

MODELOS AUTOCONSISTENTES DE SISTEMAS
ESTELARES AXIALMENTE SIMÉTRICOS
EN CONDICIONES DE EQUILIBRIO

JUAN FELIPE PEDRAZA AVELLA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
2008

MODELOS AUTOCONSISTENTES DE SISTEMAS
ESTELARES AXIALMENTE SIMÉTRICOS
EN CONDICIONES DE EQUILIBRIO

TRABAJO DE GRADO
PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

JUAN FELIPE PEDRAZA AVELLA

DIRECTOR: GUILLERMO A. GONZÁLEZ V., PH.D.

CODIRECTOR: JAVIER F. RAMOS C., M.Sc.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

2008

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	I
1. EQUILIBRIO DE SISTEMAS SIN COLISIONES	1
1.1. Introducción	1
1.2. El tiempo de relajación	3
1.3. La ecuación de Boltzmann sin colisiones	6
1.3.1. Limitaciones de la ecuación de Boltzmann sin colisiones	9
1.4. El teorema de Jeans	11
1.5. DFs para sistemas axialmente simétricos	13
1.6. La ecuación fundamental	14
1.6.1. Sistemas tridimensionales	15
1.6.2. Sistemas planos	17
1.7. El principio de máxima entropía	18
2. FORMALISMO	21
2.1. Introducción	21
2.2. Sistemas tridimensionales	22

2.2.1.	DFs de la forma $\sum_n L_z^{2\alpha_n} h_n(\varepsilon)$	22
2.2.2.	DFs de la forma $\sum_n L_z^{2\alpha_n} g_n(Q)$	23
2.2.3.	Modelos con potencial gravitacional divergente	25
2.3.	Sistemas planos	26
2.3.1.	DFs de la forma $\sum_n L_z^{2\alpha_n} h_n(\varepsilon)$	26
2.3.2.	DFs de la forma $\sum_n L_z^{\alpha_n} g_n(Q)$	28
2.3.3.	Modelos con potencial gravitacional divergente	29
2.4.	Discusión	30
3.	APLICACIONES	32
3.1.	Introducción	32
3.2.	Modelo logarítmico de Binney	32
3.3.	Disco de Mestel	35
3.4.	Discos generalizados de Kalnajs	37
3.4.1.	Caso $m = 1$	38
3.4.2.	Caso $m = 2$	43
3.4.3.	Caso $m = 3$	45
3.4.4.	Caso $m = 4$	47
3.5.	Nuevos modelos	49
3.5.1.	Formulación de los modelos	49
3.5.2.	Cálculo de B_n	51
3.5.3.	Corrección del coeficiente B_1	53

ÍNDICE GENERAL	3
3.5.4. Funciones de distribución	56
CONCLUSIONES	61
APÉNDICES	65
A.1. La expansión de Fricke	65
A.2. El método de Jiang & Ossipkov	65
A.3. La derivada fraccional	66
A.4. Los discos generalizados de Kalnajs	68
REFERENCIAS	73

ÍDICE DE FIGURAS

1.1. Fuerza sobre una estrella suponiendo una densidad uniforme	2
1.2. Interacción entre 2 estrellas	4
1.3. El espacio de fase	7
1.4. Invariancia del elemento de volumen en el espacio de fase	8
1.5. El espacio de las velocidades	16
3.1. Contornos de la DF para el modelo de Binney	34
3.2. Contornos de la DF para el modelo de Binney	34
3.3. Contornos de la DF para el disco de Mestel	36
3.4. Contornos de la DF para el disco de Mestel	36
3.5. Contornos de la DF para el disco de Kalnajs $m = 1$	39
3.6. Contornos de la DF para el disco de Kalnajs $m = 1$	42
3.7. Contornos de la DF para el disco de Kalnajs $m = 1$	43
3.8. Contornos de la DF para el disco de Kalnajs $m = 2$	45
3.9. Contornos de la DF para el disco de Kalnajs $m = 3$	47
3.10. Contornos de la DF para el disco de Kalnajs $m = 4$	49
3.11. Densidad superficial negativa	53

