

CÁLCULO DE VALORES PROPIOS EN SISTEMAS MASA-
RESORTE-AMORTIGUADOR (MRA) MEDIANTE EL ALGORITMO DE
LA LUCIÉRNAGA VIRTUAL

KILMAR MANUEL GUERRA FERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y
TELECOMUNICACIONES

BUCARAMANGA

2013

CÁLCULO DE VALORES PROPIOS EN SISTEMAS MASA- RESORTE-AMORTIGUADOR (MRA) MEDIANTE EL ALGORITMO DE LA LUCIÉRNAGA VIRTUAL

KILMAR MANUEL GUERRA FERNÁNDEZ

Trabajo de grado para optar el título de
Ingeniero Electrónico

Director

CARLOS RODRIGO CORREA CELY, PhD.

Codirector

JORGE MARIO CRUZ DUARTE

Ingeniero Electrónico

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE INGENIERIAS FISICO-MECÁNICAS

ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y
TELECOMUNICACIONES

BUCARAMANGA

2013

Este trabajo de grado está dedicado principalmente a mi Dios padre, a su hijo mi Señor Jesucristo, y al Espíritu Santo por su infinita misericordia, ya que sin él nada de esto hubiese sido posible.

A mi padre que ha sido mi héroe y ejemplo a seguir, a mi madre por su incondicionalidad y consejos, a mis hermanos por su amor y cariño, a todos ellos por su apoyo.

Me complace afirmar, que tendría que realizar un libro aparte para mencionar los nombres de las personas a las cuales tengo que agradecer por este logro. Entre los más destacados están mis familiares, el doctor Rodrigo Correa, al ingeniero Jorge Cruz, compañero de estudio, amigos de Valledupar, Bucaramanga y Socorro.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	16
1. Descripción del Trabajo	18
1.1. Objetivo General	18
1.2. Objetivos Específicos	18
2. Fundamentos	19
2.1. Algoritmos Metaheurísticos	20
2.2. Algoritmos Bio-Inspirados.....	20
2.3. Sistema Masa-Resorte-Amortiguador	22
2.4. Valor Propio.....	23
2.5. Algoritmo de la Luciérnaga Virtual.....	25
2.5.1. Descripción Cualitativa	25
2.5.2. Descripción Cuantitativa	27
3. Análisis y Resultados.....	30
3.1. Funciones Multivariantes	31
3.1.1. Función Shubert	31
3.1.2. Función Rastrigin	34
3.1.3. Función Beale	37

3.2. Problemas con Sistemas Masa-Resorte-Amortiguador (MRA)	40
3.2.1. Problema 1	42
3.2.2. Problema 2	50
3.2.3. Problema 3	55
3.2.4. Problema 4	60
3.2.5. Problema 5	65
3.2.6. Problema 6	69
3.2.7. Problema 7	73
3.2.8. Problema 8	79
3.2.9. Problema 9	80
3.2.10. Problema 10	81
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	82
BIBLIOGRAFÍA	83

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Sistema MRA.....	22
Figura 2. Gráfica de la función Shumbert para dos dimensiones.....	31
Figura 3. $\text{Log}(\epsilon_r)$ en función del tiempo de cómputo al hallar el mínimo de la función Shubert.....	33
Figura 4. Valor esperado y valor experimental para el mínimo de la función Shubert.	33
Figura 5. Histograma de la distribución del error al encontrar el mínimo de la función Shubert.....	34
Figura 6. Gráfica de la función Rastrigin para dos dimensiones	34
Figura 7. $\text{Log}(\epsilon_a)$ en función del tiempo al encontrar el mínimo de la función Rastrigin.....	36
Figura 8. Valor esperado y valor obtenido del mínimo de la función Rastrigin.....	36
Figura 9. Histograma de la distribución del error al hallar el mínimo de la función Rastigin.....	37
Figura 10. Gráfica de la función Beale en dos dimensiones	38
Figura 11. Valor teórico y valor experimental del mínimo de la función Beale.....	39
Figura 12. Histograma de la distribución del error al hallar el mínimo de la función Beale.....	40
Figura 13. Diagrama de bloques para resolver sistemas MRA utilizando el algoritmo de la Luciérnaga Virtual.....	41
Figura 14. Procesos de la función objetivo.	41

Figura 15. Diagrama de flujo del pseudocódigo del algoritmo Luciérnaga Virtual .	42
Figura 16. Sistema masa-resorte con tres masas.....	43
Figura 17. $\text{Log}(\varepsilon_r)$ en función del tiempo de cómputo para la solución del problema 1.....	49
Figura 18. Valor esperado y valor experimental para la solución del problema 1. .	49
Figura 19. Histograma de la distribución del error para la solución del problema 1.	50
Figura 20. Sistema masa-resorte con fuerzas de fricción.	51
Figura 21. Error en función del tiempo de cómputo para la solución del problema 2.	54
Figura 22. Valor esperado y valor obtenido para la solución del problema 2.....	54
Figura 23. Sistema MRA del problema 3.	55
Figura 24. Variación de la frecuencia máxima en función de la masa M_1	56
Figura 25. Valor teórico y valor experimental para la solución del problema 3.	58
Figura 26. Histograma de la distribución del error al resolver el problema 3.	58
Figura 27. $\text{Log}(\varepsilon_r)$ en función del tiempo de cómputo al solucionar el problema 3.	59
Figura 28. Sistema MRA del problema 4.	60
Figura 29. Resultados de las simulaciones para la solución del problema 4.	63
Figura 30. Histograma de la distribución del error al resolver el problema 4.	63
Figura 31. $\text{Log}(\varepsilon_r)$ en función del tiempo de cómputo al resolver el problema 4....	64

Figura 32. Sistema MRA del problema 5.	65
Figura 33. $\text{Log}(\varepsilon_r)$ en función del tiempo de cómputo al resolver el problema 5....	68
Figura 34. Resultados de las simulaciones al resolver el problema 5.....	68
Figura 35. Sistema MRA del problema 6.	69
Figura 36. Variación de la frecuencia máxima en función de la masa m_3	70
Figura 37. $\text{Log}(\varepsilon_r)$ en función del tiempo de cómputo al resolver el problema 6....	72
Figura 38. Sistema MRA del problema 7.	73
Figura 39. Resultado obtenido en función del tiempo de cómputo para la solución del problema 7.	76
Figura 40. Valor promedio y valor obtenido para la solución del problema 7.....	77
Figura 41. Histograma de la distribución de la frecuencia máxima al resolver el problema 7.....	77
Figura 42. Sistema MRA del problema 8.	79
Figura 43. Sistema MRA del problema 9.	80
Figura 44. Sistema MRA del problema 10.	81

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Características del equipo de cómputo utilizado durante las simulaciones.	30
Tabla 2. Resultados al variar los valores de α y γ al hallar el mínimo de la función Shubert.	32
Tabla 3. Resultados al implementar el algoritmo Luciérnaga Virtual para hallar el mínimo de la función Shubert	32
Tabla 4. Resultados al variar los valores de α y γ al hallar el mínimo de la función Rastrigin.....	35
Tabla 5. Resultados al simular el algoritmo Luciérnaga Virtual para hallar el mínimo de la función Rastrigin.....	35
Tabla 6. Resultados al variar los valores de α y γ al hallar el mínimo de la función Beale.....	38
Tabla 7. Resultados al simular el algoritmo Luciérnaga Virtual para hallar el mínimo de la función Beale.....	38
Tabla 8. Resultados al variar los valores de α y γ al resolver el problema 1.	48
Tabla 9. Resultados al simular el algoritmo de la Luciérnaga Virtual para resolver el problema 1.	48
Tabla 10. Resultados al variar los valores de α y γ al resolver el problema 2.	53
Tabla 11. Resultados al simular el algoritmo Luciérnaga Virtual para resolver el problema 2.....	53
Tabla 12. Resultados al variar los valores de α y γ al resolver el problema 3.	57

Tabla 13. Resultados al simular el algoritmo Luciérnaga Virtual para resolver el problema 3.....	57
Tabla 14. Resultados al variar los valores de α y γ al resolver el problema 4.	62
Tabla 15. Resultados al simular el algoritmo Luciérnaga Virtual para resolver el problema 4.....	62
Tabla 16. Resultados al resolver el problema 5 variando a α y γ	67
Tabla 17. Resultados al simular el algoritmo Luciérnaga Virtual para resolver el problema 5.....	67
Tabla 18. Resultados al resolver el problema 6 variando a α y γ	72
Tabla 19. Resultados al simular el algoritmo de la Luciérnaga Virtual para resolver el problema 6.	72
Tabla 20. Resultados al variar los valores de α y γ al resolver el problema 7.	75
Tabla 21. Resultados al simular el algoritmo de la Luciérnaga Virtual para resolver el problema 7.	76
Tabla 22 Variación de α y γ al resolver el problema 8	79
Tabla 23. Variación de α y γ al resolver el problema 9.....	80
Tabla 24. Variación de α y γ al resolver el problema 10	81

RESUMEN

TÍTULO: CÁLCULO DE VALORES PROPIOS EN SISTEMAS MASA-RESORTE-AMORTIGUADOR (MRA) MEDIANTE EL ALGORITMO DE LA LUCIÉRNAGA VIRTUAL *

AUTOR: KILMAR MANUEL GUERRA FERNÁNDEZ**

PALABRAS CLAVES: Valores propios, algoritmo de optimización, frecuencia natural, sistema Masa-Resorte-Amortiguador.

CONTENIDO: El presente trabajo tiene como objetivo mostrar una propuesta alternativa al cálculo tradicional, para la solución de problemas de optimización, utilizando el algoritmo metaheurístico de la Luciérnaga Virtual, propuesto por el doctor Xin-She Yang en el 2007, el cual está basado en el cortejo nocturno de las luciérnagas. Como primera prueba se utilizan funciones tradicionales como marco de referencia en problemas de optimización, para luego atacar problemas de sistemas Masa-Resorte-Amortiguador (MRA). Para ello se modelan algunos sistemas MRA y se define los valores propios y su relación con los sistemas MRA. Es de importancia aclarar que los sistemas analizados son lineales, es decir, los desplazamientos se realizan en el rango lineal y éste no es dependiente a alguna variable. Además poseen mínimo tres grados de libertad, trayendo como consecuencia que se presenten más de una frecuencia natural de oscilación. Los problemas consisten en la optimización de la frecuencia máxima del sistema para todas las frecuencias naturales, de tal forma que ésta sea la mínima absoluta. Las variables de cada sistema son los porcentajes de las masas, por lo que son considerados, problemas de tipo minimax (el mínimo del máximo posible) con restricciones. Para evaluar el desempeño de la estrategia propuesta se tiene como variable de control el tiempo de ejecución, el número de iteraciones, su precisión y exactitud; la referencia es el método analítico.

* Proyecto de grado.

** Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones. Director: Carlos Rodrigo Correa Cely. Codirector: Jorge Mario Cruz Duarte.

ABSTRACT

TITLE: CALCULATION OF EIGENVALUES IN MASS-SPRING-DAMPER SYSTEM THROUGH THE VIRTUAL FIREFLY ALGORITHM*

AUTHOR: KILMAR MANUEL GUERRA FERNÁNDEZ**

KEY WORDS: Eigenvalues, optimization algorithm, natural frequency, Mass-Spring-Damper system.

CONTENIDO: The objective of this project is to present an alternative to the traditional calculation for the solution of optimization problems, using the virtual metaheuristic Firefly Algorithm, proposed by Dr. Xin-She Yang in 2007, which is based in courtship night of fireflies. As a first test, traditional functions are used as a framework in problems of optimization, and then tackle problems of mass-spring-damper systems (MSD). To solve this kind of problems, some systems MSD are proposed and is defined what represent the eigenvalues and their relationship with MSD systems. It is important to note that the systems analyzed are linear, it means, the movements are performed in the linear range and those movements are not dependent on any variable. In addition, the mass-spring-damper systems have at least three degrees of freedom, and as a result, we get more than one natural frequency of oscillation. The problems are related to the optimization of the maximum frequency of the system for all natural frequencies, so that this frequency be the absolute minimum. The variables in each system are the percentages of the masses, so they are considered, problems of a minimax (the minimum of maximum possible) with restrictions. To evaluate the performance of the proposed strategy, we have as a control variable execution the time, the number of iterations, precision and accuracy, the reference is the analytical method.

* Degree Work.

** Physical-Mechanical Engineering Faculty. Electrical, Electronics and Telecommunications Engineering School. Director: Carlos Rodrigo Correa Cely. Co-Director: Jorge Mario Cruz Duarte.

INTRODUCCIÓN

En ingeniería de diseño es común encontrarse con problemas de optimización simples que requieren un esfuerzo mayor para ser resueltos. Para dichos casos, no existen en la literatura algoritmos eficientes y generales que permitan encontrar soluciones óptimas.

Las técnicas metaheurísticas surgen como una alternativa a los métodos convencionales para la solución de problemas de optimización. Algunos de éstos como los algoritmos genéticos y de enjambres (por ejemplo, Colonia de Hormigas, Colonia Artificial de Abejas, Enjambre de Partículas, Luciérnaga Virtual) [1], tienen gran acogida sobre todo por su rápida evolución y mejora en la resolución de problemas complejos de optimización en ingeniería, ciencia, industria y economía. En general, estos algoritmos son concebidos como una población de agentes simples (organismos naturales) que interactúan localmente entre sí y con su medio (naturaleza). Estos agentes siguen sencillas reglas sin la presencia de un agente controlador que indique cómo deben comportarse. La interacción entre los agentes conduce a un comportamiento denominado en la literatura como inteligencia global [2].

El algoritmo metaheurístico Luciérnaga Virtual (Firefly), propuesto por Xin-She Yang en el 2007, se basa en un símil del comportamiento de las luciérnagas y de su comunicación a través de destellos luminosos, con el fin de atraer a sus compañeras y presas [3].

En el presente informe de investigación se reportan los principales resultados del uso del algoritmo de la Luciérnaga Virtual empleado en casos donde los valores propios de un sistema tienen significado físico. Se toman a título de ejemplos demostrativos, los casos comúnmente utilizados en la teoría de modelado y control relacionados con los sistemas Masa-Resorte-Amortiguador (MRA); si bien son elementales, su análisis resulta laborioso cuando existe un número considerable de masas, resortes y amortiguadores. Se resalta que las diferentes

conexiones MRA son el fundamento para el modelado del comportamiento viscoelástico lineal en áreas como la reología, sísmica y amortiguamiento mecánico. Por otro lado, resulta igualmente interesante abordar el análisis de estos sistemas comúnmente utilizados en la práctica docente en asignaturas como ecuaciones diferenciales y sistemas de control, por sólo hablar de la ingeniería electrónica. En este trabajo se propone para su desarrollo una forma diferente a la convencional, pues se transforma un problema muy tradicional, incluso resuelto mediante la analogía con los circuitos electrónicos elementales RLC, ahora resueltos mediante la estrategia de optimización global.

Este trabajo se concentra, principalmente, en resolver problemas de minimax con restricciones en forma de igualdades y desigualdades. El contenido de este trabajo se encuentra organizado en cuatro partes. El capítulo 1 describe los alcances del informe de investigación y los objetivos aprobados. En el capítulo 2 se explica con brevedad la importancia de la utilización de algoritmos metaheurísticos, las leyes que describen los sistemas MRA, el concepto de valor propio y el algoritmo Luciérnaga Virtual detalladamente, desde un punto de vista tanto cualitativo como cuantitativo. Seguidamente en el capítulo 3 se comparan los resultados obtenidos al utilizar el algoritmo Luciérnaga Virtual frente a funciones tradicionalmente utilizadas en problemas de optimización. Con especial atención se analiza la solución de algunos problemas de optimización de la frecuencia natural en sistemas MRA. Por último, el capítulo 4 se dedica a las conclusiones y recomendaciones del presente informe de investigación.

1. DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO¹

En el presente trabajo de grado, en modalidad de investigación, se propone una alternativa al cálculo tradicional para la determinación de la frecuencia natural óptima en un problema minimax en sistemas compuestos de Masa-Resorte-Amortiguador (MRA), que modelan comportamientos de respuesta en la vida real como la sísmica, la reología y la vibración mecánica, entre otras. Esta propuesta se fundamenta en el algoritmo de optimización de la Luciérnaga Virtual [3].

1.1. OBJETIVO GENERAL

Desarrollar una alternativa para el cálculo de valores óptimos, tomando como ejemplos demostrativos los modelos de sistemas MRA.

1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Implementar en software el método de la luciérnaga virtual y validar sus resultados frente a funciones tradicionalmente utilizadas en problemas de optimización (en la página 31 a 40).
2. Modelar algunos sistemas MRA a título de ejemplos demostrativos (en la página 42 a 81).
3. Encontrar la frecuencia natural óptima para los sistemas modelados mediante el algoritmo de la Luciérnaga Virtual implementado en (1) (en la página 42 a 81).
4. Evaluar el desempeño de la estrategia propuesta teniendo como variable de control el tiempo de ejecución, el número de iteraciones, su precisión y exactitud; la referencia será el método analítico (en la página 42 a 81).

¹ Esto constituye un aporte intelectual colectivo y consensuado del estudiante Guerra Kilmar, junto con el profesor Rodrigo Correa y el estudiante de maestría Ing. Jorge Cruz.

2. FUNDAMENTOS

Un algoritmo se define como una serie de operaciones ordenadas en una determinada secuencia, que permite resolver un problema específico o general, y suele tener restricciones en la mayoría de los casos. Ahora bien, un algoritmo de optimización es aquel que permite encontrar un valor óptimo (máximo o mínimo) de una función objetivo o de costo, en otras palabras, encontrar los valores de ciertos parámetros que intervienen en el modelo matemático para obtener el mejor resultado posible. Un espacio de búsqueda limitado en un problema de optimización garantiza una mayor eficacia y rapidez en su solución. Adicionalmente, los parámetros o variables que se requieren determinar (incógnitas) también pueden tener restricciones entre ellas [1],[5].

Una vez se ha definido el problema, el siguiente paso es encontrar la mejor solución, la cual se puede lograr de dos maneras:

Solución exacta: Ésta se halla resolviendo el problema en términos de funciones y operaciones matemáticas seleccionadas de un gran conjunto documentado en la literatura, pero la mayoría de veces esto representa un esfuerzo significativo debido a la complejidad del modelo. Por otra parte, si el caso es resolver el problema de forma computacional, se debe cumplir que la salida siempre debe generar el mismo resultado para una misma entrada. Esta solución se denomina óptima, pues no existe otra mejor. Un inconveniente presente en la búsqueda de la solución exacta es el alto tiempo de cómputo, así como también la cantidad de recursos utilizados durante el proceso. Por estas razones no siempre es factible hallar la solución exacta.

Solución aproximada: Es un valor aproximado al resultado deseado, en otras palabras, cuando se aplica una misma entrada los resultados pueden variar entre ellos, en un orden significativamente bajo de magnitud coherente con la solución exacta del problema. **La solución encontrada por esta técnica es aceptada dependiendo de cada problema en particular.**

La explicación anterior detalla mejor la razón de porqué el uso de algoritmos en la solución de problemas cada vez gana más importancia. Como también, la búsqueda de cada día mejores algoritmos o métodos rápidos, fáciles de implementar, flexibles y eficientes al encontrar la solución de problemas de optimización.

2.1. ALGORITMOS METAHEURÍSTICOS

La utilización de algoritmos tiene dos objetivos fundamentales, tiempos de ejecución bajos y soluciones con alta precisión, usualmente las óptimas. En la búsqueda por alcanzar estos dos objetivos han surgido varios métodos, entre ellos los denominados metaheurísticos, que son utilizados para resolver problemas de optimización bien definidos mediante ensayos y aproximaciones. Por esto también se les conoce como algoritmos a medida, debido a que son útiles para el problema específico que se analiza [6]. Entre las características principales de la utilización de algoritmos metaheurísticos se destacan: su fácil implementación, son aproximados pero pueden llegar a ser precisos en un orden significativo de magnitud, tienen un propósito general y presentan (a la fecha) poca información teórica, la cual se está construyendo paso a paso.

2.2. ALGORITMOS BIO-INSPIRADOS

Un tipo de algoritmos metaheurísticos son los algoritmos bio-inspirados (o algoritmos que han sido inspirados en la naturaleza), debido a que son concebidos basados en la conducta evolutiva de los sistemas naturales, es decir, aprendiendo de la naturaleza. Se han desarrollado en la actualidad una variedad de algoritmos bio-inspirados, con la finalidad de resolver problemas de manera eficiente.

