SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN PARA ONDAS GRAVITACIONALES CILÍNDRICAS

DIEGO EDISON CRISTANCHO BLANCO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2005

SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN PARA ONDAS GRAVITACIONALES CILÍNDRICAS

DIEGO EDISON CRISTANCHO BLANCO

Trabajo de grado para optar al titulo de físico

Director
DR. GUILLERMO ALFONSO GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2005

A mi familia,

A Mi hijo,
Juan Diego

Sin ellos no hubiera sido posible,
Gracias.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos:

Al Dr. Guillermo Alfonso González Villegas.

Al Dr. José David Sanabria.

Al Dr. Gonzálo García .

Al compañero Framsol López.

Al Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación, GIRG.

TÍTULO : SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN PARA ONDAS GRAVITACIONALES CILÍNDRICAS. *.

AUTORES : CRISTANCHO BLANCO, Diego Edison **.

PALABRAS CLAVES : Ondas cilíndricas, Soluciones exactas, Relatividad, Gravitación.

DESCRIPCIÓN : En este trabajo se realiza una primera aproximación al estudio de las ondas gravitacionales cilíndricas, obteniendo una familia general de soluciones de las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo con simetría cilíndrica.

De acuerdo con lo anterior, se presenta el elemento de línea considerado en coordenadas cilíndricas, se obtienen los símbolos de Christoffel correspondientes y las componentes del tensor de Ricci. Posteriormente, se obtienen las ecuaciones de Einstein para la métrica considerada y, mediante una transformación de coordenadas apropiada, se reducen a las ecuaciones de Einstein-Rosen, una de las cuales es matemáticamente equivalente a la ecuación de onda clásica tri-dimensional para ondas con simetría cilíndrica.

Se introduce después un sistema de coordenadas que permite obtener soluciones explícitas de la ecuación de onda mencionada, las cuales se expresan apropiadamente en términos de funciones de Legendre de segunda clase. Finalmente, se utilizan las anteriores soluciones para integrar un sistema sobredeterminado de ecuaciones diferenciales parciales correspondientes a la restante función métrica.

Finalmente, se consideran casos particulares de la solución general obtenida, considerando diferentes soluciones. Inicialmente tomamos soluciones simples que depende linealmente de alguna de las dos coordenadas, la coordenada temporal o la coordenada radial encontramos la forma general de las funciones métricas para esta familia de soluciones y, terminar, consideramos un ejemplo específico sencillo obtenido tomando el primer término de dicha familia. También se consideran una vez más las soluciones que depende linealmente de alguna de las dos coordenadas, la coordenada temporal o la coordenada radial.

*Trabajo de Grado.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V. (Director).

Title : EXACT SOLUTIONS OF THE EQUATIONS OF EINSTEIN FOR CYLINDRICAL GRAVITATIONAL WAVES *.

AUTORES : CRISTANCHO BLANCO, Diego Edison **.

KEY WORDS : Cylindrical waves, Exact solutions, Relativity, Gravitation.

DESCRIPTION : In this work one first approach to the study of the cylindrical gravitational waves is made, obtaining a general family of solutions of the equations of Einstein for a space-time with cylindrical symmetry. In agreement with the previous thing, the element of line appears considered in cylindrical coordinates, the corresponding symbols of Christoffel and the components of the tension of Ricci are obtained.

Later, the equations of considered Einstein for the metric one are obtained and, by means of an appropriate transformation of coordinates, they are reduced to the equations of Einstein-Rosen, one of which is mathematically equivalent to the equation of three-dimensional classic wave for waves with cylindrical symmetry. A system of coordinates is introduced later that allows to obtain explicit solutions of the equation of mentioned wave, which are expressed appropriately in terms of functions of Legendre of second class.

Finally, they are used the before head of cattle solutions to integrate on certain system of equations partial differentials corresponding to the remaining metric function. Finally, particular cases of the obtained general solution are considered, considering different solutions. Initially we took simple solutions that it depends linearly on some of the two coordinates, the temporary coordinate or the radial coordinate we found the general form of the metric functions for this family of solutions and, to finish, we considered simple specific an example obtained taking the first term from this family. Also the solutions that depend linearly on some of the two coordinates, the temporary coordinate or the radial coordinate are considered once again.

*Senior thesis project.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V. (Director).

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Un problema importante en la teoría general de la relatividad es el de la obtención de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein que correspondan a configuraciones físicamente aceptables [1]; ahora bien, dentro del estudio de dichas soluciones existen básicamente dos clases de problemas: en primer lugar, la obtención de soluciones y, en segundo lugar, la interpretación física de éstas.

Debido a la naturaleza de las ecuaciones de Einstein, un sistema no-lineal de ecuaciones diferenciales parciales, la obtención de soluciones exactas es un problema sorprendentemente complicado, el cual sólo ha sido resuelto en casos simples altamente simétricos; así entonces, el trabajo de investigación en el problema de la obtención de soluciones exactas se concentra básicamente, por un lado, en encontrar nuevas soluciones de las ecuaciones de Einstein y, por otro lado, en desarrollar técnicas de generación de soluciones exactas, las cuales no sólo reproducen importantes resultados ya conocidos, sino que también generan nuevas soluciones [2].

En los últimos años el Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG) ha enfocado sus esfuerzos a la obtención e interpretación de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein para el caso de espacio-tiempos estacionarios axialmente simétricos. La ventaja de considerar esta clase de soluciones radica en que la simetría del tensor métrico garantiza que las ecuaciones de Einstein constituyen un sistema completamente integrable de ecuaciones diferenciales parciales [5]. Como resultado de este programa de investigación, se han obtenido resultados tanto en la dirección de la obtención de soluciones exactas [6 - 14], como en la dirección de su interpretación en términos de modelos relativistas de discos [15 - 25].

Como consecuencia del trabajo realizado en el estudio de espacio-tiempos estacionarios axialmente simétricos, el GIRG ha adquirido una experiencia en el manejo de ciertos métodos necesarios para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente. Dichos métodos se basan en la introducción de algunas funciones auxiliares que permiten llevar el sistema de ecuaciones diferenciales a una forma tal que es posible integrarlo explícitamente y encontrar soluciones que pueden expresarse en términos de funciones simples de las coordenadas utilizadas.

De acuerdo con lo anterior, el GIRG pretende actualmente utilizar esta experiencia y aplicar dichos métodos a otra clase de espacio-tiempos con otra clase de simetrías que satisfagan un sistema de ecuaciones diferenciales solucionable de una manera equivalente. Un caso importante de espacio-tiempos a los cuales pueden aplicarse dichos métodos son los correspondientes a ondas gravitacionales cilíndricas, estudiadas originalmente por Nathan Rosen, Guido Beck y Albert Einstein [26,27]. Estudiando campos gravitacionales estáticos y axialmente simétricos, Beck descubrió que mediante la transformación compleja de las coordenadas ($z \to it, t \to iz$) se obtienen campos dependientes del tiempo con simetría cilíndrica, los cuales representan ondas gravitacionales cilíndricas, denominadas ondas de Eisntein-Rosen.

Ahora bien, a pesar de que las ondas gravitacionales cilíndricas no pueden describir exactamente la radiación producida por fuentes acotadas, tanto las ondas de Einstein-Rosen como algunas de sus generalizaciones han jugado un papel importante en la clarificación de algunos problemas complicados, tales como la perdida de energía debida a ondas gravitacionales [28], la interacción de ondas con cuerdas cósmicas [29,30], la estructura asintótica de espacio-tiempos radiactivos [31], la dispersión de ondas [32], el concepto de masa cuasi-local [33], pruebas de códigos en relatividad númerica [34], investigaciones acerca de la conjetura del censor cósmico [35] y algunos problemas en gravedad cuántica [36 - 38].

