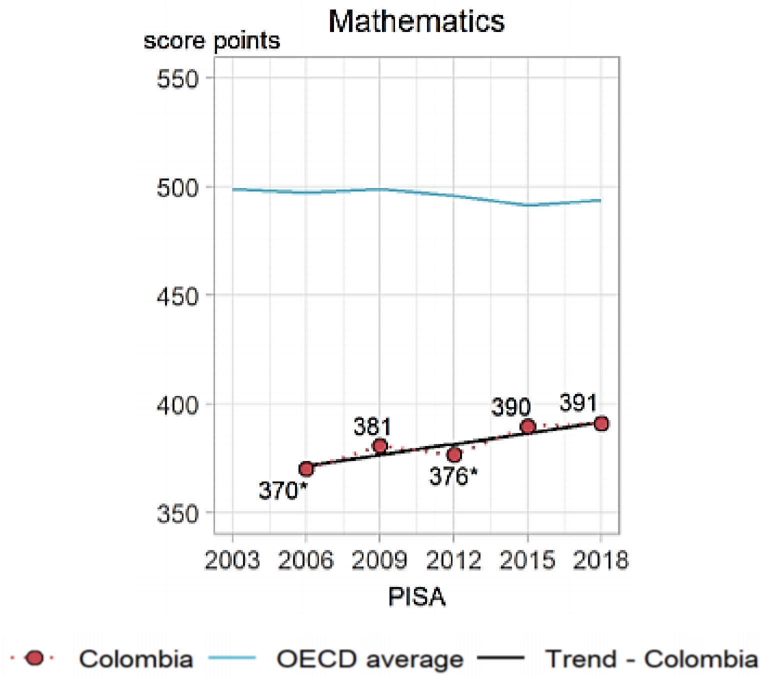


Figura 11. Tendencia de rendimiento en Matemáticas. Colombia – 2018. Adaptado de OECD. Programme for international student assessment (PISA). Disponible en: https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_COL_ESP.pdf

Es de aclarar que, las pruebas PISA están diseñadas, no para evaluar el currículo aprendido, sino para medir en los estudiantes de 15 años el nivel de aplicación de los conocimientos a la resolución de problemas en las áreas de ciencias, matemáticas y lengua castellana. Para cada área se definen 7 niveles de desempeño, afiliados con un categórico intervalo de puntaje; por lo que solo un 35% de los 8500 estudiantes alcanzó el nivel 2 en matemáticas mientras que el promedio de la OCDE es del 76%. En el nivel 5 y 6, Colombia obtuvo un 1% en este nivel, no obstante, el promedio de la OCDE es del 11%.

Al examinar la evaluación internacional PISA aplicada a estudiantes menores de 15 años; el Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha intervenido con la Estrategia Siempre Día E contribuyendo a los procesos de enseñanza – aprendizaje por medio de un control interno de resultados en exámenes nacionales llamados pruebas SABER 3°, 5°, 9° y 11° en las áreas de Lengua Castellana, Matemáticas y Ciencias. Al respecto, y para el caso de la presente investigación, solo se examinará los resultados de la prueba SABER 5° en el área de Matemáticas en los últimos cuatro años del colegio San José de Motoso del municipio de Girón así se muestra en la figura 11.

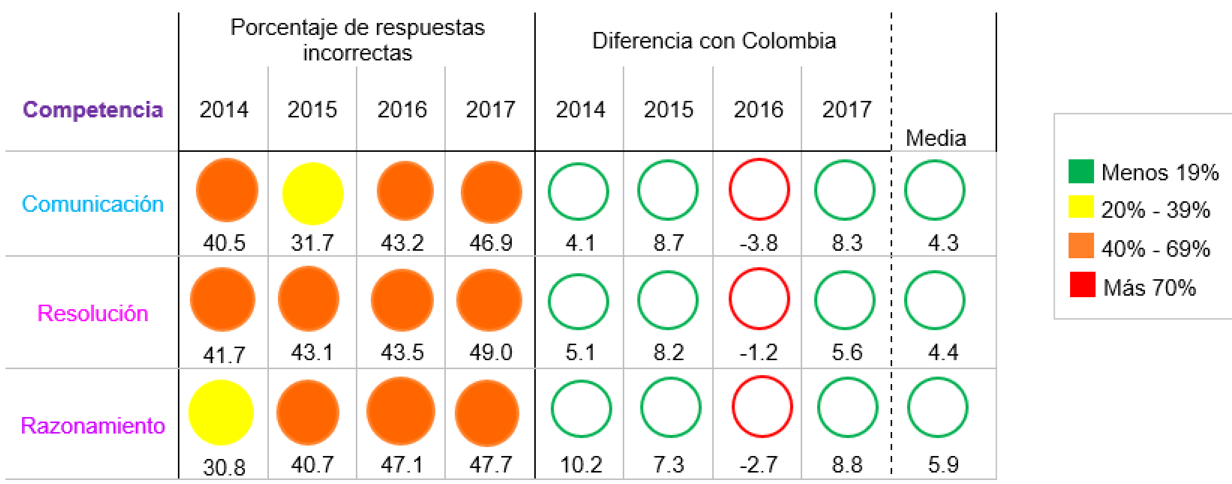


Figura 12. Diferencia entre el promedio del Colegio San José de Motoso con el promedio del país del año 2014 al 2017 en las pruebas SABER 5° Matemáticas. Adaptado de Ministerio de Educación Nacional. (2018). Disponible en: https://diae.mineducacion.gov.co/dia_e/documentos/2018/_2%20Colegios%20oficiales%20para%20web1%20a%2015718/268307000272.pdf

Como se puede apreciar en la figura 12, se muestra el desempeño del colegio donde se realiza la experiencia en los últimos cuatro años de aplicación de las pruebas SABER 5° entregando en las primeras cuatro columnas el porcentaje de respuestas incorrectas desde el 2014 hasta el 2017 y en las otras cuatro columnas la diferencia con el puntaje promedio de Colombia en los respectivos años mencionados; para ser interpretado así, por ejemplo: si el colegio mantuvo puntajes por encima del país, esta diferencia está señalado con un círculo verde alrededor del valor de distancia con el promedio nacional; de lo contrario, está indicado con un círculo rojo. Es de interés analizar el componente resolución de problemas por su comportamiento de resultados en el año 2017, al cambiar de 41.7% en el 2014 en forma progresiva a un 49% en el 2017, evidencia un incremento de estudiantes que contestan respuestas incorrectas año tras año hasta el 2017, al mismo tiempo, este componente comparado con los componentes comunicación y razonamiento, en el mismo año, fue el que menos está lejos del promedio de Colombia.

La problemática enunciada en párrafos anteriores, también tiene respaldo desde la experiencia de tres años de docencia de la autora del presente estudio. De esta problemática se considera primordial, por su importancia, abordar la dificultad de los estudiantes en cuanto a sus habilidades para la visualización de representaciones espaciales geométricas y resolución de problemas geométricos; importancia que se respalda así: i) la visualización es el centro de la comprensión matemática (Rico, 2009) y ii) el pensamiento espacial contribuye a preparar a los educandos para razonar, demostrar y comprender los números y la medición (Vara, 2003).

Una estrategia para diezmar la problemática antes descrita es incentivar la resolución de problemas de razonamiento espacial, desde apuestas formativas centradas en el concepto de área de figuras planas en donde el uso del software GeoGebra sea un recurso de apoyo, es decir, retos que al igual que lo menciona Acosta (2007), tengan como finalidad la implementación de una herramienta tecnológica didáctica que se sume al propósito de hacer más adecuado, atractivo y exitoso el proceso de aprendizaje; intencionalidad igualmente manifestada en los trabajos Sunkel, Trucco y Espejo (2013), en donde se traza como horizonte el hecho de que los recursos tecnológicos deben apoyar el fenómeno de: i) el pensamiento creativo; ii) el pensamiento crítico, autocrítico y reflexivo; iii) el pensamiento relacional y vinculante; iv) la resolución de problemas y v) la comunicación y colaboración.

Como complemento, y de cara a contar con una estrategia de observación y seguimiento que permita valorar una apuesta como la anteriormente descrita, resulta pertinente tener en cuenta el ciclo metodológico que propone la teoría APOE para diseñar actividades que promuevan la construcción mental de la noción de área de figuras planas con estudiantes de sexto grado, la mayoría de ellos están adscritos a las sedes de primaria que componen el colegio y solamente un número muy pequeño llegan de otras escuelas ya sea por traslado de vivienda de los padres o por ser el prestador del servicio de bachillerato más cercano.

Todo lo anterior, da para formular la siguiente pregunta directriz del proceso de investigación: ¿Cómo son las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan estudiantes de sexto grado, a partir de la aplicación de acciones sobre objetos concretos para construir el concepto de área, apoyadas en el uso didáctico del software GeoGebra?

Preguntas orientadoras:

- ✔ ¿Qué concepciones han construido los estudiantes de sexto grado sobre el concepto de área de figuras planas en el trascurso de sus procesos de aprendizaje de la educación básica?
- ✔ ¿Cuál es el modelo cognitivo hipotético que describa las estructuras y mecanismos mentales que deben construir estudiantes de sexto grado para comprender la noción de área de figuras planas?
- ✔ ¿Se puede construir un conjunto de tareas apoyadas en el uso del software GeoGebra que potencie el desarrollo de las estructuras y mecanismos mentales descritos en el modelo cognitivo hipotético?

- ¿Cómo evidenciar los avances de los estudiantes en la adquisición del objeto matemático área y la interiorización de dicha estructura, apoyada en el software GeoGebra?

3.2 Objetivo general

Describir las estructuras (*acciones, procesos y objetos*) y mecanismos (interiorización, coordinación, encapsulación) mentales que desarrollan estudiantes de sexto grado a partir de la aplicación de *acciones* sobre *objetos* concretos para construir el concepto de área de figuras planas.

3.3 Objetivos específicos

- Identificar las debilidades y fortalezas presentadas por los estudiantes en la resolución de problemas del componente de pensamiento espacial establecido por el MEN Colombia con el propósito de realizar la intervención didáctica con la ayuda del software GeoGebra.
- Diseñar un modelo cognitivo hipotético que describa las estructuras y mecanismos mentales que deben construir estudiantes de sexto grado para comprender el concepto de área.
- Diseñar un conjunto de tareas apoyadas en el uso del software GeoGebra que potencie el desarrollo de las estructuras y mecanismos mentales descritos en el modelo cognitivo hipotético.
- Aplicar y evaluar el conjunto de tareas mediadas por el software GeoGebra teniendo en cuenta los procesos de la espiral auto reflexiva de la Investigación Acción (IA).
- Presentar un modelo cognitivo validado que describa las estructuras y mecanismos mentales que desarrollan los estudiantes de sexto grado para comprender el concepto de área de figuras planas.

4. Ciclo de Investigación.

4.1 Contextualización de la Investigación.

El estudio investigativo se realiza en la institución educativa San José de Motoso, el colegio ofrece educación formal con formación en básica primaria, secundaria y media vocacional. La estructura física está distribuida en la sede principal (“A”), la sede “A” es la única que cuenta con sección completa desde preescolar hasta undécimo grado y otras cinco sedes rurales anexas de básica primaria. Para el periodo 2019 estuvieron matriculados 412 estudiantes de familias de estratos 0-3 con padres de familias dedicados a la siembra de cítricos, tomate y guanábana. El proyecto educativo institucional (PEI) del colegio está regido por las normas educativas según lo establecido por el Ministerio de Educación Nacional Colombia. Respecto a la cobertura tecnológica en la institución se cuenta con una sala de informática con 27 equipos portátiles con el software GeoGebra, de los cuales 20 estuvieron disponibles para la implementación del proyecto.

La población participante en este estudio fue 20 estudiantes grado sexto, que actualmente cuentan con edades entre los 11 y 15 años, correspondientes a la sede principal del Colegio San José de Motoso y su docente del área de Matemáticas (autora de la presente investigación). Los estudiantes objeto de estudio fueron escogidos por sus dificultades académicas, además porque muestran bajo rendimiento académico.

4.2 Metodología

El proyecto se desarrolla desde un enfoque metodológico cualitativo, en concordancia con las características del paradigma que en general promueve:

> Describir sucesos complejos en su medio natural, comprender y profundizar los fenómenos en relación con el contexto, buscando de esta manera comprender la perspectiva de los participantes acerca de los fenómenos que los rodea y profundizar en sus experiencias, perspectivas, opiniones y significados. (Guerrero, 2016, pág. 3)

El estudio cualitativo posee las bondades de acceder a los fenómenos con una visión holística que favorece el propósito del proyecto de poner de manifiesto las estructuras y mecanismos mentales en la construcción cognitiva del concepto de área.

El método utilizado para la presente investigación fusiona los tres componentes del ciclo de la teoría APOE con la metodología de la investigación-acción, cuyo desarrollo corresponde a la observación, análisis y verificación de datos.

Prueba Diagnóstica

Para la identificación de la problemática relacionada con la confusión entre las nociones de perímetro y área de figuras planas se efectuó una indagación introductoria (prueba diagnóstica). El siguiente momento fue efectuar la indagación introductoria (prueba diagnóstica) donde se pudo obtener evidencia de la situación que aqueja a los participantes de la investigación. Las dificultades presentadas al establecer el área de una superficie plana fueron relevantes para señalar el camino de implementación práctica a ejecutar. El diagnóstico estuvo representado por los siguientes aspectos de diseño:

- La concepción del área como cantidad de plano ocupado por la superficie.
- El área como el número de unidades cuadradas que recubren la superficie.
- Resolución de situaciones problema que estén relacionadas con área.

A continuación, se procede a explicar el ciclo de investigación con el cual se desarrolló la experiencia sobre área de figuras planas; en el marco de la teoría APOE y en afinidad con la metodología de la investigación-acción. El cual engloba tres componentes: i) Análisis teórico; ii) Diseño, implementación y observación; iii) Análisis y verificación de datos (Figura 13).

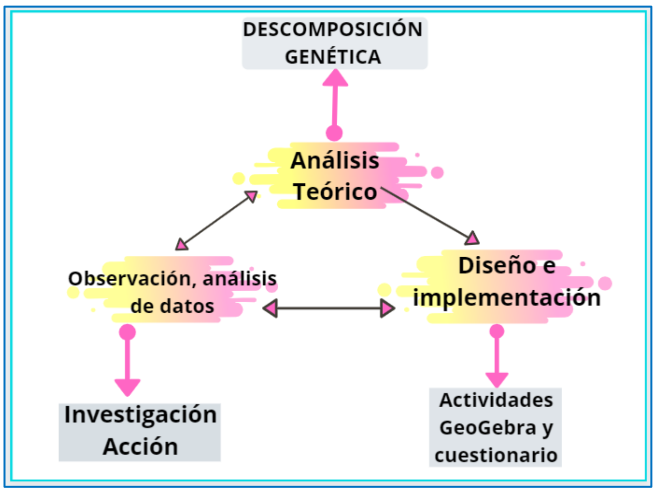


Figura 13. Ciclo de investigación basado en la teoría APOE. Adaptado de Asiala, M. Brown, A. DeVries, D. Dubinsky, E. Mathews, D. Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J., Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education II (pp.1–32). U.S.A.: American Mathematical Society. p.25

Todo lo anterior se considera conveniente dado que se tiene la perspectiva puesta en desarrollar una investigación para interpretar y profundizar en la problemática planteada mediante la participación de la población objeto de estudio.

4.2.1 Análisis Teórico. El primer componente del ciclo de investigación se basa en estudiar el concepto de área de las figuras planas, y las diferentes estructuras que debe lograr un estudiante, en la construcción de este conocimiento matemático (Figura 14).

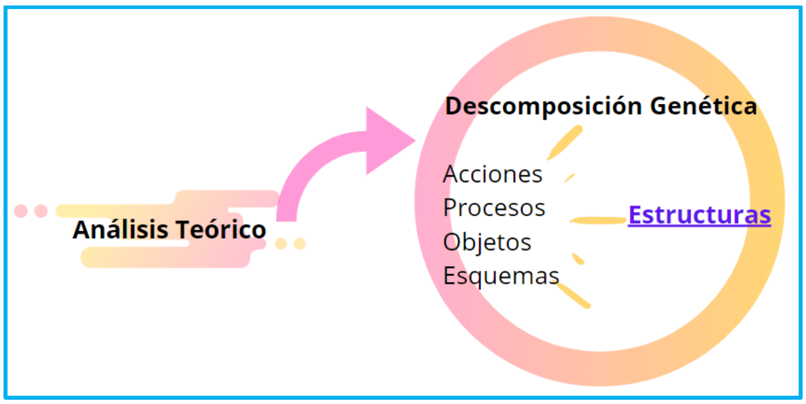


Figura 14. Análisis Teórico. Adaptado de Londoño, M. Palacio, Y. (2018). Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de noción de área: un acercamiento con estudiantes de secundaria. (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Colombia. p.40

El análisis teórico funciona como el pronóstico de las construcciones mentales existentes en los estudiantes al momento de entender un concepto; con esto se quiere decir que un estudiante al enfrentarse a un concepto matemático realizará razonamientos (construcción de estructuras mentales) que serán orientados por el docente a través de actividades didácticas (conexiones entre las estructuras) que conforman un acercamiento progresivo hasta asimilar el conocimiento matemático en cuestión. (Salgado, 2015, pág. 28)

Londoño y Palacio (2018) en concordancia con los investigadores que han desarrollado la teoría APOE, determinan que el análisis teórico radica en:

> Describir las estructuras*: acciones, procesos, objetos y esquemas*; y mecanismos mentales: interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación que un estudiante puede realizar para construir un determinado *objeto* matemático. (Londoño & Palacio, 2018, pág. 40)

La asociación de estas estructuras y mecanismos forman la *descomposición genética hipotética*.

Una *descomposición genética* está definida por Asiala et al. (Asiala, y otros, 1996, pág. 7) como: "un conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del aprendiz". Para Roa-Fuentes (2017), Zabala (Zabala, 2015), Gamboa (2013) y grupo RUMEC (DeVries, 2001) cuando se utiliza la teoría APOE en una investigación se comienza por elaborar una *descomposición genética* del concepto de interés.

Londoño y Palacio (2018) plantean un modelo de una *descomposición genética* sobre el concepto de área de figuras planas analizado desde tres ramas del pensamiento matemático (pensamiento geométrico, variacional y numérico); hasta el momento es poco lo que se ha desarrollado al respecto, teniendo en cuenta que la mayoría de los trabajos han sido elaborados para conocimientos matemáticos universitarios. También se deja claro que la *descomposición genética* no es única (Gamboa citando a Trigueros 2005, p.8) y que logran coexistir diferentes de ellas con tal de que mantengan la construcción del concepto de forma adecuada. A continuación, se presenta una *descomposición genética hipotética* del concepto de área (Figura 15) orientados por el aspecto histórico-epistemológico del *objeto* matemático nombrado anteriormente y, por estar en desarrollo en la básica secundaria, está relacionada con el planteamiento de Londoño y Palacio (2018) sin embargo, en la presente investigación solo se contempla el aspecto geométrico.

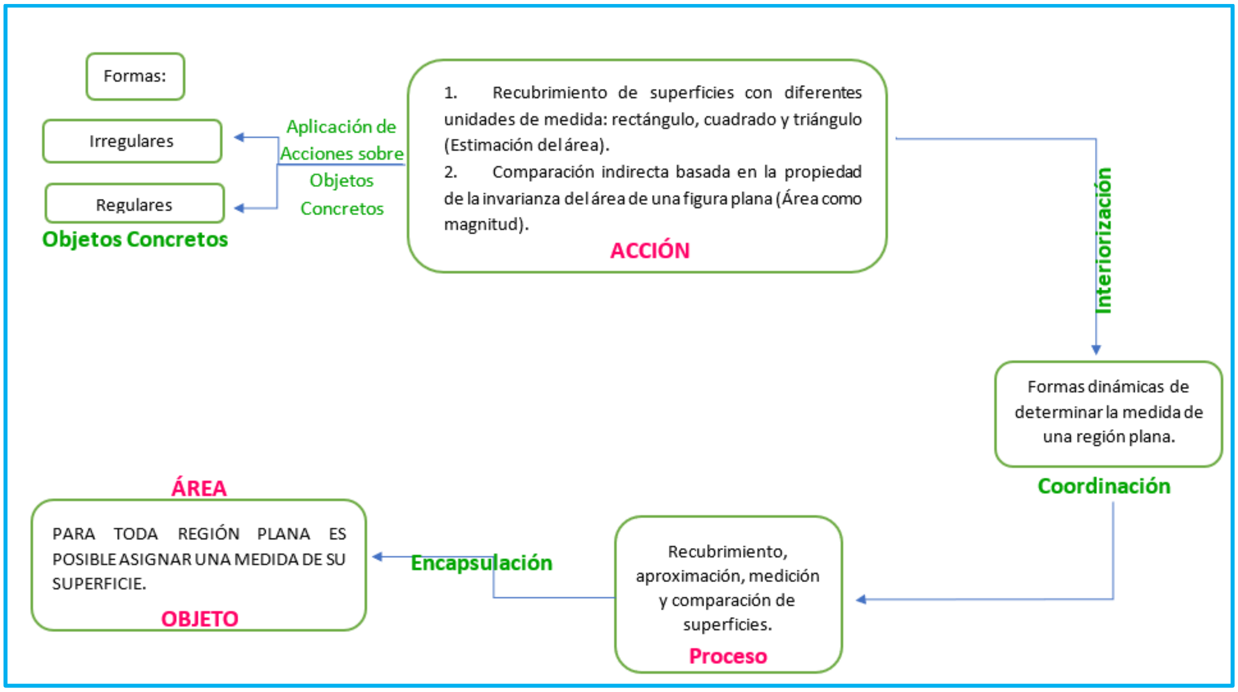


Figura 15. Descomposición genética hipotética del concepto de área.

A continuación, se presente una descripción detallada de las estructuras propuestas en la *descomposición genética hipotética*.

Acciones: Para la construcción del concepto de área se dice que el estudiante ejecutará acciones de recubrimiento comenzando por una superficie no poligonal para realizar un recubrimiento aproximado; esto con la motivación de descubrir las posibles figuras geométricas que pueden servir para determinar el área de la superficie dada. Se presentan otras acciones como la relación de igualdad entre superficies de diferentes formas, relación de inclusión y medición de superficies utilizando material concreto, además de actividades diseñadas en el Software GeoGebra.

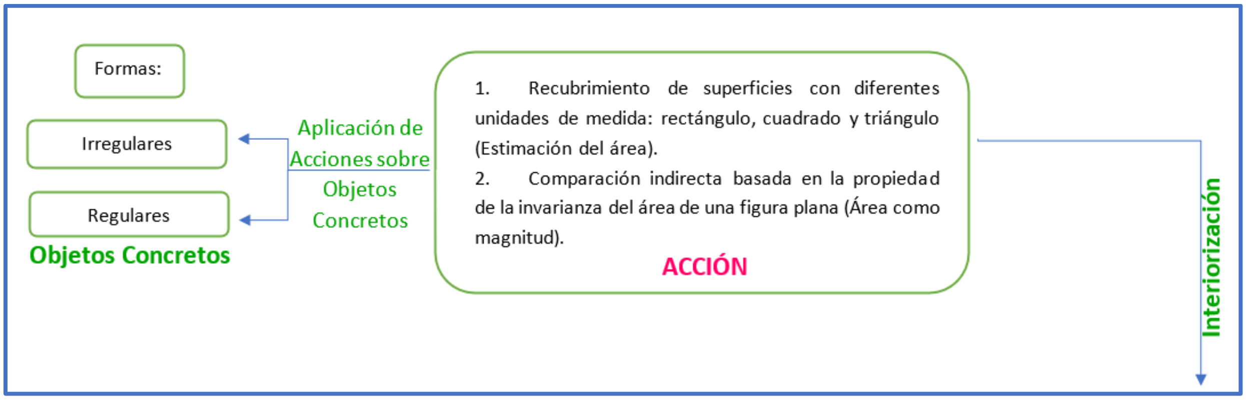


Figura 16. Acciones en la *descomposición genética hipotética* del área.

El mecanismo de interiorización que el estudiante puede realizar, orientado por las acciones y las preguntas relacionadas con esas acciones, se evidencia cuando sea capaz de seleccionar un recubrimiento de superficies con figuras cuadradas en la aproximación y hacer el conteo mentalmente pasando de la adición (conteo uno a uno) a la multiplicación (conteo de filas por columnas) de los objetos que usa para recubrir.

***Procesos*:** Se dice que el estudiante que logra un *proceso* de la noción de área desarrolla la capacidad de realizar la construcción mental de medir y comparar áreas de forma sistemática, sin necesidad del conteo de unidades cuadradas. Si el estudiante imaginó la solución de la situación, sin tener que efectuarlo explícitamente, entonces esta evidenciado un *proceso* a través de su de razonamiento mental.