Se puede esperar que estos algoritmos no siempre encuentren la mejor solución, pero si se espera que hallen una solución lo suficientemente buena para el problema en particular en un tiempo de cómputo razonable. Por esta razón, son utilizados en una amplia gama de problemas de optimización con considerable dificultad [8-9], como en el diseño de rutas de escape, predicciones sobre mercados financieros, reconocimiento de patrones, minería de datos, tácticas militares, diseño de fármacos, reconocimiento de patologías en test clínicos de diversos tipos, software de control de equipos de robot, inteligencia artificial de robot, diseño de estructuras como alas de avión, salas de concierto, antenas de telecomunicaciones, regresiones simbólicas, resoluciones simbólicas de ecuaciones en derivadas parciales, entre otras.

A pesar de existir una cantidad considerable de algoritmos bio-inspirados, entre los más usados, se encuentran los basados en las sociedades de insectos (abejas, avispas, hormigas, termitas, luciérnagas), bandadas de aves, bancos de peces y manadas de mamíferos [10-12]. En términos generales, estos algoritmos cuentan con cuatro elementos fundamentales:

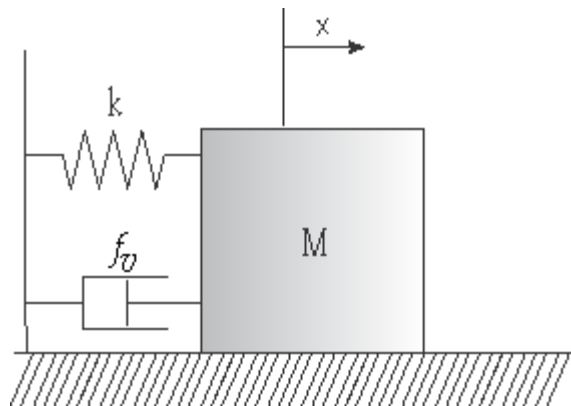
- I) **POBLACIÓN:** Conjunto de candidatos a ser solución que puede o no cumplir con las restricciones del problema.
- II) **MECANISMO DE EVOLUCIÓN:** Conjunto de procedimientos con los cuales se modifica la población, este mecanismo es característico de cada método.
- III) **MECANISMO DE CALIFICACIÓN:** Conjunto de procedimientos con los cuales es asignada una calificación a cada elemento de la población, usualmente es la función que se optimiza.
- IV) **CONDICIÓN DE PARADA:** Mecanismo que controla si se ha encontrado una solución o número de operaciones aceptables.

Por lo general, la condición de parada, la población y el mecanismo de calificación son determinados por el usuario de acuerdo con el problema que se desea resolver [7].

2.3. SISTEMA MASA-RESORTE-AMORTIGUADOR

En general, casi cualquier estructura física puede ser modelada como un conjunto de Masas, Resortes y Amortiguadores (MRA). Los resortes acumulan la energía mediante su deformación, y los amortiguadores la disipan de forma suave y progresiva [14]. La importancia del estudio de los sistemas MRA, se debe al hecho de ser utilizados ampliamente en la teoría de modelado y control, además de las analogías fundamentales en el modelado del comportamiento viscoelástico lineal en el área de la reología.

Figura 1. Sistema MRA



En la Figura 1 se muestra un sistema MRA sencillo, compuesto por una masa M unida a una pared por medio de un resorte y un amortiguador, la cual se puede desplazar sobre una superficie lisa (asumiendo una fuerza de fricción insignificante). La constante elástica presente en el resorte se denota como k , en tanto que el amortiguador posee un coeficiente de fricción f_v y se considera el desplazamiento x del bloque o masa M . Sobre el bloque actúan solamente dos fuerzas paralelas al eje horizontal, ejercidas tanto por el amortiguador como por el resorte.

La fuerza que ejerce el resorte sobre el bloque se modela como:

$$F_{\text{res}} = -k \cdot x, \quad (1)$$

en tanto que la fuerza del amortiguador está dada por

$$F_{\text{amort}} = -f_v \cdot \dot{x}. \quad (2)$$

El sistema analizado es de tipo estático, ya que las fuerzas que en él actúan conservan el equilibrio del mismo, es decir, la suma de todas éstas genera un estado de reposo. De esta forma, la ecuación de Newton para la masa M se expresa como (3), que describe totalmente el sistema MRA de la Figura 1 haciendo uso de la ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden.

$$\begin{aligned} M \cdot \ddot{x} &= -k \cdot x - f_v \cdot \dot{x} \\ \ddot{x} &= -\frac{k}{M} \cdot x - \frac{f_v}{M} \cdot \dot{x}. \end{aligned} \quad (3)$$

Es de importancia aclarar que en el presente trabajo sólo se analizan sistemas lineales, es decir, los desplazamientos se realizan en el rango lineal y éste no es dependiente a alguna variable.

2.4. VALOR PROPIO

Sea una matriz $A \in M_{N \times N}$, es decir, una matriz cuadrada A la cual posee un valor propio λ si y sólo si, se cumple que

$$A \mathbf{V} = \lambda \mathbf{V}, \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}. \quad (4)$$

La matriz A es cuadrada de $N \times N$, $\mathbf{V} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$ y λ puede ser un número real o complejo, tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V} &\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{V} - \lambda\mathbf{V} = \mathbf{0}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{V} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{5}$$

siendo $\mathbf{I}$ la matriz identidad.

La igualdad (5) corresponde a un sistema lineal homogéneo, y como $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$ en todo $\mathbb{R}^n$, significa que existen variables libres, entonces la matriz de coeficientes del sistema $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ no tiene inversa, es decir,

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{-1} &\text{ no existe, por lo tanto} \\ \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Por otra parte, un sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas descrito en forma matricial como

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(t) \tag{7}$$

donde $\mathbf{C}$ es una matriz de valores constantes fijos, y su solución está dada como:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{D} \cdot e^{\lambda t} \tag{8}$$

donde $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{D}$ son las matrices de variables y constantes de la solución respectivamente, y

$$\lambda = \alpha + \beta i, \tag{9}$$

representa a λ como una constante compuesta por una parte real α y una parte imaginaria β . La parte real controla la tasa de atenuación de la amplitud del movimiento (o el amortiguamiento del sistema), se le conoce como **factor de amortiguamiento**, y la parte imaginaria es el valor de la **frecuencia de oscilación** de dicho sistema. Ésta última es de especial interés en la búsqueda de soluciones a los problemas de sistemas MRA. Si se deriva (8), se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{D} \cdot \lambda e^{\lambda t}, \\ \dot{\mathbf{X}}(t) &= \lambda \cdot \mathbf{X}(t).\end{aligned}\tag{10}$$

Reemplazando (10) en (7) se llega a

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}(t) &= \lambda \cdot \mathbf{X}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(t), \\ (\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{X}(t) &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{11}$$

Se puede notar que (11) presenta la misma forma que (5), por lo tanto los valores de λ en (8) corresponden acertadamente a los valores propios de $\mathbf{C}$.

2.5. ALGORITMO DE LA LUCIÉRNAGA VIRTUAL

El algoritmo de la Luciérnaga Virtual trata de imitar la característica más distintiva de las luciérnagas que es su cortejo nocturno, el cual consiste en un diálogo entre los machos y las hembras de su especie. Típicamente los machos patrullan en busca de pareja mientras emiten secuencias de destellos de luz, las hembras en presencia de esto, responden con destellos específicos de forma que exista la posibilidad de apareamiento.

Existe una gran variedad de luciérnagas en la naturaleza, la mayoría producen destellos cortos y rítmicos de luz, el patrón de estos destellos es único para una especie en particular, y su luz intermitente se genera por el proceso de bioluminiscencia, que consiste en la emisión de luz con una pequeña elevación de la temperatura [4].

2.5.1. Descripción cualitativa: La intensidad de luz de un agente a una distancia r de la fuente de la luz obedece la ley de cuadratura inversa, la cual dicta que, la

intensidad de luz I disminuye a medida que el cuadrado de la distancia r aumenta. Lo anterior se puede expresar como

$$I \propto \frac{1}{r^2} \quad (12)$$

Por otra parte, el conjunto de partículas presentes en el aire atenúan la luz y llega a ser más débil a medida que la distancia entre el observador y la fuente aumenta. Estos dos factores combinados explican por qué la mayoría de las luciérnagas son observables a una distancia limitada. La luz intermitente se puede formular asociándose con la función objetivo.

Es posible idealizar algunas de las características parpadeantes de los agentes propios en el desarrollo del algoritmo inspirado en luciérnagas, como:

- I) Todas las luciérnagas son unisex (todo vale), para que una luciérnaga se sienta atraída por otra luciérnaga, independiente de su sexo.
- II) La atracción es proporcional a su brillo, por lo tanto, para cualquiera de dos luciérnagas intermitente, la que presente menor intensidad de luz se moverá hacia la de más brillo. El atractivo es proporcional a la intensidad de luz emitida y en ambos disminuye conforme a su distancia aumenta. Si ninguna presenta una luminiscencia significativa, entonces el desplazamiento se realizará al azar.
- III) La intensidad emitida por una luciérnaga es determinada por la función objetivo.

Con lo anterior, para un problema de minimización, el brillo puede ser simplemente proporcional a un valor determinado de la función objetivo [1].

2.5.2. Descripción cuantitativa: En el algoritmo Luciérnaga Virtual, existen dos aspectos importantes como: la variación de la intensidad de la luz y la formulación de la atracción. Por simplicidad, se asume que el atractivo de una luciérnaga es determina por su brillo, y que a su vez es asociado con la función objetivo.

En la formulación más sencilla en problemas de minimización, el brillo I de una luciérnaga en un lugar determinado x puede ser elegido como $I(x) \propto f(x)$. Sin embargo, el atractivo β depende de la ubicación de las demás luciérnagas, por lo cual varía con la distancia r_{ij} entre la luciérnaga i y la luciérnaga j .

De manera sencilla, se puede relacionar la variación de la intensidad de luz $I(r)$ de acuerdo con la ley del cuadrado inverso,

$$I(r) = \frac{I_s}{r^2}, \quad (13)$$

donde I_s es la intensidad de la fuente. Para un medio específico con coeficiente de absorción de luz “ γ ”, la intensidad de luz I varía con la distancia r , como se observa en (14),

$$I(r) = I_0 e^{-\gamma r}, \quad (14)$$

donde I_0 es la intensidad de luz inicial. Con el fin de evitar la singularidad para $r = 0$ en (13), el efecto combinado entre la ley del cuadrado inverso y la absorción se puede aproximar en una forma gaussiana

$$I(r) = I_s e^{-\gamma r^2}. \quad (15)$$

Como el atractivo de una luciérnaga es proporcional a la intensidad de luz vista por luciérnagas adyacentes, se puede definir la atracción β de una luciérnaga como

$$\beta = \beta_0 e^{-\gamma r^2}, \quad (16)$$

siendo β_0 el atractivo cuando se encuentra en $r = 0$. La distancia entre un par de luciérnagas i y j ubicadas en las posiciones x_i y x_j respectivamente, es la distancia cartesiana definida por (17)

$$r_{ij} = \|x_i - x_j\| = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_{i,k} - x_{j,k})^2}, \quad (17)$$

donde $x_{i,k}$ es la k -ésima componente de la coordenada espacial x_i de la luciérnaga i , y d el número de dimensiones del problema. El movimiento de una luciérnaga i atraída por una luciérnaga j más atractiva (luminosa) se determina con (18)

$$x_i = x_i + \beta_0 e^{-\gamma r_{ij}^2} (x_j - x_i) + \alpha \epsilon_i. \quad (18)$$

El segundo término a la derecha en (18) es el componente de atracción entre las luciérnagas, y el tercer término, conformado por dos variables, α y ϵ , que representan un número aleatorio y un vector de números aleatorios extraídos de la distribución uniforme gaussiana respectivamente.

En resumen, el algoritmo de la Luciérnaga Virtual se encuentra definido por un vector de números aleatorios ϵ y un número aleatorio α , ambos de una distribución uniforme continua, una distancia entre luciérnagas r calculada con (17), un coeficiente de absorción de luz γ , un atractivo entre luciérnagas β (16) y una posición x_i definida como (18).

3. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Se implementó el algoritmo de la Luciérnaga Virtual para resolver problemas de optimización. Como primera prueba se utilizan funciones tradicionales como marco de referencia en problemas de optimización, para luego atacar problemas de sistemas MRA. Todas las simulaciones son realizadas bajo la plataforma de cómputo numérico Matlab™ de MathWorks® en una máquina cuyas características principales se encuentran descritas en la Tabla 1.

Tabla 1. Características del equipo de cómputo utilizado durante las simulaciones.

Fabricante	ACER®
Modelo	Aspire™ v5 Q1VZC
Procesador	Intel® Core™ i7-3517u CPU @ 1.9 GHz
RAM	6 GB
Sistema Operativo	Windows™ 8 Single Language 2012
Arquitectura	64 bits

A continuación se detallan las simulaciones realizadas, y de igual forma los resultados obtenidos. Como primera medida, el error se determina usando la definición del error relativo (19), pero en casos donde el valor esperado sea cero, se acude al error absoluto (20).

$$\varepsilon_r = \frac{|\text{Valor}_{\text{esperado}} - \text{Valor}_{\text{obtenido}}|}{|\text{Valor}_{\text{esperado}}|} \quad (19)$$

$$\varepsilon_a = |\text{Valor}_{\text{esperado}} - \text{Valor}_{\text{obtenido}}| \quad (20)$$

Para todos los casos, N representa el número de luciérnagas utilizadas en el algoritmo de la Luciérnaga Virtual. Para escoger el valor de α y γ más adecuado en cada problema o ejercicio en particular, se seleccionan aleatoriamente los valores entre 0 y 1, manteniendo N=100 y 100 iteraciones por simulación.

3.1. FUNCIONES MULTIVARIABLES

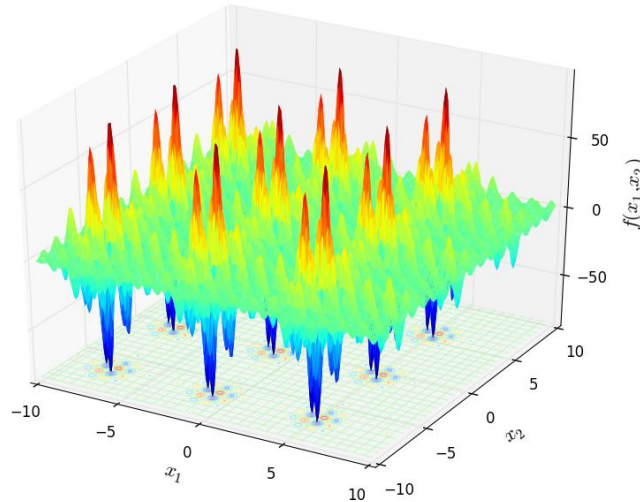
Se utiliza el algoritmo de la Luciérnaga Virtual para obtener valores óptimos a funciones de más de una variable que poseen varios mínimos.

3.1.1. Función Shubert

$$f_{\text{Shubert}}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^5 i \cdot \cos[(i+1) \cdot x_1 + i] \right) \left(\sum_{i=1}^5 i \cdot \cos[(i+1) \cdot x_2 + i] \right) \quad (21)$$

La función Shubert tiene 18 mínimos globales, cuyos valores son todos iguales a $f(x^*) = -186,7309$, como se muestra en la Figura 2 para el caso ilustrativo de la función con $-10 \leq x_{1,2} \leq 10$.

Figura 2. Gráfica de la función Shumbert para dos dimensiones



Fuente: Base de datos Global Optimization Benchmarks and AMPGO [13].

Para las simulaciones se tomaron valores aleatorios de α y γ y se busca el mínimo de la función Shubert. Los resultados se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Resultados al variar los valores de α y γ al hallar el mínimo de la función Shubert.

α	γ	ϵ_r [%]	Tiempo [s]	α	γ	ϵ_r [%]	Tiempo [s]
0,9	0,7	0,0638	4,16	0,6	0,8	0,0046	4,16
0,8	0,2	0,0037	4,44	0,5	0,6	0,0189	4,33
0,3	0,2	0,0065	4,14	0,1	0,4	0,0016	4,27
0,6	0,8	0,0525	4,25	0,2	0,5	0,2683	4,27
0,3	0,7	0,0845	4,22	0,9	0,4	0,0171	4,38

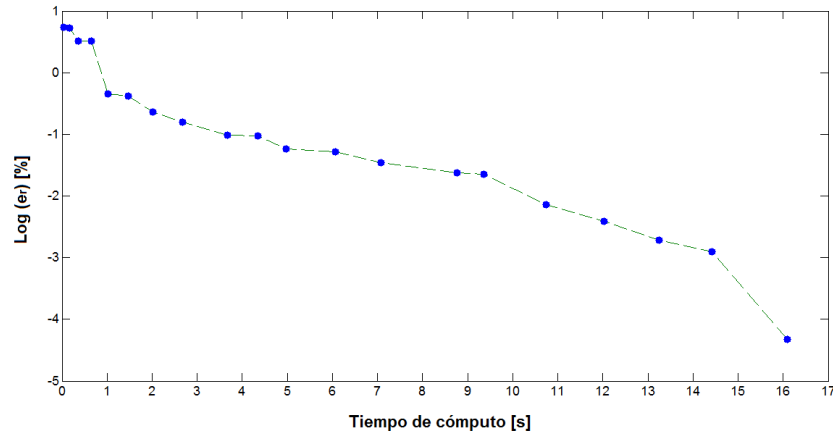
Se escogen los valores de $\alpha = 0,1$ y $\gamma = 0,4$, pues presentan el menor error. Los resultados de las simulaciones se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3. Resultados al implementar el algoritmo Luciérnaga Virtual para hallar el mínimo de la función Shubert

N	Iteraciones	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	ϵ_r [%]	Tiempo [s]
10	10	-1,3979	5,7259	-76,6731	58,9392	0,009
25	10	-7,0413	-7,6725	-179,889	3,6639	0,029
25	25	-7,7242	-0,8501	-180,682	3,2389	0,070
50	25	-7,7060	5,5226	-183,267	1,8546	0,262
50	50	-0,7915	4,8342	-185,242	0,7972	0,513
100	50	-7,7005	-0,7886	-186,286	0,2381	2,07
100	100	-1,4280	5,4849	-186,703	0,0149	4,64
200	100	-1,4254	-7,0832	-186,730	$2,27 \times 10^{-4}$	16,87
200	200	5,4826	4,8580	186,730	$5,79 \times 10^{-5}$	33,15
300	200	-1,4251	5,4829	-186,730	$5,64 \times 10^{-6}$	76,58
300	300	-0,8004	-1,4252	-186,730	$2,97 \times 10^{-6}$	108,14
500	300	4,8580	-0,8003	-186,730	$2,73 \times 10^{-6}$	280,35

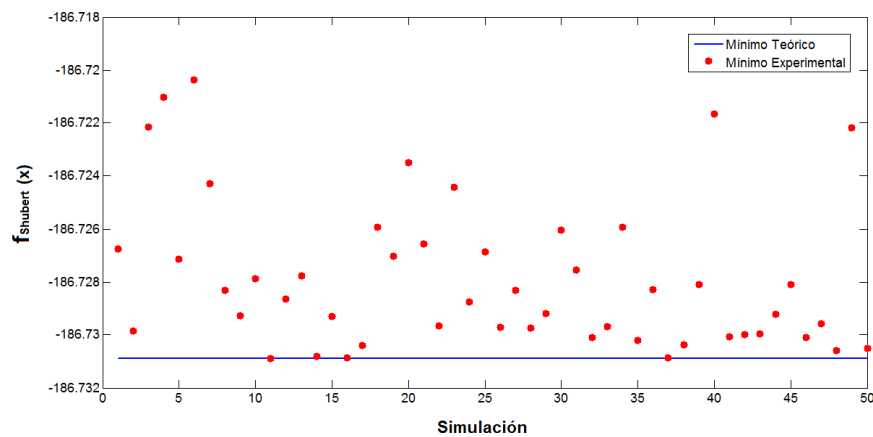
Al tratarse de una función con múltiples óptimos globales, y de un algoritmo que inicia su búsqueda con valores aleatorios, es aceptable encontrar diferentes puntos (x_1 y x_2 en la Tabla 3) para cada simulación, con la condición que cada punto hallado sea un mínimo global, esto se demuestra por el porcentaje de error obtenido. A partir de 50 luciérnagas en la población se encuentran resultados aceptables, siendo más precisos conforme el número de agentes incrementa. El comportamiento del error en función del tiempo de cómputo se puede observar en la Figura 3.