3.12. Densidad superficial de los nuevos modelos	55
3.13. Curvas de rotación de los nuevos modelos	56
3.14. DFs de los nuevos modelos en función de la integral de Jacobi	60
3.15. Contornos de las DFs para los nuevos modelos	60
A.1. Densidad superficial de los discos generalizados de Kalnajs	71
A.2. Potencial gravitacional de los discos generalizados de Kalnajs	72
A.3. Curvas de rotación de los discos generalizados de Kalnajs	72

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Constantes B_n para los nuevos modelos	53
3.2. Constantes B_n corregidas, para los nuevos modelos	54
3.3. DFs correspondientes a los nuevos modelos	58
3.4. Constantes $B'_{1\min}$ para los nuevos modelos	59
A.1. Derivadas fraccionales básicas	67

RESUMEN

TÍTULO: MODELOS AUTOCONSISTENTES DE SISTEMAS ESTELARES AXIALMENTE SIMÉTRICOS EN CONDICIONES DE EQUILIBRIO.*

AUTOR: PEDRAZA AVELLA, Juan Felipe.†

PALABRAS CLAVE: Dinámica de sistemas estelares, mecánica estadística, ecuación de Boltzmann sin colisiones, función de distribución.

DESCRIPCIÓN:

El problema de encontrar modelos autoconsistentes de sistemas estelares es de gran interés en astrofísica. Usualmente, una vez se formula un modelo del par potencial-densidad, el siguiente paso es encontrar la función de distribución, la cual describe el comportamiento estadístico del sistema y es de vital importancia para establecer la conexión entre los modelos teóricos y la observación.

Para sistemas en estado de equilibrio, la función de distribución depende únicamente de sus integrales de movimiento. De esta manera, sistemas con simetría axial en estado de equilibrio presentan funciones de distribución dependientes de la energía y del momento angular respecto al eje de simetría. La parte par de la función de distribución, respecto al momento angular, depende del par potencial-densidad a través de una ecuación integral de primer orden. La parte impar depende del estado rotacional del sistema y no puede ser determinada directamente; en este caso, lo único que se puede determinar es la función que representa el estado más probable, utilizando el principio de máxima entropía.

En este trabajo se introduce un nuevo formalismo para encontrar funciones de distribución correspondientes a sistemas axialmente simétricos, el cual generaliza varios resultados existentes y tiene la ventaja adicional de que puede ser empleado en una variedad más amplia de modelos. El método es utilizado para encontrar las funciones de distribución correspondientes a algunos modelos existentes: el modelo logarítmico de Binney, el disco de Mestel y los cuatro primeros discos generalizados de Kalnajs. Finalmente, se formula una nueva familia de modelos autoconsistentes, como combinación lineal de los discos de Kalnajs, de tal forma que las funciones de distribución respectivas se puedan calcular de una manera simple. Además, los nuevos modelos presentan la ventaja de mejorar las curvas de rotación, haciéndolas más consistentes con los datos observacionales.

* Trabajo de Grado.

† Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Guillermo A. González V., Ph.D. Codirector: Javier F. Ramos C., M.Sc.

ABSTRACT

TITLE: SELF-CONSISTENT MODELS OF AXISYMMETRIC STELLAR SYSTEMS IN EQUILIBRIUM CONDITIONS.*

AUTHOR: PEDRAZA AVELLA, Juan Felipe.†

KEY WORDS: Stellar systems dynamics, statistical mechanics, collisionless Boltzmann equation, distribution function.

DESCRIPTION:

The problem of finding self-consistent stellar models of galaxies is of wide interest in astrophysics. Usually, once the density-potential pair is formulated, the next step is to find the corresponding distribution function, which describes the statistical behavior of the system and is essential to establish the connection between theoretical models and observation.