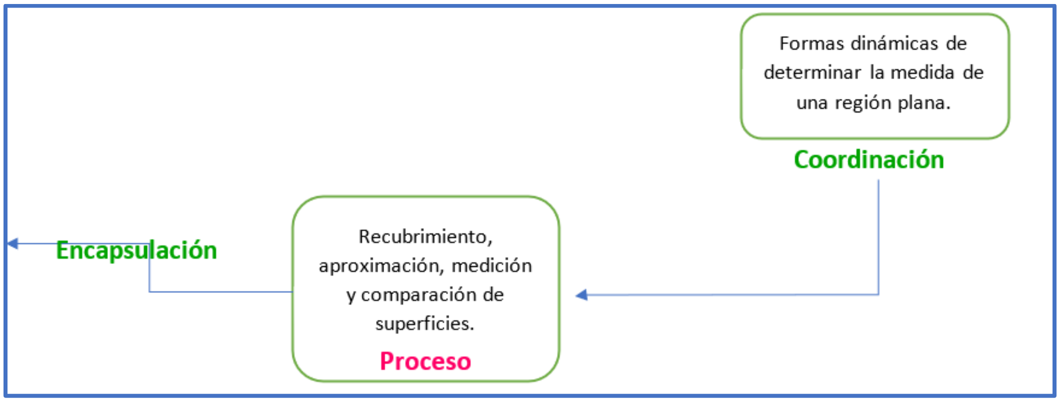


Figura 17. Procesos en la *descomposición genética hipotética* del área.

La coordinación se presenta por medio de la interacción entre el proceso de determinar la medida de una región plana y el desarrollo de la idea generalizada de recubrimiento, aproximación, medición y comparación de superficies planas.

Conseguir que el estudiante establezca el área de una superficie plana hace viable la encapsulación de este último *proceso* en un *objeto* donde la medida del área de una superficie plana puede determinarse con un valor entero positivo.

***Objeto*:** Para el grado sexto de básica secundaria, se considera como *objeto* lograr que el estudiante estime, compare y precise la medida del área de una superficie plana. Uno de los atributos de las figuras planas es la superficie, reconocer la medida de la superficie independiente del perímetro significa lograr aislar los conocimientos previos que pudieran haber generado confusión.

Así el concepto o noción de área se desprende de recordar una fórmula, como han evidenciado investigaciones, sin comprensión alguna de los elementos involucrados en ella o de la pertinencia de su aplicación en un determinado problema.

4.2.2 Diseño y Análisis del Instrumento. La segunda componente de la teoría APOE requiere de la *descomposición genética hipotética* para documentarla. En esta investigación se presenta con una secuencia de actividades contenidas en unos instrumentos, que buscan posibilitar la construcción de estructuras mentales descritas en la *descomposición genética hipotética* o en el caso que sea necesario agregar aquellas que se hayan considerado inicialmente.

La secuencia está compuesta por la prueba diagnóstica junto con seis actividades basados en estructuras y mecanismos mentales planteados en la *descomposición genética hipotética* (ver Figura 18). Todo enunciado de las actividades se propuso de tal forma que esté claramente conectado con un componente de la *descomposición genética hipotética*, considerando que la intención de la indagación es recoger datos, para mostrar una estructura o mecanismo elaborada por el estudiante; así se busca estudiar la forma como éste construye el concepto de área de figuras planas.

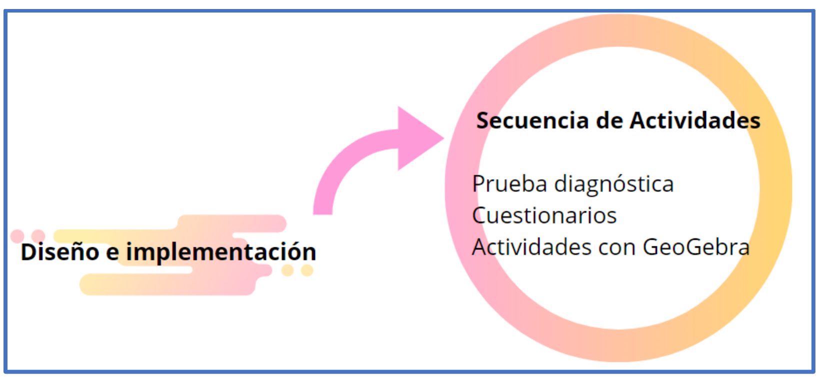
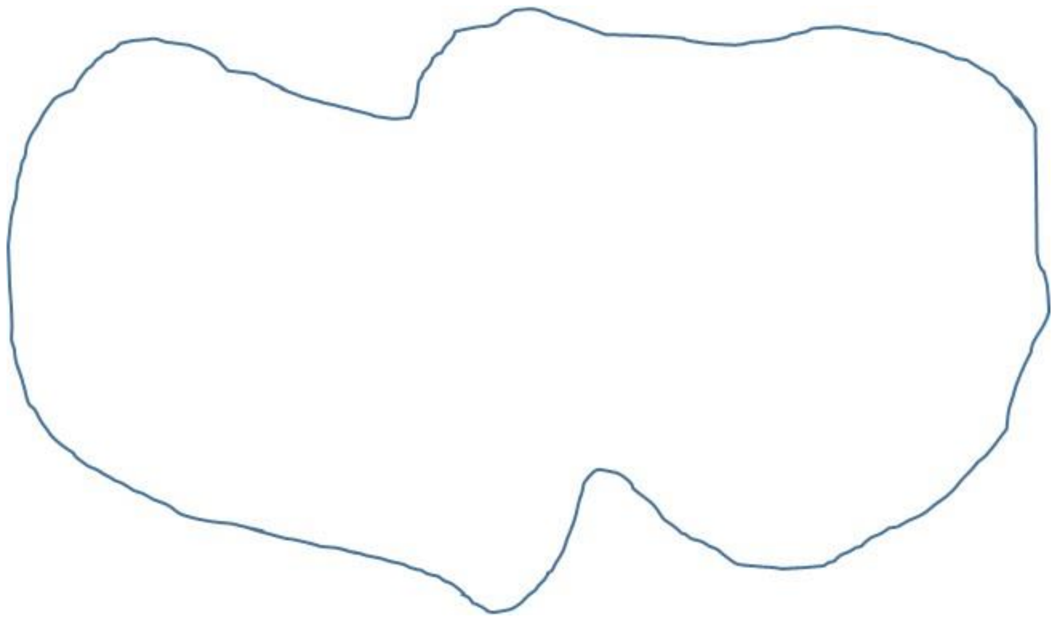


Figura 18. Diseño e implementación del instrumento. Adaptado de Londoño, M. Palacio, Y. (2018). Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de noción de área: un acercamiento con estudiantes de secundaria. (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Colombia. p.46

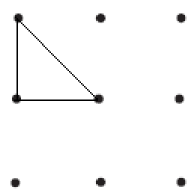
De la mediación con la tecnología: Una forma de mostrar el progreso en el aprendizaje concerniente a la noción de área de figuras planas es comenzar por el recubrimiento en material concreto como es papel, donde el recorte y pegado van a significar momentos determinados por el espacio y el tiempo para el estudiante; es decir, van a realizar las actividades con la limitante de que si se equivocan no van a poder corregir, motivo por el cual resultó llamativo tener la posibilidad de construir en geometría dinámica, GeoGebra, acciones que se pudieron hacer y volver a hacer sin miedo a equivocarse, no importa fallar porque el programa te motiva a intentarlo nuevamente y, no es el caso, por el contexto de los estudiantes de sexto, pero si quisieras te lo llevas para la casa y lo practicas, o lo descargas en el celular para implementarlo en el momento requerido.

***4.2.2.1 Análisis a priori de la actividad 1 estimación del área de una superficie no poligonal*:** A continuación, se analizan las probables soluciones que los estudiantes pueden expresar en respuesta al cuestionario expuesto en la actividad. Para fines de análisis de datos se determina a cada pregunta con la siguiente abreviación; si es la pregunta 1 se nombra como P_1, si es la pregunta 2 se nombra como P_2, así sucesivamente con las demás. (Ver Apéndice Cuestionario 1.)

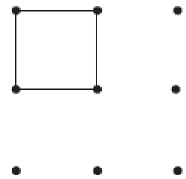
Pregunta 1. (**P_1**) ¿Qué formas geométricas puedes utilizar como unidad para recubrir la mayor superficie de la figura?



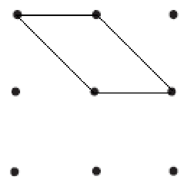
Los estudiantes pueden considerar las siguientes acciones para el recubrimiento de la superficie. Respuesta 1. (**R**$_1$): Recubrir con el triángulo dibujado de la cuadrícula como la mitad de la unión de cuatro puntos.



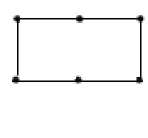
Respuesta 2. (**R**$_2$): Recubrir con el cuadrado dibujado de la cuadrícula como la unidad de distancia entre dos puntos.



Respuesta 3. (**R$_3$**): Recubrir con el paralelogramo dibujado de la cuadrícula de forma que se acomoda a las curvas de la superficie a recubrir.



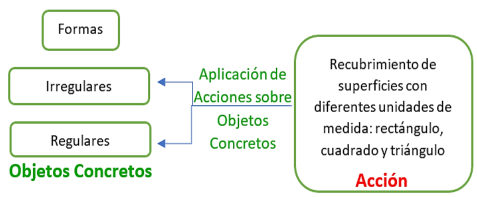
Respuesta 4. (**R$_4$**): Recubrir con el rectángulo dibujado de la cuadrícula como unidad de gran tamaño para recubrir la superficie.



A continuación, y en la tabla 4 se presenta la relación entre la P1 y la *descomposición genética hipotética*:

Tabla 4.

Relación entre la pregunta 1 y la Descomposición Genética Hipotética.

Pregunta P_1	**Argumento hipotético del estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
Objetivo Construir la noción de área como cantidad del plano ocupado por la superficie.	R_1: Triángulos.	Acción iniciadora recubrimiento de la superficie. 	**Interiorización**: Reconocer la medida de la superficie de una figura como el área que ocupa en el plano.
	R_2: Cuadrados.		
	R_3: Paralelogramos		
	R_4: Rectángulos		

Pregunta 2. (**P_2**): Construya una tabla de datos donde compare las diferentes formas usadas en el procedimiento de recubrimiento realizado en el ítem 1 y las cantidades de unidades de medida que utilizó para recubrir la superficie de la figura.

Los estudiantes posiblemente realizan las siguientes acciones.

Respuesta 1. (R_1): Conteo con solo triángulos y cuadrados completos.

Figura	**Unidades**
Triángulo	209
Cuadrado	95

Respuesta 2. (R_2): Conteo de triángulos, cuadrados, rectángulos y paralelogramos completos y aproximación.

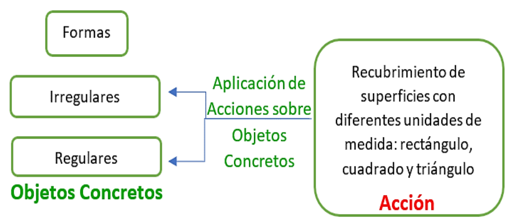
Figura	Unidades
Triángulo	210
Cuadrado	97
Rectángulos	43
Paralelogramos	45

Respuesta 3. (R_3): Conteo con triángulos, cuadrados y rectángulos completos y con los incompletos formar unidades cuadradas.

Figura	Unidades
Triángulo	215
Cuadrado	112
Rectángulos	49

Tabla 5.

Relación entre la pregunta 2 y la descomposición genética hipotética.

Pregunta P_2	Argumento hipotético del estudiante	Estructura	Mecanismo
Objetivo Comparar entre las diferentes unidades de medida y determinar la que mejor se aproxima para recubrir la totalidad de la figura.	R_1: Conteo con solo triángulos y cuadrados completos.	Acción iniciadora recubrimiento de la superficie.  	**Interiorización:** Confrontar las diferentes unidades de medida de área buscando la que mejor se aproxime al recubrimiento total de la superficie de una figura. La Acción de conteo permite que el estudiante reflexione sobre la importancia de la aproximación en el cálculo de áreas.
	R_2: Conteo de triángulos, cuadrados, rectángulos y paralelogramos completos y aproximación.		
	R_3: Conteo con triángulos, cuadrados y rectángulos completos y con los incompletos formar unidades cuadradas.		

Pregunta 3. (**P**$_3$): Justifique cuál es la mejor y más aproximada forma de recubrimiento de la superficie de la figura, exponiendo sus razones por las que considera que es la más apropiada.

Los estudiantes posiblemente realizan las siguientes interiorizaciones.

Respuesta 1. (**R**$_1$): La más aproximada figura geométrica de recubrimiento es el triángulo porque se puede contar hasta algunos rincones de la figura donde cabe un triángulo.

Respuesta 2. (**R**$_2$): El cuadrado es la que más se aproxima porque al recubrir se pueden juntar pedazos y lograr completar otros cuadrados para cubrir en total la superficie.

Tabla 6.

Relación entre la pregunta 3 y descomposición genética hipotética.

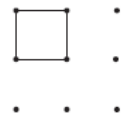
Pregunta P$_3$	**Argumento hipotético del estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
Objetivo Trabajar los procedimientos geométricos de: descomposición conveniente de la superficie con posterior reconfiguración	R$_1$: La más aproximada figura geométrica de recubrimiento es el triángulo porque se puede contar hasta algunos rincones de la figura donde cabe un triángulo.	Acción iniciadora recubrimiento de la superficie.  	**Interiorización**: Confrontar las diferentes unidades de medida de área buscando la que mejor se aproxime al recubrimiento total de la superficie de una figura.

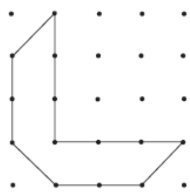
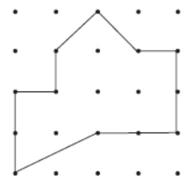
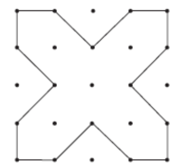
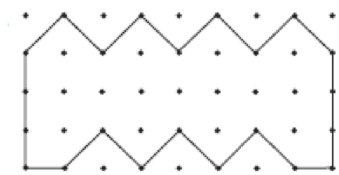
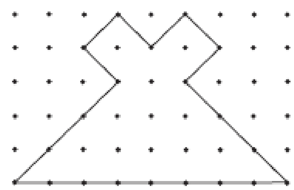
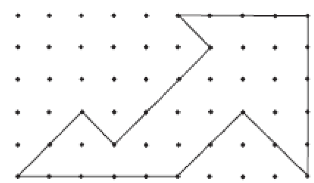
Tabla 6. *(Continuación)*

Pregunta P_3	**Argumento hipotético del estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
Objetivo por complementariedad de formas de las partes en las que se ha dividido la superficie.	R_2: El cuadrado es la que más se aproxima porque al recubrir se pueden juntar pedazos y lograr completar otros cuadrados para cubrir en total la superficie.		**Interiorización**: La Acción de comparar las unidades de conteo permite al estudiante considerar la finalidad de lograr tener cualquier superficie cubierta en su totalidad.

4.2.2.2 Análisis a priori de la actividad 2: área como número de unidades que recubren la superficie plana: La actividad busca cuestionar al estudiante y motivarlo a utilizar diferentes formas de recubrimiento, pero también a comparar las unidades e identificar que corresponden a la misma superficie cubierta. Para fines de análisis de datos se determina a cada pregunta con la siguiente abreviación; si es la pregunta 1 se nombra como P_1, si es la pregunta 2 se nombra como P_2, así sucesivamente con las demás. A continuación, se analizan las posibles soluciones que los estudiantes pueden transformar en estructuras mentales.

Pregunta 1 – P_1: Usando como unidad de medida el cuadrado presentado a continuación; determinar la cantidad unidades de recubrimiento necesarias para cubrir la superficie de las siguientes figuras.



A. 	B. 	C. 
D. 	E. 	F. 

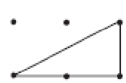
Nota: *Extraído de Musser, Burger y Peterson (2008)

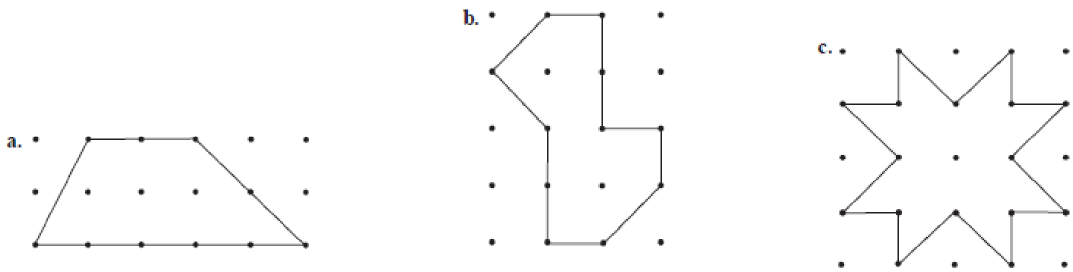
Posible interiorización del estudiante:

Respuesta 1. (**R$_1$**): Trazar la cuadrícula dentro de cada figura y contar las unidades cuadradas completas.

Respuesta 2. (**R$_2$**): Trazar la cuadrícula dentro de cada figura, contar las unidades cuadradas completas y con las incompletas formar nuevas unidades de medida.

Pregunta 2 – P$_2$: Usando como unidad de medida el triángulo presentado a continuación; hallar cuantas unidades de recubrimiento se necesitan para cubrir la superficie de las siguientes figuras.





*Extraido de Murssel, Burger y Peterson (2008)

Posible interiorización del estudiante:

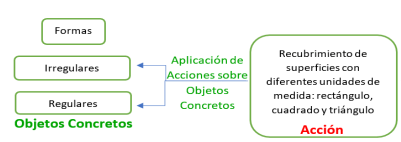
Respuesta 1. (**R₁**): Trazar la cuadrícula de unidad de medida triangular dentro de cada figura, pero cubrir toda la superficie.

Respuesta 2. (**R₂**): Trazar la cuadrícula dentro de cada figura y contar las unidades triangulares completas.

Respuesta 3. (**R₃**): Trazar la cuadrícula dentro de cada figura, determinar la equivalencia entre la unidad triangular y la unidad cuadrada, luego contar las unidades cuadradas completas y con las incompletas formar nuevas unidades de medida.

Tabla 7.

Relación entre actividad 2 y la descomposición genética hipotética.

Pregunta	**Objetivo**	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
P_1	Reconocer la descomposición y composición de la unidad de medida cuadrada para recubrir la totalidad de una superficie plana.	R_1: Trazar cuadrículas. R_2: Trazar cuadrículas, conteo de unidades cuadradas.	Acción iniciadora recubrimiento de la superficie.  	Interiorización: Determinar la media de la superficie plana por medio de composición y descomposición de la unidad de medida.

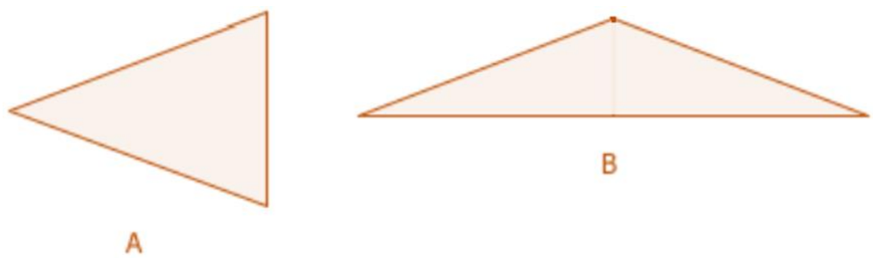
4.2.2.3 Análisis a priori de la actividad 3: Disociación entre el área y la forma de la superficie plana: Algunos autores matemáticos llaman a la disociación entre el área y la forma de la superficie plana como la propiedad de la invarianza del área; esta actividad es la última efectuada con material concreto en razón de fomentar el mecanismo de interiorización de la habilidad de visualización y reconocimiento del área de una superficie plana. Se nombra a cada pregunta con la siguiente abreviación; si es la pregunta 1 se nombra como P_1, si es la pregunta 2 se nombra como P_2, así sucesivamente con las demás. A continuación, se analizan las posibles soluciones que los estudiantes pueden transformar en estructuras mentales.

Pregunta 1 – P_1: Imagínate que estas dos áreas representan dos campos cubiertos de hierba.*

a. ¿Tiene el campo A la misma cantidad de hierba que el campo B? Justifica tu respuesta.

b. ¿Tiene el campo A la misma cantidad de hierba que el campo B? Justifica tu respuesta.

Pregunta 2 – P$_2$: Si tuvieras que pintar la Figura A, ¿necesitarías la misma o diferente cantidad de pintura que para pintar la Figura B? Justifica tu respuesta.



*Extraída de Hughes, Bell and Rogers (1975) en Corberan (1996)

Posible interiorización del estudiante sobre las preguntas 1 y 2 de la actividad 3:

Respuesta 1. (**R**$_1$): Determinar que las superficies son diferentes y por consiguiente tienen un área distinta.

Respuesta 2. (**R**$_2$): Analizar que las áreas tienen una relación de igualdad y por lo tanto las recorta y las compara por medio de la superposición.

Habiendo realizado las anteriores tres actividades, responde:

Pregunta 3 – P$_3$: ¿Dos figuras planas pueden tener diferente forma y ocupar la misma superficie? ¿Por qué?

Pregunta 4 – P$_4$: Al dividir una figura en partes, ¿el área de dicha figura cambia? ¿Se vuelve más pequeña una que la otra o, al contrario, se agranda?

Posible interiorización del estudiante sobre las preguntas 3 y 4 de la actividad 3:

Respuesta 1. (**R**$_1$): Reflexionar sobre lo expuesto en los numerales uno y dos, manteniendo la posición de que son diferentes sus áreas.

Respuesta 2. (**R2**): Determinar que la figura B es la misma figura A, debido a que fue divida en partes cambio su forma, pero su superficie o tamaño no cambió.

Tabla 8.

Relación entre actividad 3 y la descomposición genética hipotética.

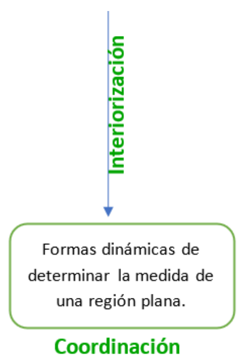
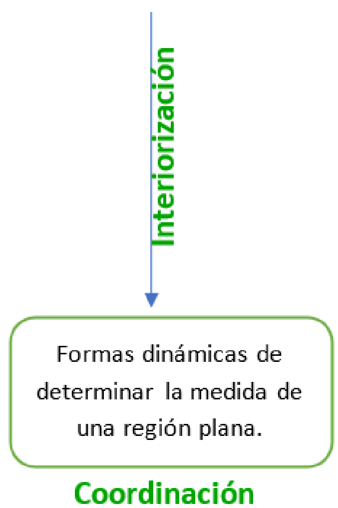
Pregunta	**Objetivo**	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
P_1, P_2	Establecer relación de igualdad entre superficies planas que tienen igual área, pero diferente forma.	R_1: Diferentes superficies poseen diferentes áreas, conclusión por simple inspección. R_2: Recorte y superposición de figuras asimilando que tienen la misma área.	Proceso: Transformar mentalmente una superficie en otra y establecer que son congruentes. 	Interiorización: Se puede considerar como la formalización que hace el estudiante cuando logra desarticular la concepción del área de figuras con única forma.

Tabla 8. *(Continuación)*

Pregunta	**Objetivo**	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
P_3, P_4	Conseguir una comunicación de sus acciones en el desarrollo de situaciones parecidas.	R_1: Diferente forma implica diferente medida de superficie. R_2: Diferente forma no necesariamente implica diferente medida de superficie.	Proceso: Considerar otros casos de superficies que se puedan transformar en equivalentes y establecer que son congruentes.  	Interiorización: Construir un esquema mental de las figuras planas que transforme una superficie en otra y pueda indicar que son congruentes.

4.2.2.4 Análisis a priori de la actividad 4: Área como magnitud autónoma: Los procedimientos geométricos asociados con la herramienta GeoGebra activan en el estudiante mecanismos de interés por desarrollar las actividades planteadas; se asocia el área como magnitud autónoma a la disociación del área de la forma y del perímetro de la figura plana (Corberán, 1996). Se nombrando a cada pregunta con la siguiente abreviación; si es la pregunta 1 se nombra como P_1, si es la pregunta 2 se nombra como P_2, así sucesivamente con las demás. Se analizan, a continuación, las posibles soluciones que los estudiantes pueden transformar en estructuras mentales.