Figura 3. $\text{Log}(e_r)$ en función del tiempo de cómputo al hallar el mínimo de la función Shubert



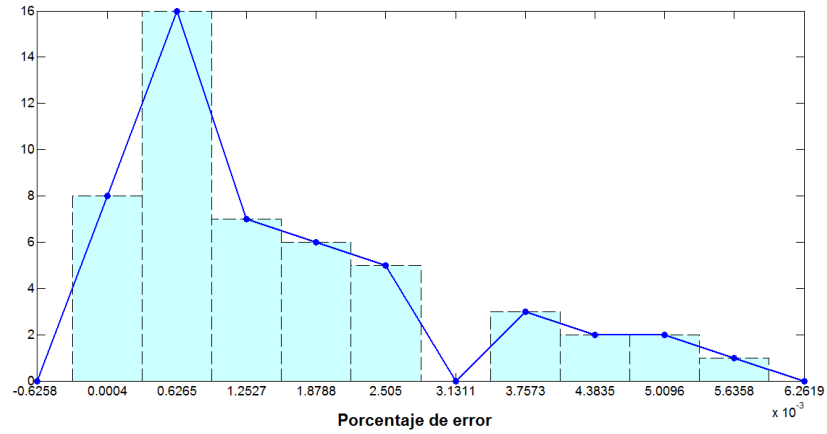
Por la Figura 3 se nota que en 16 segundos, el algoritmo halla el mínimo de la función, con un error del orden de 10^{-4} %. La Figura 4 muestra la variación de los resultados al mantener fijo los valores de $\alpha = 0,1$, $\gamma = 0,4$, $N=200$ y 100 iteraciones por simulación. El tiempo promedio por cada simulación es de 20 segundos.

Figura 4. Valor esperado y valor experimental para el mínimo de la función Shubert.



El histograma de la Figura 5 muestra la distribución del error al hallar el mínimo de la función Shubert, con los resultados obtenidos de la Figura 4.

Figura 5. Histograma de la distribución del error al encontrar el mínimo de la función Shubert.



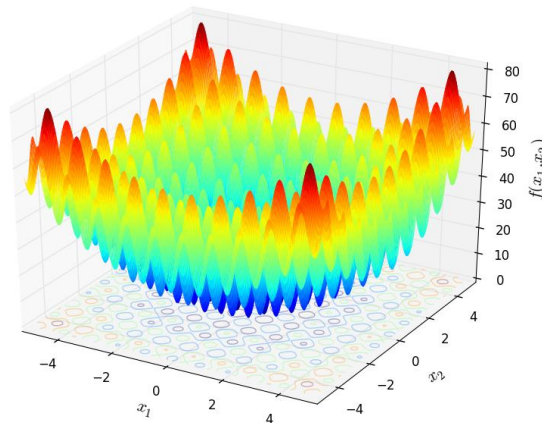
De la Figura 5 más del 70 % de los resultados tienen un error inferior al $2 \times 10^{-4} \%$.

3.1.2. Función Rastrigin

$$f_{\text{Rastrigin}}(\mathbf{x}) = 20 \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)] \quad (22)$$

La función Rastrigin (22) tiene un único mínimo global $f(\mathbf{x}) = 0$ en $x_i^* = 0$ para el intervalo $-5 \leq x_i \leq 5$ como se muestra en la Figura 6.

Figura 6. Gráfica de la función Rastrigin para dos dimensiones



Fuente: Base de datos Global Optimization Benchmarks and AMPGO [13].
Para la búsqueda del mínimo de la función Rastrigin se seleccionan valores aleatorios de α y γ . Los resultados se presentan en la Tabla 4.

Tabla 4. Resultados al variar los valores de α y γ al hallar el mínimo de la función Rastrigin.

α	γ	ϵ_a [%]	Tiempo [s]	α	γ	ϵ_a [%]	Tiempo [s]
0,9	0,9	3,5663	4,12	0,9	0,8	1,7545	4,01
0,09	0,2	$4,62 \times 10^{-4}$	2,94	0,5	0,8	1,0503	3,87
0,9	0,2	0,0410	3,42	0,5	0,7	8,5628	3,87
0,1	0,9	0,4821	3,93	0,1	0,1	0,0030	2,67
0,5	0,1	0,0407	2,94	0,9	0,1	0,0081	3,30

Se escogen los valores de $\alpha = 0,09$ y $\gamma = 0,2$, pues presentan el menor error. Los resultados de las simulaciones se presentan en la Tabla 5.

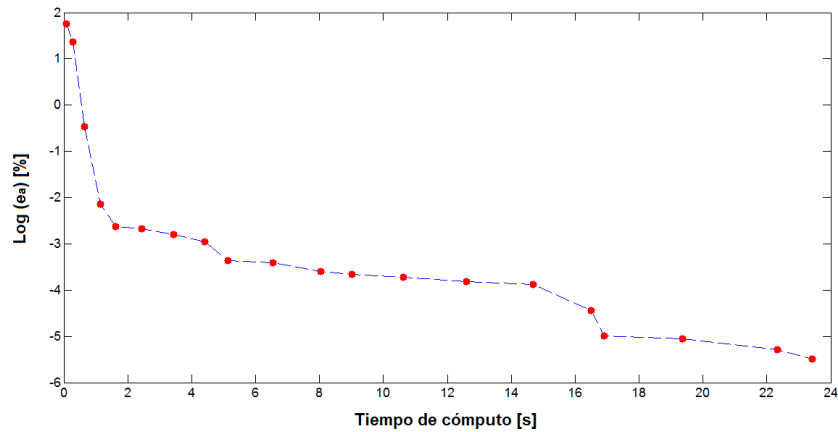
Tabla 5. Resultados al simular el algoritmo Luciérnaga Virtual para hallar el mínimo de la función Rastrigin.

N	Generación	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$	ϵ_a [%]	Tiempo [s]
10	10	-0,0399	-0,9842	1,33160	133,1604	0,009
25	10	-0,0472	0,0108	0,462355	46,2355	0,024
25	25	0,0016	0,0030	0,002335	0,2335	0,058
50	25	$4,85 \times 10^{-4}$	$6,96 \times 10^{-4}$	$1,42 \times 10^{-4}$	0,0143	0,198
50	50	$1,58 \times 10^{-4}$	$-4,97 \times 10^{-4}$	$5,41 \times 10^{-5}$	0,0054	0,399
100	50	$3,37 \times 10^{-4}$	$2,21 \times 10^{-4}$	$3,23 \times 10^{-5}$	0,0032	1,39
100	100	$2,14 \times 10^{-4}$	$-2,53 \times 10^{-5}$	$9,26 \times 10^{-6}$	$9,26 \times 10^{-4}$	2,93
200	100	$1,43 \times 10^{-5}$	$-8,27 \times 10^{-5}$	$1,39 \times 10^{-6}$	$1,39 \times 10^{-4}$	10,78
200	200	$2,33 \times 10^{-5}$	$3,59 \times 10^{-5}$	$3,65 \times 10^{-7}$	$3,65 \times 10^{-5}$	21,61
300	200	$1,80 \times 10^{-5}$	$-2,55 \times 10^{-5}$	$1,94 \times 10^{-7}$	$1,94 \times 10^{-5}$	46,80
300	300	$-2,27 \times 10^{-5}$	$1,20 \times 10^{-5}$	$1,31 \times 10^{-7}$	$1,31 \times 10^{-5}$	69,12
500	300	$-1,11 \times 10^{-5}$	$1,77 \times 10^{-5}$	$8,69 \times 10^{-8}$	$8,69 \times 10^{-6}$	194,13

A pesar de tener múltiples mínimos locales, esta función posee un único mínimo global, el cual es hallado por el algoritmo con un error de $9,2 \times 10^{-4}$ % con cien luciérnagas, y mejorando conforme éstas aumenten. El tiempo de cómputo mínimo con el anterior orden de error es menor a 3 s, e incrementa conforme la precisión

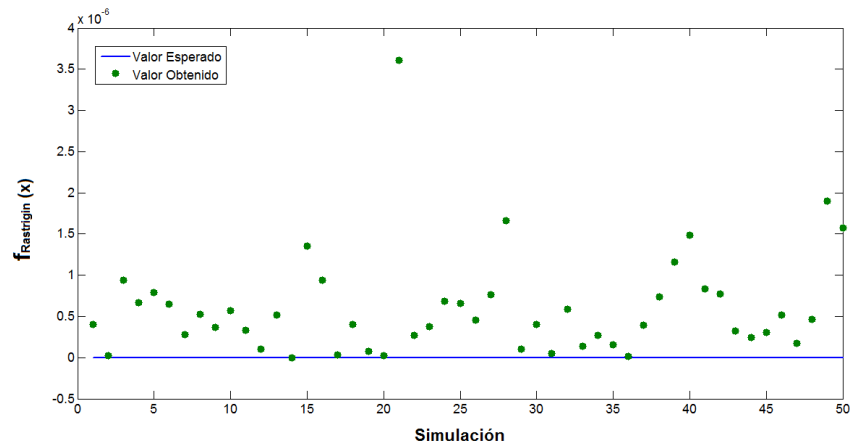
también lo hace. La Figura 7 muestra el error absoluto en función del tiempo, tomando un número de cien iteraciones para cada simulación.

Figura 7. $\text{Log}(e_a)$ en función del tiempo al encontrar el mínimo de la función Rastrigin.



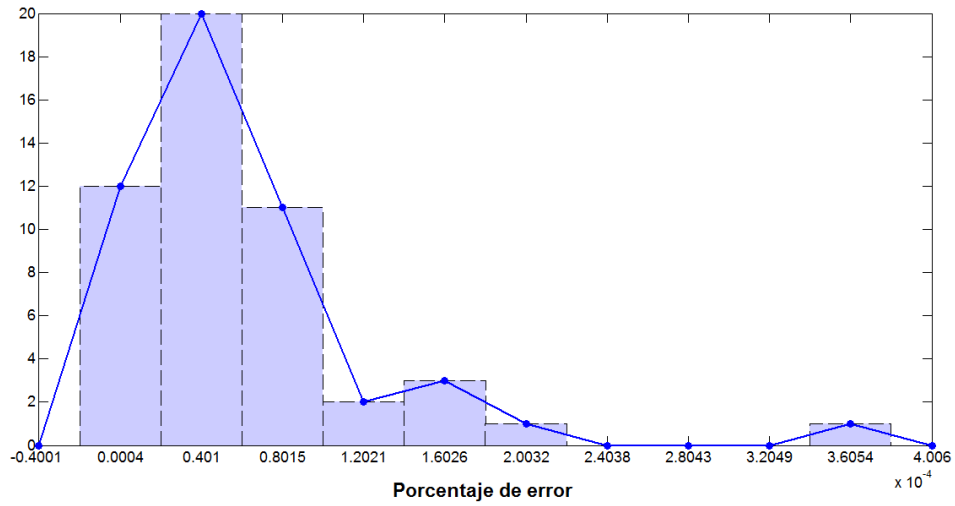
De la Figura 7 se puede notar, que al inicio el error disminuye drásticamente (en el primer segundo pasa de 10^2 % a 10^{-2} %) y al pasar el tiempo va disminuyendo la pendiente. La Figura 8 presenta los resultados obtenidos de las simulaciones, conservando los valores constantes $\alpha = 0,09$ y $\gamma = 0,2$. El tiempo máximo por cada simulación fue de 22 segundos.

Figura 8. Valor esperado y valor obtenido del mínimo de la función Rastrigin.



El histograma de la Figura 9 describe el comportamiento del error, al ejecutar cincuenta simulaciones para encontrar el mínimo de la función Rastrigin.

Figura 9. Histograma de la distribución del error al hallar el mínimo de la función Rastrigin.



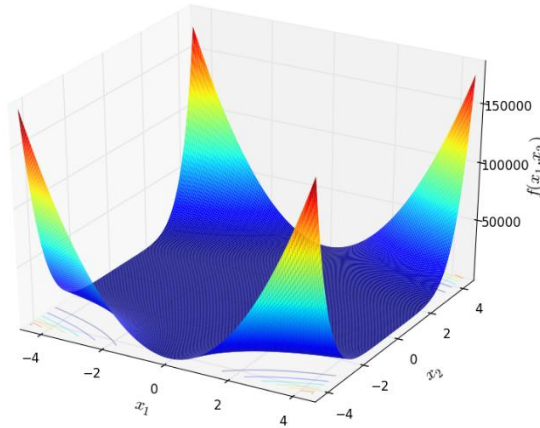
De la Figura 9 , se observa que más del ochenta por ciento de los resultados poseen errores entre 8×10^{-4} y $4 \times 10^{-8} \%$.

3.1.3. Función Beale

$$f_{\text{Beale}}(x,y) = (xy - x + 1.5)^2 + (xy^2 - x + 2.25)^2 + (xy^3 - x + 2.625)^2 \quad (23)$$

La función Beale tiene un mínimo global $f(x^*, y^*) = 0$ en $(x^*, y^*) = (3; 0,5)$ como se muestra en la Figura 10 donde $(-5 \leq x, y \leq 5)$.

Figura 10. Gráfica de la función Beale en dos dimensiones



Fuente: Base de datos Global Optimization Benchmarks and AMPGO [13].

Para las simulaciones se tomaron los valores aleatorios de α y γ , y se halla el mínimo de la función Beale, los resultados se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6. Resultados al variar los valores de α y γ al hallar el mínimo de la función Beale.

α	γ	ϵ_a [%]	Tiempo [s]
0,8	0,9	0,0092	4,02
0,7	0,6	0,0063	3,99
0,8	0,4	0,0055	3,76
0,1	0,5	$4,05 \times 10^{-4}$	3,76
0,3	0,2	$1,44 \times 10^{-4}$	3,19

α	γ	ϵ_a [%]	Tiempo [s]
0,8	0,2	$8,39 \times 10^{-4}$	3,30
0,8	0,1	$8,80 \times 10^{-5}$	2,76
0,4	0,8	0,0028	4,44
0,4	0,1	$1,34 \times 10^{-4}$	2,76
0,2	0,7	0,0051	4,22

Se escogen los valores de $\alpha = 0,8$ y $\gamma = 0,1$, pues presentan el menor error en el menor tiempo. Los resultados de las simulaciones se presentan en la Tabla 7.

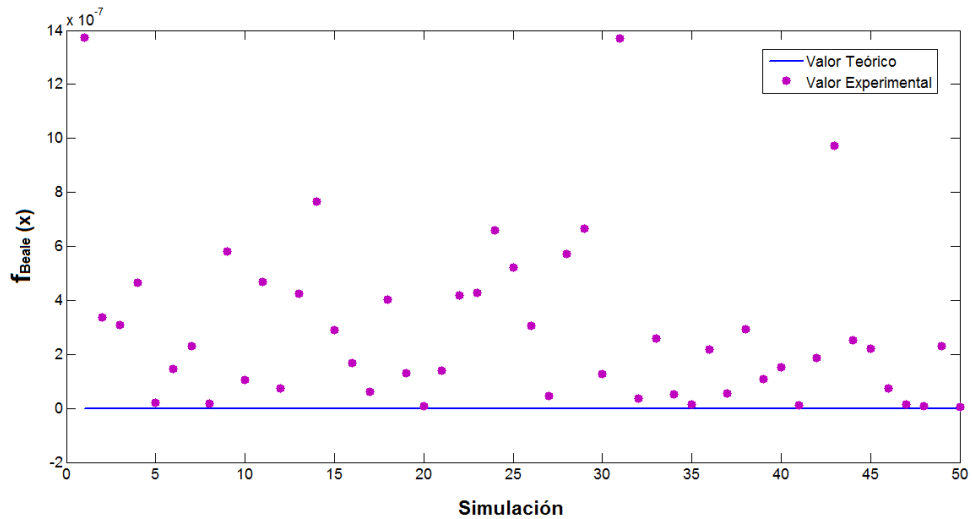
Tabla 7. Resultados al simular el algoritmo Luciérnaga Virtual para hallar el mínimo de la función Beale

N	Iteraciones	x	y	f(x, y)	ϵ_a [%]	Tiempo [s]
10	10	2,7438	0,3627	0,079576	7,9577	0,018
25	10	3,0385	0,5068	$3,91 \times 10^{-4}$	0,0392	0,024
25	25	2,9997	0,4980	$8,47 \times 10^{-5}$	0,0085	0,054
50	25	2,9898	0,4975	$1,68 \times 10^{-5}$	0,0017	0,177

50	50	3,0067	0,5021	$1,18 \times 10^{-5}$	0,0012	0,359
100	50	2,9982	0,5001	$7,61 \times 10^{-6}$	$7,61 \times 10^{-4}$	1,43
100	100	3,0038	0,5008	$2,86 \times 10^{-6}$	$2,86 \times 10^{-4}$	2,93
200	100	2,9984	0,4996	$4,12 \times 10^{-7}$	$4,12 \times 10^{-5}$	11,53
200	200	2,9985	0,4996	$3,94 \times 10^{-7}$	$3,94 \times 10^{-5}$	23,27
300	200	2,9994	0,4999	$5,76 \times 10^{-8}$	$5,76 \times 10^{-6}$	55,43
300	300	3,0005	0,5001	$4,7 \times 10^{-8}$	$4,7 \times 10^{-6}$	84,62
500	300	3,0001	0,5000	$3,78 \times 10^{-9}$	$3,78 \times 10^{-7}$	236,73

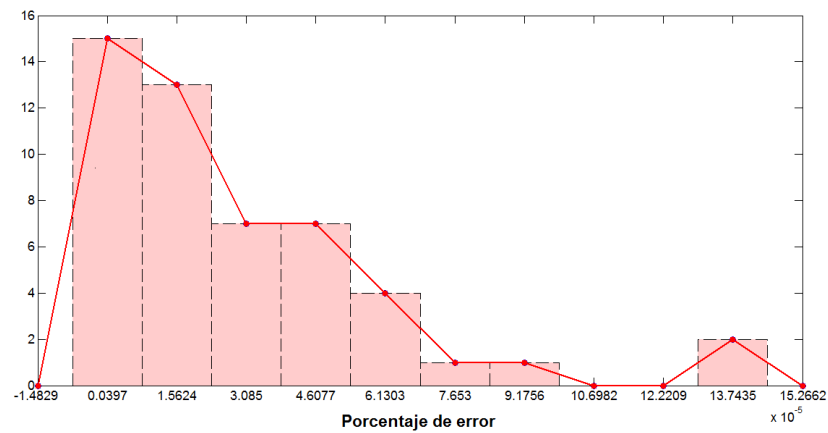
Como se puede observar de la Tabla 7, el algoritmo programado genera resultados muy satisfactorios (errores de $2,8 \times 10^{-4} \%$) en menos de 3 s. Para observar la variación entre una simulación y otra, se toman los valores $\alpha = 0,8$ y $\gamma = 0,1$ para este caso en particular, con 200 iteraciones y 200 luciérnagas por simulación. Los resultados se muestran en la Figura 11, con un tiempo máximo de 24 segundos por cada simulación.

Figura 11. Valor teórico y valor experimental del mínimo de la función Beale.



Se realiza un histograma con los resultados obtenidos, para analizar el comportamiento del error, al hallar el mínimo de la función Beale.

Figura 12. Histograma de la distribución del error al hallar el mínimo de la función Beale.



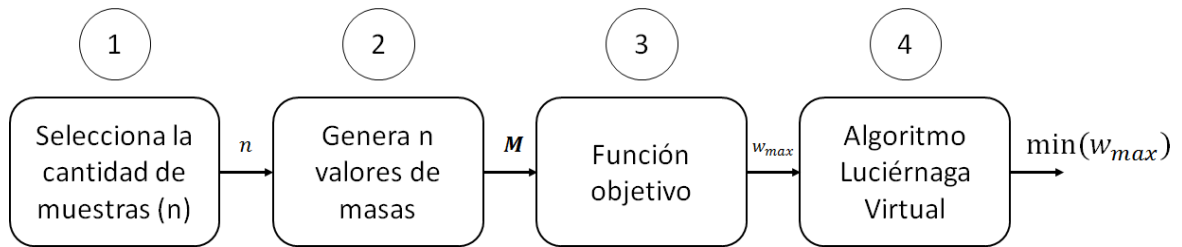
El histograma presentado en la Figura 12, nos muestra que el 30 % de los resultados, presentan el error mínimo, que es de $3,9 \times 10^{-7} \%$.

