

ANÁLISIS NUMÉRICO DEL MECANISMO DE FLUJO
EMERGENTE PARA LA GENERACIÓN DE FENÓMENOS
EN LA ATMÓSFERA SOLAR

LIZETH DANIELA JAIMES GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2019

ANÁLISIS NUMÉRICO DEL MECANISMO DE FLUJO
EMERGENTE PARA LA GENERACIÓN DE FENÓMENOS
EN LA ATMÓSFERA SOLAR

LIZETH DANIELA JAIMES GONZÁLEZ

Trabajo de grado para optar al título de
física

Director
Fabio Duván Lora Clavijo
Ph.D.Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2019

*“Nada ha cambiado y, sin embargo,
todo existe de otra manera”.*

Jean-Paul Sartre

A mi mamá, Cielo González.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	14
1 EL SOL	16
1.1 ASPECTOS GENERALES DEL SOL	16
1.2 MECANISMO DE FLUJO EMERGENTE	18
2 MAGNETOHIDRODINÁMICA	20
2.1 ECUACIÓN DE BOLTZMANN	20
2.2 APROXIMACIÓN MHD DEL PLASMA	22
2.3 RELACIONES CONSTITUTIVAS	23
2.4 ECUACIONES MHD	24
3 DESCRIPCIÓN DEL MODELO	26
3.1 ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES MHD	26
3.2 ESTADO DE EQUILIBRIO Y CONFIGURACIÓN INICIAL	26
3.3 CONDICIONES DE FRONTERA	31
3.4 MÉTODOS NUMÉRICOS	32
4 RESULTADOS	34
4.1 EXPERIMENTO 1: SIN RESISTIVIDAD Y CON <i>TWIST</i> IGUAL ADEN- TRO Y AFUERA DEL TUBO DE FLUJO MAGNÉTICO	34
4.2 EXPERIMENTO 2: CON RESISTIVIDAD Y CON <i>TWIST</i> IGUAL ADENTRO Y AFUERA DEL TUBO DE FLUJO MAGNÉTICO	38
4.3 EXPERIMENTO 3: SIN RESISTIVIDAD Y CON <i>TWIST</i> DIFEREN- TE ADENTRO Y AFUERA DEL TUBO DE FLUJO MAGNÉTICO	41
5 CONCLUSIONES	45
REFERENCIAS	46
ANEXOS	49

A	ECUACIONES DE LA MAGNETOHIDRODINÁMICA	50
A.1	ECUACIONES GENERALES DE TRANSPORTE	50
A.2	ECUACIONES DE LA MHD	54
A.3	LEY DE OHM	55
B	MÉTODOS NUMÉRICOS	57
B.1	VOLÚMENES FINITOS	57
B.2	MÉTODO HLLE	59
B.3	TRANSPORTE DE FLUJO RESTRINGIDO	60

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Esquema de la estructura del Sol y de algunos fenómenos solares presentes en este.	17
Figura 2	Modelo de las líneas de campo magnético del Sol en presencia de regiones activas.	18
Figura 3	Mecanismo de flujo emergente para un tubo de flujo magnético. .	19
Figura 4	Evolución temporal de las partículas en el espacio de fase.	20
Figura 5	Modelo de temperatura observacional del Sol desde la zona convectiva hasta la corona solar	27
Figura 6	Modelo de temperatura observacional, presión y densidad en estado de equilibrio.	28
Figura 7	Valor inicial del campo magnético transversal.	31
Figura 8	Evolución temporal en la zona convectiva de la densidad de masa y del campo magnético transversal en la zona convectiva.	35
Figura 9	Campo magnético transversal en conjunto con las líneas de campo magnético y velocidad transversal junto con las líneas de velocidad, en la zona convectiva.	36
Figura 10	Evolución temporal de la densidad de masa con las líneas de campo magnético y de la temperatura con las líneas de velocidad, en la atmósfera solar.	37
Figura 11	Evolución temporal de la densidad de masa conjunto con las líneas de campo magnético y de la velocidad transversal conjunto con las líneas del campo de velocidad.	38
Figura 12	Evolución temporal de densidad de masa y de la temperatura, con y sin resistividad desde la zona convectiva hasta la corona solar .	39
Figura 13	Evolución temporal del campo magnético transversal y de la densidad volumétrica de energía magnética, con y sin resistividad desde la zona convectiva hasta la corona solar	40

Figura 14	Campo magnético transversal para los casos donde el <i>twist</i> es igual y diferente al exterior del tubo de flujo magnético.	42
Figura 15	Evolución temporal del campo magnético transversal y la densidad volumétrica de energía magnética, con <i>twist</i> igual y diferente afuera del tubo de flujo magnético.	43
Figura 16	Divergencia del campo magnético.	44
Figura 17	Discretización de la malla numérica en el esquema de volúmenes finitos.	57
Figura 18	Esquema para el método HLLE.	60
Figura 19	Elemento de volumen de una intercelda perteneciente a la malla numérica	61
Figura 20	Cara lateral derecha del elemento de volumen.	62
Figura 21	Caras posterior y superior del elemento de volumen	63

LISTA DE TABLAS

Tabla 1	Valores de la intensidad del campo magnético B_0 , del <i>twist</i> b y de la resistividad η , en el interior y el exterior del tubo de flujo magnético para el primer experimento.	30
Tabla 2	Valores de la intensidad del campo magnético B_0 , del <i>twist</i> b y de la resistividad η , en el interior y el exterior del tubo de flujo magnético para el segundo experimento.	30
Tabla 3	Valores de la intensidad del campo magnético B_0 , del <i>twist</i> b y de la resistividad η , en el interior y el exterior del tubo de flujo magnético para el tercer experimento.	30

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A.	ECUACIONES DE LA MAGNETOHIDRODINÁMICA	50
ANEXO B.	MÉTODOS NUMÉRICOS	57

RESUMEN

TÍTULO: ANÁLISIS NUMÉRICO DEL MECANISMO DE FLUJO EMERGENTE PARA LA GENERACIÓN DE FENÓMENOS EN LA ATMÓSFERA SOLAR. *

AUTOR: Lizeth Daniela Jaimes González[†]

PALABRAS CLAVES: atmósfera solar y zona convectiva, mecanismo de flujo emergente, magnetohidrodinámica, métodos numéricos.

DESCRIPCIÓN: Se cree que las regiones activas en la atmósfera solar se originan a partir de tubos de flujo magnético que presentan un campo magnético con *twist* de aproximadamente 10 teslas, el cual es generado por un proceso de dínamo solar que opera en la tacoclina. Los tubos de flujo magnético se elevan a través de la zona convectiva, por un mecanismo denominado flujo emergente, antes de llegar a la fotosfera para formar los fenómenos solares observados. Por lo tanto, analizar este mecanismo permite avanzar en el estudio de la formación de regiones activas como las manchas solares y en problemas abiertos como el calentamiento coronal. En el presente trabajo se hace un análisis paramétrico del mecanismo de flujo emergente, aplicado a un Sol en calma que se modela con un perfil de temperatura observacional, donde se considera una configuración de campo magnético con *twist* que genera un tubo de flujo magnético, de modo que, al aplicarle una perturbación en la presión, se eleva a través de la zona convectiva del Sol y genera fenómenos en la atmósfera solar. Por consiguiente, para la realización del análisis se resuelven numéricamente las ecuaciones de la magnetohidrodinámica resistiva con el código MAGNUS, variando la resistividad y el *twist* fuera del tubo de flujo magnético. Lo anterior con el fin de comparar la densidad, el campo magnético, la temperatura y la energía magnética tanto en la zona convectiva como en la atmósfera solar. De manera general se obtiene que el tubo de flujo magnético emerge y se expande a través de la zona convectiva hasta llegar a la región de transición. Dicha elevación genera regiones activas bipolares en la atmósfera solar, cuyo campo magnético es mayor y cuya temperatura menor que en el entorno, características que se presentan en las manchas solares. Además, la elevación del tubo genera continuamente ondas magnetohidrodinámicas con temperaturas más altas que la del entorno, las cuales calientan continuamente la corona solar. Cuando se tiene en cuenta la resistividad, la morfología del sistema es similar pero se ralentiza, especialmente en la corona solar debido a que el tiempo de difusión en esta región es de cientos de años, lo cual hace que el efecto de la resistividad en fenómenos de corta duración sea prácticamente despreciable. Por otra parte, al variar el *twist* fuera del tubo de flujo magnético, se obtiene una disminución progresiva en la energía magnética, de modo que, cuando la estructura llega a la fotosfera solar es hasta ocho veces menor que sin variar el *twist*. Finalmente se encuentra que el máximo de la divergencia del campo magnético para cada simulación se mantiene en el orden de $10^{-12}[\text{T/m}]$ lo cual garantiza la ausencia de monopolos magnéticos.

* Trabajo de Grado.

[†] Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Fabio Duván Lora Clavijo, Ph.D. Física.

ABSTRACT

TITLE: NUMERICAL ANALYSIS OF THE FLUX EMERGENCE MECHANISM FOR THE GENERATION OF PHENOMENA IN THE SOLAR ATMOSPHERE. *

AUTOR: Lizeth Daniela Jaimes González[†]

KEYWORDS: convective zone and solar atmosphere, flux emergence mechanism, magnetohydrodynamics, numerical methods.

DESCRIPTION: It is believed that the active regions in the solar atmosphere originate from magnetic flux tubes that have a magnetic field with *twist* of approximately 10 teslas, which is generated by a mechanism of solar dynamo that operates in the tachocline. The magnetic flux tubes rise through the convective zone, by a mechanism called flux emergence, before reaching the photosphere to form the observed solar phenomena. Therefore, analyzing the flux emergence mechanism allows progress in the study of the formation of active regions such as sunspots and open problems such as coronal heating. In the present work a parametric analysis of the flux emergence mechanism is made, applied to a quiet Sun that is modeled with an observational temperature profile, where a magnetic field configuration with *twist* is considered that generates a magnetic flux tube, so that, when a pressure disturbance is applied, it rises through the convective zone of the Sun and generates phenomena in the solar atmosphere. Therefore, to perform the flux emergence analysis, the equations of the resistive magnetohydrodynamics with the MAGNUS code are solved by varying the resistivity and the *twist* outside the magnetic flux tube. The above in order to compare the density, the magnetic field, the temperature and the magnetic energy both in the convective zone and in the solar atmosphere. In general, it is obtained that the magnetic flux tube emerges and expands through the convective zone until it reaches the transition region. This evolution generates bipolar active regions in the solar atmosphere, whose magnetic field is higher and the temperature is lower than that of its surroundings, characteristics that occur in sunspots. In addition, tube elevation continuously generates magnetohydrodynamic waves with very high temperatures, which continuously heat the solar corona. When the resistivity is taken into account, the morphology of the system is similar but slows down, especially in the solar corona due to the diffusion time in this region is hundreds of years, which makes the resistivity effect practically negligible. On the other hand, by varying the *twist* outside the magnetic tube, a progressive decrease in the magnetic energy is obtained, so that, upon reaching the solar photosphere, it is eight times smaller than without changing the *twist*. Finally, the maximum of the magnetic field divergence is found for each simulation being maintained at the order of 10^{-12} [T/m] which guarantees the absence of magnetic monopole.

* Bachelor thesis.

[†]Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Adviser: Fabio Duván Lora Clavijo, Ph.D. Física.

INTRODUCCIÓN

El interior de los tubos fluorescentes, la materia expulsada para la propulsión de los cohetes, los rayos durante una tormenta, las auroras boreales, el Sol y el medio interplanetario, a pesar de parecer cosas totalmente diferentes, tienen una característica en común: están conformados de plasma. El plasma es el cuarto estado de agregación de la materia que consiste en gas ionizado que globalmente presenta cuasineutralidad de carga y localmente presenta interacciones colectivas entre partículas y campos electromagnéticos (GALEEV and SUDAN, 1983). Actualmente se tiene el conocimiento que más del 99% de materia en el universo observable es plasma (GURNETT and BHATTACHARJEE, 2005), lo cual hace del estudio de esta rama algo fundamental para entender gran parte del universo. Por lo tanto, es primordial preguntarse ¿cuándo y cómo se tuvo consciencia del cuarto estado de agregación de la materia?

En el siglo XIX, mientras Michael Faraday formulaba los fundamentos de los fenómenos electromagnéticos, también trabajaba en el cimiento del cuarto estado de agregación de la materia: las descargas oscuras (TREUMANN and PARROT, 2008). El estudio experimental de Faraday encaminó a prominentes científicos como Joseph John Thomson, John Sealy Townsend e Irving Langmuir al estudio de las descargas eléctricas en gases (ICHIMARU, 2018), y como resultado se estableció el pilar de lo que actualmente se conoce como plasma. A mediados del siglo XIX, el fisiólogo, anatomista y botánico checo Jan Evangelista Purkinje introdujo el uso de la palabra plasma para definir el líquido transparente que permanece en la sangre después de la eliminación de todo material corpuscular. En 1923, Irving Langmuir, científico estadounidense y pionero en el estudio de la física del plasma, mientras trabajaba con dispositivos electrónicos basados en gases ionizados, propuso que los iones y electrones en dichos gases podrían considerarse como material corpuscular arrastrado en algún tipo de medio fluido y, por analogía con la sangre, también denominó a este fluido plasma (BELLAN, 2008).

En las décadas de 1920 y 1930, investigadores aislados entre sí, cada uno motivado por un problema práctico en específico, comenzaron el estudio de la física del plasma con la investigación de los efectos del plasma ionosférico en la transmisión de ondas de radio y, por otro lado, con los tubos de electrones gaseosos para la rectificación de la corriente (BELLAN, 2008). En 1942, Hannes Alfvén desarrolló una teoría de las ondas electromagnéticas-hidrodinámicas, actualmente llamadas ondas de Alfvén, que dio a conocer en la revista *Nature* con el nombre de “*Existence of Electromagnetic-Hydrodynamics Waves*” (ALFVEN, 1942), el cual le otorgó el premio nobel de física en 1970 (ALFVEN, 1971) y dio cabida al estudio de la interacción entre fluidos conductores y campos magnéticos. A principios de 1950, se inició de manera simultánea una investigación sobre la liberación controlada de energía de fusión nuclear basada en la física del plasma en Estados Unidos, Gran Bretaña y la entonces Unión Soviética, como una rama de investigación sobre armas termonucleares (ICHIMARU, 2018). Mientras se trabajaba con la fusión, también empezó la investigación de los plasmas espaciales con la medición de las auroras y la ionosfera, pero fue hasta la medición del plasma en la magnetosfera terrestre y de los vientos solares cuando se estimuló en gran medida la investigación del plasma espacial (BELLAN, 2008).

A pesar de que en su momento no se le dio la debida importancia al campo del plasma, el interés por la conversión directa de energía térmica en electricidad por medios magnetohidrodinámicos, la propulsión de vehículos espaciales y el desarrollo de nuevos dispositivos electrónicos permitió la estimulación de esta rama (GURNETT and BHATTACHARJEE, 2005). Actualmente se conoce que los parámetros fundamentales del plasma son la densidad de partículas, la temperatura y el campo magnético. Dependiendo de las variaciones de estos parámetros se encuentran tres tipos de plasma: los producidos

artificialmente, los terrestres y los espaciales (BELLAN, 2008), donde la mayor cantidad de plasma existente en el universo observable se encuentra en la categoría espacial, categoría que comprende las estrellas.

El estudio de las estrellas proviene de hace más de 2500 años cuando se crearon calendarios solares con alta precisión, lo cual permitió que los chinos, caldeos y mayas usaran la escritura para registrar los eclipses y detectaran un ritmo para predecirlos (LITTMANNAND and WILLCOX, 2008), generando así una gran curiosidad por el estudio del Sol. La física solar tiene un exhaustivo estudio porque el Sol es la fuente de luz y calor de la Tierra, y además, tiene una misteriosa conexión con el clima terrestre a través de las manchas solares, ya que estas desencadenan muchos fenómenos en la atmósfera solar y, en muchos casos, se transforman en vientos solares que afectan el campo magnético terrestre (PRIEST, 2014). Para el estudio de los fenómenos solares en la atmósfera solar se han estudiado muchas estructuras, pero actualmente, una de las estructuras de más interés son los tubos de flujo magnético, que son regiones de plasma con altas densidades y campos magnéticos fuertes, que se generan en la tacoclina y se elevan a través de la zona convectiva del Sol por medio de la flotabilidad (CHEUNG and ISOBE, 2014).

El estudio de la topología de los tubos de flujo magnético ha sido uno de los objetivos de diferentes misiones tanto terrestres como espaciales. Entre las más concluyentes están las observaciones hechas por Hinode/EIS/XRT y STEREO/SECCHI/EUVI de la radiación ultravioleta extrema y los rayos X emitidos por el Sol, en las que se detectó la presencia de sistemas magnéticos con helicidad, constituidos por múltiples hilos enlazados que se interpretan como tubos de flujo magnético con *twist* (RAOUAFI, 2009). Las observaciones han llevado a deducir que en la zona convectiva existen pequeños tubos de flujo magnético (SOLANKI, 1997; ZWAAN, 1978) con campos magnéticos fuertes de aproximadamente 70kG, y radios de aproximadamente 100km (MAGARA, 2001).

Con la anterior motivación, en este trabajo de grado se busca simular numéricamente la elevación de un tubo de flujo magnético con *twist* a través de la zona convectiva del Sol y analizar la generación de fenómenos en la atmósfera solar debido a dicha elevación. Para la realización del análisis, se hace un estudio paramétrico teniendo en cuenta los casos con y sin resistividad y, además, el caso cuando se varía el *twist* al exterior del tubo de flujo magnético. El siguiente trabajo está seccionado de la siguiente manera: en el capítulo 1, se presenta una breve descripción del Sol junto con el mecanismo de flujo emergente. En el capítulo 2, se introducen las ecuaciones que determinan la dinámica del plasma, las cuales vienen dadas por la magnetohidrodinámica (MHD). En el capítulo 3 se adimensionalizan las ecuaciones de la MHD y se presenta el estado de equilibrio de la temperatura, presión y densidad, junto con la configuración inicial de campo magnético. Además, se exponen los métodos numéricos utilizados para describir la evolución el sistema en cuestión, con sus respectivas condiciones de frontera. En el capítulo 4 se muestran los resultados obtenidos en la zona convectiva y en la atmósfera solar para un primer caso sin resistividad y con *twist* igual adentro y afuera del tubo de flujo magnético, además, se analiza la dinámica del primer caso al variar los parámetros de resistividad y *twist* afuera del tubo. Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones de los resultados presentados en el capítulo anterior.

1. EL SOL

1.1. ASPECTOS GENERALES DEL SOL

El Sol es la estrella más cercana a la Tierra, es la fuente de energía que mantiene la vida en nuestro planeta y, desde el punto de vista físico, es un excelente laboratorio en el que puede observarse y estudiarse gran cantidad de fenómenos que sólo tienen lugar en las condiciones físicas especiales que se dan en las estrellas. Desde hace miles de años se busca entender cómo funciona el Sol, por qué cambia y cómo estos cambios influyen en la Tierra; actualmente es una rama de investigación llamada clima espacial (CORDERO and LARA, 2013). El clima espacial estudia cómo las perturbaciones en el viento solar sacuden el campo magnético de la Tierra, afectando así la atmósfera, los satélites y los aparatos eléctricos. Debido a todos los problemas que se producen a causa del viento solar y al incremento en la dependencia de satélites y telecomunicaciones, el estudio de los fenómenos solares es, por lo tanto, fundamental para entender el comportamiento de muchos fenómenos en la Tierra y su entorno cercano.

El Sol es una bola de plasma masiva que está conformada, en su mayoría, por átomos de Hidrógeno ($\sim 92\%$) y de Helio ($\sim 8\%$), principalmente ionizados debido a la alta temperatura; los elementos restantes como Carbono, Nitrógeno y Oxígeno, corresponden a aproximadamente 0.1% y están presentes prácticamente en las mismas proporciones que en la Tierra (PRIEST, 2014). El modelo más aceptado de la estructura solar indica que el Sol está conformado por una parte interior y por una parte exterior, denominada atmósfera solar. El interior del Sol se divide en el núcleo, la zona de radiación, la taoclina y la zona convectiva. Por otro lado, la atmósfera solar está seccionada en la fotosfera, la cromosfera, la región de transición y la corona (RYAN and ANDREW, 2010) (ver figura 1).

Toda la energía que emite el Sol se genera en su centro, región de alta presión y elevada temperatura donde se llevan a cabo las reacciones nucleares que transforman hidrógeno en helio (fusión nuclear) como lo son la cadena protón-protón y el ciclo CNO, con los cuales se genera energía (CORDERO and LARA, 2013). Dicha energía viaja hacia la zona de radiación, la cual contiene materia con una densidad tal que los fotones no pueden viajar libremente, por lo que estos colisionan y son dispersados mediante la difusión de radiación. Entre la zona radiativa y la zona convectiva se encuentra la taoclina, que es una región provocada por la cizalladura generada debido a que la zona de radiación gira como un sólido rígido y la zona convectiva presenta rotación diferencial (SPIEGEL and ZAHN, 1992). Por otra parte, en la zona convectiva la energía es transportada a la superficie del Sol en forma de calor mediante corrientes convectivas debido al movimiento del plasma en esta zona, lo cual tiene como consecuencia que el Sol tenga una superficie granular y no lisa.



Figura 1: Esquema de la estructura del Sol y de algunos fenómenos solares presentes en este.