For systems in equilibrium states, the distribution function depends only on its integrals of motion. Therefore, systems with axial symmetry in equilibrium, present distribution functions depending on the energy and the angular momentum with respect to the axis of symmetry. The even part of the distribution function, with respect to the angular momentum, depends on the potential-density pair through an integral equation of first order. The odd part depends on the rotational state of the system and cannot be determined directly; in this case, the only thing that can be determined is the function that represents the most probable state, by using the maximum entropy principle.

This work introduces a new formalism of finding distribution functions of axisymmetric systems which generalizes some of the previous results and it also has the advantage that can be used for a wider variety of models. The method is used to derive the distribution function of some known models: the Binney's logarithmic model, the Mestel disc, and the first four members of the generalized Kalnajs discs. Finally, a new family of models is proposed, as linear combination of Kalnajs discs, in such a way that the corresponding distribution function can be obtained in a simple way. Moreover, the new models have the advantage of having better rotational curves, which can be compared with observational curves.

* Degree work.

† Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Guillermo A. González V., Ph.D. Codirector: Javier F. Ramos C., M.Sc.

INTRODUCCIÓN

Un sistema estelar es un ensamble de estrellas y otros cuerpos celestes, los cuales están ligados mediante la interacción gravitatoria. Estos pueden variar hasta en 14 ordenes de magnitud en tamaño y masa, comenzando por estrellas binarias, clusters de estrellas que contienen entre 10^2 y 10^6 estrellas, galaxias formadas por hasta 10^{12} estrellas e inmensos clusters de galaxias que pueden contener miles de ellas. El objetivo principal de la dinámica de sistemas estelares consiste en estudiar el comportamiento y evolución de estos sistemas a partir de las leyes fundamentales de la mecánica y de la gravitación. Además, está ampliamente relacionada con otras ramas de la física teórica y en particular con la mecánica estadística, pues el número de estrellas en un sistema es por lo general tan grande que es necesario realizar un tratamiento estadístico.

Se ha demostrado que, en muy buena aproximación, es posible modelar dichos sistemas asumiendo una distribución de masa continua, sin tener que trabajar con los billones de masas puntuales que representan cada una de las estrellas. Por esta razón, la búsqueda de modelos que cumplen con esta característica ha sido un tema ampliamente estudiado a través de los años. Una vez se conoce la densidad de masa, el potencial gravitacional queda automáticamente determinado por medio de la ecuación de Poisson. De esta forma se obtiene lo que se conoce como el par potencial-densidad, el cual es la característica principal de un modelo estelar. En la mayoría de los casos, la mayor contribución al potencial es causada por un disco, por lo cual la formulación de dichos modelos es de gran interés [6]. Otras contribuciones a la dinámica global del sistema son el halo (conformado por polvo, material interestelar y posiblemente materia oscura) y los agujeros negros (encontrados por lo general en los núcleos de galaxias), pero sus efectos son menos relevantes.

Por otra parte, al modelar los sistemas estelares mediante las técnicas de la mecánica estadística resulta conveniente definir la función de distribución, que define la probabilidad de encontrar una estrella en un lugar y con una velocidad particulares [21]. Dicha función está relacionada con el par potencial-densidad a través de la ecuación de Boltzmann sin colisiones, la cual representa una condición para la evolución del sistema y puede ser interpretada como una ecuación de movimiento para la función de distribución. Con esto, se obtiene lo que se conoce como un modelo autoconsistente, que está conformado por la densidad de masa, el potencial gravitacional y la función

de distribución, conectadas entre sí por medio de la ecuación de Poisson y la ecuación de Boltzmann sin colisiones.

