

**METODOLOGIAS PARA ESTIMACION DEL VaR DE CREDITO
PARA LAS COOPERATIVAS FINANCIERAS**

**JUAN CARLOS PEREZ MANTILLA
ALVARO LINARES HORMIGA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMATICAS
ESPECIALIZACION EN ESTADISTICA
BUCARAMANGA**

2010

**METODOLOGIAS PARA ESTIMACION DEL VaR DE CREDITO
PARA LAS COOPERATIVAS FINANCIERAS**

**JUAN CARLOS PEREZ MANTILLA
ALVARO LINARES HORMIGA**

**Monografía para optar al título de
Especialista en Estadística**

**Directora
TULIA ESTHER RIVERA FLOREZ**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMATICAS
ESPECIALIZACION EN ESTADISTICA
BUCARAMANGA**

2010

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	11
1. METODOLOGÍA PARA EL CÁLCULO DEL VaR DE CRÉDITO	14
1.1 ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LAS BASES DE DATOS	15
1.2 MÉTODO SIMULACIÓN DE MONTECARLO	18
1.2.1 Estimación del VaR con la simulación Montecarlo	18
1.3 EL MODELO DE IMPAGO DENOMINADO “CAPITAL Y RIESGO” (CyRCE)	19
1.3.1 Definición de Default	20
1.3.2 Matrices de transición	21
1.3.2.1 Metodología al final del horizonte	22
1.3.2.2 Metodología durante el horizonte	23
1.4 ESTIMADORES PARA LA PROBABILIDAD DEL DEFAULT	24
1.5 ESTIMADOR DE LA CONCENTRACIÓN DE LA CARTERA	25
1.6 ESTIMADOR DE LA TASA DE RECUPERACIÓN DE CARTERA CASTIGADA	26
2. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	27
2.1 RESULTADOS MODELO MONTECARLO	27
2.1.1 Cartera modalidad comercial	27
2.1.2 Cartera modalidad consumo	30
2.1.3 Cartera modalidad microcrédito	32
2.2 RESULTADOS MODELO DE CAPITAL Y RIESGO	35
2.2.1 Resultados de la estimación del default	35
2.2.2 Resultados de la estimación de la probabilidad de incumplimiento	36
2.2.3 Resultados de la estimación de la concentración de la cartera	36
2.2.4 Resultados del VaR método CyRCE	37
CONCLUSIONES	40
BIBLIOGRAFÍA	42

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Estadísticos descriptivos de la cartera vigente por modalidades. Se detalla que la cartera con mayor promedio de saldos de colocación es la comercial y la de consumo y la de menor dispersión es la de clasificación Microcrédito	16
Tabla 2. Criterios de interpretación del indicador de concentración de Hirschman – Herfindahl. H(M)	26
Tabla 3. VaR de la cartera comercial versus provisiones constituidas	29
Tabla 4. VaR de la cartera consumo versus provisiones constituidas	32
Tabla 5. VaR de la cartera microcrédito versus provisiones constituidas	35
Tabla 6. Default para cada modalidad de cartera	35
Tabla 7. Probabilidad de default para cada modalidad de cartera	36
Tabla 8. Índice de concentración de la cartera por modalidad	37
Tabla 9. VaR esperado versus provisiones de cada modalidad cartera	37
Tabla 10. VaR modelo CyRCE versus Montecarlo	38
Tabla 11. VaR modelo CyRCE aplicando la tasa de recuperación de castigos versus Montecarlo	38

LISTA DE GRÁFICOS

	pág.
Gráfico 1. Comparación de medias de las provisiones por modalidad de cartera a través de los intervalos de confianza del 95%. Se detalla que las carteras con mayor promedio de provisiones son consumo y comercial	17
Gráfico 2. Ajuste de distribución de la serie histórica de las provisiones de la cartera comercial, en la cual se observa que la que mejor ajusta es la Logarítmica Normal	28
Gráfico 3. VaR para la cartera Comercial. El tipo doble vínculo permite visualizar el intervalo de confianza el cual para esta cartera se encuentra entre el 0,0075 y 0,0332 con un nivel de confianza del 95%	29
Gráfico 4. Ajuste de distribución de la serie histórica de las provisiones de la cartera consumo, en la cual se observa que la que mejor ajusta es la Logarítmica Normal	30
Gráfico 5. VaR para la cartera Consumo. El tipo doble vínculo permite visualizar el intervalo de confianza el cual para esta cartera se encuentra entre el 0,0127 y 0,0290 con un nivel de confianza del 95%	31
Gráfico 6. Ajuste de distribución de la serie histórica de las provisiones de la cartera microcrédito, en la cual se observa que la que mejor ajusta es la Normal	33
Gráfico 7. VaR para la cartera Microcrédito. El tipo doble vínculo permite visualizar el intervalo de confianza el cual para esta cartera se encuentra entre el 0,0126 y 0,0607 con un nivel de confianza del 95%	34

RESUMEN

TITULO: METODOLOGIAS PARA ESTIMACION DEL VaR DE CREDITO PARA LAS COOPERATIVAS FINANCIERAS*

AUTORES: PEREZ MANTILLA, Juan Carlos
LINARES HORMIGA, Álvaro**

PALABRAS CLAVES: Default, Montecarlo, CyRCE, VaR, Matrices transición.

DESCRIPCIÓN:

Este trabajo describe la importancia de establecer herramientas de permitan la medición del riesgo de crédito y se detallan dos métodos prácticos que a criterio de los autores se pueden convertir en los de mayor utilización para la estimación del Valor en Riesgo de la cartera, para el segmento cooperativo financiero. El estudio detalla la estimación del VaR de crédito a través de un modelo tradicional como lo es la simulación Montecarlo y un método moderno creado especialmente para las economías emergentes denominado Capital y Riesgo (CyRCE).

Lo valioso de este documento es que se describe en forma sencilla los conceptos de riesgo, valor en riesgo, default, probabilidad de incumplimiento y concentración de la cartera, así como su respectivo cálculo, de tal forma que al final se cuenta con los componentes necesarios y el conocimiento integral para la estimación del valor en riesgo por cualquiera de los dos métodos definidos. Igualmente el documento cuenta con criterios claros que buscan o permiten practicidad en el momento de analizar los resultados asegurando su adecuada interpretación.

Las conclusiones del trabajo se basan en la interpretación de los resultados aplicados a una base de datos de una entidad cooperativa financiera, que está en búsqueda de ser regulada por la superintendencia financiera, sobre esta particular se determina que dado la inclusión de componentes de riesgo en el método CyRCE muy semejantes a los que maneja la Super financiera para la estimación de las provisiones de cartera, resulta de forma conveniente estimar el VaR a través de este método. Al final con los resultados arrojados se concluye que la organización no presenta riesgo en su cartera dado que no se ha superado el valor en riesgo esperado por el deterioro de su cartera.

* Monografía.

** Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas. Especialización en Estadística. Directora: Tulia Esther Rivera Florez.

ABSTRAC

TITLE: METODOLOGIAS PARA ESTIMACION DEL VaR DE CREDITO PARA LAS COOPERATIVAS FINANCIERAS*

AUTHORS: PEREZ MANTILLA, Juan Carlos
LINARES HORMIGA, Álvaro**

KEY WORDS: Default, Montecarlo, CyRCE, VaR, Transition matrix.

DESCRIPTION:

This article describes the importance of having tools that allow the measurement of credit risk and two practical methods that could be according to the author the most used to estimate the value at risk in the financial cooperative sector. This document estimate the value at risk using a traditional method like Montecarlo simulation and the model capital and credit risk for emerging nations (CyRCE).

The most valuable of this paper is that describes in a simple form risk concepts as Value at Risk, default, Probability of Default, Portfolio Concentration and their respective methods of calculation. The information described above is necessary to estimate the value at risk by the two methods outlined in this document. This article contains clear parameters to analyze results ensuring an adequate interpretation.

Conclusions are based in results interpretation using a database of a financial cooperative that is in search of being regulated by Colombia's Superintendencia Financiera. Taking account that the CyRCE method uses similar risk components as the ones used by Superintendencia Financiera to estimate portfolio's expected losses this (CyRCE) must be the best model to estimate the Var. Based in the final results the group concluded that the cooperative does not present portfolio risk because it has not exceeded his value at risk.

* Monograph.