La atmósfera se define como la parte del Sol desde la cual los fotones pueden escapar directamente al espacio y se compone de tres regiones con diferentes densidades y temperaturas, y por lo tanto, diferentes fenómenos. La capa más baja es la fotosfera, que es relativamente densa y opaca y emite la mayor parte de la radiación solar. Por encima de la fotosfera se encuentra la cromosfera, la cual es ópticamente delgada en el ultravioleta, visible e infrarrojo, pero es ópticamente gruesa en las otras líneas espectrales (PRIEST, 2014). Entre la cromosfera y la corona se encuentra una región de transición, la cual es una región que no se distingue por una altura o espesor determinado, sino porque, tal como su nombre lo indica, en esta región se llevan a cabo algunos cambios en las características de la atmósfera solar como una variación abrupta en la temperatura, presión y densidad. Debajo de dicha zona domina la presión del fluido y por encima la presión magnética, lo cual está determinado por el valor del plasma beta $\beta = P/P_{mag}$, que en la fotosfera y cromosfera corresponde a $\beta > 1$, en la zona de transición a $\beta = 1$ y en la corona a $\beta < 1$. La corona se extiende desde la parte superior de la región de transición hasta el viento solar, que llena la heliosfera. El límite exterior de la corona se define como el radio de Alfvén, donde la velocidad del viento solar es igual a la velocidad de las ondas de Alfvén (MARISKA, 1986).

Uno de los atributos más enigmáticos del Sol es su campo magnético, ya que cambia en respuesta al movimiento constante al interior del Sol y, por lo tanto, es muy volátil (ver figura 2). Al igual que en muchos objetos astrofísicos, el magnetismo no se entiende del todo pero, a diferencia de la mayoría de esos objetos, el campo magnético solar se mide y estudia desde hace varias décadas y, gracias a eso se cuenta con modelos que pueden explicar una gran parte de esas observaciones. Por ejemplo, se sabe que la combinación de campo magnético, gas ionizado, movimientos convectivos y la rotación diferencial del Sol dan como resultado un gran número de fenómenos de diversas escalas temporales, espaciales y energéticas, que tienen lugar en la atmósfera solar como lo son las manchas solares, la granulación, las prominencias, los bucles coronales, las eyecciones de masa coronal, entre otros.

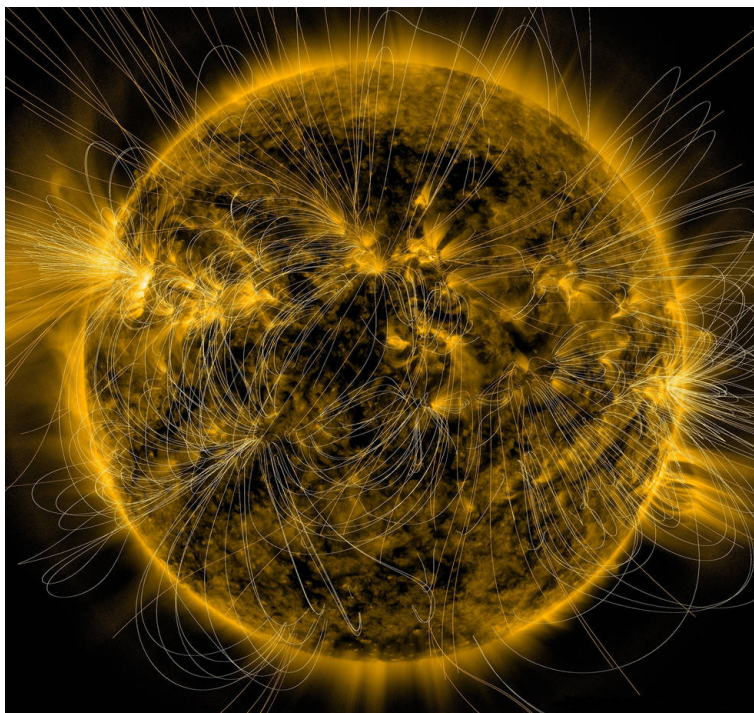


Figura 2: Modelo de las líneas de campo magnético del Sol en presencia de regiones activas, sobre una imagen capturada por el Observatorio de Dinámica Solar (*Solar Dynamics Observatory*) de la NASA.

1.2. MECANISMO DE FLUJO EMERGENTE

La emergencia de flujo magnético corresponde al mecanismo que conduce a eventos en la atmósfera solar como manchas solares (FAN, 2009; MCINTOSH and WILSON, 1985), eyecciones de masa coronal (NITTA and HUDSON, 2001; ZHANG and ZHANG, 2008), jets (ISOBE and TRIPATHI, 2007), entre otros. La actividad atmosférica solar es impulsada por la aparición de flujo magnético desde el interior del Sol. Las concentraciones de campo magnético fuerte aparecen en la superficie como estructuras dependientes del tiempo, conocidas como regiones activas. Dichas regiones pueden variar en complejidad pero generalmente son bipolares, con dos áreas de polaridad opuesta. La vida útil de las regiones activas puede variar de varias horas a varios meses, dependiendo del tamaño de la región y la intensidad del flujo magnético. El proceso de emergencia toma una fracción de la vida útil total de una región activa, pero es durante este tiempo que se presentan una colección de mecanismos físicos.

La aparición de las regiones activas en la superficie solar ha intrigado a muchos astrónomos desde las primeras observaciones telescópicas de manchas solares por Galileo a principios del siglo XVII. Actualmente, se cree que la generación del campo magnético tan fuerte de las zonas activas se produce en la tacoclina, donde debido a la rotación diferencial se transforma parte de la energía cinética global en energía magnética por medio de procesos de dínamo solar. Dicha teoría predice que la intensidad del campo magnético en los tubos puede alcanzar hasta 10 Teslas (MAGARA, 2001). Con la energía generada y la rotación diferencial se generan tubos de flujo magnético con *twist* que emergen desde la zona convectiva hasta la superficie mediante la flotabilidad. Para que la flotabilidad ocurra, es necesario que la densidad ρ_i dentro del tubo sea menor que la densidad ρ_0 en el exterior, de manera que,

es posible perturbar directamente esta variable de estado o la presión p_i dentro del tubo, la cual sería mayor o menor que la presión p_0 del entorno dependiendo de la ecuación de estado (ver figura 3).

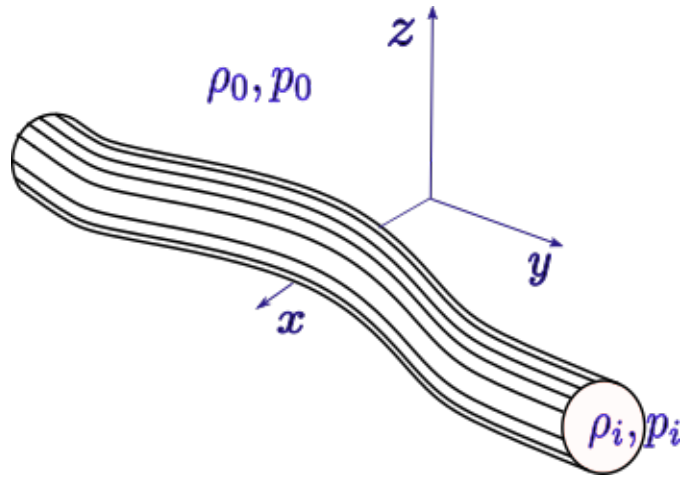


Figura 3: Mecanismo de flujo emergente para un tubo de flujo magnético con densidad ρ_i y presión p_i al interior, el cual se encuentra en un entorno con densidad ρ_0 y presión p_0 .

Para poder analizar el mecanismo de flujo emergente es necesario recurrir a la teoría de la magnetohidrodinámica. Dicha teoría es efectiva en el Sol, ya que esta descripción es válida siempre que el plasma sea altamente colisional y que la distribución de partículas sea localmente maxwelliana. Estas características se presentan tanto en la zona convectiva como en la atmósfera solar (MACTAGGART, 2011).

2. MAGNETOHIDRODINÁMICA

La magnetohidrodinámica es una rama de la mecánica de medios continuos que describe la interacción a bajas frecuencias entre fluidos eléctricamente conductores y campos magnéticos (SCHNACK, 2009), donde el comportamiento de los fluidos viene gobernado por las ecuaciones de Maxwell, junto con la Ley de Ohm, la ecuación de estado y las ecuaciones de continuidad de masa, movimiento y energía (PRIEST, 2014). Además, es un modelo macroscópico que considera el plasma como un fluido y lo describe en términos de los valores promedios de las variables de interés como la temperatura, presión y velocidad (MIYAMOTO, 1997).

2.1. ECUACIÓN DE BOLTZMANN

De manera general, una partícula puede ser especificada por sus variables canónicas X_i , P_i y el tiempo t en el espacio de fase; donde X_i y P_i representan las coordenadas y los momentos generalizados, respectivamente. Para describir las propiedades físicas del plasma es necesario definir la función de distribución para el sistema en consideración, $F_\alpha(X_i, P_i, t)$, que indique la densidad del número de partículas de tipo α en el espacio de fase. La ecuación que rige la función de distribución es conocida como la ecuación de Boltzmann. Esta ecuación se deriva mediante el Teorema de Liouville, el cual es un resultado de la mecánica Hamiltoniana sobre la evolución temporal de un sistema mecánico y establece que: “un elemento de volumen en el espacio de fase puede deformarse pero su volumen no cambia con la evolución temporal” (CAMPOS, 2006) (ver figura 4).

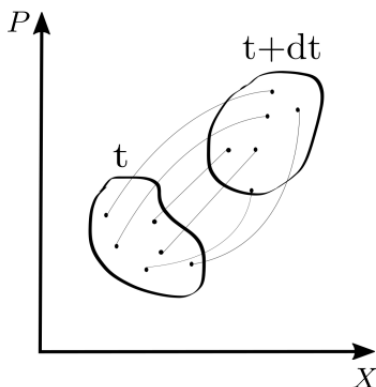


Figura 4: Evolución temporal de las partículas en el espacio de fase. Donde se observa que tal como lo dice el teorema de Liouville, a pesar de que el elemento se deforme, su volumen se mantiene constante.

El movimiento de una partícula o evolución de un sistema en el espacio de fase se describe a través de las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad (2.1)$$

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X_i}, \quad (2.2)$$

donde $H = H(X_i, P_i, t)$ es el Hamiltoniano del sistema o partícula en cuestión. Por lo tanto, se define $\Delta = \delta X_i \delta P_i$ como un volumen infinitesimal en el espacio de fase, el cual según el teorema de Liouville cumple que $d\Delta/dt = 0$. Además, δN_α es el número de partículas de tipo α , el cual puede representar los iones, electrones o neutros, en un pequeño volumen del espacio de fase, y se escribe como

$$\delta N_\alpha = F_\alpha(X_i, P_i, t) \delta X_i \delta P_i. \quad (2.3)$$

Debido a que el volumen y las partículas dentro de este volumen se conservan, la función de distribución $F_\alpha = \delta N_\alpha / \Delta$ también es constante. Lo anterior, en el caso donde no se está considerando dispersión de partículas por

colisiones. Por consiguiente, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dF_\alpha}{dt} &= \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial t} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial t} \right) = 0, \\ \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial P_i} \frac{\partial F_\alpha}{\partial X_i} - \frac{\partial H}{\partial X_i} \frac{\partial F_\alpha}{\partial P_i} \right) &= 0.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Por otra parte, se define el Hamiltoniano, el cual corresponde al de una partícula cargada interactuando con campos electromagnéticos

$$H = \sum_k \frac{(P_k - q_\alpha A_k)^2}{2m_\alpha} + q_\alpha \phi,\tag{2.5}$$

siendo q_α y m_α la carga y masa de la partícula tipo α , respectivamente, A_k es el potencial magnético vectorial y ϕ es el potencial escalar. Ya que la idea es trabajar en el espacio de velocidades, es necesario utilizar las coordenadas espaciales y de velocidades x_i , v_i , en vez de las coordenadas canónicas X_i , P_i . Para esto, se requiere de las expresiones

$$P_i = m_\alpha v_i + q_\alpha A_i \quad y \quad X_i = x_i,\tag{2.6}$$

en conjunto con una función de distribución en el espacio de las velocidades $f_\alpha(x_i, v_i, t)$, la cual, con un factor de ajuste de unidades de m_α^3 , queda

$$F_\alpha(X_i, P_i, t) = \frac{1}{m_\alpha^3} f_\alpha(x_i, v_i, t).\tag{2.7}$$

Al reemplazar las ecuaciones (2.5), (2.6) y (2.7) en la ecuación (2.4), se obtiene la ecuación de Vlasov, la cual corresponde a la ecuación de Boltzmann sin tener en cuenta los efectos debido a las colisiones

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{\vec{F}}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha = 0,\tag{2.8}$$

donde $\vec{F} = q_\alpha(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ corresponde a la fuerza de Lorentz, siendo \vec{E} el campo eléctrico, \vec{B} el campo magnético, y $\nabla_{\vec{v}}$ el gradiente con respecto a las coordenadas de velocidad. Si se tienen en cuenta los efectos debido a las colisiones, se debe agregar la variación de f_α debido a estas colisiones como $(\delta f_\alpha/dt)_{col}$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{\vec{F}}{m_\alpha} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha = \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col}\tag{2.9}$$

de modo que se obtiene la ecuación de Boltzmann.

Momentos de la ecuación de Boltzmann Los plasmas pueden ser descritos como varios fluidos con densidades de carga ρ_α , densidades de corriente \vec{J}_α , concentraciones n_α y velocidades promedio \vec{V}_α , distintos. Estas cantidades físicas se pueden expresar mediante promedios en el espacio de velocidades mediante la función de distribución en ese espacio. Las cantidades anteriormente mencionadas se pueden describir de la siguiente forma

$$\rho_\alpha(\vec{r}, t) = q_\alpha \int f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v},\tag{2.10}$$

$$\vec{J}_\alpha(\vec{r}, t) = q_\alpha \int \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v},\tag{2.11}$$

$$n_\alpha(\vec{r}, t) = \int f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v},\tag{2.12}$$

$$\vec{V}_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{\int \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}}{\int f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}}.\tag{2.13}$$

Por otro lado, como se pretende dar una descripción macroscópica del plasma, se integra la ecuación cinética de Boltzmann (2.9) en todo el espacio de velocidades, con diferentes pesos con respecto a la velocidad, como se aprecia en el anexo A.1. Por consiguiente, se obtiene la ecuación de continuidad, la ecuación de movimiento y la ecuación de transferencia de energía, respectivamente

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{V}_\alpha) = 0, \quad (2.14)$$

$$\rho_{m\alpha} \frac{d\vec{V}_\alpha}{dt} = \rho_\alpha (\vec{E} + \vec{V}_\alpha \times \vec{B}) + \rho_{m\alpha} \vec{g} - \nabla \cdot \vec{\mathbf{M}}_\alpha - \nabla p_\alpha + \vec{R}_\alpha, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} V_\alpha^2 + \frac{3}{2} p_\alpha \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} V_\alpha^2 + \frac{5}{2} p_\alpha \right) \vec{V}_\alpha + \vec{\mathbf{M}}_\alpha \cdot \vec{V}_\alpha + \vec{C}_\alpha \right] = \\ \rho_\alpha \vec{E} \cdot \vec{V}_\alpha + \vec{V}_\alpha \cdot \vec{R}_\alpha + Q_\alpha, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $\rho_{m\alpha}$ es la densidad de masa, Q_α es la generación de calor debido a las colisiones, \vec{C}_α es el vector flujo de calor, $\vec{\mathbf{M}}_\alpha$ es el tensor de viscosidad, \vec{R} es la variación del momento debido a la colisión entre especies, p_α es la presión y \vec{g} es la gravedad.

2.2. APROXIMACIÓN MHD DEL PLASMA

Plasma como dos fluidos Es posible describir los plasmas como dos fluidos, uno de iones y otro de electrones con densidades de masa “ ρ_{mi} ”, “ ρ_{me} ”, velocidades “ \vec{V}_i ”, “ \vec{V}_e ” y presiones “ p_i ”, “ p_e ”. Debido a que se consideran todas las cantidades promediadas en el espacio de velocidades, los fenómenos asociados con la función de distribución serán despreciados. En este caso, los efectos de ionización y recombinación producto de las colisiones serán despreciadas, junto con la viscosidad

$$\int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} d\vec{v} = 0 \quad y \quad \vec{\mathbf{M}}_\alpha = 0.$$

En consecuencia, las ecuaciones de continuidad, movimiento y energía para los dos fluidos en consideración, que en este caso son los electrones e iones, quedan de la siguiente manera

$$\frac{\partial \rho_{me}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{me} \vec{V}_e) = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \rho_{mi}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{mi} \vec{V}_i) = 0, \quad (2.18)$$

$$\rho_{me} \frac{d\vec{V}_e}{dt} = \rho_e (\vec{E} + \vec{V}_e \times \vec{B}) + \rho_{me} \vec{g} - \nabla p_e + \vec{R}, \quad (2.19)$$

$$\rho_{mi} \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \rho_i (\vec{E} + \vec{V}_i \times \vec{B}) + \rho_{mi} \vec{g} - \nabla p_i - \vec{R}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{me}}{2} V_e^2 + \frac{3}{2} p_e \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{me} V_e^2 + \frac{5}{2} p_e \right) \vec{V}_e + \vec{C}_e \right] = -en_e \vec{E} \cdot \vec{V}_e + \vec{V}_e \cdot \vec{R} + Q_e, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{mi}}{2} V_i^2 + \frac{3}{2} p_i \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{mi} V_i^2 + \frac{5}{2} p_i \right) \vec{V}_i + \vec{C}_i \right] = eZn_i \vec{E} \cdot \vec{V}_i - \vec{V}_i \cdot \vec{R} + Q_i, \quad (2.22)$$

donde “ \vec{R} ” será el cambio de momento del fluido electrónico por las colisiones con el fluido iónico, por lo tanto, $\vec{R}_e = \vec{R}$ y por conservación $\vec{R}_i = -\vec{R}_e = -\vec{R}$.

Aproximación del plasma como un fluido MHD Dado que la razón de masa ión-electrón es $m_i/m_e \approx 1836A$, donde A es el peso atómico del ión, la contribución de los iones a la densidad de masa del plasma es dominante (BITTENCOURT, 2013). De manera que, para las ecuaciones MHD para un sólo fluido es necesario definir

$$\rho_m = n_e m_e + n_i m_i, \quad (2.23)$$

$$\vec{V} = \frac{n_e m_e \vec{V}_e + n_i m_i \vec{V}_i}{\rho_m}, \quad (2.24)$$

$$\rho = -en_e + eZn_i, \quad (2.25)$$

$$\vec{J} = -en_e \vec{V}_e + eZn_i \vec{V}_i. \quad (2.26)$$

Al relacionar las ecuaciones (2.17)-(2.22) con las ecuaciones (2.23)-(2.26), como se ve en el anexo A.2, se obtienen las ecuaciones de continuidad (2.27), movimiento (2.28) y energía (2.29) para la aproximación a un fluido MHD

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{V}) = 0, \quad (2.27)$$

$$\rho_m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{J} \times \vec{B} + \rho_m \vec{g} - \nabla p, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{V} = (\gamma - 1)\eta J^2, \quad (2.29)$$

donde en la ecuación de movimiento se desprecia el término relacionado con el campo eléctrico, ya que al considerar que la velocidad característica del fluido es no relativista, es decir, mucho menor que la velocidad de la luz, los términos relacionados con las corrientes de desplazamiento pueden ser despreciados. Para la ecuación de energía es necesario utilizar una relación constitutiva como lo es la ecuación de estado para un gas ideal, donde γ representa la relación de calores específicos, que en este caso, al considerar un gas monoatómico corresponde a 5/3 (la razón para usar un gas ideal monoatómico se presenta en la sección 2.3) y η es la resistividad.

2.3. RELACIONES CONSTITUTIVAS

Las ecuaciones (2.27)-(2.29) no corresponden a todas las ecuaciones de la MHD, por lo tanto, no engloban todas las propiedades físicas del plasma en cuestión. Estas ecuaciones deben complementarse con algunas relaciones constitutivas, las cuales relacionan las variables termodinámicas o mecánicas de un sistema físico. En particular, en este trabajo son necesarias dos relaciones constitutivas: la ecuación de estado y la ley de Ohm.

Ecuación de estado En este caso, así como una variedad de aplicaciones MHD, se asume una ecuación de estado para un gas ideal. Esta ecuación corresponde a un gas teórico compuesto de un conjunto de partículas puntuales con desplazamientos aleatorios, que no interactúan entre sí. No obstante, bajo las condiciones de temperatura y presión en las que el gas se encuentra en equilibrio, los

gases reales se comportan de manera cualitativa como un gas ideal. Lo anterior se debe a que bajo estas condiciones el trabajo realizado por las fuerzas intermoleculares es menos importante que la energía cinética de las partículas, y el tamaño de estas es menos importante comparado con la distancia entre ellas (KAUTZ and et al, 2005). La ecuación de estado para un gas ideal puede representarse de la siguiente manera

$$p = \frac{2K_B}{m_p} \rho_m T, \quad (2.30)$$

donde K_B es la constante de Boltzmann, m_p es la masa del protón y T es la temperatura.

Ley de Ohm Al hablar de las ecuaciones MHD resistivas es necesario tener en cuenta la ley de Ohm, la cual se deduce en el anexo A.3,

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = \eta \vec{J}, \quad (2.31)$$

ya que cuando la conductividad eléctrica es finita aparecen términos no ideales. Por ejemplo, al tener en cuenta la resistividad y considerándola constante, la ecuación de inducción de Faraday queda de la siguiente manera,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}, \quad (2.32)$$

la cual corresponde a una de las ecuaciones MHD. El segundo término del lado derecho de la ecuación capturan el efecto de la difusión óhmica del campo magnético, que es ingrediente clave para la reconexión magnética. Dado que la difusividad magnética estimada del plasma solar es a menudo demasiado pequeña para que las simulaciones numéricas resuelven estructuras a escala difusiva, a menudo se adoptan formas de η espacialmente variables, de modo que los efectos difusivos sean mínimos fuera de la capa de reconexión y suficientes dentro de estas capas, permitiendo la reconexión sin introducción de efectos numéricos espurios. Un ejemplo de esto es la resistividad anómala que se presenta en (CHEN and SHIBATA, 2000), donde se asume $\eta \propto J^2$ y permite la reconexión magnética rápida tipo Petschek (KULSRUD, 2001) en simulaciones de flujo emergente con campo coronal pre-existente (CHEUNG and ISOBE, 2014).