En el presente trabajo se hace un primer estudio de las ondas gravitacionales cilíndricas. En el primer capítulo se encuentra los símbolos de Christoffel del elemento de línea apropiado, luego se hallan los términos no nulos del tensor de Ricci, con dichos términos se encuentran las soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío físicamente aceptables mediante transformaciones de coordenadas que me permiten describir la ecuación de onda.

En el capítulo 2 se consideran casos particulares de la solución general obtenida en el capítulo anterior, específicamente se toman soluciones de la forma $W = \rho$ y $V = t$, para encontrar la forma general de las funciones métricas ψ y γ para esta familia de soluciones y, finalmente, consideramos un ejemplo específico sencillo obtenido tomando el primer término de dicha familia. También se consideran los casos $W = t$ y $V = \rho$, $W = \cos t \cos \rho$ y $V = -\text{sen}t\ \text{sen}\rho$ y, finalmente, $W = \cos t \text{sen}\rho$ y $V = \text{sen}t \cos \rho$.

1 ONDAS GRAVITACIONALES CILÍNDRICAS

1.1 INTRODUCCIÓN

Como primer paso para el estudio de soluciones de las ecuaciones de Einstein correspondientes a ondas gravitacionales cilíndricas vamos, en este capítulo, a particularizar las ecuaciones de Einstein considerando un elemento de línea apropiado con simetría cilíndrica. Para tal fin se tomará una generalización del elemento de línea asociado con las soluciones de Einstein-Rosen [1, 2]. La generalización introduce una función métrica adicional, la cual satisface la ecuación de onda uni-dimensional clásica, y contiene como casos particulares a las soluciones de Einstein-Rosen.

De acuerdo con lo anterior, en la sección 1.2, se presenta el elemento de línea considerado, se obtienen los símbolos de Christoffel correspondientes y las componentes del tensor de Ricci. Posteriormente, en la sección 1.3, se obtienen las ecuaciones de Einstein para la métrica considerada y, mediante una transformación de coordenadas apropiada, se reducen a las ecuaciones de Einstein-Rosen, una de las cuales es matemáticamente equivalente a la ecuación de onda clásica tri-dimensional para ondas con simetría cilíndrica.

En la sección 1.4 se introduce un sistema de coordenadas que permite obtener soluciones explícitas de la ecuación de onda mencionada, las cuales se expresan apropiadamente en términos de funciones de Legendre de segunda clase. Finalmente, en la sección 1.5, se utilizan las anteriores soluciones para integrar un sistema sobredeterminado de ecuaciones diferenciales parciales correspondientes a la restante función métrica.

1.2 SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL Y TENSOR DE RICCI

Con el fin de obtener soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein correspondientes a ondas gravitacionales cilíndricas, consideraremos el elemento de línea[2]

$$ds^2 = e^{2(\gamma-\psi)}(d\rho^2 - dt^2) + e^{2\psi}dz^2 + e^{-2\psi}W^2 d\varphi^2, \tag{1.1}$$

en donde $x^\alpha = (t, \rho, \varphi, z)$ son las coordenadas cilíndricas usuales, y las funciones métricas γ, ψ, W dependen solamente de las coordenadas t y ρ. Este elemento de línea puede considerarse como una generalización del elemento de línea de Einstein-Rosen, en el cual $W(t, \rho) = \rho$.

Los símbolos de Christoffel correspondientes al elemento de línea anterior, definidos como

$$\Gamma^\alpha_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}(g_{\lambda\rho,\sigma} + g_{\lambda\sigma,\rho} - g_{\rho\sigma,\lambda}), \tag{1.2}$$

pueden obtenerse fácilmente utilizando el método Lagrangiano; esto es, considerando el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}, \tag{1.3}$$

se calculan las ecuaciones de Lagrange correspondientes

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha}, \tag{1.4}$$

y, al compararlas con las ecuaciones de las geodésicas

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \tag{1.5}$$

se pueden determinar los símbolos de Christoffel por simple inspección.

Para el caso del elemento de línea (1.1), el Lagrangiano toma la forma

$$2\mathcal{L} = e^{2(\gamma-\psi)}(\dot{\rho}^2 - \dot{t}^2) + e^{2\psi}\dot{z}^2 + e^{-2\psi}W^2\dot{\varphi}^2, \tag{1.6}$$

y así, utilizando el procedimiento descrito anteriormente, se obtienen las expresiones siguientes para los símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^t_{tt} = (\dot{\gamma} - \dot{\psi}), && \Gamma^t_{\rho t} = \Gamma^t_{t\rho} = (\gamma' - \psi'),\\
&\Gamma^t_{\rho\rho} = (\dot{\gamma} - \dot{\psi}), && \Gamma^t_{\varphi\varphi} = e^{-2\gamma}(W\dot{W} - W^2\dot{\psi}),\\
&\Gamma^t_{zz} = e^{-2(\gamma-2\psi)}, && \Gamma^\varphi_{\rho\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\rho} = (W'W^{-1} - \psi'),\\
&\Gamma^\varphi_{t\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi t} = (\dot{W}W^{-1} - \dot{\psi}), && \Gamma^\rho_{\rho t} = \Gamma^\rho_{t\rho} = (\dot{\gamma} - \dot{\psi}),\\
&\Gamma^\rho_{\rho\rho} = (\gamma' - \psi'), && \Gamma^\rho_{\varphi\varphi} = -e^{-2\gamma}(W'W - W^2\psi'),\\
&\Gamma^\rho_{tt} = (\gamma' - \psi'), && \Gamma^z_{\rho z} = \Gamma^z_{z\rho} = \dot{\psi},\\
&\Gamma^\rho_{zz} = -e^{-2(\gamma-2\psi)}\psi', && \Gamma^z_{tz} = \Gamma^z_{zt} = \psi',
\end{aligned} \tag{1.7}$$

donde el punto denota derivada con respecto a t y la prima derivada con respecto a ρ.

Para obtener las componentes del tensor de Ricci, $R_{\alpha\beta}$, usaremos la definición

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\,\mu} - (\ln\sqrt{-g}\,)_{,\alpha\beta} + (\ln\sqrt{-g}\,)_{,\mu}\,\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}, \tag{1.8}$$

donde g es el determinante del tensor métrico, $g = \det g_{\alpha\beta}$, de modo que $\ln\sqrt{-g} = \ln W + 2(\gamma - \psi)$. Utilizando entonces las expresiones para los símbolos de Christoffel dadas por(1.7), se obtienen las siguientes componentes no nulas para el tensor de Ricci:

$$R_{tt} = \ddot{\gamma} - \ddot{\psi} - \gamma'' + \psi'' - 2\dot{\psi}^2 + \frac{\dot{W}(\dot{\gamma} + \dot{\psi}) + W'(\gamma' - \psi')}{W} - W'\ddot{W}, \tag{1.9}$$

$$R_{\rho\rho} = \gamma'' - \psi'' - \ddot{\gamma} + \ddot{\psi} - 2\psi'^{\,2} + \frac{\dot{W}(\dot{\gamma} - \dot{\psi}) + W'(\gamma' + \psi') - W''}{W}, \tag{1.10}$$

$$R_{\varphi\varphi} = W[\dot{W}\dot{\psi} - 3W'\psi' + W'' - \ddot{W}] + W^2(\psi'^{\,2} + \ddot{\psi} - \psi'') + W'^{\,2}, \tag{1.11}$$

$$R_{zz} = \ddot{\psi}\psi'' + \frac{\dot{\psi}\dot{W} - \psi'W'}{W}, \tag{1.12}$$

$$R_{\rho t} = \dot{W}\gamma' + W'\dot{\gamma} - 2W\dot{\psi}\psi' - \dot{W}', \tag{1.13}$$

mientras que las restantes componentes son identicamente cero.