** Faculty of Science, School of Mathematics. Specialization in Statistics. Director: Tulia Esther Rivera Florez.

INTRODUCCIÓN

Se define el riesgo de crédito como la probabilidad que al vencimiento de un contrato de crédito, una entidad o individuo no cumpla en parte o en su totalidad con la obligación de cancelar la deuda o los rendimientos. Es decir las entidades cooperativas y financieras presentan incertidumbre sobre el comportamiento de su cartera, dado que múltiples variables económicas influyen para que sus clientes incumplan con sus obligaciones, lo que es conocido como default¹, y se traduce en la posibilidad de una disminución del valor patrimonial de la entidad operadora y, por lo tanto de una posible pérdida. Que suceda esta situación, se considera como el mayor riesgo para la estabilidad y continuidad de las entidades financieras en caso de que ocurran eventos adversos para ello. De hecho en el estudio realizado por Ahumada y Budnevich (2001), se toma como medida de fragilidad e identificación de problemas bancarios, el indicador de morosidad de la cartera.

Las cooperativas financieras y las entidades bancarias, lo que hacen es constituir sobre esta cartera que se va deteriorando e incluso sobre la que se encuentra al día en sus pagos, las denominadas “provisiones de cartera”, y lo que hacen es paulatinamente ir afectando sus estados financieros en determinados valores que con llevan a cubrir el 100% de los saldos de la cartera deteriorada de tal forma que no se afecta el estado de Pérdidas y Ganancias de la entidad de un solo momento evitando que ello las pueda desequilibrar financieramente.

En Colombia existe dos entes reguladores que supervisan las cooperativas, estos pueden ser la Superintendencia de Economía Solidaria y la Superintendencia

¹ Default: forma de referirse al incumplimiento del pago de un crédito y se define como el número de días de mora, por segmento o tipo de cartera a partir del cual es difícil que se recupere un crédito.

Financiera de Colombia, dependiendo de las características que tengan las entidades cooperativas son vigiladas por el ente respectivo, lo importante es aclarar que cada ente regulador establece una forma diferente de calcular las provisiones sobre la cartera.

La Superintendencia de Economía Solidaria establece el cálculo de provisiones por porcentajes de la cartera de acuerdo a su clasificación, a la altura de mora, al tipo de garantía y una provisión general máxima sobre el total de la cartera, mientras que la Superintendencia Financiera que es el supervisor de las entidades bancarias involucra en su cálculo técnicas estadísticas para lo cual estableció los denominados modelos de referencia. No obstante las entidades vigiladas por esta última pueden establecer sus propios modelos de cálculo de provisiones siempre y cuando este organismo los apruebe. Es aquí cuando aparecen los denominados cálculos de las pérdidas esperadas que no son más que el cálculo de las hoy denominadas provisiones pero con modelos propios de cada entidad.

Se define como las pérdidas esperadas al pronóstico del nivel de pérdidas promedio que las entidades cooperativas o bancarias razonablemente espera que sucedan, cualquier pérdida por encima de este pronóstico promedio se denomina pérdidas inesperadas, estas pueden ocurrir muy esporádicamente pero pueden ser tan profundas que exigen un capital económico que pueda cubrirlas.

A este respecto conviene destacar la normativa propuesta por el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (2004), en la que se incentiva la mejora de los métodos de cuantificación del riesgo de crédito y la mejora en su gestión.

Por tanto, siendo el riesgo de crédito el más importante de los riesgos a los que se encuentran expuestas las entidades financieras, resulta racional la relevancia que han adquirido los temas relacionados con dicho riesgo de crédito, tanto a nivel

interno en el seno de las propias entidades, como a nivel externo en los organismos reguladores encargados de su supervisión.

Los resonantes desastres financieros ocurridos a comienzos de la década de los años noventa como: Orange Country (Estados Unidos), Daiwa (Japón), Metallgesellschaft (Alemania), Barings (Reino Unido), entre muchos otros produjeron el desarrollo de la técnica conocida como VaR, es decir "Value at Risk".

El objetivo de este trabajo es incorporar la metodología del VaR para medir el riesgo de crédito de las carteras de préstamos de las cooperativas financieras y de ahorro y crédito, como una herramienta que permita medir este riesgo.

1. METODOLOGÍA PARA EL CALCULO DEL VaR DE CREDITO

Definición de Valor en Riesgo (VaR): para comprender el VaR, es necesario definir que es riesgo, Steven Allen (2003) lo define como “la variabilidad de los resultados diferentes a los esperados”, ello nos lleva a concluir que un activo es riesgoso cuando genera resultados diferentes a los esperados y es que aquí cuando toma la relevancia el VaR cuya finalidad es medir cuanto puede perder una cartera en un periodo determinado con un nivel de confianza dado.

Se define el VaR según Menichini (2006) y Jorion (2003) como la máxima pérdida esperada de una cartera en un periodo de tiempo y con un nivel de confianza dado, en condiciones normales del mercado.

Tomando en cuenta lo anteriormente definido de Riesgo y VaR, es clara señal de alerta de Riesgo cuando las pérdidas de una cartera (provisiones constituidas de cartera) se acercan a su VaR, máxime porque este es calculado bajo condiciones normales del mercado.

El valor en riesgo se interpreta como sigue:

- Valor en riesgo > Provisiones constituidas de cartera²: la entidad puede atender sus pérdidas de cartera con las provisiones constituidas.
- Provisiones Constituidas de cartera > Valor en riesgo: en caso de materializarse pérdidas de cartera por valor igual o superior a las provisiones, la entidad deberá atender la diferencia que excede el valor en riesgo con capital económico.

² Provisiones constituidas de Cartera: reserva que realizan los intermediarios financieros sobre su cartera vencida con el fin de protegerse ante posibles incumplimientos en el pago.

Para el desarrollo de este trabajo se prepararon las siguientes bases de datos:

a. Información histórica de las provisiones y de la cartera de créditos en las clasificaciones³ consumo, microcrédito y comercial, en un horizonte histórico desde enero del 2006 a Julio del 2010, de una cooperativa financiera vigilada por la Superintendencia de Economía Solidaria, ubicada en la ciudad de Bucaramanga.

b. La cartera vigente de dicha entidad con corte a Julio del 2010 y por las clasificaciones antes definidas.

1.1 ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LAS BASES DE DATOS

Este permitirá el conocimiento de las principales características de cada modalidad de crédito y así apoyar la interpretación de los resultados una vez se apliquen las técnicas especializadas para el cálculo del VaR. Se utilizaron técnicas como deciles y gráficos de cajas.

Dado que las bases de datos están segmentadas por modalidades de crédito inicialmente es propio definir cada tipo de cartera:

Se destacan con el tema de estudio las siguientes apreciaciones:

En la tabla 1, se observa que la cartera de microcrédito, es la modalidad con el promedio por saldo de crédito más pequeño \$ 2 millones, y es una de las carteras con menor dispersión en los saldos, dado que sólo presenta una desviación estándar de \$ 2.000.000, éste resultado es acorde con el perfil del cliente que se maneja por esta modalidad, ya que más del 60% de ellos son comerciantes

³ La cartera de crédito se clasifica en: Consumo: créditos otorgados para la financiación de bienes y servicios para uso personal. Microcrédito Créditos otorgados el desarrollo de actividades productivas, para solicitantes con activos menores a 500 smmlv. Comercial: Créditos otorgados el desarrollo de actividades productivas, para solicitantes con activos mayores o iguales a 500 smmlv

informales y las políticas de otorgamiento se ajustan a este segmento que es de mayor riesgo.

Tabla 1. Estadísticos descriptivos de la cartera vigente por modalidades. Se detalla que la cartera con mayor promedio de saldos de colocación es la comercial y la de consumo y la de menor dispersión es la de clasificación Microcrédito

Modalidad	Media	Desv. estándar	Percentiles				Nro. Créditos
			25%	50%	75%	95%	
Consumo	6	7	1,3	3,02	7,04	20	45.447
Microcrédito	2	2	0,92	1,8	3,08	7	27.526
Comercial	23	43	6,59	13,73	24,99	69	6.302

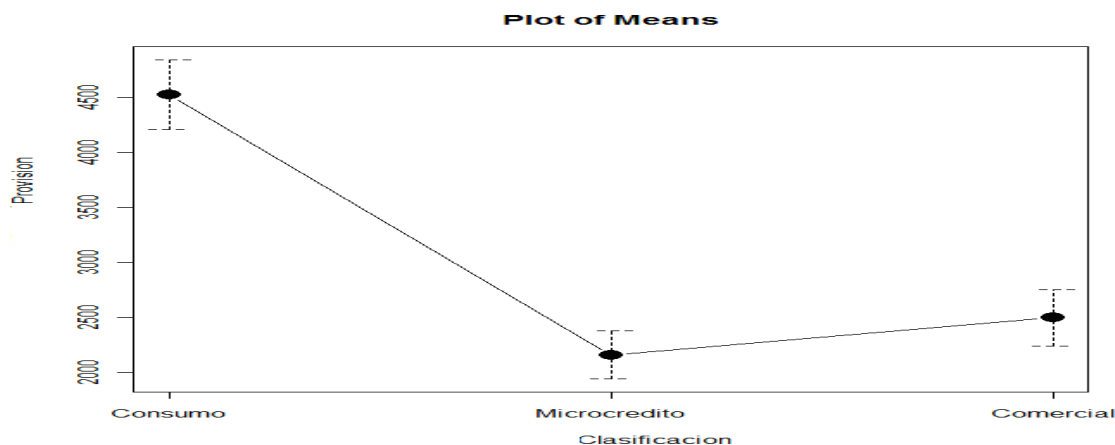
También se observa que la cartera que presenta el mayor saldo promedio por crédito es la cartera comercial con \$23 millones, siendo también esta la que presenta mayor dispersión en los montos otorgados, al registrar una desviación estándar de \$ 43 millones, lo cual está altamente relacionado con el perfil del solicitante de esta línea, comerciantes con negocios formales y estables y políticas de crédito más flexibles, permitiendo otorgar cuantías más altas dado que es un segmento de menor riesgo.

