

**ANÁLISIS Y SIMULACIÓN BIDIMENSIONAL DE LA CINÉTICA Y CINEMÁTICA  
DEL CUERPO HUMANO EN EL PROCESO DE MARCHA MEDIANTE EL USO  
DEL PROGRAMA MATLAB**

**Autores:**

**CAMILO ANDRES MANTILLA RAMIREZ**

**ALBERTO DELGADO ARCINIEGAS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECANICAS**

**ESCUELA DE INGENIERIA MECÁNICA**

**BUCARAMANGA**

**2017**

**ANÁLISIS Y SIMULACIÓN BIDIMENSIONAL DE LA CINÉTICA Y CINEMÁTICA  
DEL CUERPO HUMANO EN EL PROCESO DE MARCHA MEDIANTE EL USO  
DEL PROGRAMA MATLAB**

**Autores:**

**CAMILO ANDRES MANTILLA RAMIREZ**

**ALBERTO DELGADO ARCINIEGAS**

**Proyecto de grado como requisito para optar por el título de  
Ingeniero Mecánico**

**Director:**

**DIEGO FERNANDO VILLEGAS BERMUDEZ**

**Ingeniero Mecánico, PhD**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECANICAS**

**ESCUELA DE INGENIERIA MECÁNICA**

**BUCARAMANGA**

**2017**

## CONTENIDO

	<b>Pág.</b>
INTRODUCCIÓN	18
1. PLANTEAMIENTO DEL PROYECCTO	21
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	21
1.2 JUSTIFICACIÓN	21
1.3 JUSTIFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN	22
2. OBJETIVOS	23
2.1 Objetivo general	23
2.2 Objetivos específicos	23
3. PROCESO DE LA MARCHA	24
3.1 EL CICLO DE LA MARCHA	24
3.1.1 Fase de apoyo.	25
3.1.2 Fase de balanceo	25
3.2 ESTADO DEL ARTE	26
4. PRINCIPIOS DE LOS MÉTODOS VIDEOGRÁFICOS DE CAPTURA DE DATOS.	29
4.1 CALIBRACIÓN DEL SISTEMA DE IMÁGENES	30
4.2 SELECCIÓN DE LAS MARCAS PARA ANÁLISIS BIDIMENSIONAL	31
4.3 PROPAGACIÓN DE ERRORES	32
5. LABORATORIO DE MARCHA Y SUS HERRAMIENTAS	33
6. ANÁLISIS DE MARCHA	35
6.1 ADQUISICIÓN DE DATOS	35
6.1.1 Posicionamiento de los Marcadores.	35

6.1.2 Software para el rastreo de marcadores usando MATLAB R2017a	36
6.2 POSPROCESAMIENTO DE DATOS	40
6.2.1 Ajuste de los Datos.	40
6.2.1.1 Ejemplo Marcador del Pie.	45
6.2.2 Sistema de ecuaciones para el cálculo de los ángulos.	47
6.2.3 Método de las diferencias finitas para el cálculo de las velocidades y las aceleraciones.	48
7. ANÁLISIS Y VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS	50
7.1 VALIDACIÓN DEL CÁLCULO DE LAS VELOCIDADES Y ACELERACIONES CON LAS DIFERENCIAS FINITAS.	50
7.2 RESULTADOS ANÁLISIS DE MARCHA CINEMÁTICA	57
8. CÁLCULO DE LOS COMPONENTES DE LA PIERNA DESFASADA.	62
9. ANÁLISIS DE LA MARCHA EN EL PLANO FRONTAL	63
10. ANÁLISIS CINÉTICO DEL SISTEMA	65
10.1 PRINCIPIO DE FORMULACIÓN	65
10.2 ECUACIÓN DE LAGRANGE	66
10.3 PLANTEAMIENTO DEL SISTEMA	67
10.4 DESARROLLO DEL SISTEMA	70
10.4.1 Ecuaciones de Lagrange.	70
10.4.2 Torques, fuerzas y trabajo	78
10.4.3 Matriz Solución.	80
10.5 VALIDACIÓN DE LA SOLUCIÓN	81
10.5.1 Validación 1.	82
10.5.2 Validación 2.	85

10.6	RESULTADOS DE LAS PRUEBAS REALIZADAS CON LOS DATOS DE ENTRADA EXPERIMENTALES	88
10.6.1	Sujeto 1 (Camilo).	88
10.6.2	Sujeto 2 (Alberto).	90
10.6.3	Análisis de los resultados obtenidos	91
11.	CONCLUSIONES	93
12.	RECOMENDACIONES	94
	BIBLIOGRAFÍA	95

## LISTA DE FIGURAS

	<b>Pág.</b>
Figura 1. Marcadores en la marcha humana.	19
Figura 2. Laboratorio de marcha	20
Figura 3. Entorno MATLAB R2017a	20
Figura 4. Ciclo normal de la marcha	24
Figura 5. Dimensiones importantes de la cámara	29
Figura 6. Distribución de marcadores según el protocolo Davis Plano Sagital	31
Figura 7. Laboratorio de marcha Universidad Industrial de Santander	33
Figura 8. Trípode usado	34
Figura 9. Análisis de marcha plano sagital. Experimento 2	35
Figura 10. Análisis de marcha plano frontal. Experimento 2	36
Figura 11. Prueba de calibración	37
Figura 12. Diagrama de bloques código calibración	38
Figura 13. Diagrama de bloques código de rastreo	39
Figura 14. Imagen de rastreo en marcha número 1	40
Figura 15. Cambio del sistema de referencia	41
Figura 16. Ajuste polinómico de grado 8. Posición en Y del tobillo vs % del ciclo de marcha	42
Figura 17. Velocidad en Y del tobillo marcha 1 (rojo) y libro de Winter (azul) vs % del ciclo de marcha	43
Figura 18. Aceleración en Y del tobillo marcha1 (rojo) y libro de Winter (azul) vs % del ciclo de marcha	43
Figura 19. Ajuste polinómico de grado 15. Posición en Y del tobillo vs % del ciclo de marcha	44
Figura 20. Velocidad en T del tobillo marcha1 (rojo) y libro de Winter (azul) vs % del ciclo de marcha con ajuste mejorado	44

Figura 21. Aceleración en Y del tobillo marcha1 (rojo) y libro de Winter (azul) vs % del ciclo de marcha con ajuste mejorado	45
Figura 22. Ajuste polinómico de grado 15 posición en X del pie vs % del ciclo de marcha	45
Figura 23. Ajuste polinómico de grado 15 posición en Y del pie vs % del ciclo de marcha	46
Figura 24. Ajuste polinómico de grado 15. Ángulo del pie vs % del ciclo de marcha	47
Figura 25. Ángulo del muslo vs % del ciclo de marcha	48
Figura 26. Velocidad lineal en X del marcador de la rodilla vs % del ciclo de marcha	50
Figura 27. Velocidad lineal en Y del marcador de la rodilla vs % del ciclo de marcha	51
Figura 28. Velocidad angular del muslo vs % del ciclo de marcha	51
Figura 29. Aceleración lineal en X del marcador de la rodilla vs % del ciclo de marcha	52
Figura 30. Aceleración lineal en Y del marcador de la rodilla vs % del ciclo de marcha	52
Figura 31. Aceleración angular del muslo vs % del ciclo de marcha	53
Figura 32. Resultados desplazamiento en X del marcador del pie prueba 1	57
Figura 33. Resultados desplazamiento en X del marcador de la rodilla prueba 1	58
Figura 34. Resultados desplazamiento en X del marcador de la rodilla prueba 1	58
Figura 35. Resultados desplazamiento en X del marcador de la rodilla prueba 1	59
Figura 36. Resultados ángulo del muslo prueba 2	59
Figura 37. Resultados velocidad angular del muslo prueba 2	60
Figura 38. Resultados aceleración angular del muslo prueba 2	60
Figura 39. Ángulo desfasado para pie derecho	62
Figura 40. Experimento 2 marcha en el plano frontal	63
Figura 41. Curvas de variación angular en a cadera en el plano frontal sujeto 1(azul) vs sujeto 2(rojo)	64

Figura 42. Curvas de variación angular en los omoplatos en el plano frontal sujeto 1(azul) vs sujeto 2(rojo)	64
Figura 43. Sistema Planteado	68
Figura 44. Fuerzas y torques presentes en el sistema	69
Figura 45. Valores de K ciclo Winter	81
Figura 46. Reacción en X validación 1	82
Figura 47. Reacción en Y validación 1	83
Figura 48. Torque en el tobillo validación 1	83
Figura 49. Torque en la rodilla validación 1	84
Figura 50. Torque en la cadera validación 1.	84
Figura 51. Reacción en X validación 2.	85
Figura 52. Reacción en Y validación 2	86
Figura 53. Torque en el tobillo validación 2	86
Figura 54. Torque en la rodilla validación 2	87
Figura 55. Torque en la cadera validación 2	87
Figura 56. Valores de K ciclo Sujeto 1 (Camilo)	89
Figura 57. Valores de K ciclo Sujeto 1 (Alberto)	90

## LISTA DE TABLAS

	<b>Pág.</b>
Tabla 1. Aperturas, tiempos de exposición y velocidades de grabación para una cámara estándar	30
Tabla 2. Coeficientes de correlación cinemática	54
Tabla 3. Coordenadas de los centros de masa de cada segmento	70
Tabla 4. Velocidades lineales de los centros de masa	71
Tabla 5. Segundas derivadas de la posición del centro de masa	74
Tabla 6. Coeficientes de correlación Validación 1	85
Tabla 7. Coeficientes de correlación Validación 2	88
Tabla 8. Datos sujeto 1	88
Tabla 9. Datos sujeto 2	90

## LISTA DE ECUACIONES

	<b>Pág.</b>
Ecuación 1. Factor de escala	30
Ecuación 2. Coordenada escalada X	30
Ecuación 3. Coordenada escalada Y	31
Ecuación 4. Factor de escala	38
Ecuación 5. Cambio del sistema de referencia y conversión en unidades en X	40
Ecuación 6. Cambio del sistema de referencia y conversión en unidades en Y	40
Ecuación 7. Ajuste polinómico de grado 8 de la posición en Y del tobillo	42
Ecuación 8. Ajuste polinómico de grado 15 de la posición en Y del tobillo	44
Ecuación 9. Error promedio del ajuste polinómico de grado 15 de la posición en X del marcador del pie	46
Ecuación 10. Error promedio del ajuste polinómico de grado 15 de la posición en Y del marcador del pie.	46
Ecuación 11. Error promedio del ajuste polinómico de grado 15 ángulo del pie.	47
Ecuación 12. Cálculo de velocidades mediante diferencias finitas de primer grado.	48
Ecuación 13. Cálculo de velocidades angulares mediante diferencias finitas de primer grado	48
Ecuación 14. Calculo de Aceleraciones mediante diferencias finitas de primer grado.	49
Ecuación 15. Calculo de velocidades angulares mediante diferencias finitas de primer grado.	49
Ecuación 16. Calculo del desfase espacio temporal usando la cadera como referencia.	62
Ecuación 17. Energía Cinética	66
Ecuación 18. Energía Potencial	66
Ecuación 19. Definición del lagrangiano	66

Ecuación 20. Ecuación de lagrange	66
Ecuación 21. Fuerzas generalizadas	67
Ecuación 22. Velocidad lineal	71
Ecuación 23. Lagrangiano del sistema	73
Ecuación 24. Segundo término del lagrangiano	76
Ecuación 25. Derivada del Lagrangiano respecto a la primera derivada de la variable generalizada $q_1$	77
Ecuación 26. Primer término del lagrangiano de la variable generalizada $q_1$ .	77
Ecuación 27. Ecuación de Lagrange de la variable generalizada $q_1$ .	77
Ecuación 28. Ecuación de Lagrange de la variable generalizada $q_2$ .	77
Ecuación 29. Ecuación de Lagrange de la variable generalizada $q_3$ .	77
Ecuación 30. Ecuación de Lagrange de la variable generalizada $q_4$ .	78
Ecuación 31. Ecuación de LaGrange de la variable generalizada $q_5$ .	78
Ecuación 32. Ecuación de LaGrange de la variable generalizada $q_6$ .	78
Ecuación 33. Ecuación de Lagrange de la variable generalizada $q_7$ .	78
Ecuación 34. Ecuación de Lagrange de la variable generalizada $q_8$ .	78
Ecuación 35. Trabajo efectuado.	78
Ecuación 36. Derivada del trabajo respecto a la variable $q_1$ .	78
Ecuación 37. Derivada del trabajo respecto a la variable $q_2$	79
Ecuación 38. Derivada del trabajo respecto a la variable $q_3$ .	79
Ecuación 39. Derivada del trabajo respecto a la variable $q_4$ .	79
Ecuación 40. Derivada del trabajo respecto a la variable $q_5$ .	79
Ecuación 41. Derivada del trabajo respecto a la variable $q_6$ .	79
Ecuación 42. Derivada del trabajo respecto a la variable $q_7$ .	79
Ecuación 43. Derivada del trabajo respecto a la variable $q_8$ .	79
Ecuación 44. Incógnita 9	80
Ecuación 45. Incógnita 10	80
Ecuación 46. Matriz solución	80
Ecuación 47. Variable proporcional para la primera fase de doble apoyo de los datos de Winter.	82

Ecuación 48. Variable proporcional para la segunda fase de doble apoyo de los datos de Winter.	82
Ecuación 49. Variable proporcional primera fase de doble apoyo sujeto 1.	89
Ecuación 50. Variable proporcional segunda fase de doble apoyo sujeto 1.	89
Ecuación 51. Variable proporcional primera fase de doble apoyo sujeto 2	90
Ecuación 52. Variable proporcional segunda fase de doble apoyo sujeto 2.	91

## RESUMEN

**TÍTULO:** ANÁLISIS Y SIMULACIÓN BIDIMENSIONAL DE LA CINÉTICA Y CINEMÁTICA DEL CUERPO HUMANO EN EL PROCESO DE MARCHA MEDIANTE EL USO DEL PROGRAMA MATLAB\*

**AUTORES:** CAMILO ANDRES MANTILLA RAMIREZ\*\*

ALBERTO DELGADO ARCINIEGAS

**PALABRAS CLAVES:** BIOMECANICA, MARCHA, SOFTWARE, MATLAB

La creación de un software capaz de adquirir datos de una persona real y calcular la cinemática y la cinética de la marcha humana, tiene como objetivo la obtención de valores cuantitativos de manera fácil y con un bajo costo para de realizar un análisis del proceso de la marcha, facilitar el tratamiento de enfermedades graves que afectan la movilidad y mejorar e implementar programas de rehabilitación en personas con patologías o víctimas de accidentes además de ayudar al desarrollo de prótesis y exoesqueletos.

Este proyecto consta de varios códigos programados en el software Matlab R2017a, cada uno con una función específica, de esta manera se tiene un código de calibración, uno para rastreo de video, otro para cinemática y finalmente un código para cinética. En general, para el desarrollo del programa se adquieren los datos de posiciones de unos marcadores simples ubicados en las articulaciones del cuerpo, se plantea el cuerpo como un conjunto de segmentos rígidos, con ayuda de los datos adquiridos se calcula el Angulo, la velocidad angular y la aceleración angular en cada segmento y finalmente se calculan las fuerzas y torques presentes en el proceso de la marcha humana.

Finalmente con el programa validado con datos teóricos se procede a tomar datos y a utilizar el programa en 2 sujetos reales obteniendo resultados fiables.

---

\* Proyecto de grado

\*\* Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director: Diego Fernando Villegas Bermúdez, PhD.

## ABSTRACT

**TITLE:** TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS AND SIMULATION OF THE KINETICS AND KINEMATICS OF THE HUMAN BODY DURING THE GAIT PROCESS THROUGH THE USE OF THE MATLAB SOFTWARE\*

**AUTHORS:** CAMILO ANDRES MANTILLA RAMIREZ\*\*

ALBERTO DELGADO

**KEYWORDS:** BIOMECHANICS, GAIT, SOFTWARE, MATLAB

The creation of a software able to collect data from a real person and calculate the kinematics and kinetics of the human gait, has the purpose of obtaining quantitative values in an easy way and with low cost to realize an analysis of the process of the gait, make easy the treatment of serious diseases that could affect the mobility and improved and implement programs of rehabilitation in persons with pathologies or victims of accidents in addition to helping the development of prostheses and exoskeletons.

This Project consists of several programmed codes in the Matlab R2017a software, each one with an specific function, in this way, there is one code for video tracking, another for kinematics and finally other for kinetics. In general, for the development of the program, the position data of simple markers located in the joints of the body are acquired, the body is present as a set of rigid segments, with the help of the acquired data the angle, the angular velocity and the angular acceleration in each segment are calculated and finally the forces and torques present in the process of human gait are calculated.

Finally, with the validated program with theoretical data, we proceed to take data and to use the program in 2 real subjects obtaining reliable results.

---

\* Graduate project

\*\* Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director: Diego Fernando Villegas Bermúdez, PhD.

## INTRODUCCIÓN

El concepto de biomecánica es la combinación de las palabras biología y mecánica. La biomecánica es una disciplina científica que tiene por objeto el estudio de las estructuras de carácter mecánico que existen en los seres vivos, fundamentalmente del cuerpo humano. Esta área de conocimiento se apoya en diversas ciencias biomédicas, utilizando los conocimientos de la mecánica, la ingeniería, la anatomía, la fisiología y otras disciplinas, para estudiar el comportamiento del cuerpo humano y resolver los problemas derivados de las diversas condiciones a las que puede verse sometido.

Se sabe poco sobre las bases del comportamiento mecánico del cuerpo humano, al menos si se compara con lo que se conoce acerca de, por ejemplo, una barra de una determinada aleación metálica o sobre casi cualquiera de las estructuras que ha inventado el ingenio humano.

Al igual que el resto de los animales, el hombre ha desarrollado una forma específica de locomoción, que conocemos como marcha humana. La marcha humana es un proceso de locomoción en el cual el cuerpo humano, en posición erguida, se mueve hacia adelante, siendo su peso soportado, alternativamente, por ambas piernas<sup>1</sup> mientras el cuerpo se desplaza sobre la pierna de soporte, la otra pierna se balancea hacia adelante como preparación para el siguiente apoyo. Uno de los pies se encuentra siempre sobre el suelo y, en el período de transferencia del peso del cuerpo de la pierna retrasada a la pierna adelantada, existen un breve intervalo de tiempo durante el cual ambos pies descansan sobre el suelo<sup>2</sup>.

La marcha humana es una de las acciones más comunes que efectúa el cuerpo, razón por la cual es importante realizar estudios que nos ayuden a comprender mejor este mecanismo de desplazamiento. Este conocimiento es la base del tratamiento sistemático de algunas enfermedades, así como del manejo de la marcha humana con patologías, especialmente cuando se manejan prótesis y ortesis, en este campo puede ser muy utilizado en diversas aplicaciones en el país, debido a diversos fenómenos que afectan una marcha normal como son: las enfermedades epidemiológicas, los accidentes y la violencia.

---

<sup>1</sup> SÁNCHEZ LACUESTA, J. Javier, et al. Biomecánica de la marcha humana normal y patológica. Valencia: Instituto de Biomecánica de Valencia, 2005

<sup>2</sup> *Ibíd.*,

**Figura 1.** Marcadores en la marcha humana.



**Fuente:** [http://www.prophysics.ch/assets/Uploads/\\_resampled/croppedimage1000433-3D-Bewegungsanalyse1000x433.jpg](http://www.prophysics.ch/assets/Uploads/_resampled/croppedimage1000433-3D-Bewegungsanalyse1000x433.jpg)

El análisis instrumentado de la marcha corresponde al análisis de la condición clínica de marcha de una persona mediante el uso de tecnología altamente especializada. El paciente es instrumentado mediante la colocación de marcadores pasivos reflectantes sobre la piel o ropa en relación a puntos de referencias óseos y de electrodos de superficie y/o aguja para registro de actividad electromiografía, de acuerdo a protocolos estandarizados. El paciente es monitoreado por un sistema de medición mientras camina libremente a lo largo del sendero de marcha del laboratorio a velocidad auto determinada. Este sistema de medición está constituido por un sistema opto electrónico de cámaras infrarrojas y cámaras de videos convencionales ubicado alrededor del sendero de marcha, plataformas de fuerzas empotradas en el piso y un equipo de registro de electromiografía dinámica. Algunos laboratorios disponen además de tecnología para el cálculo del gasto energético de la marcha y podobarografía para estudio de presiones plantares, sin embargo esta clase de estudios sobre la marcha y sus diferentes alteraciones no es viable económicamente para la actual realidad latinoamericana ya que en la mayoría de casos estas pruebas son realizadas por clínicas especializadas con costosos equipos de medición.

Gracias al poder de análisis que ofrece hoy en día la implementación de software especializados como MATLAB, el cual es una plataforma optimizada de programación para resolver problemas ingenieriles y científicos da una herramienta versátil para la adquisición de datos, análisis y simulación de los diversos fenómenos físicos presentes en los movimientos del cuerpo humano.

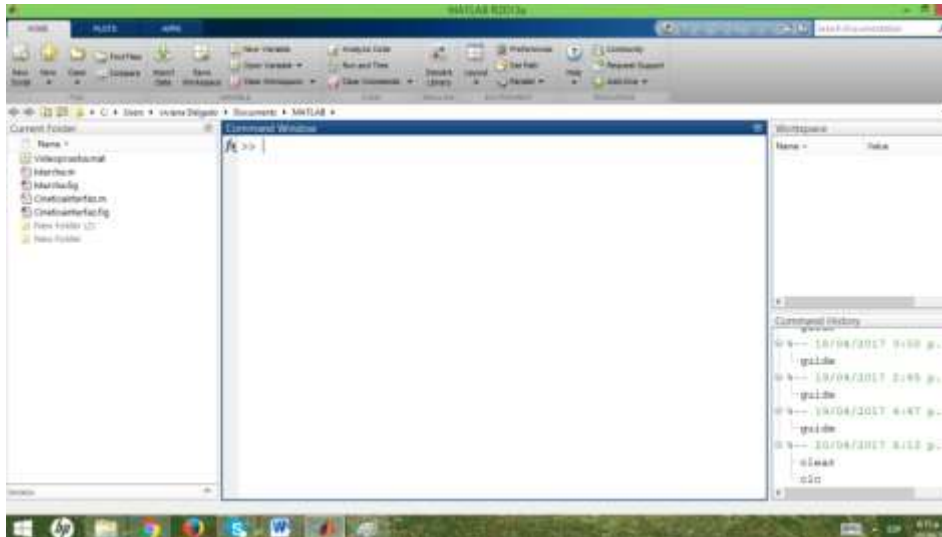
**Figura 2.** Laboratorio de marcha



**Fuente:** <http://content.qualisys.com/2014/06/clinical-gait-analysis-and-research-facility-salford.jpg>

El lenguaje de MATLAB, basado en matrices, posibilita una forma excelente para expresar las matemáticas computacionales. Los gráficos integrados facilitan la visualización de los datos y la obtención de información a partir de ellos, además cuenta con una vasta librería de “toolbox” predisuestas que le permiten empezar a trabajar inmediatamente con algoritmos prediseñados para su dominio. También cuenta con un entorno de escritorio amigable con el usuario y versátil para el desarrollo de programas que permitan un mejor entendimiento de fenómenos físicos a través del modelado y simulación matemática con un porcentaje de error bajo en la interpretación de variables físicas y a un bajo costo experimental.