La función de distribución describe completamente el estado físico de un sistema. La importancia de encontrar esta función es que, una vez hallada, se pueden determinar fácilmente valores esperados, los cuales están estrechamente ligados con los observables y, por lo tanto, constituye una herramienta de vital importancia para establecer la conexión entre los modelos teóricos y la observación [6]. Además, la función de distribución también es requerida en estudios que tienen que ver con la dinámica de los sistemas estelares. Un ejemplo claro es la estabilidad de los modelos, que estudia sistemas en equilibrio sometidos a perturbaciones del campo gravitacional [17, 45, 52]; si el sistema permanece en el mismo estado entonces el sistema es estable, pero si evoluciona en alguna configuración diferente entonces el sistema es inestable. Otro ejemplo ampliamente estudiado es la formación de estructuras como consecuencia de la interacción entre sistemas estelares [16, 29, 54]. Se ha demostrado, por ejemplo, que galaxias axialmente simétricas pueden evolucionar en galaxias espirales bajo cierto tipo de condiciones. Por otra parte, los métodos empleados bajo el formalismo de la gravitación Newtoniana, así como las funciones de distribución en sí mismas, podrían ser de gran utilidad en la formulación de modelos autoconsistentes tanto relativistas como post-Newtonianos, que en la actualidad es un problema de gran interés [48, 50].

La forma más fácil de construir sistemas estelares autoconsistentes es partiendo del par potencial-densidad. En la literatura se encuentran varios modelos de sistemas estelares bajo diferentes tipos de configuraciones, siendo particularmente estudiados aquellos con simetría axial. Los de mayor relevancia son: Kuzmin-Kutuzov [36], Mestel [41], Miyamoto [42], Bagin [2], Kalnajs [30], Miyamoto & Nagai [43], Nagai & Miyamoto [44], Satoh [51], Kutuzov & Ossipkov [33], Binney [5], Kutuzov & Ossipkov [34, 35], Evans [12, 13], Kutuzov [32], Jiang [24], Jiang & Moss [26], Jiang et. al [25], González & Reina [19, 47], Jiang & Ossipkov [27]. Una vez se tiene el par potencial-densidad, el siguiente paso es resolver la ecuación de Boltzmann sin colisiones. En general, la función de distribución depende de las coordenadas espaciales, de las velocidades y del tiempo, pero para sistemas axialmente simétricos y en condiciones de equilibrio, la dependencia se reduce a sus dos integrales de movimiento clásicas; es decir, la energía y el momento angular respecto al eje de simetría.

Se han desarrollado una gran variedad de métodos para encontrar la función de distribución de dichos sistemas, dado el par potencial-densidad. El ejemplo más sencillo consiste en encontrar una función de distribución que dependa solo de la energía, independiente del momento angular. Eddington [11] mostró que esto se puede hacer si se expresa la densidad como función del potencial y luego resolviendo una ecuación integral de Abel. El problema análogo de encontrar una función de distribución que dependa de dos integrales de movimiento, para el caso de sistemas axialmente simétricos, ha resultado un poco más complicado.

Fricke [15] realizó el primer gran paso en la obtención de funciones de distribución dependientes de dos integrales de movimiento. Él demostró que funciones de distribución que son producto de las integrales en la forma $\varepsilon^\beta L_z^{2\alpha}$ corresponden a densidades proporcionales al producto entre el potencial Ψ y la coordenada radial R en la forma $\Psi^{\beta+\alpha+3/2} R^{2\alpha}$. Estas soluciones elementales pueden ser combinadas, para diferentes valores de β y α . La mayoría de las funciones de distribución que han sido obtenidas son sumas finitas (Lynden-Bell [39]; Lake [37]), sumas infinitas (Hunter [22]; Dejonghe [9]) ó sumas infinitas de sumas infinitas (Nagai & Miyamoto [44]; Dejonghe [9]; Dejonghe & de Zeeuw [10]; Evans, de Zeeuw & Lynden-Bell [14]) de estas soluciones. Éstas son obtenidas expresando la densidad como función de Ψ y R^2 y luego expandiéndola en series de potencias.

El segundo gran paso en la solución de sistemas axialmente simétricos fue realizado por Lynden-Bell [39], quien introdujo técnicas de transformaciones integrales. Utilizando transformada de Laplace, demostró que f puede ser obtenida realizando 2 transformadas inversas a una función que contiene la transformada de Laplace de la densidad ρ . Este trabajo condujo a la imposición de algunas restricciones para ρ si se quiere encontrar la función de distribución a partir de ésta, debido a que sólo es posible realizar dicho procedimiento para un tipo restringido de densidades. Por otra parte, esta técnica requería de información sobre la densidad para valores complejos de los argumentos lo cual, por supuesto, no era provisto por las observaciones [6].