Finalmente la cartera de consumo registra un saldo promedio de 6 millones de pesos, con una dispersión en los montos otorgados de 7 millones, resultados coherentes para el perfil de empleados y pensionados que es el segmento que más se maneja en esta modalidad y cuya destinación económica en un 90 % es para satisfacer la compra de bienes y servicios personales.

En la distribución de los saldos de cartera por percentiles, podemos concluir que no se presenta concentración de la cartera, esto se concluye al observar que en la cartera de consumo, solo el 5% del total de los créditos presentan saldos superiores a \$ 20 millones, en la cartera microcrédito solo el 5% del total de los créditos registran saldos superiores \$7 millones y en la cartera comercial solo el 5% del total de créditos tienen saldos mayores a \$ 69 millones, lo que nos lleva a establecer que la entidad tiene unas políticas de límites muy bien definidas para el otorgamiento.

En el grafico 1, se detalla el comportamiento de las provisiones de cartera por modalidad de crédito, se observa que la modalidad con mayor promedio de provisiones es la cartera consumo \$4.526 millones, lo cual es lógico dado que esta constituye el 53 % de la cartera total de la entidad, mientras que la cartera de modalidad microcrédito maneja el promedio más bajo de las tres modalidades \$2.159 millones, ello porque representa sólo el 14% del total de la cartera y la cartera comercial maneja el 33% de la cartera total por lo tanto su provisión promedio es de \$2.498 millones.

Gráfico 1. Comparación de medias de las provisiones por modalidad de cartera a través de los intervalos de confianza del 95%. Se detalla que las carteras con mayor promedio de provisiones son consumo y comercial



Fuente: Gráfico elaborado en el Software R.

1.2 MÉTODO SIMULACIÓN DE MONTECARLO

Los orígenes de esta técnica están ligados al trabajo desarrollado por Stan Ulam y John Von Neumann a finales de los 40 en el laboratorio de Los Alamos, cuando investigaban el movimiento aleatorio de los neutrones. En años posteriores, la simulación de Montecarlo se ha venido aplicando a una infinidad de ámbitos como alternativa a los modelos matemáticos exactos o incluso como único medio de estimar soluciones para problemas complejos. Su nombre de Montecarlo proviene de la famosa ciudad de Mónaco, donde abundan los casinos de juego y donde el azar, la probabilidad y el comportamiento aleatorio conforman todo un estilo de vida.

La simulación de Montecarlo es un método no determinístico o estadístico numérico usado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud, esta técnica combina conceptos estadísticos (muestreo aleatorio) con la capacidad que tienen las computadoras para generar números aleatorios para determinar el comportamiento futuro de una variable aleatoria.

Su cálculo implica el desarrollo de un modelo que muestre el comportamiento futuro de una variable, a través de un gran número de pruebas o simulaciones generadas de una distribución de probabilidad dada, y calculando los intervalos de confianza. Con el uso de distribuciones de probabilidad, las variables pueden asumir diferentes probabilidades de que se produzca un cierto resultado mucho más realista y que permita tratar la incertidumbre asociada a éstas.

1.2.1 Estimación del VaR con la simulación Montecarlo

- a. Con el histórico mensual de las provisiones de cartera por modalidad se debe buscar cual es la distribución de las provisiones que se ajusta mejor a cada una de las series de datos.

- b. Se calculan los inputs o valores de entrada para generar la simulación, estos varían según el tipo de distribución determinada.
- c. Se definen las características de la simulación: número mínimo de iteraciones: 100.000 y el nivel de confianza (usualmente del 95% ó 99 %).
- d. Se corre la simulación: con la ayuda de un programa estadístico que simule.

Para la aplicación de este modelo se utilizó una versión de prueba del software RISK SIMULATOR, quien permite determinar el tipo de distribución a aplicar, genera los inputs de entrada y corre la respectiva simulación.

1.3 EL MODELO DE IMPAGO DENOMINADO “CAPITAL Y RIESGO” (CyRCE)

Fue desarrollado por el Ingeniero Javier Márquez Diez Canedo (2002), Gerente de Riesgos del Banco de México, apropiado para mercados emergentes, bajo los siguientes supuestos:

- Este modelo sólo permite considerar carteras de crédito en donde la probabilidad de incumplimiento es la misma para todos los créditos. (Por ello se establece un promedio del impago).
- Nada se recupera de los créditos que caen en impago.

El modelo plantea la siguiente ecuación:

$$VaR_{\alpha} = \left(P + Z_{\alpha} \sqrt{P(1 - P)H(M)} \right) V \quad (1)$$

Donde:

V = Total de la cartera

P = Probabilidad de incumpliendo promedio de la cartera.

$H(M)$ = Índice de concentración de la cartera.

Z_{α} = Valor crítico que asegura el nivel de confianza del intervalo.

En términos generales se requieren de tres componentes para el desarrollo de este modelo: el default, la probabilidad de default y el índice de concentración de la cartera.

1.3.1 Definición de Default. Hay un amplio espectro de posibles definiciones de default que pueden ser clasificadas como subjetivas y Objetivas. Una definición objetiva se basa en características observables que no están bajo el control de la entidad como lo puede ser por ejemplo, un número mínimo de días de mora o una mínima cantidad de saldo vencido. Un criterio subjetivo está basado en calificaciones o apreciaciones de los administradores de riesgos como por ejemplo, empezar un proceso jurídico o estados financieros desfavorables.

La definición de default en Basilea⁴ está basada en el cumplimiento de alguna de las dos condiciones (una subjetiva y otra objetiva) en donde se afirma que el default con respecto a un deudor en concreto ocurre cuando acontece al menos una de las siguientes circunstancias: la entidad considera probable que el deudor no abone la totalidad de sus obligaciones crediticias (condición subjetiva) o el deudor se encuentra en situación de mora de más de 90 días (condición objetiva). La definición de default en la Superintendencia Financiera de Colombia está basada en condiciones subjetivas y objetivas para cada tipo de cartera. Las

⁴ Basilea: es la organización mundial que reúne a las autoridades de supervisión bancaria y cuya función es la de fortalecer la solidez del sistema financiero.

condiciones subjetivas del default son las mencionadas en la Circular Externa de la Superintendencia Financiera de Colombia (1995) y las condiciones objetivas se derivan mediante la metodología de matrices de transición como se explica a continuación.

1.3.2 Matrices de transición. Una matriz de transición es un arreglo de las probabilidades de transición de un proceso estocástico Markoviano. La técnica permite estimar la probabilidad de pasar de un estado (i) en cierto periodo de tiempo t, a un estado (j) en el período (t+1). La técnica de estimación más simple y popular es el método de cohorte basado en tiempo discreto la cual es ampliamente empleada por agencias calificadoras y referenciada en la literatura Cantor & Hamilton (2007), Jafry y Schuermann (2004) y Schechtman (2004).