En la institución educativa se contó con 27 equipos portátiles, a la fecha estaban en funcionamiento 20 de ellos, los equipos para la aplicación de GeoGebra 5.0 no presenta inconveniente por ser una aplicación offline; aunque algunos de esos equipos poseen virus que provocan inconvenientes en algunos momentos de su utilización. El juego de los animalitos del Tangram consiste en rotar y trasladar las siete fichas del Tangram y colocarlas una al lado de las otras, sin sobreponerlas, de tal forma que se construya un gato en primera instancia seguido de otros cinco animalitos y por último deben construir el cuadrado. Se cierra la actividad con unas preguntas sobre el concepto de área.

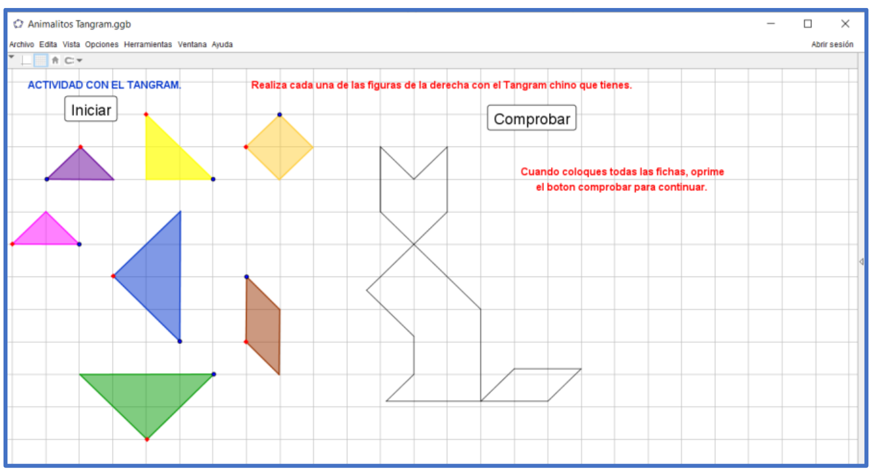


Figura 19. Actividad inicial con el Tangram en GeoGebra.

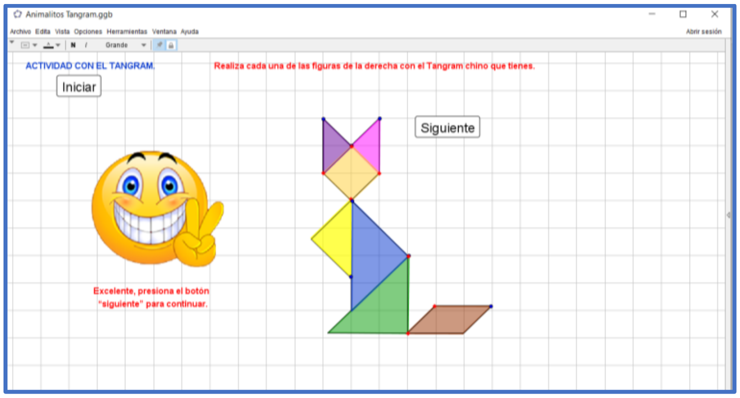


Figura 20. Resolución con movimientos de traslación y rotación con el Tangram en GeoGebra.

Pregunta 1 – P1: En los computadores se ha instalado la aplicación de GeoGebra donde podrás encontrar un archivo titulado TANGRAM. El Tangram es un juego de origen chino que consiste en formar figuras usando las 7 piezas dadas sin solaparlas (sobreponer unas con otras). Cuando hayas logrado armar la figura propuesta debes dar clic en comprobar y el programa te contestará con una carita feliz si has logrado con éxito la construcción o te pedirá que vuelvas a intentarlo.

Cuando hayas completado el juego en GeoGebra, contesta las siguientes preguntas:

Determina el área de las figuras construidas y la relación entre ellas, describe los pasos realizados y socializa con tus compañeros.

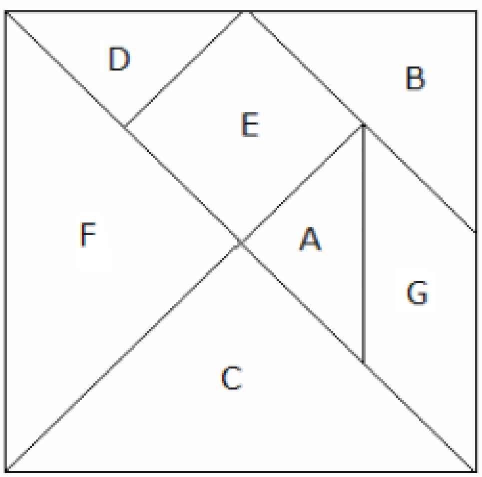
Figura del Tangram	Área
Gato	
Caballo	
Tortuga	
Pez	
Toro	
Pato	
Cuadrado	

Posible interiorización del estudiante:

Respuesta 1. (**R_1**): Rotar y trasladar las diferentes superficies que componen el Tangram para formar cada una de las figuras solicitadas.

Respuesta 2. (**R_2**): Rotar y trasladar las diferentes superficies que componen el Tangram para formar cada una de las figuras solicitadas, luego contar la superficie de cada una de esas piezas para sumarlas y determinar la medida de la superficie del primer "animalito" haciendo una relación de igualdad con los demás trabajos interiorizando que todos tienen la misma área.

Pregunta 2 – P_2: Teniendo en cuenta las fichas del Tangram, responde:



Si todas las fichas son medidas con la ficha A como unidad de medida, ¿cuál es la relación entre ellas?

B=_2A_, C = __, D = __, E =__, F =__, G = __

Igual situación, pero ahora la unidad de medida es B.

A= $\frac{1}{2}$ B, C = ___, D = ___, E =___, F =___, G = ___

Igual situación, pero ahora la unidad de medida es E.

A=___, B = __, C = ___, D =___, F =___, G = ___

Compare el área de cada ficha del Tangram con respecto al cuadrado completo y exprese dicha relación.

A=_____, B = ____, C = _____, D =_____, E = _____, F =_____, G = _____

Posible interiorización del estudiante:

Respuesta 1. (**R**$_1$): Trazar cuadrícula sobre el Tangram reconociendo solamente relación de igualdad entre superficies.

Respuesta 2. (**R**$_2$): Identificar la relación de igualdad y de inclusión que existe entre las diferentes superficies que componen el Tangram.

Tabla 9.

Relación entre actividad 4 y la descomposición genética hipotética.

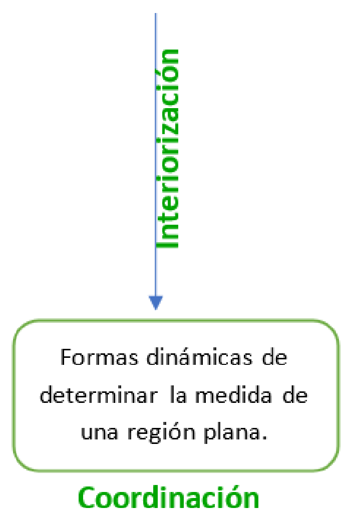
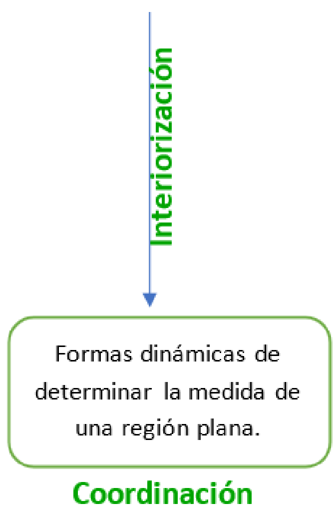
Pregunta	**Objetivo**	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
P$_1$	Facilitar la comprensión de la conservación del área de una superficie plana, mediado por la herramienta GeoGebra.	R$_1$: Sobreponer las fichas del Tangram. R$_2$: Sobreponer las fichas del Tangram y hallar relación de igual de superficies planas.	Proceso: Conocer la medida de la superficie de una figura armada con las siete fichas del Tangram. 	Coordinación: El estudiante adquiere la habilidad de rotar y trasladar las fichas del Tangram para llegar a predecir que todas ocupan la misma superficie.

Tabla 9. *(Continuación)*

Pregunta	**Objetivo**	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
P_2	Precisar relación de igualdad o inclusión entre las áreas de las superficies planas.	R_1: Considera la unidad de medida, determinando relación de igualdad entre superficies. R_2: Comparación de unidades de medida, las relaciona como igualdad o inclusión de superficies.	Proceso: La herramienta GeoGebra le muestra al estudiante una alternativa para asociar áreas de superficies planas. 	Coordinación: Se puede contemplar como la formalización que el estudiante logra al empalmar el proceso geométrico realizado en GeoGebra con el análisis lógico del tratamiento cualitativo del área.

4.2.2.5 Análisis a priori de las actividades 5a, 5b y 5c: Área como número de unidades que recubren una superficie: Las actividades se llevaron a cabo en tres sesiones, todas ellas tienen la finalidad de aplicar los conocimientos previos sobre construcción del rectángulo en GeoGebra como punto de inicio para desarrollar el concepto de área. Se da inicio al análisis del área de rectángulos entendido desde la perspectiva de número de unidades que recubren la superficie e igualmente se hará este proceso con las otras dos actividades.

Siguiendo la recomendación de Corberán (1996) se ha trabajado en sesiones anteriores a esta la composición y descomposición de superficies conservando el área; con las *acciones* interiorizadas se busca haber alcanzado *procesos* en el estudiante que le permitan desligar el procedimiento del área al del perímetro y minimizar la confusión que en la mayoría de los casos se ha producido durante años escolares de la básica.

Un ejemplo de las actividades es la construcción de cuadrados con la herramienta GeoGebra conservando la propiedad del arrastre, es decir que la figura construida no pierda su forma al ampliarse o reducirse. Luego se realizaron interiorizaciones con las acciones de medición de áreas y solución de situaciones problemas concernientes al tema.

Pregunta 1 – P_1: Con la utilización de la herramienta GeoGebra, construir un cuadrado con vértices EFGH que resista la prueba de arrastre. Luego realizar los siguientes movimientos de tal manera que el cuadrado tenga las medidas:

- Construir un cuadrado que mida de lado 2 unidades. ¿Cuántas unidades cuadradas encierra?
- Construir un cuadrado que mida de lado 3 unidades. ¿Cuántas unidades cuadradas encierra?
- Seguir en la misma indicación de los puntos anteriores y completar la tabla:

Longitud del segmento EF	Longitud del segmento FG	Superficie del cuadrado EFGH
4	4	
5	5	
6	6	
7	7	
8	8	

Longitud del segmento EF	Longitud del segmento FG	Superficie del cuadrado EFGH
9	9	
10	10	
11	11	
12	12	

Posible interiorización del estudiante:

Respuesta 1. (**R**$_1$): Construir el cuadrado con la propiedad de la prueba de arrastre, contar las unidades cubiertas y sumarlas.

Respuesta 2. (**R**$_2$): Construir el cuadrado con la propiedad de la prueba de arrastre, analizar la medida del largo y del ancho y multiplicar las dimensiones para hallar el área.

Pregunta 2a – P$_{2a}$: En la clase de artística se desea elaborar un tapete artístico con material reciclable con cajas de cartón, el tapete debe tener forma cuadrada y que mida 400 cm^2 de área. Para los estudiantes recortar la figura deben averiguar ¿Cuál es la medida de lado que debe tener el tapete?

Posible interiorización del estudiante:

Respuesta 1. (**R**$_1$): Utilizar la propiedad de la prueba de arrastre para representarla la situación problema, medir superficies hasta obtener una cuya área es dada para medirle los lados.

Respuesta 2. (**R**$_2$): Utilizar la propiedad de la prueba de arrastre para representarla la situación problema y descomponer el área en factores iguales.

Pregunta 2b – P_{2b}: Para la clase de química los estudiantes construyen una maqueta cuadrada que medida 38 cm de lado donde representen el sistema de riego que se utiliza en la vereda Motoso. ¿Qué medida tendrá la superficie de la maqueta?

Posible interiorización del estudiante:

Respuesta 1. (**R_1**): Determinar el área de la superficie plana valiéndose de una representación gráfica.

Respuesta 2. (**R_2**): Determinar el área de la superficie plana haciendo la multiplicación de las medidas de sus lados.

Tabla 10.

Relación entre Actividad 5a, 5b y 5c y la descomposición genética hipotética.

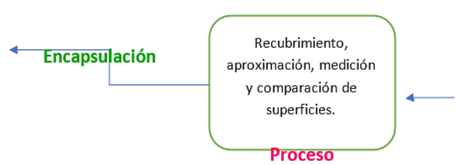
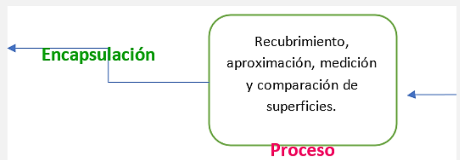
Pregunta	**Objetivo**	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
P_1, P_2, P_3	Ejecutar el cálculo del área de la superficie plana, creando relaciones de lado por lado en el caso de los cuadrados; o en el caso de los rectángulos base por altura.	R_1: Conteo de unidades bidimensionales. R_2: Relaciones bidimensionales y multiplicación de dos unidades unidimensionales.	Proceso: Medición de superficies planas. 	Encapsulación: Se puede reflexionar como la formalización que el estudiante alcanza por medio de las conexiones entre el conteo de unidades bidimensionales y la medición del recubrimiento de superficies.

Tabla 10. *(Continuación)*

Pregunta	**Objetivo**	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
P_4, P_5		R_1: Representar la situación problemática y contar unidades cuadradas.	Proceso: Medición de superficies planas. 	Encapsulación: Se puede reflexionar como la formalización que el estudiante alcanza por medio de las conexiones entre el conteo de unidades bidimensionales y la medición del recubrimiento de superficies.
		R_2: Representar la situación problemática, luego dar un número resultado de una operación multiplicativa.		

5. Análisis de Resultados.

En este capítulo se presenta el fruto de la aplicación de la intervención realizada por medio de los diferentes cuestionarios desarrollados a partir de la *descomposición genética hipotética*. El análisis de los datos obtenidos es el tercer componente del ciclo en la teoría APOE.

Figura 21. Observación, análisis y verificación de datos. Adaptado de Londoño, M. Palacio, Y. (2018). Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de noción de área: un acercamiento con estudiantes de secundaria. (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Colombia. p.65

Como primera medida, se analizan las respuestas dadas por los educandos en la prueba diagnóstica; allí hubo interpretaciones erradas entre perímetro y área, que falta un alto grado de conocimiento del concepto de área y, por tanto, han asimilado a través de los años escolares, una relación errada entre área y las fórmulas sugeridas como procesos de solución. Luego, se estudiaron los cuestionarios desde la *descomposición genética hipotética* que acompañaron cada actividad implementada, con ellos se determinó si los estudiantes han considerado o no las estructuras y los mecanismos mentales propuestos. El contenido se aprecia descrito por medio de ejemplos y de la relación de las respuestas con los componentes pertenecientes a la *descomposición genética hipotética* como estrategia de validación por medio del surgimiento de nuevas variables para tener en consideración.

5.1 Análisis de la prueba diagnóstica.

En la prueba diagnóstica se emplearon cinco preguntas relacionadas con perímetro y área por dos razones: i) evitar condicionar a los individuos a pensar en multiplicar dimensiones (ejemplo: base por altura) y ii) para observar si existen falsas interpretaciones de relación entre área y perímetro. Respecto a las preguntas: tres de ellas fueron extraídas del Calendario Matemático (www.colombiaaprendiendo.com); esta elección permitió tratar los temas de manera conjunta evitando que estuvieran predispuestos a sentirse en evaluación y porque los estudiantes conocen este material didáctico, desarrollado desde el mes de febrero del año escolar hasta el mes de octubre, pero con la indagación se observó que se requiere de más tiempo y constancia para que este material haga un cambio de perspectiva de los estudiantes; las otras dos preguntas se obtuvieron de pruebas AVANCEMOS 6° 2018.

La siguiente tabla registran los resultados de la prueba diagnóstica donde se tuvo en cuenta si los *objetos* área y perímetro eran comprendidos por el estudiante. El perímetro aunque no es desarrollado en el presente trabajo, es de vital importancia tener registro de las respuestas que entregan los estudiantes para analizar si diferencian los dos conceptos. Se asignó un código a cada estudiante comenzando por E1 y terminando en E20; por razones éticas no se enuncian sus nombres.

Tabla 11.

Resultados de la prueba diagnóstica.

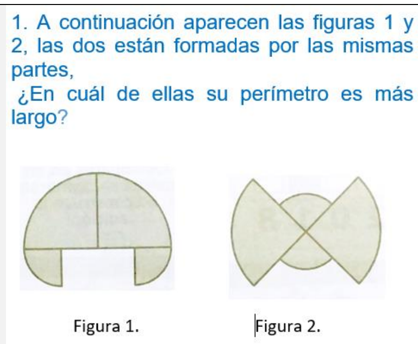
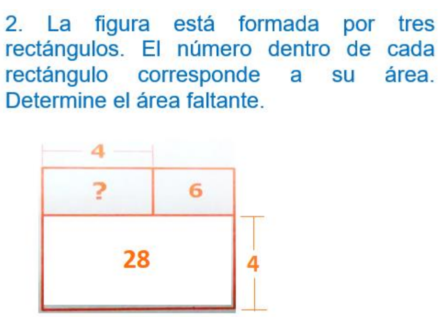
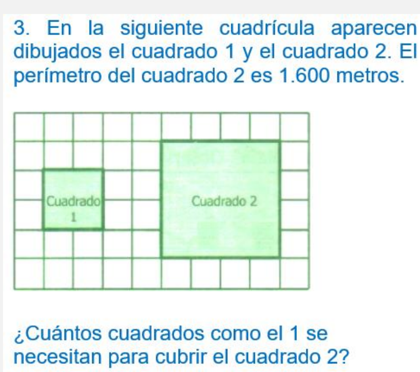
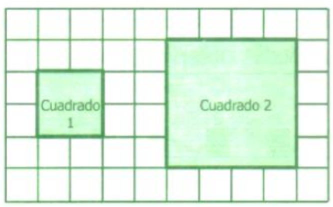
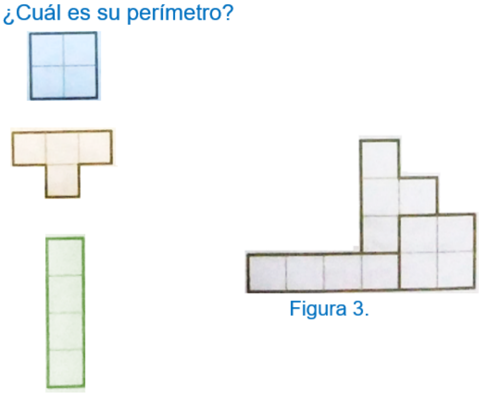
Pregunta	Item	Criterios valorados	Estudiantes	Objeto según la teoría APOE
1		Respuesta totalmente incorrecta	E1, E2, E4, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19.	Diferenciación entre perímetro y área de figuras planas.
		No responde.	E3, E5, E20.	
2		Respuesta correcta pero sin proceso.	E1, E2, E3, E14.	Concepto de área de una superficie plana.
		Respuesta incorrecta.	E4, E5, E6, E7,E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20.	
3		Respuesta totalmente correcta.	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E13, E14, E15, E16, E17.	Concepto de área de superficie plana.
		Respuesta incorrecta.	E12, E18, E19, E20.	

Tabla 11. *(Continuación)*

Pregunta	**Item**	**Criterios valorados**	**Estudiantes**	**Objeto según la teoría APOE**
4	4. En la siguiente cuadrícula aparecen dibujados el cuadrado 1 y el cuadrado 2. El perímetro del cuadrado 2 es 1.600 metros.  ¿Cuál es el perímetro del cuadrado 1?	Respuesta totalmente correcta.	E5, E10.	Desarticulación entre área y perímetro de superficies planas.
		Respuesta incorrecta.	E1, E2, E3, E4, E6, E7, E8, E9, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20.	
5	5. Cada ficha de la izquierda está formada por cuadrados de lado 2 cm. Con las tres fichas se formó la Figura 3 de la derecha. ¿Cuál es su perímetro?  Figura 3.	Respuesta totalmente correcta, justificada con proceso.	E3.	Concepto de perímetro de figuras planas.
		Respuesta incorrecta	E1, E2, E4, E5, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E16, E17.	
		No responde	E6, E7, E15, E18, E19, E20.	

Para la primera pregunta no se obtuvo ningún resultado positivo, de los 20 estudiantes, siete dijeron que tenía mayor perímetro la Figura 2, cuatro dijeren que tenía mayor perímetro la Figura 1 y el resto dijeron que no sabian a qué se refería o no entendían lo que se solicitaba. Frecuentemente los estudiantes están acostumbrados a preguntas donde deben elegir una opción, dadas sus edades, la mayoría piensa que sin importar lo que hayan leido o entendido debe ser una selección excluyente.

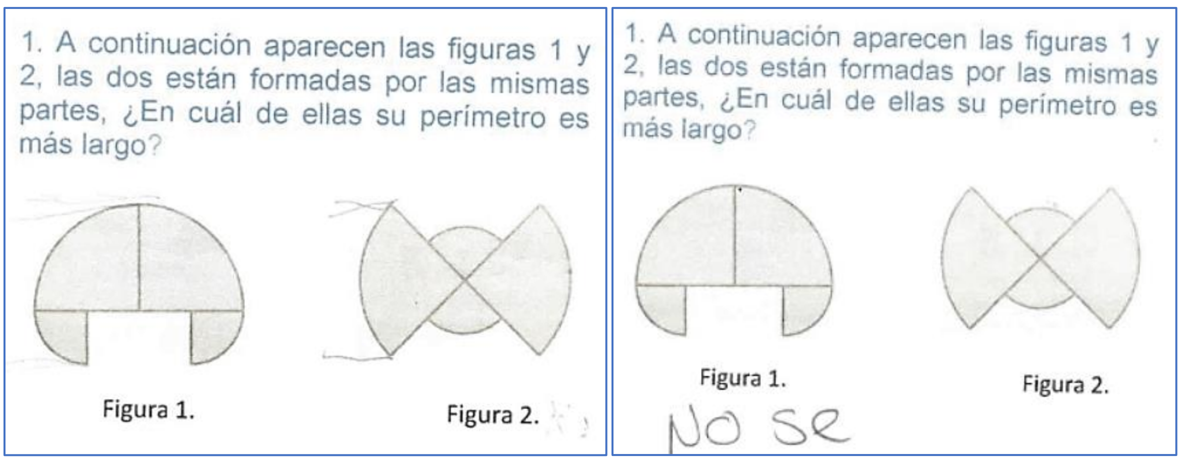


Figura 22. Ejemplo de respuestas a la pregunta 1 de la prueba diagnóstica.

La segunda pregunta evidencia que los estudiantes perciben toda cantidad puesta en un enunciado como semejante, sin tener en cuenta como dice el enunciado que los números externos corresponden a las longitudes de alto o ancho y que los valores internos corresponden al área de la región rectangular, esto se debe a que normalmente, los temas referentes al pensamiento espacial son desarrollados al final del año escolar y con poca profundidad; se imparte la fórmula de área con las figuras conocidas como cuadrado y rectángulo apartando a un lado el posible análisis de figuras cóncavas. El área en muchos casos es tratada solo como lado por lado o base por altura; por tal motivo, evidencian confusiones en la solución de estas pruebas.

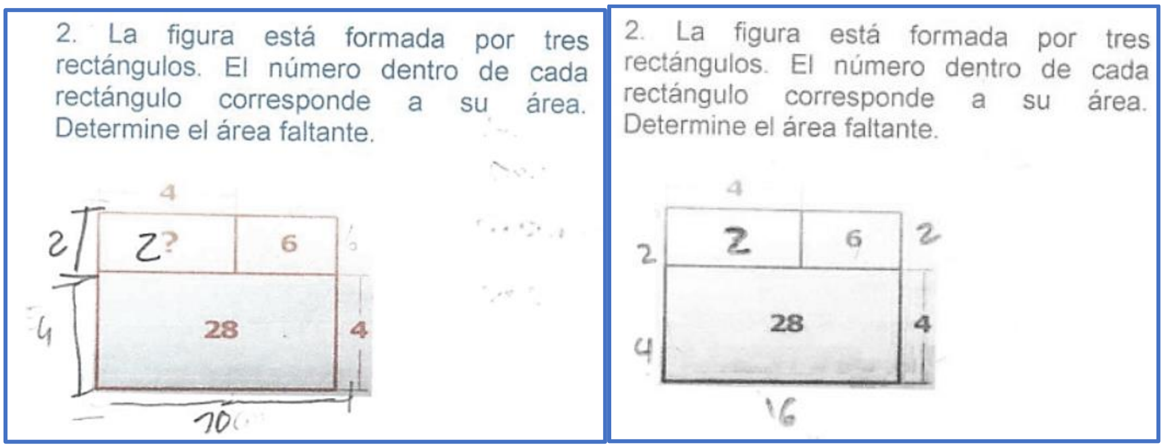


Figura 23. Ejemplo de respuestas a la pregunta 2 de la prueba diagnóstica.