1.3 EL SISTEMA DE ECUACIONES DE EINSTEIN

Las ecuaciones de Einstein pueden escribirse en la forma [3]

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right), \tag{1.14}$$

donde $T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$ es la traza del tensor de momentum-energía. En el vacío $T_{\alpha\beta}$ es cero, así que la expresión anterior se reduce a

$$R_{\alpha\beta} = 0, \tag{1.15}$$

las cuales constituyen las ecuaciones de Einstein en el vacío.

Igualando entonces a cero las componentes de $R_{\alpha\beta}$ dadas por las expresiones (1.9) - (1.13), y combinandolas apropiadamente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$W_{,\rho\rho} - W_{,tt} = 0, \tag{1.16}$$

$$(W\psi_{,\rho})_{,\rho} - (W\psi_{,t})_{,t} = 0, \tag{1.17}$$

$$W_{,t}\gamma_{,\rho} + W_{,\rho}\gamma_{,t} - 2W\psi_{,t}\psi_{,\rho} - W_{,\rho t} = 0, \tag{1.18}$$

$$W_{,\rho}\gamma_{,\rho} + W_{,t}\gamma_{,t} - W(\psi_{,\rho}^2 + \psi_{,t}^2) - W_{,tt} = 0, \tag{1.19}$$

un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas.

La ecuación (1.16) es la conocida ecuación de ondas clásica uni-dimensional, cuyas soluciones son ampliamente conocidas en la literatura. Por otro lado, es fácil ver que las ecuaciones (1.16) y (1.17) son las condiciones de integrabilidad del sistema sobredeterminado (1.18) - (1.19) de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden para la función γ. De acuerdo con esto, para resolver el sistema de ecuaciones (1.16) - (1.19) debemos primero encontrar soluciones $W(t,\rho)$ y $\psi(t,\rho)$ para luego integrar el sistema de ecuaciones para la función γ.

Con el fin de realizar el procedimiento de integración descrito anteriormente, consideremos soluciones de la ecuación (1.16) del tipo D′Alembert

$$W(\rho,t) = \Phi(\rho+t) \ + \ \Omega(\rho-t), \tag{1.20}$$

donde Φ y Ω son funciones arbitrarias de su argumento. Consideraremos igualmente otra solución de la ecuación (1.16), linealmente independiente de la anterior, expresada como

$$V(\rho,t) = \Phi(\rho+t) \ - \ \Omega(\rho-t), \tag{1.21}$$

donde Φ y Ω son las mismas funciones introducidas en (1.20).

Utilizando entonces las funciones $V(t,\rho)$ y $W(t,\rho)$ definamos la transformación de coordenadas

$$(t,\rho,\varphi,z) \leftrightarrow (V,W,\varphi,z), \tag{1.22}$$

de tal manera que el elemento de línea (1.1) toma la forma

$$ds^2 \ = \ e^{2(\Lambda-\psi)}(dW^2 - dV^2) \ + \ e^{2\psi}dz^2 \ + \ e^{-2\psi}W^2 d\varphi^2, \tag{1.23}$$

donde Λ está dado por

$$\Lambda = \gamma - \frac{1}{2}\ln(W'^{\,2} - V'^{\,2}) \tag{1.24}$$

y, como antes, la prima indica derivada con respecto a ρ.

Tomando entonces el elemento de línea (1.23), las ecuaciones de Einstein en el vacío toman la forma

$$(W\psi,_W),_W \ - \ (W\psi,_V),_V \ = \ 0, \tag{1.25}$$
$$\Lambda,_W \ = \ W(\psi,_W^2 + \psi,_V^2), \tag{1.26}$$
$$\Lambda,_V \ = \ 2W\psi,_V\,\psi,_W\,. \tag{1.27}$$

Es fácil ver que la ecuación (1.25) es la condición de integrabilidad del sistema sobredeterminado (1.26) - (1.27) de ecuaciones para Λ. Así entonces, dada una solución $\psi(V,W)$ de la ecuación (1.25), la función $\Lambda(V,W)$ puede determinarse por cuadraturas.

Reescribiendo la ecuación (1.25) en la forma

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial W^2} \ + \ \frac{1}{W}\frac{\partial\psi}{\partial W} \ - \ \frac{\partial^2\psi}{\partial V^2} \ = \ 0, \tag{1.28}$$

puede verse que es matemáticamente equivalente a la ecuación de ondas clásica tri-dimensional para ondas con simetría cilíndrica, considerando a W como una coordenada radial y a V como una coordenada temporal. Dado que las soluciones de esta ecuación son ampliamente conocidas en la literatura, la solución del sistema de ecuaciones (1.26) - (1.27) está garantizada.

En el caso partícular en que $\Phi(\rho+t) = (\rho+t)/2$ y $\Omega(\rho-t) = (\rho-t)/2$, se tiene que $V = t$ y $W = \rho$ y las ecuaciones (1.25) - (1.27) toman la forma

$$\psi,_{tt} \ = \ \psi,_{\rho\rho} + \rho^{-1}\psi,_\rho\,, \tag{1.29}$$
$$\gamma,_\rho \ = \ \rho(\psi,_\rho^2 + \psi,_t^2), \tag{1.30}$$
$$\gamma,_t \ = \ 2\rho\psi,_\rho\,\psi,_t\,. \tag{1.31}$$

Este sistema de ecuaciones representa las soluciones para ondas gravitacionales de Einstein-Rosen [27]. De acuerdo con esto, vemos que el elemento de línea (1.1) conduce a un sistema de ecuaciones que generaliza el sistema de ecuaciones de Einstein-Rosen y lo contiene como un caso particular.

1.4 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA

Es bien conocido que las soluciones de la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas (1.28) pueden expresarse apropiadamente en términos de funciones de Bessel de la coordenada radial; sin embargo, esta clase de soluciones no es muy apropiada para resolver el sistema de ecuaciones de Einstein, pues no permite una integración explicita de la función Λ en términos de funciones simples. De acuerdo con esto, vamos a introducir una transformación de coordenadas que nos permita obtener soluciones, expresables mediante funciones relativamente simples, apropiadas para integrar explicitamente el sistema de ecuaciones (1.26) - (1.27).

Consideremos la transformación de coordenadas $(V, W, z, \varphi) \to (x, y, z, \varphi)$, con

$$x = \sqrt{W^2 - V^2}, \tag{1.32a}$$

$$y = \frac{iV}{\sqrt{W^2 - V^2}}. \tag{1.32b}$$

Mediante esta transformación, la ecuación de onda (1.28) toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right] \;+\; \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-y^2)\frac{\partial \psi}{\partial y}\right] \;=\; 0, \tag{1.33}$$

la cual es matemáticamente equivalente a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas para una función ψ independiente de la coordenada acimutal φ. Para ver dicha equivalencia explicitamente, basta con hacer la identificación $x = r$, $y = \cos\theta$. Dicha equivalencia garantiza entonces que las soluciones ψ pueden escribirse apropiadamente en términos de potencias de x y funciones de Legendre de la variable y.