2.4. ECUACIONES MHD

Finalmente, las ecuaciones MHD son las ecuaciones de la hidrodinámica (2.27)-(2.29), la ecuación de inducción de Faraday (2.32) y la restricción de la divergencia del campo magnético $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. De modo que, las ecuaciones MHD escritas de manera conservativa son

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{V}) = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial (\rho_m \vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho_m \vec{V} \otimes \vec{V} - \frac{\vec{B} \otimes \vec{B}}{\mu_0} + \vec{I} p_t \right) = \rho_m \vec{g}, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left((e + p_t) \vec{V} - \frac{\vec{B}(\vec{V} \cdot \vec{B})}{\mu_0} \right) = \rho_m \vec{V} \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\eta}{\mu_0} \vec{J} \times \vec{B} \right), \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \otimes \vec{B} - \vec{B} \otimes \vec{V}) = -\vec{\nabla} \times \eta \vec{J}, \quad (2.36)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.37)$$

donde \otimes representa el producto tensorial, $p_t = p + \vec{B}^2/2$ es la presión total que está conformada por la presión térmica y la presión magnética, μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío, \vec{I} es la matriz unidad y $e = p/(\gamma - 1) + \rho\vec{v}^2/2 + \vec{B}^2/2$ es la densidad de energía total que corresponde a la suma de las densidades de energía interna, cinética y magnética. Es necesario agregar la ecuación (2.37), ya que la nulidad de la divergencia del campo magnético garantiza la ausencia de monopolos magnéticos.

3. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

Las ecuaciones de la MHD describen la dinámica del plasma, proporcionando información de variables como la densidad de masa, presión, velocidad y campo magnético. Dado que algunos valores pueden ser varios ordenes de magnitud más grandes que otros, es necesario adimensionalizar estas ecuaciones. Por otra parte, al ser un sistema de ecuaciones no lineal, métodos numéricos como el método de líneas no son aptos, de manera que, es necesario implementar métodos mucho más sofisticados, incluyendo uno que garantice la ausencia de monopolos magnéticos, los cuales violarían la física implicada en el sistema.

3.1. ADIMENSIONALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES MHD

El uso de métodos numéricos requiere que se lleve a cabo la adimensionalización de las ecuaciones, puesto que algunos valores pueden ser varios ordenes de magnitud más grandes respecto a otros, lo cual puede causar errores numéricos. Por lo tanto, se definen las variables independientes con su respectivo operador diferencial y las variables de estado independientes

$$t = \frac{v_a}{l_a} t_0, \quad \frac{\partial}{\partial t} = t_a \frac{\partial}{\partial t_0}, \quad l = \frac{l_0}{l_a}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = l_a \frac{\partial}{\partial x_{i0}},$$

$$v_i = \frac{v_{i0}}{v_a}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{\rho_a}, \quad P = \frac{P_0}{\rho_a v_a^2}, \quad B_i = \frac{B_{i0}}{v_a \sqrt{\mu_0 \rho_a}}, \quad \eta = \frac{\eta_0}{l_a v_a \mu_0},$$
(3.1)

de modo que, las ecuaciones de la MHD presentadas en (2.33)-(2.37) quedan iguales, con la diferencia de que μ_0 ya no aparece y ahora con los parámetros de adimensionalización, los cuales en este caso corresponden a $l_a = 1Mm$, $v_a = 1Mm/s$ y $\rho_a = 10^6 kg/Mm^3$, valores que fueron tomados de (NAVARRO et al., 2017). Por medio de las siguientes expresiones

$$t_a = \frac{l_a}{v_a}, \quad v_a = \frac{B_a}{\sqrt{\mu_0 \rho_a}},$$
(3.2)

se pueden obtener los valores faltantes, de tal manera que $t_a = 1s$, $B_a = 3,5449 \times 10^{-3}T$. Durante las simulaciones se utilizan estos valores adimensionales, sin embargo, posteriormente se recuperan los valores físicos de las variables.

3.2. ESTADO DE EQUILIBRIO Y CONFIGURACIÓN INICIAL

Se propone un estado de equilibrio correspondiente a un Sol en calma, es decir, sin tener en cuenta los fenómenos activos, mediante la inclusión de un perfil de temperatura semiempírico, con el cual se obtienen los perfiles de densidad y presión. Para las componentes del campo magnético se utiliza el modelo de tubo de flujo Gold-Hoyle (GOLD and HOYLE, 1960), donde se perturba la presión dentro del tubo y, por lo tanto, la densidad.

Modelo de temperatura El perfil de temperatura corresponde a la unión de dos modelos observacionales del Sol en calma, para así obtener la temperatura desde la zona convectiva hasta la corona solar, como se observa en la figura 5. El primero corresponde al modelo S tomado de (CHRISTENSEN, 1996), el cual proporciona los datos de la temperatura en el interior del Sol. El segundo corresponde al modelo C7 descrito en (AVRETT and LOESER, 2008), que provee los datos observacionales de la temperatura en la atmósfera solar.

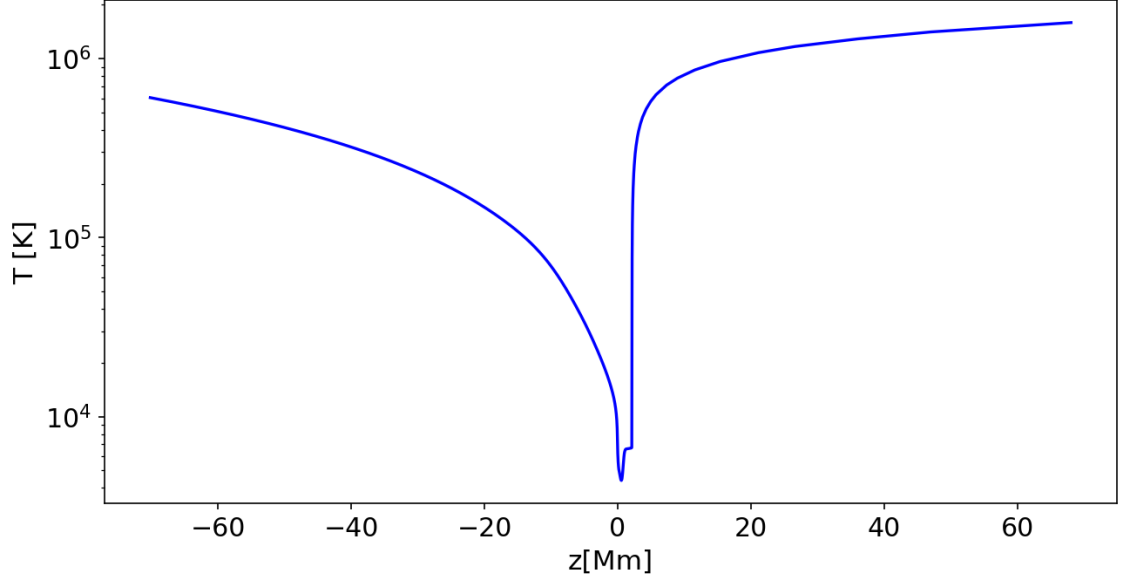


Figura 5: Modelo de temperatura observacional del Sol uniendo el modelo c7(AVRETT and LOESER, 2008) y el modelo S(CHRISTENSEN, 1996). Este perfil está seccionado, de modo que, la zona convectiva corresponde a los z negativos y la atmósfera solar corresponde a los z positivos.

En el perfil de temperatura observacional presentado en la figura 5, se establece que la altura $z = 0$ es la parte más baja de la fotosfera, de modo que, la parte negativa corresponde a la zona convectiva. Según el modelo de las capas de la atmósfera solar de la NASA, se estima que la fotosfera tiene un grosor de $0,4Mm$, la cromosfera tiene de grosor $1,7Mm$, de modo que terminaría en $2,1Mm$ y la zona de transición tiene un grosor aproximado de $0,1Mm$. Debido a que el modelo C7 (AVRETT and LOESER, 2008) proporciona datos hasta $70Mm$, ese es el límite para la corona solar en este caso.

Estado de equilibrio Para definir la presión y la densidad de masa en el estado de equilibrio, es necesario tener en cuenta la ecuación de equilibrio hidrostático y la ecuación de estado para el gas en equilibrio, las cuales se muestran en las ecuaciones (3.3) y (3.4), de manera respectiva

$$\nabla p_0 - \rho_{m0}\vec{g} - \vec{J}_0 \times \vec{B}_0 = 0, \quad (3.3)$$

$$p_0 = \frac{2K_B}{m_p} \rho_{m0} T_0, \quad (3.4)$$

donde $\vec{J}_0 = \nabla \times \vec{B}_0 / \mu_0$ y los subíndices 0 corresponde a las variables en el estado de equilibrio. En este caso, se considera una configuración de campo magnético libre de fuerza, de modo que $\vec{J}_0 \times \vec{B}_0 = 0$;

además, se define la gravedad constante y actuando en $-\hat{e}_z$, de modo que $\vec{g} = -2,74 \times 10^{-4} \hat{e}_z [\text{Mm}/\text{s}^2]$. Bajo las anteriores consideraciones, la ecuación de equilibrio hidrostática queda descrita de la siguiente manera

$$\frac{dp_0}{dz} = -g\rho_{m0}, \quad (3.5)$$

en la cual se reemplaza la densidad de masa utilizando la ecuación de estado

$$\frac{dp_0}{dz} = -\frac{m_p g}{2K_B} \frac{p_0}{T_0}, \quad (3.6)$$

de modo que al integrar (3.6) se obtiene la expresión (3.7) que presenta la presión en equilibrio en términos de la temperatura. Posteriormente, con la ecuación de estado es posible obtener la densidad de masa en equilibrio en términos de la presión y la temperatura, como se observa en la ecuación (3.8),

$$p_0(z) = p_0(z_0) \exp \left[-\frac{m_p g}{2K_B} \int_{z_0}^z \frac{dz'}{T_0(z')} \right], \quad (3.7)$$

$$\rho_0(z) = \frac{m_p}{2K_B} \frac{p_0(z)}{T_0(z)}, \quad (3.8)$$

donde z_0 se escoge como $z_0 = -30\text{Mm}$, de modo que $p_0(z_0)$ es la presión en z_0 en el estado de equilibrio, la cual se ajusta a la presentada por (MAGARA, 2001) en dicho punto, de modo que $p_0(z_0) = 4,131[\text{Pa}]$.

En la figura 6 se presenta la temperatura observacional, junto con los perfiles de densidad y presión en el estado de equilibrio. Se trabaja en el dominio $[-30, 70]\text{Mm}$, donde se observa que en la región de transición, que es en aproximadamente $z = 2\text{Mm}$, se presentan cambios abruptos en las variables de estado.

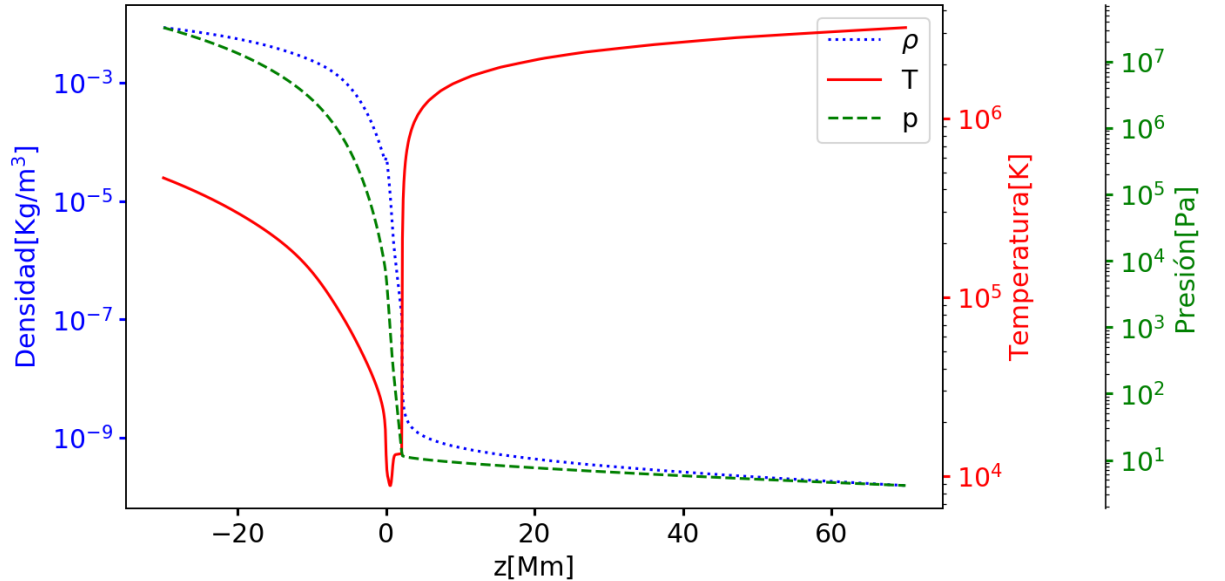


Figura 6: Modelo de temperatura observacional (curva roja), presión (curva verde) y densidad (curva azul) en estado de equilibrio, en escala logarítmica. Se observa que a partir de $z = 2\text{Mm}$ se presentan cambios abruptos en las variables de estado.

Configuración inicial Las configuraciones iniciales corresponden a las perturbaciones sobre el estado de equilibrio previamente descrito. A tiempo inicial las componentes de la velocidad son cero, en cambio, para las componentes del campo magnético se utiliza el modelo de tubo de flujo Gold-Hoyle (GOLD and HOYLE, 1960) expresado como

$$B_x = -B_0 \frac{b(z - z_0)}{1 + b^2 \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right]}, \quad (3.9)$$

$$B_y = B_0 \frac{1}{1 + b^2 \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right]}, \quad (3.10)$$

$$B_z = B_0 \frac{b(x - x_0)}{1 + b^2 \left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right]}, \quad (3.11)$$

donde (x_0, z_0) es el centro del tubo de flujo magnético, b es el parámetro del *twist* y B_0 es la intensidad de campo magnético en el centro del tubo. La distribución de campo magnético se divide de tal forma que adentro del tubo $r \leq r_t$, se tenga valores de B_0 y b diferentes que en el exterior de este $r > r_t$. Donde r se define como $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}$ y r_t es el radio del tubo.

Al tener el tubo de flujo magnético definido, para que se de la flotabilidad es necesario, como se mencionó en la teoría del flujo emergente, que la densidad ρ_i adentro del tubo sea menor que la densidad ρ_0 al exterior de este. En este caso se perturba la presión p_i dentro del tubo para que sea menor que la presión p_0 en el exterior de este. Se utiliza la perturbación presentada en (MAGARA, 2001), que está dada por

$$p_i(x, z) = p_0(z) - \frac{B_0^2}{2(1 + b^2 r^2)}, \quad (3.12)$$

$$\rho_i(x, z) = \frac{m_p}{2K_B} \frac{p_i(z)}{T_0(z)}, \quad (3.13)$$

donde p_0 y T_0 ya están definidas en el estado inicial del sistema.

Este estudio se basa en simulaciones numéricas 2.5-dimensionales, lo cual significa que todas las cantidades físicas son invariantes translacionalmente a lo largo del eje y . El dominio numérico correspondiente a x , y , z es $[-100, 100]$ Mm, $[-0.2, 0.2]$ Mm, $[-30, 70]$ Mm respectivamente, con una malla de 2000 puntos en x , 4 puntos en y , 1000 puntos en z , la cual corresponde a una resolución espacial uniforme de 100km en las tres direcciones.

Para que el mecanismo de flujo emergente funcione en un tubo ubicado en la base de la zona convectiva es necesario que la intensidad del campo magnético en el centro de este sea de aproximadamente 100 teslas (WEBER et al., 2011). En cambio, si el tubo se ubica en la parte superior de la zona convectiva, la intensidad de campo magnético en el centro del tubo debe estar en un rango de 3 a 10 teslas y ser de aproximadamente 4×10^{-2} teslas en el exterior de este para que el mecanismo de flujo emergente ocurra (MAGARA, 2001). Debido a que, en este caso en particular, el tubo se coloca en $z = -20$ Mm, los valores para la intensidad de campo magnético y para el *twist* adentro y afuera del tubo corresponde a los valores presentados en (MAGARA, 2001). De modo que, el *twist* al interior del tubo tiene un valor de $0.5[1/\text{Mm}]$, B_0 es de $10[\text{T}]$ al interior del tubo y de $4 \times 10^{-2}[\text{T}]$ al exterior. En primera instancia, se presenta un caso en el cual el *twist* al exterior del tubo es de $0.5[1/\text{Mm}]$ (igual que el *twist* al interior del tubo), como se ve en la tabla 1. En el segundo caso presentado en la tabla 2, se mantienen los valores del *twist* presentados en el primer experimento, pero se agrega la resistividad. Debido a que en

el momento no se tiene un perfil de resistividad observacional, por simplicidad del modelo se escoge una resistividad constante en todo el dominio. Finalmente para el tercer experimento se asume que el *twist* en el exterior del tubo es doce veces más grande que en el interior de este, como se muestra en la tabla 3.

	Interior	Exterior
B_0	10 [T]	4×10^{-2} [T]
b	0.5 [1/Mm]	0.5 [1/Mm]
η	0 [Ω Mm]	0 [Ω Mm]

Tabla 1: Valores de la intensidad del campo magnético B_0 , del *twist* b y de la resistividad η , en el interior y el exterior del tubo de flujo magnético para el primer experimento.

	Interior	Exterior
B_0	10 [T]	4×10^{-2} [T]
b	0.5 [1/Mm]	0.5 [1/Mm]
η	10^{-5} [Ω Mm]	10^{-5} [Ω Mm]

Tabla 2: Valores de la intensidad del campo magnético B_0 , del *twist* b y de la resistividad η , en el interior y el exterior del tubo de flujo magnético para el segundo experimento.

	Interior	Exterior
B_0	10 [T]	4×10^{-2} [T]
b	0.5 [1/Mm]	6 [1/Mm]
η	0 [Ω Mm]	0 [Ω Mm]

Tabla 3: Valores de la intensidad del campo magnético B_0 , del *twist* b y de la resistividad η , en el interior y el exterior del tubo de flujo magnético para el tercer experimento.

Los valores de r_t , x_0 , z_0 se mantienen en todas las simulaciones como $r_t = 0,7[Mm]$, $x_0 = 0[Mm]$ y $z_0 = -20[Mm]$. De modo que, al tener en cuenta los anteriores parámetros, en la figura 7 se presenta la componente transversal del campo magnético By , tanto en el plano xz como a lo largo de z , de izquierda a derecha respectivamente.

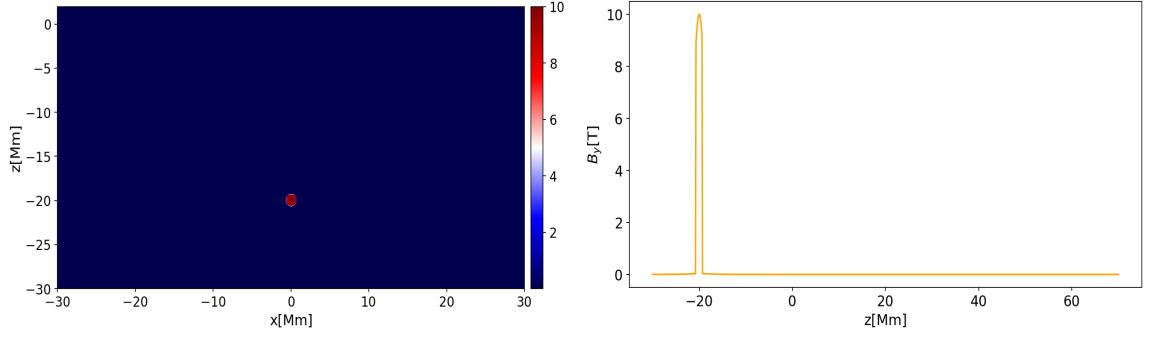


Figura 7: Valor inicial del campo magnético transversal B_y en teslas. En la gráfica de la izquierda se presenta el campo magnético transversal en el plano xz , donde se observa que el tubo de flujo magnético presenta su mayor intensidad en el centro, lo cual está acorde a la figura de la derecha, en la cual se hace un corte en $x = 0$ y el máximo se presenta en $z = -20\text{Mm}$.

Como se observa en el lado izquierdo de la figura 7, el tubo de flujo magnético presenta una forma circular de radio 0.7Mm y su centro está ubicado en $z = -20\text{Mm}$ y $x = 0\text{Mm}$. Su centro tiene la máxima intensidad de campo magnético que es 10 teslas, lo cual se verifica al hacer un corte en $x = 0$, como se observa en el lado derecho, donde el máximo se presenta en $z = -20\text{Mm}$.

3.3. CONDICIONES DE FRONTERA

Para la parte inferior y superior del dominio numérico se imponen condiciones de frontera fijas, es decir, la evolución temporal de las variables en estos puntos es nula, y se mantienen las condiciones iniciales para dichas fronteras, de modo que

$$\begin{aligned}\alpha(i, j, 1) &= \alpha_p(i, j, 1), \\ \alpha(i, j, 0) &= \alpha_p(i, j, 0),\end{aligned}\tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\alpha(i, j, Nz - 1) &= \alpha_p(i, j, Nz - 1), \\ \alpha(Nx, j, Nz) &= \alpha_p(i, j, Nz),\end{aligned}$$

siendo α una variable arbitraria y α_p es dicha variable en el estado inicial. i, j recorren todos los puntos de la malla en los ejes x, y respectivamente y Nz es el último punto de la malla en el eje z . De igual forma se imponen condiciones de frontera fijas para la parte izquierda y derecha del dominio, así

$$\begin{aligned}\alpha(1, j, z) &= \alpha_p(1, j, z), \\ \alpha(0, j, z) &= \alpha_p(0, j, z),\end{aligned}\tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\alpha(Nx - 1, j, z) &= \alpha_p(Nx - 1, j, z), \\ \alpha(Nx, j, z) &= \alpha_p(Nx, j, z),\end{aligned}$$

en el cual j, k recorren todos los puntos de la malla en los ejes y, z respectivamente y Nx es el último punto de la malla en el eje x .