En conclusión, la prueba diagnóstica arroja una necesidad sentida de aclarar estos dos conceptos y es desde la investigación que se quiere abordar con *acciones* concretas para crear *procesos* didácticos que lleven a un tratamiento adecuado de la formación del *objeto* mental.

5.2 Resultados de la aplicación.

El ciclo de la investigación cuenta con un factor importante, el cual es la verificación de la validez de la *descomposición genética hipotética* a través de los cuestionarios para la recopilación de los datos. De tal manera que, cada una de las seis actividades aportaron uno o varios elementos pertenecientes a la *descomposición genética hipotética*, es por ello que se comenzó la intervención con el tratamiento del concepto de área como la cantidad del plano ocupado por la superficie, en seguida se pasó a desarrollar el área como número de unidades que recubren la superficie; luego, se da profundidad al concepto de área por medio del análisis como propiedad independiente de la de perímetro y así, favoreciendo estudiar el alcance en cada sesión aplicada, en paralelo que las estructuras y mecanimos mentales se incrementan.

En este escenario resulta pertinente rescatar los planteamientos de Arnot *et al*., (2014) así:

> El propósito del análisis de los datos obtenidos de la implementación de la intrucción es responder a dos preguntas: i) ¿Los estudiantes hacen la construcción mental dada por el análisis teórico? ii) ¿Cómo los estudiantes aprenden los contenidos matemáticos? Si la respuesta a la primera pregunta es negativa, entonces la introducción debe ser examinada y revisada. Si la respuesta a la primera pregunta es positiva y la respuesta a la segunda pregunta es negativa, el análisis teórico es examinado y revisado. En cualquier caso, el ciclo se repite hasta que se ha respondido a estas preguntas positivamente y el profesor/investigador está convencido de que los estudiantes han aprendido los conceptos matemáticos. (Arnon, y otros, 2014, pág. 93)

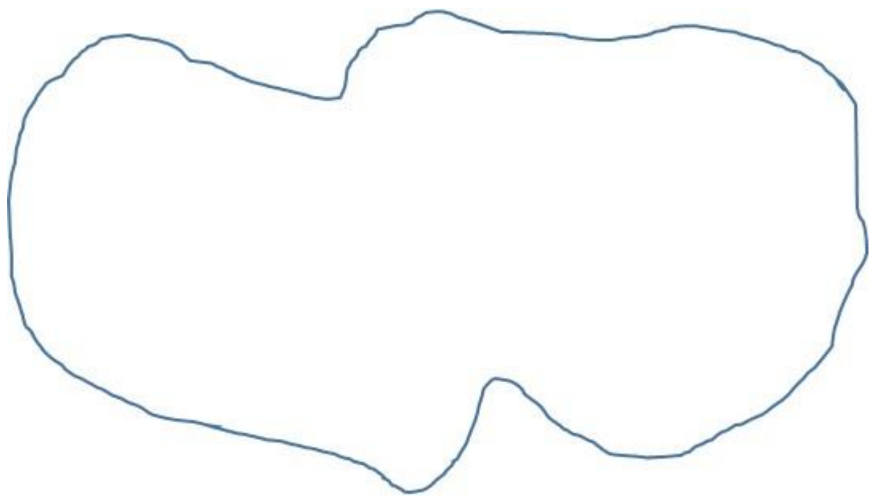
Desde la teoría APOE se quiere responder cómo los individuos construyen la noción de área; realizando el ciclo de investigación que no dista mucho de los intereses que mueven la investigación acción.

5.2.1 Análisis a posteriori de los cuestionarios. Basado en estudios previos realizados (Corberán, 1996) se procedió de tal manera que el estudiante desarrolle acciones de recubrimiento aproximado sobre superifices planas no poligonales por razones como: i) el área tiene su origen en la medición de terrenos irregulares, ii) el contexto donde se implementa la investigación es rural, y iii) el concepto de área va dirigido al cálculo integral.

Para el análisis de resultados se efectúa una relación entre las respuestas y la Descomposición Genética Hipotética identificando las estructuras y mecanismo que construyen los educandos. En la tabla número 12 se clasifican las respuestas de los educandos según el análisis aplicado en el cuestionario; se mantiene la nomenclatura usada para identificar a cada estudiante por la letra E acompañada de un número para conservar el anonimato.

Acción iniciadora para el concepto de área como porción del plano ocupado: explorar los posibles recubrimientos regulares que pueden determinar de forma aproximada la superficie de una región plana no poligonal.

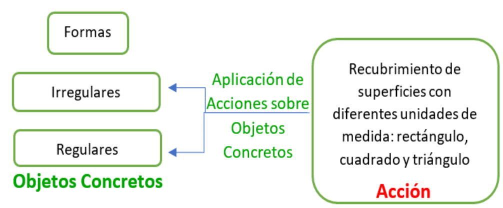
Pregunta 1 - P_1: A continuación, se presenta un bosquejo de un terreno dedicado a esparcir el café para ser secado al sol. Se desea saber la mejor y más aproximada forma geométrica para recubrirlo. ¿Qué formas geométricas puede tener la unidad de recubrimiento para cubrir la mayor parte de la superficie de la figura?



La siguiente tabla ilustra las respuestas elaboradas por los estudiantes, para esta pregunta se apoyaron en una malla de puntos y en otras mallas cuadrada y triangular como método de estimación de la superficie plana. Lo que se pretende es obtener variedad de unidades de medida y expandir las opciones de recubrimiento.

Tabla 12.

Análisis de respuestas de la pregunta 1 en la Actividad 1.

Estudiante	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
E1, E3, E4, E10, E11, E16, E18.	R_1: Triángulos.	Acción iniciadora recubrimiento de la superficie. 	**Interiorización**: Reconocer la medida de la superficie de una figura como el área que ocupa en el plano.
E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20.	R_2: Cuadrados.		
	R_3: Paralelogramos		
E1, E2, E4, E6, E7, E8, E9, E10, E12, E13, E14, E15, E17, E19, E5, E20.	R_4: Rectángulos		

Los resultados del análisis desde la teoría APOE arrojan que el 100% de los estudiantes muestran *acciones* de recubrimiento de superficie con manejo de malla de puntos o cuadrícula triangular. Algunos ejemplos llamativos se toman para reflejar lo antes dicho.

E1: El estudiante cuenta los cuadrados completos y junta los incompletos para formar unidades cuadradas; desde este análisis cuenta todos los cuadrados que cubren la superficie, con esto evidencia comprensión de la necesidad de aproximar y acercarse a la medida de la superficie en cuestión.

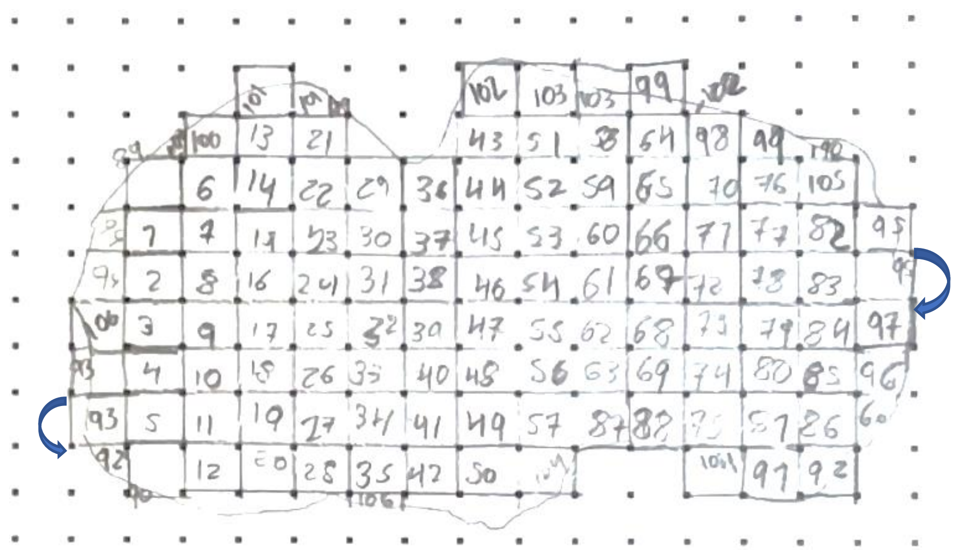


Figura 24. E1, Actividad 1 - P_1.

E18: El estudiante evidencia estar en los inicios para familiarizarse con el recubrimiento, aunque muestra recubrir la superficie con triángulos y cuenta los que representó pero no descompone la unidad de medida para recomponerla en partes que se aproximen por dentro y por fuera a la región no poligonal.

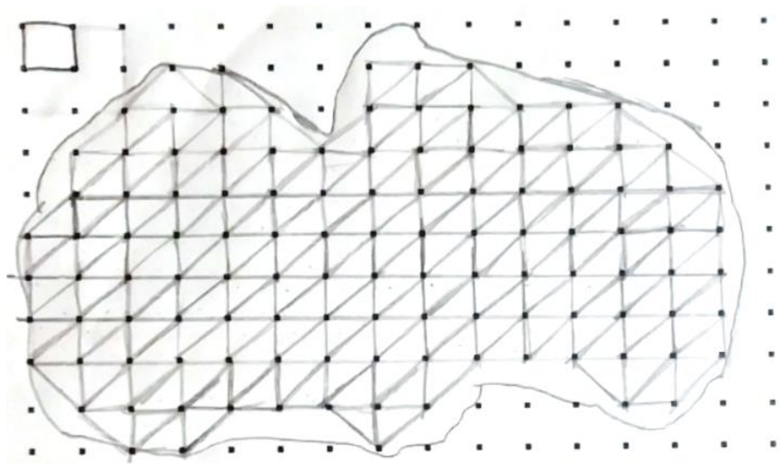


Figura 25. E18, Actividad 1 - P_1

E7: El estudiante cuenta los cuadrados completos y usa colores para juntar los incompletos para formar unidades cuadradas; desde este análisis cuenta todos los cuadrados que cubren la superficie, desarrollando el pensamiento espacial con un análisis gráfico apoyado en la distinción de las unidades formadas.

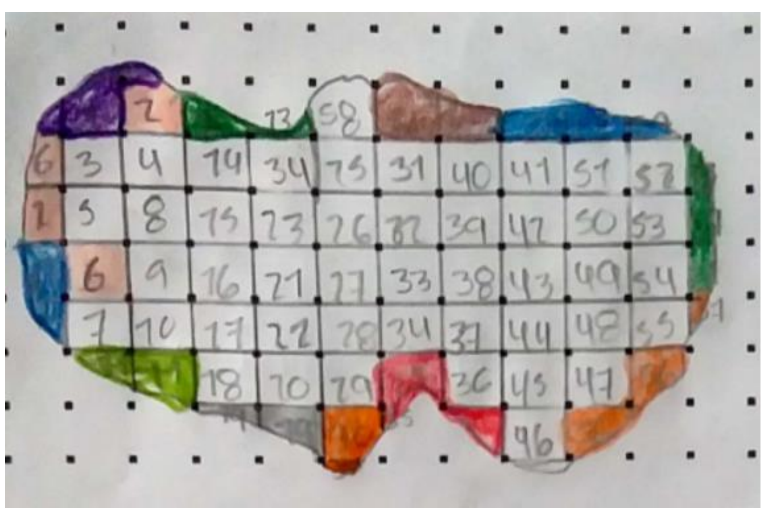


Figura 26. E1, Actividad 1 - P_1

E19: El estudiante recubre la superficie con unidades rectangulares señalandolas con un rayo las que va contando y colocando ese rayo en la mitad de algunas para señalar que con las incompletas forma nuevas undades.

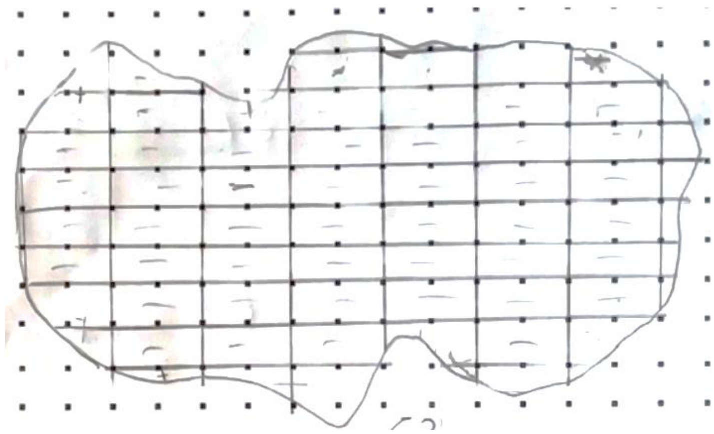


Figura 27. E19, Actividad 1 - P_1

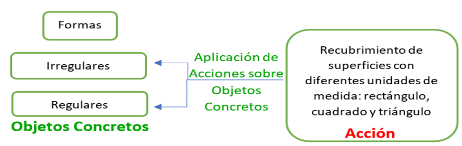
Acción iniciadora para el concepto de área como porción del plano ocupado: explorar los posibles recubrimientos regulares que pueden determinar de forma aproximada la superficie de una región plana no poligonal.

Pregunta 2 – P_2: Construya una tabla de datos donde compare las diferentes formas usadas en el procedimiento de recubrimiento realizado en la pregunta 1 y las cantidades de unidades de medida que utilizó para recubrir la superficie de la figura.

La tabla 13 muestra la caracterización de estimación del área de la superficie plana. La realización del conteo de unidades de medida completas y aproximadas no se dio entre los estudiantes, se expresaron interesados por unir los incompletos y formar nuevas unidades de recubrimiento.

Tabla 13.

Análisis de respuestas de la pregunta 2 en la Actividad 1.

Estudiante	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
E10, E18, E19, E20.	R_1: Conteo con solo triángulos, rectángulos y cuadrados completos.	Acción iniciadora recubrimiento de la superficie.	**Interiorización**: Confrontar las diferentes unidades de medida de área buscando la que mejor se aproxime al recubrimiento total de la superficie de una figura. La Acción de conteo permite que el estudiante reflexione sobre la importancia de la aproximación en el cálculo de áreas.
	R_2: Conteo de triángulos, cuadrados, rectángulos y paralelogramos completos y aproximación.		
E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17.	R_3: Conteo con triángulos, cuadrados y rectángulos completos y con los incompletos formar unidades cuadradas.		

Como se puede verificar en la tabla 13, las Acciones que realizan los estudiantes, desde la teoría APOE, revelan la interiorización de la identificación del área como recubrimiento de la superficie plana no poligonal.

E18: El estudiante efectua un conteo de unidades completas de cuadrados y de rectángulos sin aproximación, luego suma el total de las unidades, como se muestra en la imagen. La ejecución del trabajo evidencia cómo el estudiante concibe el área como la cantidad de cuadrados y rectángulos que caben en la superficie no poligonal.

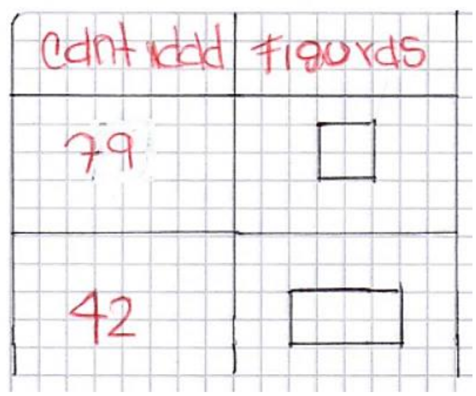


Figura 28. E18, Actividad 1 - P_2.

E1: El estudiante realiza el conteo de unidades y con las incompletas forma unidades de medida para recubrir la figura plana en su totalidad. Las Acciones registran que durante el desarrollo de la actividad se asimiló el concepto de área como cantidad de plano ocupado por la superficie.

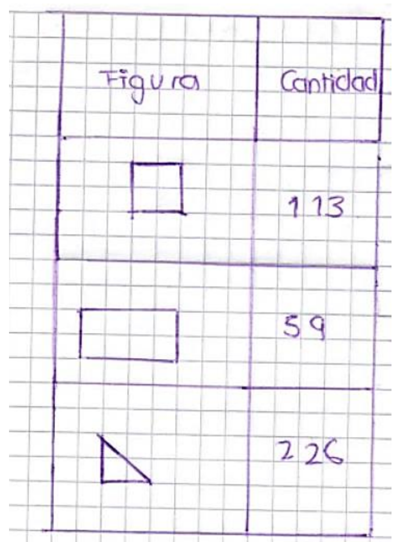


Figura 29. E1, Actividad 1 - P_2.

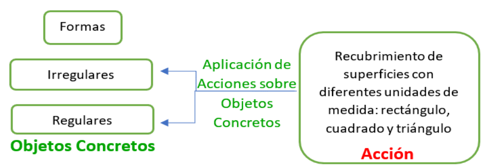
Acción iniciadora para el concepto de área como porción del plano ocupado: explorar los posibles recubrimientos regulares que pueden determinar de forma aproximada la superficie de una región plana no poligonal.

Pregunta 3 – P_3: Justifique cuál es la mejor y más aproximada forma de recubrimiento de la superficie de la figura, exponiendo sus razones por las que considera que es la más apropiada.

Esta pregunta fue resuelta en parejas, a partir de los datos organizados en la tabla 14 se procederá a emitir algunos ejemplos de las respuestas de los estudiantes.

Tabla 14.

Análisis de respuestas de la pregunta 3 en la Actividad 1.

Estudiante	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
E8, E17, E19, E20.	R_1: La más aproximada figura geométrica de recubrimiento es el triángulo porque se puede contar hasta algunos rincones de la figura donde cabe un triángulo.	Acción iniciadora recubrimiento de la superficie. 	**Interiorización**: Confrontar las diferentes unidades de medida de área buscando la que mejor se aproxime al recubrimiento total de la superficie de una figura. La Acción de comparar las unidades de conteo permite al estudiante considerar la finalidad de lograr tener cualquier superficie cubierta en su totalidad.
E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E18.	R_2: El cuadrado es la que más se aproxima porque al recubrir se pueden juntar pedazos y lograr completar otros cuadrados para cubrir en total la superficie.		

Los resultados en la tabla 14 muestran las Acciones en el desarrollo de los estudiantes, desde la teoría APOE, avanzan en su proceso de aprendizaje a la comparación de unidades de medida para una misma superficie.

E5 – E10: Los estudiantes expresan en el escrito su capacidad de tomar Acciones diferenciadoras entre las unidades de medida posibles para el recubrimiento.

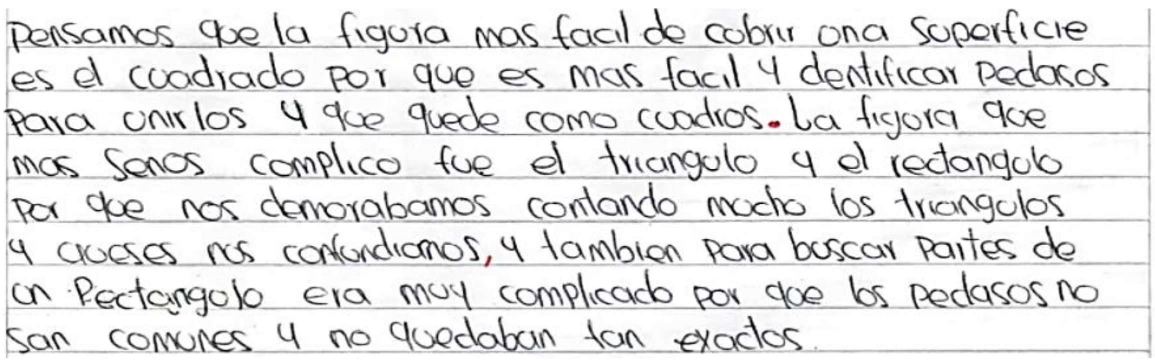

Pensamos que la figura mas facil de cobrir una superficie es el cuadrado por que es mas facil ydentificar pedasos para unirlos y que quede como cuadros. La figura que mas senos complico fue el triangulo y el rectangulo por que nos demorabamos contando mucho los triangulos y aveces nos confundiamos, y tambien para buscar partes de un rectangulo era muy complicado por que los pedasos no son comunes y no quedaban tan exactos.

Figura 30. E5 y E10, Actividad 1- P_3.

E1 – E7: Los estudiantes justifican su elección por la comodidad que han tenido al descomponer y recomponer el cuadrado, asumen el área como la aproximación de unidades cuadradas al cubrimiento total de la superficie.


cuadrados: son más faciles, Porqué son más pequeños y son más fáciles de unir: 91.

Figura 31. E1 y E7, Actividad 1- P_3.

E8 – E17: Los estudiantes dan a conocer su punto de vista “me gusta” y además justifican que desean recubrir la mayor parte del terreno, en concordancia con la misma intención que se propone desde la teoría APOE de transformar el concepto de área hasta lograr que lo reconozcan en temas como área bajo la curva.

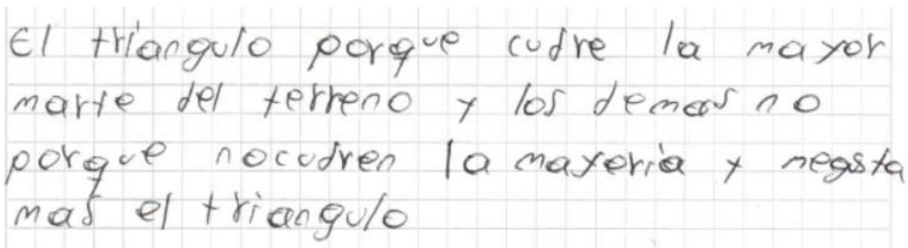
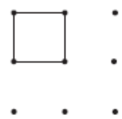


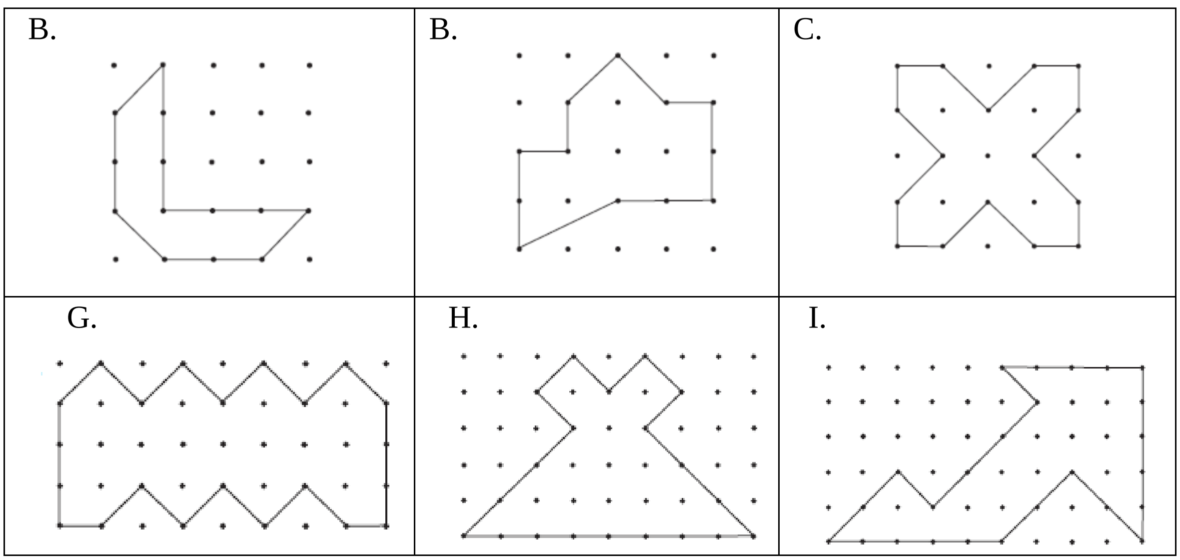
Figura 32. E8 y E17, Actividad 1- P_3.

De la mediación con la tecnología: Al culminar la primera actividad se observó que el estudiante no ha tenido la oportunidad de hacer recubrimientos de superficies planas; se planteó un proceso que es necesario pero que podría ser dinámico con el software GeoGebra y es por esta razón que se buscó en los estudiantes explorar las habilidades motrices para llegar al nivel que apoyados en la tecnología aprecien las ventajas de poder ampliar o reducir una superficie y observar el cambio de la medida del área.

Acción que trata el concepto de área como número de unidades que recubren la superficie plana: se procura utilizar diferentes formas de recubrimiento, pero también se plantea la necesidad de comparar las unidades de medida e identificar la correspondencia de equivalencia si son iguales en su medida y diferentes en su forma.

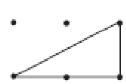
Pregunta 1 – P$_1$: Usando como unidad de medida el cuadrado presentado a continuación; determinar la cantidad unidades de recubrimiento necesarias para cubrir la superficie de las siguientes figuras.