Este método consiste en datos N_i créditos en el estado i para el periodo t y sea N_{ij} las operaciones que en el horizonte T terminan en el estado j. Entonces, la probabilidad de transición del estado i al estado j es estimada.

$$\hat{p}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i} \quad (2)$$

Bajo el supuesto de que el proceso de transición es homogéneo en el tiempo, se puede usar el estimador multinomial, en el cual N_i y N_{ij} son observados sobre el curso de varias muestras con periodos de duración T. En este caso, sumando sobre $t=1, 2, \dots, n$, la estimación de la probabilidad de transición del estado i al estado j bajo el estimador multinomial es:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum N_{ij}}{\sum N_i} \quad (3)$$

Para aplicar la metodología de estimación de matrices de transición por el método de cohorte, para modelos de determinación del default y probabilidad de default,

(los cuales son inputs para la estimación de las pérdidas esperadas) se consideró horizontes de tiempo de $T= 12$ meses, ya que es el horizonte estándar en modelos de riesgo para estos fines y está enmarcado bajo la circular básica contable de la superfinanciera y el comité de Basilea.

Existen dos métodos para evaluar la presencia del default, ya sea por la calificación o días de mora que presente cada crédito al final del horizonte ($T=12$ meses) o por el máximo deterioro en días de mora o por la máxima calificación que se observa de cada crédito durante el horizonte ($T=12$ meses); a continuación se detallan las metodologías respectivas para su cálculo.

1.3.2.1 Metodología al final del horizonte. Dado N_i créditos en el estado i para el periodo t , se considera como N_{ij} las operaciones que en el horizonte $T=12$ terminan en el estado j .

1. Segmentando por línea, modalidad, región, agencia, etc.
2. Identificar los N_i créditos con calificación i (altura de mora o riesgo $i = A, B, C, D, E$, o por rangos de mora $i = 0-30, 31-60, 61-90, 91-120, 121-150, 151-180, >180$) en un mes cualquiera t con una ventana de observación de $T=12$ meses.
3. Sea N_{ij} las operaciones que iniciando en calificación i , al cabo de los 12 meses terminan en calificación j (altura de mora o riesgo $j = A, B, C, D, E, \text{Castigos y Cancelados}$ o por rangos de mora $j = 0-30, 31-60, 61-90, 91-120, 121-150, 151-180, >180, \text{reestructurados, Castigos y Cancelados}$).
4. Entonces, la probabilidad de transición para un período T es estimada por fórmula (2)
5. Se conforma la matriz de transición.

6. Si se desea la matriz por saldos, en la formula (2) se modifica el número de operaciones N_i por el saldo de capital en calificación i , (S_i) y se identifica el saldo inicial de las operaciones que migraron a la calificación j (S_{ij}) tal que:

$$\hat{s}_{ij} = \frac{S_{ij}}{S_i}, \text{ donde } \sum_j S_{ij} = S_i \text{ para todo } j. \quad (4)$$

7. Finalmente, se identifica la edad de mora que permite definir el default de manera objetiva, cuando la probabilidad de deterioro sea significativa (mayor al 50%, esto es sumando los deterioros de las calificaciones o de los rangos de alturas de mora determinadas al final de la matriz, desde la calificación o rango siguiente al que se está evaluando).

1.3.2.2 Metodología durante el horizonte. Dado N_i créditos en el estado i para el periodo t , se considera como N_{ij} las operaciones que presentaron en algún momento del horizonte $T=12$ un máximo deterioro j

1. Segmentando por línea, modalidad, región, agencia, etc.
2. Identificar los N_i créditos con calificación i (altura de mora o riesgo $i = A, B, C, D, E$, o por rangos de mora $i = 0-30, 31-60, 61-90, 91-120, 121-150, 151-180, >180$) en un mes cualquiera t con una ventana de observación de $T=12$ meses.
3. Sea N_{ij} las operaciones que iniciando en calificación i , presentaron en algún momento del horizonte $T=12$ un máximo deterioro j (altura de mora o riesgo $j = A, B, C, D, E, \text{Castigos y Cancelados}$ o por rangos de mora $j = 0-30, 31-60, 61-90, 91-120, 121-150, 151-180, >180 \text{Castigos y Cancelados}$).
4. Entonces, la probabilidad de transición para un período T es estimada por la formula (2).

5. Se conforma la matriz de transición.

6. Si se desea la matriz por saldos, en la formula (2) se modifica el número de operaciones N_i por el saldo de capital en calificación i (S_i) y se identifica el saldo inicial de las operaciones que migraron a la calificación j (S_{ij}) como se expresa en la formula (4).

7. Finalmente, se identifica la edad de mora que permite definir el default de manera objetiva, cuando la probabilidad de deterioro sea significativa (mayor al 50%, esto es sumando los deterioros de las calificaciones o de los rangos de alturas de mora determinadas al final de la matriz, desde la calificación o rango siguiente al que se está evaluando).

1.4 ESTIMADORES PARA LA PROBABILIDAD DEL DEFAULT

Una vez definido el default, se debe aplicar una metodología para estimar el segundo componente que es la probabilidad que una operación de crédito llegue al default durante un horizonte de un año. A continuación se presenta la metodología seguida para tal fin, documentada por el comité de Basilea (2005):

La frecuencia de default (DF) para una cartera es definida como la tasa de default observada sobre un horizonte de 1 año:

$$DF_t = \frac{D_t}{N_t} \quad (5)$$

Donde D_t es el número de defaults observados sobre el año t y N_t es el número de obligaciones (no en default) en el comienzo del año t .

La frecuencia de default de largo plazo (LRDF) para una cartera es el promedio simple de las tasas de default anuales observadas sobre un número de años T .

$$LRDF = \frac{1}{T} \sum DF_t \quad (6)$$

La frecuencia de default a largo plazo ponderada es una estimación basada en la teoría multinomial. Bajo el supuesto de que el proceso de transición es homogéneo en el tiempo, se puede usar el estimador multinomial, sobre el curso de varias muestras con horizontes de un año. Sumando sobre $t=1, 2, \dots, T$ meses o años, la estimación ponderada de la PD basada en el LRDF está dada por:

$$LRDF_{(w)} = \frac{\sum D_t}{\sum N_t} \quad (7)$$

W=Numero de muestras

1.5 ESTIMADOR DE LA CONCENTRACIÓN DE LA CARTERA

La concentración en la distribución de montos o granularidad se da cuando una gran cantidad del monto total de la cartera esta agrupada en pocos créditos. A manera de ejemplo ilustramos dos escenarios:

Escenario 1: una colocación de 100 créditos por un total de \$5.000.000, uno fue otorgado por un monto de \$4.000.000 y los restantes 99 por valores de \$10.101.

Escenario 2: una colocación de 100 créditos por un total de \$5.000.000, pero todos fueron otorgados por valor de \$50.000.

Al analizar en el escenario 1 se corre mayor riesgo dado que se puede perder el 80 % de la cartera, solo con deteriorarse o presentar incumplimiento 1 solo crédito que es el crédito otorgado por \$4.000.0000, mientras que en el segundo escenario se necesita el incumplimiento de por lo menos ochenta de los cien créditos para llegar al deterioro presentado en el escenario 1.

La granulidad de la cartera o concentración H (M) se mide a través del índice Hirschman – Herfindahl, Shy (1995), Tirole (1995), y se expresa como:

$$H(M) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{M_i}{\sum_{i=1}^n M_i} \right]^2 \quad (8)$$

Donde:

$\sum_{i=1}^n M_i$ = Monto total de la cartera.

M_i = Saldo de cada crédito.

La interpretación aceptada habitualmente de los valores de H (M) es la siguiente:

Tabla 2. Criterios de interpretación del indicador de concentración de Hirschman – Herfindahl. H(M)

Indicador	Descripción
$H(M) < 0.10$	Indica desconcentración de la cartera
$0.10 \leq H(M) \leq 0.18$	Indica desconcentración moderada
$H(M) > 0.18$	Indica alta concentración de la cartera

1.6 ESTIMADOR DE LA TASA DE RECUPERACIÓN DE CARTERA CASTIGADA

Se incluye este estimador ya que se tomara en cuenta en la interpretación de los resultados y hace referencia al índice de la cartera que es castigada⁵ y recuperada.

Indicador de recuperación: (sumatoria de la recuperaciones del capital de la cartera castigada)/ sumatoria del capital castigado.

⁵ Cartera castigada: cartera que contablemente se reconoce como pérdida.

2. ANALISIS DE LOS RESULTADOS

2.1 RESULTADOS MODELO MONTECARLO

Utilizando el método de Montecarlo se obtuvieron los siguientes resultados del Valor en Riesgo esperado por Modalidad de Cartera.