**Figura 3.** Entorno MATLAB R2017a



# 1. PLANTEAMIENTO DEL PROYECTO

## 1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La demanda creciente de tratamientos eficaces y modernos para el desarrollo de la salud y el bienestar es uno de los problemas que enfrentan actualmente no solo los profesionales en el campo de la salud sino también los futuros ingenieros y científicos con el desarrollo de las ciencias multidisciplinares como lo es la biomecánica en conjunto con las herramientas computacionales modernas.

Usualmente se da por sentado que la manera de caminar es algo intrínseco a cada persona sin pensar que existe una posición y una manera correcta de hacerlo además existen malas posturas que pueden ocasionar enfermedades y problemas ergonómicos en las personas. La falta de claridad en la postura al caminar, la falta de ergonomía al levantar peso, la mala ejecución de un salto en un deporte son algunos ejemplos de errores dinámicos los cuales pueden ocasionar lesiones que afectan el proceso motriz natural.

## 1.2 JUSTIFICACIÓN

El avance tecnológico y científico al servicio de la salud y el bienestar del ser humano es uno de los pilares fundamentales de la ingeniería. El mejoramiento continuo, la aplicación de las nuevas tecnologías en desarrollo y la versatilidad de los modernos lenguajes de programación y simulación en software como MATLAB R2017a permiten el análisis óptimo del sistema motriz del cuerpo humano y son la base de la evolución de nuevas prótesis, diagnósticos y valoraciones más objetivas, tratamientos de rehabilitación, el diseño de máquinas ergonómicas en pro de la salud del ser humano entre otras.

Con el análisis cinemático y cinético de la marcha se busca la caracterización de los valores naturales de la marcha con los diferentes biotipos para estandarizar y comparar parámetros de desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerzas y torques para facilitar diagnósticos e implementar tratamientos que contribuyan al restablecimiento de la salud del paciente.

El análisis video gráfico constituye una herramienta fácil de implementar que no necesita de un laboratorio especializado y que permite la obtención de datos claros y a bajo costo.

### **1.3 JUSTIFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN**

Con el estudio de la marcha por medio de análisis video gráfico se busca fomentar el entendimiento y desarrollo en diferentes aplicaciones como lo es la creación de mejores programas de rehabilitación, nuevas prótesis transtibiales y transfemorales que mejoren la calidad de vida de las personas con discapacidades que por lo general en Latinoamérica vienen siendo las poblaciones de recursos más escasos como las víctimas de minas antipersona de las cuales hay alrededor de 11481 víctimas desde 1990 hasta marzo del 2017 en Colombia según el reporte de la página de acción contra minas del gobierno nacional, otro tipo de aplicaciones biomédicas consiste en establecer mejores programas de tratamiento y rehabilitación para las diferentes patologías que pueden afectar el proceso de la marcha y que a largo plazo desencadenan en problemas de salud más graves.

## **2. OBJETIVOS**

### **2.1 Objetivo general**

Analizar la cinemática y la cinética del cuerpo humano en el proceso de marcha por medio de sistema de adquisición y procesamiento de imágenes en MATLAB R2017a, para de esta manera contribuir al desarrollo social, científico y tecnológico de la comunidad y continuar la misión de la Universidad Industrial de Santander en el mejoramiento de la calidad de vida de las personas.

### **2.2 Objetivos específicos**

- Realizar la captura e introducción de datos al software provenientes de una persona real con la utilización de los paquetes de análisis y procesamiento de imágenes de MATLAB R2017a.
- Estudiar la biomecánica de los diversos movimientos del cuerpo humano en el proceso de marcha en plano sagital y coronal con el fin de establecer y caracterizar los movimientos naturales del cuerpo según su biotipo.
- Analizar bidimensionalmente la ergonomía de la marcha en los planos sagital y coronal.
- Determinar los desplazamientos, velocidades, aceleraciones, fuerzas y torques presentes en el proceso de marcha con la finalidad de obtener una base matemática para a partir de este proceder a simular la dinámica del proceso.

### 3. PROCESO DE LA MARCHA

La marcha humana está definida como el paso bípedo que utiliza la raza humana para desplazarse de un lugar a otro. La marcha requiere la integración de diversos sistemas y puede ser modificada por muchos factores como los son: situación emocional, condición de salud y ergonomía.

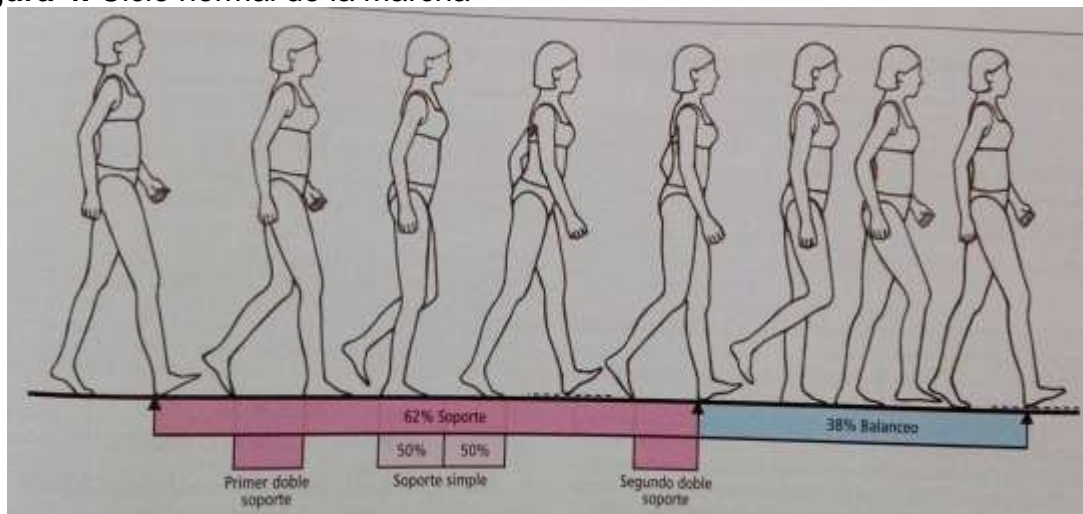
La locomoción humana normal se ha descrito como una serie de movimientos alternantes, rítmicos, de las extremidades y del tronco que determinan un desplazamiento hacia adelante, del centro de gravedad.

Aunque existen variaciones entre los distintos individuos, estas diferencias son muy pequeñas y se pueden establecer parámetros para analizar y estandarizar un correcto funcionamiento del ciclo de la marcha humana.

#### 3.1 EL CICLO DE LA MARCHA

El ciclo de la marcha se puede dividir en 2 grandes fases: la fase de apoyo o soporte la cual corresponde aproximadamente al 62% del ciclo y la fase de balanceo que corresponde al 38% del ciclo.

**Figura 4.** Ciclo normal de la marcha



**Fuente:** Evaluación clínico-funcional del movimiento corporal humano de Javier Daza Lesmes

Por instantes los 2 pies se encuentran en contacto con el suelo, esta situación se conoce como periodo de doble soporte y se presenta 2 veces durante el ciclo de la marcha, al inicial y al finalizar la fase de soporte. Este evento constituye el 25% del ciclo. El tiempo de duración de esta fase es inversamente proporcional a la velocidad de la marcha llegando a desaparecer al inicial el proceso de carrera.

**3.1.1 Fase de apoyo.** Esta es la fase en la que el pie está en contacto con el suelo, permite que la carga o el peso del cuerpo se transfiera de una extremidad a otra. La fase de apoyo se divide en 5 intervalos o sub fases:

- **Contacto inicial:** Es el instante en que el pie que se adelanta hace contacto con el suelo sirviendo de soporte fijo para que el resto del cuerpo empiece a desplazarse hacia adelante. Normalmente la región de impacto es el talón. Cuando hay limitaciones en esta actividad es posible encontrar que el contacto se realice con otra parte del pie.
- **Apoyo planar o respuesta a la carga:** Instante en que el pie hace contacto completamente con el suelo y empieza a soportar totalmente el peso del cuerpo. Durante su desarrollo se presenta el primer doble soporte. Representa cerca del 10% del ciclo total.
- **Apoyo medio:** Se inicia cuando la extremidad contralateral pierde contacto con el suelo y el peso del cuerpo se transfiere a lo largo del pie hasta que se alinea con la cabeza de los metatarsianos. El pie, como punto fijo, permite que el peso corporal se desplace progresivamente hacia adelante gracias a la rotación de la tibia sobre el pie estático. Representa entre el 10% y el 30% del ciclo y coincide con el primer 50% del soporte simple<sup>3</sup>.
- **Apoyo terminal:** Momento en que el talón se levanta para desplazar el peso hacia los dedos y transferir la carga al pie contralateral el cual entra en contacto con el suelo. Representa del 30% al 50% del ciclo de la marcha.
- **Despegue o prebalanceo:** Inicia cuando el pie contralateral entra en contacto con el suelo y termina cuando los dedos del pie ipsilateral despegan de suelo. El peso corporal se traslada de una pierna a otra.

**3.1.2 Fase de balanceo.** Comprende la fase en la que el pie despegar del suelo. Esta fase se divide en 3 intervalos:

- **Aceleración:** Inicia cuando los dedos del pie abandonan el suelo y terminan cuando la rodilla alcanza su flexión máxima de 60°. El muslo se encuentra

---

<sup>3</sup> DAZA LESMES, Javier. Evaluación clínico-funcional del movimiento corporal humano. 1 ed. Bogotá D.C.: Editorial médica Panamericana, 2007.

debajo del cuerpo soportando el peso. Representa del 62% al 75% de la marcha.

- Balanceo medio: Inicia con la rodilla en su posición de flexión máxima y termina cuando la tibia se encuentra ubicada en forma perpendicular con el suelo. Ocupa del 75% al 85% de la marcha.
- Desaceleración o balanceo terminal: Inicia cuando la tibia está en posición perpendicular con el suelo y termina cuando el talón hace contacto con el suelo reiniciando de esta manera el ciclo. Dura el 15% del ciclo.

### **3.2 ESTADO DEL ARTE**

Actualmente la biomecánica se encuentra en el pleno auge debido a los nuevos avances alcanzados en materia de materiales y poder de cómputo para adquisición y procesamiento de datos, por esta razón ya se han realizado varios estudios en lo que respecta a la cinemática y la cinética del cuerpo humano haciendo énfasis en diferentes partes del cuerpo tales como: “Análisis cinético y cinemático del gesto «levantarse de una silla» en pacientes con lumbalgias” presentado por M.F. Peydro et al. Del Instituto de Biomecánica de Valencia.

Podemos observar la importancia que toma entender la dinámica de la marcha en las aplicaciones modernas de tratamientos en los estudios que ofrecen clínicas como Podoactiva:

“El estudio biomecánico de la marcha o pisada consiste en el análisis del pie en posición estática y dinámica así como su relación con otras estructuras como la rodilla, la cadera o la columna. Realizando un correcto estudio de la marcha podemos prevenir la aparición de lesiones musculares y osteo articulares como los esguinces de repetición, metatarsalgias, fascitis plantares, espolones calcáneos, tendinitis, sobrecargas musculares, condropatías, basculaciones pélvicas, etc.”<sup>4</sup>

Adicionalmente se han realizado estudios como “Estudio sobre la marcha humana” realizado por Carlos Arturo Bohórquez Avila el cual define los pasos efectuados en

---

<sup>4</sup> Podoactiva. 23 de junio del 2016, Disponible en internet. <<http://www.podoactiva.com/es/estudio-biomecanico-podoactiva>>.

la marcha y la cinemática y cinética presentes en estos entre otros múltiples estudios.

En la actualidad se cuenta con herramientas como el software NedAMH/IBV desarrollado por el instituto Politécnico de Valencia, el cual se basa en la utilización de una plataforma dinamométrica para valorar la funcionalidad y la regularidad de la marcha mediante la comparación de los valores obtenidos con patrones de normalidad. Este software se usa principalmente para la valoración de pacientes en proceso de rehabilitación, análisis en la evolución, planificación de tratamientos, peritajes medico legales y valoración del daño corporal.

Otra herramienta desarrollada también por el Instituto Politécnico de Valencia para el estudio de movimiento es el software llamado Kwon 3D, este programa permite hacer análisis con instrumentos complejos pero también se pueden usar solo 2 cámaras convencionales, marcadores reflectantes y focos para realizar análisis de una gran variedad de movimientos en 3 dimensiones.

También existen herramientas de software libre que se pueden encontrar fácilmente en el internet como lo es Kinovea el cual permite realizar un análisis fácil y rápido de videos grabados con anterioridad, permitiendo obtener datos de tiempo, ángulos, trayectorias y coordenadas, así como la reproducción en altas o bajas velocidades y la utilización de marcas visuales. Este programa funciona básicamente seleccionando un cuadro o frame con determinados pixeles los cuales son seguidos durante la reproducción de video.

Hoy en día empresas como Ortomec dispone de equipos especializados pioneros en medición como lo son las plataformas de presión plantares las cuales facilitan y optimizan el análisis de la distribución de presiones en las diferentes zonas del pie para evaluar las influencias de las fuerzas aplicadas tanto estáticas como dinámicamente a través de plataformas con registro electrónico, también tienen dispositivos para el estudio de la morfología del pie en tercera dimensión y realizan la manufactura de las plantillas hechas según el material y necesidades del paciente.

Además del uso clínico, estas plataformas presentan también un uso científico, pues miden la presión de un modo cuantificable, lo que sirve para hacer estudios dinámicos de la marcha, hacer comparaciones de presiones pre y post quirúrgico, sin y con tratamiento ortopédico para comparar la efectividad del uso de las plantillas para pies.

También existen empresas como Biomec con presencia en toda América Latina la cual se dedica a importar, distribuir e instalar instrumentos para múltiples aplicaciones en el área de la biomecánica, uno de sus productos ofrecidos es la venta e implementación de un laboratorio de marcha 3D el cual tiene varias versiones según la precisión que se desee y el presupuesto con el que se cuente, pero en general consta de varias cámaras (6 en la versión básica y 10 en la versión deluxe), un computador con los programas especializados según la aplicación, sistemas de calibración, marcadores reflectivos y tiene la posibilidad de integrar electromiogramas y plataformas de fuerza.

Zebris es una empresa alemana que está a la vanguardia en instrumentos para aplicaciones biomecánicas a nivel mundial. En el campo de la marcha humana esta empresa ofrece plataformas integradas en la cinta de marcha de una caminadora, esto permite adquirir datos de fuerzas en la pisada sin ningún tipo de injerencia en el proceso realizado por la persona, incluso ofrecen plataformas para rehabilitación las cuales, con el uso de un proyector, le van indicando al paciente donde debe apoyar el pie. También ofrecen sistemas CMS los cuales permiten tomar mediciones antropométricas exactas sin necesidad de calibraciones o uso de elementos manuales ya que estas se realizan con la utilización de instrumentos de ultrasonido.

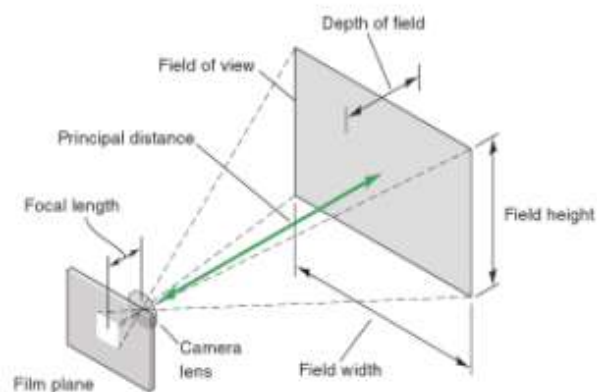
Existen también técnicas como lo es la fotogrametría la cual permite registrar, analizar el movimiento y calcular las variables biomecánicas que lo describen a partir de la imagen filmada, se utilizan actualmente desde cámaras digitales sencillas hasta la tecnología de punta con cámaras de alta velocidad; el proyecto de grado "Estudio cinemático del cuerpo humano mediante Kinect" presentado por Daniel Ramos Gutierrez es una muestra de esto ya que en este se usó una cámara Kinect fácil de encontrar en el mercado y un programa de ordenador para caracterizar la cinética del cuerpo humano.

#### 4. PRINCIPIOS DE LOS MÉTODOS VIDEOGRÁFICOS DE CAPTURA DE DATOS.

A continuación se procederá a explicar detalladamente los principios de los métodos videográficos de captura de datos ya que estos fueron usados para la realización de este proyecto. La información sobre otros métodos de captura de datos se encuentra consignados en el anexo N. Para realizar correctamente la toma de datos usando métodos videográficos es necesario tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Campo de visión: Se refiere al plano o área rectangular que alcanza a captar la cámara medida desde una distancia perpendicular a esta llamada distancia principal. Debe haber un espacio considerable entre los marcadores y el límite del campo de visión con el fin de que estos no se salgan en ninguna fase del movimiento o pasen cerca de los límites, ocasionando un error en la toma de datos. Movimientos antes y después del periodo de interés deben ser también grabados para prevenir inexactitud cerca del final de la grabación coordinada el cual puede resultar en ruido para la captación de datos.

**Figura 5.** Dimensiones importantes de la cámara



▲ **Figure 1.7** Photographic dimensions.

**Fuente:** Research métodos in biomecánicos de ROBERTSON, D. G. E., et al.

- Imágenes por segundo: La imágenes por segundo es que tan rápido la cámara captura imágenes del medio, para aplicaciones en las que la persona se mueve muy rápido se usan cámara que graban entre 100 y 200 fps (frames per secón), en aplicaciones a baja velocidad se pueden usar cámaras ordinarias, estas graban entre 20 y 30 fps. Una técnica bastante común para

obtener una buena cantidad de fps consiste en disminuir la resolución del video de esta manera se pueden incluso doblar la cantidad de fps normales, Pero si la resolución es muy baja los marcadores pueden confundirse con el entorno o no se puede llegar a apreciar correctamente el movimiento, si las imágenes por segundo son muy bajas pueden llegar a verse los marcadores como líneas o incluso no llegar a verse en determinados momentos. Este factor está determinado por el sistema aditivo de exposición fotográfica (Aditiva Photographic Exposure System) el cual es obtenido de fuentes especializadas.

**Tabla 1.** Aperturas, tiempos de exposición y velocidades de grabación para una cámara estándar

APEX value	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aperture (f-stop)	1	1.4	2	2.8	4	5.6	8	11	16	22	32
Exposure time (s)	1	1/2	1/4	1/8	1/15	1/30	1/60	1/125	1/250	1/500	1/1000
Film speed (ISO or ASA)	3	6	12	25	50	100	200	400	800	1600	3200

**Fuente:** Research methods in biomechanics de ROBERTSON, D. G. E., et al.

- Iluminación: La correcta iluminación es muy importante ya que si es muy poca o demasiada es posible que el computador no detecte los marcadores o que no se pueda apreciar correctamente el movimiento del paciente también Influye mucho el fondo en donde se realice la prueba, frecuentemente se usa un fondo blanco o negro sin irregularidades esto permite crear un contraste para que se puedan identificar los diferentes marcadores de manera más óptima en el video.

#### 4.1 CALIBRACIÓN DEL SISTEMA DE IMÁGENES

Como se describió anteriormente es necesario disponer de una vara o regla de calibración para escalar los objetos de estudio obtenidos en el video, sin embargo para el análisis bidimensional también es necesario incluir al menos 4 marcadores extra distribuidos en el plano de forma no colineal para calibrar la digitalización de datos, existe entonces un factor de escala (s) el cual está determinado por:

**Ecuación 1.** Factor de escala

$$s = \frac{\text{longitud real (cm ó m)}}{\text{longitud digitalizada (píxeles)}}$$

**Ecuación 2.** Coordenada escalada X

$$x = s * u$$

### Ecuación 3. Coordenada escalada Y

$$y = s * v$$

Donde  $u$  y  $v$  son las coordenadas digitalizadas de las marcas,  $x$  y  $y$  son las coordenadas escaladas. Después de que los marcadores en los puntos de control sean grabados, las ecuaciones son computarizadas para escalar las coordenadas digitales y compararlas con un sistema métrico real. En una disposición de grabación 2D con cámara digital, la distorsión de datos resulta de la desalineación de la cámara al eje óptico perpendicular al plano de movimiento.

## 4.2 SELECCIÓN DE LAS MARCAS PARA ANÁLISIS BIDIMENSIONAL

El posicionamiento de las marcas para en análisis de la marcha es uno de los aspectos más importantes a tener en cuenta si se quiere evitar posibles distorsiones en los datos adquiridos, para la ubicación de los diferentes marcadores algunos de los protocolos más conocidos son Newington, Gage, Davis, Helen Hayes, Kadaba o el modelo VCM (Vicon Clinical Manager).

En el caso de estudio del análisis de marcha el protocolo Davis es uno de los más usados en la actualidad el cual usa puntos anatómicos de referencia prominencias óseas como el acromion, la espina iliaca antero-superior, el trocánter mayor, el cóndilo femoral lateral, la cabeza del peroné, el maléolo lateral, la cabeza del quinto metatarsiano, la séptima vértebra cervical, la primera vértebra sacra y los calcáneos. Utiliza también marcadores proyectados en barras para la mitad del muslo derecho e izquierdo y la mitad de la pierna derecha e izquierda. Estos marcadores reflectivos, que son detectados por las cámaras, son adheridos a la piel del paciente en los puntos mencionados.

**Figura 6.** Distribución de marcadores según el protocolo Davis Plano Sagital



### 4.3 PROPAGACIÓN DE ERRORES

Las magnitudes de origen experimental pueden ser de dos tipos. Por una parte, están las variables o magnitudes directas, que son las que se obtienen mediante una operación directa de medición, como cuando se superpone una cinta métrica a un segmento lineal, con el fin de establecer el valor de una longitud; en tal caso, el error de la medición depende, básicamente, de la resolución y de la calibración del instrumento, y del procedimiento de medida. Por otro lado, están las Magnitudes derivadas, que dependen del cálculo de una función de magnitudes o variables experimentales directas y derivadas, como cuando se calcula una velocidad a partir de mediciones de tiempo y distancia, o cuando se estima el valor de la aceleración de la gravedad, a partir de las oscilaciones de un péndulo, o como cuando se infiere, a partir del cambio en la resistencia eléctrica en un extensómetro, la deformación longitudinal unitaria de un material elástico, en una dirección determinada. Así pues, se entiende que los errores de las variables que participan en el cálculo de una magnitud experimental derivada se propagan y afectan su precisión y exactitud, en una proporción que es del caso estimar<sup>5</sup>.

Para el caso experimental de la marcha esta propagación del error se verá reflejada en las derivadas de las posiciones respecto al tiempo el cual se deriva para encontrar las velocidades y aceleraciones de los centros de masa y de las velocidades angulares y aceleraciones angulares posteriormente usados en los cálculos de la cinética<sup>6</sup>.

---

<sup>5</sup> MARBELLO PEREZ, Ramiro. Manual de prácticas de Laboratorio. Medellín: Universidad Nacional de Colombia. Escuela de Geociencias y medio ambiente. p 315-320.

<sup>6</sup> AGUDELO MENDOZA, Adriana Isabel et al. Marcha: descripción, métodos, herramientas de evaluación y parámetros de normalidad reportados en la literatura. En: Revista CES Movimiento y Salud, 2013, vol 1. No 1

## 5. LABORATORIO DE MARCHA Y SUS HERRAMIENTAS

Para el análisis de marcha se utilizó el laboratorio de marcha de la escuela de fisioterapia de la Universidad Industrial de Santander ubicado en la sede de la facultad de salud, el cual está enfocado en estudios de la salud y funcionamiento del cuerpo humano.