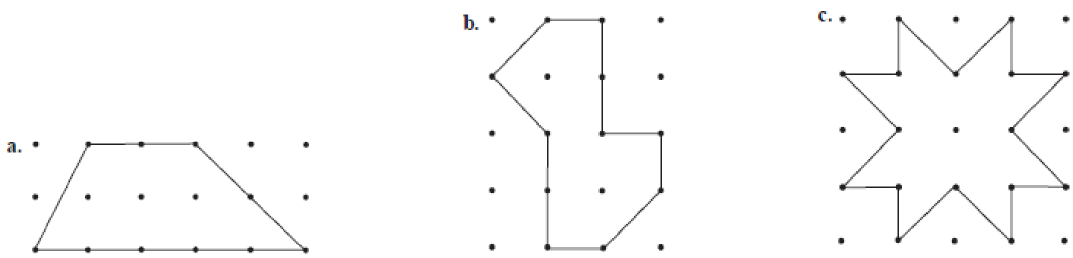




Nota. Extraído de Musser, Burger y Peterson (2008)

Pregunta 2 – P$_2$: Usando como unidad de medida el triángulo presentado a continuación; hallar cuantas unidades de recubrimiento se necesitan para cubrir la superficie de las siguientes figuras.





Nota. * Extraido de Murssel, Burger y Peterson (2008)

Se presenta en la tabla 15 un avance pausado en la interiorización del área como número de unidades de medida que la recubren, en este caso, no solo se les dan a conocer figuras convexas conocidas, sino que ponemos en consideración estudiar figuras cóncavas e irregulares.

Tabla 15.

Análisis de respuestas de la pregunta 1 y 2 en la Actividad 2.

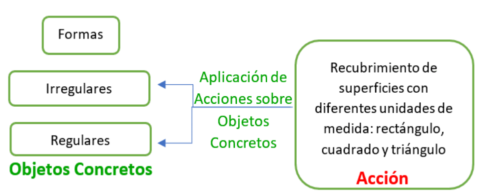
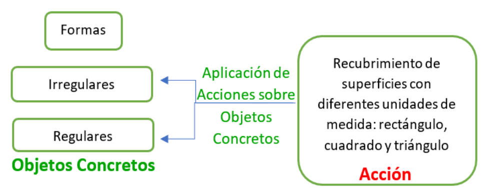
Pregunta	**Estudiante**	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
P_1	**E3, E6, E8, E16.**	R_1: Trazar cuadrículas.	Acción iniciadora recubrimiento de la superficie.	Interiorización: Determinar la media de la superficie plana por medio de composición y descomposición de la unidad de medida.
	E1, E2, E4, E5, E7, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E17, E18, E19, E20.	R_2: Trazar cuadrículas, conteo de unidades cuadradas.		

Tabla 15. *(Continuación)*

Pregunta	Estudiante	Argumento Hipotético Del Estudiante	Estructura	Mecanismo
P_2	**E14, E16.**	R_1: Trazar cuadrículas.	Acción iniciadora recubrimiento de la superficie.	Interiorización: Comparar unidades de recubrimiento y determinar si corresponden a la misma superficie recubierta.
	E11, E20.	R_2: Trazar cuadrículas, conteo de unidades triangulares.		
	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E12, E13, E15, E17,E18, E19.	R_3: Convertir la unidad triangular en equivalencia a la unidad cuadrada y hacer conteo de unidades cuadradas.		

El 80% de los estudiantes construyen cuadrícula contando unidades de medida cuadradas y complentando otras unidades con la composición de sus partes.

E1 y **E7:** Los estudiantes trazan cuadrículas dentro de cada figura, descomponiendo la unidad de medida cuadrada en triángulos, luego cuenta marcando con un punto cada unidad cuadrada y les coloca un conteo sucesivo a la recomposición de la unidad.

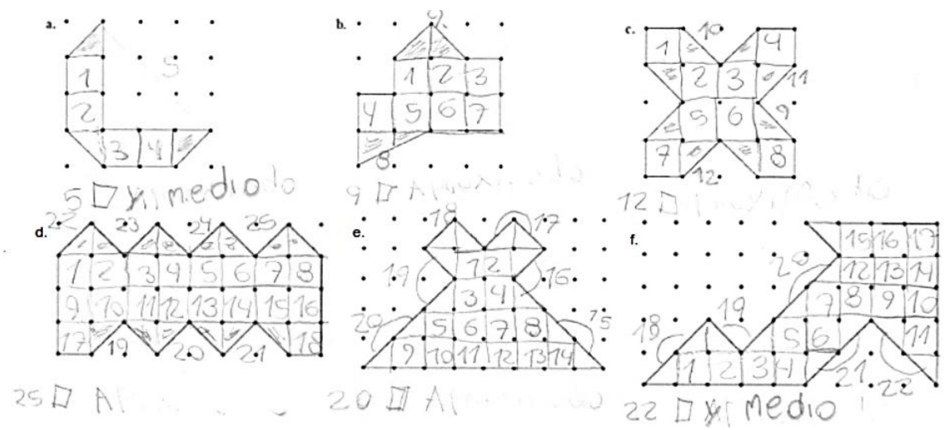


Figura 33. E1, Actividad 2- P_1.

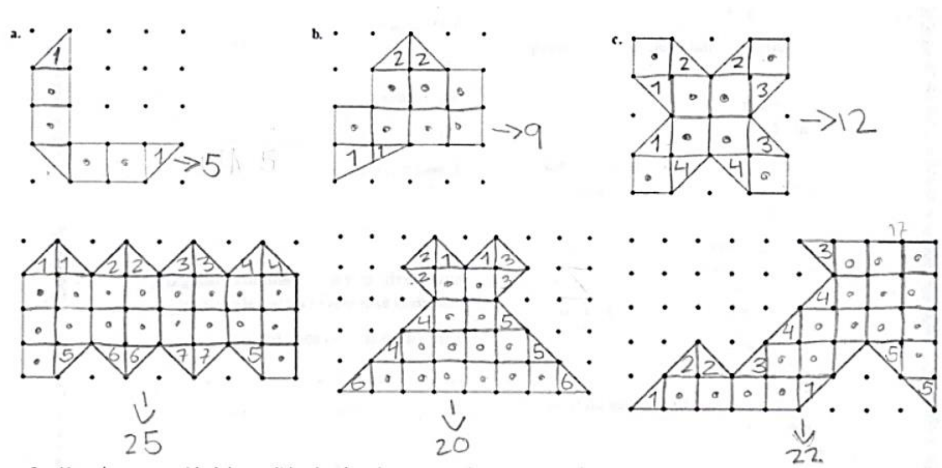


Figura 34. E7, Actividad 2- P_1.

E14: El estudiante realiza la acción de completar las unidades de medida externas con la expresión de trasladar lo que le falta a una unidad y relacionarlo con el mismo número. Se evidencia que se vale de sus propias estrategias para aproximar completando por fuera de la figura.

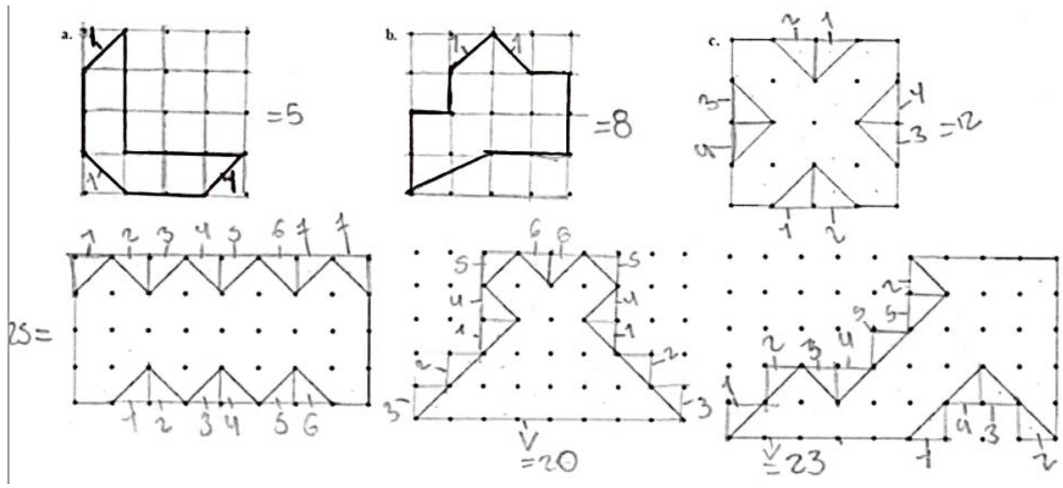


Figura 35. E14, Actividad 2- P_1.

El porcentaje de estudiantes que establecieron equivalencia entre las unidades de medida cuadrado y triángulo es de 80%; las *acciones* realizadas en el desarrollo del trabajo evidencian construcción del concepto de área como medida de recubrimiento de una superficie.

E15: El estudiante combina en la figura c. las unidades de medida, lo cual permite analizar que se le facilita identificarlas.

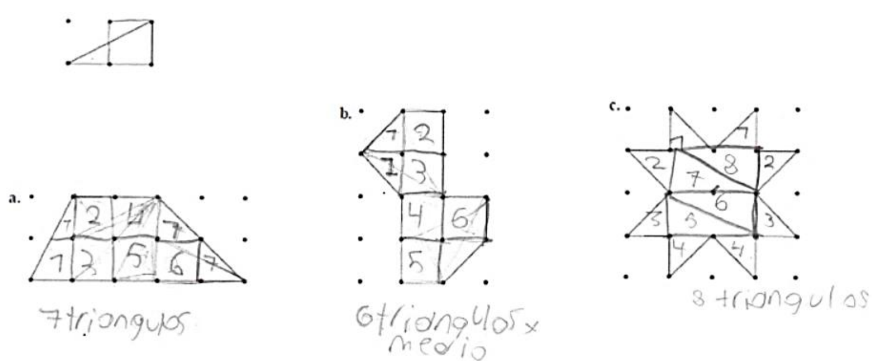


Figura 36. E15, Actividad 2- P_2.

E7: La gráfica muestra cómo la estudiante traza la cuadrícula, luego de descomponer la unidad de medida triangular y componerla en su equivalente de unidad de medida cuadrada y termina con la suma de las unidades.

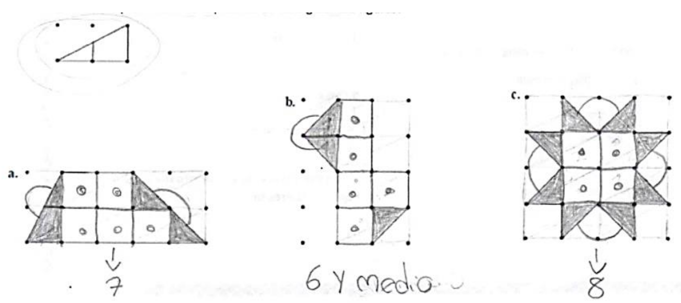


Figura 37. E7, Actividad 2- P_2.

E11: En la imagen se muestra cómo el estudiante no logra relacionar la unidad de medida triangular como una equivalencia de la unidad cuadrada respondiendo con triángulos de diferentes medidas como si fueran el mismo.

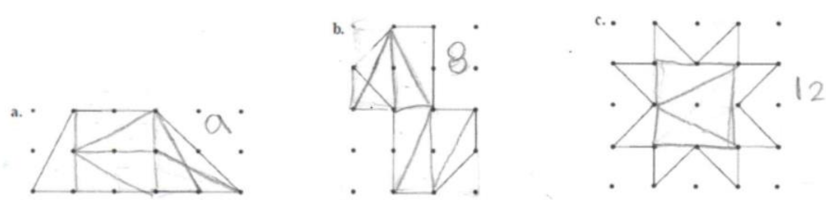


Figura 38. E11, Actividad 2- P_2.

De la mediación con la tecnología: En educación matemática se han venido implementando prácticas formativas que integran la tecnología con el material concreto. Los estudiantes presentaron dificultades para identificar la equivalencia entre unidades de medida cuadrada y triangular, aun así, se buscó dar estos primeros pasos con material concreto para luego analizar la diferencia de sus acciones en la interfaz GeoGebra.

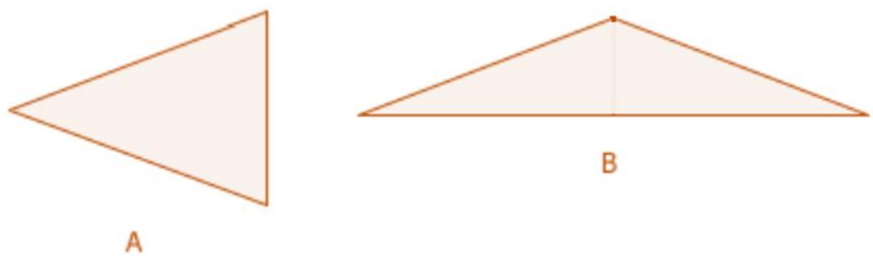
Acción de disociación entre el área y la forma de la superficie plana: conocida también como la propiedad de la invarianza del área. Otra de las acciones importantes en el proceso educativo de los individuos es hacer superposición de regiones efectuando comparación directa.

Pregunta 1 – P1: Imagínate que estas dos áreas representan dos campos cubiertos de hierba. *

a. ¿Tiene el campo A la misma cantidad de hierba que el campo B? Justifica tu respuesta.

b. ¿Tiene el campo A la misma cantidad de hierba que el campo B? Justifica tu respuesta.

Pregunta 2 – P2: Si tuvieras que pintar la Figura A, ¿necesitarías la misma o diferente cantidad de pintura que para pintar la Figura B? Justifica tu respuesta.



Nota: *Extraída de Hughes, Bell and Rogers (1975) en Corberán (1996)

Habiendo realizado las anteriores tres actividades, responde:

3. ¿Dos figuras planas pueden tener diferente forma y ocupar la misma superficie? ¿Por qué?

4. Al dividir una figura en partes, ¿el área de dicha figura cambia? ¿Se vuelve más pequeña una que la otra o, al contrario, se agranda?

El comparar las superficies soportado por el recorte y pegado como procedimiento de superposición son procedimientos para establecer relaciones de igualdad entre las áreas, porque superficies de distintas formas pueden tener igual área. Observemos los resultados en la tabla 16.

Tabla 16.

Análisis de respuestas de la Actividad 3.

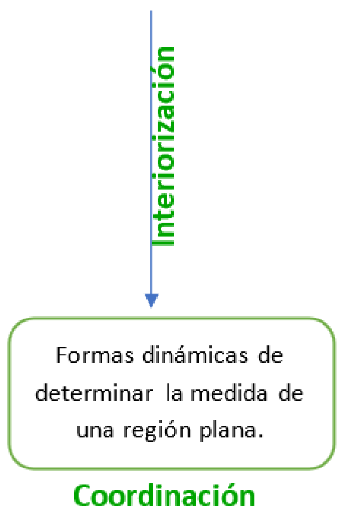
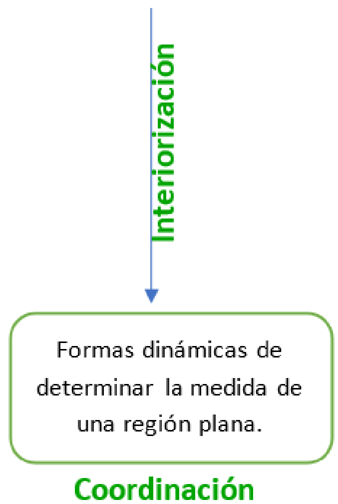
Pregunta	**Estudiantes**	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
P_1, P_2		R_1: Diferentes superficies poseen diferentes áreas, conclusión por simple inspección.	Proceso: Transformar mentalmente una superficie en otra y establecer que son congruentes.	Interiorización: Se puede considerar como la formalización que hace el estudiante cuando logra desarticular la concepción del área de figuras con única forma.
	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20.	R_2: Recorte y superposición de figuras asimilando que tienen la misma área.		

Tabla 16. *(Continuación)*

Pregunta	**Estudiantes**	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
P_3, P_4		R_1: Diferente forma implica diferente medida de superficie.	Proceso: Transformar mentalmente una superficie en otra y establecer que son congruentes. 	Interiorización: Construir un esquema mental de las figuras planas que transforme una superficie en otra y pueda indicar que son congruentes.
	E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20.	R_2: Diferente forma no necesariamente implica diferente medida de superficie.		

En esta actividad los estudiantes se reunieron en parejas; cada uno contaba con el material de la actividad. Todos los estudiantes logran avanzar en su Proceso mental que la teoría APOE plantea, a continuación, unos ejemplos de sus trabajos.

E6 – E7: Los estudiantes recortan la superficie A, luego le sobreponen la superficie B, marcando unas señas con lapicero sobre sus lados, muestran el mecanismo de interiorización de la disociación del área de la forma de la superficie.

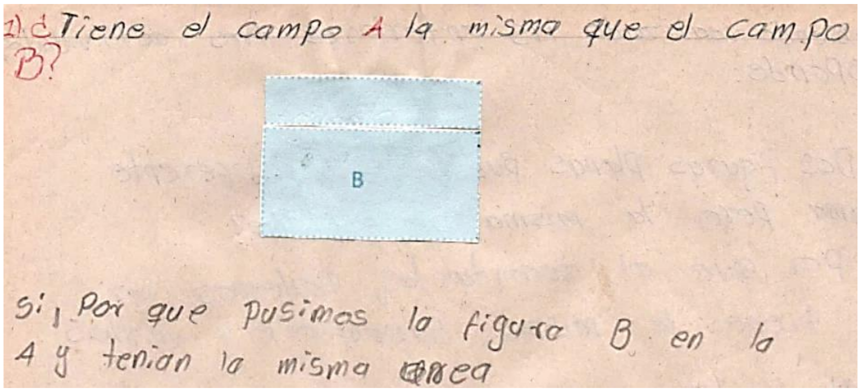


Figura 39. E6 y E7, Actividad 3- P_1.

E3 – E15: Cuando un individuo es capaz de construir la relación de igual área entre las superficies de formas distintas puede logar disociar el área de la forma de la superficie se verifica que hubo interiorización y lograron el Proceso mental.

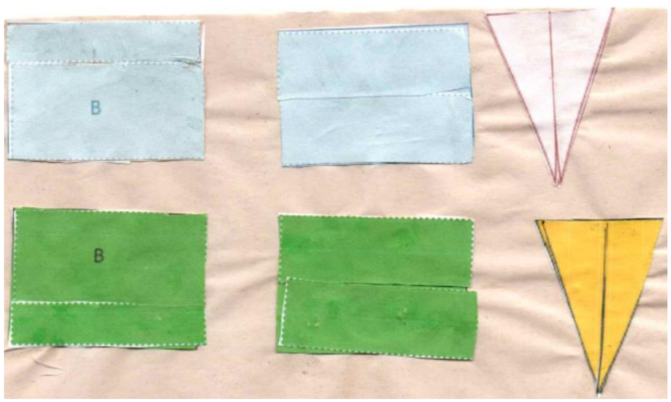


Figura 40. E3 y E15, Actividad 3- P_1 y P_2.

E4 – E10 – E11 – E16 – E8 – E19: Los estudiantes justifican su respuesta expresando los pasos que llevaron a cabo para comparar las superficies como muestra de la interiorización del concepto de área, estudiado en la teoría APOE como un mecanismo de apropiación de la relación de igualdad de áreas de superficies con distinta forma.

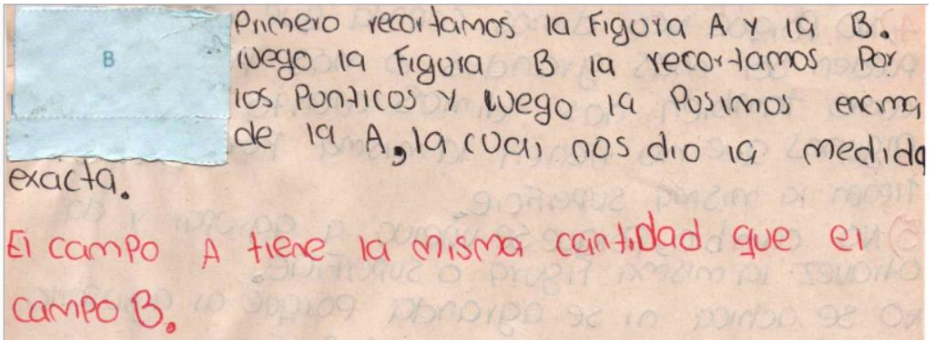


Figura 41. E4, Actividad 3- P_1.

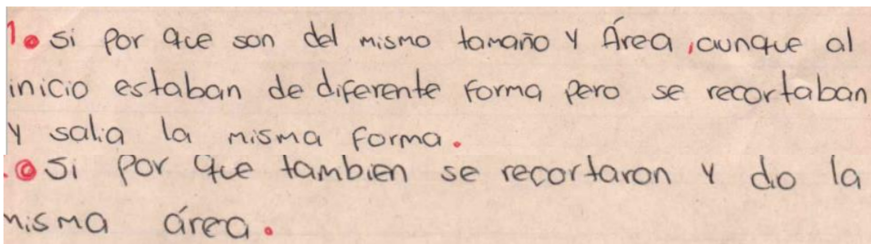


Figura 42. E10, Actividad 3- P_1.

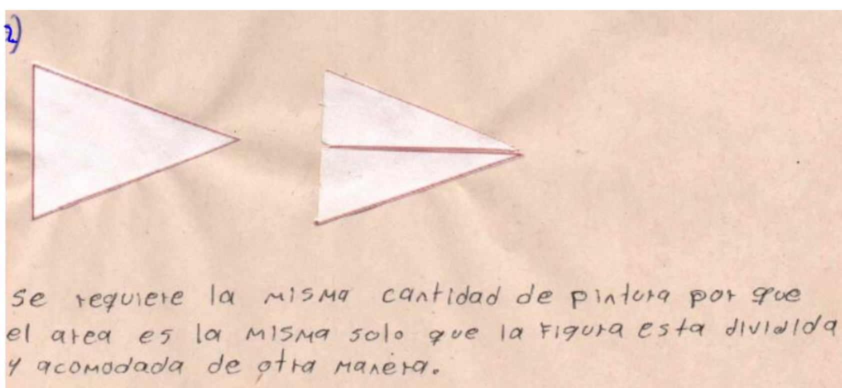
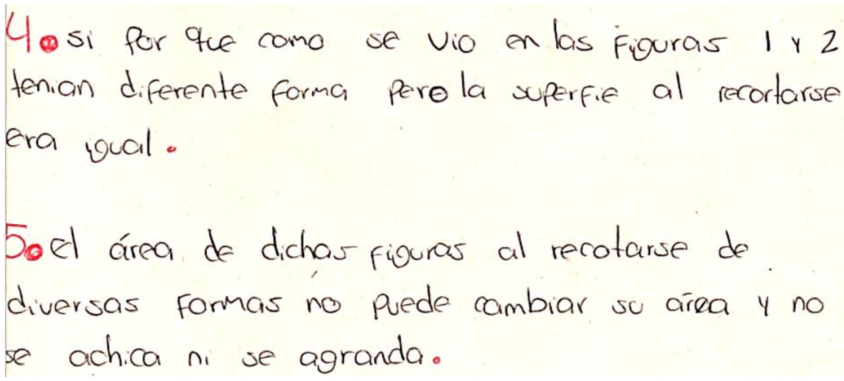


Figura 43. E11, Actividad 3- P_2.

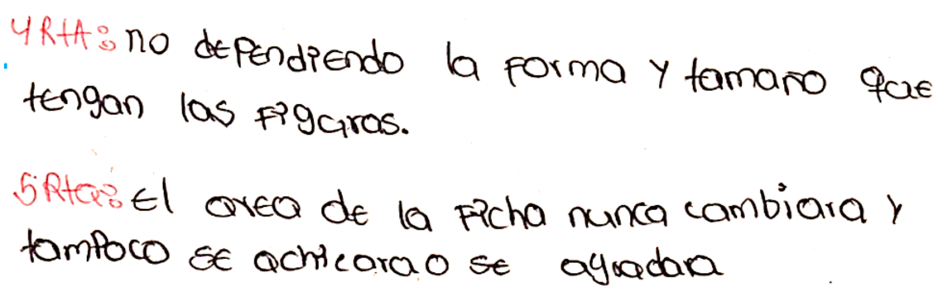
E7 – E6: Los estudiantes justifican bajo las experiencias ejecutadas en los puntos uno y dos donde logran desarticular una superficie y convertirla en otra equivalente en área.


4. si por que como se vio en las figuras 1 y 2 tenian diferente forma pero la superfie al recortarse era igual.

5. el área de dichas figuras al recotarse de diversas formas no puede cambiar su área y no se achica ni se agranda.

Figura 44. E6 y E7, Actividad 3- P_3 y P_4.