3.2. PROBLEMAS CON SISTEMAS MASA-RESORTE-AMORTIGUADOR (MRA)

Esta sección presenta el análisis y solución de sistemas MRA. Los problemas consisten en la optimización de la frecuencia máxima del sistema para todas las frecuencias naturales, de tal forma que ésta sea la mínima absoluta. Las variables de cada sistema son los porcentajes de las masas, por lo que son considerados, problemas de tipo *minimax* (el mínimo del máximo posible) con restricciones. El método de optimización de la Luciérnaga Virtual es implementado para dar solución al conjunto de problemas.

La Figura 13 muestra los pasos seguidos para la solución de problemas MRA utilizando el algoritmo de la Luciérnaga Virtual.

Figura 13. Diagrama de bloques para resolver sistemas MRA utilizando el algoritmo de la Luciérnaga Virtual.



Los bloques que conforman la Figura 13 se detallan a continuación:

- 1) *Se selecciona la cantidad de muestras o luciérnagas (N) que utilizará el algoritmo de la Luciérnaga Virtual.*
- 2) *Se generan N valores de masas m_1, m_2 y m_3 respectivamente de forma aleatoria cumpliendo con las condiciones del problema a solucionar.*
- 3) *Las masas generadas ingresan en la función objetivo, dando como resultado las intensidades I_x correspondientes. La función objetivo no está expresada como una ecuación matemática, sino como una serie de procesos, como se puede observar en la Figura 14.*
- 4) *A las intensidades obtenidas se les aplica el algoritmo de la Luciérnaga virtual. En la Figura 15 se observa el diagrama de flujo del pseudocódigo del algoritmo, en donde α, β_0 y γ son valores aleatorios suministrados por el usuario.*

Figura 14. Procesos de la función objetivo.

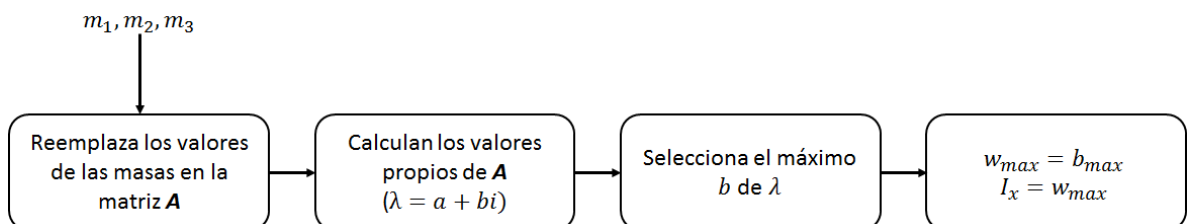
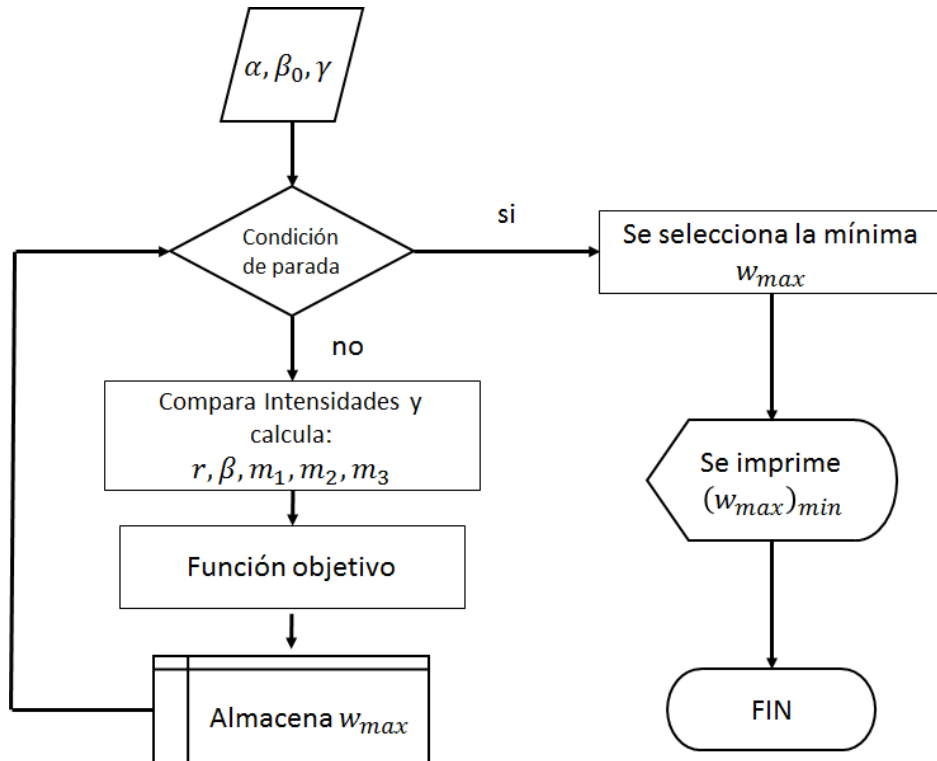


Figura 15. Diagrama de flujo del pseudocódigo del algoritmo Luciérnaga Virtual



Para mayor simplicidad en todos los problemas, se hará β_0 igual a uno.

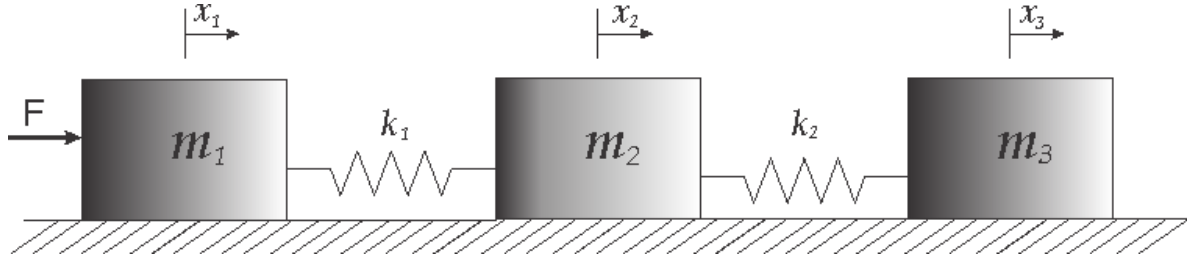
Para la solución de los problemas de sistemas MRA, se inician con valores aleatorios de las masas, por lo tanto el resultado obtenido no siempre es el mismo valor. Para analizar la dispersión de los resultados, se realizan cincuenta simulaciones en cada problema, manteniendo los valores de 100 luciérnagas y 100 iteraciones, por cada simulación.

3.2.1. Problema 1

Consiste en un sistema sencillo, que es desarrollado por medio de dos métodos, uno exacto y el otro aproximado. El primero consiste en la manipulación algebraica del sistema hasta obtener su solución satisfaciendo todas las condiciones planteadas. La técnica aproximada es la metaheurística planteada en este trabajo

como método alternativo de solución de sistemas MRA. Luego es comparada la exactitud y precisión del algoritmo.

Figura 16. Sistema masa-resorte con tres masas



El equilibrio del sistema es alterado por una fuerza **F** constante, aplicada en un extremo sobre m_1 Figura 16, y posteriormente es retirada, provocando así que los tres bloques de masas m_1 , m_2 y m_3 con desplazamientos x_1 , x_2 y x_3 respectivamente, comiencen a oscilar. Para simplicidad, se considera despreciable la fuerza de rozamiento. El problema consiste en seleccionar adecuadamente las masas que intervienen en el sistema, tal que logren hacer mínima la frecuencia máxima de oscilación.

Planteamiento del problema:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \omega_{\max}(\mathbf{M}) \\
 & \text{sujeto a} \quad g_1(\mathbf{M}) = m_1 + m_2 + m_3 = 100 \\
 & \quad \quad \quad g_2(\mathbf{M}) = k_1 = k_2 = k \\
 & \quad \quad \quad g_3(\mathbf{M}) = m_1 = m_3 = m \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{M} = (m_1, m_2, m_3)
 \end{aligned} \tag{24}$$

De la ecuación (3) y del balance de fuerzas, se tienen las siguientes ecuaciones que describen el sistema mostrado en la Figura 16 con las condiciones dadas en (24).

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -\frac{k}{m} \cdot x_1 + \frac{k}{m} \cdot x_2 \\
\ddot{x}_2 &= \frac{k}{m_2} \cdot x_1 - \frac{2k}{m_2} \cdot x_2 + \frac{k}{m_2} \cdot x_3 \\
\ddot{x}_3 &= \frac{k}{m} \cdot x_2 - \frac{k}{m} \cdot x_3
\end{aligned} \tag{25}$$

Las ecuaciones (25) también se pueden escribir en forma matricial como se muestra en (26)

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{2k}{m_2} & \frac{k}{m_2} \\ 0 & \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

a) Método exacto: Partiendo de (25), se nota que es un sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas lineales ordinarias de segundo orden. Además el sistema se encuentra oscilando, por lo tanto la respuesta es de la forma

$$x(t) = A_x \cdot \cos(\omega_x \cdot t), \tag{27}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) &= -\omega_x^2 A_x \cdot \cos(\omega_x \cdot t) \\
\ddot{x}(t) &= -\omega_x^2 \cdot x(t).
\end{aligned} \tag{28}$$

Reemplazando (28) en (26) se tiene que,

$$-\omega_x^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k/m & k/m & 0 \\ k/m_2 & -2k/m_2 & k/m_2 \\ 0 & k/m & -k/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Reordenando y agrupando en factores comunes (29) se llega a

$$\begin{bmatrix} -k/m & k/m & 0 \\ k/m_2 & -2k/m_2 & k/m_2 \\ 0 & k/m & -k/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \omega_x^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

$$\left(\begin{bmatrix} -k/m & k/m & 0 \\ k/m_2 & -2k/m_2 & k/m_2 \\ 0 & k/m & -k/m \end{bmatrix} - \omega_x^2 \mathbf{I} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad y ω_x la frecuencia natural del sistema. La ecuación (30) cumple con las condiciones de valor propio explicadas en la sección 2.4, por lo tanto se debe cumplir que:

$$p(\omega_x^2) = \det(\mathbf{C} - \omega_x^2 \mathbf{I}) = 0$$

$$p(\omega_x^2) = \left| \begin{bmatrix} -k/m & k/m & 0 \\ k/m_2 & -2k/m_2 & k/m_2 \\ 0 & k/m & -k/m \end{bmatrix} - \omega_x^2 \mathbf{I} \right| = 0 \quad (31)$$

siendo $p(\omega_x^2)$ el polinomio característico, $\mathbf{C}$ la matriz de las constantes y ω_x las frecuencias propias o naturales del sistema que corresponden a los valores propios de la matriz $\mathbf{C}$.

Resolviendo (31) se tiene que,

$$p(\omega^2) = -\omega^2(k - m\omega^2)(2k + km_2 - mm_2\omega^2) = 0, \quad (32)$$

con lo cual, tres soluciones son posibles (33).

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 0 \\ \omega_2^2 &= \frac{k}{m} \\ \omega_3^2 &= \frac{k}{m} \left(\frac{2m}{m_2} + 1 \right) \end{aligned} \quad (33)$$

Se sabe que m_2 es positiva, por lo tanto la frecuencia más alta del sistema corresponde a

$$(\omega_{\max})^2 = \frac{k}{m} \left(\frac{2m}{m_2} + 1 \right) \quad (34)$$

La ecuación (34) representa la función objetivo. El siguiente paso es resolver el problema planteado con las condiciones impuestas en (24), y para ello se agrega una nueva variable dada como

$$\begin{aligned} S &= m_1 + m_2 + m_3 \\ S &= 2m + m_2 \end{aligned} \quad (35)$$

Sustituyendo (35) en (34),

$$\begin{aligned} \omega_{\max}^2 &= \frac{k}{m} \left(\frac{2m + m_2}{m_2} \right) \\ \omega_{\max}^2 &= \frac{k}{m} \left(\frac{S}{S - 2m} \right) \\ \omega_{\max}^2 &= \frac{kS}{mS - 2m^2} \end{aligned} \quad (36)$$

La frecuencia máxima (36) está compuesta por un numerador (N) y un denominador (D). Con el fin de asegurar un valor mínimo de la anterior función, se halla el mínimo de N y el máximo de D, donde

$$\begin{aligned} N &= kS, \\ D &= mS - 2m^2. \end{aligned} \quad (37)$$

No es posible tener en cuenta el mínimo valor de N en (37) puesto que k y S son valores constantes. Para hallar el máximo de D en (37) se utiliza el criterio de la derivada

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dm} &= S - 4m = 0, \\ m &= \frac{S}{4}. \end{aligned} \quad (38)$$

Reemplazando (38) con las condiciones de (24) en (36) y tomando como valor de k la unidad, se obtiene la solución al problema 1, la cual se presenta en (39).

$$\begin{aligned} (\omega_{\max})_{\min} &= \sqrt{0,08} \approx 0,2828427, \\ m_1 &= 25, m_2 = 50 \text{ y } m_3 = 25 \end{aligned} \quad (39)$$

b) Solución utilizando el algoritmo Luciérnaga Virtual: El sistema del problema 1, queda descrito por las ecuaciones en matrices (26). Ahora, se realiza un cambio de variable,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4, \quad \dot{x}_2 = x_5, \quad \dot{x}_3 = x_6 \\ \ddot{x}_1 &= \dot{x}_4, \quad \ddot{x}_2 = \dot{x}_5, \quad \ddot{x}_3 = \dot{x}_6. \end{aligned} \quad (40)$$

Sustituyendo (40) en (30), se tiene que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m & k/m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k/m_2 & -2k/m_2 & k/m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k/m & -k/m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$$

La ecuación (41) es semejante a (7) y ambas cumplen con la condición de valor propio explicada en la sección 2.4. Lo anterior significa que la parte imaginaria de los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ en (41) equivalen a las frecuencias de oscilaciones del sistema. Además, se tomará el valor de k igual a la unidad, para poder comparar la solución obtenida en los dos métodos planteados.

Se seleccionan los valores de α y γ de forma aleatoria. Los resultados de las simulaciones se presentan en la Tabla 8.

Tabla 8. Resultados al variar los valores de α y γ al resolver el problema 1.

α	γ	ε_r [%]	Tiempo [s]	α	γ	ε_r [%]	Tiempo [s]
0,1	0,7	$4,69 \times 10^{-9}$	22,18	0,6	0,5	$3,77 \times 10^{-9}$	20,05
0,9	0,04	$8,6 \times 10^{-12}$	19,54	0,6	0,1	$4,49 \times 10^{-9}$	20,17
0,2	0,01	$4,9 \times 10^{-13}$	17,91	0,6	0,9	$1,16 \times 10^{-9}$	20,09
0,7	0,8	$4,61 \times 10^{-9}$	19,99	0,1	0,4	$3,2 \times 10^{-12}$	20,19
0,07	0,7	$5,5 \times 10^{-10}$	20,21	0,01	0,9	$9,79 \times 10^{-9}$	20,33

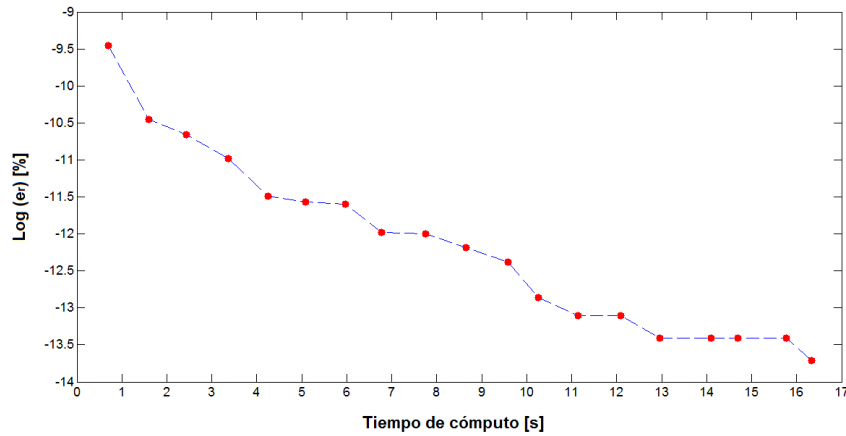
Los valores escogidos de α y γ son 0,2 y 0,01 respectivamente, pues con ellos se obtiene el error más pequeño en el menor tiempo. Los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo de la Luciérnaga Virtual para la solución del problema 1 se presentan en la Tabla 9, tomando para el cálculo del error la ecuación (19).

Tabla 9. Resultados al simular el algoritmo de la Luciérnaga Virtual para resolver el problema 1.

N	Iteraciones	m_1 [%]	m_2 [%]	m_3 [%]	$\text{Min}(\omega_{\max})$	ε_r [%]	Tiempo [s]
10	10	25,0163	49,9674	25,0163	0,282842	$2,12 \times 10^{-5}$	0,028
25	10	25,0011	49,9979	25,0011	0,282842	$8,91 \times 10^{-8}$	0,116
25	25	24,9991	50,0018	24,9991	0,282842	$6,14 \times 10^{-8}$	0,300
50	25	25,0000	50,0001	25,0000	0,282842	$1,6 \times 10^{-10}$	1,14
50	50	25,0000	50,0000	25,0000	0,282842	$2,9 \times 10^{-11}$	2,24
100	50	25,0000	50,0000	25,0000	0,282842	$5,8 \times 10^{-14}$	8,75
100	100	25,0000	50,0000	25,0000	0,282842	$1,9 \times 10^{-14}$	17,98
200	100	25,0000	50,0000	25,0000	0,282842	$1,9 \times 10^{-14}$	69,37

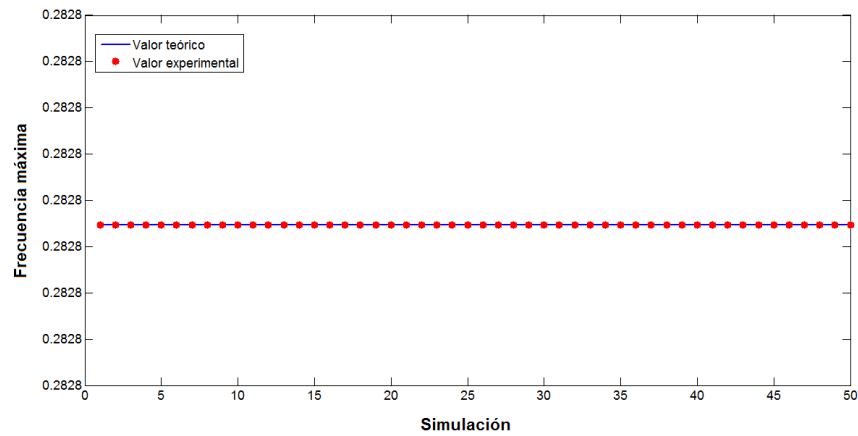
De la Tabla 9 se puede notar que en poco tiempo de cómputo (menos de 3 segundos) se obtienen buenos resultados (error menor del 3×10^{-11} %). Para la gráfica de la Figura 17 se toma el valor de N=100.

Figura 17. $\text{Log}(\varepsilon_r)$ en función del tiempo de cómputo para la solución del problema 1.



La Figura 17 muestra que de 13 a 16 segundos el resultado no varía, y se mantiene en $1 \times 10^{-13,5}$. La Figura 18 muestra la dispersión de los resultados obtenidos en cada simulación alrededor del valor teórico, el tiempo máximo por cada simulación fue de 18 segundos.

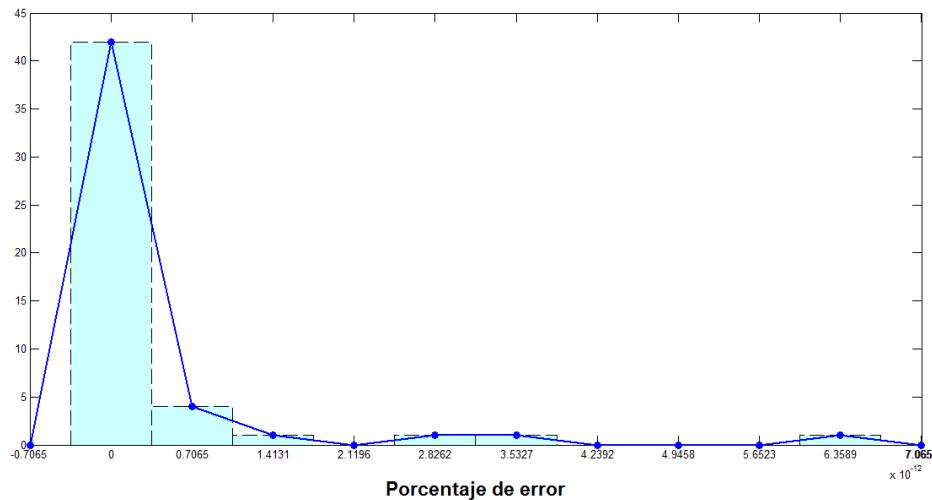
Figura 18. Valor esperado y valor experimental para la solución del problema 1.