**Figura 7.** Laboratorio de marcha Universidad Industrial de Santander



Este laboratorio cuenta con diferentes herramientas para el análisis funcional de la marcha como lo es un pasillo adecuado para efectuar de dos a tres ciclos de marcha con un fondo oscuro para un buen contraste con respecto a los elementos estudiados, cuenta con dos cámaras de marca Panasonic de referencia HC- V160 que cuenta con una adquisición de 30 frames por segundo y con una resolución de video de 1920x1080 pixeles junto con los respectivos trípodes los cuales son ideales para el enfoque y facilitan la calibración de la perpendicularidad entre la distancia principal con respecto al plano de movimiento.

**Figura 8.** Trípode usado



## 6. ANÁLISIS DE MARCHA

### 6.1 ADQUISICIÓN DE DATOS

Para el análisis de la marcha humana desarrollada, se efectuó un tipo de análisis video gráfico ya definido anteriormente el cual parte de la toma de datos temporales y espaciales de los marcadores predefinidos en cada una de los puntos de interés.

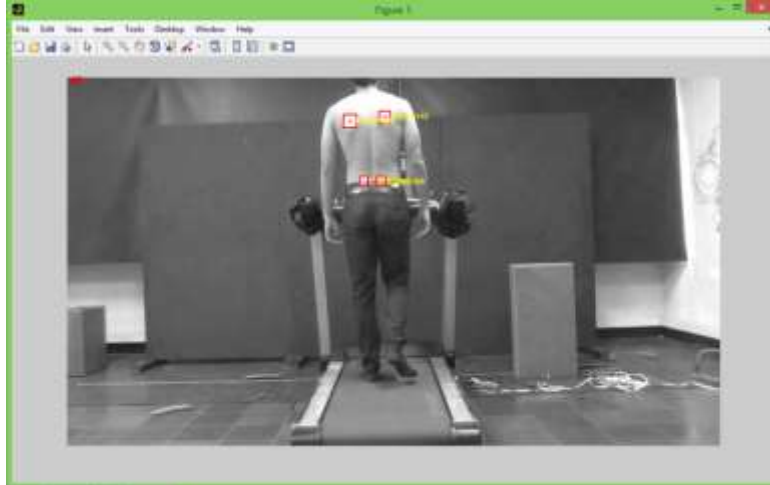
**6.1.1 Posicionamiento de los Marcadores.** Según los protocolos establecidos previamente los marcadores para el estudio del plano sagital se colocaron en la espina iliaca antero-superior, el trocánter mayor, el cóndilo femoral lateral, el maléolo lateral, la cabeza del quinto metatarsiano.

**Figura 9.** Análisis de marcha plano sagital. Experimento 2



Para el análisis de marcha del plano frontal se definieron los marcadores en los omoplatos y en la cadera.

**Figura 10.** Análisis de marcha plano frontal. Experimento 2



**6.1.2 Software para el rastreo de marcadores usando MATLAB R2017a.** Para la obtención de los datos de posicionamiento respecto al porcentaje del ciclo de marcha se utilizaron dos script en Matlab R2017a, usando el image Acquisition toolbox el cual nos facilita la adquisición y procesamiento de imágenes para más información ver anexo A.

Estos Scripts parten de la modificación de un código denominado redObjectTrack el cual es un código de descarga gratuita en la comunidad de Matlab. Este rastrea la posición en tiempo real de un objeto de color rojo desarrollado por A. Bhargav Anand.

El primer código se utilizó para la calibración de la adquisición en tiempo real pero con poca precisión de los frames adquiridos por grabación, se modificó el tipo de memoria para exportar la adquisición en formatos de video AVI guardados en el disco duro para quitar las limitaciones de la cantidad de frames permitidos según la memoria interna de las variables de Matlab R2017a y tener un registro del video estudiado. También se modificó el código para exportar en vectores la posición rastreada de cada uno de los marcadores estudiados con su respectivo número de frame adquirido, así como el color rastreado el cual puede ser tanto rojo como azul de la gamma RGB que presenta Matlab R2017a; se modificó el tamaño de los pixeles borrados es decir el tamaño del marcador a rastrear el cual se definió según las pruebas del laboratorio con respecto a la distancia entre el plano de grabación de la cámara al plano de estudio de movimiento, para más información ver anexo A.

**Figura 11.** Prueba de calibración



Esta calibración en tiempo real se realizó primordialmente para rectificar el tamaño de los marcadores a rastrear, verificar la perpendicularidad respecto al plano de movimiento, y establecer las condiciones óptimas de iluminación y contraste para el rastreo de los marcadores.

Se encontró que para una distancia principal de 386 cm desde el plano del foco del lente al plano de movimiento el tamaño óptimo para el filtro de los marcadores con el script de calibración utilizado fue 30 pixeles, según las pruebas de calibración se encontró que las condiciones de luminosidad del laboratorio no eran óptimas ya que había una gran cantidad de luz incidente en la parte izquierda del laboratorio que se filtraba por las ventanas y que generaba mucho ruido por la reflexión de algunos materiales como los pantalones jean los cuales en las partes más iluminadas eran detectados en la gamma blue del rastreador por lo tanto fue necesario tapar la luz incidente de las ventanas del lado izquierdo con bolsas negras del laboratorio y prender los focos para lograr una iluminación más uniforme en el pasillo de pruebas, así como establecer un fondo negro y ropa negra en las pruebas realizadas. De esta manera se reducen la captación de datos falsos por la reflectividad en partes no deseadas.

Para la calibración de las distancias ubicamos dos marcadores separados a 50cm en una caja del laboratorio la cual ubicamos a la misma distancia principal con respecto al plano del foco de la cámara y el cual nos arroja la equivalencia de la distancia que equivale cada frame.

Para el caso del experimento reemplazando en la ecuación 1 tenemos:

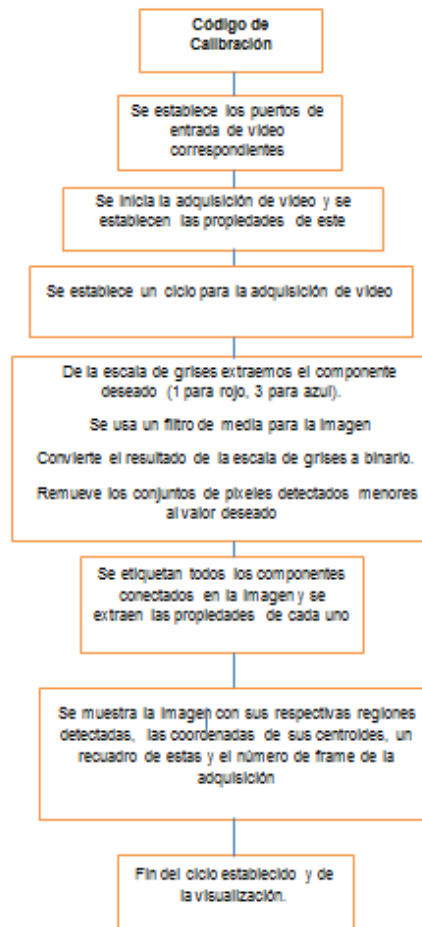
**Ecuación 4.** Factor de escala

$$s = \frac{0,4\text{metros}}{175\text{pixeles}}$$

Donde, es la cantidad x en cm equivalente a la coordenada u en pixeles y y es la cantidad v en cm equivalente a la coordenada v en pixeles.

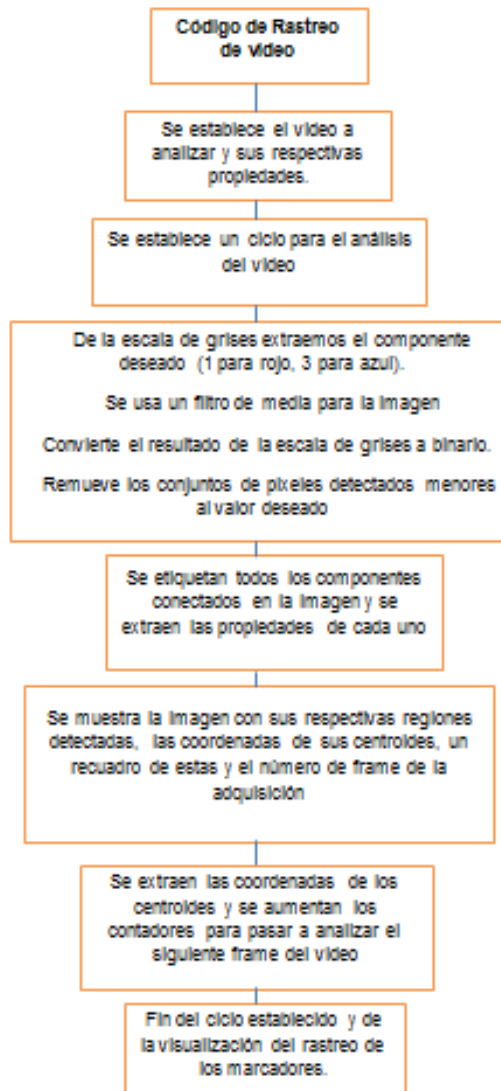
A continuación se presenta un diagrama de bloques donde se explica el funcionamiento del código de calibración en tiempo real. Para un detalle más específico mirar el código en el anexo A.

**Figura 12.** Diagrama de bloques código calibración

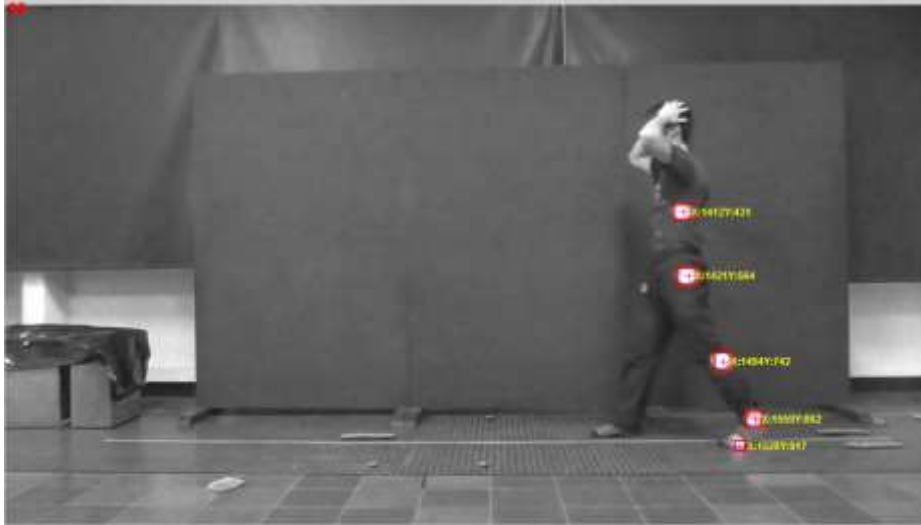


El segundo script es similar al primero solo que realiza el análisis en un video de formato *avi* ya predefinido es decir no en tiempo real. Este se puede utilizar en un computador sin la necesidad de tener un adaptador para adquirir video y con la ventaja que el procesamiento del rastreo aunque más lento se realiza de una manera más completa y por lo tanto con un mejor resultado. Ver Anexo A.

**Figura 13.** Diagrama de bloques código de rastreo



**Figura 14.** Imagen de rastreo en marcha número 1



La marcha para los experimentos se realizó con los brazos arriba para evitar la pérdida de datos en los marcadores que normalmente tapan un movimiento natural del brazo los cuales son el marcador de la cadera y el del denominado hat o conjunto tronco cabeza. Esto afecta la naturalidad de la marcha sin embargo se consideró que disminuye significativamente la presencia de ruido en los resultados del rastreo a causa de la pérdida de datos.

## 6.2 POSPROCESAMIENTO DE DATOS

**6.2.1 Ajuste de los Datos.** Una vez obtenidos los datos vectoriales en MatLab R2017a se pasa a identificar y organizar las respectivas posiciones de cada uno de los marcadores en los ejes coordenados X y Y en unas tablas de Microsoft Excel donde se procede a realizar el cambio de sistemas coordinado el cual consiste en restarle la respectiva resolución el valor del frame adquirido para después pasarlo a escala de centímetros.

**Ecuación 5.** Cambio del sistema de referencia y conversión en unidades en X

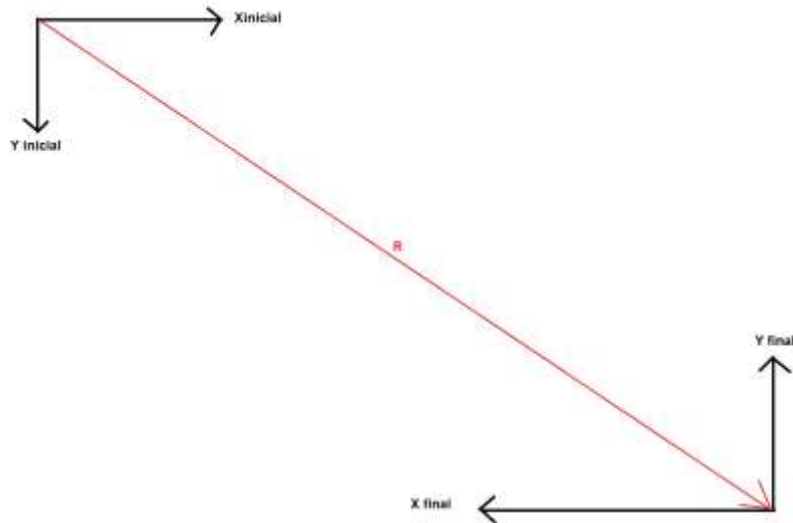
$$xm = (1920pixel - xpixel) * \frac{0,4m}{175pixel}$$

**Ecuación 6.** Cambio del sistema de referencia y conversión en unidades en Y

$$ym = (1080pixel - (1080 - 925) - ypixel) * \frac{0,4cm}{175pixel}$$

Estas ecuaciones aplican para un video grabado de resolución 1920x1080 pixeles. Y donde la línea horizontal del piso concuerda está a (1080-925) pixeles de abajo hacia arriba del plano de grabación. Para más información ver Anexo B.

**Figura 15.** Cambio del sistema de referencia



Una vez hecha la conversión se procede a filtrar las curvas con un ajuste polinómico para darle continuidad a la función y eliminar pequeños errores que se pueden obtener debido a grabar con una cámara de solo 30 cuadros por segundo y por problema de luminosidad. Este ajuste se realiza utilizando la función *polyfit* una vez con los datos pasados a vectores de MatLab R2017a obtenemos las ecuaciones polinómicas para cada marcador.

Inicialmente se realizó un ajuste de aproximación polinómica de grado 8 a las curvas obtenidas experimentalmente, las cuales para la posición representaban una aproximación con un error promedio bajo. Sin embargo como se explicará en el análisis de resultados fue necesario aumentar el grado de la aproximación polinómica a 15 debido a que en el cálculo cinemático de las velocidades y aceleraciones de cada una de las marcas generaba unas curvas poco precisas debido al suavizado de los picos generados por la aproximación polinómica, ver anexo C.

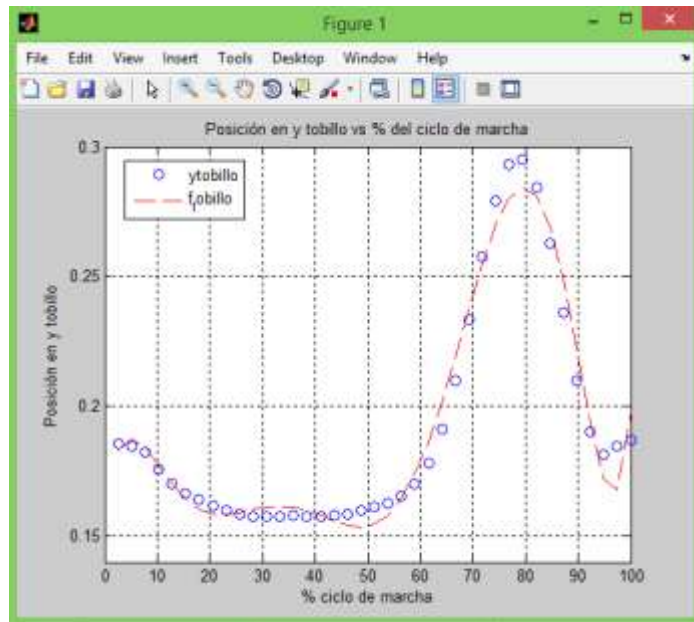
A continuación presentaremos una comparación del suavizado de las curvas según el grado de polinomio para el marcador del tobillo en el eje y, comparando los

resultados con las curvas generadas a partir de las tablas del libro Biomechanic and motor of human movement de David A. Winter.

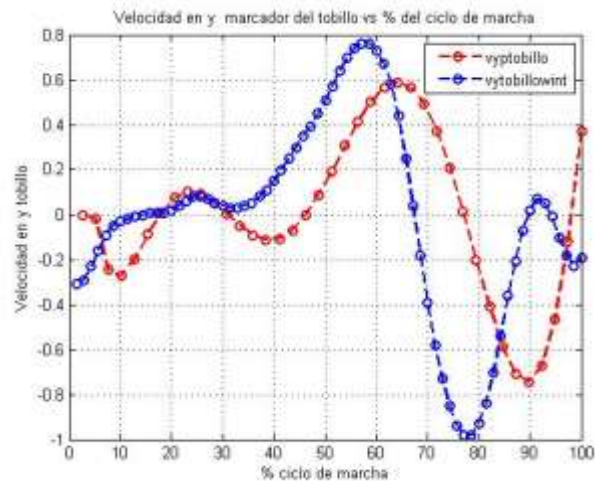
**Ecuación 7.** Ajuste polinómico de grado 8 de la posición en Y del tobillo

$$y_{\text{tobillo}} = -2,89E - 14 * X^8 + 1,28E - 11 * X^7 - 2,25E - 09 * X^6 + 2,05E - 07 * X^5 - 1,02E - 05 * X^4 + 0,000277463 * X^3 - 0,003791997 * X^2 + 0,020622758 * X + 0,09346915$$

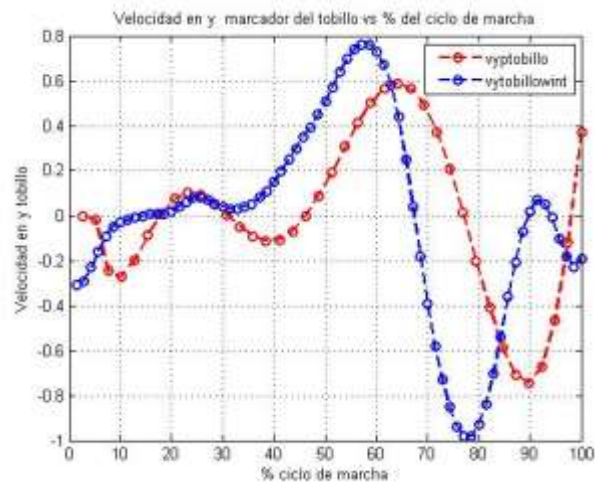
**Figura 16.** Ajuste polinómico de grado 8. Posición en Y del tobillo vs % del ciclo de marcha



**Figura 17.** Velocidad en Y del tobillo marcha 1 (rojo) y libro de Winter (azul) vs % del ciclo de marcha



**Figura 18.** Aceleración en Y del tobillo marcha1 (rojo) y libro de Winter (azul) vs % del ciclo de marcha

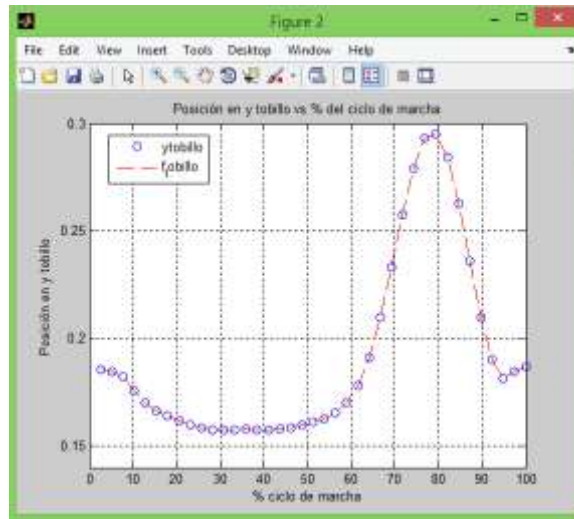


Como podemos observar en las figuras 19, 20 y 21 el grado de polinomio 8 es un ajuste valido para la posición pero a medida que se deriva para encontrar las velocidades y aceleraciones se va alejando debido al suavizado de las curvas y el error que se acumula por lo que es preferible aumentar el grado del polinomio a 15 para que disminuir el error figuras 22, 23 y 24.

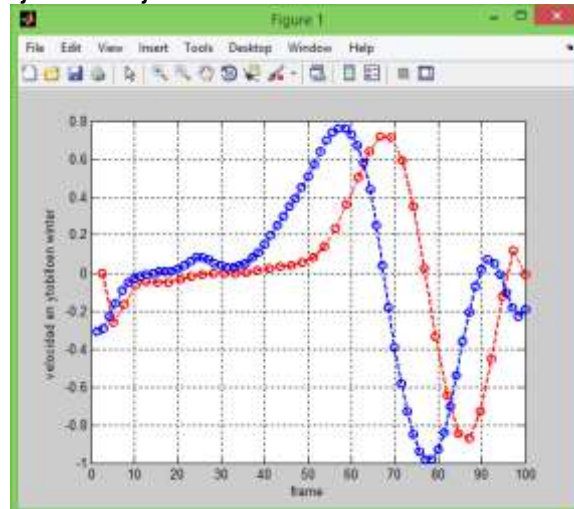
**Ecuación 8.** Ajuste polinómico de grado 15 de la posición en Y del tobillo

$$\begin{aligned}
 y_{pie} = & -6,04E - 26 * X^{15} + 2,58E - 23 * X^{14} - 1,19E - 21 * X^{13} - 1,48E \\
 & - 18 * X^{12} + 4,58E - 16 * X^{11} - 7,02E - 14 * X^{10} + 6,78E - 12 \\
 & * X^9 - 4,44E - 10 * X^8 + 2,03E - 08 * X^7 - 6,51E - 07 * X^6 \\
 & + 1,44E - 05 * X^5 - 0,000215871 * X^4 + 0,002058451 * X^3 \\
 & - 0,011301957 * X^2 + 0,027426685 * X + 0,109790889
 \end{aligned}$$

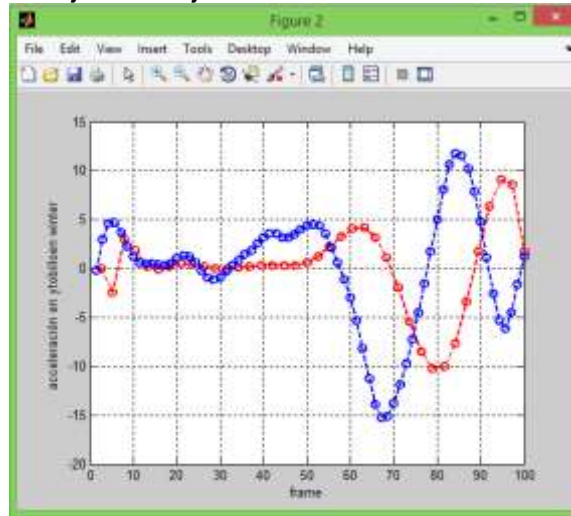
**Figura 19.** Ajuste polinómico de grado 15. Posición en Y del tobillo vs % del ciclo de marcha



**Figura 20.** Velocidad en T del tobillo marcha1 (rojo) y libro de Winter (azul) vs % del ciclo de marcha con ajuste mejorado



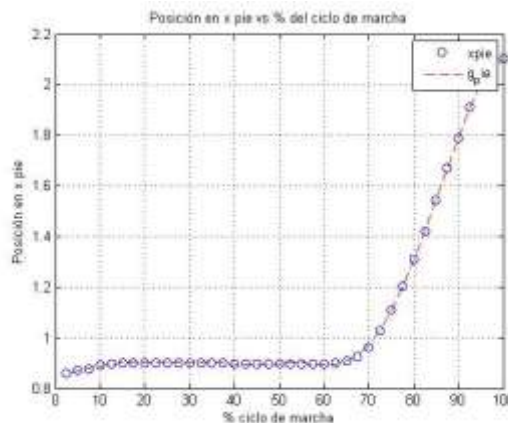
**Figura 21.** Aceleración en Y del tobillo marcha1 (rojo) y libro de Winter (azul) vs % del ciclo de marcha con ajuste mejorado



El desfase en las curvas del experimento realizado comparado con las del libro se debe a varios factores como lo es diferentes velocidades de marcha, diferentes sistemas de referencia, diferencias en los biotipos y en la ubicación de los marcadores es necesario recalcar que no recreamos tal cual el experimento dado en el libro de Winter solo tomamos algunas bases teóricas de videografía y procesamiento de datos sin embargo podemos encontrar que las curvas se asemejan en forma y magnitud por lo que nos da una cierta caracterización cinemática de la posición, velocidad y aceleración de cada uno de los puntos del cuerpo analizados con los marcadores en ciclo de marcha.