E1 – E2: Los estudiantes muestran haber interiorizado el proceso de recubrimiento de superficies, identifican que las partes se pueden recomponer de otra forma y ocupar la misma superficie. Cuando los estudiantes se refieren a que no depende la forma y tamaño que tengan las figuras, es una expresión que queda corta porque no aclaran que están hablando de tener figuras divididas en muchas partes; a pesar que en la siguiente respuesta confirman que consideran el área como la unión de todas las superficies.


4 RtA: no dependiendo la forma y tamaño que tengan las figuras.

5 Rta: El area de la ficha nunca cambiara y tampoco se achicara o se agradara

Figura 45. E1 y E2, Actividad 3- P_3 y P_4.

E8 – E19: Los estudiantes evidencian el mecanismo de interiorización en su respuesta, consideran la superficie directamente relacionada con el área, esto reafirma estar apartando un poco más el concepto de perímetro de la confusión que han creado en el pasado.

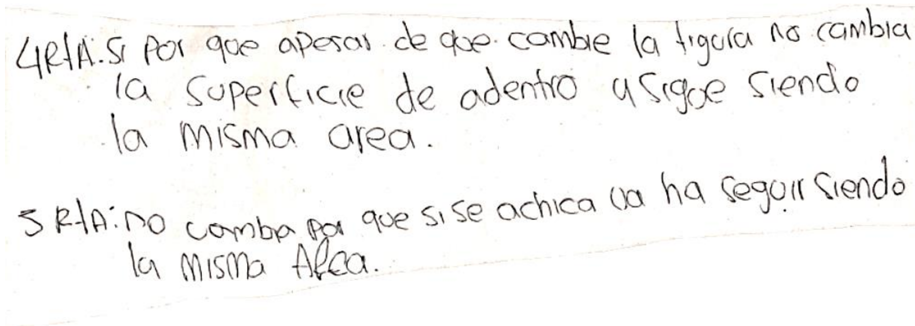

4RtA. Si por que apesar de que cambie la figura no cambia
la superficie de adentro y sigue siendo
la misma area.
5 RtA: no camba por que si se achica va ha seguir siendo
la misma Area.

Figura 46. E8 y E19, Actividad 3- P_3 y P_4.

De la mediación con la tecnología: Existe una diferencia entre la acción de recorte y pegado de figuras y la posibilidad que ofrece la geometría dinámica de crear un vínculo interactivo con el estudiante; en GeoGebra puede rotar o trasladar superficies y no correr ningún riesgo de equivocarse, porque está creado con funciones formativas que hacen que el desarrollo en las clases se pueda producir conocimiento duradero.

Proceso del área como magnitud autónoma*:* las nociones erróneas de área son una de las más comunes entre los estudiantes de la básica secundaria; por tanto, se desarrolló esta actividad del Tangram que potencializa la capacidad de coordinación de Procesos mentales que determinan realizar comparaciones entre superficies planas para evaluar la igualdad o inclusión entre las áreas.

En la tabla 17 se presenta la relación de estudiantes frente a los posibles argumentos hipotéticos.

Tabla 17.

Análisis de respuestas de la Actividad 4.

Pregunta	**Objetivo**	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
P_1	**E18, E19.** **E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E20.**	R_1: Sobreponer las fichas del Tangram. R_2: Sobreponer las fichas del Tangram y hallar relación de igual de superficies planas.	Proceso: Conocer la medida de la superficie de una figura armada con las siete fichas del Tangram. 	Coordinación: El estudiante adquiere la habilidad de rotar y trasladar las fichas del Tangram para llegar a predecir que todas ocupan la misma superficie.
P_2	**E3, E14, E16, E17.**	R_1: Considera la unidad de medida, determinando relación de igualdad entre superficies.	Proceso: La herramienta GeoGebra le muestra al estudiante una alternativa para asociar áreas de superficies planas. 	Coordinación: Se puede contemplar como la formalización que el estudiante logra al empalmar el proceso geométrico realizado en GeoGebra con el análisis lógico del tratamiento cualitativo del área.

Tabla 17. *(Continuación)*

Pregunta	**Objetivo**	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
P_2	**E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E15, E18, E19, E20.**	R_1: Comparación de unidades de medida, las relaciona como igualdad o inclusión de superficies.		

Figura 47. Evidencias de los estudiantes resolviendo las figuras del Tangram con la herramienta GeoGebra.

En un comienzo se vio una constancia del 90% de los estudiantes que experimentaron una reacción positiva cuando debe rotar y trasladar las partes del tangram para construir la superficie solicitado en los casos de los animalitos y el cuadrado (ver Figura 47); el 10% restante necesitó el tiempo destinado para contruir en GeoGebra y contestar las preguntas en hacer las rotaciones y traslaciones, por lo que no alcanzó a contestar las preguntas.

Por otra parte, se observa que el 90% de los estudiantes ejecutan el mecanismo de coordinación porque en corto tiempo se dan cuenta que todas las figuras contruidas tienen la misma área. A continuación, se presentan algunas respuestas representativas de esta situación.

1. **Determina el área de las figuras construidas y la relación entre ellas, describe los pasos realizados y socializa con tus compañeros.**

FIGURA DEL TANGRAM	Área
Gato	16 unidades cuadradas
Caballo	16 U. cuadradas
Tortuga	16 U. cuadradas
Pez	16 U. cuadradas
Toro	16 U. cuadradas
Pato	16 U. cuadradas
Cuadrado	16 U. cuadradas

La relacion entre ellas es que su area es la misma ya que se utilizan las mismas Fichas del tangram, sin cambiar su tamaño nos da la misma area.

Figura 48. E2, Actividad 4- P_1.

1. **Determina el área de las figuras construidas y la relación entre ellas, describe los pasos realizados y socializa con tus compañeros.**

FIGURA DEL TANGRAM	Área
Gato	16 cuadrados
Caballo	16 cuadrados
Tortuga	16 cuadrados
Pez	16 cuadrados
Toro	16 cuadrados
Pato	16 cuadrados
Cuadrado	16 cuadrados

RtA: lo hize haci: conte todas las Fichas las puse en un fondo de cuadricura y despues conte la superficie de cada Figura y después lo sume y me dio 16 cuadrados y como todos los animalitos se arman con las mismas Figuras entonces todas las areas son las mismas.

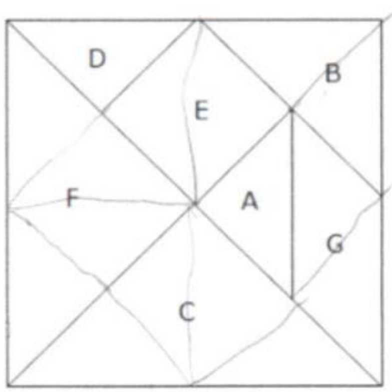
Figura 49. E14, Actividad 4- P_1.

FIGURA DEL TANGRAM	Área
Gato	16 cm²
Caballo	16 cm²
Tortuga	16 cm²
Pez	16 cm²
Toro	16 cm²
Pato	16 cm²
Cuadrado	16 cm²

FIGURA DEL TANGRAM	Área
Gato	16 unidades cuadrados
Caballo	16 unidades cuadrados
Tortuga	16 unidades cuadrados
Pez	16 unidades cuadrados
Toro	16 unidades cuadrados
Pato	16 unidades cuadrados
Cuadrado	16 unidades cuadrados

Figura 50. E1 y E5, Actividad 4- P_1.

E1: Se observa que el estudiante divide todas las piezas en términos de la pieza A para establecer relaciones de igualdad o inclusión entre las áreas.



Si todas las fichas son medidas con la ficha A como unidad de medida, ¿cuál es la relación entre ellas?

B= 2A, C = 4A, D = 1A, E = 2A, F = 4A, G = 2A

Igual situación, pero ahora la unidad de medida es B.

A= $\frac{1}{2}$ B, C = 2B D = $\frac{1}{2}$ E = 1B F = 2B, G = 1B

Igual situación, pero ahora la unidad de medida es E.

A= $\frac{1E}{2}$ B = 1E, C = 2e, D = $\frac{1E}{2}$ F = 2E, G = 1E

Compare el área de cada ficha del Tangram con respecto al cuadrado completo y exprese dicha relación.

A= $\frac{1}{16}$, B = $\frac{2}{16}$, C = $\frac{4}{16}$, D = $\frac{1}{16}$, E = $\frac{2}{16}$, F = $\frac{4}{16}$, G = $\frac{2}{16}$

Figura 51. E1, Actividad 4- P_2.

E2: Establece relaciones entre las diferentes áreas, lo usa primero para determinar la inclusión de la pieza A en las otras superficies, luego junta con una numeración doble para hacer equivalencia con el área B y E, evidencia la coordinación para llevar a cabo el Proceso de inclusión o igualdad entre áreas.

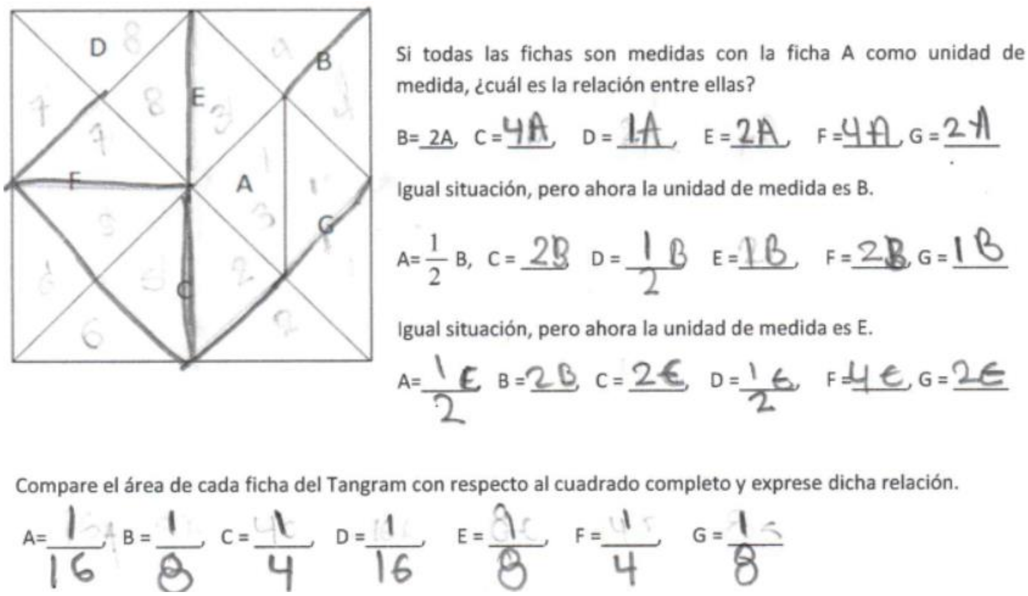


Figura 52. E2, Actividad 4- P_2.

De la mediación con la tecnología: En la experiencia realizada se comprobó las siguientes funciones atribuidas al software GeoGebra:

- Función innovadora: permitió el diseño de actividades con el Tangram proporcionando interacción entre el estudiante y el conocimiento del área.
- Función motivadora: estimuló la participación de la totalidad de los estudiantes con el interés de culminar la actividad con satisfacción de obtener una carita feliz por la interfase, no existieron premios ni notas, solo se sentían motivados por el gusto de jugar y aprender al mismo tiempo.
- Función formadora: posibilitó realizar equivalencia entre áreas de superficies planas, determinando la relación de inclusión o igualdad entre partes del Tangram, lo que hace que los

estudiantes adquieran el conocimiento a través de una interfaz educativa, mostrando así que es una tecnología útil para el aprendizaje.

Proceso de área como producto de dos dimensiones*:* posibilitar que el estudiante utilice el software GeoGebra para la construcción del rectángulo, el cuadrado y el triángulo genera una ampliación en el pensamiento espacial, esta herramienta presta el servicio de la prueba de arrastre, es decir, la figura construida se amplía y no pierde su forma. Con base en este trabajo se pueden visualizar los diferentes rectángulos, cuadrados y triángulos para medirles la superficie si se desea, o determinar la operación multiplicativa que reduce el proceso de conteo.

Tabla 18.

Análisis de respuestas de la Actividad 5a, 5b y 5c.

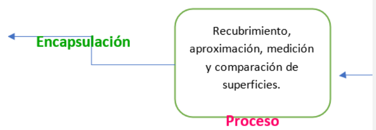
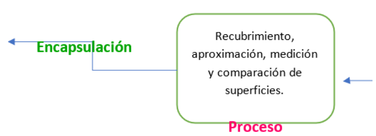
Pregunta	**Estudiante**	**Argumento Hipotético Del Estudiante**	**Estructura**	**Mecanismo**
P_1, P_2, P_3	**E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E16, E17, E18, E19, E20.**	R_1: Conteo de unidades bidimensionales R_2: Relaciones bidimensionales y multiplicación de dos unidades unidimensionales.	Proceso: Medición de superficies planas.  	Encapsulación: Se puede reflexionar como la formalización que el estudiante alcanza por medio de las conexiones entre el conteo de unidades bidimensionales y la medición del recubrimiento de superficies.
P_4, P_5		R_1: Representar la situación problemática y contar unidades cuadradas. R_2: Representar la situación problemática, luego dar un número resultado de una operación multiplicativa.	Proceso: Medición de superficies planas.  	Encapsulación: Se puede reflexionar como la formalización que el estudiante alcanza por medio de las conexiones entre el conteo de unidades bidimensionales y la medición del recubrimiento de superficies.

Figura 53. Estudiantes implementando GeoGebra para la construcción de rectángulos.

E2: El estudiante asume el Proceso de multiplicación como estrategia “fácil” para determinar el área de las figuras construidas en GeoGebra, la herramienta tecnológica le permite visualizar el recubrimiento de cada rectángulo.

4. Seguir en la misma indicación de los puntos anteriores y completar la tabla:

Longitud del segmento AB	Longitud del segmento AC	Superficie del rectángulo ABCD
3	4	12 Cm^2
3	5	15 Cm^2
3	6	18 Cm^2
3	7	21 Cm^2
4	2	8 Cm^2
4	3	12 Cm^2
4	5	20 Cm^2

la mantoa es mas facil multiplicar los numeros de los lonngitades.

Figura 54. E2, Actividad 5a- P_4.

E2: Continuando con el desarrollo implementado por la herramienta GeoGebra, el estudiante muestra la capacidad de trasladar el conteo a la multiplicación de las dimensiones largo y ancho de la figura plana. Evidencia que ha realizado el Proceso mental de obtener el área de una superficie por medio del producto de sus dimensiones.

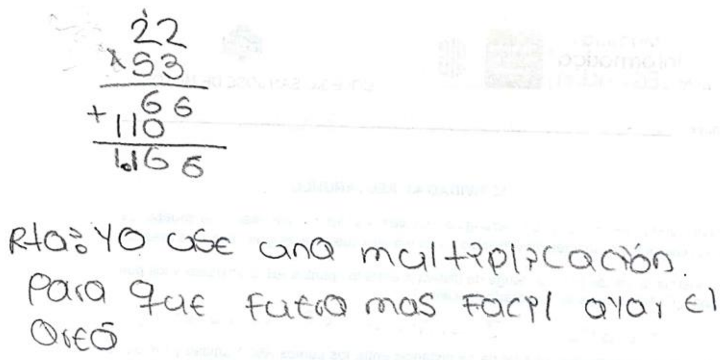


Figura 55. E2, Actividad 5a- P5.

E1: El desarrollo de las operaciones iniciales lleva al estudiante a elegir mecanismos mentales como la coordinación para realizar el proceso de solución de la situación problema, la herramienta GeoGebra le permite comprender la relación de conteo de unidades cuadradas como una multiplicación de las dimensiones largo y ancho.

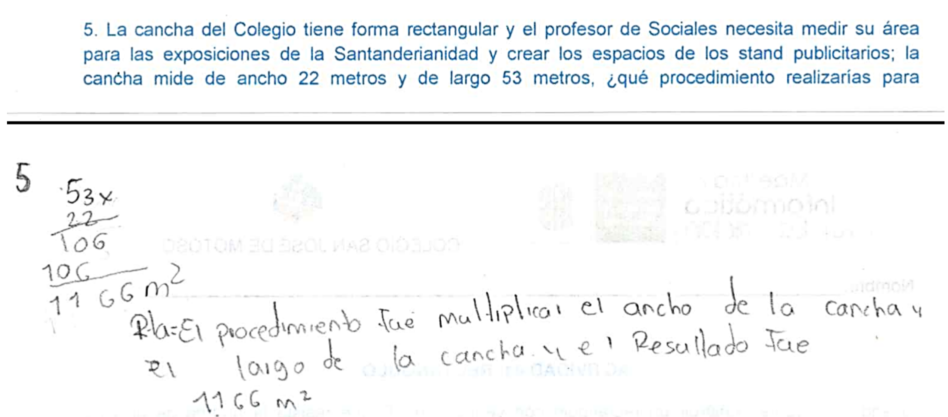
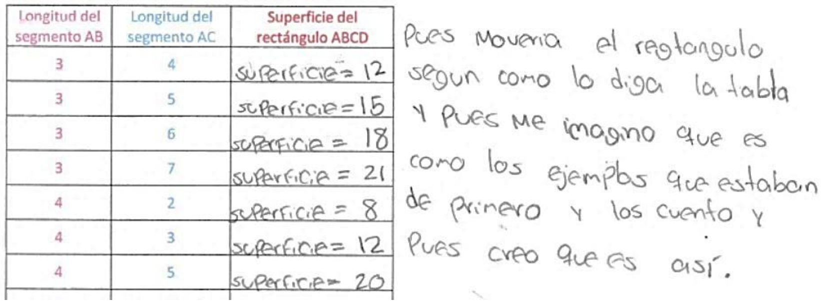


Figura 56. E1, Actividad 5- P5.

E7: El estudiante al expresar que puede mover el rectángulo según las medidas solicitadas muestra dominio de la herramienta GeoGebra, así también presenta que ha adquirido el Proceso de determinar el área de un rectángulo por medio del algoritmo numérico multiplicando la base por la altura.



Longitud del segmento AB	Longitud del segmento AC	Superficie del rectángulo ABCD
3	4	superficie= 12
3	5	superficie=15
3	6	superficie = 18
3	7	superficie = 21
4	2	superficie = 8
4	3	superficie= 12
4	5	superficie= 20

Pues movenia el restangulo segun como lo diga la tabla y pues me imagino que es como los ejemplos que estaban de primero y los cuento y pues creo que es así.

Figura 57. E7, Actividad 5- P_4.

El 85% de los estudiantes realizan cálculos par hallar el área del rectángulo de la situación problemática planteada y se evidencia que la herramienta GeoGebra les ayudó a visualizar la solución. Algunos ejemplos de sus soluciones se presentan a continuación.

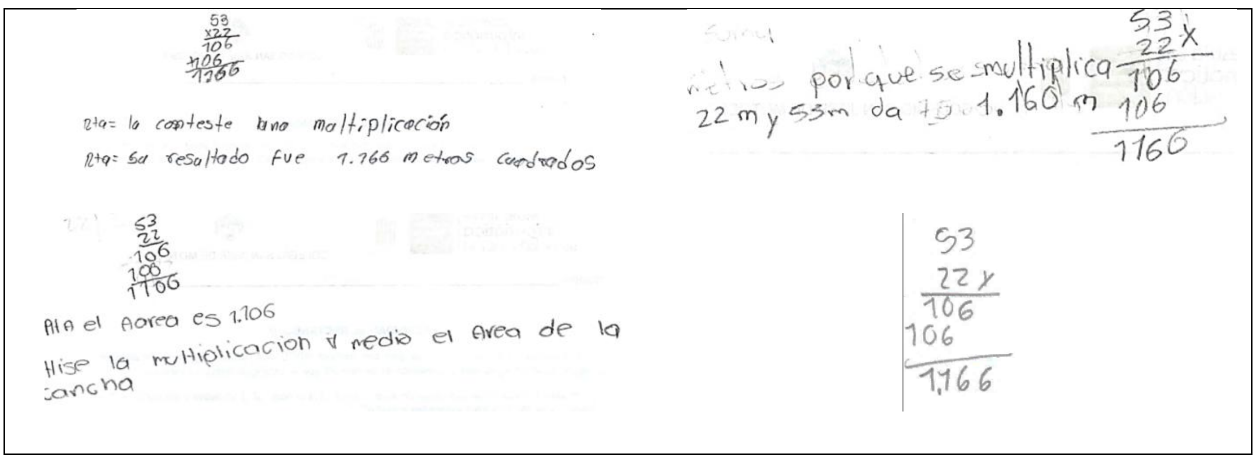


Figura 58. E11, E5, E9 y E14 Actividad 5- P_5.

De la mediación con la tecnología: El desarrollo con GeoGebra permitió hacer un acompañamiento un poco más individualizado con estudiantes, cada uno de ellos tuvo la posibilidad de desarrollar las actividades a su ritmo, algunos tenían presente como se construye un rectángulo en GeoGebra, otros llevaron el paso a paso que fue instruido por la docente, generando el trabajo colaborativo si era necesario para que avanzara en cada uno de los procesos de construcción. También se ve reflejado en sus respuestas que la herramienta tecnológica les ayudó a transformar la concepción que tenían de hacer un rectángulo en lápiz y papel, a poder hacer muchos rectángulos en el programa con solo un movimiento de arrastre; esto generó conocimiento sobre la expresión aritmética de multiplicación base por altura, que ahora cobra significado para los estudiantes (ver Figura 59).

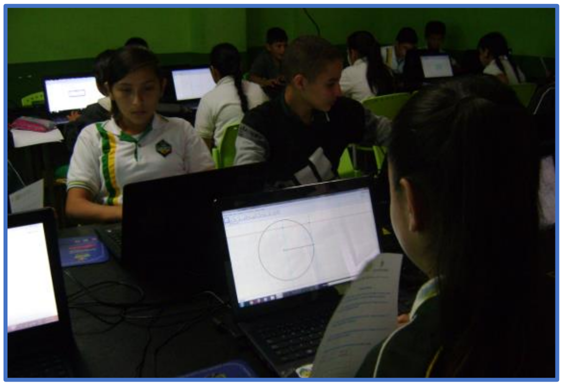


Figura 59. Estudiantes implementando GeoGebra para la construcción de cuadrados.

E5: El estudiante emplea la herramienta GeoGebra para la construcción de cuadrados, obteniendo razonamientos apropiados a las situaciones planteadas. Con los mecanismos empleados evidencia que ha adquirido el Proceso mental de reconocer el área de una superficie plana sin necesidad de realizar algortimos numéricos en papel sino desarrollarlos mentalmente.

1. Construir un cuadrado que mida de lado 2 unidades. ¿Cuántas unidades cuadradas encierra?

Rta=4 unidades cuadradas

2. Construir un cuadrado que mida de lado 3 unidades. ¿Cuántas unidades cuadradas encierra?

Rta=6 unidades cuadradas

3. Seguir en la misma indicación de los puntos anteriores y completar la tabla:

Longitud del segmento EF	Longitud del segmento FG	Superficie del cuadrado EFGH
4	4	16 unidades cuadradas
5	5	25 unidades cuadradas
6	6	36 unidades cuadradas
7	7	49 unidades cuadradas
8	8	64 unidades cuadradas
9	9	81 unidades cuadradas
10	10	100 unidades cuadradas
11	11	121 unidades cuadradas
12	12	144 unidades cuadradas

Figura 60. E5, Actividad 5b- P_1, P_2, P_3.

De la mediación con la tecnología: Los estudiantes incrementaron la capacidad de crear matemáticas experimentalmente, el ambiente de aprendizaje le facilitó al estudiante realizar retroalimentación inmediata y efectiva, al construir los cuadrados no necesitó contar unidades cuadradas y luego sumarlas, como al comienzo de la intervención investigativa, sino que el estudiante midió la longitud del lado y lo multiplicó por su mismo valor, evidenciando aprendizaje significativo y comparándolo con otras oportunidades cuando se le preguntaba el área sucedía que pensaba en multiplicación pero multiplicaba todos los lados, situación que se presenta con la mayoría de estudiantes que no han tenido esta experiencia, se notó el cambio en su manera de razonar. Además, con la herramienta GeoGebra, no es necesario utilizar guías u hojas que tengan muchas figuras impresas para que el estudiante practique, sino que con la dinámica del software pueda realizar el movimiento de arrastre y adquiera el conocimiento.