Por el contrario, para las caras frontal y trasera se aplican condiciones de flujo saliente, las cuales en cada paso de tiempo toman el valor de las variables en el punto inmediatamente anterior a la frontera y se lo asignan al de la frontera correspondiente. Esta condición evita que el flujo que ha salido del dominio numérico regrese y contamine de errores numéricos la evolución

$$\begin{aligned}\alpha(i, 1, z) &= \alpha(i, 2, z), \\ \alpha(i, 0, z) &= \alpha(1, 1, z),\end{aligned}\tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\alpha(i, Ny - 1, z) &= \alpha(1, Ny - 2, z), \\ \alpha(i, Ny, z) &= \alpha(1, Ny - 1, z),\end{aligned}$$

donde i, k recorren todos los puntos de la malla en los ejes x, z respectivamente y Ny es el último punto de la malla en el eje y . Cabe aclarar que fue necesario tomar dos puntos en cada frontera porque se está usando un reconstructor de variables de segundo orden.

3.4. MÉTODOS NUMÉRICOS

El sistema de ecuaciones (2.33) a (2.36) son las ecuaciones MHD de manera conservativa, las cuales se pueden escribir de una manera más compacta como

$$\partial_t \vec{u} + \partial_i \vec{f}^i(\vec{u}) = \vec{s},\tag{3.17}$$

donde \vec{u} es el vector de variables conservativas, \vec{f}^i son los vectores de flujo a lo largo de cada eje principal y \vec{s} el vector de fuente, de forma que

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \rho_m \\ \rho_m \vec{V} \\ e \\ \vec{B} \end{bmatrix}, \quad \vec{f}^i = \begin{bmatrix} \rho_m V^i \\ \rho_m V^i V_j - \frac{B^i B_j}{\mu_0} + p_t \delta_j^i \\ (e + p_t) V^i - \frac{B^i (\vec{E} \cdot \vec{V})}{\mu_0} \\ V^i B_j - V_j B^i \end{bmatrix}, \quad \vec{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_m \vec{g} \\ \rho_m \vec{V} \cdot \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\eta}{\mu_0} \vec{J} \times \vec{B} \right) \\ -\vec{\nabla} \times \eta \vec{J} \end{bmatrix}.\tag{3.18}$$

Debido a la no linealidad del sistema de ecuaciones anteriormente presentado, por lo general se desarrollan discontinuidades en las variables de estado del sistema, como lo son las ondas de choque, independientemente de que los datos iniciales sean suaves. Por esta razón, los métodos numéricos basados en las diferencias finitas no son aptos para el tratamiento de este tipo de ecuaciones. Existen diferentes métodos para la resolución de las ecuaciones MHD. En este trabajo se resuelven numéricamente usando el código MAGNUS (NAVARRO et al., 2017) el cual, en particular, usa métodos de alta resolución para captura de choques (*High Resolution Shock Capturing Methods-HRSC*).

Los métodos de alta resolución para la captura de choques se basan en el método de líneas, el cual consiste en la discretización del sistema de ecuaciones diferenciales parciales, de modo que se convierte a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinaria en cada punto de la malla numérica. La parte espacial de este sistema de ecuaciones se discretiza usando del método de volúmenes finitos y para

la evolución temporal se utiliza un método de integración estándar como un Runge-Kutta de cuarto orden. Con el fin de obtener evoluciones estables, el paso de tiempo se elige siguiendo la condición de Courant–Friedrichs–Levy (COURANT et al., 1967; TITAREV and TORO, 2005), el cual adapta el paso de tiempo según las velocidades características del sistema. Debido a que el método de volúmenes finitos requiere calcular los flujos numéricos a través de las interceldas de la malla numérica, se utilizan los resolvidores de Riemann aproximado, como lo es el método HLL (EINFELDT, 1988; HARTEN et al., 1983), el cual se basa en la solución del problema de Riemann. Además, existen diferentes algoritmos para reconstruir cualquier dato inicial en un problema de Riemann aproximado, como lo es el método MINMOD (GODUNOV, 1959; ROE, 1986), el cual es un método de segundo orden que rehace las funciones por medio de líneas rectas.

Finalmente, ya que los errores numéricos usualmente hacen que la divergencia del campo magnético pueda ser diferente de cero en la evolución temporal, se han ideado diversas estrategias numéricas para controlar este problema. En este caso, en particular, se usa el método de transporte de flujo restringido (BALSARA, 2004; EVANS and HAWLEY, 1998), para el cual se requiere que inicialmente se satisfaga que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Para más detalle de los métodos numéricos anteriormente mencionados, ver el anexo B, donde se presenta el método de volúmenes finitos, el método HLL y el método de transporte de flujo restringido.

4. RESULTADOS

Inicialmente se considera el primer experimento cuyos parámetros se especifican en la tabla 1, donde se realiza un análisis paramétrico en la zona convectiva con el fin de observar la flotabilidad del tubo de flujo magnético a través de esta zona y, posteriormente se presenta la formación de fenómenos en la atmósfera solar como consecuencia de la elevación del tubo. En la sección 4.2 se presenta el segundo experimento con resistividad, como se presenta en la tabla 2, y se realiza un análisis de las variables en comparación con el primer caso. Finalmente en el tercer experimento se varía el *twist* fuera del tubo, como se detalla en la tabla 3 y, de igual forma, se realiza un análisis comparando con el primer caso. Cabe aclarar que se hace énfasis en el análisis de las componentes transversales, ya que, a pesar de que en presencia de campos magnéticos fuertes se generan ondas magnetoacústicas y ondas de Alfvén, las ondas magnetoacústicas son fuertemente refractadas y llegan a la corona solar con muy poca potencia. En cambio, las ondas de Alfvén, que son las asociadas a la componente transversal a la propagación, suelen transferir energía a la corona de manera más efectiva (ZIRKER, 1993).

4.1. EXPERIMENTO 1: SIN RESISTIVIDAD Y CON *TWIST* IGUAL ADENTRO Y AFUERA DEL TUBO DE FLUJO MAGNÉTICO

Zona convectiva Con la finalidad de analizar la elevación del tubo de flujo magnético a través de la zona convectiva solar, en la figura 8 se presenta la evolución temporal de la densidad de masa ρ_m y del campo magnético transversal B_y , de izquierda a derecha, respectivamente. En esta gráfica se muestran de arriba a abajo los tiempos correspondientes a $t = 114s, 994s, 1854s, 2766s$, en el plano xz , donde para una mejor visualización del fenómeno el dominio corresponde a x de $[-30,30]$ Mm; y a z de $[-30,0]$ Mm, ya que la perturbación está en -20 Mm y la idea, por ahora, es analizar solamente la zona convectiva.

Como se observa en la fila superior de la figura 8, la densidad del tubo es menor que la de su entorno, lo cual le permite elevarse a través de la zona convectiva según la teoría de flujo emergente. Así mismo, se genera una onda magnetohidrodinámica que se propaga rápidamente. En la evolución temporal el tubo se empieza a expandir debido a que la densidad del entorno va disminuyendo con la altura, dificultando así su elevación. Después de la expansión y elevación del tubo a través de la zona convectiva, el tubo empieza a emerger a la atmósfera solar como se observa en la fila inferior, lo cual va estar relacionado con la formación de manchas solares en la atmósfera solar. Inicialmente, el campo magnético transversal del tubo de flujo magnético tiene la estructura que se ilustra en la figura 7, donde el tubo presenta una forma circular y una intensidad de 10 [T] en su centro. Como se puede observar en la columna derecha, al evolucionar en el tiempo la intensidad de campo magnético va disminuyendo y se distribuye en los dos lóbulos de la estructura, la cual va cambiando dependiendo de la elevación y expansión de la densidad del tubo. La dinámica general de los anteriores resultados es acorde a las simulaciones numéricas presentadas en (MAGARA, 2001; TORIUMI and YOKOYAMA, 2011), sin embargo, cabe resaltar que en esos trabajos se utiliza un perfil de temperatura analítico, mientras que en este trabajo se usó un perfil de temperatura mucho más realista que va acorde con las observaciones.

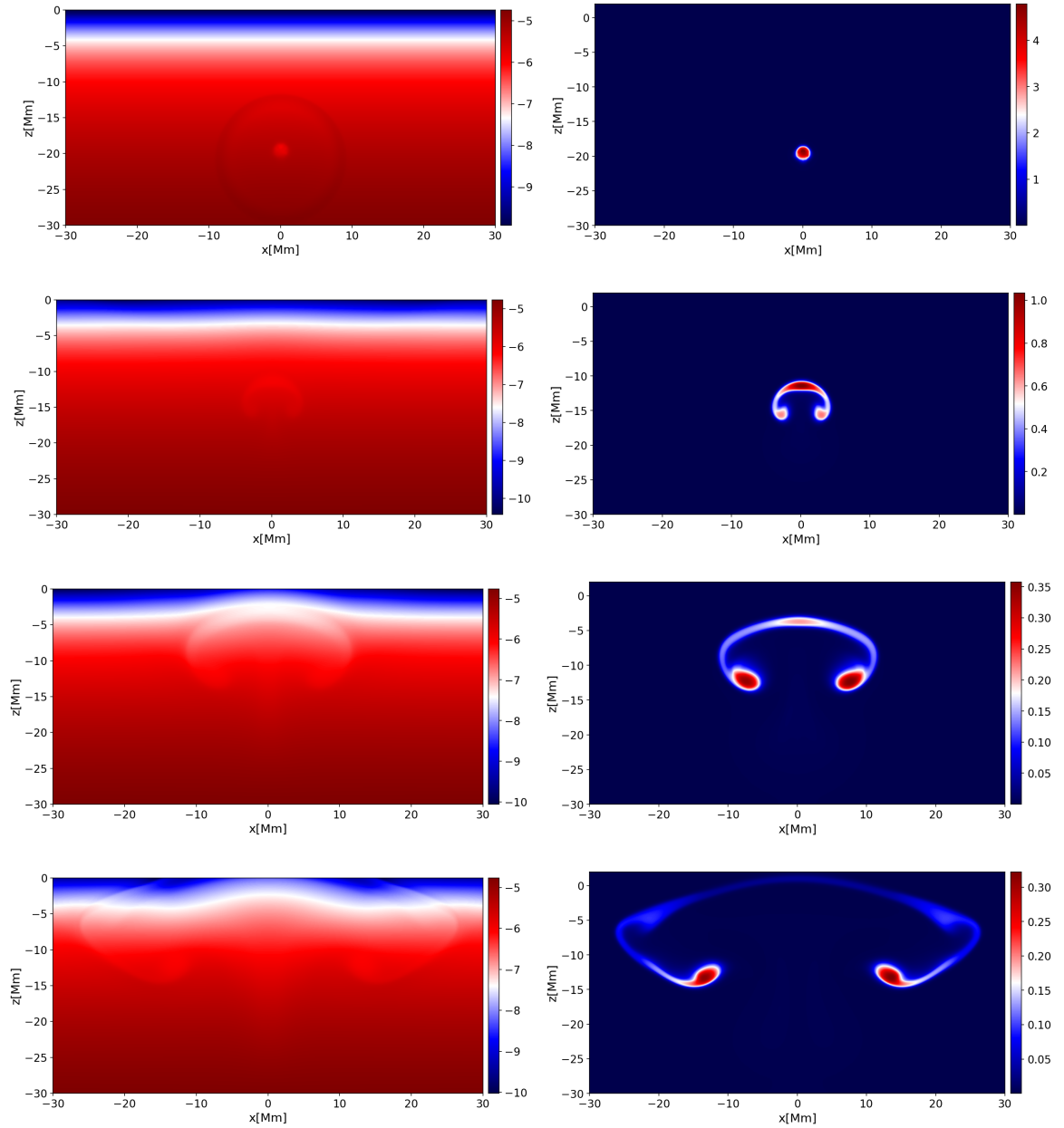


Figura 8: Evolución temporal de la densidad de masa ρ_m en kg/m^3 en escala logarítmica y del campo magnético transversal B_y en teslas, de izquierda a derecha respectivamente. En los tiempos de arriba a abajo correspondientes a $t = 114\text{s}, 994\text{s}, 1854\text{s}, 2766\text{s}$.

Con el fin de analizar la estructura generada, en la figura 9 se grafica el campo magnético transversal B_y en conjunto con las líneas de campo magnético (columna izquierda) y la velocidad transversal V_y con las líneas de velocidad (columna derecha). Se realiza un zoom, de modo que el dominio en x es $[-15, 15]\text{Mm}$ y en z de $[-15, 0]\text{Mm}$ y se escoge la estructura en el tiempo $t = 1854\text{s}$.

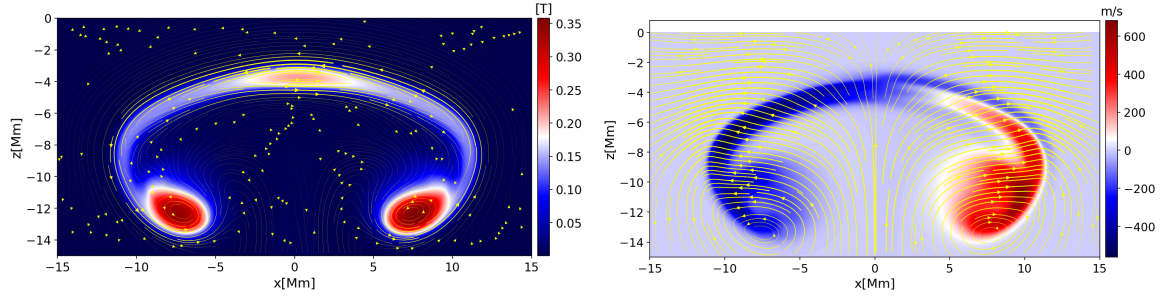


Figura 9: Zoom del campo magnético transversal B_y en teslas en conjunto con las líneas de campo magnético y de la velocidad transversal en m/s con las líneas de velocidad, de izquierda a derecha respectivamente. Las gráficas son en el tiempo $t = 1854s$, donde las líneas de campo magnético y de velocidad se presentan en amarillo y son proporcionales a su respectiva magnitud.

Como se observa en la figura 9, se genera una estructura conformada de dos lóbulos los cuales contienen la mayor intensidad de campo magnético y, como se ve en las líneas de velocidad de la columna derecha, se están expandiendo a través de la zona convectiva. Dichos lóbulos se pueden considerar como plasmoides, ya que son estructuras conformadas de plasma donde las líneas de campo magnético son cerradas, como se observa en la columna izquierda.

Atmósfera solar Por otra parte, con el fin de analizar los fenómenos generados en la atmósfera solar producto de la emergencia del tubo de flujo magnético a través de la zona convectiva, en la figura 10 se presenta la evolución temporal de la densidad de masa ρ_m en conjunto con las líneas de campo magnético (columna izquierda), así como la temperatura T con las líneas de velocidad de manera simultánea (columna derecha). En este caso, los tiempos graficados corresponden a $t = 550s, 727s, 916s, 994s$, de arriba a abajo, respectivamente. En la figura 11 se presenta la densidad de masa ρ_m en escala lineal, en conjunto con las líneas de campo magnético (columna izquierda) y la velocidad transversal en V_y junto con las líneas de velocidad (columna derecha), en los tiempos de arriba a abajo correspondientes a $t = 550s, 727s$. Las figuras se muestran en el plano xz y con el fin de observar los efectos con más detalle en la atmósfera solar, se trabaja con un dominio en z de $[0, 70]$ Mm y en x de $[-100, 100]$ Mm.

Como se observa en la parte izquierda de la figura 11, la densidad en la atmósfera solar emerge hasta cierto punto que, en principio, debería ser la región de transición, ya que es la zona donde se generan cambios abruptos en las variables de estado, de modo que, a partir de esta región la densidad es tan pequeña en el entorno que el tubo deja de emerger y se empieza a expandir por la fotosfera y cromosfera.

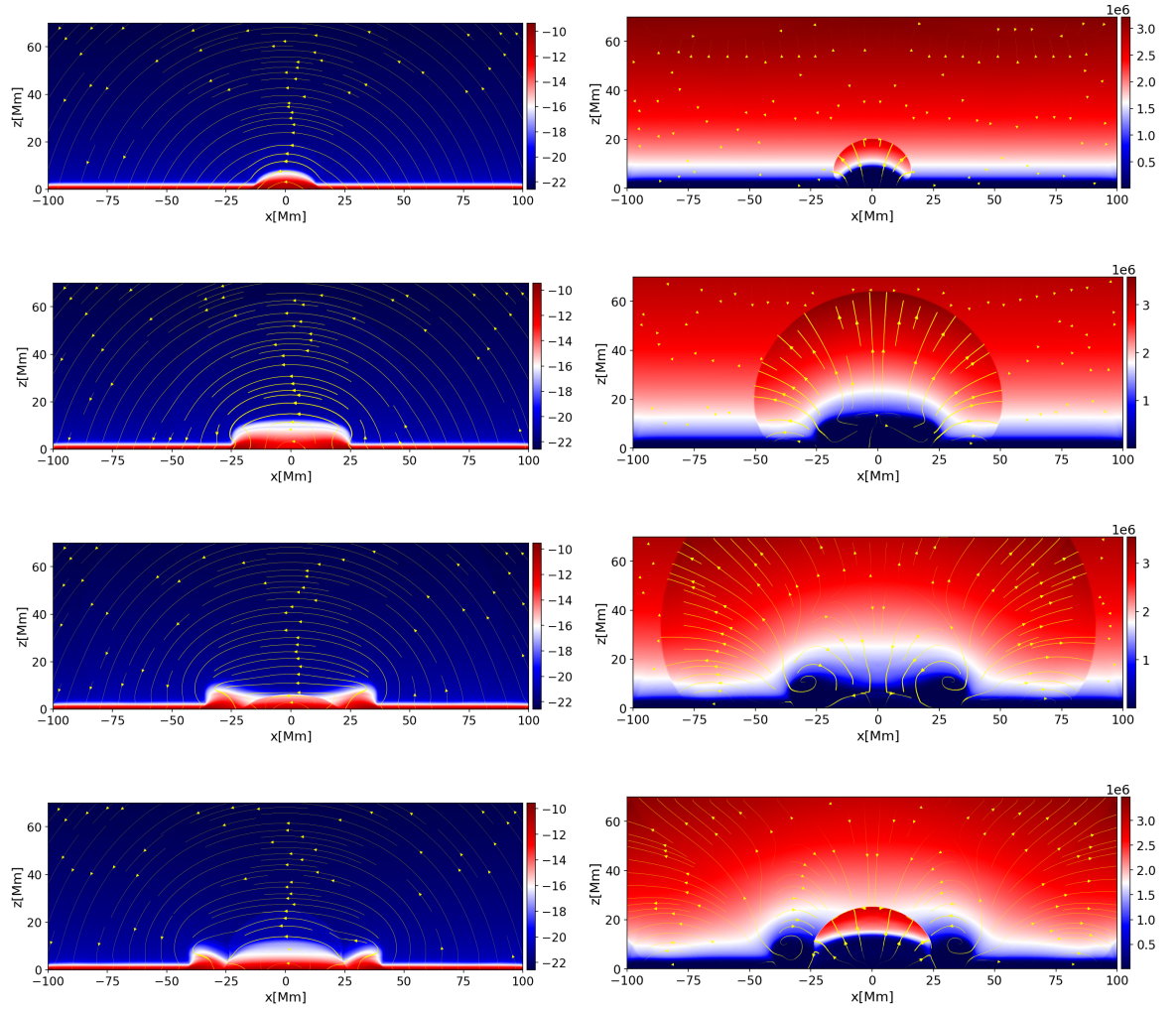


Figura 10: Evolución temporal de la densidad de masa ρ_m en kg/m^3 en escala logarítmica con las líneas de campo magnético (columna izquierda) y de la temperatura T en Kelvin en conjunto con las líneas del campo de velocidad (columna derecha), en los tiempos $t = 550s, 727s, 916s, 994s$, de arriba a abajo respectivamente. Tanto las líneas de campo magnético como las líneas de velocidad se presentan en amarillo y son proporcionales a su respectiva magnitud.

En la figura 10 y 11 se observa que las líneas de campo magnético en los lóbulos que emergen en la fotosfera, salen de un lóbulo y entran al otro, y además, presentan una intensidad mayor que las líneas de campo magnético del entorno. Lo anterior va acorde a la Ley de Hale, en la cual las regiones activas, como las manchas solares, presentan dos áreas de polaridad opuesta con campo magnético más intenso que en la fotosfera (SAVCHEVA et al., 2009). Del mismo modo, se ha medido que la temperatura en las manchas solares es menor que la de su entorno (AZARIADIS and GUESNERIE, 1986), tal como se ve en la segunda columna de la figura 10, donde la estructura emergente en la atmósfera solar tiene una temperatura menor que la de su entorno. De igual manera se muestra que la onda observada en la zona convectiva, se propaga hasta la corona solar con una temperatura más alta que la del entorno y, además, se genera de manera progresiva. En la figura 11 se observa que esta onda posee una

velocidad que contrarresta los efectos generados por la gravedad, y se verifica que se trata de una onda de Alfvén, ya que al observar la componente transversal de la velocidad concuerda con la onda que se está analizando. De modo que, al tener una estructura con un campo magnético fuerte elevándose por la zona convectiva, se generan ondas de Alfvén, las cuales han sido observadas y reportadas en (KLIMCHUK, 2015), las cuales calientan continuamente la corona solar, resultado que es acorde al presentado en (BOOK, 1980; NARAIN and ULMSCHNEIDER, 1980). El calentamiento coronal es un problema abierto altamente estudiado en física solar, donde uno de los mecanismos más importantes es el transporte de energía desde el interior del Sol a la corona solar por medio de la propagación de ondas magnetohidrodinámicas (ZIRKER, 1993).