### 6.2.1.1 Ejemplo Marcador del Pie.

**Figura 22.** Ajuste polinómico de grado 15 posición en X del pie vs % del ciclo de marcha

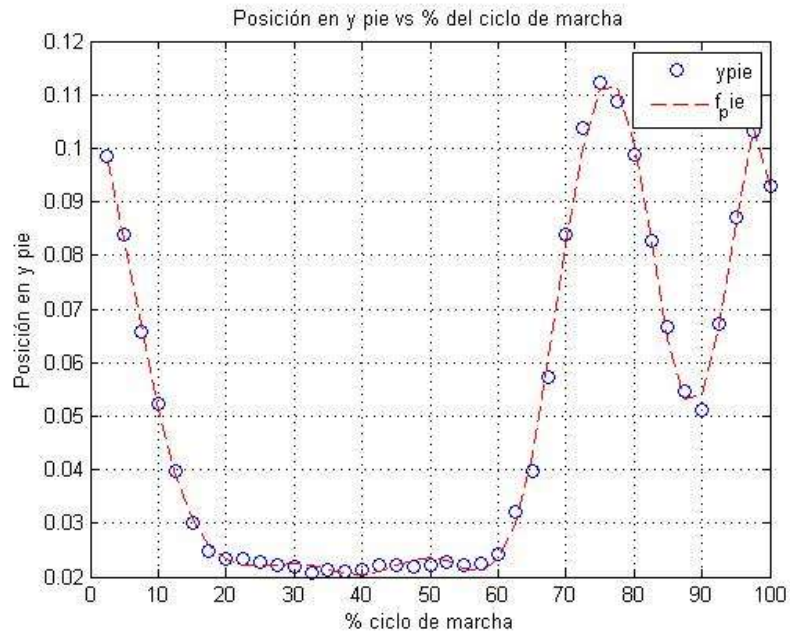


Con un error de ajuste promedio de:

**Ecuación 9.** Error promedio del ajuste polinómico de grado 15 de la posición en X del marcador del pie

$$e = \frac{\sum_i^n ei}{n} = 0,003442356$$

**Figura 23.** Ajuste polinómico de grado 15 posición en Y del pie vs % del ciclo de marcha

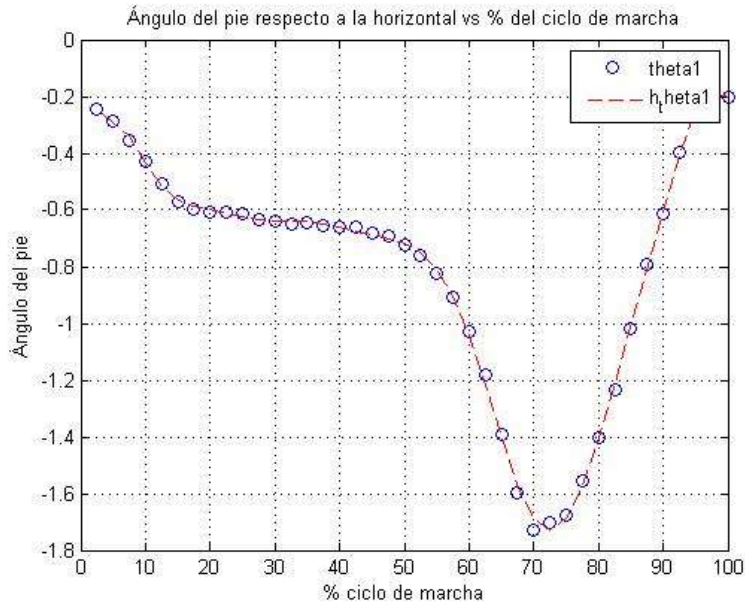


Con un error de ajuste promedio de:

**Ecuación 10.** Error promedio del ajuste polinómico de grado 15 de la posición en Y del marcador del pie.

$$e = \frac{\sum_i^n ei}{n} = 0,002356643$$

**Figura 24.** Ajuste polinómico de grado 15. Ángulo del pie vs % del ciclo de marcha



Con un error de ajuste promedio de:

**Ecuación 11.** Error promedio del ajuste polinómico de grado 15 ángulo del pie.

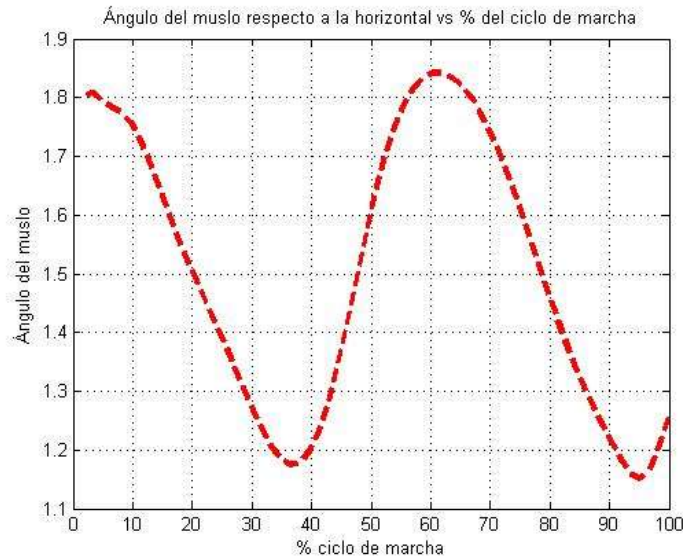
$$e = \frac{\sum_i^n e_i}{n} = 0,022420232$$

Las respectivas ecuaciones y resultados de cada uno de los polinomios de ajuste se presentaran en el anexo G, se observa como es de esperar en los dos ciclos de marcha existen ciertas diferencias en algunas partes del ciclo, estas se deben a las diferencias en los biotipos en los dos experimentos, a las diferentes velocidades de marcha y al error producido tanto en el ajuste de los datos como en el error del cálculo de velocidades y aceleraciones con el uso de diferencias finitas y a pequeños errores en el experimento debido a la reflectividad debido a las condiciones de iluminación.

**6.2.2 Sistema de ecuaciones para el cálculo de los ángulos.** Ya con el ajuste polinómico de los datos de posición planteamos un sistema de ecuaciones para encontrar la variación de los ángulos con respecto a la horizontal de cada uno de los cuerpos rígidos planteados. Theta2 para la sección de la pierna, theta3 para la sección del muslo y theta4 para la sección del tronco-cabeza.

Con esto encontramos cada uno de los ángulos en radianes correspondientes en cada uno de los cuerpos rígidos del modelo planteado en su respectivo porcentaje del ciclo de marcha.

**Figura 25.** Ángulo del muslo vs % del ciclo de marcha



**6.2.3 Método de las diferencias finitas para el cálculo de las velocidades y las aceleraciones.** Una vez obtenidos los ángulos y las posiciones se implementa un script para el cálculo de las velocidades y aceleraciones tanto lineales como angulares implementando un sistema de diferencias finitas.

**Ecuación 12.** Cálculo de velocidades mediante diferencias finitas de primer grado.

$$Vx(i) = \frac{x(i + 1) - x(i - 1)}{2\Delta t}$$

De igual manera se aplicó esta ecuación para las velocidades en Y, para el análisis de velocidades angulares se tiene.

**Ecuación 13.** Cálculo de velocidades angulares mediante diferencias finitas de primer grado

$$\omega_1(i) = \frac{\theta_1(i + 1) - \theta_1(i - 1)}{2\Delta t}$$

De igual manera se aplicó esta ecuación para el cálculo de las demás velocidades angulares con sus respectivos ángulos Donde el  $\Delta t$  está dado por los cuadros por segundo de la cámara los cuales son 30 es decir:

$$\Delta t = \frac{1}{30} \text{ s}$$

Y para las aceleraciones:

**Ecuación 14.** Calculo de Aceleraciones mediante diferencias finitas de primer grado.

$$Ax(i) = \frac{Vx(i + 1) - Vx(i - 1)}{2\Delta t}$$

De igual manera para las aceleraciones lineales en Y.

**Ecuación 15.** Calculo de velocidades angulares mediante diferencias finitas de primer grado.

$$alpha1(i) = \frac{\omega1(i + 1) - \omega1(i - 1)}{2\Delta t}$$

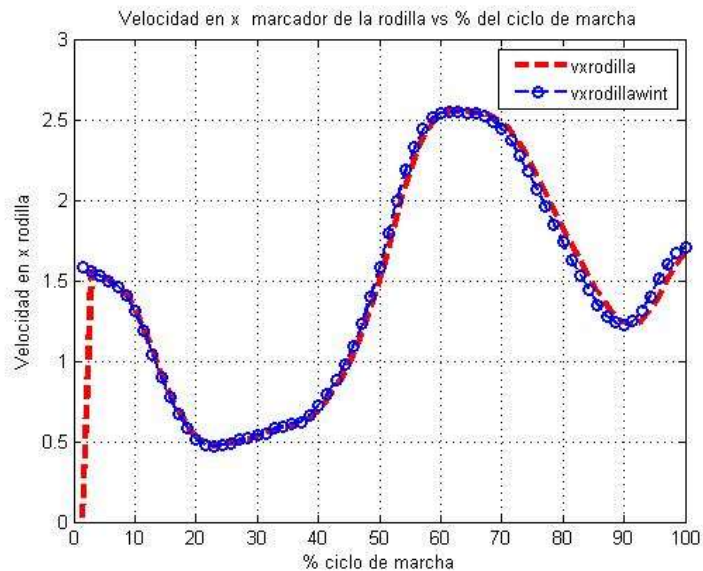
De igual forma se calcula para las demás aceleraciones angulares *alpha2*, *alpha3* y *alpha4*. Como podemos observar para el cálculo por medio de diferencias finitas es necesario reducir el tamaño del vector comparado con las posiciones. (Anexo E).

## 7. ANÁLISIS Y VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS

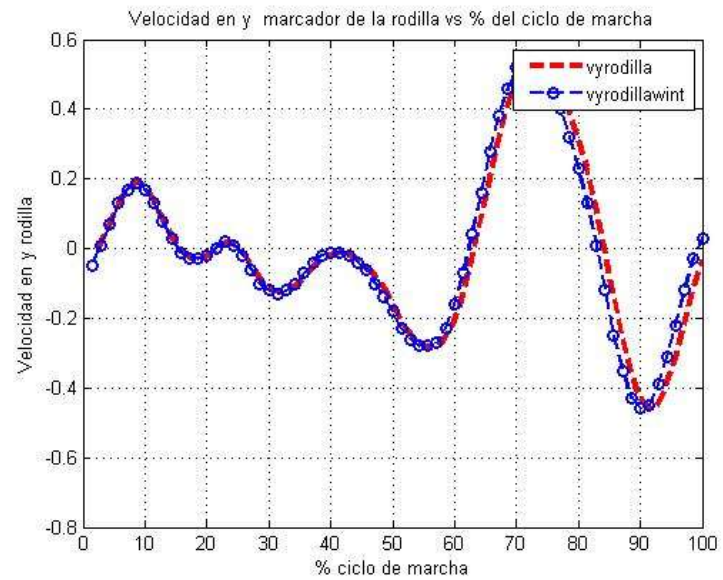
### 7.1 VALIDACIÓN DEL CÁLCULO DE LAS VELOCIDADES Y ACELERACIONES CON LAS DIFERENCIAS FINITAS.

Para validar el script del cálculo de las velocidades y aceleraciones usando el método de diferencias finitas propuesto en el libro Biomechanic And Motor Of Human Movement de David A. Winter Se hicieron comparaciones entre los resultados obtenidos en las pruebas de este libro con los resultados obtenidos por el script de diferencias finitas, usando los mismos datos de entrada los cuales son las posiciones y ángulos tabulados como resultados de un análisis de marcha hecho por el autor.

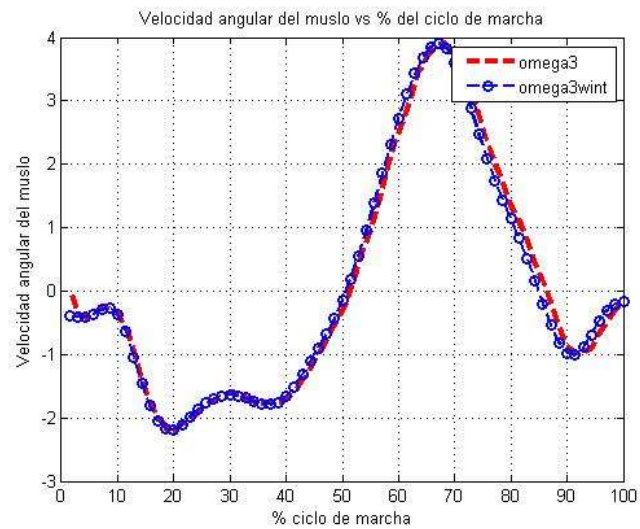
**Figura 26.** Velocidad lineal en X del marcador de la rodilla vs % del ciclo de marcha



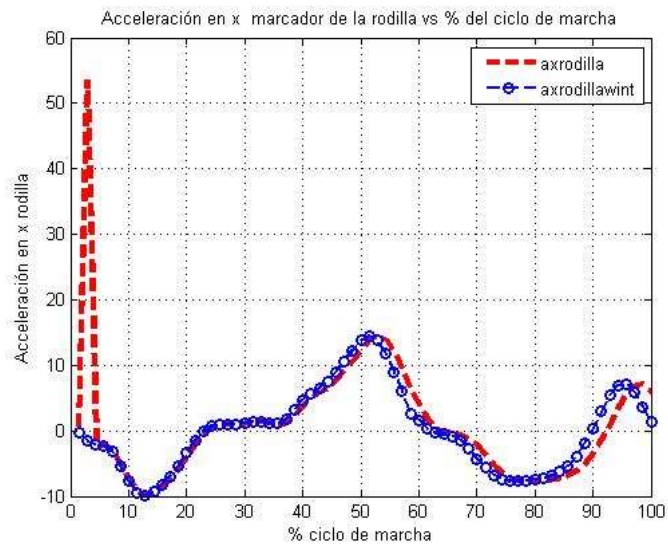
**Figura 27.** Velocidad lineal en Y del marcador de la rodilla vs % del ciclo de marcha



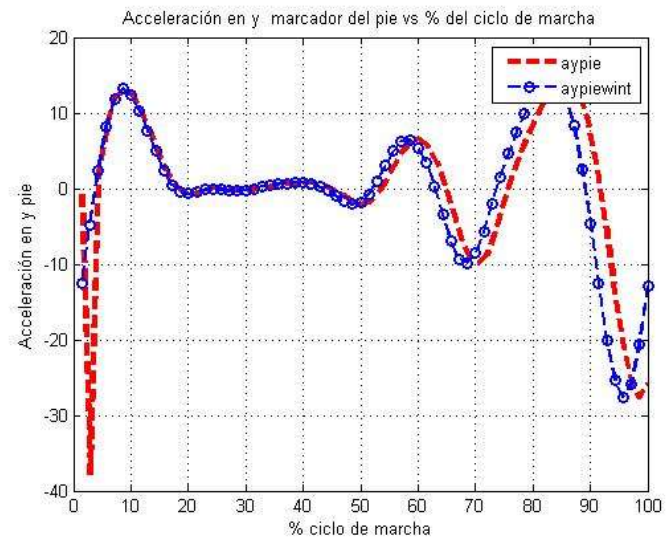
**Figura 28.** Velocidad angular del muslo vs % del ciclo de marcha



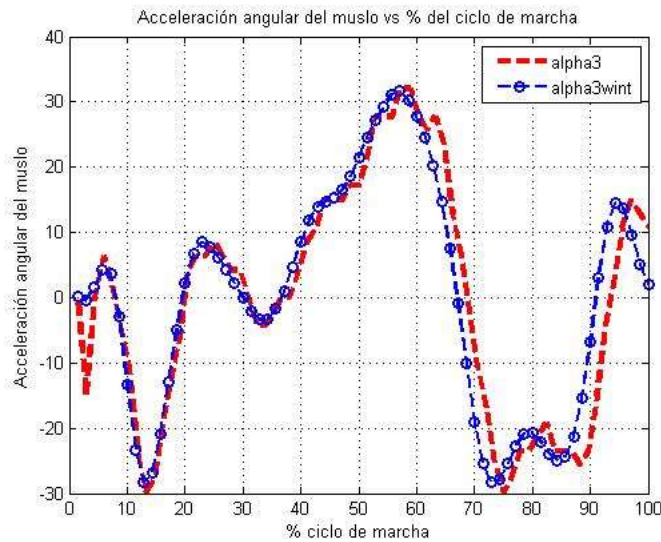
**Figura 29.** Aceleración lineal en X del marcador de la rodilla vs % del ciclo de marcha



**Figura 30.** Aceleración lineal en Y del marcador de la rodilla vs % del ciclo de marcha



**Figura 31.** Aceleración angular del muslo vs % del ciclo de marcha



Como se puede observar en las gráficas de validación existen algunos picos de error en los inicios del ciclo de marcha debido a que se usaron diferencias finitas centradas las cuales requieren tanto un dato antes como un dato después. También se genera un pequeño desfase a medida que aumenta la derivada debido a que al comparar los dos vectores se tienen un muestreo de datos con un delta de frames por segundo diferente, en la validación (curva roja) se hace para un delta de 30 cuadros por segundo mientras que en los datos del libro de Winter esos datos están para un delta de 70 cuadros por segundo. Ver Anexo F.

Para calificar los resultados se usó una herramienta estadística llamada correlación de Pearson la cual se usa para medir el grado de relación entre 2 variables en donde 1 quiere decir que existe una correlación lineal perfecta entre las dos variables es decir un comportamiento exactamente igual, un valor de 0 a 1 nos indica una correlación positiva es decir poseen un comportamiento similar, un valor de -1 a 0 (cero) una correlación negativa es decir un comportamiento inverso, y -1 una correlación lineal perfecta negativa es decir un comportamiento totalmente inverso. Este coeficiente es susceptible al desfase y a los picos generados por las diferencias finitas por lo que se tomó para comparar las curvas a partir del 5% del ciclo de marcha. Para más información ver el anexo J.

**Tabla 2.** Coeficientes de correlación cinemática

	<b>Grafico 1</b>	<b>Grafico 2</b>	<b>Coefficiente de Correlación</b>
1	Desplazamiento en x pie	Desplazamiento en x pie Winter	1
2	Desplazamiento en y pie	Desplazamiento en y pie Winter	1
3	Desplazamiento en x tobillo	Desplazamiento en x tobillo Winter	1
4	Desplazamiento en y tobillo	Desplazamiento en y tobillo Winter	1
5	Desplazamiento en x rodilla	Desplazamiento en x rodilla Winter	1
6	Desplazamiento en y rodilla	Desplazamiento en y rodilla Winter	1
7	Desplazamiento en x cadera	Desplazamiento en x cadera Winter	1
8	Desplazamiento en y cadera	Desplazamiento en y cadera Winter	1
9	Desplazamiento en x hat	Desplazamiento en x hat Winter	1
10	Desplazamiento en y hat	Desplazamiento en y hat Winter	1
11	Velocidad en x pie	Velocidad en x pie Winter	0,993
12	Velocidad en y pie	Velocidad en y pie Winter	0,9456
13	Velocidad en x tobillo	Velocidad en x tobillo Winter	0,9942
14	Velocidad en y tobillo	Velocidad en y tobillo Winter	0,9805
15	Velocidad en x rodilla	Velocidad en x rodilla Winter	0,9913

	<b>Grafico 1</b>	<b>Grafico 2</b>	<b>Coefficiente de Correlación</b>
16	Velocidad en y rodilla	Velocidad en y rodilla Winter	0,9699
17	Velocidad en x cadera	Velocidad en x cadera Winter	0,9740
18	Velocidad en y cadera	Velocidad en y cadera Winter	0,9792
19	Velocidad en x hat	Velocidad en x hat Winter	0,9707
20	Velocidad en y hat	Velocidad en y hat Winter	0,9839
21	Aceleración en x pie	Aceleración en x pie Winter	0,9277
22	Aceleración en y pie	Aceleración en y pie Winter	0,8289
23	Aceleración en x tobillo	Aceleración en x tobillo Winter	0,9386
24	Aceleración en y tobillo	Aceleración en y tobillo Winter	0,8447
25	Aceleración en x rodilla	Aceleración en x rodilla Winter	0,9073
26	Aceleración en y rodilla	Aceleración en y rodilla Winter	0,8198
27	Aceleración en x cadera	Aceleración en x cadera Winter	0,7897
28	Aceleración en y cadera	Aceleración en y cadera Winter	0,8464
29	Aceleración en x hat	Aceleración en x hat Winter	0,7883

	<b>Grafico 1</b>	<b>Grafico 2</b>	<b>Coefficiente de Correlación</b>
30	Aceleración en y hat	Aceleración en y hat Winter	0,8907
31	Angulo del pie	Angulo del pie Winter	1
32	Angulo de la pantorrilla	Angulo de la pantorrilla Winter	1
33	Angulo del muslo	Angulo del muslo Winter	1
34	Angulo del tronco	Angulo del tronco Winter	1
35	Velocidad angular del pie	Velocidad angular del pie Winter	0,9757
36	Velocidad angular de la pantorrilla	Velocidad angular de la pantorrilla Winter	0,9847
37	Velocidad angular del muslo	Velocidad angular del muslo Winter	0,9901
38	Velocidad angular del tronco	Velocidad angular del tronco Winter	0,9861
39	Aceleración angular del pie	Aceleración angular del pie Winter	0,9078
40	Aceleración angular de la pantorrilla	Aceleración angular de la pantorrilla Winter	0,9352
41	Aceleración angular del muslo	Aceleración angular del muslo Winter	0,9573
42	Aceleración angular del tronco	Aceleración angular del tronco Winter	0,8766

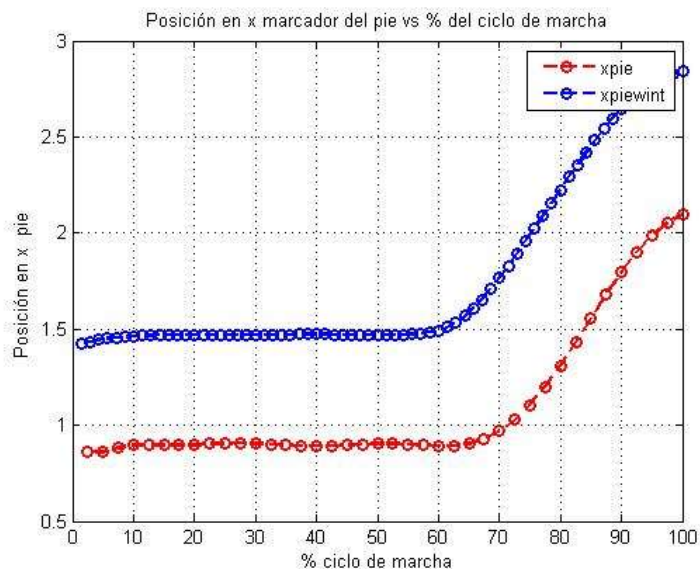
## 7.2 RESULTADOS ANÁLISIS DE MARCHA CINEMÁTICA

Una vez ajustadas las curvas y validadas las diferencias finitas se pasa a realizar la superposición de las curvas obtenidas en el experimento con respecto a las curvas del obtenidas por David A. Winter<sup>7</sup>. Ver Anexo H.