Los resultados de las simulaciones mostradas en la Figura 18 tienen un error promedio de $4,2 \times 10^{-13} \%$ y un error máximo es de $6,3 \times 10^{-12} \%$

El histograma de la Figura 19, describe el comportamiento del error, de las cincuenta simulaciones hechas, para la solución del problema 1.

Figura 19. Histograma de la distribución del error para la solución del problema 1.



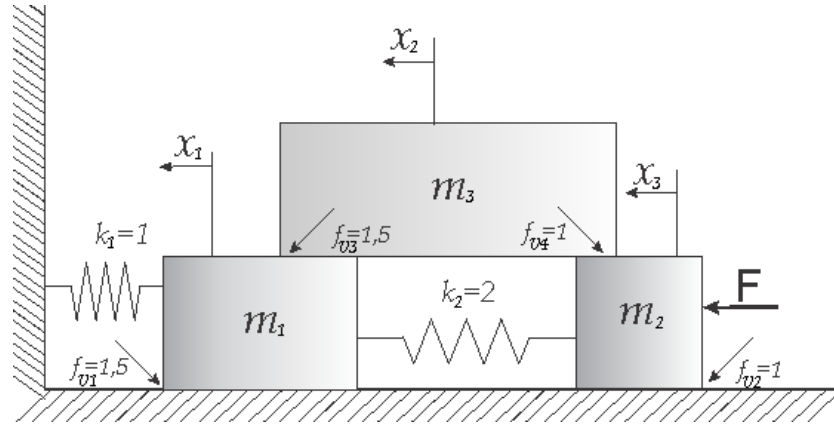
De la Figura 19, se observa que el algoritmo de la Luciérnaga Virtual es bastante preciso para la solución del problema 1, ya que más del 80 % por ciento de los resultados, encuentran la solución óptima, esto es, donde el error es 0.

A continuación se solucionan problemas de sistemas MRA, utilizando las mismas técnicas que se emplearon para analizar y resolver el problema 1.

3.2.2. Problema 2

El sistema de la Figura 20 experimenta una fuerza aplicada $\mathbf{F}$ de valor constante sobre la masa m_2 que luego es retirada, causando así que los tres bloques de masas m_1 , m_2 y m_3 con desplazamientos x_1 , x_2 y x_3 respectivamente, comiencen a oscilar. Además existe la fuerza de fricción entre cada bloque y la superficie de contacto.

Figura 20. Sistema masa-resorte con fuerzas de fricción.



El problema radica en encontrar los valores de las masas que participan en el sistema para lograr hacer mínima la frecuencia máxima de oscilación.

Planteamiento del problema:

$$\begin{aligned}
 & \min \omega_{\max}(\mathbf{M}) \\
 & \text{sujeto a } g_1(\mathbf{M}) = m_1 + m_2 + m_3 = 100 \\
 & \quad g_2(\mathbf{M}) = 10 \leq m_2 \leq 20 \\
 & \quad g_3(\mathbf{M}) = m_3 \geq 50 \\
 & \quad g_4(\mathbf{M}) = m_1 \geq 10 \\
 & \quad \mathbf{M} = (m_1, m_2, m_3)
 \end{aligned} \tag{42}$$

Las ecuaciones que describen el problema 2, mostrado en la Figura 20 con las condiciones impuestas en (42) son:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= -\frac{3}{m_1}x_1 - \frac{3}{m_1}\dot{x}_1 + \frac{2}{m_1}x_2 + \frac{3}{2m_1}\dot{x}_3 \\
 \ddot{x}_2 &= \frac{2}{m_2}x_1 - \frac{2}{m_2}x_2 - \frac{2}{m_2}\dot{x}_2 + \frac{1}{m_2}\dot{x}_3 \\
 \ddot{x}_3 &= \frac{3}{2m_3}\dot{x}_1 + \frac{1}{m_3}\dot{x}_2 - \frac{5}{2m_3}\dot{x}_3.
 \end{aligned} \tag{43}$$

a) Método exacto: Se aplica la misma técnica utilizada para resolver el problema 1 de manera exacta, y se llega a que los valores óptimos de las masas m_1 , m_2 y m_3 son 30, 20 y 50 respectivamente, obteniendo así que la frecuencia máxima sea la mínima posible, mostrada en (44).

$$(\omega_{\max})_{\min} \approx 0,4233925 \quad (44)$$

b) Solución utilizando el algoritmo Luciérnaga Virtual: Haciendo el cambio de variables

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4, \quad \dot{x}_2 = x_5, \quad \dot{x}_3 = x_6 \\ \ddot{x}_1 &= \dot{x}_4, \quad \ddot{x}_2 = \dot{x}_5, \quad \ddot{x}_3 = \dot{x}_6, \end{aligned} \quad (45)$$

se puede escribir las ecuaciones de (43) en forma de matrices:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{1}{m_1} & 0 & \frac{1}{2m_1} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{m_2} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} & \frac{1}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_3} & \frac{-5}{2m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$$

A la ecuación (46), se le aplica el mismo método utilizado para resolver el problema 1, eligiendo los valores aleatorios de α y γ . Los resultados obtenidos se presentan en Tabla 10.

Tabla 10. Resultados al variar los valores de α y γ al resolver el problema 2.

α	γ	ε_r [%]	Tiempo [s]	α	γ	ε_r [%]	Tiempo [s]
0,8	0,9	0,0379	19,84	0,6	0,05	$1,31 \times 10^{-14}$	16,29
0,9	0,5	$1,31 \times 10^{-14}$	20,09	0,2	0,001	$1,31 \times 10^{-14}$	9,12
0,6	0,09	$1,31 \times 10^{-14}$	19,35	0,2	0,8	0,2106	19,47
0,4	0,2	$1,31 \times 10^{-14}$	19,51	0,9	0,5	0,1092	20,00
0,7	0,5	0,1047	19,86	0,7	0,3	$1,31 \times 10^{-14}$	19,80

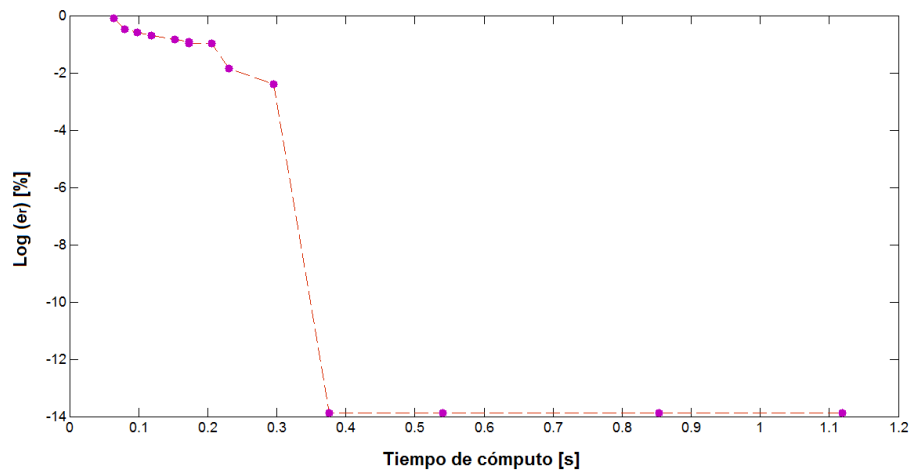
Se escogen los valores de $\alpha = 0,2$ y $\gamma = 0,001$ porque se obtiene la mejor solución en el menor tiempo. Los resultados de las simulaciones se presentan en la Tabla 11.

Tabla 11. Resultados al simular el algoritmo Luciérnaga Virtual para resolver el problema 2

N	Iteraciones	m_1 [%]	m_2 [%]	m_3 [%]	$\text{Min}(\omega_{\max})$	ε_r [%]	Tiempo [s]
10	10	31,5126	18,4874	50	0,426837	0,8137	0,025
25	10	31,1078	18,8262	50,0660	0,426119	0,6440	0,085
25	25	30,6051	19,3916	50,0033	0,424572	0,2786	0,208
50	25	30	20	50	0,423392	$1,31 \times 10^{-14}$	0,695
50	50	30	20	50	0,423392	$1,31 \times 10^{-14}$	1,39
100	50	30	20	50	0,423392	$1,31 \times 10^{-14}$	4,85
100	100	30	20	50	0,423392	$1,31 \times 10^{-14}$	9,40
200	100	30	20	50	0,423392	$1,31 \times 10^{-14}$	21,31

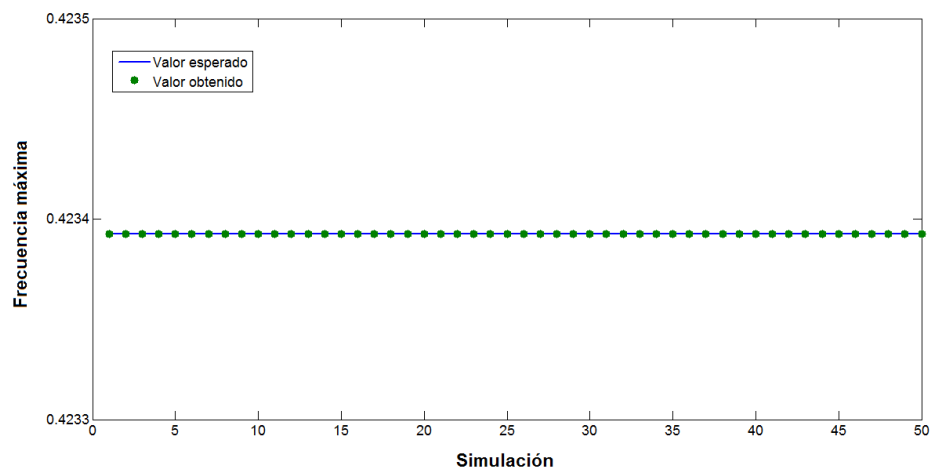
De la Tabla 11, se observa que el error más pequeño que se alcanza con el algoritmo, es de $1,31 \times 10^{-14}$ %, y esto se consigue en menos de 1 segundo de simulación. La gráfica de la Figura 21 muestra la variación del error con respecto al tiempo de cómputo.

Figura 21. Error en función del tiempo de cómputo para la solución del problema 2.



De la Figura 21, se observa que el error disminuye drásticamente, a los 0,3 segundos de simulación, pasando de 10^{-3} % a 10^{-14} % en menos de 0,1 segundo. Luego mantiene ese error, pues es el mínimo alcanzado. La Figura 22 presenta los resultados obtenidos de las simulaciones, conservando las constantes como $\alpha = 0,2$ y $\gamma = 0,01$, el tiempo promedio por cada simulación fue de 10 segundos.

Figura 22. Valor esperado y valor obtenido para la solución del problema 2.

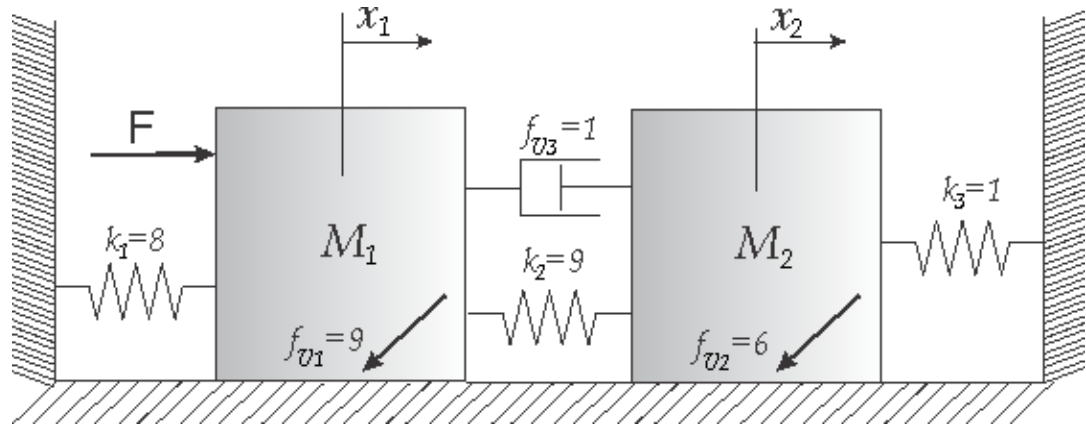


Todas las simulaciones arrojaron el mismo resultado, presentando un error de $1,31 \times 10^{-14} \%$.

3.2.3. Problema 3

La Figura 23 muestra un sistema MRA al cual se le suministra una fuerza F de valor constante que posteriormente se retira, provocando de este modo, que las masas M_1 y M_2 empiecen a oscilar con desplazamientos x_1 y x_2 respectivamente.

Figura 23. Sistema MRA del problema 3.



El problema reside en lograr, que la frecuencia máxima de oscilación del sistema sea la mínima posible, cumpliendo con las restricciones de (47).

Planteamiento del problema:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \omega_{\max}(\mathbf{M}) \\
 & \text{sujeto a} \quad g_1(\mathbf{M}) = M_1 + M_2 = 100 \\
 & \quad \quad \quad g_2(\mathbf{M}) = M_1 \geq 20 \\
 & \quad \quad \quad g_3(\mathbf{M}) = M_2 \geq 20 \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{M} = (M_1, M_2)
 \end{aligned} \tag{47}$$

El sistema MRA del problema 3 queda descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\frac{17}{M_1}x_1 - \frac{10}{M_1}\dot{x}_1 + \frac{9}{M_1}x_2 + \frac{1}{M_1}\dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 &= \frac{9}{M_2}x_1 - \frac{10}{M_2}x_2 + \frac{1}{M_2}\dot{x}_1 - \frac{7}{M_2}\dot{x}_2.\end{aligned}\tag{48}$$

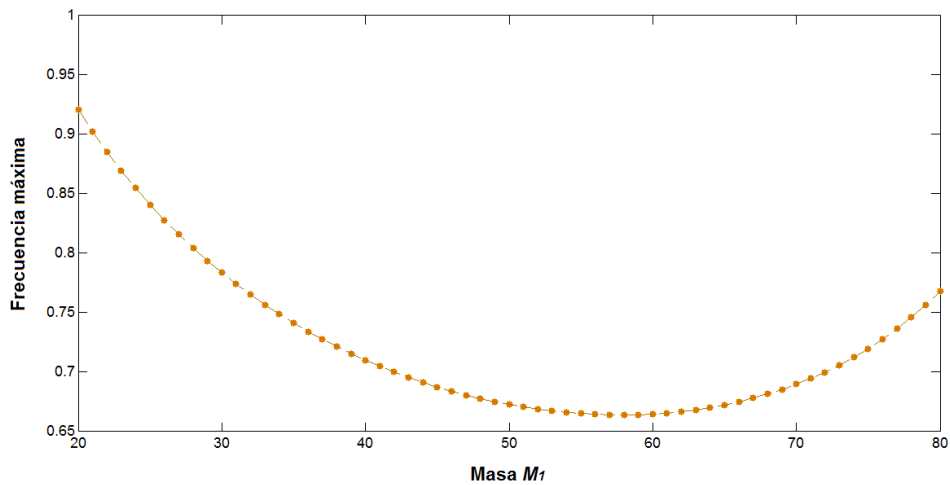
De igual manera como se trabajó en los problemas 1 y 2, se desarrollará el problema 3.

a) Solución exacta: Los valores óptimos para resolver el problema 3 se presentan en (49).

$$M_1 \approx 57,7648, \quad M_2 \approx 42,2351 \quad \text{y} \quad (\omega_{\max})_{\min} \approx 0,664059 \tag{49}$$

La Figura 24 muestra el comportamiento de la frecuencia máxima $w_{\max}$ del problema 3, al variar el valor de la masa M_1 .

Figura 24. Variación de la frecuencia máxima en función de la masa M_1



b) Solución utilizando el algoritmo Luciérnaga Virtual:

Se realiza el cambio de variables

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \\ \ddot{x}_1 &= \dot{x}_3, \quad \ddot{x}_2 = \dot{x}_4.\end{aligned}\tag{50}$$

A las ecuaciones (48) se les aplica el cambio de variables (50), y son escritas en forma de matrices, resultando (51).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{17}{M_1} & \frac{9}{M_1} & -\frac{10}{M_1} & \frac{1}{M_1} \\ \frac{9}{M_2} & -\frac{10}{M_2} & \frac{1}{M_2} & -\frac{7}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\tag{51}$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$$

Se seleccionan los valores de α y γ de forma aleatoria, y se comparan los resultados obtenidos. Los resultados se muestran en Tabla 12.

Tabla 12. Resultados al variar los valores de α y γ al resolver el problema 3.

α	γ	ε_r [%]	Tiempo [s]
0,09	0,2	$1,7 \times 10^{-11}$	16,27
0,6	0,5	$1,37 \times 10^{-12}$	16,49
0,06	0,4	$1,03 \times 10^{-12}$	16,72
0,1	0,7	$1,34 \times 10^{-10}$	16,98
0,4	0,3	$1,50 \times 10^{-13}$	16,49

α	γ	ε_r [%]	Tiempo [s]
0,3	0,1	$2,24 \times 10^{-11}$	16,48
0,06	0,6	$9,17 \times 10^{-11}$	16,63
0,8	0,6	$1,30 \times 10^{-11}$	16,80
0,7	0,7	$7,35 \times 10^{-9}$	16,42
0,8	0,9	$3,09 \times 10^{-8}$	16,74

Se escogen los valores de $\alpha = 0,4$ y $\gamma = 0,3$, porque presenta el menor error. La Tabla 13 muestra los resultados al resolver el problema 3.

Tabla 13. Resultados al simular el algoritmo Luciérnaga Virtual para resolver el problema 3.

N	Iteraciones	m_1 [%]	m_2 [%]	Min($\omega_{\max}$)	ε_r [%]	Tiempo [s]
10	10	57,8234	42,1766	0,664059	$7,76 \times 10^{-5}$	0,022
25	10	57,7852	42,2148	0,664059	$9,40 \times 10^{-6}$	0,097

25	25	57,7522	42,2478	0,664059	$3,58 \times 10^{-6}$	0,260
50	25	57,7703	42,2297	0,664059	$6,82 \times 10^{-7}$	1,02
50	50	57,7660	42,2340	0,664059	$3,36 \times 10^{-8}$	2,10
100	50	57,7641	42,2359	0,664059	$1,30 \times 10^{-8}$	8,23
100	100	57,7649	42,2351	0,664059	$5,73 \times 10^{-11}$	16,54
200	100	57,7648	42,2352	0,664059	$1,30 \times 10^{-11}$	66,88

De la Tabla 13 se puede notar que con pocas luciérnagas ($N=10$) y pocas iteraciones (10 iteraciones) al utilizar el algoritmo el resultado obtenido es bastante preciso (error de $7,76 \times 10^{-5} \%$), además el tiempo requerido es muy corto (0,022 segundos). Para observar la variación entre una simulación y otra, se realizan 50 simulaciones sin alterar los valores de $\alpha = 0,4$ y $\gamma = 0,3$ para este caso en particular. Los resultados de las se muestran en la Figura 25, con un tiempo máximo de 16 segundos por cada simulación. Luego se realiza un histograma con los resultados obtenidos, para analizar el comportamiento del error, al solucionar el problema 3.

Figura 25. Valor teórico y valor experimental para la solución del problema 3.