Hunter [22] mostró que la doble transformada inversa de Laplace propuesta por Lynden-Bell es equivalente a la inversión de una transformada Stieltjes, la cual también requiere una continuación analítica de la densidad en argumentos complejos. Otros autores afrontaron el problema bajo diferentes tipos de transformadas. Kalnajs [31] utilizó una doble transformada de Mellin para la densidad. Dejonghe [9] empleó una transformada combinada de Laplace-Mellin (Laplace en ε y Ψ , y Mellin en L_z y R). En ambos casos se encontró la misma dificultad al requerir una continuación analítica de la densidad en argumentos complejos.

Recientemente, Jiang & Ossipkov [28] desarrollaron un método novedoso, el cual contiene los resultados de Eddington y Fricke como casos específicos.¹ Este procedimiento requiere que la densidad del sistema sea expresada como una suma de productos entre el potencial y la coordenada radial. La solución correspondiente a este tipo de sistemas es, en consecuencia, una suma de productos entre funciones de la energía y la componente del momento angular respecto al eje de simetría. Este método presenta la ventaja de que no requiere una continuación analítica para valores complejos de la densidad pero, a pesar de que reproduce los resultados de varios métodos anteriores, solo puede ser aplicado a una limitada variedad de modelos.

Con base en todo lo mencionado anteriormente, resulta conveniente la formulación de un

¹Estrictamente, el método de Jiang & Ossipkov reproduce los resultados de Fricke para potencias enteras de L_z .

método mas general, que pueda ser empleado como una herramienta en la construcción de modelos autoconsistentes de sistemas estelares axialmente simétricos. El presente trabajo resume los resultados obtenidos en el desarrollo de dicho método y para esto, se ha organizado su contenido en tres capítulos fundamentales. En el capítulo 1, se estudia la teoría básica que describe apropiadamente sistemas estelares de muchas partículas así como las ecuaciones fundamentales que relacionan a la función de distribución con las demás características de los modelos. En el capítulo 2, se introduce el formalismo necesario para encontrar funciones de distribución, dado el par potencial-densidad, y se analizan tanto las implicaciones físicas como la interpretación del método desarrollado. Finalmente en el capítulo 3, se muestran las aplicaciones a varios modelos existentes, y se formula una nueva familia de discos cuya función de distribución puede ser calculada fácilmente mediante el nuevo formalismo.

CAPÍTULO 1

EQUILIBRIO DE SISTEMAS SIN COLISIONES

1.1 Introducción

El estudio de los sistemas estelares de muchas partículas ha sido un tema de gran relevancia física debido a que proporciona un punto de comparación entre teoría y observación, al analizar las consecuencias directas de la gravitación. Un resultado de interés concierne a las características evolutivas de los sistemas estelares, en donde se diferencian dos etapas principales: el agitado periodo de formación en el cual la dinámica está regida por abundantes colisiones y el periodo de relajación, en el cual la galaxia alcanza un estado de equilibrio y su dinámica pasa a depender de su estructura global.

Un parámetro mediante el cual se puede realizar una estimación cualitativa acerca del estado del sistema es el tiempo libre medio, definido en mecánica estadística como el tiempo promedio entre dos colisiones sucesivas [46]. Para estimar su orden de magnitud, se modela el sistema como un gas ideal, caso en el cual el camino libre medio está dado por $\lambda = 1/(n\sigma)$, donde n es la densidad del número de estrellas y σ es la sección eficaz. Haciendo la suposición de que todas las estrellas son como el Sol, la sección eficaz para colisiones sería $\sigma = \pi(2R_{\odot})^2$, donde $R_{\odot} = 6,96 \times 10^8 \text{m} = 2,26 \times 10^{-8} \text{pc}$ es el radio solar.¹ Si ubicamos 10^{11} estrellas uniformemente sobre un disco de 10kpc y grosor 0,5kpc (valores típicos de una galaxia), entonces la densidad del número de estrellas en el disco sería $0,6 \text{pc}^{-3}$ y el camino libre medio sería $\lambda \simeq 2 \times 10^{14} \text{pc}$. El tiempo libre medio es $\tau = \lambda/v$, donde v es la velocidad media de una estrella. Cerca al Sol, las velocidades