Como podemos observar en los datos experimentales obtenidos de posición en X y en Y las curvas generadas por los marcadores en comparación con las tablas de posición obtenidas en el libro de Winter se asemejan en forma y en magnitud teniendo pequeñas desemejanza que eran de esperar debido a diferencias en el biotipo, en el número de fps de la cámara y en pequeños errores experimentales.

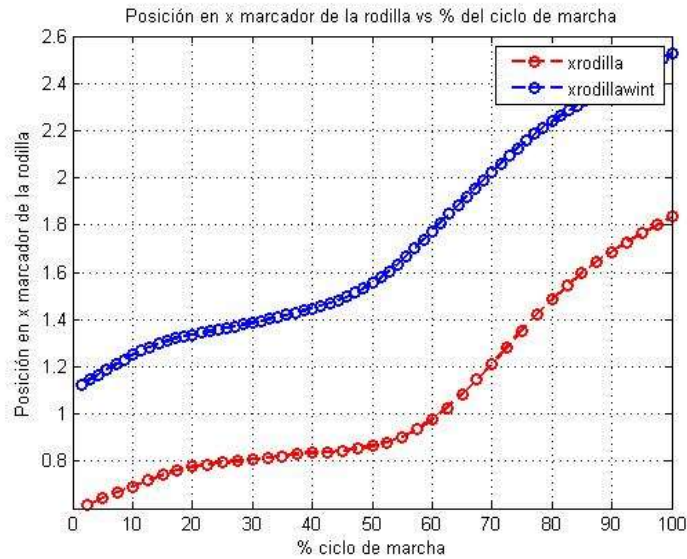
En el caso de los marcadores en el eje X se puede observar un desfase debido al sistema de referencia planteado en el experimento que es trasladado al borde inferior derecho cuyo eje X es positivo de derecha a izquierda y su eje Y de abajo hacia arriba. Para el caso de cambio de sistema coordenado en Y aparte de trasladarse al borde inferior hay que subirlo un poco al eje horizontal en el plano de grabación sobre el cual está caminando la persona esto para evitar errores posteriores en el cálculo de la energía potencial con los datos experimentales.

**Figura 32.** Resultados desplazamiento en X del marcador del pie prueba 1



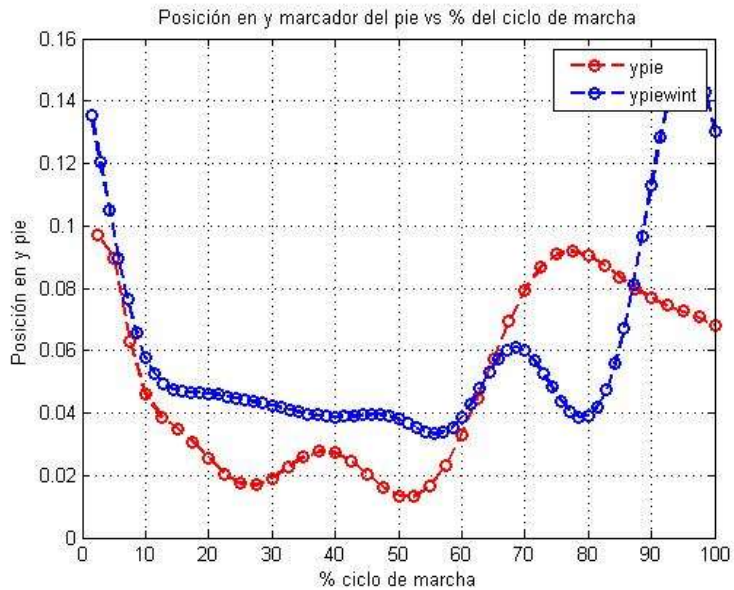
<sup>7</sup> WINTER, David A. Biomechanics and motor control of human movement. 4 ed. John Wiley & Sons, Inc. 2009.

**Figura 33.** Resultados desplazamiento en X del marcador de la rodilla prueba 1



Sin embargo se encuentra que los datos de posición que más difieren del libro de Winter son los de la posición en y del marcador del pie, esto se debe a que el marcador ubicado en el quinto metatarsiano obtiene unos picos de posición en y que son difíciles de apreciar para una cámara de 30 fps.

**Figura 34.** Resultados desplazamiento en X del marcador de la rodilla prueba 1



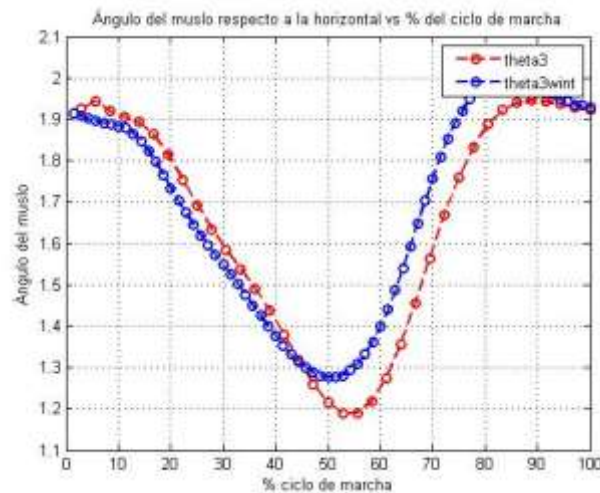
**Figura 35.** Resultados desplazamiento en X del marcador de la rodilla prueba 1



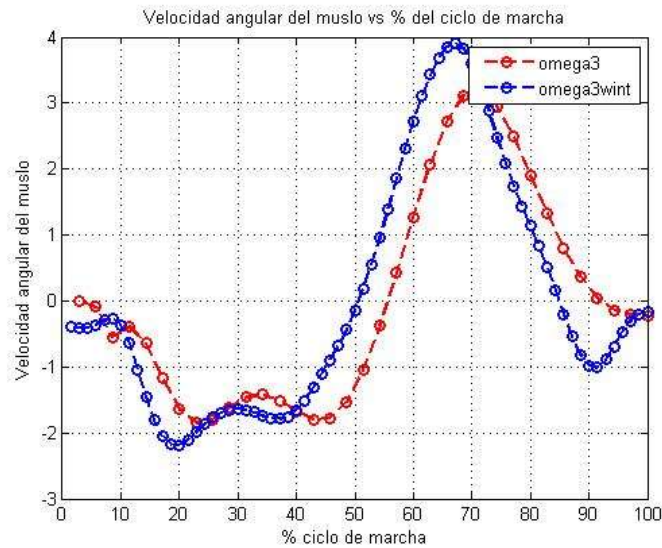
A medida que se generan las derivadas de estas posiciones podemos encontrar que los pequeños cambios tienen gran influencia en la forma de las funciones al compararlas con las velocidades de Winter algunas de ellas son de esperar debido a que no todas las curvas de las marchas van a ser exactamente iguales incluso hay diferencias que se pueden encontrar en una misma persona dependiendo si se analiza la pierna izquierda o la derecha, en el caso de las curvas de Winter (azul) se analizó la pierna derecha de la persona, mientras que en nuestro modelo y por la ubicación del sistema coordinado analizamos la pierna izquierda (rojo).

De igual manera comparando los datos experimentales con los ángulos propuestos en el libro de Winter.

**Figura 36.** Resultados ángulo del muslo prueba 2

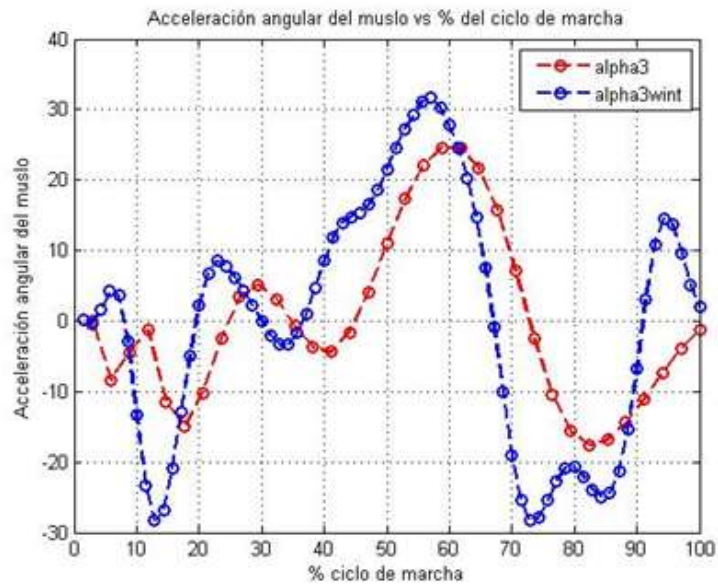


**Figura 37.** Resultados velocidad angular del muslo prueba 2



Sin embargo a pesar de que el ajuste polinómico realizado al inicio a los datos de posición es de grado 15 ya para las segundas derivadas es decir para las aceleraciones se encontraron grandes diferencias entre las medidas experimentalmente comparadas con las del libro de Winter. Esto se debe a la propagación de error que aumenta gradualmente con respecto a la derivada que se aumenta y al error acumulado del ajuste polinómico y del uso de diferencias finitas centradas para el cálculo de velocidades y aceleraciones.

**Figura 38.** Resultados aceleración angular del muslo prueba 2



Como se puede apreciar aquí el error del comportamiento es decir de la forma es grande debido a los errores acumulados y se encuentra que la curva experimental sirve como un promedio o tendencia de las curvas que se pueden obtener con las herramientas apropiadas de medición como lo son sistemas de videogrametría con sistemas de detección ópto electrónicos, acelerómetros y goniómetros.

Los desplazamientos en el eje X de los marcadores de la cadera y el tronco tiene un comportamiento lineal sin embargo para la rodilla, el tobillo y el pie se encuentra que tienen una pendiente más pequeña en el desplazamiento en X, respecto al inicio del ciclo de marcha y un aumento súbito de pendiente para el marcador del pie y del tobillo esto se aprecia mejor con las velocidades en x de dichos marcadores los cuales tienen una pendiente súbita alrededor del 85% del ciclo de marcha correspondiente al pico de la fase de balanceo para el ciclo planteado. En las aceleraciones se aprecia tanto el pico de subida del balanceo como el pico de bajada al terminar esta es decir cuando llega el talón.

La posición en y del marcador de la cadera y del hat se describen como se observa en los resultados como un movimiento periódico sinusoidal, mientras que para el pie tiene una forma irregular, en cuanto a la rodilla se observa un comportamiento más regular y un pico de subida en medio de la fase de balanceo pero es en el marcador del tobillo donde se aprecia mejor este cambio brusco de altura en la fase de balanceo entre el 50% y el 90% del ciclo de marcha el cual corresponde en duración con la teoría y corresponden a las respectivas velocidades en Y.

Para los ángulos relativos de los cuerpos rígidos planteados se observa un comportamiento similar en cada uno de ellos con un pico negativo alrededor del 60% de la marcha y una estabilidad en el inicio y en el final del ciclo de marcha como es de esperar en un movimiento repetitivo como lo es la marcha.

## 8. CÁLCULO DE LOS COMPONENTES DE LA PIERNA DESFASADA.

Para el uso de los datos cinemáticos hallados con el proceso anterior aplicados al cálculo de la cinética del modelo de lagrange fue necesario crear un desfase angular para el cálculo de los datos de la pierna derecha (la contraria a la analizada), con el objetivo de cumplir la suposición inicial de marcha simétrica. Esto se llevó a cabo conectando las dos partes del cuerpo mediante la cadera ya que suponemos que la posición de la cadera es igual tanto en la derecha como en la izquierda, con esta suposición se crea un delta de la posición en x para el desfase espacio temporal con respecto a diferentes partes del ciclo de marcha y ese delta se le resta a todas las demás posiciones del segundo ciclo de datos de marcha a analizar.

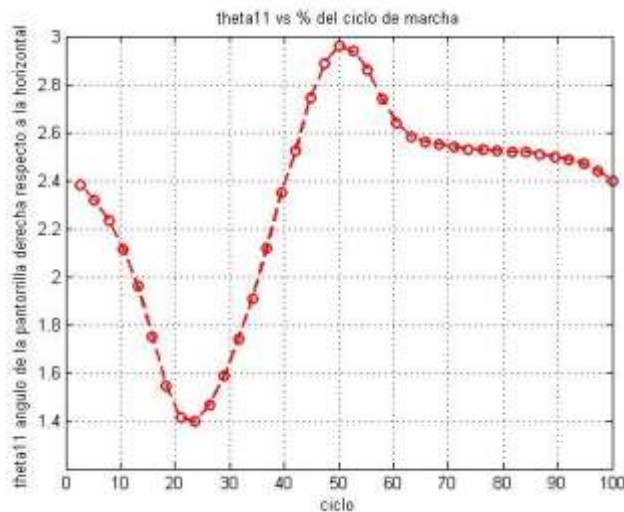
**Ecuación 16.** Calculo del desfase espacio temporal usando la cadera como referencia.

$$\Delta X = X_{\text{cadera del ciclo2}(i)} - X_{\text{cadera del ciclo1}(i)}$$

Este delta debe ser restado a todos los componentes en x de las posiciones de los segundos ciclos de marcha de los datos tomados, para el caso de la posición en Y no es necesario crear ningún desfase para el cálculo posterior de los ángulos de la pierna desfasada. Una vez obtenidas las posiciones desfasadas de x y y de la pierna derecha utilizamos de nuevo el script para el cálculo de los ángulos de dicha pierna modificado para el desfase para más información ver anexo D.

Como resultado tenemos entonces los ángulos  $\theta_{33}$ ,  $\theta_{22}$  y  $\theta_{11}$  correspondientes a los ángulos del tronco, el muslo y la pantorrilla derecha con respecto a la horizontal para su posterior uso en el cálculo de la cinética del cuerpo.

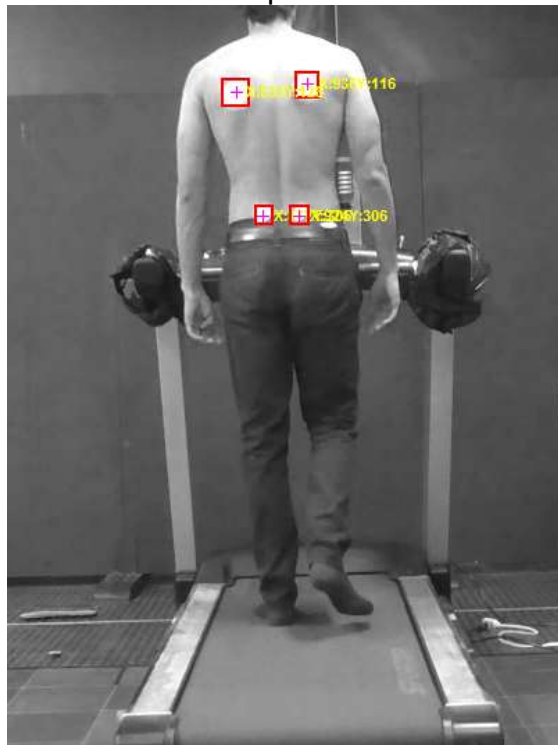
**Figura 39.** Ángulo desfasado para pie derecho



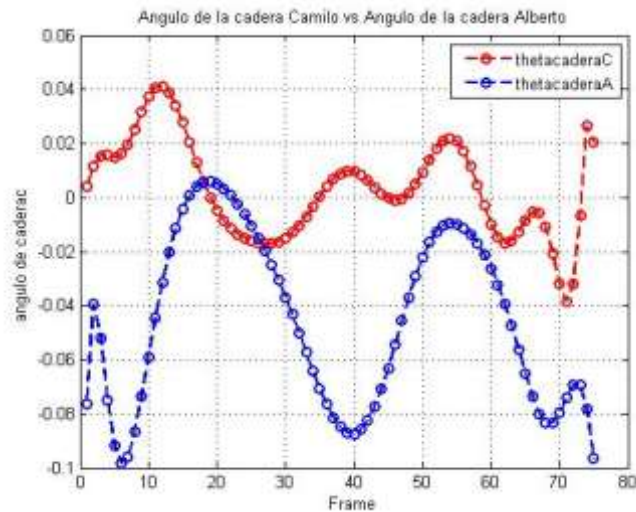
## 9. ANÁLISIS DE LA MARCHA EN EL PLANO FRONTAL

En el análisis de marcha bidimensional comúnmente se suele analizar solamente el plano sagital ya que en este plano se encuentran las principales variaciones espacio temporales junto con las fuerzas y los torques más significativos, es por esto mismo que el análisis del plano frontal no tiene tanta relevancia para marchas no patológicas, sin embargo para nuestro caso de estudio decidimos analizar las variaciones angulares relativas que se generan en la cadera y en la espalda en una marcha constante a 3 Km/hora.

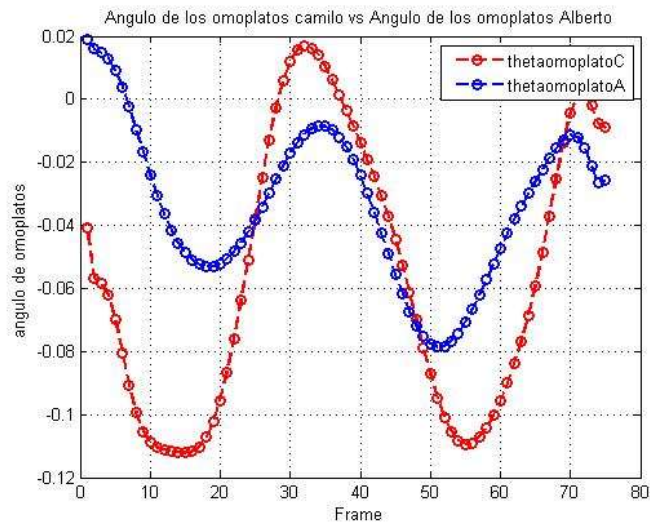
**Figura 40.** Experimento 2 marcha en el plano frontal



**Figura 41.** Curvas de variación angular en a cadera en el plano frontal sujeto 1 (azul) vs sujeto 2(rojo)



**Figura 42.** Curvas de variación angular en los omoplatos en el plano frontal sujeto 1 (azul) vs sujeto 2(rojo)



Como se esperaba la variación angular en el plano frontal de la cadera y de los omoplatos es descrita por un movimiento periódico y tiene comportamiento sinusoidal, sin embargo se aprecia la diferencia de magnitud en las oscilaciones de las dos pruebas esto nos da una idea de las diferencias en las marchas de los dos sujetos.

## 10. ANÁLISIS CINÉTICO DEL SISTEMA

Para realizar el análisis cinético del sistema existen diferentes modelos que dependiendo de las necesidades se pueden usar, en general la cinética busca encontrar los valores de torque y fuerzas presentes en el sistema.

Para realizar el planteamiento del sistema dinámico usualmente se utilizan las leyes de Newton en cada uno de los segmentos o cuerpos que componen el sistema, este método resulta engorroso debido a que es demasiado extenso y es necesario calcular las fuerzas internas entre segmentos que no es necesario encontrar para el análisis deseado en este caso.

Otro método para realizar el análisis es con el uso de la dinámica lagrangiana, esta se diferencia de la dinámica newtoniana en que permite el análisis de todo el sistema a la vez sin necesidad de analizar cada segmento por separado lo cual facilita considerablemente los cálculos, además posee otras ventajas como son que permite el uso de diferentes marcos de referencia a la vez sin importar las restricciones que tenga el sistema. Este método se basa en el concepto trabajo y energía (específicamente trabajo virtual) para obtener una serie de ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales las cuales modelan el sistema y permiten encontrar los valores de torques y fuerzas presentes en el proceso de la marcha. El hecho de que este método sea en esencia un método energético representa una ventaja respecto al método newtoniano ya que debido a esto las magnitudes usadas son escalares y no vectores. Por estas razones el método de Lagrange fue el empleado para resolver el sistema dinámico planteado.

### 10.1 PRINCIPIO DE FORMULACIÓN

Lo primero que se debe hacer al utilizar la mecánica lagrangiana es definir las variables generalizadas del sistema. Las variables generalizadas son aquellas que son independientes entre sí pero dependientes del tiempo, pueden ser de cualquier tipo ya sean ángulos, posiciones, etc. Estas variables determinan los grados de libertad del sistema, así en un sistema totalmente definido la cantidad de grados de libertad es igual el número de variables generalizadas. Los grados de libertad pueden reducirse al agregarle restricciones al sistema. Las variables generalizadas suelen representarse con la letra **qi**.

## 10.2 ECUACIÓN DE LAGRANGE

Para usar la ecuación de Lagrange es necesario tener en cuenta la energía cinética y la energía potencial. La primera representa la capacidad para realizar trabajo asociado con la velocidad de la partícula<sup>8</sup> y está definida por la expresión:

**Ecuación 17.** Energía Cinética

$$Ek = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

Por otro lado, la energía potencial representa la medida del trabajo que puede realizarse mediante su peso<sup>9</sup> y se define como:

**Ecuación 18.** Energía Potencial

$$Ep = mgh$$

Los conceptos de energía mostrados se utilizan para calcular el Lagrangiano del sistema el cual está definido como la diferencia entre la energía cinética total del sistema y la energía potencial total:

**Ecuación 19.** Definición del lagragiano

$$L = Ek - Ep$$

La expresión matemática que rige las ecuaciones de Lagrange para un sistema con **n** variables generalizadas es:

**Ecuación 20.** Ecuación de lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = Q_i$$

Donde **Q<sub>i</sub>** representa las fuerzas generalizadas, las cuales son las fuerzas no conservativas que realizan trabajo cuando **q<sub>i</sub>** varia y las otras variables permanecen constantes, expresado de forma matemática se tiene:

---

<sup>8</sup> BEER, Ferdinand P; JOHNSTON, E. Rusell Jr y CLAUSEN, William E. Mecánica vectorial para ingenieros Dinamica. 8 edición. Mexico D.F: McGraw-Hill Interamericana, 2007

<sup>9</sup> Ibíd.