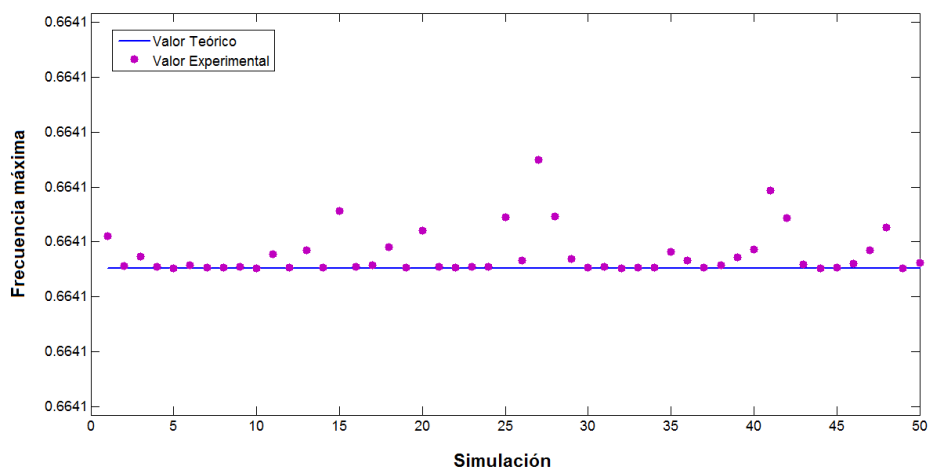
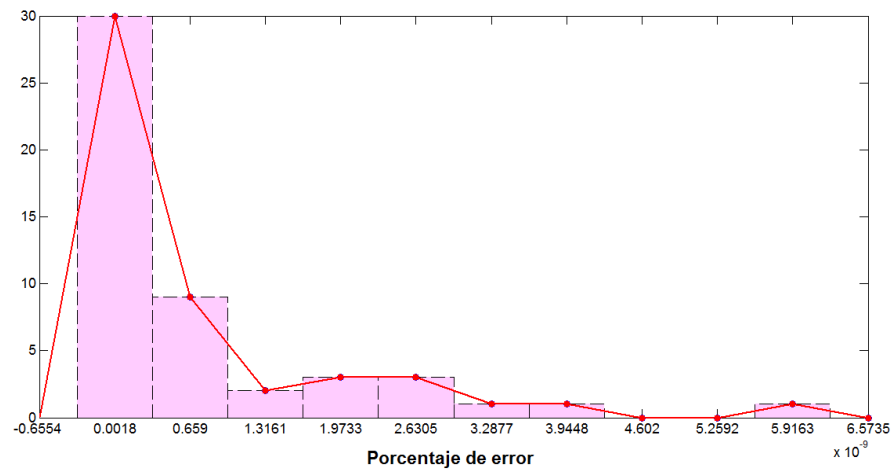
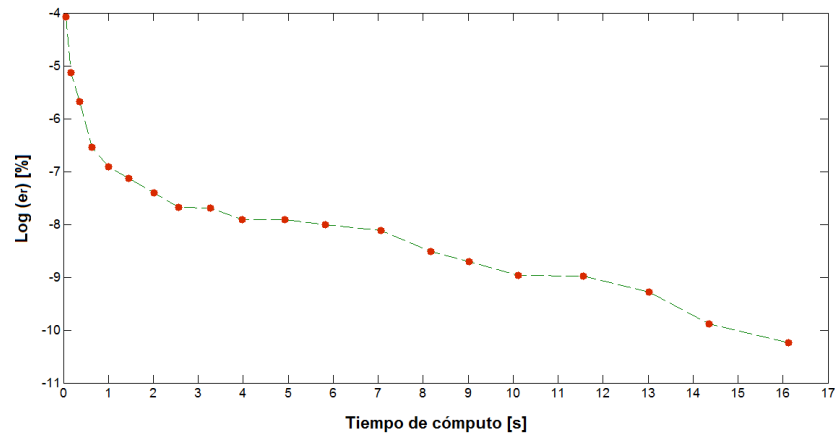


Figura 26. Histograma de la distribución del error al resolver el problema 3.



El histograma presentado en la Figura 26, nos muestra que el 60% de los resultados, presentan el error mínimo, que es de $1,8 \times 10^{-12} \%$. La Figura 27 muestra el comportamiento del error relativo en función del tiempo de cómputo, en ella se puede notar que en tan solo 1 segundo de cómputo la solución obtenida presenta un error del orden de $10^{-7} \%$.

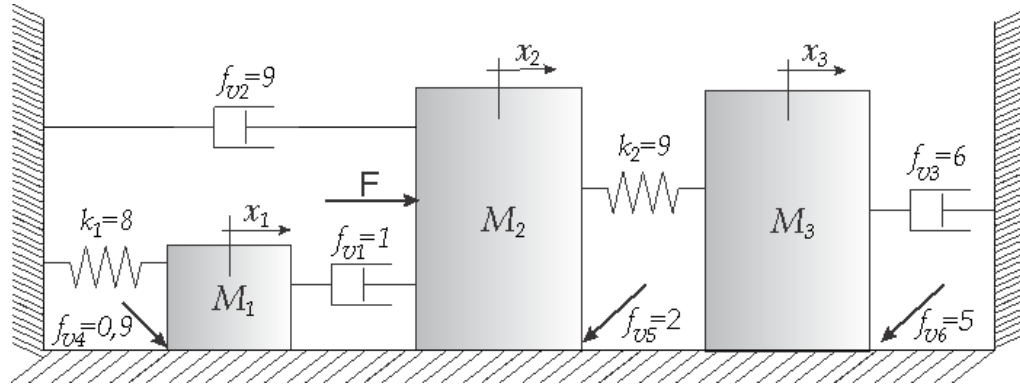
Figura 27. $\text{Log}(\varepsilon_r)$ en función del tiempo de cómputo al solucionar el problema 3.



3.2.4. Problema 4

Al sistema MRA de la Figura 28, se le aplica una fuerza F de valor constante que luego se retira, ocasionando de esta manera, que las masas M_1 , M_2 y M_3 comiencen a oscilar con desplazamientos x_1 , x_2 y x_3 respectivamente.

Figura 28. Sistema MRA del problema 4.



El problema 4, consiste en determinar los valores de las masas M_1 , M_2 y M_3 , para que la frecuencia de oscilación máxima, del sistema MRA de la Figura 28, sea mínima, cumpliendo con las condiciones de (52).

Planteamiento del problema:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \omega_{\max}(\mathbf{M}) \\
 & \text{sujeto a} \quad g_1(\mathbf{M}) = M_1 + M_2 + M_3 = 100 \\
 & \quad \quad \quad g_2(\mathbf{M}) = 40 \geq M_1 \geq 10 \\
 & \quad \quad \quad g_3(\mathbf{M}) = 40 \geq M_2 \geq 20 \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3).
 \end{aligned} \tag{52}$$

Las ecuaciones que describen el problema 4, son:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -\frac{8}{M_1}x_1 - \frac{1,9}{M_1}\dot{x}_1 + \frac{1}{M_1}\dot{x}_2 \\
\ddot{x}_2 &= -\frac{9}{M_2}x_2 + \frac{9}{M_2}x_3 + \frac{1}{M_2}\dot{x}_1 - \frac{12}{M_2}\dot{x}_2 \\
\ddot{x}_3 &= \frac{9}{M_3}x_2 - \frac{9}{M_3}x_3 - \frac{11}{M_3}\dot{x}_3
\end{aligned} \tag{53}$$

a) Solución óptima: Los resultados óptimos para la solución del problema 4, se presentan en (54).

$$\begin{aligned}
M_1 &\approx 18,836465, \quad M_2 \approx 39,680042, \quad M_3 \approx 41,483492 \text{ y} \\
\min(\omega_{\max}) &\approx 0.6498084
\end{aligned} \tag{54}$$

b) Solución utilizando el algoritmo de la Luciérnaga Virtual:

Se realiza el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_4, \quad \dot{x}_2 = x_5, \quad \dot{x}_3 = x_6 \\
\ddot{x}_1 &= \dot{x}_4, \quad \ddot{x}_2 = \dot{x}_5, \quad \ddot{x}_3 = \dot{x}_6.
\end{aligned} \tag{55}$$

A las ecuaciones en (53) se le aplica el cambio de variables (55), y se reescriben las ecuaciones de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & 0 & \frac{1,9}{M_1} & \frac{1}{M_1} & 0 \\ \frac{-9}{M_1} & \frac{9}{M_2} & \frac{1}{M_2} & \frac{-12}{M_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{M_3} & \frac{-9}{M_3} & 0 & 0 & \frac{-11}{M_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$$

Se seleccionan los valores de α y γ de forma aleatoria, y se resuelve el problema 4. Los resultados se muestran en la Tabla 14.

Tabla 14. Resultados al variar los valores de α y γ al resolver el problema 4.

α	γ	ϵ_r [%]	Tiempo [s]	α	γ	ϵ_r [%]	Tiempo [s]
0,8	0,9	0,0023	22,41	0,4	0,04	$2,07 \times 10^{-4}$	19,67
0,01	0,6	$7,76 \times 10^{-4}$	22,62	0,7	0,6	0,0055	22,18
0,9	0,9	0,0031	24,30	0,9	0,5	0,0050	23,32
0,2	0,5	0,0119	22,40	0,4	0,1	0,0059	21,8
0,0005	0,9	0,0117	22,50	0,8	0,1	0,0082	23,42

Se escogen los valores de $\alpha = 0,4$ y $\gamma = 0,04$ pues fueron los que arrojaron el menor error, con estos valores se analiza el comportamiento al resolver el problema 4. Los resultados de las simulaciones se presentan en la Tabla 15.

Tabla 15. Resultados al simular el algoritmo Luciérnaga Virtual para resolver el problema 4.

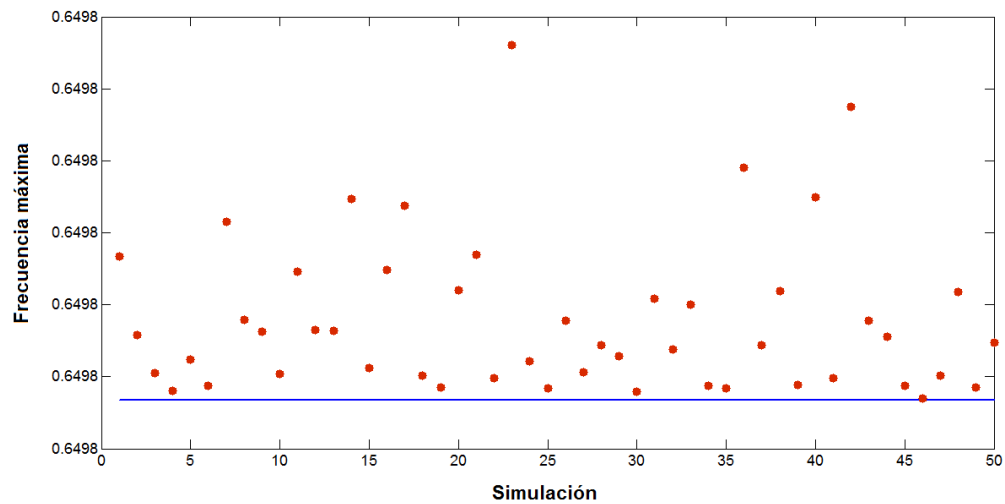
N	Iteraciones	M_1 [%]	M_2 [%]	M_3 [%]	Min ($\omega_{\max}$)	ϵ_r [%]	Tiempo [s]
10	10	19,0287	37,9046	43,0667	0,650842	0,1590	0,032
25	10	18,8670	37,2632	43,8698	0,650655	0,1303	0,134
25	25	18,9051	38,6885	42,4064	0,650160	0,0542	0,329

50	25	18,8444	38,9826	42,1730	0,649893	0,0130	1,39
50	50	18,8379	39,1647	41,9974	0,649843	0,0053	2,66
100	50	18,8377	39,6617	41,5005	0,649812	$5,75 \times 10^{-4}$	9,68
100	100	18,8369	39,6331	41,5300	0,649809	$1,05 \times 10^{-4}$	20,20
200	100	18,8365	39,6731	41,4904	0,649808	$1,98 \times 10^{-5}$	77,18

La matriz de estados tiene un término con cifra decimal, esto implica más tiempo de cálculo para encontrar la solución del problema, a pesar de esto, el algoritmo en 20 segundos obtiene resultados con error del $1 \times 10^{-4} \%$.

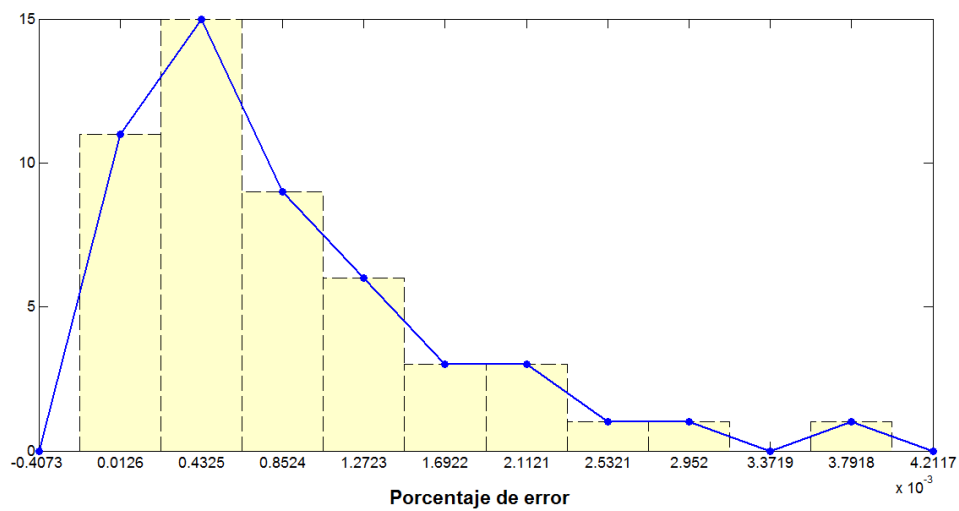
Los resultados de las simulaciones se muestran en la Figura 29, manteniendo los valores de $\alpha = 0,4$ y $\gamma = 0,04$. El tiempo promedio de las simulaciones fue de 30 segundos.

Figura 29. Resultados de las simulaciones para la solución del problema 4.



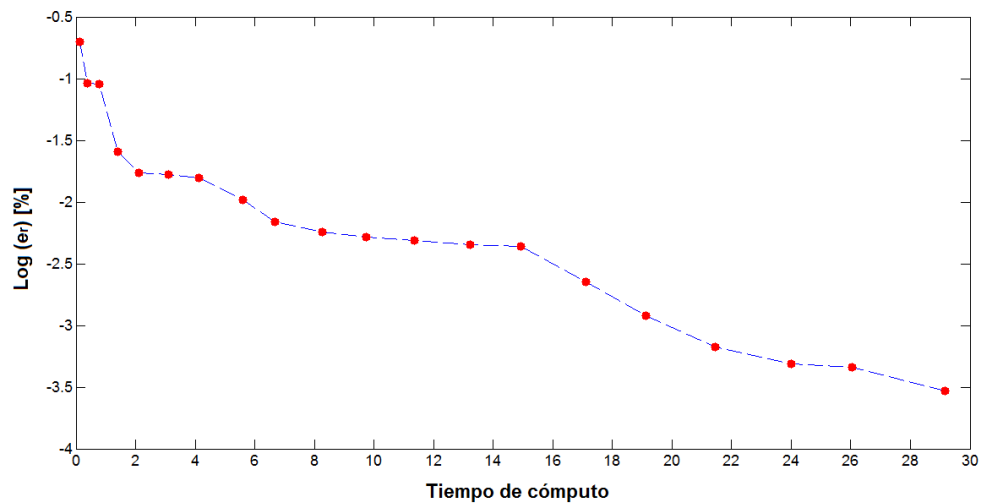
El histograma de la Figura 30, muestra el comportamiento del error, al resolver el problema 4.

Figura 30. Histograma de la distribución del error al resolver el problema 4.



Del histograma de la Figura 30, se observa que la mayoría de las frecuencias obtenidas (más del 70 %) tienen errores menores a $8,5 \times 10^{-4} \%$, y que el error mínimo logrado fue de $1,2 \times 10^{-5} \%$. En la Figura 31 se puede observar la variación del error en función del tiempo de cómputo.

Figura 31. $\text{Log}(\epsilon_r)$ en función del tiempo de cómputo al resolver el problema 4.

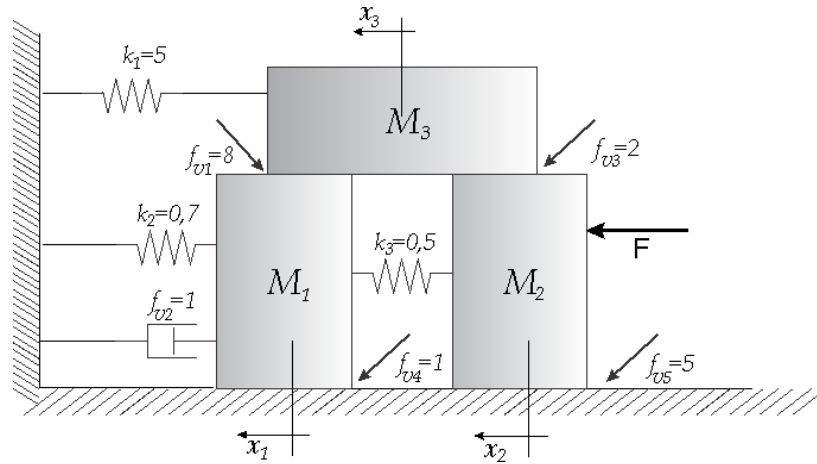


De la Figura 31, se nota que a los 6 segundos de cómputo, el algoritmo arroja resultados con errores de $10^{-2} \%$.

3.2.5. Problema 5

El sistema MRA del problema 5, tiene tres bloques de masas M_1, M_2 y M_3 , al bloque de masa M_2 se le aplica una fuerza F constante, tal como se muestra en la Figura 32.

Figura 32. Sistema MRA del problema 5.



La fuerza F se retira, provocando que las masas M_1, M_2 y M_3 empiecen a oscilar con desplazamientos x_1, x_2 y x_3 respectivamente. El problema 5, consiste en seleccionar las masas para lograr hacer mínima la frecuencia máxima de oscilación.

Planteamiento del problema:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \omega_{\max}(\mathbf{M}) \\
 & \text{sujeto a} \quad g_1(\mathbf{M}) = M_1 + M_2 + M_3 = 100 \\
 & \quad \quad \quad g_2(\mathbf{M}) = M_1 = M_2 \\
 & \quad \quad \quad g_3(\mathbf{M}) = M_{1,2} \geq 10 \\
 & \quad \quad \quad g_4(\mathbf{M}) = M_3 \geq 10 \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3).
 \end{aligned} \tag{57}$$

Las ecuaciones que describen el problema 5, son:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= -\frac{1,2}{M_1}x_1 + \frac{0,5}{M_1}x_2 - \frac{10}{M_1}\dot{x}_1 + \frac{8}{M_1}\dot{x}_3 \\
 \ddot{x}_2 &= \frac{0,5}{M_2}x_1 - \frac{0,5}{M_2}x_2 - \frac{7}{M_2}\dot{x}_2 + \frac{2}{M_2}\dot{x}_3 \\
 \ddot{x}_3 &= -\frac{5}{M_3}x_3 + \frac{8}{M_3}\dot{x}_1 + \frac{2}{M_3}\dot{x}_2 - \frac{10}{M_3}\dot{x}_3.
 \end{aligned} \tag{58}$$

a) Solución exacta: Los valores óptimos, para la solución del problema 5, son:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= 45, \quad M_2 = 45, \quad M_3 = 10, \quad y \\
 \min(\omega_{\max}) &\approx 0,20759067
 \end{aligned} \tag{59}$$

b) Solución utilizando el algoritmo de la Luciérnaga Virtual:

Se aplica el cambio de variables (60) en (58),

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_4, \quad \dot{x}_2 = x_5, \quad \dot{x}_3 = x_6 \\
 \ddot{x}_1 &= \dot{x}_4, \quad \ddot{x}_2 = \dot{x}_5, \quad \ddot{x}_3 = \dot{x}_6,
 \end{aligned} \tag{60}$$

y se escriben las ecuaciones en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1,2}{M_1} & \frac{0,5}{M_1} & 0 & -\frac{10}{M_1} & 0 & \frac{8}{M_1} \\ \frac{0,5}{M_2} & -\frac{0,5}{M_2} & 0 & 0 & -\frac{7}{M_2} & \frac{2}{M_2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{M_3} & \frac{8}{M_3} & \frac{2}{M_3} & -\frac{10}{M_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \tag{61}$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$$

Se seleccionan los valores de α y γ de forma aleatoria, y se resuelve el problema 5. Los resultados se muestran en la Tabla 16.

Tabla 16. Resultados al resolver el problema 5 variando a α y γ .