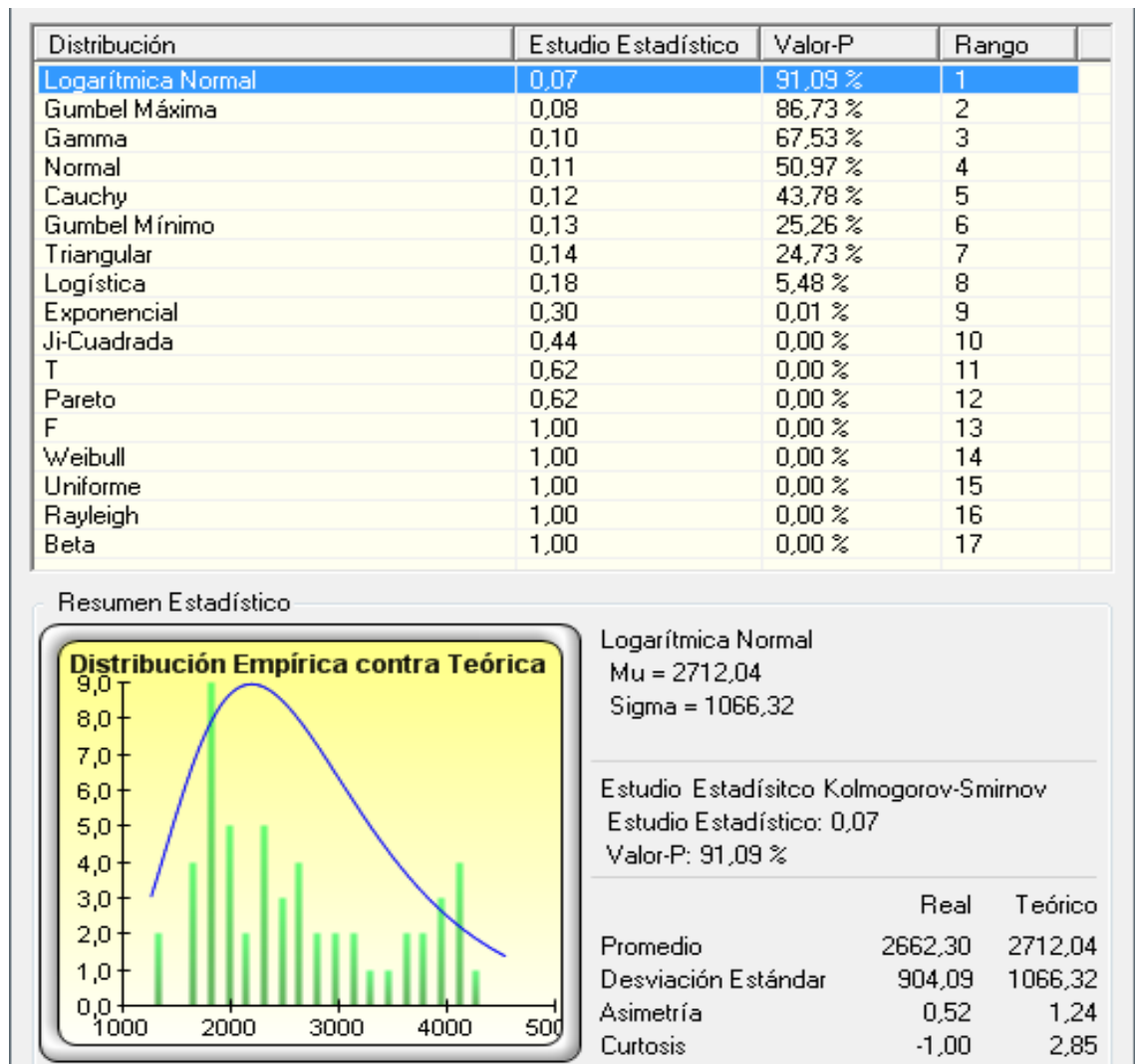
2.1.1 Cartera modalidad comercial

a. Con el histórico mensual de las provisiones de cartera de la modalidad comercial se busca cual es la distribución que se ajusta mejor a la serie de datos, resultados que se observan en el grafico 2.

Igualmente en el gráfico 2 se detallan las diferentes distribuciones que utilizó el software Risk Simulator (versión de prueba) junto con las pruebas de bondad de ajuste que corroboran la validez del supuesto, utilizando el estadístico de Kolmogorov-Smirnov. Se toman las distribuciones cuyo valor P es mayor a 0,05 y dentro de estas se elije la distribución con el valor P mayor, que para este caso es la Logarítmica Normal.

b. Se toma de la distribución seleccionada los valores teóricos ajustados como inputs ($\mu = 2712.04$, $\sigma = 1066.32$) o valores de entrada para generar la simulación.

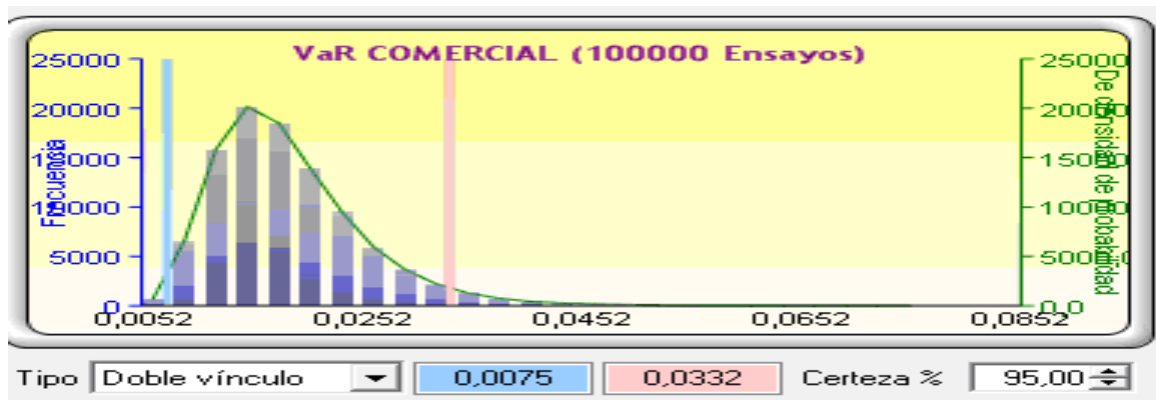
Gráfico 2. Ajuste de distribución de la serie histórica de las provisiones de la cartera comercial, en la cual se observa que la que mejor ajusta es la Logarítmica Normal



Fuente: Gráfico elaborado en el software Risk Simulator 2010C (versión de prueba).

- c. Se definen las características de la simulación: número mínimo de iteraciones: 100.000 y un nivel de confianza del 95%.
- d. Generada la simulación Montecarlo los resultados del VaR de la Cartera Comercial se plasman en el grafico 3.

Gráfico 3. VaR para la cartera Comercial. El tipo doble vínculo permite visualizar el intervalo de confianza el cual para esta cartera se encuentra entre el 0,0075 y 0,0332 con un nivel de confianza del 95%



Fuente: Gráfico elaborado en el software Risk Simulator 2010C (versión de prueba).

El VaR de la modalidad comercial es el límite superior del intervalo de confianza de ésta función, con lo cual se define que el VaR de la cartera comercial es el 3,32% del saldo total de la cartera de ésta modalidad.

Aplicado el 3.32% al saldo total de la cartera comercial y comparado bajo el criterio de la metodología con la provisión constituida de la modalidad se observa en la tabla 3 que el valor en riesgo esperado de la cartera de esta modalidad (VaR), es superior a las provisiones constituidas, por lo cual ante pérdidas la entidad las puede solucionar con sus provisiones sin afectar su capital económico.