**Ecuación 21.** Fuerzas generalizadas

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = Q_i$$

### 10.3 PLANTEAMIENTO DEL SISTEMA

Para el planteamiento del sistema utilizado se realizaron algunas simplificaciones y consideraciones debido a la complejidad que conlleva la representación del cuerpo humano y sus movimientos. La primera consideración fue la realización del planteamiento en 2 planos en 2 dimensiones, es decir, en el plano sagital el cual representa la vista lateral y en el plano coronal el cual representa la vista frontal. Este último solo fue tomado en cuenta en la sección de cinemática ya que en él no se presentan fuerzas o torques significativas para el proceso de la marcha.

En algunos casos se modelan las piernas como sistemas de resortes y amortiguadores, esto con la finalidad de encontrar o tener en cuenta la energía almacenada y disipada en los tejidos blandos como los tendones, en este modelo se tomaron los segmentos como cuerpos rígidos con su peso concentrado en el centro de masa del segmento encontrado a través de tablas antropométricas y sin tener en cuenta los tejidos blandos ya que las fuerzas generadas en estos se tratarían como fuerzas internas los cuales están más allá del análisis que se busca.

Otra consideración fue tomar la marcha como simétrica, utilizando los datos de la pierna izquierda para con un desfase temporal, generar la matriz de la pierna derecha ya que en el laboratorio solo se contaba con una cámara lateral es decir solo con los datos del costado izquierdo del cuerpo. La manera en que esta suposición afecta el planteamiento de las fuerzas de reacción y torques será explicada más adelante.

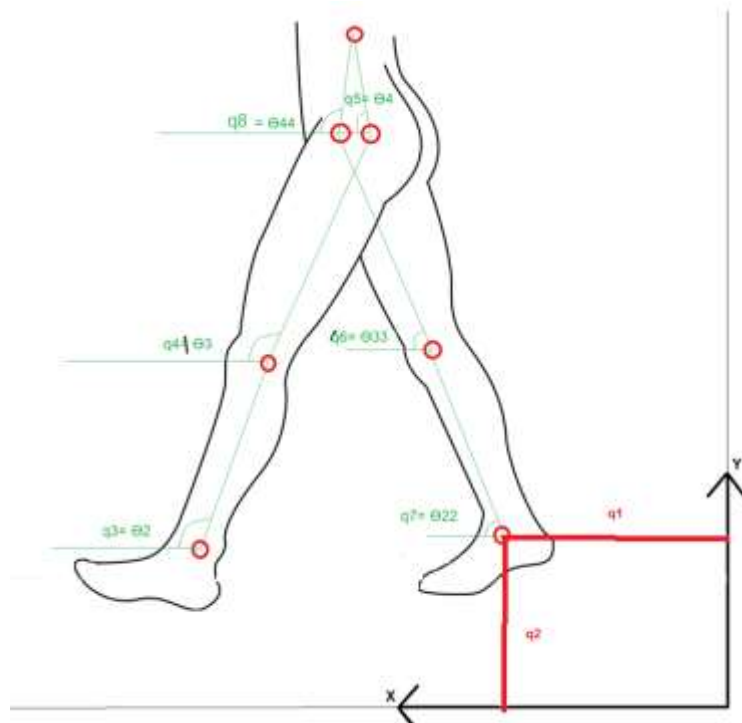
Para el modelamiento del sistema se toman 3 segmentos: la pantorrilla, el muslo y un último segmento llamado HAT (Head-Arms-Trunk) el cual está compuesto por el tronco, la cabeza y los brazos. Los pies no se tomaron en cuenta debido a que no representan valores energéticos considerables (representa únicamente el 1,5% del peso del cuerpo)<sup>10</sup>. A cada uno de los segmentos anteriores se les asigno un numero para identificarlos fácilmente en los cálculos, así: la pantorrilla izquierda se nombró como segmento 2 y la derecha como 22, el muslo izquierdo como segmento 3 y el derecho 33 y finalmente para el conjunto superior se debe hacer otra consideración que consiste en dividir este conjunto en 2, una parte izquierda y una

---

<sup>10</sup> WINTER, David A. Biomechanics and motor control of human movement. 4 ed. John Wiley & Sons, Inc. 2009.

derecha cada una con la mitad de la masa total ya que se deben encontrar por separado los valores de los torques que son aplicados por cada pierna lo cual implica suponer que la masa del cuerpo está distribuida equitativamente en ambas partes del cuerpo, de esta manera se denoto la parte izquierda como el segmento 4 y la parte derecha como el segmento 44. Esta numeración se utilizó para definir valores necesarios referentes a cada segmento como lo son: longitudes totales (L), longitudes distales (r), masa (m), momentos de inercia (I) y centros de giro (CG).

**Figura 43.** Sistema Planteado



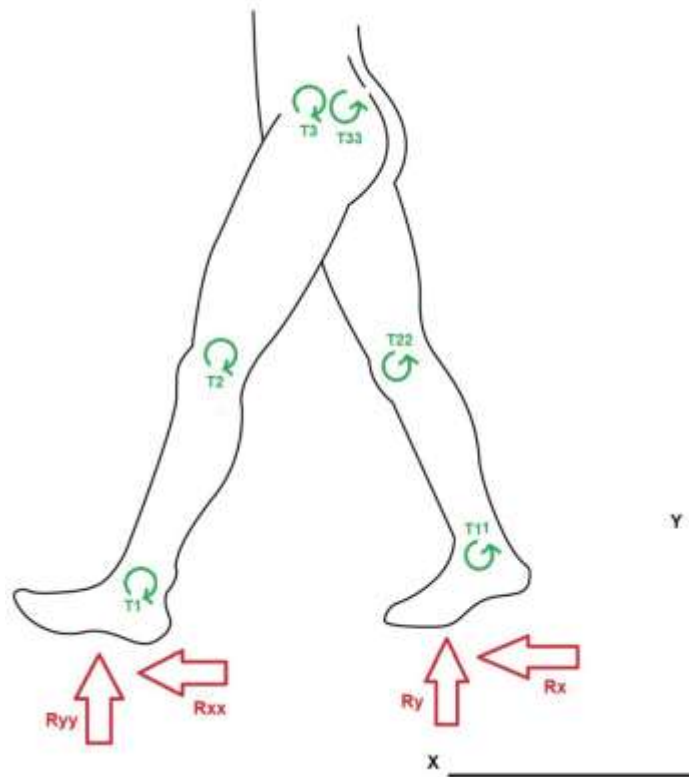
Para las variables generalizadas se usó la siguiente nomenclatura:  $q_1$  y  $q_2$  corresponden a las componentes **X** y **Y** respectivamente de la posición del marcador del tobillo respecto al marco de referencia, del cual se parte para hallar las posiciones de los centros de masa de todos los segmentos del sistema,  $q_3$  y  $q_7$  corresponden a los ángulos entre la pantorrilla izquierda y el plano horizontal y entre la pantorrilla derecha con la horizontal respectivamente,  $q_4$  y  $q_6$  a los ángulos entre los muslos izquierdo y derecho con el plano horizontal,  $q_5$  y  $q_8$  los ángulos entre los HAT izquierdo y derecho con el plano horizontal. Adicionalmente, se definieron 2 variables más que serán explicadas más adelante.

Las incógnitas del sistema son las fuerzas externas y torques presentes en la marcha. Las únicas fuerzas consideradas en el análisis son las fuerzas de reacción del piso  $R_x$  y  $R_y$  en la pierna izquierda y  $R_{xx}$  y  $R_{yy}$  en la pierna derecha. Las

fuerzas del peso de cada uno de los segmentos no realizan trabajo y al igual que las fuerzas presentes en las articulaciones se consideran fuerzas internas por esta razón no se tuvieron en cuenta en el análisis.

Los torques actúan en las articulaciones, y son los necesarios para llevar a cabo el movimiento, de esta manera se nombraron como:  $T_1$  y  $T_{11}$  los torques presentes en el tobillo izquierdo y el derecho respectivamente,  $T_2$  y  $T_{22}$  los torques presentes en las rodillas izquierda y derecha y finalmente  $T_3$  y  $T_{33}$  como los torques que aparecen la unión entre la cadera y las piernas izquierda y derecha.

**Figura 44.** Fuerzas y torques presentes en el sistema



## 10.4 DESARROLLO DEL SISTEMA

**10.4.1 Ecuaciones de Lagrange.** Una vez definidas cada una de las variables generalizadas se procede a calcular la posición de los centros de masa en función de las variables generalizadas y los datos antropométricos. Al ser muchas ecuaciones se decidió realizar un cambio de variables con la finalidad de hacer más fácil el entendimiento de la metodología utilizada así como el desarrollo de la misma y la fácil identificación de errores en el caso de presentarse. Las sustituciones realizadas están consignadas en la siguiente tabla:

**Tabla 3.** Coordenadas de los centros de masa de cada segmento

NOMBRE DE LA VARIABLE	SEGMENTO CORRESPONDIENTE	ECUACION
C	Pantorrilla izquierda en el eje X	$q_1 + r2\cos(q_3)$
D	Pantorrilla izquierda en el eje Y	$q_2 + r2\sen(q_3)$
E	Muslo izquierdo en el eje X	$q_1 + L2\cos(q_3) + r3\cos(q_4)$
F	Muslo izquierdo en el eje Y	$q_2 + L2\sen(q_3) + r3\sen(q_4)$
G	HAT izquierdo en el eje X	$q_1 + L2 \cos(q_3) + L3 \cos(q_4) + r4\cos(q_5)$
H	HAT izquierdo en el eje Y	$q_2 + L2 \sen(q_3) + L3 \sen(q_4) + r4\sen(q_5)$
I	Muslo derecho en el eje X	$q_1 + L2 \cos(q_3) + L3 \cos(q_4) - (L3 - r3)\cos(q_6)$
J	Muslo derecho en el eje Y	$q_2 + L2 \sen(q_3) + L3 \sen(q_4) - (L3 - r3)\sen(q_6)$
K	Pantorrilla derecha en el eje X	$q_1 + L2 \cos(q_3) + L3 \cos(q_4) - L3 \cos(q_6) - (L2 - r2)\cos(q_7)$
L	Pantorrilla derecha en el eje Y	$q_2 + L2 \sen(q_3) + L3 \sen(q_4) - L3 \sen(q_6) - (L2 - r2)\sen(q_7)$

NOMBRE DE LA VARIABLE	SEGMENTO CORRESPONDIENTE	ECUACION
M	HAT derecho en el eje X	$q_1 + L2 \cos(q_3) + L3 \cos(q_4) + r4 \cos(q_8)$
N	HAT derecho en el eje Y	$q_2 + L2 \sen(q_3) + L3 \sen(q_4) + r4 \sen(q_8)$

Una vez halladas las posiciones se procede a calcular la velocidad lineal en cada uno de los centros de masa derivándolas respecto al tiempo de la siguiente manera:

**Ecuación 22.** Velocidad lineal

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}$$

Hay que tener en cuenta que las velocidades lineales son cantidades vectoriales por lo tanto deben encontrarse para cada uno de los ejes en los que se trabaja, en este caso en el eje X y en el Y.

De la misma manera como se efectuó el cambio de variables para las posiciones se efectuó también para las velocidades las cuales están consignadas en la tabla que se presenta a continuación:

**Tabla 4.** Velocidades lineales de los centros de masa

NOMBRE DE LA VARIABLE	SEGMENTO CORRESPONDIENTE	ECUACION
$\dot{C}$	Pantorrilla izquierda en el eje X	$\dot{q}_1 - r2\dot{q}_3 \sen(q_3)$
$\dot{D}$	Pantorrilla izquierda en el eje Y	$\dot{q}_2 + r2\dot{q}_3 \cos(q_3)$

NOMBRE DE LA VARIABLE	SEGMENTO CORRESPONDIENTE	ECUACION
$\dot{E}$	Muslo izquierdo en el eje X	$\dot{q}_1 - L2\dot{q}_3 \text{sen}(q_3) - r3\dot{q}_4 \text{sen}(q_4)$
$\dot{F}$	Muslo izquierdo en el eje Y	$\dot{q}_2 + L2\dot{q}_3 \text{cos}(q_3) + r3\dot{q}_4 \text{cos}(q_4)$
$\dot{G}$	HAT izquierdo en el eje X	$\dot{q}_1 - L2\dot{q}_3 \text{sen}(q_3) - L3\dot{q}_4 \text{sen}(q_4) - r4\dot{q}_5 \text{sen}(q_5)$
$\dot{H}$	HAT derecho en el eje Y	$\dot{q}_2 + L2\dot{q}_3 \text{cos}(q_3) + L3\dot{q}_4 \text{cos}(q_4) + r4\dot{q}_5 \text{cos}(q_5)$
$\dot{i}$	Muslo derecho en el eje X	$\dot{q}_1 - L2\dot{q}_3 \text{sen}(q_3) - L3\dot{q}_4 \text{sen}(q_4) + (L3 - r3)\dot{q}_6 \text{sen}(q_6)$
$\dot{j}$	Muslo derecho en el eje Y	$\dot{q}_2 + L2\dot{q}_3 \text{cos}(q_3) + L3\dot{q}_4 \text{cos}(q_4) - (L3 - r3)\dot{q}_6 \text{cos}(q_6)$
$\dot{K}$	Pantorrilla derecha en el eje X	$\dot{q}_1 - L2\dot{q}_3 \text{sen}(q_3) - L3\dot{q}_4 \text{sen}(q_4) + L3\dot{q}_6 \text{sen}(q_6) + (L2 - r2)\dot{q}_7 \text{sen}(q_7)$

NOMBRE DE LA VARIABLE	SEGMENTO CORRESPONDIENTE	ECUACION
$\dot{L}$	Pantorrilla derecha en el eje Y	$\begin{aligned} & \dot{q}_2 + L2\dot{q}_3 \cos(q_3) \\ & + L3\dot{q}_4 \cos(q_4) \\ & - L3\dot{q}_6 \cos(q_6) \\ & - (L2 \\ & - r2)\dot{q}_7 \cos(q_7) \end{aligned}$
$\dot{M}$	HAT derecho en el eje X	$\begin{aligned} & \dot{q}_1 - L2\dot{q}_3 \sin(q_3) \\ & - L3\dot{q}_4 \sin(q_4) \\ & - r4\dot{q}_8 \sin(q_8) \end{aligned}$
$\dot{N}$	HAT derecho en el eje Y	$\begin{aligned} & \dot{q}_2 + L2\dot{q}_3 \cos(q_3) \\ & + L3\dot{q}_4 \cos(q_4) \\ & + r4\dot{q}_8 \cos(q_8) \end{aligned}$

Con las posiciones y velocidades en los centros de masa es posible calcular el valor del Lagrangiano del sistema el cual, como fue explicado anteriormente, se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema. De esta manera se tiene que el lagrangiano del sistema es:

**Ecuación 23.** Lagrangiano del sistema

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}m_2(\dot{C}^2 + \dot{D}^2) + \frac{1}{2}I_2\dot{q}_3^2 - m_2gD + \frac{1}{2}m_3(\dot{E}^2 + \dot{F}^2) + \frac{1}{2}I_3\dot{q}_4^2 - m_3gF \\ & + \frac{1}{2}m_4(\dot{G}^2 + \dot{H}^2) + \frac{1}{2}I_4\dot{q}_5^2 - m_4gH + \frac{1}{2}m_3(\dot{i}^2 + \dot{j}^2) + \frac{1}{2}I_3\dot{q}_6^2 - m_3gJ \\ & + \frac{1}{2}(\dot{K}^2 + \dot{L}^2) + \frac{1}{2}I_2\dot{q}_7^2 - m_2gL + \frac{1}{2}m_4(\dot{M}^2 + \dot{N}^2) + \frac{1}{2}I_4\dot{q}_8^2 - m_4gN \end{aligned}$$

Posteriormente es necesario derivar nuevamente la velocidad, ya que si bien en el planteamiento de Lagrange no se tienen en cuenta aceleraciones, estas si aparecen en algunos términos debido a que es necesario realizar una segunda derivada respecto al tiempo y como se realizaron derivadas implícitas debido al cambio de variables mostrado anteriormente es necesario hallar la segunda derivada respecto

al tiempo de la posición. Las ecuaciones halladas se encuentran tabuladas a continuación:

**Tabla 5.** Segundas derivadas de la posición del centro de masa

NOMBRE DE LA VARIABLE	SEGMENTO CORRESPONDIENTE	ECUACION
$\ddot{C}$	Pantorrilla izquierda en el eje X	$\ddot{q}_1 - r2(\dot{q}_3^2 \cos(q_3) + \ddot{q}_3 \sin(q_3))$
$\ddot{D}$	Pantorrilla izquierda en el eje Y	$\ddot{q}_2 - r2(-\dot{q}_3^2 \sin(q_3) + \ddot{q}_3 \cos(q_3))$
$\ddot{E}$	Muslo izquierdo en el eje X	$\ddot{q}_1 - L2(\dot{q}_3^2 \cos(q_3) + \ddot{q}_3 \sin(q_3)) - r3(\dot{q}_4^2 \cos(q_4) + \ddot{q}_4 \sin(q_4))$
$\ddot{F}$	Muslo izquierdo en el eje Y	$\ddot{q}_2 + L2(-\dot{q}_3^2 \sin(q_3) + \ddot{q}_3 \cos(q_3)) + r3(-\dot{q}_4^2 \sin(q_4) + \ddot{q}_4 \cos(q_4))$
$\ddot{G}$	HAT en el eje X	$\ddot{q}_1 - L2(\dot{q}_3^2 \cos(q_3) + \ddot{q}_3 \sin(q_3)) - L3(\dot{q}_4^2 \cos(q_4) + \ddot{q}_4 \sin(q_4)) - r4(\dot{q}_5^2 \cos(q_5) + \ddot{q}_5 \sin(q_5))$
$\ddot{H}$	HAT en el eje Y	$\ddot{q}_2 + L2(-\dot{q}_3^2 \sin(q_3) + \ddot{q}_3 \cos(q_3)) + L3(\dot{q}_4^2 \sin(q_4) + \ddot{q}_4 \cos(q_4)) + r4(\dot{q}_5^2 \sin(q_5) + \ddot{q}_5 \cos(q_5))$

NOMBRE DE LA VARIABLE	SEGMENTO CORRESPONDIENTE	ECUACION
$\ddot{i}$	Muslo derecho en el eje X	$\ddot{q}_1 - L2 \left( \dot{q}_3^2 \cos(q_3) + \ddot{q}_3 \sin(q_3) \right) - L3 \left( \dot{q}_4^2 \cos(q_4) + \ddot{q}_4 \sin(q_4) \right) + (L3 - r3) \left( \dot{q}_6^2 \cos(q_6) + \ddot{q}_6 \sin(q_6) \right)$
$\ddot{j}$	Muslo derecho en el eje Y	$\ddot{q}_2 + L2 \left( -\dot{q}_3^2 \sin(q_3) + \ddot{q}_3 \cos(q_3) \right) + L3 \left( -\dot{q}_4^2 \sin(q_4) + \ddot{q}_4 \cos(q_4) \right) - (L3 - r3) \left( \dot{q}_6^2 \sin(q_6) + \ddot{q}_6 \cos(q_6) \right)$
$\ddot{k}$	Pantorrilla derecha en el eje X	$\ddot{q}_1 - L2 \left( \dot{q}_3^2 \cos(q_3) + \ddot{q}_3 \sin(q_3) \right) - L3 \left( \dot{q}_4^2 \cos(q_4) + \ddot{q}_4 \sin(q_4) \right) + L3 \left( \dot{q}_6^2 \cos(q_6) + \ddot{q}_6 \sin(q_6) \right) + (L2 - r2) \left( \dot{q}_7^2 \cos(q_7) + \ddot{q}_7 \sin(q_7) \right)$
$\ddot{l}$	Pantorrilla derecha en el eje Y	$\ddot{q}_2 + L2 \left( -\dot{q}_3^2 \sin(q_3) + \ddot{q}_3 \cos(q_3) \right) + L3 \left( -\dot{q}_4^2 \sin(q_4) + \ddot{q}_4 \cos(q_4) \right) - L3 \left( \dot{q}_6^2 \sin(q_6) + \ddot{q}_6 \cos(q_6) \right) - (L2 - r2) \left( -\dot{q}_7^2 \sin(q_7) + \ddot{q}_7 \cos(q_7) \right)$

NOMBRE DE LA VARIABLE	SEGMENTO CORRESPONDIENTE	ECUACION
$\ddot{M}$	HAT derecho en el eje X	$\ddot{q}_1 - L2 \left( \dot{q}_3^2 \cos(q_3) + \ddot{q}_3 \sin(q_3) \right) - L3 \left( \dot{q}_4^2 \cos(q_4) + \ddot{q}_4 \sin(q_4) \right) - r4 \left( \dot{q}_8^2 \cos(q_8) + \ddot{q}_8 \sin(q_8) \right)$
$\ddot{N}$	HAT derecho en el eje Y	$\ddot{q}_2 + L2 \left( -\dot{q}_3^2 \sin(q_3) + \ddot{q}_3 \cos(q_3) \right) + L3 \left( \dot{q}_4^2 \sin(q_4) + \ddot{q}_4 \cos(q_4) \right) + r4 \left( \dot{q}_8^2 \sin(q_8) + \ddot{q}_8 \cos(q_8) \right)$

Una vez planteado el Lagrangiano y hallado las segundas derivadas de la posición el paso siguiente consiste en hallar las expresiones presentes en la ecuación de Lagrange. A continuación, se muestra este procedimiento para la variable generalizada  $q_1$  con la finalidad de explicar la metodología, para las demás variables se realizó el mismo procedimiento pero no se consideró necesario mostrarlo, solo se muestra el resultado final.

Inicialmente calculamos la expresión que corresponde al último término de la ecuación de Lagrange es decir la que corresponde a la derivada del lagrangiano respecto a la variable generalizada correspondiente, así:

**Ecuación 24.** Segundo término del lagrangiano

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

En este caso este término dio 0 (cero) debido a que en el lagrangiano no hay ningún término que dependa de la distancia al tobillo la cual representa este término, en vez de esto depende de la velocidad y la distancia vertical. No es el caso para las otras variables.