α	γ	ε_r [%]	Tiempo [s]
0,2	0,09	$1,06 \times 10^{-13}$	20.48
0,1	0,08	$1,06 \times 10^{-13}$	19.50
0,8	0,9	$1,06 \times 10^{-13}$	21.78
0,4	0,4	$1,06 \times 10^{-13}$	21.12
0,5	0,7	$1,06 \times 10^{-13}$	21.02

α	γ	ε_r [%]	Tiempo [s]
0,1	0,7	$1,06 \times 10^{-13}$	21.96
0,7	0,3	$1,06 \times 10^{-13}$	20.86
0,1	0,6	$1,06 \times 10^{-13}$	21.41
0,8	0,2	$1,06 \times 10^{-13}$	20.30
0,5	0,3	$1,06 \times 10^{-13}$	20.75

De la Tabla 16 se nota que todos los resultados presentaron el mismo error, por lo tanto se escogen los valores de $\alpha = 0,1$ y $\gamma = 0,08$ pues con estos, el tiempo de cómputo es menor. Los resultados de las simulaciones se presentan en la Tabla 17.

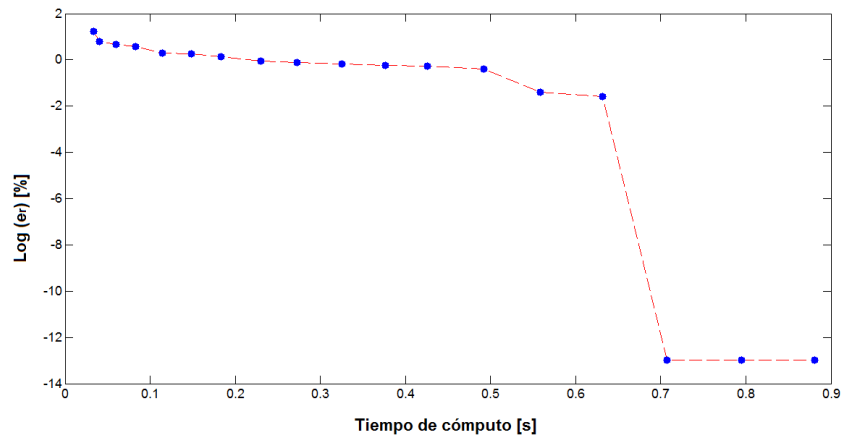
Tabla 17. Resultados al simular el algoritmo Luciérnaga Virtual para resolver el problema 5

N	Iteraciones	M_1 [%]	M_2 [%]	M_3 [%]	Min (ω_{max})	ε_r [%]	Tiempo [s]
10	10	10,0301	10,0301	79,9398	0,252116	21,4487	0,030
25	10	44,8847	44,8847	10,2307	0,221199	6,5557	0,129
25	25	44,9304	44,9304	10,1393	0,215976	4.0394	0,336
50	25	44,9970	44,9970	10,0059	0,207957	0,1767	1,24
50	50	45,00	45,00	10,00	0,207590	$1,06 \times 10^{-13}$	2,59
100	50	45,00	45,00	10,00	0,207590	$1,06 \times 10^{-13}$	9,33
100	100	45,00	45,00	10,00	0,207590	$1,06 \times 10^{-13}$	19,32
200	100	45,00	45,00	10,00	0,207590	$1,06 \times 10^{-13}$	72,62

De la Tabla 17, se observa que con pocas luciérnagas ($N=10$) y 10 iteraciones, el resultado obtenido se encuentra considerablemente distante del esperado, con un error de hasta 21 %. Antes de 3 segundos, el algoritmo encuentra un resultado suficientemente preciso (error de $1,06 \times 10^{-13}$ %). La gráfica de la Figura 33

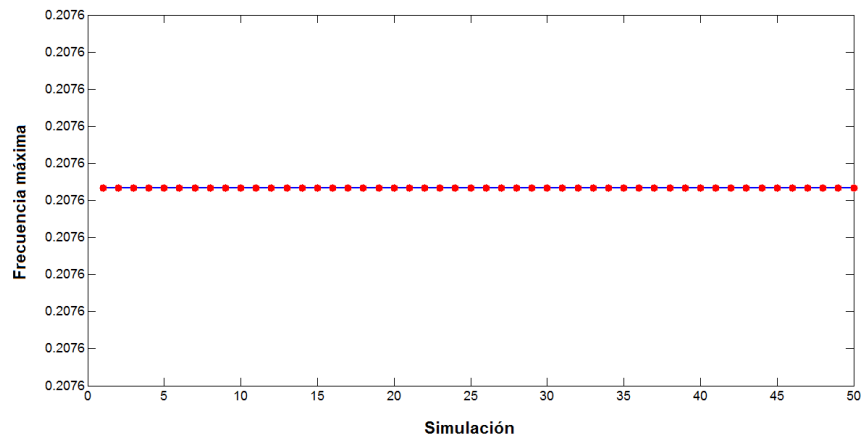
muestra la variación del error en función del tiempo de cómputo, dejando un número fijo de 100 iteraciones para cada simulación.

Figura 33. $\text{Log}(\varepsilon_r)$ en función del tiempo de cómputo al resolver el problema 5.



En la Figura 33, se observa que el error antes de 0,7 segundos se reduce hasta llegar a $10^{-2} \%$, pero luego disminuye súbitamente en menos de 0,1 segundo alcanzando su error mínimo que es de $10^{-13} \%$. Los valores $\alpha = 0,1$ y $\gamma = 0,08$ se mantuvieron fijos por cada simulación, los resultados se muestran en la Figura 34, las simulaciones tuvieron un tiempo máximo de 21 segundos.

Figura 34. Resultados de las simulaciones al resolver el problema 5.

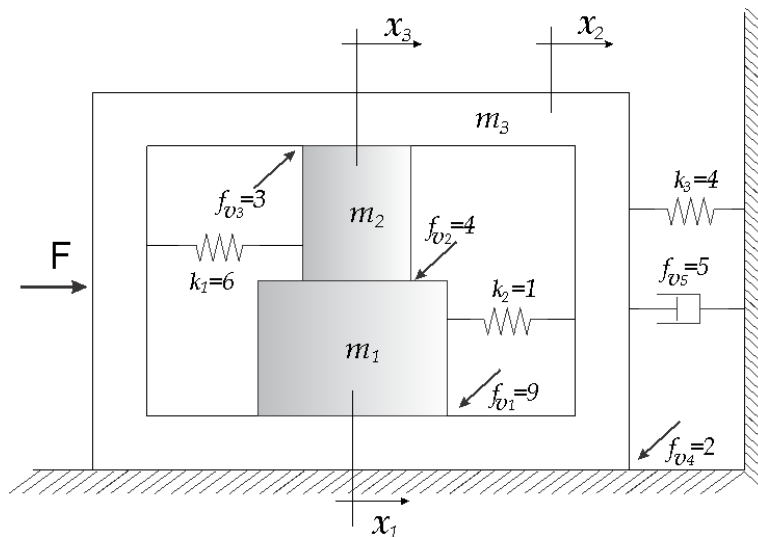


Todos los resultados de las simulaciones presentaron el mismo error que es de $1 \times 10^{-13} \%$, tal y como se muestra en la Figura 34.

3.2.6. Problema 6

Al sistema MRA de la Figura 35 se le aplica una fuerza F de valor constante que luego se retira, causando así que las masas m_1, m_2 y m_3 con desplazamientos x_1, x_2 y x_3 respectivamente, comiencen a oscilar. Además existe la fricción entre cada masa y la superficie de contacto.

Figura 35. Sistema MRA del problema 6.



El problema 6, radica en encontrar los valores de las masas que participan en el sistema para lograr hacer mínima la frecuencia máxima de oscilación.

Planteamiento del problema:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \omega_{\max}(\mathbf{M}) \\
 & \text{sujeto a} \quad g_1(\mathbf{M}) = m_1 + m_2 + m_3 = 100 \\
 & \quad \quad \quad g_2(\mathbf{M}) = m_1 = 2m_2 \\
 & \quad \quad \quad g_3(\mathbf{M}) = 10 \leq m_3 \leq 20 \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{M} = (m_1, m_2, m_3).
 \end{aligned} \tag{62}$$

Las ecuaciones que describen el problema 6, mostrado en la Figura 35 con las condiciones impuestas en (62) son:

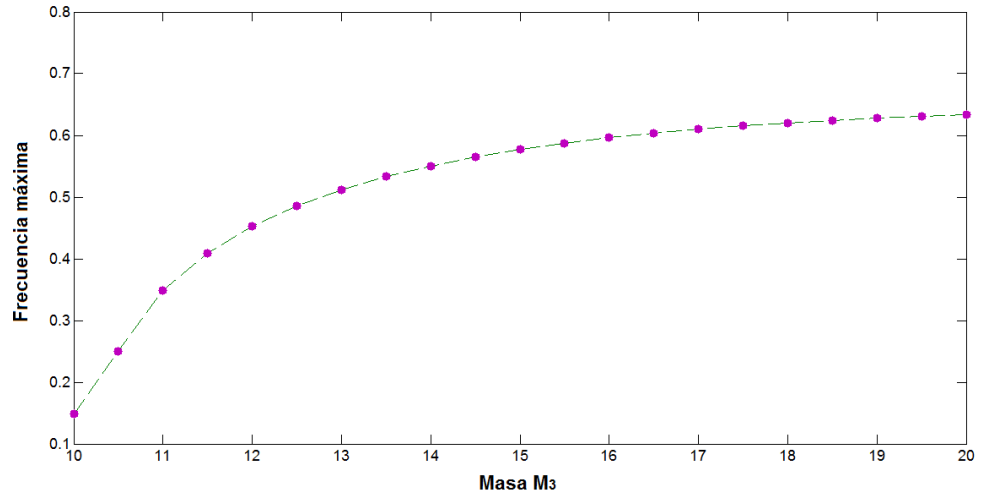
$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= -\frac{1}{m_1}x_1 + \frac{1}{m_1}x_3 - \frac{13}{m_1}\dot{x}_1 + \frac{4}{m_1}\dot{x}_2 + \frac{9}{m_1}\dot{x}_3 \\
 \ddot{x}_2 &= -\frac{6}{m_2}x_2 + \frac{6}{m_2}x_3 + \frac{4}{m_2}\dot{x}_1 - \frac{7}{m_2}\dot{x}_2 + \frac{3}{m_2}\dot{x}_3 \\
 \ddot{x}_3 &= \frac{1}{m_3}x_1 + \frac{6}{m_3}x_2 - \frac{11}{m_3}x_3 + \frac{9}{m_3}\dot{x}_1 + \frac{3}{m_3}\dot{x}_2 - \frac{19}{m_3}\dot{x}_3.
 \end{aligned} \tag{63}$$

a) Solución exacta: Los valores de óptimos de las masas m_1, m_2 y m_3 , que hacen mínima la frecuencia máxima de oscilación se muestran en (64)

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 60, \quad m_2 = 30, m_3 = 10 \text{ y} \\
 \min(\omega_{\max}) &\approx 0.14821042.
 \end{aligned} \tag{64}$$

La Figura 36 muestra el comportamiento de la frecuencia máxima $\omega_{\max}$ del problema 6, al variar el valor de la masa m_3 .

Figura 36. Variación de la frecuencia máxima en función de la masa m_3



b) Solución utilizando el algoritmo de la Luciérnaga Virtual: Haciendo el cambio de variables

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_4, \quad \dot{x}_2 = x_5, \quad \dot{x}_3 = x_6 \\ \ddot{x}_1 &= \dot{x}_4, \quad \ddot{x}_2 = \dot{x}_5, \quad \ddot{x}_3 = \dot{x}_6,\end{aligned}\tag{65}$$

Se puede escribir las ecuaciones de (63) en forma de matrices:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{m_1} & 0 & \frac{1}{m_1} & \frac{-13}{m_1} & \frac{4}{m_1} & \frac{9}{m_1} \\ 0 & \frac{-6}{m_2} & \frac{6}{m_2} & \frac{4}{m_2} & \frac{-7}{m_2} & \frac{3}{m_2} \\ \frac{1}{m_3} & \frac{6}{m_3} & \frac{-11}{m_3} & \frac{9}{m_3} & \frac{3}{m_3} & \frac{-19}{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}\tag{66}$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$$

Se seleccionan los valores de α y γ de forma aleatoria, y se resuelve el problema 6. Los resultados se muestran en la Tabla 18.

Tabla 18. Resultados al resolver el problema 6 variando a α y γ .

α	γ	ε_r [%]	Tiempo [s]
0,6	0,5	$2,99 \times 10^{-13}$	21,74
0,9	0,7	$2,99 \times 10^{-13}$	20,67
0,5	0,4	$2,99 \times 10^{-13}$	19,04
0,02	0,5	$2,99 \times 10^{-13}$	20,74
0,4	0,1	$2,99 \times 10^{-13}$	12,70

α	γ	ε_r [%]	Tiempo [s]
0,8	0,9	$2,99 \times 10^{-13}$	22,52
0,1	0,9	$2,99 \times 10^{-13}$	21,52
0,3	0,1	$2,99 \times 10^{-13}$	13,16
0,01	0,9	$2,99 \times 10^{-13}$	21,31
0,03	0,4	$2,99 \times 10^{-13}$	20,01

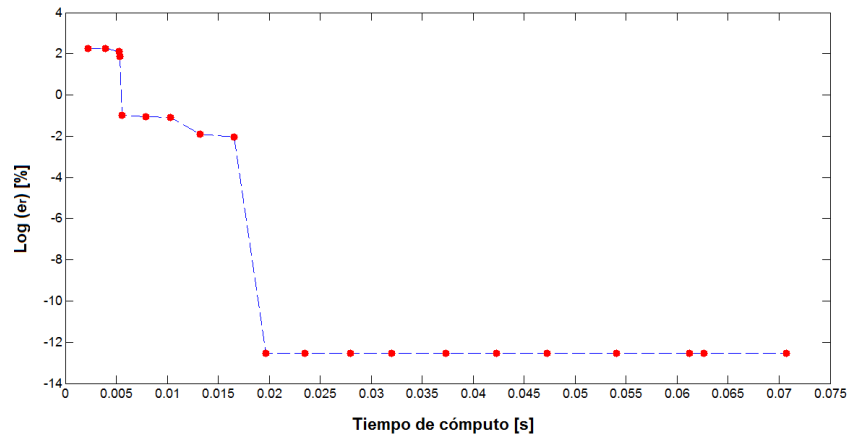
Se escogen los valores $\alpha = 0,4$ y $\gamma = 0,1$, con los cuales se obtiene la solución en el menor tiempo. Los resultados de las simulaciones se presentan en la Tabla 19.

Tabla 19. Resultados al simular el algoritmo de la Luciérnaga Virtual para resolver el problema 6.

N	Iteraciones	M_1 [%]	M_2 [%]	M_3 [%]	Min ($\omega_{\max}$)	ε_r [%]	Tiempo [s]
10	10	60	30	10	0,148210	$2,99 \times 10^{-13}$	0,030
25	10	60	30	10	0,148210	$2,99 \times 10^{-13}$	0,128
25	25	60	30	10	0,148210	$2,99 \times 10^{-13}$	0,302
50	25	60	30	10	0,148210	$2,99 \times 10^{-13}$	0,992
50	50	60	30	10	0,148210	$2,99 \times 10^{-13}$	2,08
100	50	60	30	10	0,148210	$2,99 \times 10^{-13}$	6,68

De la Tabla 19, se observa que el algoritmo responde de manera muy satisfactoria al resolver el problema 6, pues en poco tiempo (0,03 segundos) y con pocos requerimientos (N=10 y 10 iteraciones) se obtiene el error mínimo alcanzado que es de $2,99 \times 10^{-13}$ %. La gráfica de la Figura 37 muestra el porcentaje de error en función del tiempo de cómputo, teniendo como un valor fijo de 10 iteraciones para cada simulación.

Figura 37. $\text{Log}(\varepsilon_r)$ en función del tiempo de cómputo al resolver el problema 6.

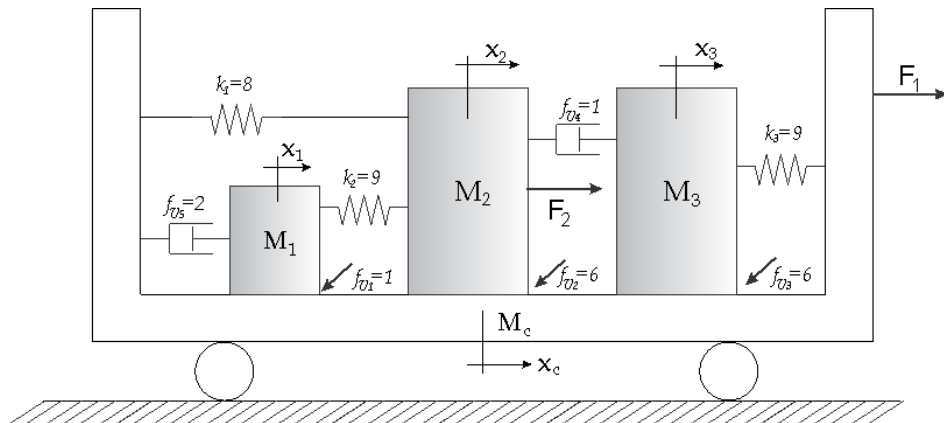


Por la Figura 37 se puede observar que el error tiene dos cambios bruscos, el primero se presenta cuando pasa de 10^2 % a 10^{-1} % en aproximadamente en 5 ms, y el segundo cambio es aún más drástico, pues el error disminuye de 10^{-2} % a 10^{-13} % en un tiempo menor a 5 ms, y manteniéndose constante en ese mínimo porcentaje de error.

3.2.7. Problema 7

El sistema MRA conformado por un carro, tres bloques, tres resortes y dos amortiguadores (ver Figura 38), donde los desplazamiento de las masas M_1, M_2, M_3 y M_c corresponden a x_1, x_2, x_3 y x_c , respectivamente. Además se supone un deslizamiento ideal entre el carro y el suelo (no hay fuerza de fricción).

Figura 38. Sistema MRA del problema 7.



Al carro y al bloque de masa M_2 se le aplican las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ respectivamente, de valor constante que luego son retiradas simultáneamente, causando así que los bloques comiencen a oscilar. El problema 7, radica en encontrar los valores de las masas que participan en el sistema (carro y los tres bloques), para lograr hacer mínima la frecuencia máxima de oscilación.

Planteamiento del problema:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad \omega_{\max}(\mathbf{M}) \\
 & \text{sujeto a} \quad g_1(\mathbf{M}) = M_1 + M_2 + M_3 = 100 \\
 & \quad g_2(\mathbf{M}) = M_2 = M_3 \\
 & \quad g_3(\mathbf{M}) = 10 \leq M_1 \leq 40 \\
 & \quad g_4(\mathbf{M}) = 10 \leq M_c \leq 50 \\
 & \quad \mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3).
 \end{aligned} \tag{67}$$

El modelo matemático que describe el sistema MRA de la Figura 38 se presenta en [14], y las ecuaciones que describen el problema 7, con las condiciones impuestas en (67) son:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 &= -\frac{9}{M_1}x_1 + \frac{9}{M_1}x_2 - \frac{7}{M_1}\dot{x}_1 + \frac{2}{M_1}\dot{x}_c \\
 \ddot{x}_2 &= \frac{9}{M_2}x_1 - \frac{17}{M_2}x_2 + \frac{8}{M_2}x_c - \frac{7}{M_2}\dot{x}_2 + \frac{1}{M_2}\dot{x}_3 \\
 \ddot{x}_3 &= -\frac{9}{M_3}x_3 + \frac{9}{M_3}x_c + \frac{1}{M_3}\dot{x}_2 - \frac{7}{M_3}\dot{x}_3 \\
 \ddot{x}_c &= \frac{8}{M_c}x_2 + \frac{9}{M_c}x_3 - \frac{17}{M_c}x_c + \frac{3}{M_c}\dot{x}_1 + \frac{6}{M_c}\dot{x}_2 + \frac{6}{M_c}\dot{x}_3 - \frac{2}{M_c}\dot{x}_c
 \end{aligned} \tag{68}$$

Solución utilizando el algoritmo de La Luciérnaga Virtual: Haciendo el cambio de variables

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_4, \dot{x}_2 = x_5, \dot{x}_3 = x_6, \dot{x}_c = x_7 \\ \ddot{x}_1 &= \dot{x}_4, \ddot{x}_2 = \dot{x}_5, \ddot{x}_3 = \dot{x}_6, \ddot{x}_c = \dot{x}_7,\end{aligned}\tag{69}$$

Se pueden escribir las ecuaciones (68) en forma de matrices:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9 & 9 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{M_1}{M_1} & \frac{M_1}{M_1} & 0 & 0 & \frac{M_1}{M_1} & 0 & 0 & \frac{M_1}{M_1} \\ 9 & -17 & 0 & 8 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M_2}{M_2} & \frac{M_2}{M_2} & 0 & \frac{M_2}{M_2} & \frac{M_2}{M_2} & \frac{M_2}{M_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 9 & 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & -17 & 3 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & \frac{M_c}{M_c} & \frac{M_c}{M_c} & \frac{M_c}{M_c} & \frac{M_c}{M_c} & \frac{M_c}{M_c} & \frac{M_c}{M_c} & \frac{M_c}{M_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_c \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}\tag{70}$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$$

Se seleccionan los valores de α y γ de forma aleatoria. Los resultados de las simulaciones se presentan en la Tabla 20.