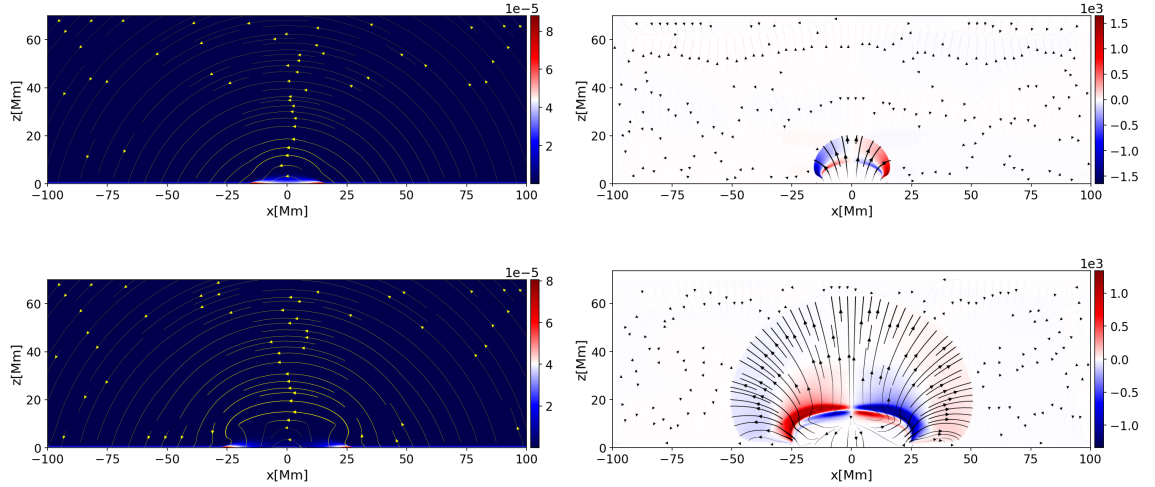


Figura 11: Densidad de masa ρ_m en kg/m^3 en conjunto con las líneas de campo magnético (columna izquierda) y velocidad transversal V_y en m/s junto con las líneas de velocidad (columna derecha), en la atmósfera solar. Las líneas de campo magnético y de velocidad son proporcionales a su respectiva magnitud. Los tiempos graficados de arriba a abajo son $t = 550s, 727s$.

4.2. EXPERIMENTO 2: CON RESISTIVIDAD Y CON *TWIST* IGUAL ADENTRO Y AFUERA DEL TUBO DE FLUJO MAGNÉTICO

Después de describir el proceso de elevación del tubo de flujo magnético a través de la zona convectiva y los fenómenos producidos en la atmósfera solar debido a este mecanismo de emergencia, se procede con un análisis paramétrico comparando los resultados anteriores con el caso resistivo, que en este caso es de $\eta = 10^{-5}[\Omega \text{ Mm}]$. En la figura 12 se presenta la evolución temporal de la densidad de masa ρ_m (columna izquierda) y la temperatura T (columna derecha), con y sin resistividad. Los tiempos utilizados de arriba a abajo corresponden a $t = 228s, 342s, 456s$. Cabe aclarar que debido a que el código presenta tiempo con paso adaptativo, los valores de los tiempos para las simulaciones con y sin resistividad no son exactamente los mismos, de modo que, se escogieron tiempos cercanos. En este caso, las gráficas se muestran en el eje z , es decir, se hace un corte en $x = 0$ y $y = 0$, y se analizan en un dominio en z de $[-30, 70]\text{Mm}$, es decir, desde la zona convectiva hasta la corona solar.

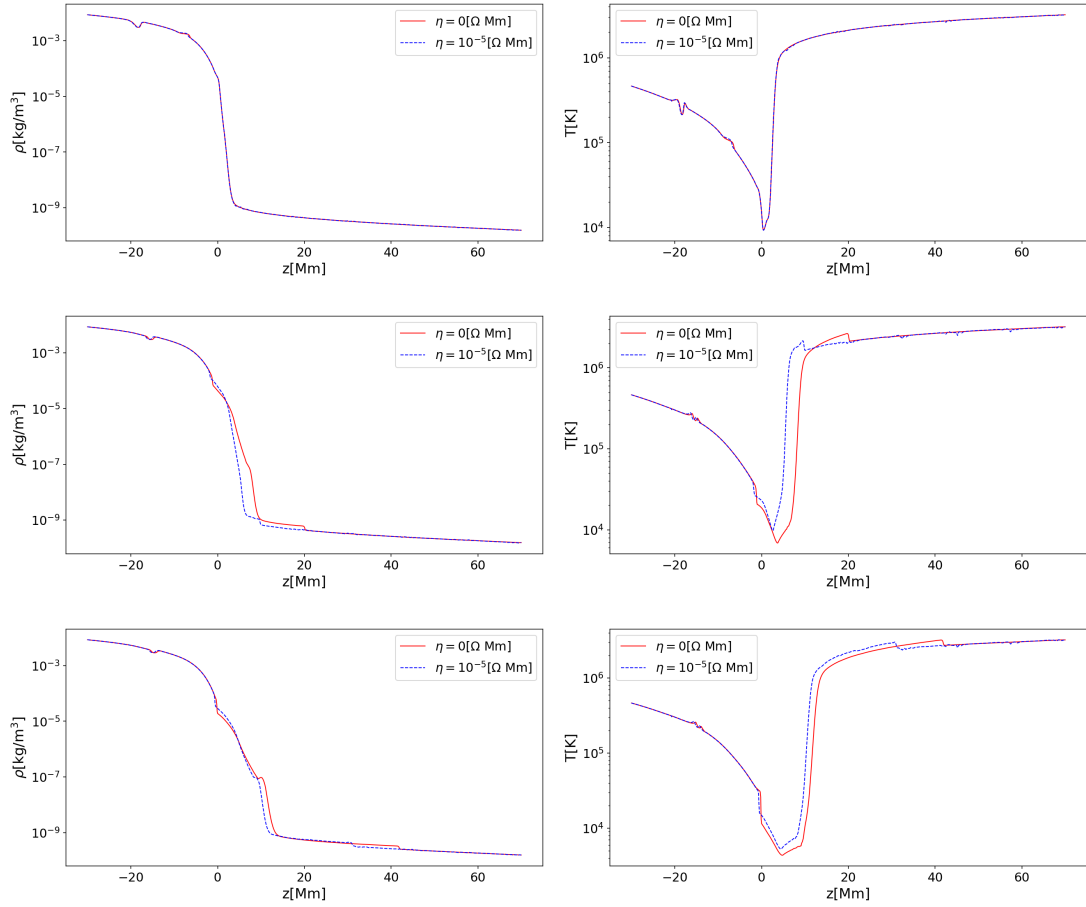


Figura 12: Comparación de la densidad de masa ρ_m en kg/m^3 y de la temperatura T en Kelvin, de izquierda a derecha respectivamente, con y sin resistividad desde la zona convectiva hasta la corona solar, en los tiempos $t = 228s, 342s, 456s$, de arriba abajo respectivamente. La línea roja representa el caso no resistivo, es decir $\eta = 0$, y la línea azul representa el caso resistivo es decir $\eta = 10^{-5}[\Omega \text{ Mm}]$.

Como se observa en la primera fila de la figura 12, se tiene el perfil de densidad y temperatura con dos perturbaciones; la primera ubicada en aproximadamente $z = -19\text{Mm}$, la cual corresponde al tubo de flujo magnético y la segunda ubicada en aproximadamente $z = -5\text{Mm}$, que corresponde a la onda magnetohidrodinámica que se expande. La evolución de esta onda en la zona convectiva no presenta grandes diferencias al tener en cuenta la resistividad, sin embargo, al llegar a la región de transición el sistema con resistividad se ralentiza en comparación con el caso no resistivo, como se observa en la segunda fila. Por último, en la tercera fila se observa que mientras esta onda se está expandiendo, una nueva onda está apareciendo en la fotosfera. De modo que, la propagación de las ondas magnetohidrodinámicas con y sin resistividad son morfológicamente similares, pero la dinámica del sistema se ralentiza al tener en cuenta la resistividad, especialmente en la corona solar. Este resultado tiene sentido, puesto que en la corona solar el tiempo de difusión es de cientos de años, lo cual hace que el efecto de la resistividad sea prácticamente despreciable para fenómenos que presentan una vida útil de horas o meses.

Ahora, con el fin de tener una mejor visualización, se disminuye el dominio en z a $[-15, 15]$ Mm para comparar los valores del campo magnético trasversal B_y y la densidad volumétrica de energía magnética E_{mag} , de izquierda a derecha respectivamente. Los tiempos graficados corresponden de arriba a abajo a $t = 994s, 1854s, 2766s$.

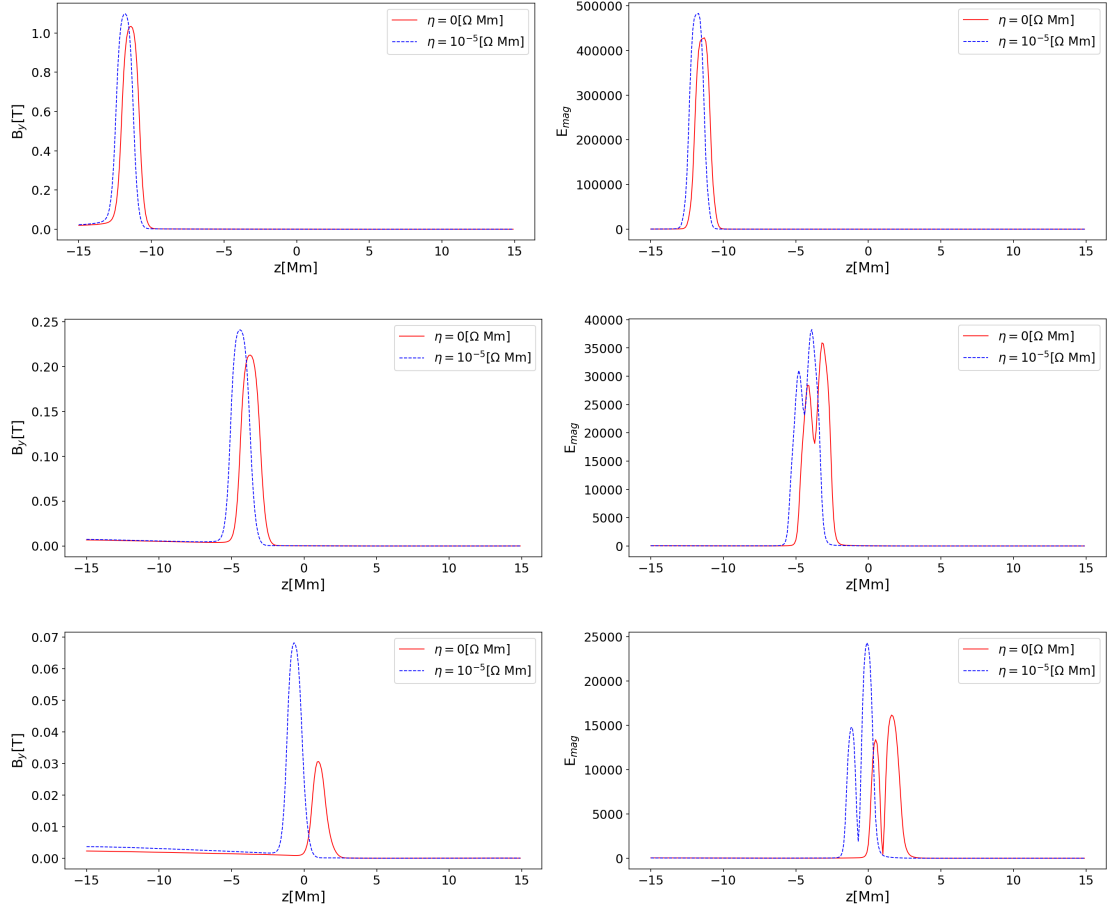


Figura 13: Evolución temporal del campo magnético trasversal B_y en teslas (columna izquierda) y la densidad volumétrica de energía magnética E_{mag} en pascuales (columna derecha), con y sin resistividad desde la zona convectiva hasta la corona solar, en los tiempos $t = 994s, 1854s, 2766s$, de arriba abajo respectivamente. La línea roja representa el caso no resistivo, es decir $\eta = 0[\Omega \text{ Mm}]$, y la línea azul representa el caso resistivo con $\eta = 10^{-5}[\Omega \text{ Mm}]$.

En este caso, la evolución tanto del campo magnético trasversal como de la densidad volumétrica de energía magnética va acorde al movimiento del tubo, debido a que el tubo presenta la mayor intensidad de campo magnético. Al incorporar la resistividad, de nuevo la evolución del sistema se ralentiza y, acorde al análisis de la figura 12, el retraso se vuelve más grande cuando el tubo de flujo magnético alcanza la región de transición, como se ve en la última fila.

4.3. EXPERIMENTO 3: SIN RESISTIVIDAD Y CON *TWIST* DIFERENTE ADENTRO Y AFUERA DEL TUBO DE FLUJO MAGNÉTICO

Finalmente, después de analizar la dinámica con y sin resistividad en la zona convectiva y en la atmósfera solar, se presenta el tercer experimento presentado en la tabla 3, en el cual no se contempla la resistividad y el *twist* afuera del tubo de flujo magnético es doce veces más grande que al interior de este. En la figura 15, se presenta el campo magnético transversal B_y , para el caso en el cual el *twist* es igual al interior y al exterior del tubo (columna izquierda) y para el caso en que el *twist* es doce veces más grande afuera que adentro del tubo (columna derecha). Los tiempos graficados son $t = 994s, 1854s, 2766s$, de arriba a abajo respectivamente, en un dominio en x de $[0,100]$ Mm con el fin de enfocarse en la dinámica de un lóbulo.

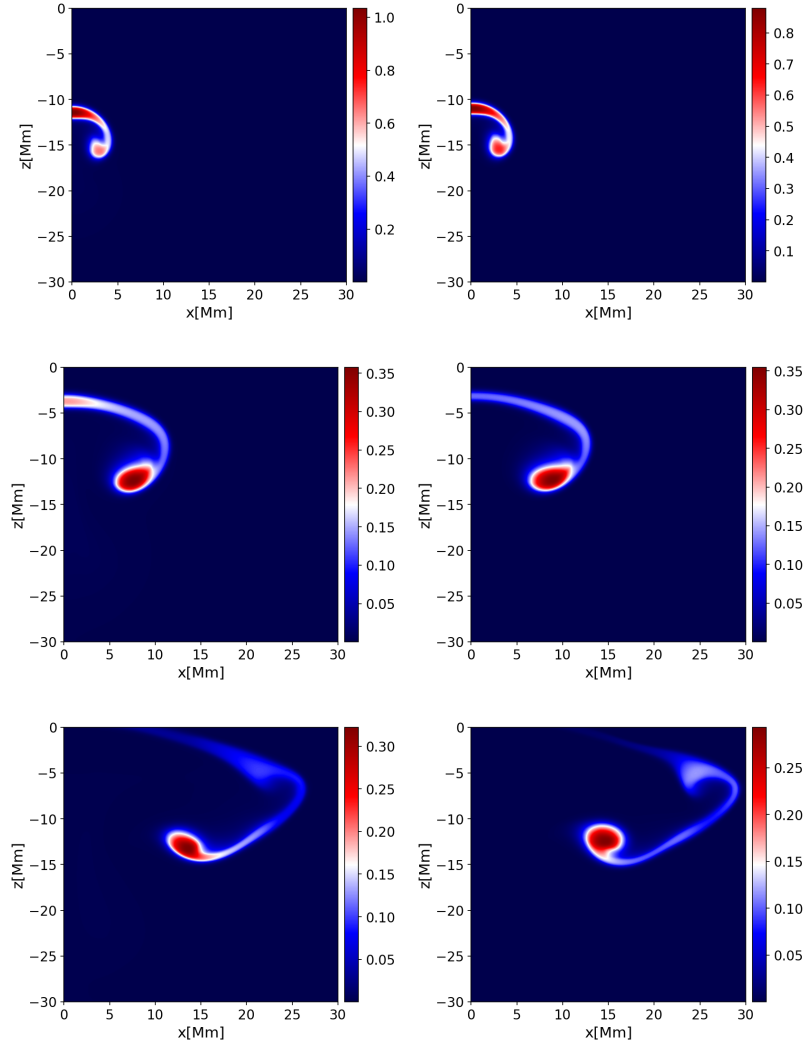


Figura 14: Campo magnético transversal B_y en teslas, para los casos en que no se varió el *twist* fuera del tubo de flujo magnético (columna izquierda) y en el cual el *twist* afuera es doce veces el de adentro (columna derecha). Los tiempos corresponden de arriba a abajo a $t = 994s, 1854s, 2766s$.

Como se observa en la figura 14, en ambos casos el campo magnético se distribuye de manera progresiva en los lóbulos. Cuando el *twist* es mayor afuera del tubo de flujo magnético (columna derecha), el campo magnético se distribuye más rápidamente en los lóbulos, de modo que, cuando el pico del tubo llega a la fotosfera, el flujo magnético es menor que en el caso de la izquierda. Como se observa en la fila inferior, en el caso de la columna derecha, el tubo se expande más rápidamente debajo de la fotosfera y, por consiguiente, los fenómenos emergerán a la atmósfera solar una menor altura que en el caso de la columna izquierda.

Por otra parte, se comparan los valores del campo magnético trasversal B_y (columna derecha) y la densidad volumétrica de energía magnética E_{mag} (columna izquierda), en los tiempos $t = 228s, 342s, 456s$, de arriba a abajo respectivamente, a lo largo del eje z .

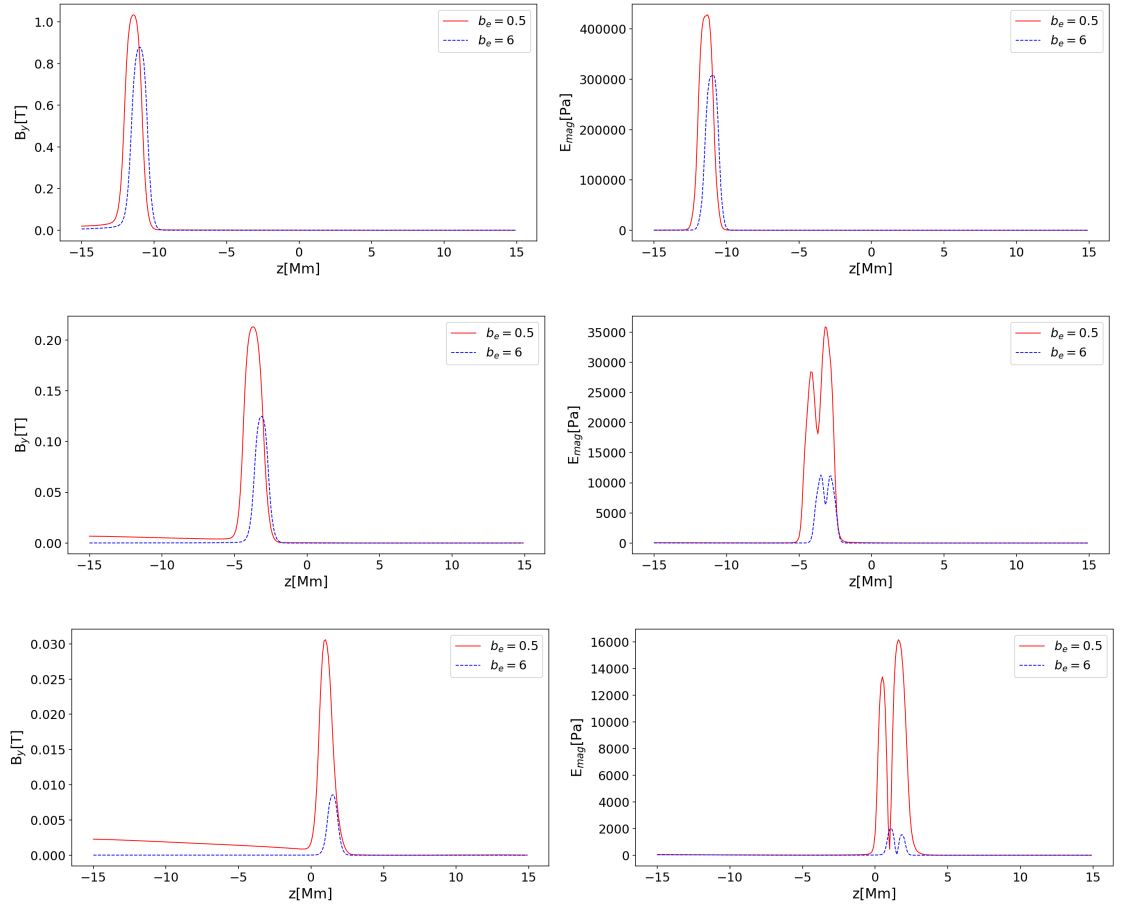


Figura 15: Evolución temporal del campo magnético transversal B_y en teslas (columna derecha) y la densidad volumétrica de energía magnética E_{mag} en Pascales (columna izquierda), con y sin resistividad desde la zona convectiva hasta la corona solar, en los tiempos $t = 994s, 1854s, 2766s$, de arriba abajo respectivamente. La línea roja representa el caso donde el *twist* afuera del tubo de flujo magnético es de $b = 0,5[1/Mm]$, y la línea azul representa el caso en el cual $b = 6[1/Mm]$ fuera del tubo.