Siguiendo la metodología se calcula la derivada del lagrangiano respecto a la derivada de cada variable generalizada, para este caso es:

**Ecuación 25.** Derivada del Lagrangiano respecto a la primera derivada de la variable generalizada  $q_1$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m_2 \dot{C} + m_3 \dot{E} + m_4 \dot{G} + m_3 \dot{I} + m_2 \dot{K} + m_4 \dot{M}$$

Posteriormente se calcula la derivada de la siguiente expresión respecto al tiempo obteniendo:

**Ecuación 26.** Primer término del lagrangiano de la variable generalizada  $q_1$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = m_2 \ddot{C} + m_3 \ddot{E} + m_4 \ddot{G} + m_3 \ddot{I} + m_2 \ddot{K} + m_4 \ddot{M}$$

Con las expresiones halladas anteriormente se encuentra la ecuación de Lagrange para la primera variable generalizada:

**Ecuación 27.** Ecuación de Lagrange de la variable generalizada  $q_1$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = Q_1 = m_2 (\ddot{C} + \ddot{K}) + m_3 (\ddot{E} + \ddot{I}) + m_4 (\ddot{G} + \ddot{M})$$

El término al otro lado del igual corresponde a las fuerzas generalizadas, el cual será explicado más adelante. De la misma manera en que se encontró esta expresión se encuentran las expresiones de la ecuación para cada una de las variables generalizadas, obteniendo:

**Ecuación 28.** Ecuación de Lagrange de la variable generalizada  $q_2$ .

$$Q_2 = m_2 (\ddot{D} + \ddot{L}) + m_3 (\ddot{F} + \ddot{J}) + m_4 (\ddot{H} + \ddot{N}) + 2g(m_2 + m_3 + m_4)$$

**Ecuación 29.** Ecuación de Lagrange de la variable generalizada  $q_3$ .

$$\begin{aligned} Q_3 = & m_2 r_2 (\ddot{D} \cos(q_3) - \ddot{C} \sin(q_3) + g \cos(q_3)) + I_2 \ddot{q}_3 \\ & + m_3 L_2 (\ddot{F} \cos(q_3) - \ddot{E} \sin(q_3) + g \cos(q_3)) \\ & + m_4 L_2 (\ddot{H} \cos(q_3) - \ddot{G} \sin(q_3) + g \cos(q_3)) \\ & + m_3 L_2 (\ddot{J} \cos(q_3) - \ddot{I} \sin(q_3) + g \cos(q_3)) \\ & + m_2 L_2 (\ddot{L} \cos(q_3) - \ddot{K} \sin(q_3) + g \cos(q_3)) \\ & + m_4 L_2 (\ddot{N} \cos(q_3) - \ddot{M} \sin(q_3) + g \cos(q_3)) \end{aligned}$$

**Ecuación 30.** Ecuación de Lagrange de la variable generalizada  $q_4$ .

$$Q_4 = m_3 r_3 (\ddot{F} \cos(q_4) - \ddot{E} \sin(q_4) + g \cos(q_4)) + I_3 \ddot{q}_4 \\ + m_4 L_3 (\ddot{H} \cos(q_4) - \ddot{G} \sin(q_4) + g \cos(q_4)) \\ + m_3 L_3 (\ddot{J} \cos(q_4) - \ddot{I} \sin(q_4) + g \cos(q_4)) \\ + m_2 L_3 (\ddot{L} \cos(q_4) - \ddot{K} \sin(q_4) + g \cos(q_4)) \\ + m_4 L_3 (\ddot{N} \cos(q_4) - \ddot{M} \sin(q_4) + g \cos(q_4))$$

**Ecuación 31.** Ecuación de LaGrange de la variable generalizada  $q_5$ .

$$Q_5 = m_4 r_4 (\dot{H} \cos(q_5) - \dot{G} \sin(q_5) + g \cos(q_5)) + I_4 \dot{q}_5$$

**Ecuación 32.** Ecuación de LaGrange de la variable generalizada  $q_6$ .

$$Q_6 = m_3 (L_3 - r_3) (\dot{I} \sin(q_6) - \dot{J} \cos(q_6) - g \cos(q_6)) + I_3 \dot{q}_6 \\ + m_2 L_3 (\dot{K} \sin(q_6) - \dot{L} \cos(q_6) - g \cos(q_6))$$

**Ecuación 33.** Ecuación de Lagrange de la variable generalizada  $q_7$ .

$$Q_7 = m_2 (L_2 - r_2) (\dot{K} \sin(q_7) - \dot{L} \cos(q_7) - g \cos(q_7)) + I_2 \dot{q}_7$$

**Ecuación 34.** Ecuación de Lagrange de la variable generalizada  $q_8$ .

$$Q_8 = m_4 r_4 (\dot{N} \cos(q_8) - \dot{M} \sin(q_8) + g \cos(q_8)) + I_4 \dot{q}_8$$

**10.4.2 Torques, fuerzas y trabajo.** Una vez hallados todos los términos del lado izquierdo de la ecuación de Lagrange se procede a encontrar los términos de la derecha que corresponden a las fuerzas generalizadas, para esto primero se halla el trabajo realizado por las fuerzas y torques externas:

**Ecuación 35.** Trabajo efectuado.

$$W = q_1 R_x + q_2 R_y + T_1 q_3 + T_2 (q_4 - q_3) + T_3 (q_5 - q_4) + T_{33} (q_8 - q_6) + T_{22} (q_6 - q_7) \\ + T_{11} q_7 + R_{xx} (q_1 + L_2 \cos(q_3) + L_3 \cos(q_4) - L_3 \cos(q_6) - L_2 \cos(q_7)) \\ + R_{yy} (q_2 + L_2 \sin(q_3) + L_3 \sin(q_4) - L_3 \sin(q_6) - L_2 \sin(q_7))$$

Con el trabajo hallado se procede a derivar este respecto a cada variable generalizada obteniendo:

**Ecuación 36.** Derivada del trabajo respecto a la variable  $q_1$ .

$$Q_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1} = R_x + R_{xx}$$

**Ecuación 37.** Derivada del trabajo respecto a la variable  $q_2$

$$Q_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2} = R_y + R_{yy}$$

**Ecuación 38.** Derivada del trabajo respecto a la variable  $q_3$ .

$$Q_3 = \frac{\partial W}{\partial q_3} = T_1 - T_2 - R_{xx}L_2 \text{sen}(q_3) + R_{yy}L_2 \text{cos}(q_3)$$

**Ecuación 39.** Derivada del trabajo respecto a la variable  $q_4$ .

$$Q_4 = \frac{\partial W}{\partial q_4} = T_2 - T_3 - R_{xx}L_3 \text{sen}(q_4) + R_{yy}L_3 \text{cos}(q_4)$$

**Ecuación 40.** Derivada del trabajo respecto a la variable  $q_5$ .

$$Q_5 = \frac{\partial W}{\partial q_5} = T_3$$

**Ecuación 41.** Derivada del trabajo respecto a la variable  $q_6$ .

$$Q_6 = \frac{\partial W}{\partial q_6} = T_{22} - T_{33} + R_{xx}L_3 \text{sen}(q_6) - R_{yy}L_3 \text{cos}(q_6)$$

**Ecuación 42.** Derivada del trabajo respecto a la variable  $q_7$ .

$$Q_7 = \frac{\partial W}{\partial q_7} = T_{11} - T_{22} + R_{xx}L_2 \text{sen}(q_7) - R_{yy}L_2 \text{cos}(q_7)$$

**Ecuación 43.** Derivada del trabajo respecto a la variable  $q_8$ .

$$Q_8 = \frac{\partial W}{\partial q_8} = T_{33}$$

Debido a que se tienen más fuerzas que variables generalizadas es necesario formular 2 ecuaciones más, de lo contrario el sistema quedaría indeterminado ya que habría más incógnitas que ecuaciones disponibles.

Las 2 nuevas ecuaciones relacionan la fuerzas de reacción del suelo en la pierna izquierda con las reacciones en la pierna derecha a través de la suposición de que el peso se distribuye de manera lineal en las fases de doble apoyo , así mientras en una pierna tienen que ir disminuyendo las magnitudes de las fuerzas en la otra deben aumentar hasta que se llegue a la fase de apoyo simple en donde todo el

peso del cuerpo esta soportado por una sola pierna, de esta manera se tiene que las ecuaciones son:

**Ecuación 44.** Incógnita 9

$$Q_9 = Q_1 * K = Rxx$$

**Ecuación 45.** Incógnita 10

$$Q_{10} = Q_2 * K = Ryy$$

Las 2 ecuaciones anteriores muestran de forma matemática la suposición de que las fuerzas en cada pierna son iguales a la fuerza total multiplicada por una variable proporcional K que depende de la fase en la que se encuentre el paciente por lo tanto su valor es diferente para cada prueba y para cada fase de la marcha, la manera como se halló será explicada detenidamente en la sección correspondiente a cada una de las pruebas.

**10.4.3 Matriz Solución.** Cuando se hallan los 2 términos de las ecuaciones de Lagrange se pueden encontrar los valores de los torques y fuerzas al tener como entradas los datos de ángulos, velocidades angulares y aceleraciones angulares hallados en el módulo de cinemática además de las variables antropométricas halladas también anteriormente, para hallar la solución es necesario plantear la siguiente matriz:

**Ecuación 46.** Matriz solución

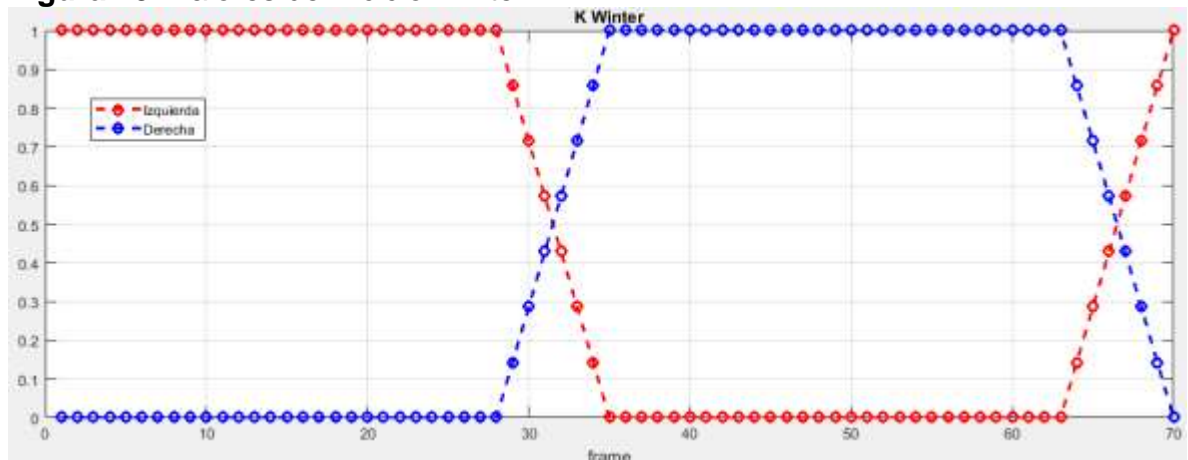
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_2 \text{sen}(q_3) & L_2 \text{cos}(q_3) & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_3 \text{sen}(q_4) & -L_3 \text{cos}(q_4) & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \text{sen}(q_6) & -L_3 \text{cos}(q_6) & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 \text{sen}(q_7) & -L_2 \text{cos}(q_7) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Rx \\ Ry \\ Rxx \\ Ryy \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_{33} \\ T_{22} \\ T_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \\ Q_{10} \end{bmatrix}$$

## 10.5 VALIDACIÓN DE LA SOLUCIÓN

Una vez finalizado el código se debe comprobar la fiabilidad de sus resultados, para esto se realizaron 2 pruebas de validación las cuales consistieron en introducir los datos del libro de Winter y comparar los resultados con los valores de las fuerzas expuestas en el libro.

En las 2 pruebas se calcularon los valores para un solo ciclo de marcha usando los valores de un ciclo y medio para así generar los datos de la otra pierna. También se trabajaron ciclos de 70 frames y como los datos venían del mismo ciclo y tenían la misma duración ambos poseen la misma variable proporcional K la cual se calculó de la siguiente forma:

**Figura 45.** Valores de K ciclo Winter



Para la zona en la cual el pie derecho se encuentra en fase de balanceo el valor de K se tomó como 1 ya que todo el peso del cuerpo se encuentra soportado en la pierna izquierda

A continuación, en la primera fase de doble apoyo se debe encontrar la función que define el valor de K la cual tiene forma lineal y depende del frame en el que se encuentre sabiendo que se debe ir desde 1 hasta 0 (cero) en donde toda la fuerza se soporta en la pierna izquierda, se encontró que la función que satisfacía este criterio fue:

**Ecuación 47.** Variable proporcional para la primera fase de doble apoyo de los datos de Winter.

$$K = -\frac{1}{7}z + 5$$

Seguido de esto se encuentra la fase de apoyo simple de la pierna derecha, en esta fase el valor de K es igual a 1, finalmente se tiene la segunda fase de doble apoyo la cual esta descrita por la siguiente ecuación:

**Ecuación 48.** Variable proporcional para la segunda fase de doble apoyo de los datos de Winter.

$$K = \frac{1}{7}z - 9$$

A continuación de describirá detalladamente lo que se hizo en cada una de las validaciones:

**10.5.1 Validación 1.** En esta prueba los datos de entrada fueron los valores de los ángulos, velocidades angulares y aceleraciones angulares dadas por Winter, para el desfase de la pierna izquierda se tomaron los datos del ciclo y medio empezando en la fase empezando en la segunda fase de apoyo simple sin realizar ninguna modificación debido a que los ángulos dados fueron tomados respecto a la horizontal es decir, no afecta la posición del segmento en el eje X. Se superpusieron los resultados con los valores de Winter para realizar una comparación de la siguiente manera:

**Figura 46.** Reacción en X validación 1

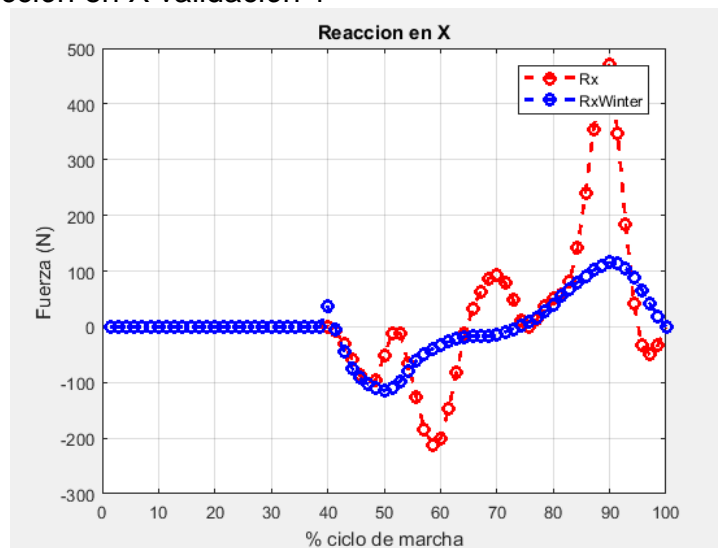


Figura 47. Reacción en Y validación 1

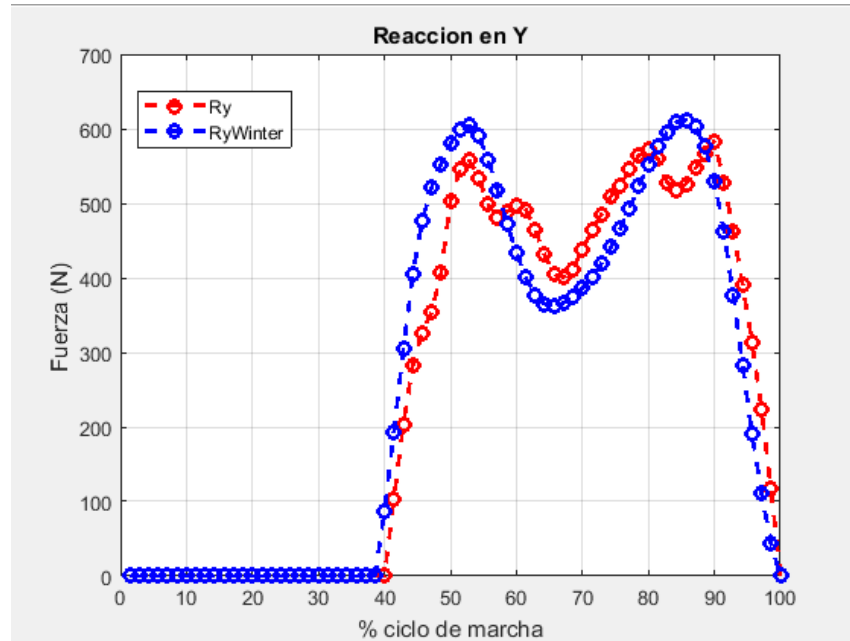


Figura 48. Torque en el tobillo validación 1

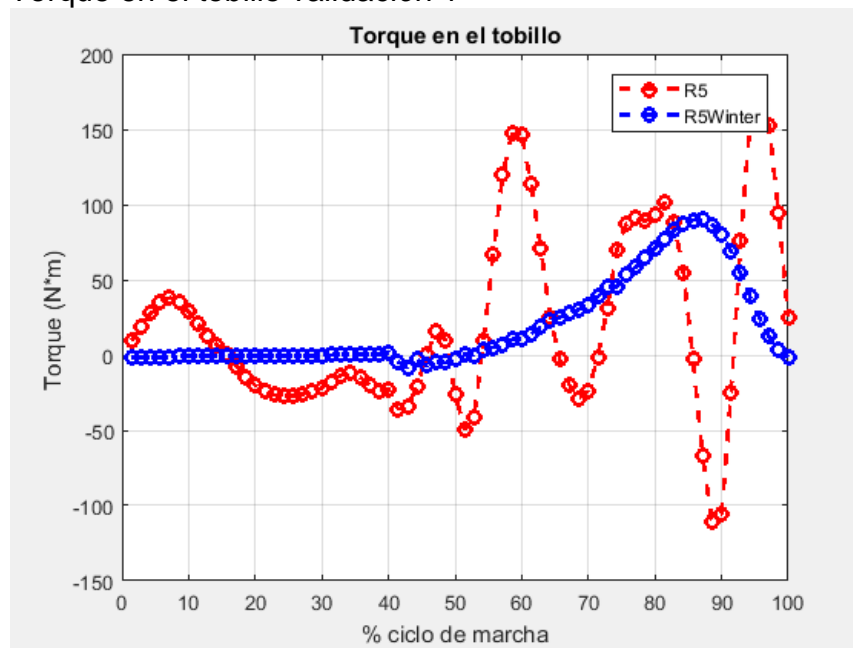


Figura 49. Torque en la rodilla validación 1

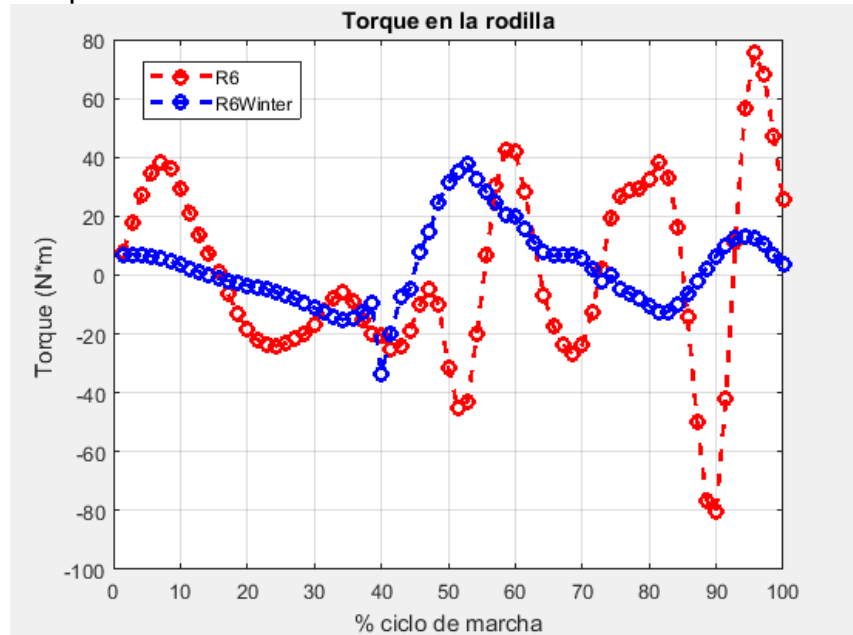
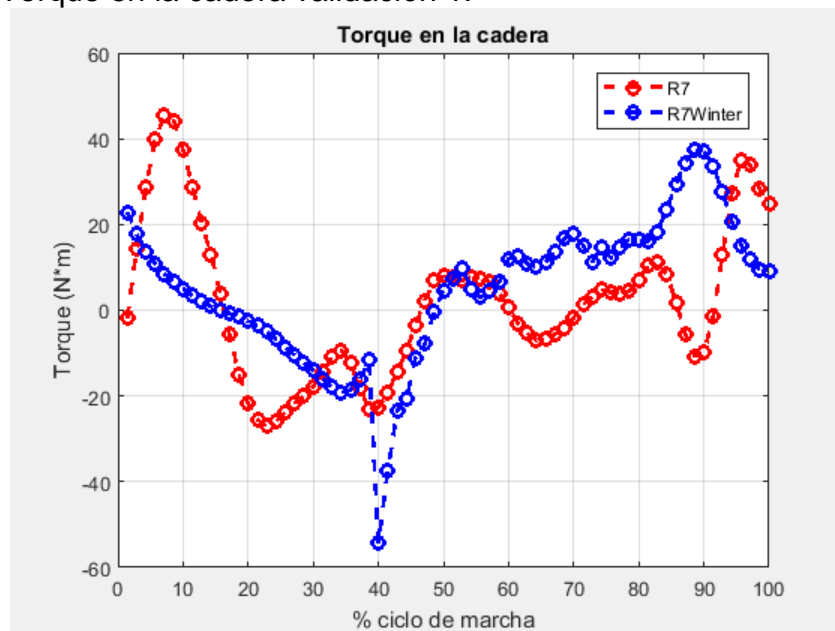


Figura 50. Torque en la cadera validación 1.



Únicamente se tienen los datos de la pierna derecha, los resultados para la pierna izquierda se encuentra en el anexo I.

A continuación se presentan los coeficientes de correlación encontrados para cada curva:

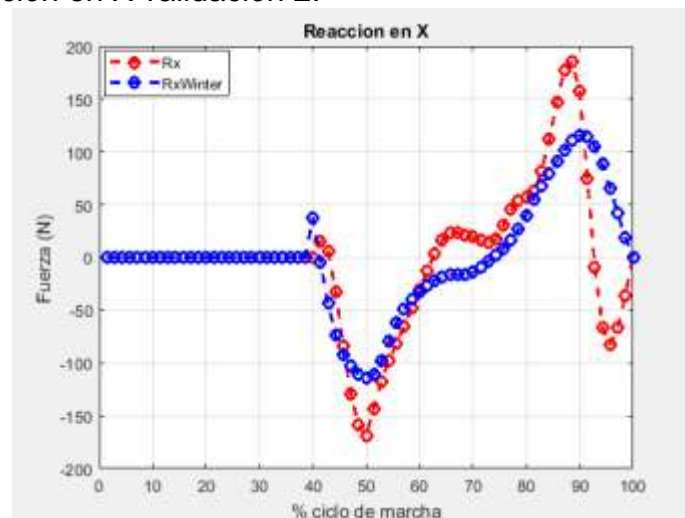
**Tabla 6.** Coeficientes de correlación Validación 1

Medida	Coefficiente de correlación
Reacción en X (Rx)	0,7346
Reacción en Y (Ry)	0,9672
Torque en el tobillo (R5)	0,13
Torque en la rodilla (R6)	0,0682
Torque en la cadera (R7)	0,43

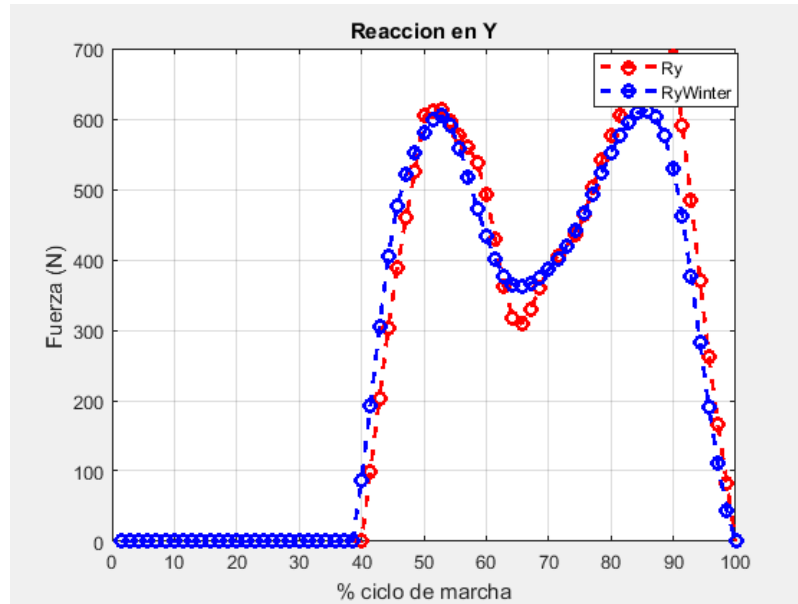
Como se puede observar, los resultados presentan valores cercanos y tendencias parecidas a los valores dados por Winter, no son exactamente igual debido a que el nuestro es un modelo matemático y los datos del libro fueron encontrados con instrumentos muy precisos, no obstante se realizó otra prueba con el ánimo de obtener mejores resultados.