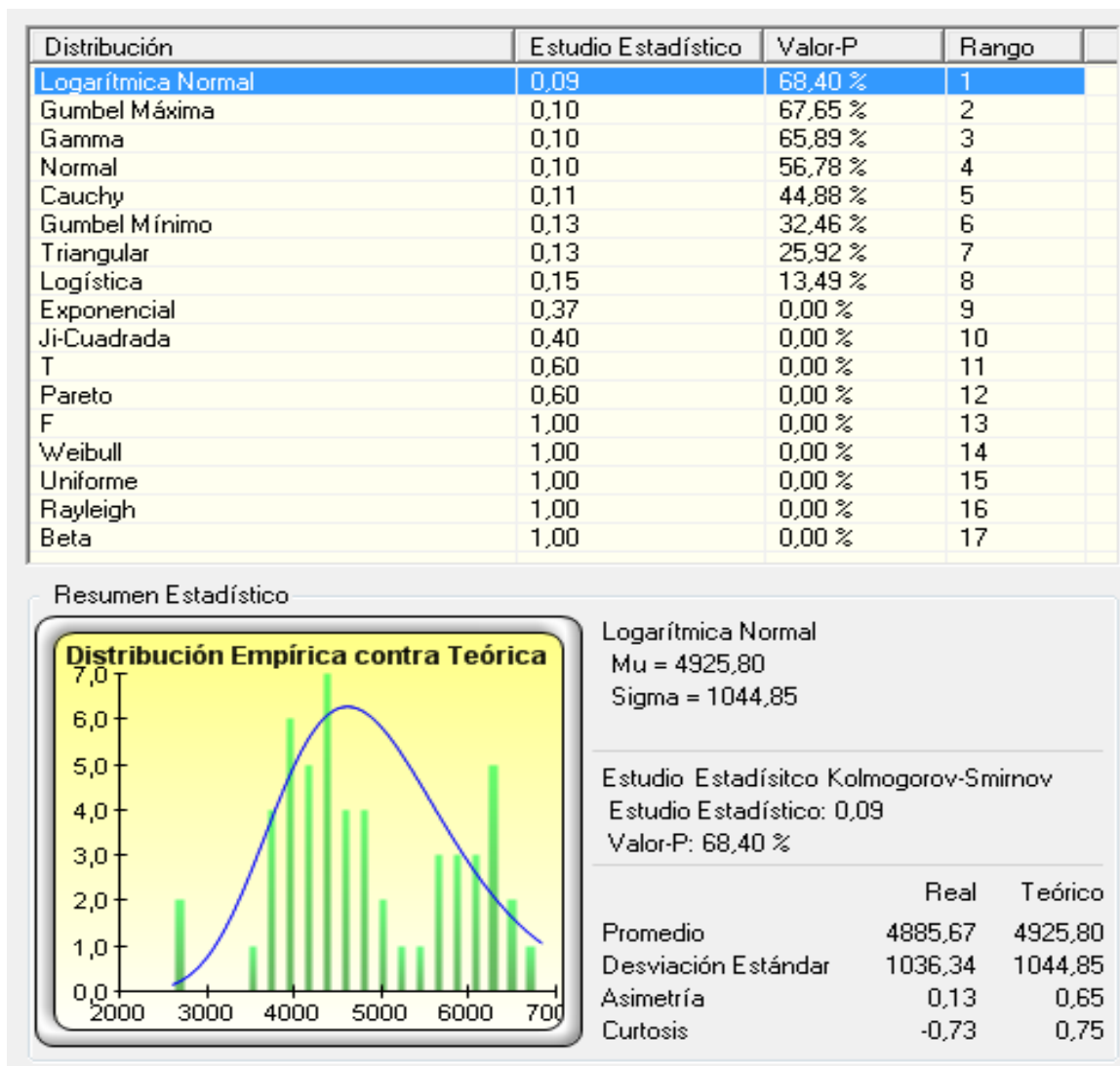
Tabla 3. VaR de la cartera comercial versus provisiones constituidas

Cartera Comercial		
Saldo	VaR	Provisiones
160.320.482.286	5.322.640.012	4.310.733.464

2.1.2 Cartera modalidad consumo

a. Con el histórico mensual de las provisiones de cartera de la modalidad consumo se busca cual es la distribución que se ajusta mejor a la serie de datos, resultados que se observan en el gráfico 4.

Gráfico 4. Ajuste de distribución de la serie histórica de las provisiones de la cartera consumo, en la cual se observa que la que mejor ajusta es la Logarítmica Normal



Fuente: Gráfico elaborado en el software Risk Simulator 2010C (versión de prueba).

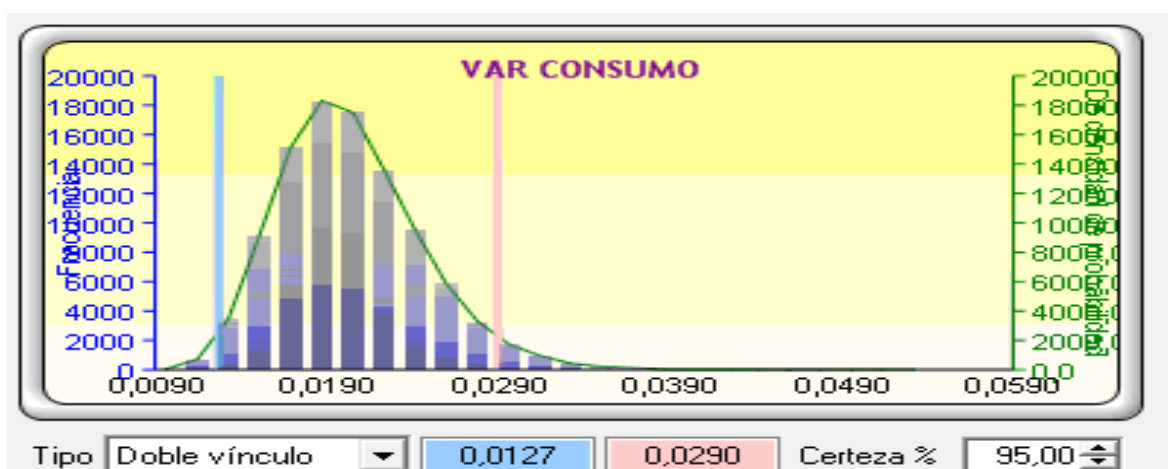
En el gráfico 4 se observa las diferentes distribuciones que utilizó el software junto con las pruebas de bondad de ajuste que corroboran la validez de éste supuesto, utilizando el estadístico de Kolmogorov-Smirnov. Se toman las distribuciones cuyo valor P es mayor a 0,05 y dentro de estas se elije la distribución con el valor P mayor, que para este caso es la Logarítmica Normal.

b. Se toma de la distribución seleccionada los valores teóricos ajustados como inputs ($\mu = 4925.80$, $\sigma = 1044.85$) o valores de entrada para generar la simulación.

c. Se definen las características de la simulación: número mínimo de iteraciones: 100.000 y un nivel de confianza del 95%.

d. Generada la simulación Montecarlo los resultados del VaR de la Cartera Consumo se plasman en la gráfica 5.

Gráfico 5. VaR para la cartera Consumo. El tipo doble vínculo permite visualizar el intervalo de confianza el cual para esta cartera se encuentra entre el 0,0127 y 0,0290 con un nivel de confianza del 95%



Fuente: Gráfico elaborado en el software Risk Simulator 2010C (versión de prueba).

El VaR de la modalidad consumo es el límite superior del intervalo de confianza de ésta función, con lo cual se define que el VaR de la cartera consumo es el 2,90% del saldo total de la cartera de ésta modalidad.

Aplicado el 2.90% al saldo total de la cartera consumo y comparado bajo el criterio de la metodología con la provisión constituida de la modalidad se observa en la tabla 4, que el valor en riesgo esperado de la cartera de esta modalidad (VaR), es superior a las provisiones constituidas, por lo cual ante perdidas la entidad las puede solucionar con sus provisiones sin afectar su capital económico.