Para solucionar la ecuación diferencial parcial (1.33), y así verificar la afirmación anterior, utilizaremos el conocido método de separación de variables. Supongamos entonces que la solución se puede escribir en términos de un producto de funciones de la forma

$$\psi(x, y) \;=\; E(x)Y(y), \tag{1.34}$$

la cual al sustituirla en la ecuación (1.33), y dividiendo por $E(x)Y(y)$, lleva a la expresión

$$\frac{1}{E(x)}\frac{d}{dx}\left[x^2 \frac{dE(x)}{dx}\right] + \frac{1}{Y(y)}\frac{d}{dy}\left[(1-y^2)\frac{dY(y)}{dy}\right] = 0. \tag{1.35}$$

El primer miembro de esta relación es una función que depende solamente de x, mientras que el segundo miembro es una función que depende sólo de y; por lo tanto, los dos términos deben ser constantes.

Tomando la constante de separación como $l(l+1)$, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:

$$x^2\frac{d^2E(x)}{dx^2} + 2x\frac{dE(x)}{dx} - E(x)l(l+1) = 0, \tag{1.36}$$

$$(1-y^2)\frac{d^2Y(y)}{dy^2} - 2y\frac{dY(y)}{dy} + Y(y)l(l+1) = 0. \tag{1.37}$$

La primera de estas ecuaciones es la conocida ecuación diferencial de Euler-Cauchy, mientras que la segunda es la ecuación diferencial de Legendre; por consiguiente, la solución general para ψ se puede escribir de la forma

$$\psi(x,y) \;= \sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{a_l}{x^{l+1}} \;+\; b_l x^l\right]\left[c_l P_l(y) \;+\; d_l Q_l(y)\right], \tag{1.38}$$

donde los $P_l(y)$ son los polinomios de Legendre y las $Q_l(y)$ las funciones de Legendre de segunda clase. Las constantes a_l, b_l, c_l y d_l son arbitrarias.

Ahora bien, teniendo en cuenta la transformación (1.32), vemos que la variable y puede escribirse como

$$y \;=\; \frac{i(V/W)}{\sqrt{1-(V/W)^2}}, \qquad W^2 > V^2, \tag{1.39}$$

$$y \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-(W/V)^2}}, \qquad W^2 < V^2, \tag{1.40}$$

de tal manera que, cuando $W^2 > V^2$, podemos escribir $y = i\bar{y}$ con $-\infty < \bar{y} < \infty$, mientras que, cuando $W^2 < V^2$, se tiene que $1 < y < \infty$.

De acuerdo con esto, teniendo en cuenta que los polinomios de Legendre divergen para valores grandes del argumento, la solución que presenta un comportamiento no singular debe contener solo a las funciones de Legendre de segunda clase, $Q_l(y)$, lo que equivale a tomar los $c_l = 0$ en la solución general (1.38). Así entonces, la solución general para la función $\psi(x,y)$ puede expresarse como

$$\psi(x,y) \;= \sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{a_l}{x^{l+1}} \;+\; b_l x^l\right] Q_l(y), \tag{1.41}$$

donde hemos redefinido apropiadamente las constantes arbitrarias.

Ahora bien, la expresión anterior contiene dos términos cuyo comportamiento es apropiado para diferentes regiones del rango de valores de la variable x; es decir, cuando el rango de valores de x es acotado e incluye el valor $x = 0$, la solución apropiada está dada por

$$\psi_I(x,y) \;= \sum_{l=0}^{\infty} C_l x^l Q_l(y). \tag{1.42}$$

Por otro lado, cuando el rango de valores de x no es acotado, la solución apropiada es

$$\psi_{II}(x,y) \;= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_l Q_l(y)}{x^{l+1}}. \tag{1.43}$$

Notese que en ambos casos hemos redefinido las constantes arbitrarias. La expresión correspondiente en las variables V y W puede obtenerse facilmente utilizando la transformación (1.32) y, finalmente, la expresión en las coordenadas originales t, ρ se obtiene utilizando las soluciones de D$'$Alembert (1.20) y (1.21) para $W(t,\rho)$ y $V(t,\rho)$.

1.5 SOLUCIÓN PARA LA FUNCIÓN MÉTRICA Λ

Vamos ahora a determinar la función $\Lambda(V, W)$ integrando el sistema de ecuaciones (1.26) - (1.27). Ahora bien, para tal fin, es más conveniente reescribir dichas ecuaciones en términos de las variables (x, y), las cuales son más apropiadas para realizar explicitamente la integración. Utilizando entonces la transformación (1.32), el sistema de ecuaciones (1.25) - (1.27) toma la forma

$$\begin{aligned} & [x^2\psi_{,x}]_{,x} \ + \ [(1-y^2)\psi_{,y}]_{,y} \ = \ 0, && (1.44) \\ \Lambda_{,x} \ &= \ x(1-y^2)\psi_{,x}^2 - 2y(1-y^2)\psi_{,x}\psi_{,y} - (1-y^2)^2(\psi_{,y}^2/x), && (1.45) \\ \Lambda_{,y} \ &= \ yx^2\psi_{,x}^2 + 2x(1-y^2)\psi_{,x}\psi_{,y} - y(1-y^2)^2\psi_{,y}^2, && (1.46) \end{aligned}$$

donde la ecuación (1.44) es la ecuación de onda, cuyas soluciones se obtuvieron en la sección anterior. Igualmente, es fácil ver que la condición de integrabilidad del sistema sobredeterminado (1.45) - (1.46) para la función Λ es equivalente a la ecuación (1.44).

El sistema de ecuaciones diferenciales (1.45) - (1.46) tiene la forma

$$\begin{aligned} \Lambda_{,x}(x,y) \ &= \ A(x,y), && (1.47) \\ \Lambda_{,y}(x,y) \ &= \ B(x,y), && (1.48) \end{aligned}$$

de modo que su condición de integrabilidad,

$$\frac{\partial A(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial B(x,y)}{\partial x}, \qquad (1.49)$$

está garantizada mediante la ecuación (1.44).

La solución de dicho sistema se puede obtener integrando (1.47) con respecto a x,

$$\Lambda(x,y) = \int A(x,y)dx + g(y), \qquad (1.50)$$

donde $g(y)$ es una función que se obtiene derivando la expresión anterior con respecto a y e igualando con (1.48) :

$$\Lambda_{,y}(x,y) = B(x,y) = \int \frac{\partial A(x,y)}{\partial y}dx + g'(y). \qquad (1.51)$$

Usando entonces la condición (1.49) se tiene que

$$B(x,y) = \int \frac{\partial B(x,y)}{\partial x}dx + g'(y); \qquad (1.52)$$

es decir,

$$B(x,y) = B(x,y) + g'(y), \qquad (1.53)$$

con lo que $g(y) = c$, siendo c una constante arbitraria.

De acuerdo con lo anterior, la solución del sistema sobredeterminado (1.47)-(1.48) está dada por

$$\Lambda(x,y) = \int A(x,y)dx + c. \qquad (1.54)$$

Igualmente la solución puede obtenerse integrando (1.48) con respecto a y. Con un procedimiento analogo al anterior, la solución puede entonces expresarse como

$$\Lambda(x,y) = \int B(x,y)dy + c. \tag{1.55}$$

Evidentemente (1.54) y (1.55) son equivalentes ya que $\Lambda(x,y)$ es única. Esto significa que, dependiendo de la forma de las expresiones $A(x,y)$ y $B(x,y)$, podemos escoger entre (1.54) o (1.55) aquella que permita realizar la integración de manera más simple.