Tabla 20. Resultados al variar los valores de α y γ al resolver el problema 7.

α	γ	$\min(\omega_{\max})$	Tiempo [s]
0,8	0,9	0,869216	26,08
0,9	0,3	0,869253	26,52
0,5	0,1	0,869229	26,10
0,8	0,2	0,869315	26,46
0,3	0,9	0,869211	25,70

α	γ	$\min(\omega_{\max})$	Tiempo [s]
0,6	0,4	0,869282	26,30
0,7	0,04	0,869084	25,46
0,7	0,6	0,869111	26,97
0,4	0,02	0,869084	23,67
0,8	0,7	0,869096	25,95

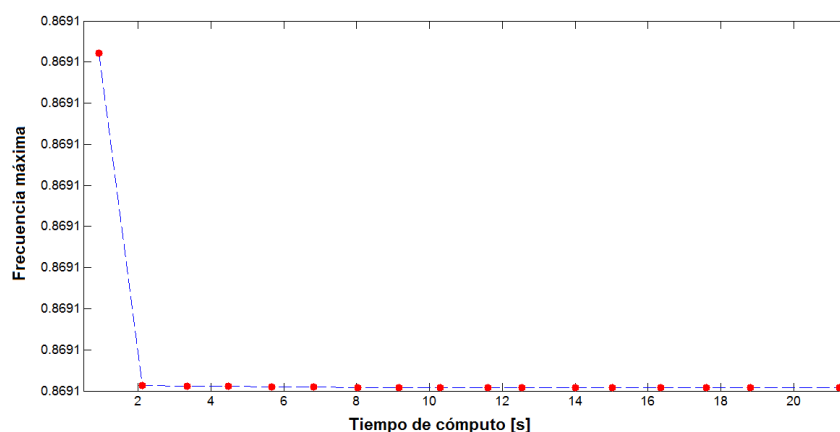
De la Tabla 20 se escogen los valores $\alpha = 0,4$ y $\gamma = 0,02$ porque presentan la menor frecuencia en el menor tiempo, y se resuelve el problema 7. Los resultados de las simulaciones se presentan en Tabla 21.

Tabla 21. Resultados al simular el algoritmo de la Luciérnaga Virtual para resolver el problema 7.

N	Iteraciones	M ₁	M ₂	M ₃	M _c	min($\omega_{\max}$)	Tiempo [s]
10	10	26,5062	36,7469	36,7469	47,6273	0,873390	0,032
25	10	28,3375	35,8313	35,8313	48,8552	0,871233	0,165
25	25	26,9422	36,5289	36,5289	49,7099	0,869614	0,399
50	25	27,8960	36,0520	36,0520	50,0000	0,869117	1,51
50	50	27,4402	36,2799	36,2799	50,0000	0,869084	3,03
100	50	27,4709	36,2646	36,2646	50,0000	0,869084	11,84
100	100	27,4712	36,2644	36,2644	50,0000	0,869084	23,88
200	100	27,4710	36,2645	36,2645	50,0000	0,869084	95,79

De la Tabla 21, se observa que después de 3 segundos de simulación, el problema 7 es resuelto, ya que después de eso, no varían las 6 primeras cifras significativas del resultado obtenido. La gráfica de la Figura 39 muestra la variación del resultado obtenido con respecto al tiempo de cómputo.

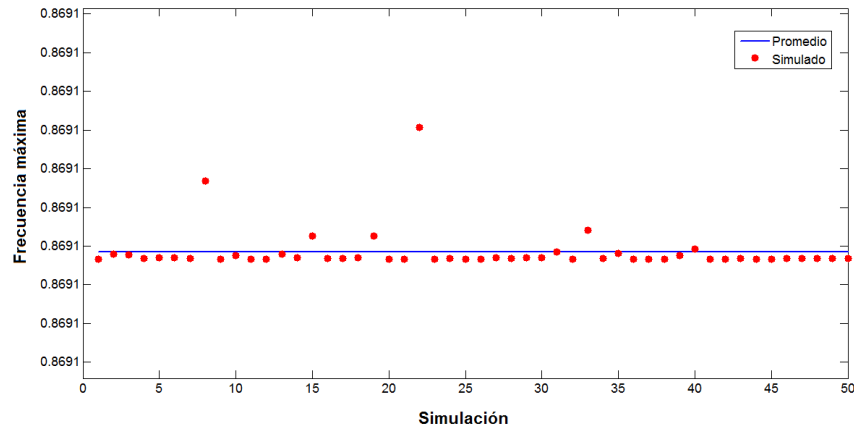
Figura 39. Resultado obtenido en función del tiempo de cómputo para la solución del problema 7.



Se puede notar por la Figura 39, que se alcanza el resultado mínimo a los 2 segundos de simulación. La Figura 40 presenta los resultados obtenidos de las

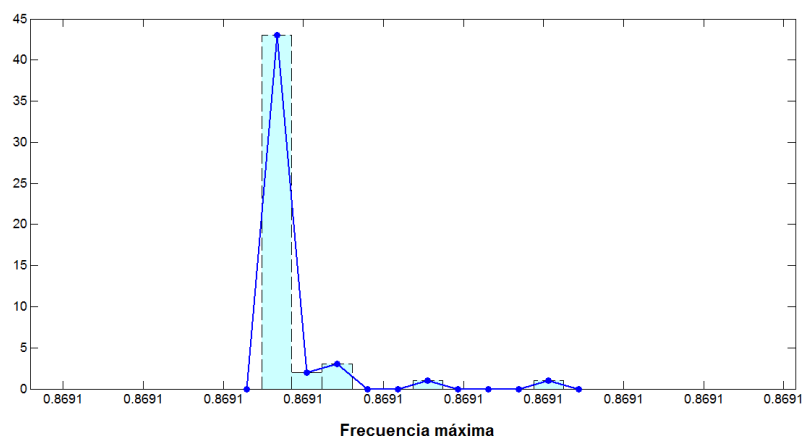
simulaciones, conservando los valores constantes $\alpha = 0,4$ y $\gamma = 0,02$, el tiempo máximo de simulación fue de 25 segundos.

Figura 40. Valor promedio y valor obtenido para la solución del problema 7.



De la Figura 40 se concluye que la mayor parte de las simulaciones, arrojan resultados que están por debajo del valor promedio. El histograma de la Figura 41, describe el comportamiento de la frecuencia máxima, al ejecutar 50 simulaciones, para la solución del problema 7.

Figura 41. Histograma de la distribución de la frecuencia máxima al resolver el problema 7.

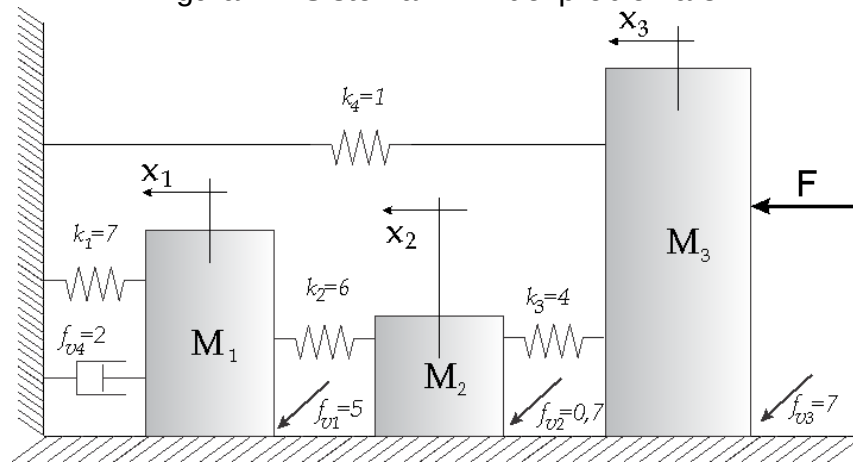


De la Figura 41, se observa que casi el 90 % de los resultados, poseen la frecuencia mínima.

Se reportó la precisión y el tiempo de ejecución del algoritmo de la Luciérnaga Virtual, para resolver problemas con sistemas MRA, usando como referencia el método analítico. Continuando con la metodología de los problemas anteriores, se prosigue a solucionar otra serie de problemas con sistemas MRA únicamente usando el algoritmo mencionado. Cada uno de los sistemas se encuentra inicialmente en reposo, pero son alterados por una fuerza F constante, que es aplicada en un bloque, y luego es retirada, provocando que las masas oscilen. Los problemas consisten en obtener los valores de las masas que logran hacer mínima la frecuencia máxima de oscilación, cumpliendo con algunas restricciones particulares. Cada uno de los siguientes problemas se les muestra la figura del sistema MRA, las condiciones o planteamiento de dicho problema, la matriz de estados A , los resultados al variar los valores de α y γ , y el resultado final de la simulación al resolver el problema en particular.

3.2.8. Problema 8

Figura 42. Sistema MRA del problema 8.



Planteamiento del problema:

$$\min \omega_{\max}(\mathbf{M})$$

$$\text{sujeto a } g_1(\mathbf{M}) = M_1 + M_2 + M_3 = 100$$

$$g_2(\mathbf{M}) = M_3 = 2M_1$$

$$g_3(\mathbf{M}) = 10 \leq M_2 \leq 20$$

$$\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3).$$

Matriz A:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -13 & 6 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ \frac{M_1}{M_1} & \frac{-10}{M_1} & \frac{4}{M_1} & 0 & \frac{0,7}{M_2} & 0 \\ \frac{6}{M_2} & \frac{-10}{M_2} & \frac{4}{M_2} & 0 & \frac{0,7}{M_2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{M_3} & \frac{-5}{M_3} & 0 & 0 & \frac{-7}{M_3} \end{bmatrix}$$

Tabla 22 Variación de α y γ

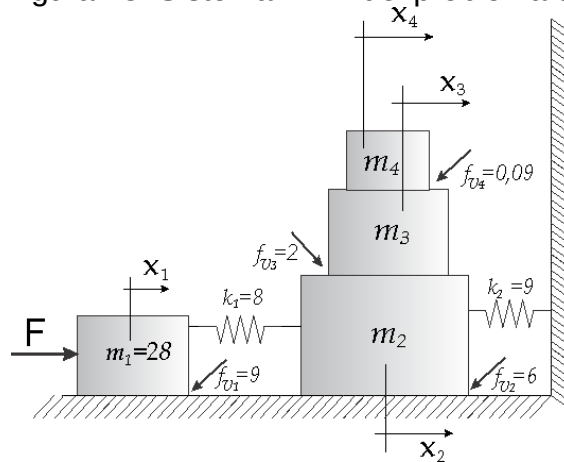
α	γ	$\min(w_{\max})$	Tiempo [s]
0,8	0,5	0,86134238	16,76
0,7	0,4	0,86134238	16,56
0,6	0,2	0,86134238	13,40
0,03	0,6	0,86134238	18,95
0,07	0,2	0,86134238	14,26
0,002	0,03	0,86134238	10,92

La solución encontrada es:

N	Iteraciones	M_1	M_2	M_3	$\min(\omega_{\max})$	Tiempo [s]
150	100	26,6667	20	53,3333	0,8613423842	20,51

3.2.9. Problema 9

Figura 43. Sistema MRA del problema 9.



Planteamiento del problema:

$$\min \omega_{\max}(\mathbf{M})$$

$$\text{sujeto a } g_1(\mathbf{M}) = m_2 + m_3 + m_4 = 100$$

$$g_2(\mathbf{M}) = 30 \leq m_2 \leq 50$$

$$g_3(\mathbf{M}) = 10 \leq m_3 \leq 30$$

$$\mathbf{M} = (m_2, m_3, m_4).$$

Matriz A:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 8 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-8}{m_1} & \frac{8}{m_1} & 0 & 0 & \frac{-9}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -17 & 0 & 0 & 0 & -8 & 2 & 0 \\ \frac{8}{m_2} & \frac{-17}{m_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-8}{m_2} & \frac{2}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{m_3} & \frac{-2,9}{m_3} & \frac{0,9}{m_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{0,9}{m_4} & \frac{-0,9}{m_4} \end{bmatrix}$$

Tabla 23. Variación de α y γ

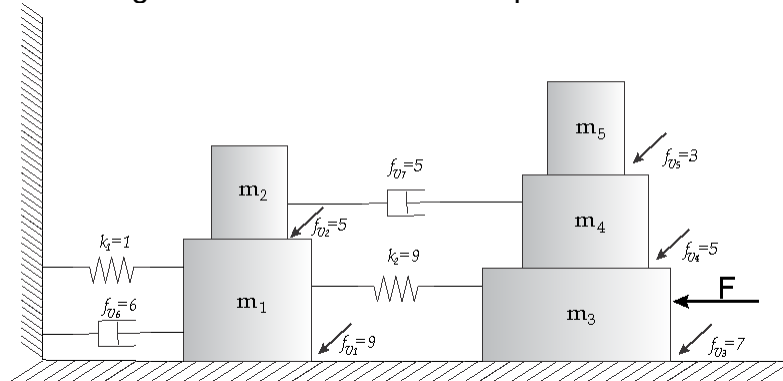
α	γ	$\min(\omega_{\max})$	Tiempo [s]
0,8	0,9	0,70938748	21,93
0,008	0,6	0,70956355	21,77
0,02	0,2	0,70943846	22,55
0,1	0,01	0,70934789	13,42
0,9	0,5	0,70976794	23,49
0,3	0,5	0,70935791	22,21
0,7	0,6	0,70948173	24,19

La solución encontrada es:

N	Iteraciones	m_1	m_2	m_3	$\min(\omega_{\max})$	Tiempo [s]
100	100	50	10	40	0,709347891309802	25,27

3.2.10. Problema 10

Figura 44. Sistema MRA del problema 10.



Planteamiento del problema:

$$\min \omega_{\max}(\mathbf{M})$$

sujeto a $g_1(\mathbf{M}) = m_1 = 2m_2$

$$g_2(\mathbf{M}) = 30 \leq m_1 \leq 60$$

$$g_3(\mathbf{M}) = m_3 + m_4 + m_5 = 100$$

$$g_4(\mathbf{M}) = 10 \leq m_4 \leq 30$$

$$g_5(\mathbf{M}) = 20 \geq m_5 \geq 10,$$

$$\mathbf{M} = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5).$$

Matriz A:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 9 & 0 & 0 & -20 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_1}{m_1} & 0 & \frac{9}{m_1} & 0 & 0 & \frac{-20}{m_1} & \frac{5}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{m_2} & -10 & 0 & \frac{5}{m_2} & 0 \\ 9 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & \frac{5}{m_3} & 0 \\ \frac{m_3}{m_3} & 0 & \frac{-9}{m_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12}{m_3} & \frac{5}{m_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{m_4} & \frac{5}{m_4} & -13 & \frac{3}{m_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{m_5} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{m_5} & \frac{-3}{m_5} \end{bmatrix}$$

Tabla 24. Variación de α y γ

α	γ	$\min(\omega_{\max})$	Tiempo [s]
0,8	0,9	0,49520910	29,79
0,7	0,8	0,49664817	29,14
0,2	0,5	0,49420911	28,37
0,3	0,2	0,49522531	27,23
0,9	0,9	0,49585477	27,10
0,1	0,7	0,49613858	27,76
0,3	0,6	0,49461108	27,37

La solución encontrada es:

N	Iteraciones	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	$\min(\omega_{\max})$	Tiempo [s]
100	100	59,855	29,927	79,772	10,002	10,224	0,493927737078	27,91

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

1. Todos los objetivos propuestos fueron alcanzados.
2. Se demostró que utilizar el algoritmo Luciérnaga Virtual, para resolver problemas de optimización de frecuencias naturales en sistemas MRA, es una alternativa viable, ya que se alcanzan resultados muy precisos (errores inferiores a 0,001 %) en poco tiempo de simulación (menos de 10 segundos).
3. Manteniendo los parámetros de control del algoritmo fijos, los resultados entre simulaciones pueden variar, aunque la diferencia entre ellos no sobrepasa el 1%.
4. La reproducibilidad y repetibilidad de los resultados fueron altas para los ejemplos desarrollados, indicando un buen desempeño del algoritmo de optimización para estos casos.
5. Debido a que la inicialización del algoritmo Luciérnaga Virtual se realiza de forma aleatoria, resulta muy ventajoso para la optimización de problemas donde no se conozcan puntos iniciales, *a priori*, para comenzar el proceso de búsqueda.
6. Mediante la técnica propuesta para la solución de sistemas MRA, el usuario (estudiante, ingeniero, diseñador, etc.) puede concentrarse mejor en el análisis de los sistemas y no en la resolución de las ecuaciones diferenciales.
7. A razón de la flexibilidad del algoritmo, se recomienda la hibridación con otros algoritmos, con la finalidad de conseguir resultados aún más precisos en un menor tiempo.

BIBLIOGRAFÍA

- [1]. XIN-SHE, Yang. Engineering Optimization. En: Engineering Optimization An Introduction with Metaheuristic Applications. 1 ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2010. p 15-26.
- [2]. BENI, G. y WANG, J. Swarm Intelligence in Cellular Robotic System. En: NATO Advanced Workshop on Robots and Biological Systems. Junio, 1999. vol 102. no. 795, p 130-135.
- [3]. XIN-SHE, Yang. Firefly Algorithm. En: Engineering Optimization An Introduction with Metaheuristic Applications. 1 ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2010. p 221-230.
- [4]. BRANHAM, Marc. A. y WENZEL, Jhon W. The Origin of Photic Behavior and the evolution of sexual communication in fireflies. En: Cladistics. Febrero, 2003. vol 19. No 99, p 2-22.
- [5]. PIQUERAS, Victor. Optimización heurística económica aplicada a las redes de transporte del tipo VRPTW. Tesis Doctoral. Valencia (España): Universidad Politécnica de Valencia. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, 2002. 33 p.
- [6]. RODRÍGUEZ, Carlos. Algoritmos heurísticos y metaheurísticos para el problema de localización de regeneradores. Proyecto de fin de carrera. Madrid (España): Universidad Rey Juan Carlos. Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática, 2010. 111 p.
- [7]. TORPEDO, Patricia. Diseño de Redes de Radio mediante la aplicación de Algoritmos Bioinspirados. Proyecto de fin de carrera. Madrid (España):

Universidad Carlos III de Madrid. Escuela Politécnica Superior. Ingeniería Informática, 2010. 177 p.

[8]. REYNOLDS, Carl y TYMANN, Paul Algorithm. En: Schaum's Outline of Principles of Computer Science. 1 ed. New York: McGraw-Hill, 2008. p. 14-29.

[9]. CLEMENTI, Andrea y CRESCENZI, Pilu. On the Complexity of Computing Minimum Energy Consumption Broadcast Subgraphs. En: STACS 2001. Febrero, 2001. Vol 2010. No. p 121-131.

[10]. BONABEAU, Eric. DORIGO, Marco y THERAULAZ, Guy. Social Insect. En: Swarm Intelligence: From Natural to Artificial System. 1 ed. New York: Oxford University Press, 1999. p 1-23.

[11]. HINCHEY, Michael y STERRIT, Roy Swarms and Swarm Intelligence. En: Computer. Abril, 2007. Vol 40. No. p 111-113.

[12]. KAISER, Carolin, KROCKEL, Johannes y BODENFORD, Freimut. Swarm Intelligence for Analyzing Opinions in Online Communities En: SYSTEM SCIENCES. Enero, 2010. Vol 9. No. p 45-58.

[13]. Global Optimization Benchmarks and AMPGO. "Test functions". {En línea}. Disponible en: (http://infinity77.net/global_optimization/test_functions.html#test-functions-index).

[14] GRACIA, C. Luis y PÉREZ, V. Carlos. Aplicaciones de Sistemas Mecánicos. En: Modelado de Sistemas Dinámicos: Aplicaciones. 1 ed. San Vicente (Alicante): Club Universitario, 2005. P 107-113.