Como se observa en la figura 15, no hay retraso en la dinámica del sistema porque no se está considerando la resistividad. No obstante, al aumentar el *twist* afuera del tubo de flujo magnético se genera una disminución notoria en la amplitud tanto del campo magnético transversal, como de la densidad volumétrica de energía magnética a lo largo del eje z , ya que, como se mencionó anteriormente, el flujo magnético se distribuye en los lóbulos más rápidamente que en el caso donde el *twist* adentro y afuera del tubo son iguales. Al aumentar el *twist* afuera del tubo la intensidad del campo magnético al llegar a la fotosfera es aproximadamente tres veces menor, mientras que la densidad volumétrica de energía magnética es aproximadamente ocho veces menor.

Finalmente, con el objetivo de verificar que la divergencia del campo magnético se esté manteniendo, en la figura 16 se grafica $\nabla \cdot \vec{B}$ en el plano xz . Como se observa, la divergencia del campo magnético es del orden de $10^{-6}[T/Mm]$, de modo que, la divergencia del campo magnético se estima del orden

$10^{-12}[\text{T/m}]$.

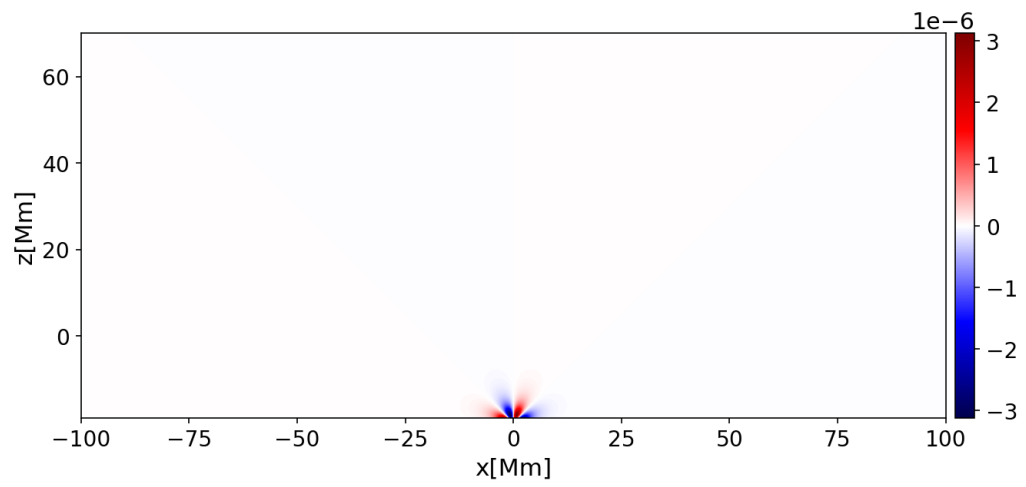


Figura 16: Divergencia del campo magnético en T/Mm.

Este resultado muestra que la violación de la divergencia del campo magnético es muy pequeña, dando veracidad tanto de los métodos numéricos implementados, como de la física asociada al problema.

5. CONCLUSIONES

Al considerar un Sol en calma con un perfil de temperatura observacional dado por el modelo C7 y el modelo S, una configuración de campo magnético con *twist* Gold-Hoyle (GOLD and HOYLE, 1960) y una perturbación en la presión y los datos iniciales implementados en (MAGARA, 2001), se obtiene que el tubo de flujo magnético ubicado en la zona convectiva se eleva a través de esta por el mecanismo de flujo emergente formando una estructura con plasmoides, de modo que, al llegar a la región de transición y debido al cambio abrupto en las variables de estado, deja de emerger y se expande por la fotosfera y la cromosfera generando regiones activas bipolares con campos magnéticos intensos y una temperatura menor que la del entorno; características que van acorde a los datos observacionales presentados para las manchas solares. Además del fenómeno emergente en la fotosfera solar por causa de la elevación del tubo, se generan ondas magnetoacústicas y ondas de Alfvén que están calentando continuamente la atmósfera solar. Debido a que las ondas magnetoacústicas son fuertemente refractadas, la mayor contribución de temperatura en la corona solar viene dada por las ondas Alfvén. Por lo tanto, el estudio del transporte de energía desde el interior del Sol a la corona solar por medio de la propagación de ondas de Alfvén podría encaminar a la solución del problema aún abierto del calentamiento coronal.

Al tener en cuenta una resistividad constante en todo el dominio, la dinámica del sistema se ralentiza, en especial en la corona solar. Esto confirma que los efectos de la resistividad en la corona solar deben ser prácticamente nulos debido a que el tiempo de difusión en esta zona es demasiado grande en comparación con la vida útil de los fenómenos coronales. Concluyendo así, que lo ideal es que la resistividad sea espacialmente variable como en el caso de la resistividad anómala, de modo que, los efectos difusivos sean mínimos en la corona solar pero grandes en el tubo de flujo magnético, para así poder obtener reconexión magnética y de esta manera fenómenos como las eyecciones de masa coronal.

Por otra parte, al proponer que el *twist* afuera del tubo de flujo magnético sea doce veces mayor que adentro de este, se obtiene que la distribución progresiva del campo magnético a los lóbulos se da más rápidamente y, además, que el tubo se expande más ampliamente debajo de la atmósfera solar. De manera que, cuando la parte más alta de la estructura toca la fotosfera, la energía magnética transportada a lo largo del eje z es aproximadamente ocho veces menor y el campo magnético transversal es aproximadamente tres veces menor que al considerar el *twist* igual en ambas regiones. Finalmente, el valor de la divergencia del campo magnético para cada simulación se encuentra por debajo de $10^{-12}[\text{T/m}]$, con lo cual se asegura numéricamente que no se viola la ley de Gauss para los campos magnéticos.

Para finalizar, se proyecta para trabajos posteriores el análisis del mecanismo de flujo emergente en 3 dimensiones y teniendo en cuenta una resistividad espacialmente variable, lo anterior con la finalidad de observar fenómenos de reconexión magnética. Así mismo, se planea implementar una configuración inicial de campo magnético que presente dos tubos de flujo magnético, de modo que se considere la interacción entre dos tubos que se elevan a través de la zona convectiva y se analice los fenómenos generados en la atmósfera solar como consecuencia.

REFERENCIAS

- ALFVEN, H. (1971). *Plasma physics, space research and the origin of the solar system.*
- ALFVEN, H. (Nature, **150**, 1942). *Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves.*
- AVRETT, E. and LOESER, R. (The Astrophysical Journal Supplement Series, **175**, 2008.). *Models of the solar chromosphere and transition region from SUMER and HRTS observations: formation of the extreme-ultraviolet spectrum of hydrogen, carbon, and oxygen.*
- AZARIADIS, C. and GUESNERIE, R. (The review of economic studies, **53**, 1986). *Sunspots and cycles.*
- BALSARA, D. (The Astrophysical Journal Supplement Series, **151**, 2004). *Second-order-accurate schemes for magnetohydrodynamics with divergence-free reconstruction.*
- BELLAN, P. (2008). *Fundamentals of plasma physics.* Cambridge University Press.
- BITTENCOURT, J. (Springer Science and Business Media, 2013). *Fundamentals of plasma physics.*
- BOOK, D. (Naval Research Lab Washintong DC, 1980). *A mechanism for heating the solar corona.*
- CAMPOS, D. (Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 2006). *Elementos de mecánica estadística.*
- CHEN, P. and SHIBATA, K. (The Astrophysical Journal, **545**, 2000). *An emerging flux trigger mechanism for coronal mass ejections.*
- CHEUNG, M. and ISOBE, H. (Living Reviews in Solar Physics, **11**, 2014). *Flux emergence (theory).*
- CHRISTENSEN, J. (SCAN-9603303, 1996). *Helioseismology, solar models and solar neutrinos.*
- CORDERO, G. and LARA, A. (Universidad Nacional Autónoma de México, 2013). *Introducción a la física espacial.*
- COURANT, R., FRIEDRICHS, K., and LEWY, H. (IBM journal of Research and Development, **11**, 1967). *On the partial difference equations of mathematical physics.*
- EINFELDT, B. (SIAM Journal on Numerical Analysis, **25**, 1988). *On Godunov-type methods for gas dynamics.*
- EVANS, C. and HAWLEY, J. (The Astrophysical Journal, **332**, 1998). *Simulation of magnetohydrodynamic flows-A constrained transport method.*
- FAN, Y. (The Astrophysical Journal, **697**, 2009). *The emergence of a twisted flux tube into the solar atmosphere: sunspot rotations and the formation of a coronal flux rope.*
- GALEEV, A. and SUDAN, R. (Plasma Physics, **1**, 1983). *Basic plasma physics I.*
- GODUNOV, S. (Matematicheskii Sbornik, **89**, 1959). *A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics.*

- GOLD, T. and HOYLE, F. (Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **120**, 1960). *On the origin of solar flares.*
- GURNETT, D. and BHATTACHARJEE, A. (Cambridge university press, 2005). *Introduction to plasma physics: with space and laboratory applications.*
- HARTEN, A., LAX, P., and LEER, B. (SIAM review, **25**, 1983). *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws.*
- ICHIMARU, S. (CRC Press, 2018). *Basic principles of plasma physics: a statistical approach.*
- ISOBE, H. and TRIPATHI, D. (The Astrophysical Journal Letters, **657**, 2007). *Ellerman bombs and jets associated with resistive flux emergence.*
- KAUTZ, C. and et al, P. H. (American Journal of Physics, **73**, 2005). *Student understanding of the ideal gas law, Part II: A microscopic perspective.*
- KLIMCHUK, J. (Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, **373**, 2015). *Key aspects of coronal heating.*
- KULSRUD, R. (Earth, Planets and Space, **53**, 2001). *Magnetic reconnection: Sweet-parker versus petschek.*
- LITTMANNAND, M. and WILLCOX, K. (OUP Oxford, 2008). *Totality: eclipses of the sun.*
- MACTAGGART, D. (University of St Andrews, 2011). *Theoretical magnetic flux emergence.*
- MAGARA, T. (The Astrophysical Journal, **549**, 2001). *Dynamics of emerging flux tubes in the Sun.*
- MARISKA, J. (Annual review of astronomy and astrophysics, **24**, 1986). *The quiet solar transition region.*
- MCINTOSH, P. and WILSON, P. (Solar physics, **97**, 1985). *A new model for flux emergence and the evolution of sunspots and the large-scale fields.*
- MIYAMOTO, K. (Iwanami Book Service Center Tokyo, 1997). *Fundamentals of plasma physics and controlled fusion.*
- NARAIN, U. and ULMSCHNEIDER, P. (Space Science Reviews, **54**, 1980). *Chromospheric and coronal heating mechanisms.*
- NAVARRO, A., LORA, F., and GONZÁLEZ, G. (The Astrophysical Journal, **844**, 2017). *MAGNUS: A new resistive MHD code with heat flow terms.*
- NITTA, N. and HUDSON, H. (Geophysical research letters, **28**, 2001). *Recurrent flare/CME events from an emerging flux region.*
- PRIEST, E. (Cambridge University Press, 2014). *Magnetohydrodynamics of the Sun.*
- RAOUAFI, N. (The Astrophysical Journal Letters, **691**, 2009). *Observational Evidence for Coronal Twisted Flux Rope.*
- ROE, P. (Annual review of fluid mechanics, **18**, 1986). *Characteristic-based schemes for the Euler equations.*

- RYAN, S. and ANDREW, J. (Cambridge University Press, 2010). *Stellar evolution and nucleosynthesis*.
- SAVCHEVA, A., CIRTAIN, J., and GOLUB, J. (The Astrophysical Journal Letters, **702**, 2009). *Does a polar coronal Hole's flux emergence follow a hale-like law?*
- SCHNACK, D. (Springer, 2009). *Lectures in Magnetohydrodynamics: With an Appendix on Extended MHD*.
- SOLANKI, S. (Springer, 1997). *Dynamics of flux tubes in the solar atmosphere: Observations*.
- SPIEGEL, E. and ZAHN, J. (Astronomy and Astrophysics, **265**, 1992). *The solar tachocline*.
- TITAREV, V. and TORO, E. (Journal of Computational Physics, **204**, 2005). *ADER schemes for three-dimensional non-linear hyperbolic systems*.
- TORIUMI, S. and YOKOYAMA, T. (The Astrophysical Journal, **735**, 2011). *Numerical experiments on the two-step emergence of twisted magnetic flux tubes in the Sun*.
- TREUMANN, R. and PARROT, M. (Springer, 2008.). *Physics of electric discharges in atmospheric gases: An informal introduction*.
- WEBER, M., FAN, Y., and MIESCH, M. (The Astrophysical Journal, **741**, 2011). *The rise of active region flux tubes in the turbulent solar convective envelope*.
- ZHANG, Y. and ZHANG, H. (Solar Physics, **250**, 2008). *On the relationship between flux emergence and CME initiation*.
- ZIRKER, J. (Solar physics, **148**, 1993). *Coronal heating*.
- ZWAAN, C. (Solar Physics, **60**, 1978). *On the appearance of magnetic flux in the solar photosphere*.

ANEXOS

A. ECUACIONES DE LA MAGNETOHIDRODINÁMICA

A.1. ECUACIONES GENERALES DE TRANSPORTE

Para iniciar, se multiplica la ecuación de Boltzmann con colisiones por una función de peso g , la cual, en este caso $g = g(\vec{v})$ y se integra la ecuación de Boltzmann sobre \vec{v} , de modo que la ecuación (2.9) queda

$$\int \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} g d\vec{v} + \int (\vec{v} \cdot \nabla f_\alpha) g d\vec{v} + \int \left(\frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha \right) g d\vec{v} = \int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} g d\vec{v}. \quad (\text{A.1})$$

Por facilidad se resuelven por aparte las 4 integrales de la ecuación (A.1)

$$I_1 = \int \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} g d\vec{v}, \quad I_2 = \int (\vec{v} \cdot \nabla f_\alpha) g d\vec{v}, \quad I_3 = \int \left(\frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha \right) g d\vec{v},$$

$$I_4 = \int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} g d\vec{v};$$

para I_1 por regla de la cadena se tiene que

$$\frac{\partial(f_\alpha g)}{\partial t} = g \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + f_\alpha \frac{\partial g}{\partial t} \rightarrow g \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial(f_\alpha g)}{\partial t} - f_\alpha \frac{\partial g}{\partial t},$$

de tal manera que

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial t} \int f_\alpha g(\vec{v}) d\vec{v} - \int f_\alpha \frac{\partial g(\vec{v})}{\partial t} d\vec{v},$$

donde $g(\vec{v})$ es una función que no depende explícitamente de t , y por lo tanto la segunda integral es igual a cero. El promedio de cualquier función, por ejemplo g , viene dado por

$$\langle g \rangle_\alpha = \frac{\int f_\alpha g d\vec{v}}{\int f_\alpha d\vec{v}} = \frac{\int f_\alpha g d\vec{v}}{n_\alpha},$$

de tal manera que $n_\alpha \langle g \rangle_\alpha = \int f_\alpha g d\vec{v}$. Entonces I_1 queda de la siguiente forma

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle g \rangle_\alpha); \quad (\text{A.2})$$

de manera análoga para I_2 e I_3 se obtiene que

$$I_2 = \nabla \cdot (n_\alpha \langle g \vec{v} \rangle_\alpha), \quad (\text{A.3})$$

$$I_3 = -\frac{n_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} g \rangle_\alpha, \quad (\text{A.4})$$

y por facilidad, el término relacionado con las colisiones se deja de la misma manera

$$I_4 = \int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} g d\vec{v}. \quad (\text{A.5})$$

Después se reemplazan las ecuaciones (A.2)-(A.5) en (A.1), y se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle g \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha \langle g \vec{v} \rangle_\alpha) - \frac{n_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} g \rangle_\alpha = \int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} g d\vec{v}, \quad (\text{A.6})$$

la cual es la **Ecuación de Boltzmann Integrada o la Ecuación General de Transporte**. La Ecuación de Transporte es una expresión general y aplica para cualquier función arbitraria $g(\vec{v})$, por lo tanto, se va variar esta función para encontrar la ecuación de continuidad, movimiento y energía.

1. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad se obtiene tomando $g = 1$ en la ecuación (A.6), de tal manera que

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \vec{V}_\alpha) = \int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} d\vec{v}, \quad (\text{A.7})$$

la cual corresponde a la ecuación de continuidad teniendo en cuenta los efectos de las fuentes. Si se desprecian los efectos de las fuentes y se multiplica por la masa o por la carga se obtiene la ecuación de transferencia de la masa y la ecuación de transferencia de la carga, respectivamente, así

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha m_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha m_\alpha \vec{V}_\alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho_{m,\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m,\alpha} \vec{V}_\alpha) = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha q_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha q_\alpha \vec{V}_\alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_\alpha = 0, \quad (\text{A.9})$$

donde $\rho_{m,\alpha} = n_\alpha m_\alpha$ es la densidad de masa, $\rho_\alpha = n_\alpha q_\alpha$ es la densidad de carga y $\vec{J}_\alpha = n_\alpha m_\alpha \vec{V}_\alpha$ es la densidad de corriente, de la respectiva especie α .

2. Ecuación de movimiento

Para este caso $\vec{g} = m_\alpha \vec{v}$, de tal manera que la ecuación (A.6) queda

$$m_\alpha \frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \vec{V}_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha \langle m \vec{v} \vec{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{v} \rangle_\alpha = \int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} m_\alpha \vec{v} d\vec{v}, \quad (\text{A.10})$$

para el primer término de la ecuación (A.10), se multiplica la ecuación de continuidad (ecuación (A.7)) por $m_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha = m_\alpha \vec{V}_\alpha$, obteniendo que

$$m_\alpha \vec{V}_\alpha \frac{\partial}{\partial t} n_\alpha + m_\alpha \vec{V}_\alpha \nabla \cdot (n_\alpha \vec{V}_\alpha) = m_\alpha \vec{V}_\alpha \int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} d\vec{v},$$

donde por regla de la cadena $m_\alpha \vec{V}_\alpha \partial n_\alpha / \partial t = m_\alpha \partial (\vec{V}_\alpha n_\alpha) / \partial t - m_\alpha n_\alpha \partial \vec{V}_\alpha / \partial t$, y por lo tanto

$$m_\alpha \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V}_\alpha n_\alpha) - m_\alpha n_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}_\alpha + m_\alpha \vec{V}_\alpha \nabla \cdot (n_\alpha \vec{V}_\alpha) = m_\alpha \vec{V}_\alpha \int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} d\vec{v},$$

se despeja el término buscado, de modo que

$$m_\alpha \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V}_\alpha n_\alpha) = m_\alpha n_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}_\alpha - m_\alpha \vec{V}_\alpha \nabla \cdot (n_\alpha \vec{V}_\alpha) + m_\alpha \vec{V}_\alpha \int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} d\vec{v}. \quad (\text{A.11})$$

Ahora, para el segundo término de la ecuación (A.10) $\vec{v}\vec{v}$ representa un producto tensorial y por lo tanto

$$\nabla \cdot (n_\alpha \langle m\vec{v}\vec{v} \rangle_\alpha) = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (n_\alpha m_\alpha \langle v_i v_j \hat{e}_j \rangle_\alpha),$$

se define una velocidad relativa $v_{r,\alpha}$ de tal manera que $\vec{v} = \langle \vec{v} \rangle_\alpha + v_r = \vec{V}_\alpha + v_{r,\alpha}$, donde según lo anterior se sabe que $\langle v_r \rangle_\alpha = 0$. Entonces el promedio del elemento tensorial i,j de $\vec{v}\vec{v}$ es

$$\langle v_i v_j \rangle_\alpha = V_{\alpha i} V_{\alpha j} + \langle v_{ri} v_{rj} \rangle_\alpha,$$

$$\nabla \cdot (n_\alpha \langle m\vec{v}\vec{v} \rangle_\alpha) = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (n_\alpha m_\alpha V_{\alpha i} V_{\alpha j} \hat{e}_j) + \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (n_\alpha m_\alpha \langle v_{ri} v_{rj} \hat{e}_j \rangle_\alpha),$$

$$\nabla \cdot (n_\alpha \langle m\vec{v}\vec{v} \rangle_\alpha) = m_\alpha n_\alpha (\vec{V}_\alpha \cdot \nabla) \vec{V}_\alpha + m_\alpha \vec{V}_\alpha \nabla \cdot (n_\alpha \vec{V}_\alpha) + \nabla \cdot (m_\alpha n_\alpha \langle \vec{v}_r \vec{v}_r \rangle_\alpha),$$

pero el término $m_\alpha n_\alpha \langle \vec{v}_r \vec{v}_r \rangle_\alpha$ es conocido como el tensor de presión cinética $\vec{\mathbf{P}}_\alpha$, el cual puede reescribirse como

$$P_{\alpha ij} = M_{\alpha ij} + p_\alpha \delta_{ij},$$

donde $M_{ij,\alpha}$ es el tensor de viscosidad y p_α es la presión. Entonces, el segundo término queda expresado de la siguiente forma

$$\nabla \cdot (n_\alpha \langle m\vec{v}\vec{v} \rangle_\alpha) = m_\alpha n_\alpha (\vec{V}_\alpha \cdot \nabla) \vec{V}_\alpha + m_\alpha \vec{V}_\alpha \nabla \cdot (n_\alpha \vec{V}_\alpha) + \nabla \cdot \vec{\mathbf{M}}_\alpha + \nabla p_\alpha. \quad (\text{A.12})$$

Finalmente, en el tercer término de la ecuación (A.10)

$$\langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{v} \rangle_\alpha = \left\langle \sum_{i,j,k} F_i \frac{\partial v_k}{\partial v_j} (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j) \hat{e}_k \right\rangle_\alpha = \langle \vec{F} \rangle_\alpha,$$

y en F se va considerar la fuerza electromagnética y la fuerza gravitacional, de tal manera que

$$\langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} \vec{v} \rangle_\alpha = q_\alpha (\vec{E} + \vec{V}_\alpha \times \vec{B}) + m_\alpha \vec{g}. \quad (\text{A.13})$$