Tabla 4. VaR de la cartera consumo versus provisiones constituidas

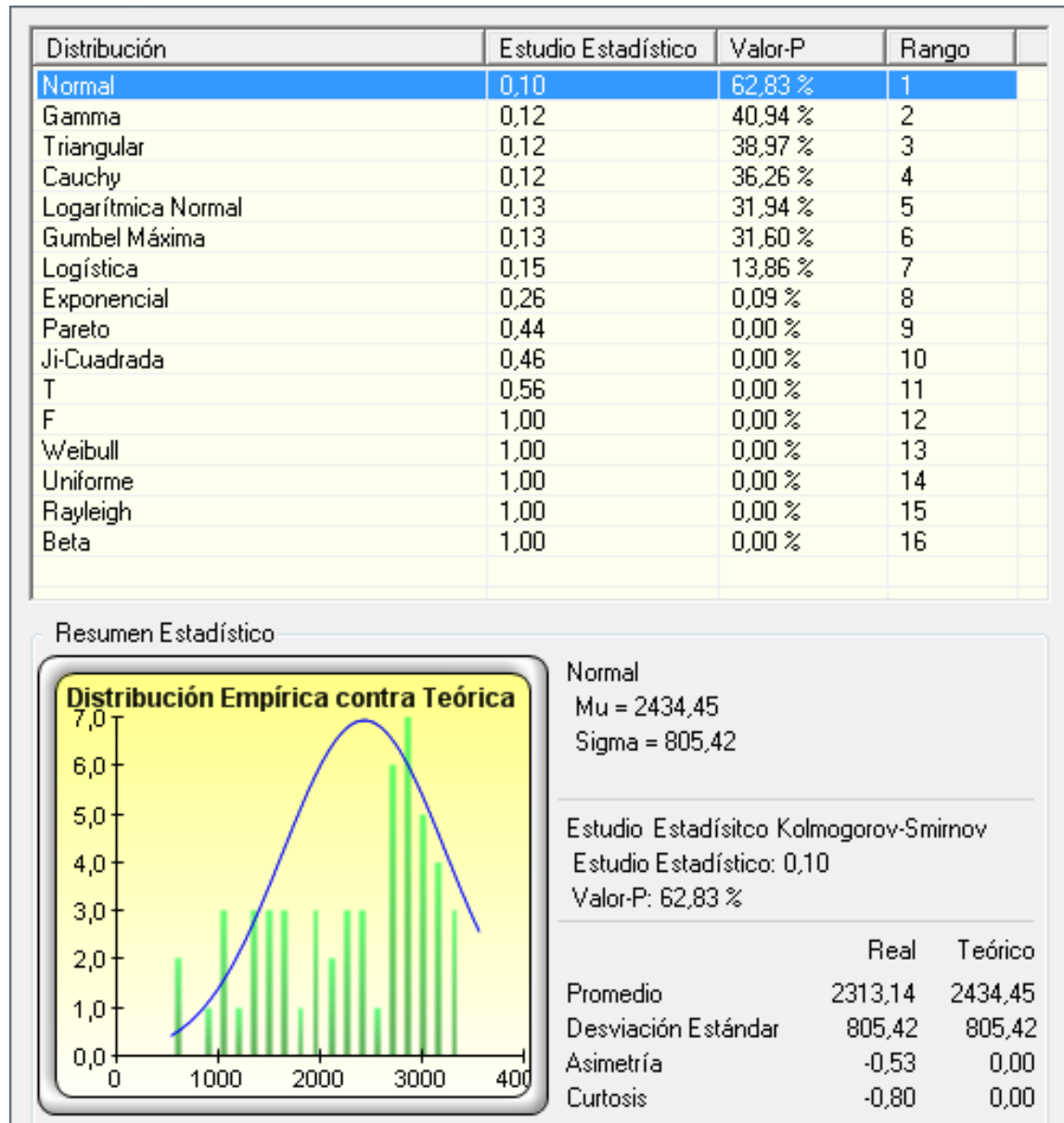
Cartera Consumo		
Saldo	VaR	Provisiones
253.655.452.481	7.356.008.122	6.228.668.849

2.1.3 Cartera modalidad microcrédito

a. Con el histórico mensual de las provisiones de cartera de la modalidad microcrédito se busca cual es la distribución que se ajusta mejor a la serie de datos, los resultados que se observan en el gráfico 6.

En el gráfico 6 se observa las diferentes distribuciones que utilizó el software junto con las pruebas de bondad de ajuste que corroboran la validez de éste supuesto, utilizando el estadístico de Kolmogorov-Smirnov, se toman las distribuciones cuyo valor P es mayor a 0,05 y dentro de estas se elije la distribución con el valor P mayor, que para este caso es la Distribución Normal.

Gráfico 6. Ajuste de distribución de la serie histórica de las provisiones de la cartera microcrédito, en la cual se observa que la que mejor ajusta es la Normal



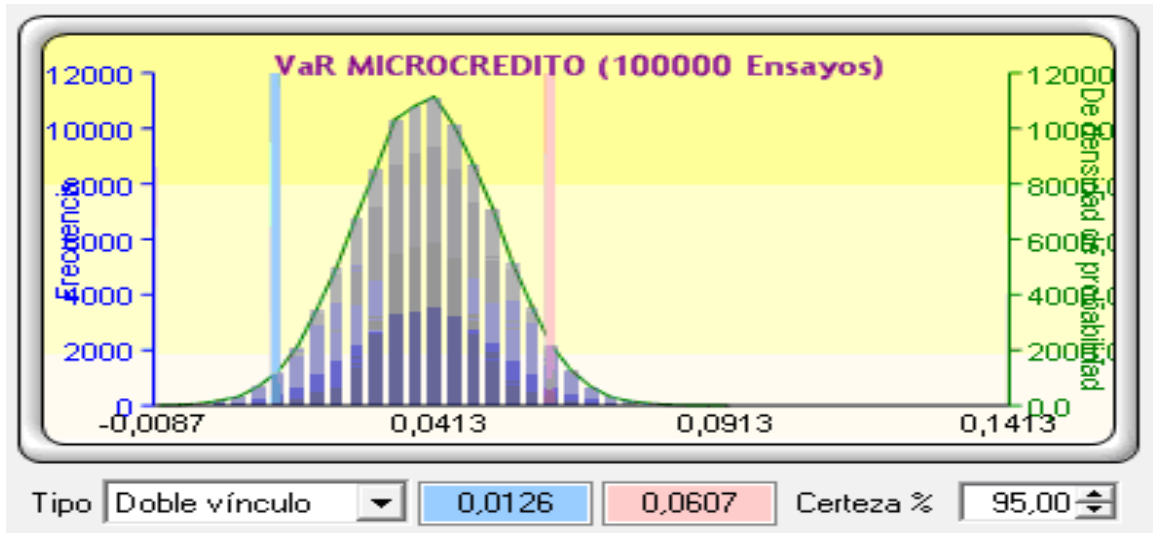
Fuente: Gráfico elaborado en el software Risk Simulator 2010C (versión de prueba).

b. Se toma de la distribución seleccionada los valores teóricos ajustados como inputs (Mu = 2434.45, sigma = 805.42) o valores de entrada para generar la simulación.

c. Se definen las características de la simulación: Número mínimo de iteraciones: 100.000 y un nivel de confianza del 95%.

d. Generada la simulación Montecarlo los resultados del VaR de la Cartera Microcrédito se plasman en la grafica 7.

Gráfico 7. VaR para la cartera Microcrédito. El tipo doble vínculo permite visualizar el intervalo de confianza el cual para esta cartera se encuentra entre el 0,0126 y 0,0607 con un nivel de confianza del 95%



Fuente: Gráfico elaborado en el software Risk Simulator 2010C (versión de prueba).

El VaR de la modalidad microcrédito es el límite superior del intervalo de confianza de ésta función, con lo cual se define que el VaR de la cartera microcrédito es el 6,07% del saldo total de la cartera de ésta modalidad.

Aplicado el 6,07% al saldo total de la cartera microcrédito y comparado bajo el criterio de la metodología con la provisión constituida de la modalidad se observa en la tabla 5, que el valor en riesgo esperado de la cartera de esta modalidad (VaR), es superior a las provisiones constituidas, por lo cual ante perdidas la entidad las puede solucionar con sus provisiones sin afectar su capital económico.

Tabla 5. VaR de la cartera microcrédito versus provisiones constituidas

Cartera Microcrédito		
Saldo	VaR	Provisiones
65.477.890.319	3.974.507.942	3.097.615.183

2.2 RESULTADOS MODELO DE CAPITAL Y RIESGO

A continuación se detallan los resultados de los componentes requeridos para calcular el VaR con el modelo CyRCE.

2.2.1 Resultados de la estimación del default. Una vez generado en un proceso exógeno a este trabajo a través del cálculo de las matrices de transición se tienen los siguientes resultados.

Tabla 6. Default para cada modalidad de cartera

Modalidad de Cartera	Default
Comercial	Mayor o igual a 60 días de mora
Consumo	Mayor o igual a 60 días de mora
Microcrédito	Mayor o igual a 30 días de mora

La importancia de este cálculo y no tomar lo reglamentado por los órganos de vigilancia es que no todas las entidades tienen el mismo default, dependiendo del mercado que atienden, de las políticas existentes para otorgamiento y de la gestión de cobros, éste varía.

Como apreciación general se detalla que la cartera comercial y la de consumo están entrando en default a la misma altura de mora de 60 días, lo cual es señal de alerta dado que para estas cartera lo normal es que entren en default a los 150

y 90 días respectivamente, sin embargo éste default tan acido es producto de haber aplicado el método de default observado durante el horizonte, el cual esta documentado en el numeral 2.3.2.2 de este trabajo.

Es importante aclarar que la metodología a aplicar depende del apetito de riesgo de la entidad y se debe tener en cuenta en el momento de evaluar los resultados.

2.2.2 Resultados de la estimación de la probabilidad de incumplimiento.

Utilizando la metodología documentada en el numeral 1.4 en un proceso exógeno a este trabajo se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 7. Probabilidad de default para cada modalidad de cartera

Modalidad de Cartera	Probabilidad de Incumplimiento
Comercial	4,10%
Consumo	5,50%
Microcrédito	17,18%

Se observa que la mayor probabilidad de incumplimiento se presenta en la cartera de microcrédito comparada con la comercial y la de consumo, y básicamente se explica por el perfil del solicitante y la informalidad con que estos ejecutan su actividad, sin embargo se detalla que la probabilidad de la cartera comercial está muy cercana a la de consumo, esto se convierte en una señal de alerta para la entidad, dado que la cartera comercial es la mejor en todas las entidades financieras.