De acuerdo con el comportamiento de la función $\psi(x,y)$, es claro que la expresión (1.54) es la más apropiada para obtener la solución $\Lambda(x,y)$. Así entonces, realizando la integración correspondiente en (1.54) con $\psi_I(x,y)$ y $\psi_{II}(x,y)$ dados por (1.42) y (1.43), se obtienen las correspondientes expresiones para $\Lambda_I(x,y)$ y $\Lambda_{II}(x,y)$, dadas por

$$\Lambda_I(x,y) = (1-y^2)\sum_{k+l\neq 0}^{\infty} \frac{C_k C_l M_{kl}(y) x^{k+l}}{k+l} - C_0^2 \ln x + c_I, \tag{1.56}$$

donde

$$M_{kl}(y) = klQ_k(y)Q_l(y) - 2ykQ_k(y)Q_l'(y) - (1-y^2)Q_k'(y)Q_l'(y), \tag{1.57}$$

y

$$\Lambda_{II}(x,y) = -(1-y^2)\sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{C_k C_l N_{kl}(y)}{(k+l+2)x^{k+l+2}} + c_{II}, \tag{1.58}$$

donde

$$N_{kl}(y) = (k+1)(l+1)Q_k(y)Q_l(y) + 2y(k+1)Q_k(y)Q_l'(y) - (1-y^2)Q_k'(y)Q_l'(y). \tag{1.59}$$

Las constantes de integración c_I y c_{II} deben determinarse en cada caso dependiendo del comportamiento físico de la solución.

Al igual que con la función ψ, la expresión correspondiente en las variables V y W puede obtenerse facilmente utilizando la transformación (1.32) y, finalmente, la expresión en las coordenadas originales t, ρ se obtiene utilizando las soluciones de D'Alembert (1.20) y (1.21) para $W(t,\rho)$ y $V(t,\rho)$. La expresión correspondiente a $\gamma(t,\rho)$ se obtiene entonces utilizando la transformación (1.24). En el capítulo siguiente consideraremos algunas soluciones partículares para $W(t,\rho)$ y $V(t,\rho)$ y encontraremos las expresiones correspondientes para $\psi(t,\rho)$ y $\gamma(t,\rho)$.

2 FAMILIAS PARTICULARES DE SOLUCIONES

2.1 INTRODUCCIÓN

Vamos en este capítulo a considerar casos particulares de la solución general obtenida en el capítulo anterior, obtenidos considerando diferentes soluciones para (1.20) y (1.21). En la sección 2.2 tomamos $W = \rho$ y $V = t$, encontramos la forma general de las funciones métricas ψ y γ para esta familia de soluciones y, finalmente, consideramos un ejemplo específico sencillo obtenido tomando el primer término de dicha familia.

En las siguientes secciones se consideran otras soluciones para (1.20) y (1.21). En la sección 2.3 tomamos $W = t$ y $V = \rho$, en la sección 2.4, $W = \cos t \cos \rho$ y $V = -\mathrm{sen}t\ \mathrm{sen}\rho$ y, en la sección 2.5, $W = \cos t \mathrm{sen}\rho$ y $V = \mathrm{sen}t \cos \rho$. En todos los casos realizamos el mismo análisis de la sección 2.2.

2.2 PRIMERA FAMILIA DE SOLUCIONES

Consideremos inicialmente la solución para (1.20) y (1.21) obtenida tomando

$$\Phi(\rho + t) = (\rho + t)/2, \tag{2.1}$$
$$\Omega(\rho - t) = (\rho - t)/2, \tag{2.2}$$

de modo que $W(t, \rho) = \rho$ y $V(t, \rho) = t$. Para esta solución partícular, se tiene que

$$x = \sqrt{\rho^2 - t^2}, \tag{2.3}$$
$$y = \frac{it}{\sqrt{\rho^2 - t^2}}. \tag{2.4}$$

Para determinar la forma explícita de la solución, consideraremos la región $\rho^2 - t^2 > 0$, correspondiente al exterior del cono $\rho^2 - t^2 = 0$, y la región $\rho^2 - t^2 < 0$, correspondiente al interior del cono. Para el exterior del cono tendremos que $0 < x < \infty$ mientras que $y = i\bar{y}$, con $-\infty < \bar{y} < \infty$. Por otro lado, para el interior del cono tendremos que $x = i\bar{x}$, con $0 < \bar{x} < \infty$, mientras que $1 < y < \infty$.

De acuerdo con lo anterior, podemos ver que la solución que presenta un comportamiento no singular en regiones distintas al cono está dada, cuando $\rho^2 > t^2$, por

$$\psi(t,\rho) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l q_l(\bar{y})}{x^{l+1}}, \tag{2.5a}$$

$$\gamma(t,\rho) = -(1+\bar{y}^2) \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{C_k C_l N_{kl}(\bar{y})}{(k+l+2)x^{k+l+2}} + c, \tag{2.5b}$$

con

$$N_{kl}(\bar{y}) = (k+1)(l+1)q_k(\bar{y})q_l(\bar{y}) + 2\bar{y}(k+1)q_k(\bar{y})q_l'(\bar{y}) + (1+\bar{y}^2)q_k'(\bar{y})q_l'(\bar{y}), \tag{2.6}$$

mientras que para $\rho^2 < t^2$, está dada por

$$\psi(t,\rho) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l Q_l(y)}{\bar{x}^{l+1}}, \tag{2.7a}$$

$$\gamma(t,\rho) = -(1-y^2) \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{C_k C_l N_{kl}(y)}{(k+l+2)\bar{x}^{k+l+2}} + c, \tag{2.7b}$$

con

$$N_{kl}(y) = (k+1)(l+1)Q_k(y)Q_l(y) + 2y(k+1)Q_k(y)Q_l'(y) - (1-y^2)Q_k'(y)Q_l'(y). \tag{2.8}$$

En esta expresión $q_l(\bar{y}) = i^{l+1}Q_l(i\bar{y})$ son las funciones de Legendre de argumento imaginario [4], y las constantes c se determinan exigiendo que la solución sea asintóticamente plana. Igualmente, es fácil ver que la solución es continua en el cono $\rho^2 = t^2$.

Como un ejemplo sencillo de la anterior solución, consideremos el caso obtenido tomando solamente el primer término de la expansión general; es decir, tomemos $C_0 \neq 0$ y $C_k = 0$ para $k > 0$, de tal manera que la forma explícita de la solución es, para $\rho^2 > t^2$,

$$\psi(t,\rho) = \frac{C_0}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} \cot^{-1}\left[\frac{t}{\sqrt{\rho^2 - t^2}}\right], \tag{2.9a}$$

$$\gamma(t,\rho) = -\frac{1}{2}\left[\frac{\rho^2\psi^2(t,\rho) - 2tC_0\psi(t,\rho) + C_0^2}{\rho^2 - t^2}\right], \tag{2.9b}$$

donde la constante c se toma igual a cero.

Por otro lado, cuando $\rho^2 < t^2$, la solución está dada por

$$\psi(t,\rho) = \frac{C_0}{2\sqrt{t^2 - \rho^2}} \ln\left[\frac{t + \sqrt{t^2 - \rho^2}}{t - \sqrt{t^2 - \rho^2}}\right], \tag{2.10a}$$

$$\gamma(t,\rho) = \frac{1}{2}\left[\frac{\rho^2\psi^2(t,\rho) - 2C_0t\psi(t,\rho) + C_0^2}{t^2 - \rho^2}\right], \tag{2.10b}$$

donde, nuevamente, tomamos la constante de integración igual a cero.