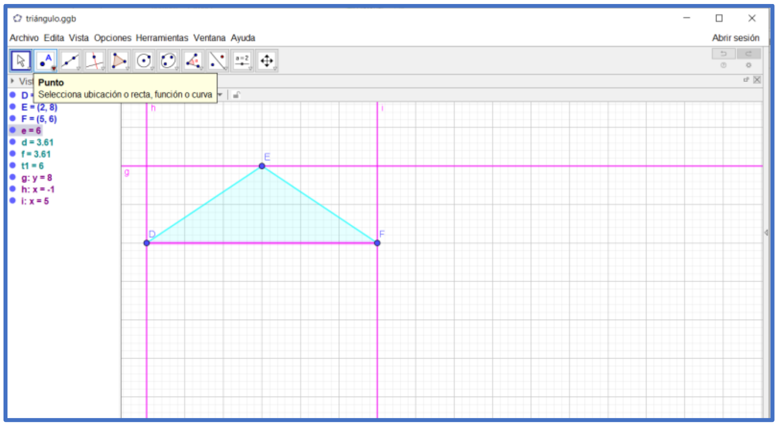
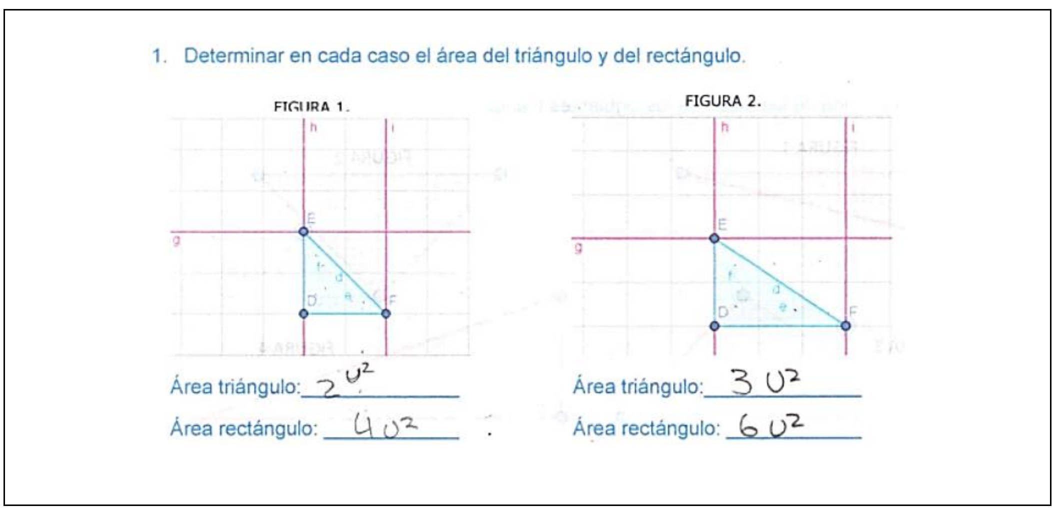


Figura 61. Construcción de triángulos con la herramienta GeoGebra.

E3: El estudiante implementa los movimientos en la herramienta GeoGebra para determinar la construcción y medida del área de estos triángulos y rectángulos. Se hace una relación entre estas dos figuras asociando que el área del triángulo es la mitad de la del rectángulo que lo contiene.



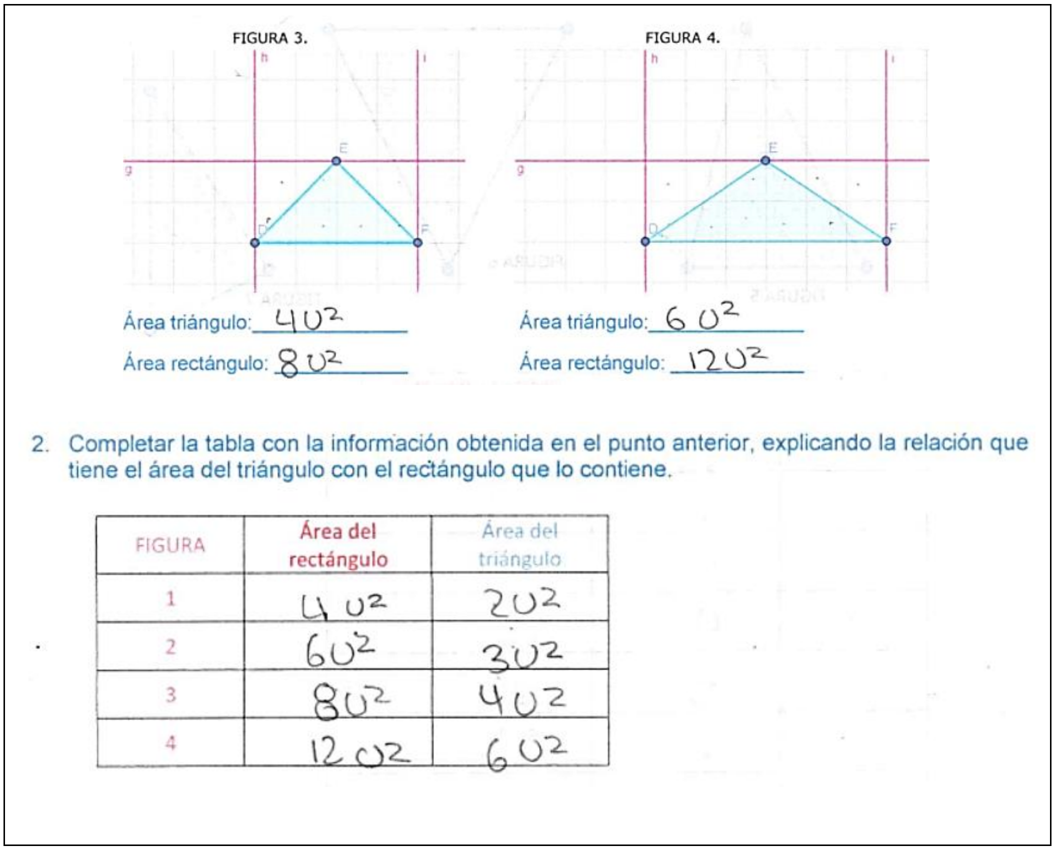


FIGURA 3.

Área triángulo: $4U^2$

Área rectángulo: $8U^2$

FIGURA 4.

Área triángulo: $6U^2$

Área rectángulo: $12U^2$

2. Completar la tabla con la información obtenida en el punto anterior, explicando la relación que tiene el área del triángulo con el rectángulo que lo contiene.

FIGURA	Área del rectángulo	Área del triángulo
1	$4U^2$	$2U^2$
2	$6U^2$	$3U^2$
3	$8U^2$	$4U^2$
4	$12U^2$	$6U^2$

Figura 62. E3, Actividad 5c- P_1, P_2.

E16: En este momento de la investigación se puede decir que algunos estudiantes que tenían fuertes falencias en el pensamiento matemático, muestran un avance porque sin haber intervenido el estudiante aquí nombrado utiliza las unidades de medida y determina las dimensiones de los triángulos hallando el área de las superficies entregadas.

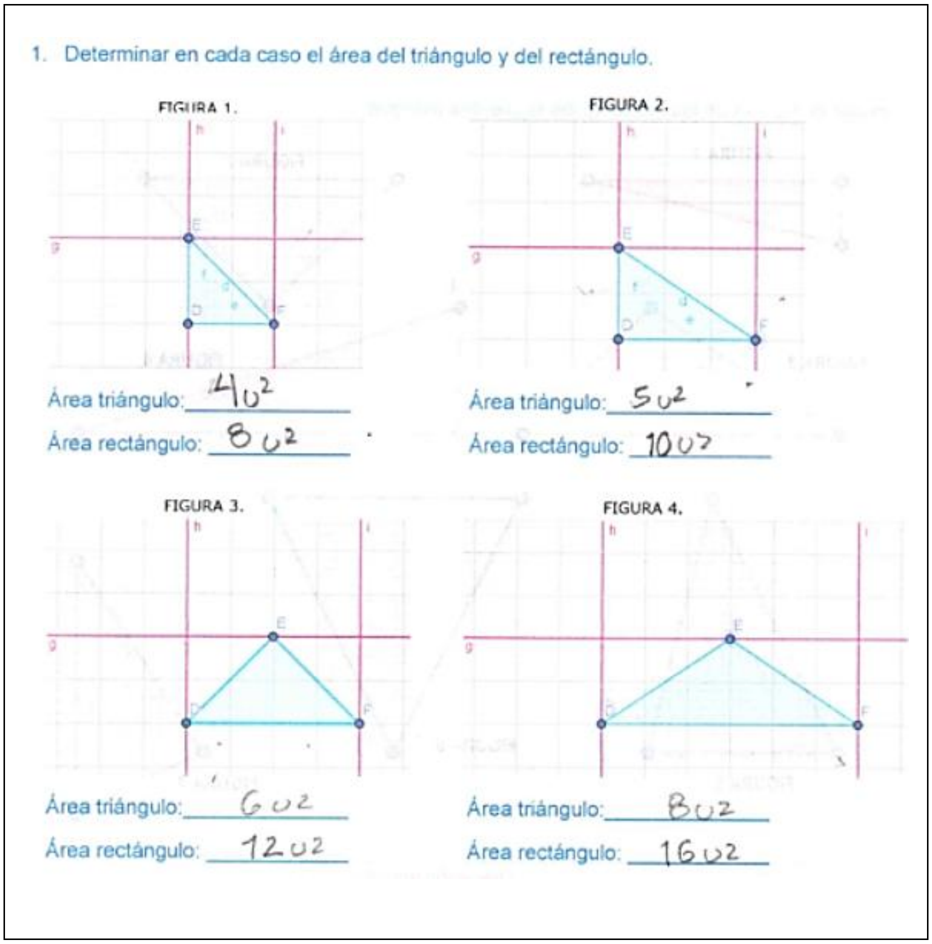


Figura 63. E5, Actividad 5c- P_1.

E6: La capacidad de interpretación del estudiante permite reconocer que no está condicionado el concepto de área a un número, aquí el estudiante determina que las áreas de los triángulos son la misma aunque la forma es diferente porque mide la longitud del ancho y del alto pero no determina las unidades cuadradas recubiertas.

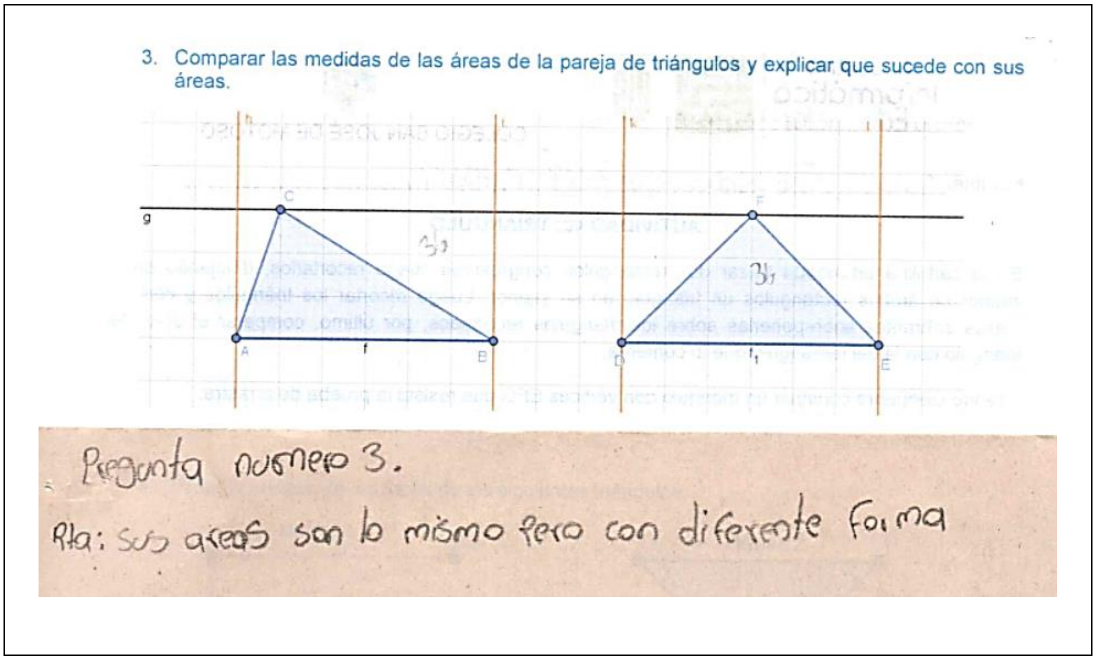


Figura 64. E6, Actividad 5c- P_3.

De la mediación con la tecnología: Se resalta que el software GeoGebra generó en los estudiantes agrado por utilizarlo, no solo por sus expresiones emocionales que serían difíciles de retratar en un informe, sino por la respuesta positiva que siempre se evidenció al contestar las actividades propuestas, porque gradualmente mejoraron su desempeño académico y desarrollaron la visualización en el pensamiento espacial (ver Figura 65). Una vez más, se constata que la herramienta GeoGebra fue el camino apropiado para mejorar la práctica educativa; desde el punto de vista de docente investigadora se percibió como una experiencia dinámica entre el software y el estudiante.

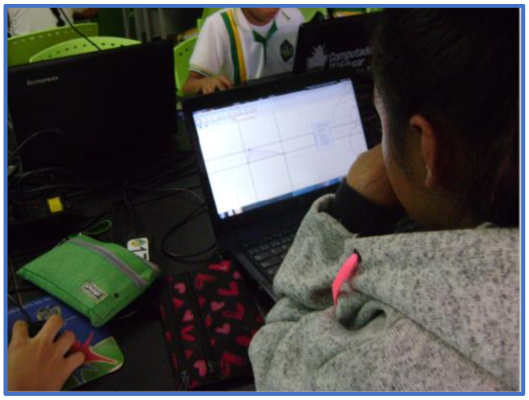


Figura 65. Estudiantes implementando GeoGebra para la construcción de triángulos.

6. Conclusiones

Este apartado está dedicado por el investigador a dar algunas apreciaciones sobre la experiencia realizada, concerniente a los aspectos relacionados con la metodología de enseñanza – aprendizaje que propone la teoría APOE, la didáctica de las actividades desarrolladas y la implementación de la geometría dinámica con el software GeoGebra, también desde el punto de vista particular, donde toman parte elementos como el contexto de la indagación, los aprendizajes y las oportunidades en otros ámbitos de aprendizaje. Tomando por referencia los datos obtenidos en la secuencia de actividades realizada, se valida la *descomposición genética hipotética* para ilustrar de una mejor forma el razonamiento lógico de los estudiantes de sexto grado. Adicionalmente se incorporan ideas didácticas del docente investigador en el desarrollo de la noción de área de figuras planas.

Desde el punto de vista etimológico se analiza la transformación de la noción de área de figuras planas por medio de la investigación realizada en los estudiantes participantes. Se organizó en *acciones* de recubrimiento de superficies planas no poligonales, comparación de áreas a través de la composición y descomposición de superficies; asemejando lo que sucede con las culturas que se dedican al cultivo del café y su proceso de secado al ser esparcido en terrenos áridos destinados para tal fin. El siguiente paso es la formalización – *procesos* –, donde la herramienta GeoGebra juega un papel importante, hace una correlación entre la visualización y la interiorización en el estudiante en la modelación de algoritmos numéricos; además, los estudiantes implementaron estrategias de procesamiento mental para la estimación de superficies, por ejemplo, obtuvieron el área de superficies planteadas en situaciones problemáticas que ya no podían ser dibujas ni representadas y lograron solucionarlas. La Reflexión a partir de la implementación con el software GeoGebra arroja buenos resultados; el desarrollo de las actividades con geometría dinámica favoreció la comprensión, las innovación y motivación entre geometría y la resolución de problemas, por sus representaciones y transformaciones haciendo en el estudiante que adquiera la noción de área como medida de la superficie plana.

Validación de la descomposición genética: El análisis de los datos revela que los estudiantes de grado sexto de secundaria están en la capacidad de construir *acciones, procesos y objetos* mentales de relación a las áreas y perímetros de superficies planas; la ruta descrita en la *descomposición genética hipotética* donde se asocian las estructuras y los mecanismos mentales en el estudiante posibilitó visualizar la forma como se construye mentalmente las nociones de área y perímetro, reconocidas como válidas por medio de los registros obtenidos de los participantes en la investigación en las actividades implementadas.

En la *descomposición genética hipotética* se constituye el pensamiento espacial por eje fundamental del conocimiento, las Acciones concretas de estimación de áreas de superficies planas no poligonales preparan al estudiante de sexto grado de básica secundaria a descubrir su manera de razonar de forma distinta a como lo venía presentando en la básica primaria; estas acciones facilitan la comprensión de la medida de la superficie de una figura plana para ser transferidas por medio del mecanismo de Interiorización a los *procesos* mentales que conllevan estimaciones de áreas, comparaciones de superficies y diferenciación de nociones de área y perímetro. En este sentido, la asimilación de la *acción* de iniciación, en que el estudiante efectuó recubrimiento de superficies poligonales y no poligonales, realizando conteo y luego sumando, componiendo y descomponiendo regiones planas, haciendo uso de la relación de igualdad y/o inclusión de áreas y comparando medidas de superficie aborda la formalización de resolución de problemas geométricos con el mecanismo de coordinación entre *procesos*; es decir, interpreta las áreas de figuras planas como la medida del espacio que ocupa, separando la noción de área de la de perímetro, dando valor numérico a la medida de la superficie por medio de algoritmos mentales que efectúa con agilidad.

Cuando el estudiante realiza la construcción con la herramienta GeoGebra del rectángulo, cuadrado y triángulo y la somete a la prueba de arrastre proyecta la figura construida en cualquier situación problema, trasmitir este conocimiento de una situación particular de conteo a la generalización con algoritmos numéricos entre unidades bidimensionales, se dice que llegó al objeto mental por medio del mecanismo de Encapsulación. Éste último se da en correspondencia a la capacidad que tenga el individuo de identificar las características del objeto área de figuras planas.

Los alcances de los objetivos: En concordancia con los criterios de sustentación teórica y práctica de la investigación se puede afirmar que los objetivos trazados arrojan resultados positivos, la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE permitió llevar a la práctica la construcción de la noción de área de superficies planas, iniciando con la validación de la *descomposición genética hipotética* para el objeto matemático área de figuras planas, se ejecutaron actividades que confirman cuan relevante es identificar las estructuras y mecanismos mentales de un individuo en la práctica educativa de la básica secundaria.

El objetivo general planteado expresa: Describir las estructuras (*acciones, procesos* y *objetos*) y mecanismos (interiorización, coordinación, encapsulación) mentales que desarrollan estudiantes de sexto grado a partir de la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos para construir el concepto de área, se presenta demostrado cuando en la validación de la *descomposición genética hipotética* se admite la importancia de realizar actividades con los estudiantes relacionadas con recubrimiento, aproximación, comparación y medición de superficies planas comenzando por utilización de recorte, conteo de unidades de medida y luego ejecución de las herramientas del software GeoGebra para la generación de la comprensión del concepto.

Los objetivos específicos se tratan a lo largo de la investigación, muestra de ello es cuando se hace la prueba diagnóstica para identificar las concepciones que han construido los estudiantes respecto al área de figuras planas, es allí donde se evidencia que existe una confusión entre los conceptos de perímetro y área; y que los estudiantes tratan de enunciar fórmulas para hallar el área de rectángulos, cuadrados o triángulos; figuras conocidas hasta el momento en ese nivel escolar. A partir de esta situación se inicia el análisis teórico con la elaboración de la *descomposición genética* del concepto de área que argumenta la secuencia de actividades implementadas con la herramienta GeoGebra para el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto.

La experiencia llevada a cabo con los estudiantes frente al desarrollo de construcciones en GeoGebra permitió mejorar la percepción visual que tienen de la superficie de una figura plana, tener la oportunidad de ampliar o encoger una superficie a través de la geometría dinámica que ofrece el software favorece la comprensión de los procedimientos de carácter numérico para obtener el área de una superficie plana. Por parte del docente investigador, es satisfactorio aportar en la construcción del conocimiento, observar que los estudiantes aprenden significativamente; dejando a un lado la trasmisión de fórmulas sin sentido. Antes bien, los estudiantes valoran el proceso llevado a cabo con expresiones de agrado y gusto por la geometría, fortaleciendo el interés por el conocimiento matemático.

Oportunidades: Respecto a las líneas de investigación que puedan derivarse es necesario desarrollar en los grados de básica primaria la construcción del concepto área de manera gradual donde el estudiante pueda tener contacto con material concreto en sus comienzos pero que también reciba de sus maestros la oportunidad de interactuar con la geometría dinámica, se recomienda GeoGebra porque es un software libre, de fácil manejo, amigable y ahora también ofrece en su plataforma de internet la ventaja de materiales construidos por colegas que comparten sus trabajos con el público.

Por otra parte, se propone implementar investigaciones con estudiantes de la básica secundaria donde se estudie el área y el perímetro en una misma figura, realizando las comparaciones de sus atributos para que el estudiante desarticule la proporcionalidad que considera existente como lo que normalmente contestan que a mayor área, mayor es el perímetro e inversamente, a menor área conlleva menor perímetro debido a estas malas interpretaciones se les dificulta el conocimiento de la matemática universitaria como es el del cálculo matemático.

Referencias bibliográficas

Acosta, J. (2007). Retos y desafíos ante las puertas de la tecnología. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/5396/

Araya, R. G., & Alfaro, E. B. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista electrónica educare*, *14*(2), 125-142.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York: Springer Science.

Asiala, M. Brown, A. DeVries, D. Dubinsky, E. Mathews, D. Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J., Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education II (pp.1–32). U.S.A.: American Mathematical Society.

Bourbaki, N. (1994). *Elements of the history of Mathematics*. Berlín, Alemania: Springer.

Boyer, C. (1968). *A history of Mathematics. Brooklyn, New York: Editorial Wiley*.

Brousseau, G. (2007). *Theorie des situations didactiques*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Camargo, L. Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Revista Facultad de Ciencias y Tecnología*. *32 (1)*, pp. 4 – 8. Recuperado de http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000200001

Cantoral, R. Farfán, R. M. Cordero, F. Alanís J. A. Rodríguez R. A. Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México DF, México: Trillas.

Castillo, V. (2015). *Secuencia didáctica para contribuir en la construcción del concepto de área como magnitud con estudiante de educación primaria.* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Catolica del Perú, Ecuador.

Corberán, C. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde la primaria hasta la universidad*. (Tesis de doctorado). Universidad de Valencia, España.

D'Amore, B. Fandiño, M. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, RELIME, 10*(1), pp.39-68. Recuperado de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500103

De Miguel González, R. (2015). Tecnologías de la geo información para el desarrollo del pensamiento espacial y el aprendizaje por proyectos en alumnos de secundaria. *Análisis espacial y representación geográfica: innovación y aplicación*, 1321-1327.

DeVries, D. (2001). RUMEC / APOS Theory glossary. Georgy Collage & State University. Milledgeville. http://cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html

Díaz, M. (2006). *Isoperimetría: Relación Geométrica entre perímetro y área.* (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetana a la educación matemática universitaria. *Revista Educación Matemática* 8(3), pp. 25 – 41.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelecctuales.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Ezquerro, M. (2014). *Uso de GeoGebra en la enseñanza de la geometría analítica en 4° de la ESO*. (Tesis de Maestría). Universidad Internacional de La Rioja, Vizcaya, España.

Facco, S. (2003). *Área como magnitud.* Recuperado de https://www.pucsp.br/pensamentomatematico/dissertacao_sonia_facco.pdf

Feria, M. Espinosa, L. Martínez, N. (2006). *Percepción espacial y geometría intuitiva. Una puerta de entrada al aprendizaje significativo de la geometría.* Bogotá, Colombia: Universidad Externado de Colombia.

Ferreyra, M. Avitabile, C. Botero, J. Haimovich, F. Urzúa, S. (2017). *Momento decisivo: la educación superior en América Latina y el Caribe.* Recuperado de https://openknowledge.worldbank.org/bitstream/handle/10986/26489/211014ovSP.pdf

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Recuperado de http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/Freudenthal_Didactical_Phenomenology_of_Mathematical_Structures1983.pdf

Gamboa, M. (2013). *Construcción cognitiva de la raíz cuadrada una mirada desde la teoría APOE*. (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica, Valparaíso, Chile.

García-Peñalvo, F. J. (2002). Software educativo: evolución y tendencias. Recuperado de https://gredos.usal.es/handle/10366/69408

González, A. (2018). *Conocimiento sobre perímetro y área de polígonos que poseen docentes de primaria en formación. Un análisis cualitativo en la Benemérita Escuela Normal Estatal de Ensenada*. (Tesis de Doctorado). Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México.

González, D. y Roa-Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. Enseñanza de las Ciencias, 35(2), 89-107

González, M. (2017). *Iniciación a GeoGebra*. Recuperado de: https://sites.google.com/site/geogebra1112/caracteristicas-de-geogebra

Gruessing, (2011). Spatial abilities and mathematics achievement among elemtentary school children. *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (1), p. 306.

Guerrero, M. (2016). La investigacion cualitativa. *INNOVA Research Journal*, *1*(2), pp. 1-9.

Guevara, D. (2018). *GeoGebra herramienta didáctica para fortalecer el razonamiento matemático en la enseñanza de la Geometría en el Colegio Integrado de Cabrera*. (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Hernández, R. Fernández-Collado, C. Baptista, P. (2006). Metodología de la Investigación. McGraw-Hill 4ª edición México https://investigar1.files.wordpress.com/2010/05/1033525612-mtis_sampieri_unidad_1-1.pdf

Llanos, A. Acuña, G. Martínez, J. (2016). *Impacto de las TIC en el razonamiento geométrico de los estudiantes del Liceo Polivalente Virginio Arias de Ñipas*. (Tesis de pregrado). Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile.