2.2.3 Resultados de la estimación de la concentración de la cartera.

A continuación se detallan los resultados de aplicar el índice de Hirschman – Herfindahl para las tres modalidades de cartera:

Tabla 8. Índice de concentración de la cartera por modalidad

Modalidad de Cartera	Indicador de Concentración
Comercial	0,0023449084
Consumo	0,0000604793
Microcrédito	0,0000643974

Al comparar los índices de la tabla 8 con los criterios explicados en la metodología, se detalla claramente que los tres índices son inferiores a .10 lo que indica desconcentración de la cartera, ratificando la atomización de montos que manejan las tres modalidades tal como se veía en el análisis descriptivo al analizar la ubicación de los percentiles.

2.2.4 Resultados del VaR método CyRCE. Una vez tenemos todos los componentes y calculado el respectivo valor en riesgo con un nivel de confianza del 95% observamos los resultados en la siguiente tabla:

Tabla 9. VaR esperado versus provisiones de cada modalidad cartera

Modalidad Cartera	Valor en Riesgo Esperado	Provisiones Constituidas
Comercial	9.590.375.581	4.310.733.464
Consumo	14.654.114.998	6.228.668.849
Microcrédito	11.637.577.527	3.097.615.183

Si se compara el valor en riesgo esperado de las tres modalidades con las provisiones constituidas, se observa claramente que el valor en riesgo esperado es superior a las provisiones constituidas, por lo cual ante pérdidas la entidad las puede solucionar con sus provisiones sin afectar su capital económico.

No obstante se observa diferencias grandes entre los valores en riesgo generados por ambos modelos como se detalla en la tabla 10:

Tabla 10. VaR modelo CyRCE versus Montecarlo

Modalidad de Cartera	VaR CyRCE	VaR Montecarlo
Comercial	9.590.375.581	5.322.640.012
Consumo	14.654.114.998	7.356.008.122
Microcrédito	11.637.577.527	3.974.507.942

Se atribuye esta diferencia a uno de los supuestos del método CyRCE, que es que no contempla la recuperación de la cartera, mientras que Montecarlo parte de la información histórica de las provisiones y estas tienen inmerso este factor en el manejo de las garantías.

Por ello en la metodología se referencia el estimador de la tasa de recuperación de la cartera castigada de tal forma que al aplicarlo en los valores en riesgo se obtiene el resultado observado en la tabla 11.

Tabla 11. VaR modelo CyRCE aplicando la tasa de recuperación de castigos versus Montecarlo

Modalidad de Cartera	VaR CyRCE	VaR Montecarlo
Comercial	4.823.958.917	5.322.640.012
Consumo	7.371.019.844	7.356.008.122
Microcrédito	5.853.701.496	3.974.507.942

Se observa valores más ajustados entre las dos metodologías, no obstante se obtiene por la metodología CyRCE mayores valores en riesgo para las carteras de las modalidades de consumo y microcrédito, que se puede sustentar dado que son

las modalidades que manejan un indicador de incumplimiento mucho más alto, uno de los principales componentes del modelo.

Con estos nuevos valores en riesgo también se sigue afirmando que las pérdidas actuales constituidas por las provisiones son inferiores a los valores en riesgo esperados calculados, por lo cual la entidad no deberá afectar su capital económico.

El método CyRCE permite muchas más sensibilizaciones que juegan con el capital económico, límites de otorgamiento y probabilidades de incumplimiento que permiten realizar escenarios más profundos en el análisis de la cartera, pero no son los objetivos trazados en este trabajo y por ello no se abarcaron.

CONCLUSIONES

- Se define como riesgo a “la variabilidad de los resultados diferentes a los esperados”, ello nos lleva a concluir que un activo es riesgoso cuando genera resultados diferentes a los esperados y es que aquí cuando toma la relevancia el VaR cuya finalidad es medir cuanto puede perder una cartera en un periodo determinado con un nivel de confianza dado.
- Es clara señal de alerta de Riesgo, cuando las pérdidas de una cartera (provisiones constituidas de cartera) se acercan a su VaR, máxime porque este es calculado bajo condiciones normales del mercado.
- Existen varios métodos para el cálculo del VaR de crédito, siendo los más utilizados por su practicidad, fácil implementación e interpretación de los resultados los calculados a través de la simulación Montecarlo y el Método de Capital y Riesgo (CyRCE).
- El método Montecarlo, implica el desarrollo de un modelo que muestre el comportamiento futuro de una variable a través de un gran número de pruebas o simulaciones generadas aleatoriamente. Este método se recomienda ser utilizado por las cooperativas financieras o de ahorro y crédito vigilados por la Superintendencia de Economía Solidaria teniendo en cuenta, que estas entidades cuentan con la información requerida para su cálculo y no requieren estimar nuevos componentes, igualmente su efectividad es altamente reconocida y se encuentra en el mercado amplio software que permite su cálculo.

- El método de Capital y Riesgo (CyRCE), es un método que relaciona y requiere el cálculo de nuevos componentes como son la determinación el Default, probabilidad del Default e índice de concentración de la cartera, ya conocidos por las entidades vigiladas por la Superintendencia Financiera, por lo cual se recomienda ser utilizado por las cooperativas financieras vigiladas por este ente regulador o estén en búsqueda de ser vigilado por este ente.
- Con referencia a los resultados arrojados, al aplicar los modelos con las bases de datos establecidas para el estudio, se detalla claramente que las perdidas actuales de la entidad (las provisiones de cartera constituidas) son inferiores a los valores en riesgo esperados calculados, por lo cual la entidad no deberá afectar su capital económico.
- No obstante la entidad deben revisar algunas señales de alerta presentadas con respecto a manejar el mismo default, para las modalidades de cartera comercial y consumo y en cuanto a la alta probabilidad de incumpliendo que está manejando para la cartera comercial.
- Igualmente se resalta el adecuado manejo que viene realizando la entidad con los límites de otorgamiento, el cual es confirmado por el indicador de concentración de cartera ubicado por debajo del .10

BIBLIOGRAFÍA

AHUMANDA, A.C and BUDNEVICH. Some Measures of Financial Fragility In The Chilean Banking System: An Early Warning Indicators Application”. Chile: Central Bank of Chile No 117, 2001.

ALLEN, Steven. Financial Risk Management: A Practitioner's Guide to Managing Market and Credit Risk. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2003.

BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION (BCBS). Studies on the Validation of Internal Rating Systems, 2005.

CANTOR, R. and HAMILTON, David T. Adjusting Corporate Default Rates for Rating Withdrawals,” Journal of Credit Risk, Vol 3. No 2: 3-25, 2007

COMITÉ DE SUPERVISIÓN BANCARIA DE BASILEA. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Review Framework. Bank for International Settlements, 2004.

JAFRY, Yusuf and SCHUERMANN, Til. Measurement, estimation and comparison of credit migration matrices. Journal of Banking & Finance 28, 2004.

JORION, P. Financial Risk Manager Handbook. John Wiley Y Sons, inc., 2003

MÁRQUEZ DIEZ CANEDO, J. Suficiencia de capital y riesgo de crédito en carteras de préstamos bancarios. México: Banco de México, 2002.

_____. El impacto de la correlación entre impagos en la concentración de riesgo en portafolios de Préstamos bancarios. Concentración de un índice de

concentración de riesgo y adecuación del modelo CyRCE para medir el riesgo. México: Banco de México, 2002.

MASCAREÑAS, Juan “Introducción a VaR”. Madrid: Universidad Complutense de Madrid, 2008.

MENICHINI, Amilcar. Value at risk Metodología de administración del riesgo Financiero. Bolsa de Comercio de Rosario, 2006.

ROSILLO CORCHUELO, Jorge y MARTINEZ ALDANA, Clemencia. Modelos de evaluación de riesgos en decisiones financieras. Bogotá: Universidad Externado de Colombia, 2004.

SCHECHTMAN, R. From default rates to default matrices: an application to monitoring Brazilian consumer credit.

SHY, Oz. Industrial Organization, Theory and Applications. M.I.T.Press, 1995.

SUPERINTENDENCIA FINANCIERA DE COLOMBIA. Circular Básica Contable y Financiera (C. E. 100 de 1995), Capítulo II.

TIROLE, Jean. The Theory of Industrial Organization. M.I.T.Press, 1995.