2.3 SEGUNDA FAMILIA DE SOLUCIONES

Consideremos ahora la solución para (1.20) y (1.21) obtenida tomando

$$\Phi(\rho+t) = (\rho+t)/2, \tag{2.11}$$
$$\Omega(\rho-t) = (t-\rho)/2, \tag{2.12}$$

de tal manera que $W(t,\rho)=t$ y $V(t,\rho)=\rho$. Para esta solución partícular, se tiene que

$$x = \sqrt{t^2-\rho^2}, \tag{2.13}$$
$$y = \frac{i\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}. \tag{2.14}$$

Siguiendo el procedimiento de la sección anterior, consideraremos la region $t^2-\rho^2>0$, correspondiente al interior del cono $t^2=\rho^2$, y la región $t^2-\rho^2<0$, correspondiente al exterior del cono. Para el interior del cono tendremos que $0<x<\infty$ mientras que $y=i\bar{y}$, con $-\infty<\bar{y}<\infty$. Por otro lado, para el exterior del cono tendremos que $x=i\bar{x}$, con $0<\bar{x}<\infty$, mientras que $1<y<\infty$.

De acuerdo con lo anterior, la solución que presenta un comportamiento no singular en regiones distintas al cono está dada, cuando $t^2>\rho^2$, por

$$\psi(t,\rho) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_l q_l(\bar{y})}{x^{l+1}}, \tag{2.15a}$$

$$\gamma(t,\rho) = -(1+\bar{y}^2)\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{C_k C_l N_{kl}(\bar{y})}{(k+l+2)x^{k+l+2}} + c, \tag{2.15b}$$

con

$$N_{kl}(\bar{y}) = (k+1)(l+1)q_k(\bar{y})q_l(\bar{y}) + 2\bar{y}(k+1)q_k(\bar{y})q_l'(\bar{y}) + (1+\bar{y}^2)q_k'(\bar{y})q_l'(\bar{y}), \tag{2.16}$$

mientras que para $t^2<\rho^2$, está dada por

$$\psi(t,\rho) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_l Q_l(y)}{\bar{x}^{l+1}}, \tag{2.17a}$$

$$\gamma(t,\rho) = -(1-y^2)\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{C_k C_l N_{kl}(y)}{(k+l+2)\bar{x}^{k+l+2}} + c, \tag{2.17b}$$

con

$$N_{kl}(y) = (k+1)(l+1)Q_k(y)Q_l(y) + 2y(k+1)Q_k(y)Q_l'(y) - (1-y^2)Q_k'(y)Q_l'(y). \tag{2.18}$$

Como en el caso anterior, las constantes c se determinan exigiendo que la solución sea asintóticamente plana y la solución es continua en el cono $\rho^2=t^2$.

Como en la sección anterior, un ejemplo sencillo se obtiene tomando solamente el primer término de la expansión general; es decir, tomemos $C_0\neq 0$ y $C_k=0$ para $k>0$, de tal manera que la forma explícita de la solución es, para $\rho^2<t^2$,

$$\psi(t,\rho) = \frac{C_0}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\,\mathrm{arccot}\left[\frac{\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\right], \tag{2.19a}$$

$$\gamma(t,\rho) = -\frac{1}{2}\left[\frac{t^2\psi^2(t,\rho) - 2\rho C_0\psi(t,\rho) + C_0^2}{t^2-\rho^2}\right], \tag{2.19b}$$

donde la constante c se toma igual a cero.

Por otro lado, cuando $\rho^2 > t^2$, la solución está dada por

$$\psi(t,\rho) = \frac{C_0}{2\sqrt{\rho^2-t^2}} \ln\left[\frac{\rho+\sqrt{\rho^2-t^2}}{\rho-\sqrt{\rho^2-t^2}}\right], \tag{2.20a}$$

$$\gamma(t,\rho) = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2\psi^2(t,\rho)-2C_0\rho\psi(t,\rho)+C_0^2}{\rho^2-t^2}\right], \tag{2.20b}$$

donde, nuevamente, tomamos la constante de integración igual a cero.

2.4 TERCERA FAMILIA DE SOLUCIONES

Una tercera familia de soluciones se obtiene tomando

$$\Phi(\rho+t) = \frac{\cos(\rho+t)}{2}, \tag{2.21}$$

$$\Omega(\rho-t) = \frac{\cos(\rho-t)}{2}, \tag{2.22}$$

lo que implica que $W(t,\rho) = \cos t\cos\rho$ y $V(t,\rho) = -\ \mathrm{sen} t\ \mathrm{sen}\rho$, de tal manera que $-1 < W < 1$ y $-1 < V < 1$. En este caso se tiene que

$$x = \sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t-\mathrm{sen}^2\rho}, \tag{2.23}$$

$$y = \frac{-\ i\ \mathrm{sen}t\ \mathrm{sen}\rho}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t-\mathrm{sen}^2\rho}}. \tag{2.24}$$

Siguiendo entonces el procedimiento de las secciones anteriores, analizaremos la forma explícita de la solución cuando $W^2 > V^2$ y cuando $W^2 < V^2$. Cuando $W^2 > V^2$, de modo que $0 < \tan^2 t\tan^2\rho < 1$, tendremos que $0 < x < 1$ mientras que $y = i\bar{y}$, con $-\infty < \bar{y} < \infty$. Por otro lado, cuando $W^2 < V^2$, así que $\tan^2 t\tan^2\rho > 1$, se tiene que $x = i\bar{x}$, con $0 < \bar{x} < 1$, mientras que $1 < y < \infty$.

De acuerdo con esto, la solución para $W^2 > V^2$ está dada por:

$$\psi(t,\rho) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l\ q_l(\bar{y})\ x^l, \tag{2.25a}$$

$$\gamma(t,\rho) = \Lambda(t,\rho) + \frac{1}{2}\ln\left[\mathrm{sen}^2\rho\cos^2 t-\mathrm{sen}^2 t\cos^2\rho\right], \tag{2.25b}$$

en donde

$$\Lambda(t,\rho) = (1+\bar{y}^2)\sum_{k,l\neq 0}^{\infty}\frac{C_kC_lM_{kl}(\bar{y})x^{k+l}}{k+l} - C_0^2\ln x + c \tag{2.26}$$

con

$$M_{kl}(\bar{y}) = klq_k(\bar{y})q_l(\bar{y}) - 2\bar{y}kq_k(\bar{y})q_l'(\bar{y}) + (1+\bar{y}^2)q_k'(\bar{y})q_l'(\bar{y}), \tag{2.27}$$

donde la constante c se determina exigiendo que la solución sea asintóticamente plana

Ahora bien cuando $W^2 < V^2$, la solución está dada por

$$\psi(t,\rho) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \; Q_l(y) \; \bar{x}^l, \tag{2.28a}$$

$$\gamma(t,\rho) = \Lambda(t,\rho) + \frac{1}{2} \ln \left[\text{sen}^2\rho \cos^2 t - \text{sen}^2 t \cos^2 \rho \right], \tag{2.28b}$$

en donde

$$\Lambda(t,\rho) = (1-y^2) \sum_{k,l \neq 0}^{\infty} \frac{C_k C_l M_{kl}(y) \bar{x}^{k+l}}{k+l} - C_0^2 \ln \bar{x} + c \tag{2.29}$$

con

$$M_{kl}(\bar{y}) = klQ_k(y)Q_l(y) - 2ykQ_k(y)Q_l'(y) - (1-y^2)Q_k'(y)Q_l'(y), \tag{2.30}$$

donde, nuevamente, la constante c se determina exigiendo que la solución sea asintóticamente plana.