Por consiguiente, uniendo los resultados de los primeros tres términos de la ecuación (A.10), es decir, las ecuaciones (A.11), (A.12) y (A.13), se obtiene

$$m_\alpha n_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_\alpha \cdot \nabla \right) \vec{V}_\alpha + \nabla \cdot \vec{\mathbf{M}}_\alpha + \nabla p_\alpha - q_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \vec{V}_\alpha \times \vec{B}) - m_\alpha n_\alpha \vec{g} = \int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} m_\alpha (\vec{v} - \vec{V}_\alpha) d\vec{v},$$

donde $d/dt = \partial/\partial t + \vec{V}_\alpha \cdot \nabla$ se conoce como el operador derivada o la derivada lagrangiana y el término relacionado con las colisiones

$$\int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} m_\alpha (\vec{v} - \vec{V}_\alpha) d\vec{v} = \int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} m_\alpha v_{r,\alpha} d\vec{v} = \vec{R}_\alpha,$$

está relacionado con el cambio de momentum del fluido de una especie con la colisión con otra especie. De modo que, la ecuación de movimiento queda de la siguiente forma

$$\rho_{m\alpha} \frac{d\vec{V}_\alpha}{dt} = \rho_\alpha (\vec{E} + \vec{V}_\alpha \times \vec{B}) + \rho_{m\alpha} \vec{g} - \nabla \cdot \vec{\mathbf{M}}_\alpha - \nabla p_\alpha + \vec{R}_\alpha. \quad (\text{A.14})$$

3. Ecuación de energía

Para este caso $g = m_\alpha v^2/2$, de tal manera que la ecuación (A.6) queda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(n_\alpha \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle_\alpha \right) + \nabla \cdot \left(n_\alpha \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \vec{v} \right\rangle_\alpha \right) - \frac{n_\alpha}{m_\alpha} \left\langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle_\alpha = \int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} \frac{1}{2} m_\alpha v^2 d\vec{v}, \quad (\text{A.15})$$

es necesario tener en cuenta nuevamente que

$$\vec{v} = \vec{V}_\alpha + \vec{v}_{r,\alpha} \rightarrow v^2 = V_\alpha^2 + 2\vec{V}_\alpha \cdot \vec{v}_{r,\alpha} + v_{r,\alpha}^2 \rightarrow \langle v^2 \rangle_\alpha = V_\alpha^2 + \langle v_{r,\alpha}^2 \rangle.$$

Para el primer término en la ecuación (A.15):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(n_\alpha \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle_\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} V_\alpha^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle v_r^2 \rangle_\alpha \right),$$

la presión se puede definir como $p_\alpha = \rho_{m\alpha} \langle v_r^2 \rangle_\alpha / 3$, de tal manera que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(n_\alpha \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle_\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} V_\alpha^2 + \frac{3}{2} p_\alpha \right). \quad (\text{A.16})$$

Para el segundo término en la ecuación (A.15)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(n_\alpha \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \vec{v} \right\rangle_\alpha \right) = \\ \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} V_{\alpha i} (V_\alpha^2 + \langle v_r^2 \rangle_\alpha) + \rho_{m\alpha} V_{j,\alpha} \langle v_{rj} v_{ri} \rangle_\alpha + \frac{1}{2} \rho_{m\alpha} \langle v_{rj}^2 v_{ri} \rangle_\alpha \right], \end{aligned}$$

donde se ve claramente la presión y el tensor de presión cinética; además, se define el vector de flujo de calor $\vec{C}_\alpha = \rho_{m,\alpha} \langle \vec{v}_r v_r^2 \rangle_\alpha / 2$, y la expresión queda de la siguiente forma

$$\nabla \cdot \left(n_\alpha \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \vec{v} \right\rangle_\alpha \right) = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} V_\alpha^2 + \frac{3}{2} p_\alpha \right) V_{\alpha i} + P_{\alpha ij} V_{\alpha j} + C_{\alpha i} \right] \quad (\text{A.17})$$

Para el tercer término de la ecuación (A.15), se tiene que:

$$\left\langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} \frac{1}{2} v^2 \right\rangle_\alpha = \left\langle \vec{F} \cdot \vec{v} \right\rangle_\alpha,$$

considerando \vec{F} como la fuerza de Lorentz se tiene que $\vec{F} \cdot \vec{v} = q_\alpha (\vec{E} \cdot \vec{v} + (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}) = q_\alpha \vec{E} \cdot \vec{v}$, de tal manera que

$$\left\langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} \frac{1}{2} v^2 \right\rangle_\alpha = q_\alpha \vec{E} \cdot \vec{v}. \quad (\text{A.18})$$

Finalmente el cuarto término que está relacionado con las colisiones

$$\int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} \frac{1}{2} m_\alpha v^2 d\vec{v} = \vec{V}_\alpha \cdot \int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} m_\alpha v_{r,\alpha} d\vec{v} + \int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} \frac{1}{2} m v_{r,\alpha}^2 d\vec{v},$$

en la cual aparece nuevamente \vec{R}_α , y además, se define \vec{Q}_α que corresponde a la generación de calor debido a las colisiones, entonces

$$\int \left(\frac{\delta f_\alpha}{dt} \right)_{col} \frac{1}{2} m_\alpha v^2 d\vec{v} = \vec{V}_\alpha \cdot \vec{R}_\alpha + \vec{Q}_\alpha. \quad (\text{A.19})$$

Ahora se reemplazan las ecuaciones (A.16), (A.17), (A.18) y (A.19) en la ecuación (A.15), y se obtiene la ecuación de transporte de energía

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} V_\alpha^2 + \frac{3}{2} p_\alpha \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} V_\alpha^2 + \frac{5}{2} p_\alpha \right) \vec{V}_\alpha + \vec{M}_\alpha \cdot \vec{V}_\alpha + \vec{C}_\alpha \right] = \\ \rho_\alpha \vec{E} \cdot \vec{V}_\alpha + \vec{V}_\alpha \cdot \vec{R}_\alpha + \vec{Q}_\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

A.2. ECUACIONES DE LA MHD

Ecuación de continuidad para un fluido MHD

Se toman las ecuaciones de continuidad para los dos fluidos y se multiplica cada una por la respectiva carga del fluido ($-e$ para electrones y eZ para iones) y se suman ambas ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial t}(-en_e + ezn_i) + \nabla \cdot (-en_e \vec{V}_e + eZn_i \vec{V}_i) = 0,$$

y con las definiciones dadas, se tiene que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0; \quad (\text{A.21})$$

análogamente, pero en vez de multiplicar por la carga, se multiplica por la respectiva masa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(m_e n_e + m_i n_i) + \nabla \cdot (m_e n_e \vec{V}_e + m_i n_i \vec{V}_i) &= 0, \\ \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{V}) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Ecuación de movimiento para un fluido MHD

Ahora, para la ecuación de movimiento se suma la ecuación de movimiento de los electrones con la de los iones

$$\rho_{me} \frac{d\vec{V}_e}{dt} + \rho_{mi} \frac{d\vec{V}_i}{dt} = (-en_e + eZn_i) \vec{E} + (-en_e \vec{V}_e + eZn_i \vec{V}_i) \times \vec{B} + (\rho_{me} + \rho_{mi}) \vec{g} - \nabla(p_e + p_i),$$

donde

$$\rho_m \vec{V} = \rho_{me} \vec{V}_e + \rho_{mi} \vec{V}_i \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\rho_m \vec{V}) = \frac{d}{dt}(\rho_{me} \vec{V}_e) + \frac{d}{dt}(\rho_{mi} \vec{V}_i),$$

de modo que al realizar lo respectivos cálculos, se tiene

$$\rho_m \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho_{me} \frac{d\vec{V}_e}{dt} + \rho_{mi} \frac{d\vec{V}_i}{dt}, \quad (\text{A.23})$$

de tal manera que

$$\rho_m \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} + \rho_m \vec{g} - \nabla p. \quad (\text{A.24})$$

Ecuación de energía para un fluido MHD

Para la ecuación de energía, se parte de la ecuación (A.14) producto punto con \vec{V} , de modo que

$$\rho_{m,\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) \frac{V^2}{2} + \vec{V} \cdot \nabla p + \sum_{i,j} \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j} V_i = \rho_\alpha \vec{E} \cdot \vec{V} + \vec{R} \cdot \vec{V},$$

y por regla de la cadena para el primer término

$$-\frac{V^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) \rho_{m,\alpha} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) \rho_{m,\alpha} \frac{V^2}{2} + \vec{V} \cdot \nabla p + \sum_{i,j} \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j} V_i = \rho_\alpha \vec{E} \cdot \vec{V} + \vec{R} \cdot \vec{V},$$

haciendo uso de la ecuación de continuidad para un fluido es posible eliminar el primer término de la anterior ecuación, de modo que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla\right) \rho_{m,\alpha} \frac{V^2}{2} + \vec{V} \cdot \nabla p + \sum_{i,j} \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j} V_i = \rho_\alpha \vec{E} \cdot \vec{V} + \vec{R} \cdot \vec{V}. \quad (\text{A.25})$$

Ahora, se reescribe la ecuación de energía general, es decir la ecuación (A.20):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla\right) \rho_{m,\alpha} \frac{V^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{3}{2} \nabla \cdot (p\vec{V}) + p \nabla \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla p + \nabla \cdot \vec{C} + \\ \sum_{i,j} \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j} V_i + \sum_{i,j} M_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \rho_\alpha \vec{E} \cdot \vec{V} + \vec{R} \cdot \vec{V} + Q. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Reemplazando (A.25) en (A.26) se obtiene:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{3}{2} \nabla \cdot (p\vec{V}) + p \nabla \cdot \vec{V} + \nabla \cdot \vec{C} + \sum_{i,j} M_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = Q.$$

Donde se asume una ecuación de estado para un gas ideal monoatómico tal que la relación de calores específicos es $\gamma = 5/3$, de tal manera que $1/(\gamma - 1) = 3/2$. Esto asume que el plasma es completamente neutro o completamente ionizado en todas partes y en todo momento.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{V} = (\gamma - 1) \eta J^2. \quad (\text{A.27})$$

A.3. LEY DE OHM

Para la deducción de la ley de Ohm es necesario tener en cuenta la condición de neutralidad de la carga y la relación entre la masa del electrón y la masa del ión

$$\rho \approx 0 \quad y \quad \frac{m_e}{m_i} \ll 1, \quad (\text{A.28})$$

de tal manera que

$$0 = -en_e + eZn_i \quad \rightarrow \quad n_e \approx Zn_i \quad (\text{A.29})$$

y con esto se puede concluir que

$$\rho_m = m_e n_e + m_i n_i \approx m_e Zn_i + m_i n_i \approx m_i n_i \left[Z \frac{m_e}{m_i} + 1 \right],$$

usando la relación de las masas del ión y del electrón:

$$\rho_m \approx m_i n_i; \quad (\text{A.30})$$

de manera análoga se llega a

$$\vec{V} \approx \vec{V}_i, \quad (\text{A.31})$$

$$\vec{J} \approx -en_e(\vec{V}_e - \vec{V}_i). \quad (\text{A.32})$$

despejando \vec{V}_e de la ecuación (A.32) y reemplazando (A.31)

$$\vec{V}_e \approx \vec{V} - \frac{\vec{J}}{en_e}, \quad (\text{A.33})$$

reemplazando la ecuación (A.33) en la (2.20) y dividiendo todo por en_e , se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{m_e}{e} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{m_e}{e} \left[\left(\vec{V} - \frac{\vec{J}}{en_e} \right) \cdot \nabla \right] \left(\vec{V} - \frac{\vec{J}}{en_e} \right) = \\ - \frac{\nabla P_e}{en_e} - \vec{E} - \left(\vec{V} - \frac{\vec{J}}{en_e} \right) \times \vec{B} + \frac{\vec{R}}{en_e}, \end{aligned}$$

donde bajo las aproximaciones previas se puede suponer que las variables \vec{V} y \vec{J} están linealizadas, por lo tanto, son valores de primer orden y se pueden despreciar los términos de orden superior. Además, se reemplaza $\vec{R}/en_e = \eta \vec{J}$, de tal manera que

$$\frac{m_e}{e} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = - \frac{\nabla P_e}{en_e} - \vec{E} - \left(\vec{V} - \frac{\vec{J}}{en_e} \right) \times \vec{B} + \eta \vec{J}, \quad (\text{A.34})$$

que es la ley de Ohm generalizada. Ahora, se analiza la magnitud de los dos términos de la parte izquierda en comparación con el término $(\vec{J} \times \vec{B}/en_e)$:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{m_e}{e^2 n_e} \left| \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right|}{\frac{1}{en_e} |\vec{J} \times \vec{B}|} &= \frac{m_e}{e} \frac{\omega |\vec{J}|}{|\vec{J}| |\vec{B}|} = \omega \left(\frac{m_e}{e |\vec{B}|} \right) = \frac{\omega}{\Omega_e}, \\ \frac{\frac{m_e}{e} \left| \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right|}{\frac{1}{en_e} |\vec{J} \times \vec{B}|} &= \frac{n_e m_e \omega |\vec{V}|}{|\vec{J}| |\vec{B}|} = \frac{n_e m_e \omega |\vec{V}|}{en_e |\vec{V}| |\vec{B}|} = \omega \left(\frac{m_e}{e |\vec{B}|} \right) = \frac{\omega}{\Omega_e}, \end{aligned}$$

donde ambos términos dependen de la frecuencia de propagación de la perturbación ω y de la frecuencia de giro del electrón Ω_e . Si los fenómenos o procesos del plasma son muy lentos (baja frecuencia), entonces $|\omega/\Omega_e| \ll 1$ y los términos al lado derecho de la ley de Ohm generalizada pueden ser despreciados. Por lo tanto

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \frac{\vec{J}}{en_e} \times \vec{B} + \frac{\nabla P_e}{en_e} + \eta \vec{J} = 0. \quad (\text{A.35})$$

Se despeja $\vec{J} \times \vec{B}$ de la ecuación (A.24) y se reemplaza en (A.35), de modo que

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \frac{\rho_m}{en_e} \frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{1}{en_e} \nabla \vec{P}_i + \frac{\rho}{en_e} \vec{E} - \eta \vec{J} = 0, \quad (\text{A.36})$$

ahora se analizan los términos ρ_m/en_e y ρ/en_e , teniendo en cuenta las condiciones de neutralidad, obteniendo

$$\frac{\rho_m}{en_e} \approx \frac{m_i}{eZ} \quad y \quad \frac{\rho}{en_e} \approx 0,$$

de tal manera que (A.36) queda de la siguiente manera

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \frac{1}{en_e} \nabla \vec{P}_i - \eta \vec{J} = \frac{m_i}{eZ} \frac{d\vec{V}}{dt}, \quad (\text{A.37})$$

donde al comparar el término $\frac{m_i}{eZ} \frac{d\vec{V}}{dt}$ con respecto a $\vec{V} \times \vec{B}$ se obtiene que:

$$\frac{|(m_i/eZ) d\vec{V}/dt|}{|\vec{V} \times \vec{B}|} \approx \frac{\omega}{\Omega_i},$$

lo cual quiere decir que el término $\frac{m_i}{eZ} \frac{d\vec{V}}{dt}$ es despreciable con respecto a $\vec{V} \times \vec{B}$ y además se asume que ∇p_i es despreciable también, reduciendo la ec.(A.37) a

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = \eta \vec{J}, \quad (\text{A.38})$$

la cual corresponde a la Ley de Ohm en la MHD.

B. MÉTODOS NUMÉRICOS

B.1. VOLÚMENES FINITOS

EL método de volúmenes finitos consiste en resolver las ecuaciones tipo conservación en su forma integral sobre un volumen espacio-temporal V . Para ilustrar el método, se considera una malla numérica con una dimensión espacial y una dimensión temporal $\vec{x} = (t^n, x_i)$, donde la coordenada temporal se discretiza como $t^n = n\Delta t$ y la coordenada espacial como $x_i = i\Delta x$, donde $i = 0, 1, 2, \dots, N_x$ y $n = 0, 1, 2, \dots, N_t$ son las celdas en las que se divide el dominio espacio-temporal en cuestión. Ver figura 17.

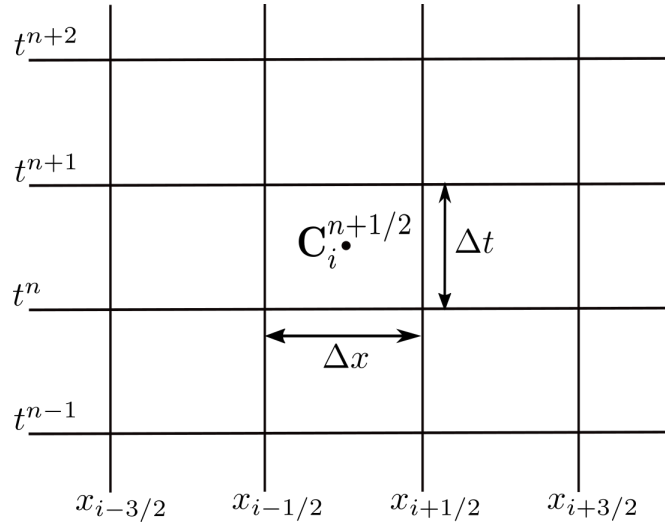


Figura 17: Discretización de la malla numérica en el esquema de volúmenes finitos. En esta figura se muestra un elemento de volumen del espacio tiempo $\Delta V = \Delta t \Delta x$ en una dimensión espacial.

En este caso, la ecuación tipo conservación a trabajar es la 3.17, donde las componentes de \vec{u} , \vec{f}^i y \vec{s} están definidas en 3.18. De modo que, considerando las tres coordenadas espaciales, la integración de la ec. (3.17) en el elemento de volumen V es

$$\frac{1}{\Delta V} \int_V \partial_t \vec{u} dV = -\frac{1}{\Delta V} \int_V \partial_i \vec{f}^i dV + \frac{1}{\Delta V} \int_V \vec{s} dV, \quad (\text{B.1})$$

donde $dV = dz dy dx dt$, y por lo tanto

$$\int_V = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}},$$

de modo que, el lado izquierdo de (B.1), por el teorema fundamental del cálculo, queda de la siguiente manera

$$\frac{1}{\Delta V} \int_V \partial_t \vec{u} dV = \frac{(\Delta V_0 \vec{U})|_{t^{n+1}} - (\Delta V_0 \vec{U})|_{t^n}}{\Delta V}, \quad (\text{B.2})$$

donde $\Delta V_0 = dz dy dx$ y

$$\hat{U} = \frac{1}{\Delta V_0} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \vec{u} dz dy dx,$$

de tal manera que \vec{U} representa el promedio espacial de las variables conservativas en cada una de las celdas numéricas. Por otro lado, se tiene que la primera parte del lado izquierdo de (B.1) se puede dividir en las seis caras del dominio espacial, así

$$\begin{aligned} - \int_V \partial_i f^i dV = & - \left[(\Delta V_x)_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} \hat{F}_{i+1/2,j,k}^{x_{n+1/2}} - (\Delta V_x)_{i-1/2,j,k}^{n+1/2} \hat{F}_{i-1/2,j,k}^{x_{n+1/2}} \right] \\ & - \left[(\Delta V_y)_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} \hat{F}_{i,j+1/2,k}^{y_{n+1/2}} - (\Delta V_y)_{i,j-1/2,k}^{n+1/2} \hat{F}_{i,j-1/2,k}^{y_{n+1/2}} \right] \\ & - \left[(\Delta V_z)_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} \hat{F}_{i,j,k+1/2}^{z_{n+1/2}} - (\Delta V_z)_{i,j,k-1/2}^{n+1/2} \hat{F}_{i,j,k-1/2}^{z_{n+1/2}} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde $\Delta V_x = dt dy dz$, $\Delta V_y = dt dx dz$ y $\Delta V_z = dt dx dy$, y los flujos los flujos numéricos que van a través de las interceldas numéricas se definen como

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i+1/2,j,k}^{x_{n+1/2}} &= \frac{1}{(\Delta V_x)_{i+1/2,j,k}^{n+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \vec{F}^x(x_{i+1/2}, y, z, t) dt dy dz, \\ \hat{F}_{i,j+1/2,k}^{y_{n+1/2}} &= \frac{1}{(\Delta V_y)_{i,j+1/2,k}^{n+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \vec{F}^y(x, y_{j+1/2}, z, t) dt dx dz, \\ \hat{F}_{i,j,k+1/2}^{z_{n+1/2}} &= \frac{1}{(\Delta V_z)_{i,j,k+1/2}^{n+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \vec{F}^z(x, y, z_{k+1/2}, t) dt dy dx. \end{aligned}$$

Los términos de fuente \hat{S} , son cantidades promediadas tanto en el espacio como en el tiempo y se definen de la siguiente manera

$$\hat{S}_{i,j,k}^{n+1/2} = \frac{1}{(\Delta V)_{i,j,k}^{n+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \vec{S}(x, y, z, t) dt dx dy dz \quad (\text{B.4})$$

Finalmente, uniendo las ecuaciones (B.2), (B.3) y (B.4), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta V_0 \hat{U})|_{t^{n+1}} - (\Delta V_0 \hat{U})|_{t^n}}{\Delta V} = & - \frac{\left[(\Delta V_x)_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} \hat{F}_{i+1/2,j,k}^{x_{n+1/2}} - (\Delta V_x)_{i-1/2,j,k}^{n+1/2} \hat{F}_{i-1/2,j,k}^{x_{n+1/2}} \right]}{(\Delta V)_{i,j,k}^{n+1/2}} \\ & - \frac{\left[(\Delta V_y)_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} \hat{F}_{i,j+1/2,k}^{y_{n+1/2}} - (\Delta V_y)_{i,j-1/2,k}^{n+1/2} \hat{F}_{i,j-1/2,k}^{y_{n+1/2}} \right]}{(\Delta V)_{i,j,k}^{n+1/2}} \\ & - \frac{\left[(\Delta V_z)_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} \hat{F}_{i,j,k+1/2}^{z_{n+1/2}} - (\Delta V_z)_{i,j,k-1/2}^{n+1/2} \hat{F}_{i,j,k-1/2}^{z_{n+1/2}} \right]}{(\Delta V)_{i,j,k}^{n+1/2}} \\ & + \hat{S}_{i,j,k}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Ahora, para nuestro caso en particular, es necesario considerar una malla uniforme, es decir, $\Delta x =$