**10.5.2 Validación 2.** En esta segunda prueba se buscó mejorar los resultados a través de la disminución de la pérdida de información y la propagación de errores al realizar una inversión es decir, en vez de partir de los ángulos, velocidades angulares y aceleraciones angulares para llegar a las posiciones de los centros de masa, se partió de las posiciones dadas por Winter para de estas llegar a los valores angulares y después continuar con el desarrollo del código planteado. Para los datos desfasados se realizó un procedimiento similar al realizado en las pruebas con los datos reales, se le resto el valor del desfase en X en la posición del centro de masa del conjunto superior a los otros datos. Los resultados obtenidos fueron:

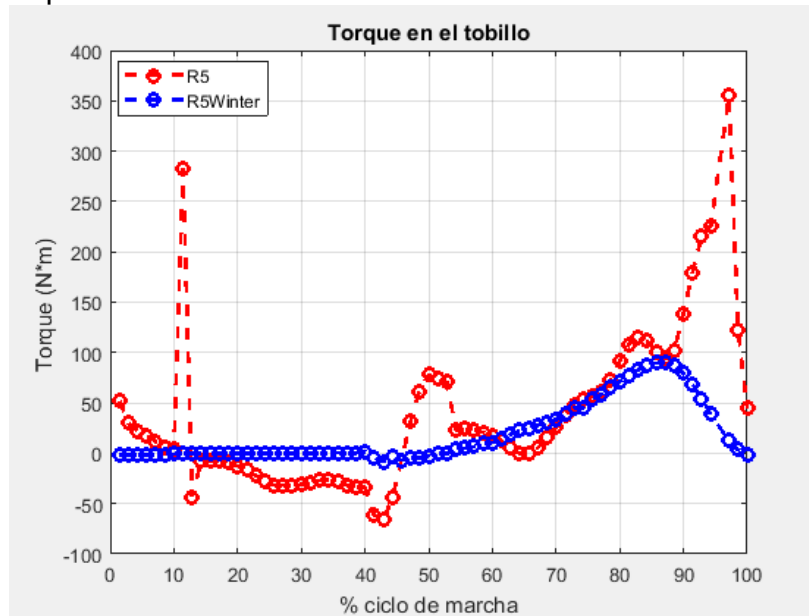
**Figura 51.** Reacción en X validación 2.



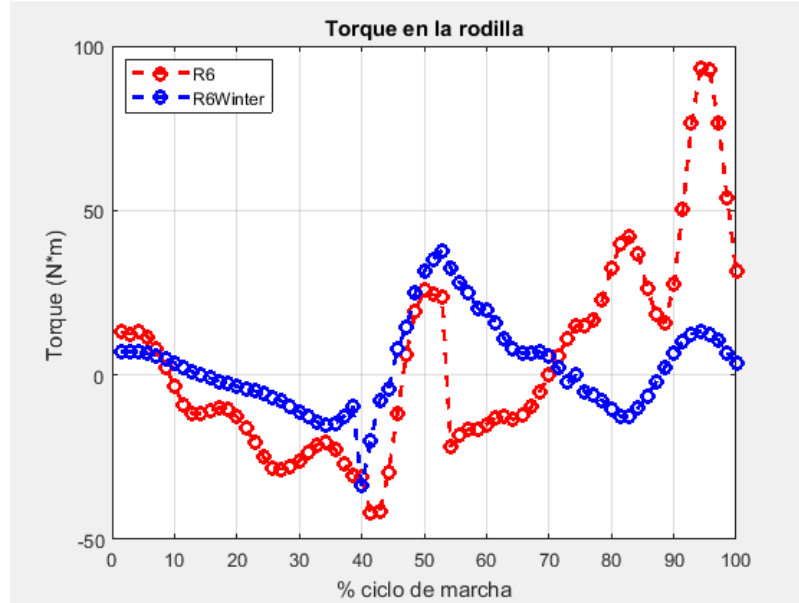
**Figura 52.** Reacción en Y validación 2



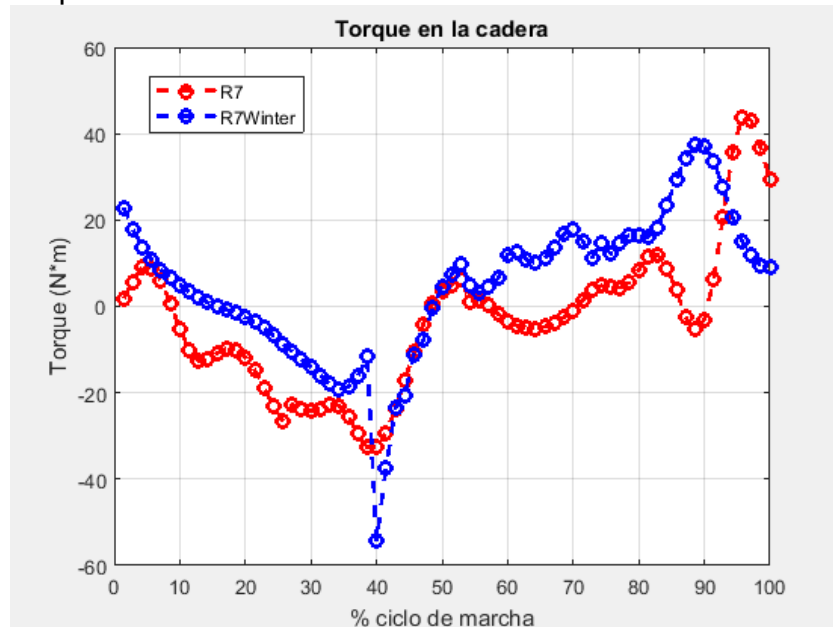
**Figura 53.** Torque en el tobillo validación 2



**Figura 54.** Torque en la rodilla validación 2



**Figura 55.** Torque en la cadera validación 2



A continuación se muestran los valores del coeficiente de correlación obtenidos:

**Tabla 7.** Coeficientes de correlación Validación 2

Medida	Coeficiente de correlación
Reacción en X (Rx)	0,7832
reacción en Y (Ry)	0,9839
Torque en el tobillo (R5)	0,4977
Torque en la rodilla (R6)	0,2987
Torque en la cadera (R7)	0,6757

Como se puede observar los resultados mejoraron considerablemente a excepción de algunos picos que aparecen a consecuencia de datos dispersos o inusuales debido a la manera como se realizó el desfase sobre todo en el torque de la rodilla lo cual afecto el cálculo del coeficiente de correlación. Para más información ver Anexo J.

## 10.6 RESULTADOS DE LAS PRUEBAS REALIZADAS CON LOS DATOS DE ENTRADA EXPERIMENTALES

Se realizaron pruebas para 2 sujetos sin ningún tipo de patología, aparente los 2 con 23 años y de sexo masculino. Tanto las medidas como el peso eran diferentes.

La pierna de la cual se obtuvieron los datos fue la pierna izquierda. Los datos se tomaron empezando en la fase de doble apoyo seguido de una fase de apoyo simple en la pierna izquierda, después la segunda fase de doble apoyo y finalizando con una fase de balanceo de la pierna izquierda. La duración del ciclo fue diferente para cada sujeto.

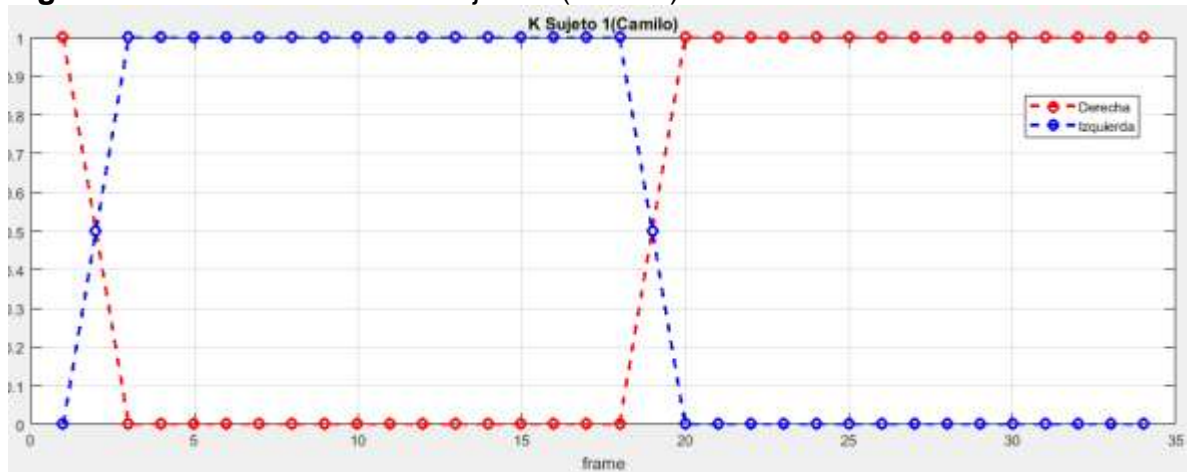
**10.6.1 Sujeto 1 (Camilo).** El primer sujeto tenía las siguientes medidas:

**Tabla 8.** Datos sujeto 1

Medida	Valor
Peso (kg)	67
Pantorrilla (cm)	38
Muslo (cm)	42
HAT (cm)	30

En este caso la cantidad total de frames en los cuales se desarrolló el ciclo fue de 34.

**Figura 56.** Valores de K ciclo Sujeto 1 (Camilo)



La primera fase de doble apoyo va del frame 1 hasta el 3 en donde la variable proporcional K está definida por la expresión:

**Ecuación 49.** Variable proporcional primera fase de doble apoyo sujeto 1.

$$K = -\frac{1}{2}z + \frac{3}{2}$$

Posteriormente se encuentra la fase de apoyo simple donde el valor de K se hace 0, ya que toda la fuerza esta soportada en pierna izquierda, hasta el frame 18 donde se llega nuevamente a la fase de doble apoyo en la cual la fuerza pasa de la pierna izquierda a la derecha con un comportamiento definido por la variable proporcional expresada por expresión:

**Ecuación 50.** Variable proporcional segunda fase de doble apoyo sujeto 1.

$$K = \frac{1}{2}z - 9$$

Finalmente del frame 21 al 34 el cuerpo se apoya en la pierna derecha por lo que la variable K adquiere el valor de 1.

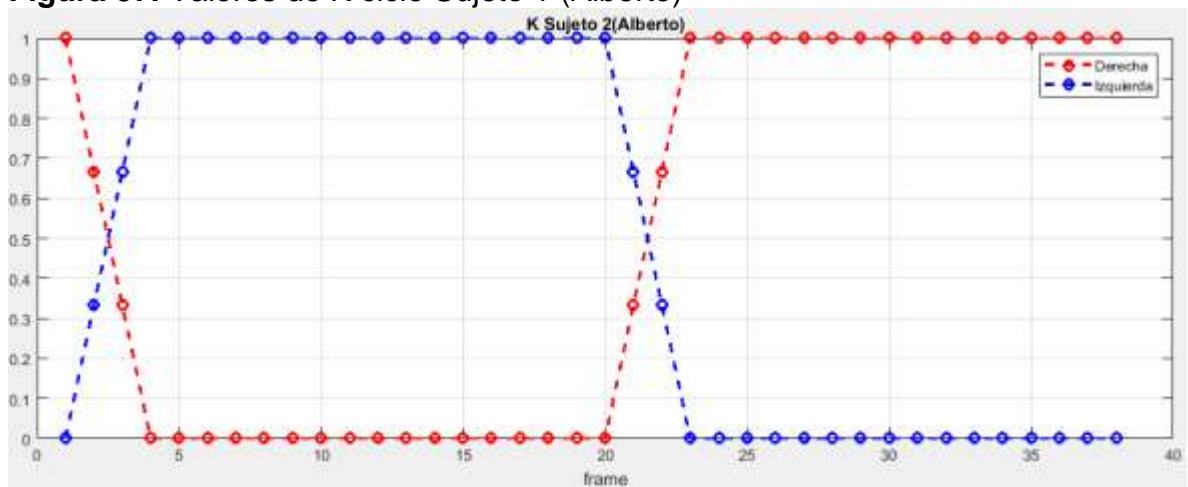
**10.6.2 Sujeto 2 (Alberto).** Del segundo sujeto se obtuvieron los siguientes datos:

**Tabla 9.** Datos sujeto 2

Medida	Valor
Peso (kg)	57
Pantorrilla (cm)	30
Muslo (cm)	43
HAT (cm)	29

En este caso el ciclo fue un poco más largo que en la prueba del sujeto 1, obteniéndose un ciclo de 38 frames.

**Figura 57.** Valores de K ciclo Sujeto 1 (Alberto)



De la misma manera como se hizo en la prueba realizada en el sujeto 1. Inicialmente se calculó el valor de K de la primera fase de doble apoyo contenida entre el frame 1 hasta el frame 4, en donde se obtuvo:

**Ecuación 51.** Variable proporcional primera fase de doble apoyo sujeto 2

$$K = -\frac{1}{3} * z + \frac{4}{3}$$

Al igual que en el sujeto 1, se encuentra a continuación la fase de apoyo simple de la pierna izquierda en la que el valor de K se hace 0 (cero) y está comprendida entre los frames 5 y 19.

Posteriormente se encuentra la segunda fase de doble apoyo en donde el la variable proporcional adquiere un comportamiento definido por:

**Ecuación 52.** Variable proporcional segunda fase de doble apoyo sujeto 2.

$$K = \frac{1}{3}z - \frac{20}{3}$$

Finalmente el ciclo acaba con la fase de balanceo de la pierna izquierda en donde el valor de K se hace 1 y va desde el frame 24 al frame 38.

Del análisis realizado con el modelo de Lagrange y con las curvas de resultados podemos encontrar los siguientes análisis de las gráficas de fuerzas y torques presentadas en los anexos H e I.

### 10.6.3 Análisis de los resultados obtenidos.

- En la metodología de LaGrange todos los elementos se encuentran conectados entre sí lo cual ocasiona que sea altamente susceptible a errores, adicionalmente las constantes multiplicaciones y derivaciones hacen que el error de los instrumentos de medición se propague considerablemente.
- Los resultados muestran que el comportamiento que presentan las fuerzas y toques es similar y se podría decir que hay un comportamiento característico en personas sin ningún tipo de patología significativa en todas las fases de la marcha, con pequeñas variaciones en magnitud y duración debido a la velocidad y a las características antropométricas de cada persona, pero siempre siguiendo el mismo patrón.
- Se observa en las reacciones en Y que existe una oscilación de las fuerzas en el eje en la fase de apoyo esto es de esperar ya que la fuerza de reacción que el piso le hace al pie varia con respecto a las diferentes áreas de contacto en donde se ejerce presión en el movimiento.
- Se presenta un pico en las reacciones en X justo antes de la fase de balanceo lo cual evidencia el impulso que le da la pierna izquierda al cuerpo para lograr el cambio de fase.
- En el torque de la cadera se observa una tendencia negativa es decir en sentido anti horario al inicio del ciclo de balanceo y un cambio súbito en sentido anti horario en la segunda mitad de esta fase por lo que da una idea de cómo ayuda a compensar el movimiento de las piernas en esta fase.

- Para los torques de la rodilla y del tobillo se encontró que tienen una tendencia muy alta como es de esperar en las fases donde el apoyo es simple y llegan a ser alrededor de 4 o 5 veces mayor en estas subfases a comparación del apoyo doble o el balanceo.

## 11. CONCLUSIONES

- La videografía es una opción válida barata y viable para realizar análisis de determinados sistemas dinámicos siempre y cuando se tenga una buena interpretación de los resultados.
- Se encontró que el modelo dinámico de Lagrange aplicado al análisis de marcha es una opción compacta y rápida sin embargo cabe aclarar que es muy susceptible a errores ya que están conectados los cálculos de todo el cuerpo.
- Los valores hallados en los coeficientes de correlación en las validaciones muestran que los resultados de fuerzas son bastante confiables sin embargo en los resultados de los torques se encuentra que tienen algunos desfases y picos a pesar de que poseen un comportamiento parecido con magnitudes de fuerzas cercanas, se encuentra un coeficiente muy pequeño posiblemente debido al error propagado a través de todo el proceso y por la suposición de una parte entera del cuerpo.
- Se encuentra como la longitud de la zancada es afectada por el biotipo de la persona y como afecta estas diferencias a la duración total del ciclo de una persona respecto a otra.
- La mayor ventaja de que el programa haya sido realizado en la plataforma de Matlab R2017a es que esta le otorga la capacidad de ser complementado o modificado rápidamente con el uso de las funciones preestablecidas de múltiples maneras facilitando las futuras investigaciones hechas en el área de la biomecánica.
- Si bien el programa realiza la mayoría de los cálculos complejos, el usuario debe realizar algunas tareas manuales como el filtrado de datos atípicos debido al ruido, la selección de la duración de las fases de la marcha y el cálculo de la variable proporcional, sin embargo estas tareas son muy simples en comparación con el trabajo que conllevaría realizar todos los cálculos de manera manual o con la utilización de otro método.
- Se observa que en un sujeto con el mismo peso que el sujeto utilizado por Winter se sigue un patrón similar en las fuerzas pero aparece un desfase debido probablemente a la diferencia en las velocidades de la marcha y en la duración de cada una de las subfases.

## 12. RECOMENDACIONES

- Las condiciones experimentales para la adquisición de datos mediante videografía requieren un buen control del entorno para evitar ruidos en los resultados espacio temporales, como lo es una condición de luminosidad alta pero con luz blanca, evitando los filtro de luz ambiente al máximo, hay que contar con marcadores de un material que tenga buena reflectividad, también es importante contar con un buen fondo que le dé contraste a los objetos rastreados esto se logra proporcionando un fondo negro del plano de grabación y ropa negra para las personas del experimento.
- Debido a la susceptibilidad del error del modelo de Lagrange se recomienda el uso de instrumentos de alta precisión y el control de todas las variables ambientales posibles como lo son la luz, la velocidad o las prendas del paciente, esto con la finalidad de aumentar la fiabilidad de los resultados.

## BIBLIOGRAFÍA

AGUDELO MENDOZA, Adriana Isabel et al. Marcha: descripción, métodos, herramientas de evaluación y parámetros de normalidad reportados en la literatura. En: Revista CES Movimiento y Salud, 2013, vol. 1. No 1.

BAKER, Richard. Gait analysis methods in rehabilitation. Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation, 3, March 2006.

BEER, Ferdinand P; JOHNSTON, E. Rusell Jr y CLAUSEN, William E. Mecánica vectorial para ingenieros Dinamica. 8 Ed. Mexico D.F: McGraw-Hill Interamericana, 2007. p 755-826.

CAPPOZZO, Aurelio. Gait analysis methodology. En: Human Movement Science 3. 1984. p 27-50.

CASTELLANOS, Yessika. Conoce los diferentes tipos de marchas patológicas. En: Fisioterapia online [Sitio web] [Consulta: 8 de Abril 2017]. Disponible en: <https://www.fisioterapia-online.com/articulos/conoce-los-diferentes-tipos-de-marchas-patologicas>.

CIFUENTES, Christian; MARTÍNEZ Fabio y MARTINEZ, Eduardo. Análisis de vídeo para estimación del movimiento humano: una revisión. En: Revista MED. 2010. p 182-196.

DAVIS, Roy B, et al. A gait analysis data collection and reduction technique. En: Elsevier. Octubre, 1991.

DAZA LESMES, Javier. Evaluación clínico-funcional del movimiento corporal humano. 1 ed. Bogotá D.C.: Editorial médica Panamericana, 2007. p 259-303. ISBN 958-9181-61-4.

GÓMEZ SERRANO, Carlos Arturo y PINTO HERNÁNDEZ, William. Estudio biomecánico y diseño de un emulador de tobillo articulado para prótesis de miembro inferior. Trabajo de grado Ingeniero Mecánico. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. Facultad de ingenierías físico- mecánicas. Escuela de ingeniería mecánica. 2008. p 42-105.

GUARDIOLA LEON, Daniel. Modelamiento en MatLab de prótesis transtibial. En: Revista Tekhnê, Julio-Diciembre, 2015. Vol.15. no. 2., p. 13-22.

MARBELLO PEREZ, Ramiro. Manual de prácticas de Laboratorio. Medellín: Universidad Nacional de Colombia. Escuela de Geociencias y medio ambiente. p 315-320.

Mathworks. 22 de junio de 2017. Disponible en: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/28757-tracking-red-color-objects-using-matlab>.

PETERSON, Donald R. y ADREZIN, Ronald S. Standard Handbook of Biomedical Engineering and Design.

Podoactiva. 23 de junio del 2016, Disponible en internet. <<http://www.podoactiva.com/es/estudio-biomecanico-podoactiva>>.

ROBERTSON, D. G. E., et al. Research methods in biomechanics. 2 ed. Human Kinetics. 2014. 428 p.

SÁNCHEZ LACUESTA, J. Javier, et al. Biomecánica de la marcha humana normal y patológica. Valencia: Instituto de Biomecánica de Valencia, 2005. 444 p.

SAUCEDO ROMERO, Miguel Angel. Valoración de la marcha humana. Trabajo de grado Ingeniero Mecánico. México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de ingeniería. Division de ingeniería mecánica e industrial. 2009. 91 p.

SIMON, Sheldon R. Quantification of human motion: gait analysis benefits and limitations to its application to clinical problems. En: Journal of Biomechanics. 2004. No.37. p 1869-1880.

SOLOMITO, Matthew J. Lagrangian Approach to Modeling the Biodynamics of the Upper Extremity: Applications to Collegiate Baseball Pitching. Doctoral Dissertations. Mansfield. University of Connecticut Graduate School. 2015. 222 p.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA. [Sitio web]. Medellín, Curso completo de biomecánica del cuerpo humano. [Consulta: 28 de Febrero 2017]. Disponible en: <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/mod/book/view.php?id=164140>

VILLA MORENO, Adriana; GUTIERREZ GUTIERREZ, Eduardo y PEREZ MORENO, Juan Carlos. Consideraciones para el análisis de la marcha humana. Técnicas de videogrametría, electromiografía y dinamometría. En: Revista Ingeniería Biomédica. Enero-junio, vol.2 no.3., p. 16-26.

WINTER, David A. Biomechanics and motor control of human movement. 4 ed. John Wiley & Sons, Inc. 2009. 370 p.