Tomemos nuevamente el caso sencillo en que $C_0 \neq 0$ y $C_k = 0$ para $k > 0$, de tal manera que la forma explícita de la solución será

$$\psi(t,\rho) = C_0 \cot^{-1} \left[\frac{-\,\text{sen}t\text{sen}\rho}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 t - \text{sen}^2\rho}} \right], \tag{2.31}$$

$$\gamma(t,\rho) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\text{sen}^2\rho \cos^2 t - \text{sen}^2 t \cos^2 \rho}{(1 - \text{sen}^2 t - \text{sen}^2\rho)^{C_0^2}} \right], \tag{2.32}$$

cuando $W^2 > V^2$, tomando la constante de integración igual a cero. Por otro lado, cuando $W^2 < V^2$, la solución toma la forma

$$\psi(t,\rho) = \frac{C_0}{2} \ln \left[\frac{\text{sen}t\text{sen}\rho + \sqrt{\text{sen}^2 t + \text{sen}^2\rho - 1}}{\text{sen}t\text{sen}\rho - \sqrt{\text{sen}^2 t + \text{sen}^2\rho - 1}} \right], \tag{2.33}$$

$$\gamma(t,\rho) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\text{sen}^2\rho \cos^2 t - \text{sen}^2 t \cos^2 \rho}{(\text{sen}^2 t + \text{sen}^2\rho - 1)^{C_0^2}} \right], \tag{2.34}$$

tomando nuevamente la constante de integración igual a cero.

2.5 CUARTA FAMILIA DE SOLUCIONES

Finalmente, consideraremos una cuarta familia de soluciones obtenida tomando

$$\Phi(\rho+t) = \frac{\text{sen}(\rho+t)}{2}, \tag{2.35}$$

$$\Omega(\rho-t) = \frac{\text{sen}(\rho-t)}{2}, \tag{2.36}$$

lo que implica que $W(t,\rho) = \cos t \; \text{sen}\rho$ y $V(t,\rho) = \text{sen}t \; \cos\rho$, de tal manera que $-1 < W < 1$ y $-1 < V < 1$, tal como en la anterior familia de soluciones. En este caso se tiene que

$$x = \sqrt{\text{sen}^2\rho - \text{sen}^2 t}, \tag{2.37}$$

$$y = \frac{i \; \text{sen}t \cos\rho}{\sqrt{\text{sen}^2\rho - \text{sen}^2 t}}. \tag{2.38}$$

Siguiendo entonces el procedimiento de las secciones anteriores, analizaremos la forma explícita de la solución cuando $W^2 > V^2$ y cuando $W^2 < V^2$. Cuando $W^2 > V^2$, de modo que $\tan^2\rho > \tan^2 t$, tendremos que $0 < x < 1$ mientras que $y = i\bar{y}$, con $-\infty < \bar{y} < \infty$. Por otro lado, cuando $W^2 < V^2$, así que $\tan^2\rho < \tan^2 t$, se tiene que $x = i\bar{x}$, con $0 < \bar{x} < 1$, mientras que $1 < y < \infty$.

De acuerdo con esto, la solución para $W^2 > V^2$ está dada por:

$$\psi(t,\rho) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \; q_l(\bar{y}) \; x^l, \tag{2.39a}$$

$$\gamma(t,\rho) = \Lambda(t,\rho) + \frac{1}{2}\ln\left[\cos^2\rho\cos^2 t - \text{sen}^2\rho\ \text{sen}^2 t\right], \tag{2.39b}$$

en donde

$$\Lambda(t,\rho) = (1+\bar{y}^2)\sum_{k,l\neq 0}^{\infty}\frac{C_k C_l M_{kl}(\bar{y})x^{k+l}}{k+l} - C_0^2\ln x + c \tag{2.40}$$

con

$$M_{kl}(\bar{y}) = klq_k(\bar{y})q_l(\bar{y}) - 2\bar{y}kq_k(\bar{y})q_l'(\bar{y}) + (1+\bar{y}^2)q_k'(\bar{y})q_l'(\bar{y}), \tag{2.41}$$

donde la constante c se determina exigiendo que la solución sea asintóticamente plana

Ahora bien cuando $W^2 < V^2$, la solución está dada por

$$\psi(t,\rho) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \; Q_l(y) \; \bar{x}^l, \tag{2.42a}$$

$$\gamma(t,\rho) = \Lambda(t,\rho) + \frac{1}{2}\ln\left[\cos^2\rho\cos^2 t - \text{sen}^2\rho\ \text{sen}^2 t\right], \tag{2.42b}$$

en donde

$$\Lambda(t,\rho) = (1-y^2)\sum_{k,l\neq 0}^{\infty}\frac{C_k C_l M_{kl}(y)\bar{x}^{k+l}}{k+l} - C_0^2\ln \bar{x} + c \tag{2.43}$$

con

$$M_{kl}(\bar{y}) = klQ_k(y)Q_l(y) - 2ykQ_k(y)Q_l'(y) - (1-y^2)Q_k'(y)Q_l'(y), \tag{2.44}$$

donde, nuevamente, la constante c se determina exigiendo que la solución sea asintóticamente plana.

Tomemos nuevamente el caso sencillo en que $C_0 \neq 0$ y $C_k = 0$ para $k > 0$, de tal manera que la forma explícita de la solución será

$$\psi(t,\rho) = C_0\cot^{-1}\left[\frac{\text{sen} t\cos\rho}{\sqrt{\text{sen}^2\rho - \text{sen}^2 t}}\right], \tag{2.45}$$

$$\gamma(t,\rho) = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\cos^2\rho\cos^2 t - \text{sen}^2 t\ \text{sen}^2\rho}{(\text{sen}^2\rho - \text{sen}^2 t)^{C_0^2}}\right], \tag{2.46}$$

cuando $W^2 > V^2$, tomando la constante de integración igual a cero. Por otro lado, cuando $W^2 < V^2$, la solución toma la forma

$$\psi(t,\rho) = \frac{C_0}{2}\ln\left[\frac{\text{sen} t\cos\rho + \sqrt{\text{sen}^2 t - \text{sen}^2\rho}}{\text{sen} t\cos\rho - \sqrt{\text{sen}^2 t - \text{sen}^2\rho}}\right], \tag{2.47}$$

$$\gamma(t,\rho) = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\text{sen}^2\rho\cos^2 t - \text{sen}^2 t\cos^2\rho}{(\text{sen}^2 t - \text{sen}^2\rho)^{C_0^2}}\right], \tag{2.48}$$

donde también tomamos la constante de integración igual a cero.

El procedimiento que acabamos de realizar para estas cuatro familias de soluciones se puede también efectuar tomando otras soluciones para $W(t,\rho)$ y $V(t,\rho)$, de tal manera que puden obtenerse otras familias distintas a las aqui estudiadas.

CONCLUSIONES

En este trabajo se presento un método mediante el cual se obtuvieron soluciones exactas simples de las ecuaciones de Einstein para ondas gravitacionales cilíndricas. El método permite escribir las ecuaciones de Einstein en forma tal que es posible integrarlo explicitamente y encontrar soluciones que se pueden expresar en términos de funciones, relativamente simples, de las coordenadas utilizadas.