Londoño, C. Prada, B. (15 de Marzo de 2012). Lecciones epistemológicas de la historia de la geometría. *Cuestiones de filosofía* (13), pp. 183 – 211.

Londoño, M. Palacio, Y. (2018). *Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de noción de área: un acercamiento con estudiantes de secundaria*. (Tesis de maestría). Universidad de Medellín, Colombia.

López, J. Refolio, M. Rubio, J. Moreno, E. (2007). La medida del radio terrestre por Eratóstenes. *Investigaciones Consejo Superior de Científicas*. Recuperado de https://digital.csic.es/bitstream/10261/83223/3/eratostenes.pdf

Magaña, M. D. L. G., & Rangel, R. P. (2015). Conectando los Espacios de Trabajo Aritmético y Geométrico a través de la noción de aproximación en GeoGebra. *RIDE Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo, 5*(10).

Márquez, J. (2008). *El concepto de perímetro apoyado en la propuesta de aprender enseñando y en los niveles de razonamiento*. (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Mason, J. Burton, L. Stacey, K. (1982). *Pensar matemáticamente*. España: Labor S.A.

MEN. (1998). *Serie Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Menon, R. (1998). Preservice teachers' understanding of perimeter and área. *School Science and Mathematics,* 98(7), 361-368.

Morales, L. (2002). Las matemáticas en el antiguo Egipto. *Apuntes de historia de las matemáticas*. Recuperado de http://euler.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-1-egipto.pdf

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

OECD. (2018). Programme for international student assessment (PISA). Recuperado de https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_COL_ESP.pdf

Petrou, M. Goulding, M. (2011). Conceptualising teachers' mathematical knowledge in teaching. En T. Rowland y K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching*, (pp. 9-25). Dordrecht, Países Bajos: Springer. Doi: 10.1007/978-90-481-9766-8_2

Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española.* Recuperado de https://dle.rae.es

Restrepo, B. (2004). La investigación-acción educativa y la construcción del saber pedagógico. *Educación y Educadores*, *7*(1), pp. 45 – 55.

Rico, L. (2009). *Sobre las nociones de Representación y comprensión en la investigación en didáctica de la matemática*. Recuperado de http://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6172/5488

Roa-Fuentes, S. Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: un estudio de casos en el contexto universitario. *Formación Universitaria*, *10(4)*, pp. 15 – 32.

Rodríguez, C. (2011). *Construcción de Polígonos regulares y cálculo de áreas de superficies planas utilizando el programa GeoGebra: una estrategia metodológica para la construcción de aprendizajes significativos en estudiantes de grado séptimo*. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia.

Salgado, H. (2015). *El papel de la modelación en la enseñanza de conceptos abstractos de álgebra lineal.* (Tesis de Doctorado). Instituto Politécnico Nacional, D.F. México.

Sierra, M. Giraldo, L. (2016). *Implementación del software (GeoGebra) en el aula de clase como herramienta de representación para el teorema de Pitágoras*. (Tesis de pregrado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Sunkel, G. Trucco, D. Espejo, A. (2013). *La integración de las tecnologías digitales en las escuelas de América Latina y el Caribe. Una mirada multidimensional.* Chile: CEPAL.

Torres, C. A. Racedo, D, M. (2014). *Estrategia didáctica mediada por el software GeoGebra para fortalecer la enseñanza – aprendizaje de la geometría en estudiantes de noveno grado de básica secundaria*. (Tesis de maestría). Universidad de la Costa, Barranquilla, Colombia.

Urrea-Buitrago, L. (2018). *Fortaleciendo el pensamiento geométrico en básica secundaria, a través del proceso de modelación de las características del triángulo, haciendo uso del software GeoGebra*. (Tesis de pregrado). Universidad Católica de Manizales, Colombia.

Vara, M. (2003). El Geoespacio, un recurso para la enseñanza de la geometría. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Recuperado de https://www.matematicaparatodos.com/varios/geoespacio.pdf

Vera-Maquera, M. (2014). *Aplicación de una metodología usando el software GeoGebra para desarrollar la argumentación matemática en el contenido de las propiedades de los triángulos*. (Tesis de Maestría). Universidad de Piura, Perú.

Vidal, M., Gómez, F., & Ruiz, A. M. (2010). Softwares educativos. *Educación Médica Superior, 24*(1), 97-110.

Zabala, A. (2015). *Construcciones y Mecanismos mentales para implementar y desarrollar el concepto de los vectores en tres dimensiones (3D) mediante el apoyo de la herramienta Cabrí para el cálculo de volúmenes.* (Tesis Doctorado). Pontificia Universidad Católica, Valparaíso, Chile.

Apéndices

Apéndice A. Actividad 1

Actividad 1

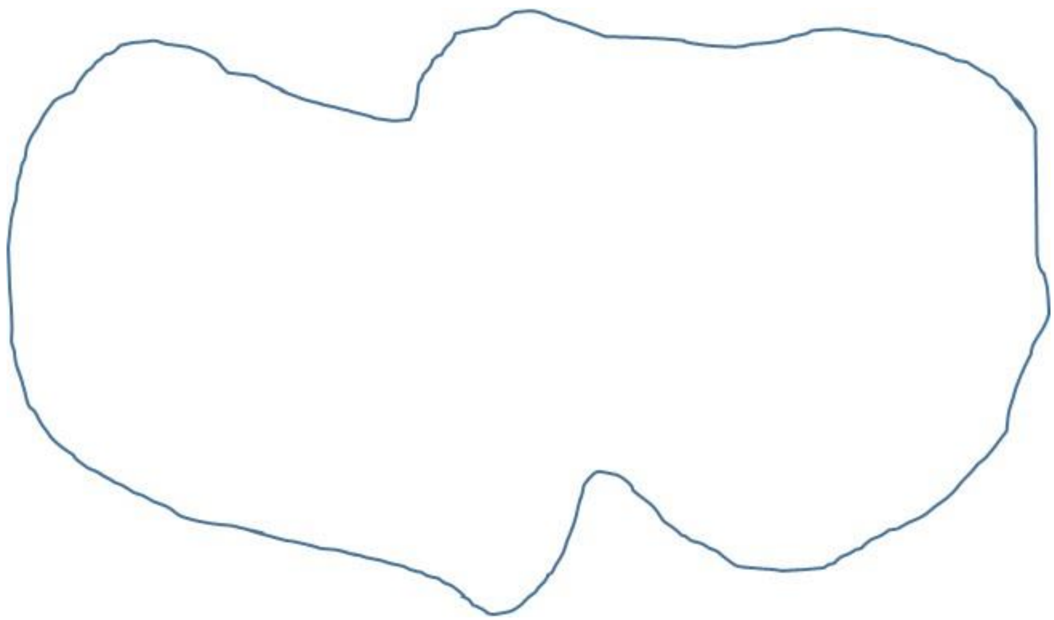
A continuación, se presenta un bosquejo de un terreno dedicado a esparcir el café para ser secado al sol. Se desea saber la mejor y más aproximada forma geométrica para recubrirlo.

CUESTIONARIO

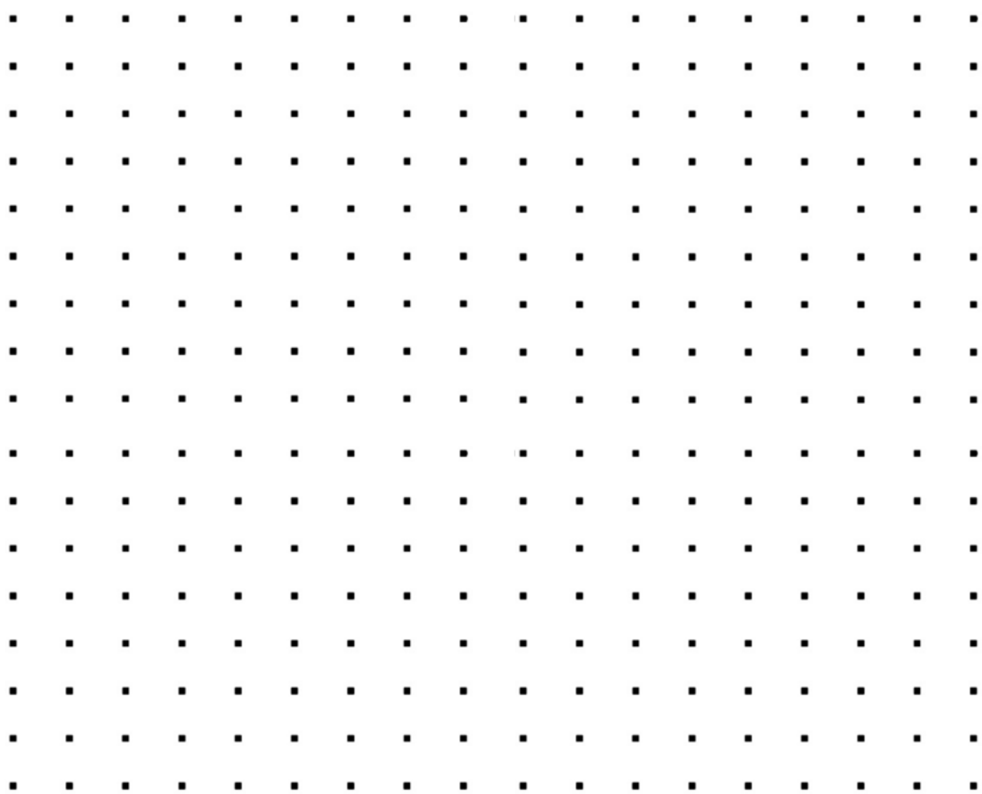
1. ¿Qué formas geométricas puede tener la unidad de recubrimiento para cubrir la mayor parte de la superficie de la figura?

2. Construya una tabla de datos donde compare las diferentes formas usadas en el procedimiento de recubrimiento realizado en la pregunta 1 y las cantidades de unidades de medida que utilizó para recubrir la superficie de la figura.

3. Justifique cuál es la mejor y más aproximada forma de recubrimiento de la superficie de la figura, exponiendo sus razones por las que considera que es la más apropiada.



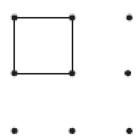
Malla de puntos

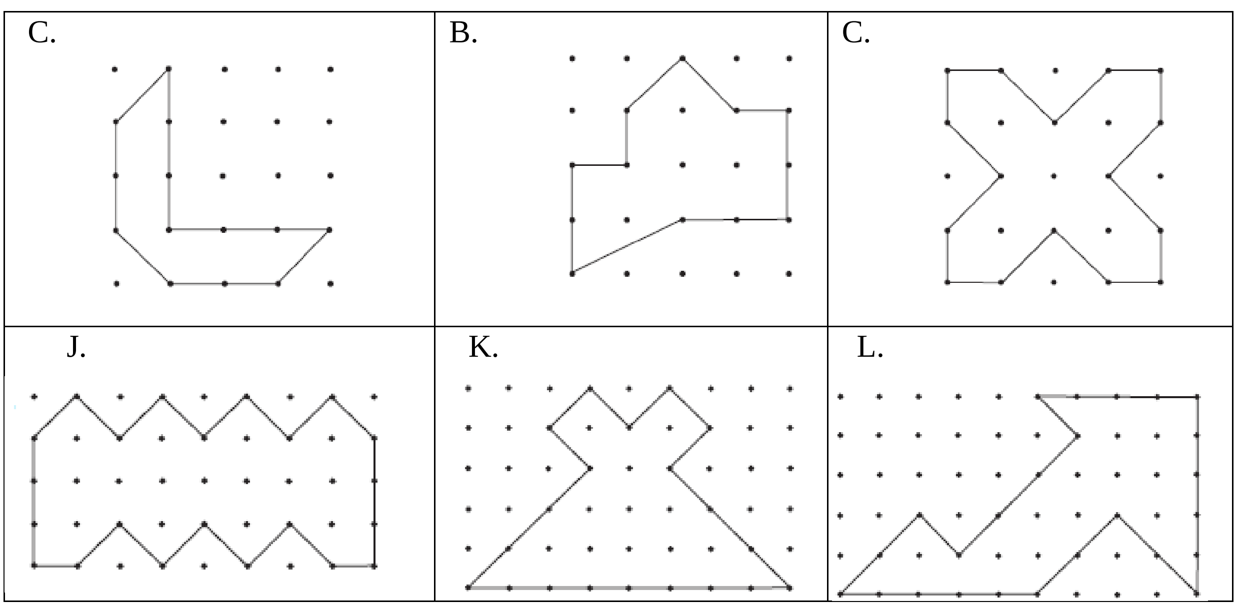


Apéndice B. Actividad 2

Actividad 2

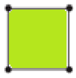
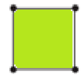
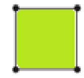
1. Usando como unidad de medida el cuadrado presentado a continuación; determinar la cantidad unidades de recubrimiento necesarias para cubrir la superficie de las siguientes figuras.

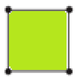
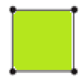
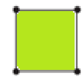




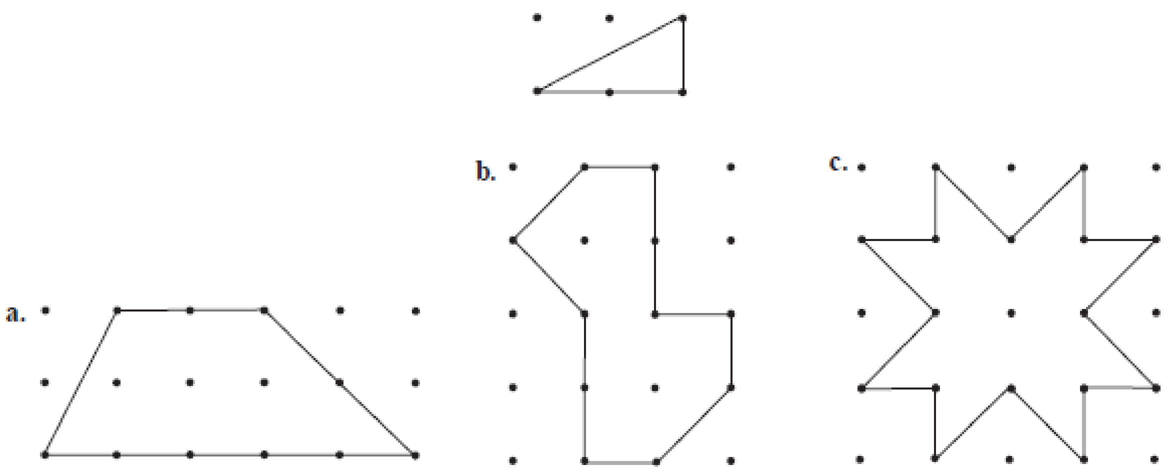
Nota. Extraido de Murssel, Burger y Peterson (2008)

Respuesta:

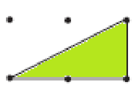
A. ________  B. ________  C. ________ 

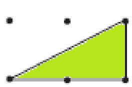
B. ________  D. ________  E. ________ 

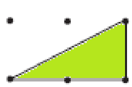
2. Usando como unidad de medida el triángulo presentado a continuación; hallar cuantas unidades de recubrimiento se necesitan para cubrir la superficie de las siguientes figuras.



Nota. Extraido de Murssel, Burger y Peterson (2008)

A. _____ 

B. _____ 

C. _____ 

Apéndice C. Actividad 3

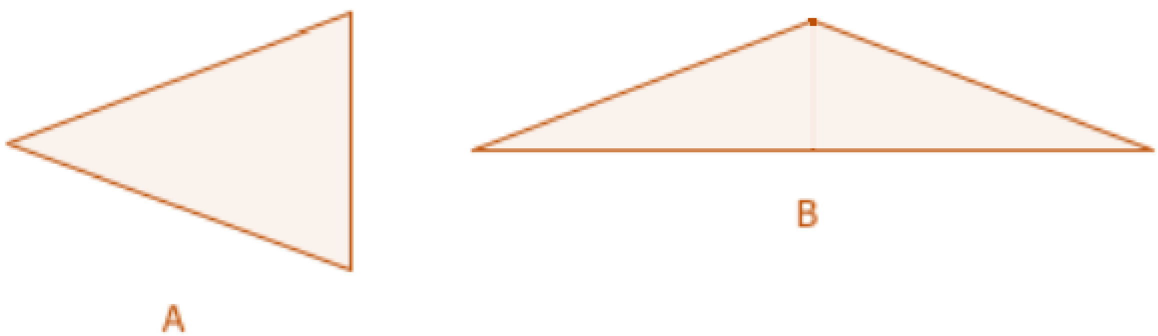
Actividad 3

1. Imagínate que estas dos áreas representan dos campos cubiertos de hierba. *

a ¿Tiene el campo A la misma cantidad de hierba que el campo B? Justifica tu respuesta.

b. ¿Tiene el campo A la misma cantidad de hierba que el campo B? Justifica tu respuesta.

2. Si tuvieras que pintar la Figura A, ¿necesitarías la misma o diferente cantidad de pintura que para pintar la Figura B? Justifica tu respuesta.



nota. *Extraída de Hughes, Bell and Rogers (1975) en Corberan (1996)

Habiendo realizado las anteriores tres actividades, responde:

3. ¿Dos figuras planas pueden tener diferente forma y ocupar la misma superficie? ¿Por qué?

4. Al dividir una figura en partes, ¿el área de dicha figura cambia? ¿Se vuelve más pequeña una que la otra o, al contrario, se agranda?

Apéndice D. Actividad 4

Actividad 4

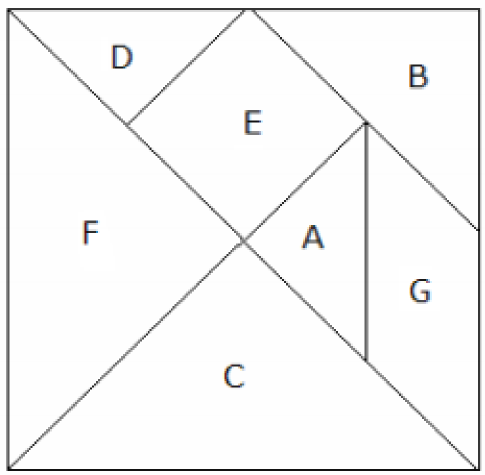
En los computadores se ha instalado la aplicación de GeoGebra donde podrás encontrar un archivo titulado TANGRAM. El Tangram es un juego de origen chino que consiste en formar figuras usando las 7 piezas dadas sin solaparlas (sobreponer unas con otras). Cuando hayas logrado armar la figura propuesta debes dar clic en comprobar y el programa te contestará con una carita feliz si has logrado con éxito la construcción o te pedirá que vuelvas a intentarlo.

Cuando hayas completado el juego en GeoGebra, contesta las siguientes preguntas:

1. Determina el área de las figuras construidas y la relación entre ellas, describe los pasos realizados y socializa con tus compañeros.

Figura Del Tangram	**Área**
Gato	
Caballo	
Tortuga	
Pez	
Toro	
Pato	
Cuadrado	

2. Teniendo en cuenta las fichas del Tangram, responde:



Si todas las fichas son medidas con la ficha A como unidad de medida, ¿cuál es la relación entre ellas?

B= 2A, C = ___, D = ___, E =___, F =___, G = ___

Igual situación, pero ahora la unidad de medida es B.

A= $\frac{1}{2}$ B, C = ___, D = ___, E =___, F =___, G = ___

Igual situación, pero ahora la unidad de medida es E.

A=___, B = __, C = ___, D =___, F =___, G = ___

Compare el área de cada ficha del Tangram con respecto al cuadrado completo y exprese dicha relación.

A=_____, B = ____, C = _____, D =_____, E = _____, F =_____, G = _____

Apéndice E. Actividad 5a

Maestría en Informática para la Educación | Universidad Industrial de Santander

Actividad 5a

Con la utilización de la herramienta GeoGebra, construir un rectángulo con vértices ABCD que resista la prueba de arrastre. Luego realizar los siguientes movimientos de tal manera que el rectángulo tenga las medidas:

1. Construir un rectángulo que tenga de distancia entre los puntos AB: 3 unidades y los puntos AC: 1 unidad. ¿Cuántas unidades cuadradas encierra?

2. Construir un rectángulo que tenga de distancia entre los puntos AB: 1 unidad y los puntos AC: 2 unidades. ¿Cuántas unidades cuadradas encierra?

3. Construir un rectángulo que tenga de distancia entre los puntos AB: 3 unidades y los puntos AC: 2 unidades. ¿Qué superficie tiene el rectángulo?

4. Seguir en la misma indicación de los puntos anteriores y completar la tabla:

Longitud del segmento AB	**Longitud del segmento AC**	**Superficie del rectángulo ABCD**
3	4	
3	5	
3	6	
3	7	
4	2	
4	3	
4	5	
4	6	
4	8	
5	9	
6	2	
7	4	

5. La cancha del Colegio tiene forma rectangular y el profesor de Sociales necesita medir su área para las exposiciones de la Santanderianidad y crear los espacios de los stands publicitarios; la cancha mide de ancho 22 metros y de largo 53 metros, ¿qué procedimiento realizarías para determinar su área? ¿Qué valor obtendrá el profesor de Sociales al medirla superficie de la cancha? Explica tu respuesta.

Apéndice F. Actividad 5b

Actividad 5b

Con la utilización de la herramienta GeoGebra, construir un cuadrado con vértices EFGH que resista la prueba de arrastre. Luego realizar los siguientes movimientos de tal manera que el cuadrado tenga las medidas:

1. Construir un cuadrado que mida de lado 2 unidades. ¿Cuántas unidades cuadradas encierra?

2. Construir un cuadrado que mida de lado 3 unidades. ¿Cuántas unidades cuadradas encierra?

3. Seguir en la misma indicación de los puntos anteriores y completar la tabla:

Longitud del segmento EF	**Longitud del segmento FG**	**Superficie del cuadrado EFGH**
4	4	
5	5	
6	6	
7	7	
8	8	
9	9	
10	10	
11	11	
12	12	

4. En la clase de artística se desea elaborar un tapete artístico con material reciclable con cajas de cartón, el tapete debe tener forma cuadrada y que mida 400 cm^2 de área. Para los estudiantes recortar la figura deben averiguar ¿Cuál es la medida de lado que debe tener el tapete?

5. Para la clase de química los estudiantes deben construir una maqueta cuadrada que medida 38cm de lado donde representen el sistema de riego que se utiliza en la vereda Motoso. ¿Qué medida tendrá la superficie de la maqueta?

Apéndice G. Actividad 5c

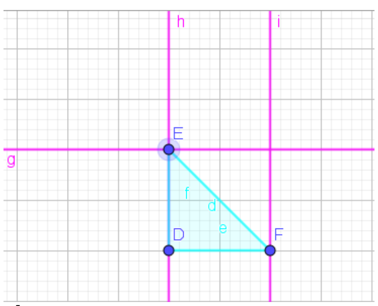
Maestría en Informática para la Educación | Universidad Industrial de Santander

Actividad 5c

Con la utilización de la herramienta GeoGebra, construir un triángulo con vértices EFG que resista la prueba de arrastre.

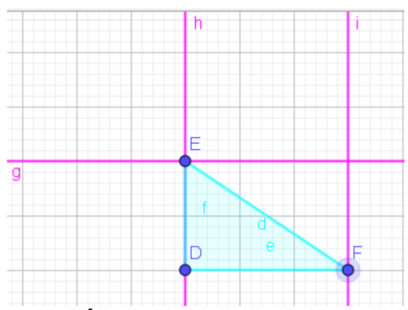
1. Determinar en cada caso el área del triángulo y del rectángulo.

FIGURA 1.



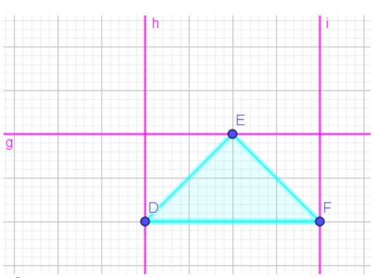
Área triángulo: _______________
Área rectángulo: _____________

FIGURA 2.



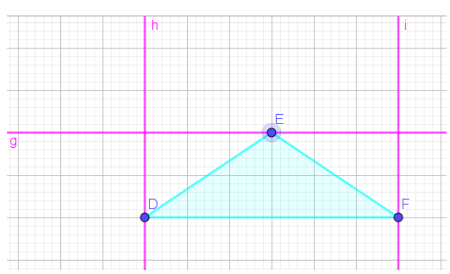
Área triángulo: _______________
Área rectángulo: ______________

FIGURA 3.



Área triángulo: _______________
Área rectángulo: _____________

FIGURA 4.



Área triángulo: _______________
Área rectángulo: ______________