$\Delta y = \Delta z = cte$, y además, $\Delta t = cte$, de modo que , queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{\hat{U}_{i,j,k}^{n+1} - \hat{U}_{i,j,k}^n}{\Delta t} = & - \frac{\left(\hat{F}_{i+1/2,j,k}^{x_{n+1/2}} - \hat{F}_{i-1/2,j,k}^{x_{n+1/2}} \right)}{\Delta x} - \frac{\left(\hat{F}_{i,j+1/2,k}^{y_{n+1/2}} - \hat{F}_{i,j-1/2,k}^{y_{n+1/2}} \right)}{\Delta y} \\ & - \frac{\left(\hat{F}_{i,j,k+1/2}^{z_{n+1/2}} - \hat{F}_{i,j,k-1/2}^{z_{n+1/2}} \right)}{\Delta z} + \frac{1}{\Delta t \Delta V_0} \hat{S}_{i,j,k}^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Finalmente, a la ecuación resultante se le aplica el método de líneas, el cual considera un problema de valores iniciales con condiciones de frontera para un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. De tal manera que, este método discretiza la parte espacial y convierte la ecuación diferencial parcial en una ecuación diferencial ordinaria en cada punto de la malla que va evolucionando en el tiempo utilizando el método de Runge-Kutta o un esquema multipasos. La ecuación resultante para el caso uniforme, después de hacer el mismo proceso de volúmenes finitos, pero promediando sólomente en el volumen espacial es

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{U}}{dt} = & - \frac{\left(\hat{F}_{i+1/2,j,k}^x - \hat{F}_{i-1/2,j,k}^x \right)}{\Delta x} - \frac{\left(\hat{F}_{i,j+1/2,k}^y - \hat{F}_{i,j-1/2,k}^y \right)}{\Delta y} \\ & - \frac{\left(\hat{F}_{i,j,k+1/2}^z - \hat{F}_{i,j,k-1/2}^z \right)}{\Delta z} + \hat{S}_{i,j,k}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

donde, en este caso, los flujos numéricos vienen dados como promedios espaciales de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i+1/2,j,k}^x &= \frac{1}{\Delta y_j \Delta z_k} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \vec{F}^x(x_{i+1/2}, y, z) dy dz, \\ \hat{F}_{i,j+1/2,k}^y &= \frac{1}{\Delta x_i \Delta z_k} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \vec{F}^y(x, y_{j+1/2}, z) dx dz, \\ \hat{F}_{i,j,k+1/2}^z &= \frac{1}{\Delta y_j \Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \vec{F}^z(x, y, z_{k+1/2}) dy dx. \end{aligned}$$

B.2. MÉTODO HLLE

Para el cálculo de los flujos numéricos en las interfases de cada celda numérica, se usan los resolvedores de Riemann aproximados. En este caso se trabaja con el método HLLE: Harten, Lax, van Leer yinfeldt, el cual reconstruye los flujos en las interceldas numéricas usando dos velocidades características, la más rápida y la más lenta. Este método se basa en la estructura característica de la matriz jacobiana de las ecuaciones tipo conservación, como lo es el sistema de ecuaciones MHD.

La matriz jacobiana \vec{A} resulta de una linealización de la ecuación tipo conservación, que en este caso es la ecuación (3.17), de modo que

$$\partial_t \vec{u} + \vec{A}(\vec{u}) \partial_x \vec{f}^x = 0, \quad (\text{B.8})$$

donde \vec{A} es la matriz Jacobiana para la dirección x , pero, en general, se tendrán tres matrices Jacobianas, una para cada dirección. Una vez calculadas estas matrices, se pueden calcular los eigenvalores y eigenvectores correspondientes a cada dirección. La ventaja que tiene este método comparado con otros métodos, además del tiempo de cómputo, es que la información requerida involucra sólo los eigenvalores del sistema. Las velocidades se escogen tomando en cuenta todos los eigenvalores evaluados

a la derecha e izquierda de cada intercelda.

$$\lambda^R = \max(0, \lambda_i^L, \lambda_i^R), \quad (\text{B.9})$$

$$\lambda^L = \min(0, \lambda_i^L, \lambda_i^R), \quad (\text{B.10})$$

$$(\text{B.11})$$

donde λ_i son los eigenvalores de la la matriz Jacobiana para la dirección x . De modo que, como se ve en la figura 18

$$\mathbf{U}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{U}^L & \text{si } x < \lambda^L t \\ \mathbf{U}^{HLL E} & \text{si } \lambda^L t \leq x \leq \lambda^R t \\ \mathbf{U}^R & \text{si } x > \lambda^R t \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

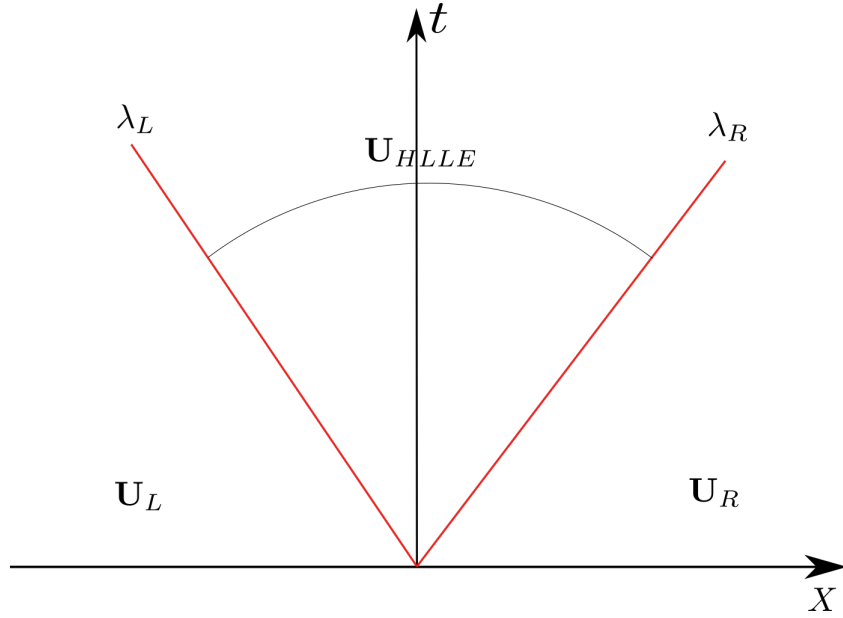


Figura 18: Esquema para el método HLL.

Los flujos numéricos se calculan mediante la siguiente fórmula

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{HLL E} = \frac{\lambda^R \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i+1/2}^L) - \lambda^L \mathbf{f}(\mathbf{U}_{i+1/2}^R) + \lambda^L \lambda^R (\mathbf{U}_{i+1/2}^R - \mathbf{U}_{i+1/2}^L)}{\lambda^R - \lambda^L}, \quad (\text{B.13})$$

donde $\mathbf{f}(\mathbf{U}_{i+1/2}^{L,R})$ son los flujos numéricos escritos en términos de las variables a izquierda y derecha de cada interfase.

B.3. TRANSPORTE DE FLUJO RESTRINGIDO

En MHD, se tiene una ecuación adicional a las ecuaciones de evolución, la condición de nulidad de la divergencia del campo magnético $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, la cual se tiene que satisfacer, y por lo tanto, monitorear

a cada paso de tiempo. La evolución libre de las ecuaciones MHD en su forma conservativa producen pequeños errores numéricos que hacen que la constricción de la divergencia del campo magnético crezca en el tiempo y desencadene en valores no físicos. Por lo tanto, se requieren de métodos que aseguren que la constricción no se viole. En este caso, se utiliza el método de transporte de flujo restringido (Flux Constrained Transport o Flux-CT), que consiste en discretizar los campos magnéticos, tal que si el campo inicialmente tiene divergencia cero, al evolucionar este debe mantenerse con errores del orden del error de redondeo de la máquina. Se define $\vec{\Omega} = \vec{v} \times \vec{B} - \eta \vec{J}$, de tal manera que la ley de Faraday en términos de esta nueva variable y la constricción del campo magnético se escriben, respectivamente, como

$$\partial_t \vec{B} = \nabla \times \vec{\Omega}, \quad (\text{B.14})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{B.15})$$

donde la integral de volumen de la constricción $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ se puede reducir a una integral de superficie aplicando la ley de Gauss

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (\text{B.16})$$

Debido a que celdas son cubos, la superficie cerrada ∂V que contiene a ΔV está compuesta por las seis caras cuadradas del cubo. Entonces, la integral sobre la superficie del cubo se puede descomponer en seis integrales

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{A}_1 + \dots + \int_{A_6} \vec{B} \cdot d\vec{A}_6.$$

Por otro lado, se tiene que la ecuación de inducción (B.14) y la constricción (B.15), se pueden relacionar de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l}, \quad (\text{B.17})$$

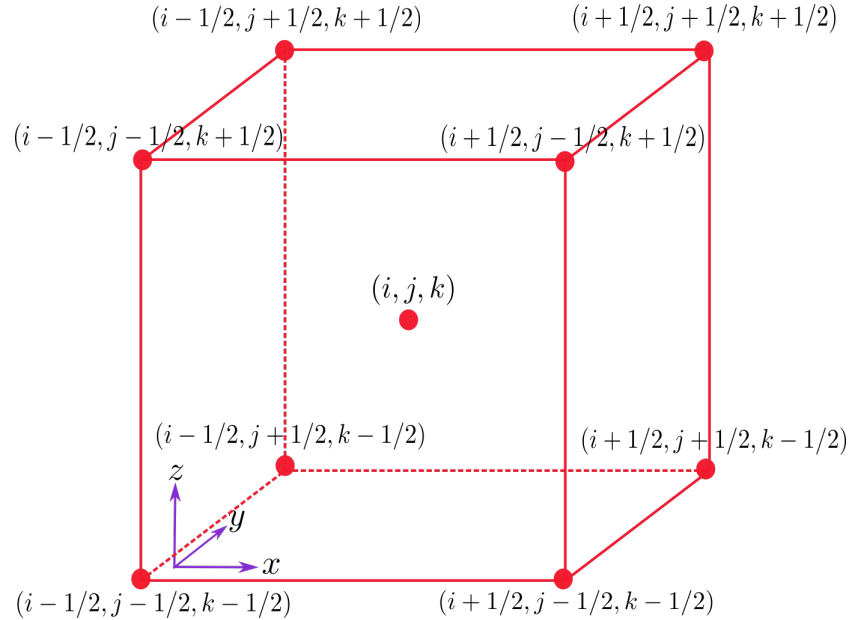


Figura 19: Elemento de volumen de la intercelda centrado en un punto arbitrario (i, j, k) perteneciente a la malla numérica.

donde la integral de línea se hace a lo largo del contorno de cada cara del cubo. Con el fin de hallar la evolución temporal de cada componente del campo magnético, se empieza desarrollando la integral cerrada en la cara lateral derecha de la figura 19, la cual corresponde a la cara presentada la figura 20, y se denomina A_1 , de modo que

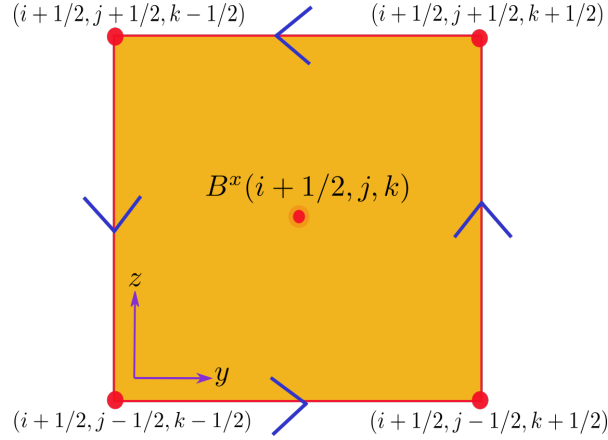


Figura 20: Cara lateral derecha del elemento de volumen.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{A}_1 &= \oint_{\partial A_1} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l} \\
&= \int_{j-1/2}^{j+1/2} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k-1/2}) \cdot \hat{y} dy + \int_{k-1/2}^{k+1/2} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z) \cdot \hat{z} dz \\
&\quad - \int_{j-1/2}^{j+1/2} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k+1/2}) \cdot \hat{y} dy - \int_{k-1/2}^{k+1/2} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j-1/2}, z) \cdot \hat{z} dz.
\end{aligned} \tag{B.18}$$

De manera que los valores de las componentes de $\vec{\Omega}$ en el centro de las aristas del cubo se calculan como los promedios de los valores Ω^i a lo largo de cada arista

$$\Omega^y(i + 1/2, j, k + 1/2) = \frac{1}{\Delta y} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y, z_{k+1/2}) \cdot \hat{y} dy, \tag{B.19}$$

$$\Omega^z(i + 1/2, j + 1/2, k) = \frac{1}{\Delta z} \int_{k-1/2}^{k+1/2} \vec{\Omega}(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z) \cdot \hat{z} dz, \tag{B.20}$$

y, ya que se tiene que el vector normal a A_1 es \hat{x} , se puede definir $B^x(i + 1/2, j, k)$ como un promedio en el área A_1

$$B^x(i + 1/2, j, k) = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{A}_1, \tag{B.21}$$

esta ecuación define la componente x del campo magnético ubicada en el punto $(i + 1/2, j, k)$. Sustituyendo las ecuaciones (B.19)-(B.21) en la ecuación (B.18) se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B^x(i + 1/2, j, k)}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta y} [\Omega^z(i + 1/2, j + 1/2, k) - \Omega^z(i + 1/2, j - 1/2, k)] \\
&\quad - \frac{1}{\Delta z} [\Omega^y(i + 1/2, j, k + 1/2) - \Omega^y(i + 1/2, j, k - 1/2)],
\end{aligned} \tag{B.22}$$

la cual representa la evolución de la componente x del campo magnético en el centro de la cara A_1 ubicada en $(i + 1/2, j, k)$.

Se lleva a cabo un desarrollo similar en la cara posterior y superior de la figura 19, que corresponden a las caras presentadas en la figura 21, y se obtienen las ecuaciones de evolución y, z del campo magnético en dichas caras respectivamente

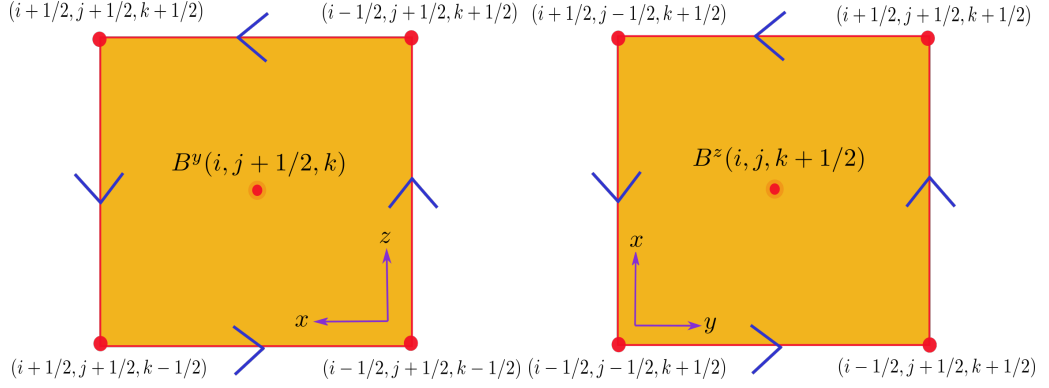


Figura 21: Caras posterior (izquierda) y superior (derecha) del elemento de volumen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B^y(i, j + 1/2, k)}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta z} [\Omega^x(i, j + 1/2, k + 1/2) - \Omega^x(i, j + 1/2, k - 1/2)] \\
&\quad - \frac{1}{\Delta x} [\Omega^z(i + 1/2, j + 1/2, k) - \Omega^z(i - 1/2, j + 1/2, k)] \\
\frac{\partial B^z(i, j, k + 1/2)}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta x} [\Omega^y(i + 1/2, j, k + 1/2) - \Omega^y(i - 1/2, j, k + 1/2)] \\
&\quad - \frac{1}{\Delta y} [\Omega^x(i, j + 1/2, k + 1/2) - \Omega^x(i, j - 1/2, k + 1/2)].
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Los valores de las componentes de $\vec{\Omega}$ en las aristas se calculan como un promedio aritmético usando los flujos adyacentes, los cuales, de manera general se definen como

$$F^{lm} \equiv v^l B^m - v^m B^l, \tag{B.24}$$

donde F^{lm} es el flujo que apunta en la dirección l para la componente m del campo magnético, de tal manera que

$$\begin{aligned}
\Omega^x &= -F^{zy} = F^{yz} \\
\Omega^y &= F^{zx} = -F^{xz} \\
\Omega^z &= -F^{yx} = F^{xy},
\end{aligned} \tag{B.25}$$

de modo que, la componente de $\vec{\Omega}$ en la arista se calcula como el promedio de los valores de dicha

componente de $\vec{\Omega}$ en las caras adyacentes, lo cual en término de los flujos es

$$\begin{aligned}
\Omega^x(i, j + 1/2, k + 1/2) &= \frac{1}{4} [F^{yz}(i, j + 1/2, k) + F^{yz}(i, j + 1/2, k + 1) \\
&\quad - F^{zy}(i, j, k + 1/2) - F^{zy}(i, j + 1, k + 1/2)], \\
\Omega^y(i + 1/2, j, k + 1/2) &= \frac{1}{4} [F^{zx}(i, j, k + 1/2) + F^{zx}(i + 1, j, k + 1/2) \\
&\quad - F^{xz}(i + 1/2, j, k) - F^{xz}(i + 1/2, j, k + 1)], \\
\Omega^z(i + 1/2, j + 1/2, k) &= \frac{1}{4} [F^{xy}(i + 1/2, j, k) + F^{xy}(i + 1/2, j, k + 1) \\
&\quad - F^{yx}(i, j + 1/2, k) - F^{yx}(i + 1, j + 1/2, k)],
\end{aligned} \tag{B.26}$$

los cuales están evaluados en los centros de las caras y, por lo tanto, son los flujos calculados con la fórmula HLLÉ, de modo que es posible calcular las componentes del campo magnético usando las componentes de $\vec{\Omega}$, garantizando de este modo que la condición de ausencia de monopolos magnéticos se cumpla numéricamente. Ahora, es necesario llevar a cabo el cálculo de la divergencia del campo magnético en los vértices del cubo, es decir en $(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{B}(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2) &= \frac{\partial B^x(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)}{\partial x} \\
&\quad + \frac{\partial B^y(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)}{\partial y} \\
&\quad + \frac{\partial B^z(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)}{\partial z},
\end{aligned} \tag{B.27}$$

donde cada término se puede escribir como un promedio de las derivadas espaciales del campo en las caras del cubo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B^x(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)}{\partial x} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial B^x(i + 1/2, j, k)}{\partial x} + \frac{\partial B^x(i + 1/2, j + 1, k)}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial B^x(i + 1/2, j + 1, k + 1)}{\partial x} + \frac{\partial B^x(i + 1/2, j, k + 1)}{\partial x} \right], \\
\frac{\partial B^y(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)}{\partial y} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial B^y(i, j + 1/2, k)}{\partial y} + \frac{\partial B^y(i, j + 1/2, k + 1)}{\partial y} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial B^y(i + 1, j + 1/2, k + 1)}{\partial y} + \frac{\partial B^y(i + 1, j + 1/2, k)}{\partial y} \right], \\
\frac{\partial B^z(i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2)}{\partial z} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial B^z(i, j, k + 1/2)}{\partial z} + \frac{\partial B^z(i, j + 1, k + 1/2)}{\partial z} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial B^z(i + 1, j + 1, k + 1/2)}{\partial z} + \frac{\partial B^z(i + 1, j, k + 1/2)}{\partial z} \right],
\end{aligned} \tag{B.28}$$

cada término de dichos promedios se calcula mediante diferencias finitas, de modo que se obtienen las expresiones para cada término de la divergencia en (B.27)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B^x(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\partial x} &= \frac{1}{4\Delta x} [B^x(i + 1, j, k) - B^x(i, j, k) + B^x(i + 1, j + 1, k) \\
&\quad - B^x(i, j + 1, k) + B^x(i + 1, j, k + 1) - B^x(i, j, k + 1) \\
&\quad + B^x(i + 1, j + 1, k + 1) - B^x(i, j + 1, k + 1)],
\end{aligned} \tag{B.29}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B^y(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\partial y} &= \frac{1}{4\Delta y} [B^y(i, j + 1, k) - B^y(i, j, k) + B^y(i + 1, j + 1, k) \\
&\quad - B^y(i + 1, j, k) + B^y(i, j + 1, k + 1) - B^y(i, j, k + 1) \\
&\quad + B^y(i + 1, j + 1, k + 1) - B^y(i + 1, j, k + 1)],
\end{aligned} \tag{B.30}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B^z \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right)}{\partial z} &= \frac{1}{4\Delta z} [B^z(i, j, k + 1) - B^z(i, j, k) + B^z(i, j + 1, k + 1) \\
&\quad - B^z(i, j + 1, k) + B^z(i + 1, j, k + 1) - B^z(i + 1, j, k) \\
&\quad + B^z(i + 1, j + 1, k + 1) - B^z(i + 1, j + 1, k)],
\end{aligned}
\tag{B.31}$$