Mediante una transformación de coordenadas apropiada, se redujeron las ecuaciones de Einstein a las ecuaciones de Einstein-Rosen, una de las cuales es matemáticamente equivalente a la ecuación de onda clásica tri-dimensional para ondas con simetría cilíndrica. Se introdujo después otro sistema de coordenadas que permitio obtener soluciones explícitas de la ecuación de onda mencionada, las cuales se expresaron apropiadamente en términos de funciones de Legendre de segunda clase. Finalmente, se utilizaronn las anteriores soluciones para integrar un sistema sobredeterminado de ecuaciones diferenciales parciales correspondientes a la restante función métrica. Finalmente, se considerarron cuatro familias particulares de soluciones.

El presente trabajo constituye el primer paso en el estudio de la obtención de soluciones exactas para ondas gravitacionales cilíndricas. Los resultados obtenidos en este trabajo pueden posteriormente extenderse considerando soluciones más generales para las funciones $W(t,\rho)$ y $V(t,\rho)$. Igualmente, los resultados obtenidos en este trabajo deben complementarse con un análisis del comportamiento de las soluciones obtenidas.

REFERENCIAS

[1] J. Bičák. *Selected solutions of Einstein's field equations: their role in general relativity and astrophysics*, in "Einstein's Field Equations and Their Phys. Implications", ed. B. G. Schmidt, Lecture Notes in Physics, Vol. 540, (Springer Verlag, 2000).

[2] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, and M. McCallum, *Exact Solutions of Einsteins's Field Equations.* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1980).

[3] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology.* (Jhon Wiley, 1972).

[4] H. Bateman, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics.* (Dover, 1944).

[5] V. A. Belinsky and V. E. Zakharov, Zh. Eksp. Teor. Fis. **77**, 3 – 19, (1979) [Sov. Phys. JETP **50**, 1 – 9, (1979)].

[6] J. F. Ramos y G. A. González, *Soluciones de las Ecuaciones de Einstein para espacio-tiempos de Weyl en coordenadas esferoidales generalizadas*, Revista Integración, **18**(1), 1-8, 2000.

[7] G. A. González y J. F. Ramos, *Solución general estática axialmente simétrica de las ecuaciones de Einstein en el vacío en coordenadas esferoidales generalizadas*, Revista Colombiana de Física, **33**, 118-121, 2001.

[8] A. C. Gutierréz, G. García y G. A. González, *Static solution type Papapetrou of Eisntein-Maxweel equations*, Revista Colombiana de Física, **35**, 240-242, 2003

[9] G. A. González, *Construção de Soluções Solitônicas das Equações de Einstein*, Revista Integración, **19**(1), 23-36, 2001.

[10] G. A. González, *Soluciones de las Ecuaciones de Einstein Mediante el Procedimiento de Papapetrou*, Revista Integración, **19**(2), 57-67, 2001.

[11] G. García y G. A. González, *Equivalencia entre soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein y de Einstein-Maxwell*, Revista Integración, **18**(2), 79-87, 2000.

[12] J. F. Ramos y G. A. González, *Soluciones estacionarias axialmente simétricas de las ecuaciones de einstein en el vacío, mediante el formalismo de Ernst*, Aceptado para publicación en la Revista Integración.

[13] A. C. Gutierréz, G. García y G. A. González, *Campos de Einstein-Maxwell estacionarios axialmente simétricos*, Aceptado para publicación en la Revista Integración.

[14] A. C. Gutierréz, y G. A. González, *Soluciones tipo Papapetrou de las Ecuaciones de Campo de Einstein-Maxwell*, Aceptado para publicación en la Revista Integración.

[15] G. A. González y P. S. Letelier, *Relativistic static thin disks with radial stress support*, Class. Quantum Grav. **16**, 479-494, 1999.

[16] G. A. González y P. S. Letelier, *Rotating Relativistic thin disks*, Phys. Rev. D **62**, 064025, 2000.

[17] G. A. González, *Camadas finas e discos em Relatividade geral*, Revista Integración, **18**, 19-31, 2000.

[18] O. A. Espitia y G. A. González, *Relativistic counter-rotating disks with nonzero radial pressure*, Revista Colombiana de Física, **33**, 507-509, 2001

[19] G. García y G. A. González, *Electrovac rotating relativistic thin disks with nonzero radial pressure*, Revista Colombiana de Física, **35**, 210-213, 2003

[20] G. A. González y O. A. Espitia, *Relativistic static thin disks: The counterrotating model*, Phys. Rev. D, **68**, 104028, 2003.

[21] G. A. González y P. S. Letelier, *Exact general relativistic thick disks*, Phys. Rev. D **69**, 044013, 2004.

[22] O. A. Espitia y G. A. González, *Counter-rotating relativistic static thin disks*, Revista Integración **19**(1), 1-12, 2001.

[23] F. Cala, G. García y G. A. González, *Discos relativistas magnetostáticos contra-rotantes*, Revista Integración **19**(2), 37-50, 2001.

[24] G. García y G. A. González, *Electrovacuum static counterrotating relativistic dust disks*, Phys. Rev. D. **69**, 124002, 2004.

[25] G. A. González, *Rotating relativistic thin disks as sources of the Taub-NUT solution*, Aceptado para publicación en la Revista Integración.

[26] G. Beck, *Zur theorie binärer gravitationsfelder*, Z. Phys. **33**, 713, 1925.

[27] A. Einstein y N. Rosen, *On gravitational waves*, J. Franklin Inst. 'bf 223, 43, 1937

[28] K. S. Thorne, *C-energy*, Phys. Rev. B, **138**, 251, 1965.

[29] J. Garriga y E. Verdaguer, *Comic strings and Einstein-rosen waves*, Phys. Rev. D, **36**, 2250, 1987

[30] B. C. Xanthopoulos, *Cosmic strings coupled with gravitational and electromagnetic waves*, Phys. Rev. D, **35**, 3713, 1987.

[31] J. Stachel, *Cylindrical gravitational news*, J. Math. Phys. **7**, 1321, 1966

[32] S. Chandrasekhar y V. Ferrari, *On the dispersion of cylindrical impulsive gravitational waves*, Proc. Roy. Soc. Lond. A, **412**, 75, 1987.

[33] K. P. Tod, *Penrose's quasi-local mass and cylindrical symmetric spacetimes*, Clas. Quantum Grav. **7**, 2237, 1990

[34] R. dÍnverno, *Combining Cauchy and chacracteristic codes in numerical relativity*, in Relativistic Gravitation and Gravitational Radiation (Proceedings of the Les Houches School of Physics), eds. J. A. Marck and J. P. Lasota, (Cambridge University Press, Cambridge, 1997)

[35] B. K. Berger, P. T. Chruściel y P. T. Moncrief, *On "Asymptotiacally Flat" space-times with G_2-invariant Cauchy surfaces*, Ann. Phys. (N.Y.), **237**, 322, 1995

[36] K. V. Kuchař, *Canonical quantization of cylindrical gravitational waves*, Phys. Rev. D **4**, 955, 1971

[37] A. Ashtekar y M. Pierri, *Probing quantum gravity through exactly soluble midisuperspaces 1*, J. Math. Phys. **37**, 6250, 1996

[38] D. Korotin y H. Samtleban, *Canonical quantization of cylindrical gravitational waves with two polarozations*, Phys. Rev. Lett. **80**, 14, 1998