¹En este cálculo se desprecia el aumento de la sección eficaz debida a la atracción gravitacional entre las estrellas, lo cual solo incrementaría la tasa de colisiones en un factor no mayor a 100 y la conclusión seguiría siendo válida [6].

de las estrellas están típicamente alrededor de 50 km s^{-1} . Con esta velocidad, el tiempo libre medio sería $5 \times 10^{18} \text{ yr}$, alrededor de 10^8 veces mayor que la edad de la Galaxia. Evidentemente, las colisiones entre estrellas son tan raras en estos sistemas que éstas son irrelevantes.

Este resultado marca una diferencia fundamental entre los sistemas estelares y aquellos sistemas normalmente tratados por la mecánica estadística, como los gases confinados. La interacción entre 2 moléculas es de corto alcance y por lo tanto la fuerza es pequeña, a menos que las moléculas estén cercanas una a la otra, donde se vuelve fuertemente repulsiva. Como consecuencia, las moléculas en un gas difuso están sujetas a violentas aceleraciones en intervalos de tiempo cortos mientras suceden las colisiones, separadas por intervalos mucho más largos donde se mueven a velocidad casi constante [21].

En contraste, la fuerza gravitacional que actúa entre las estrellas es de largo alcance. Como ejemplo, consideremos la fuerza ejercida por un grupo de estrellas distribuidas uniformemente sobre una estrella de prueba. La fuerza ejercida por una estrella cualquiera disminuye con la distancia como r^{-2} , pero si la densidad es uniforme, el número de estrellas y por lo tanto la masa que se encuentra a una distancia r de la estrella de prueba se incrementa con r^2 . Es por esto que para el caso de la interacción gravitatoria, todas las contribuciones son igualmente importantes y la fuerza total ejercida sobre una estrella se debe no sólo a la interacción con las estrellas más cercanas sino a la estructura del sistema a gran escala.

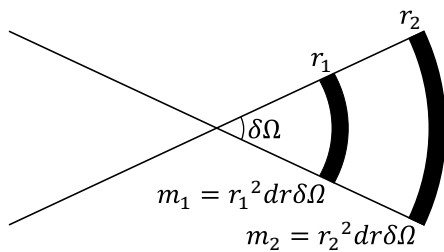


Figura 1.1: Si la densidad de estrellas fuera uniforme, las estrellas en cada una de las regiones sombreadas ejercerían una fuerza igual sobre una estrella situada en el centro. Por lo tanto, la aceleración de esta estrella está determinada principalmente por la distribución de estrellas a gran escala, no solo por las estrellas más cercanas.

Debido a lo anterior, la aceleración de una estrella no varía rápidamente como en el caso de una molécula en un gas, sino que varía suavemente como producto del campo de fuerza producido por el sistema como un todo. En otras palabras, es posible determinar la fuerza sobre una estrella si se modela el sistema con una densidad de masa suave en lugar de un conjunto de masas puntuales [6]. Las colisiones pasan a un segundo plano y ya no son vitales en el estudio de la dinámica global. Los sistemas que presentan esta propiedad han superado su etapa de formación y, por lo general, pueden ser descritos por modelos estacionarios, cuya característica fundamental es que la densidad en cada punto es independiente del tiempo debido a que las tasas de entrada y salida de estrellas, en cada elemento de volumen, se balancean exactamente.

Otro parámetro importante es el llamado tiempo de relajación, que al igual que el tiempo libre medio, puede ser estimado fácilmente mediante datos astronómicos. Éste define una escala de tiempo característica, durante la cual la trayectoria de una estrella

se puede calcular mediante la aproximación de campo medio y permite determinar la relevancia de los encuentros en la evolución del sistema [6]. Para una galaxia típica t_{relax} es muy grande, incluso mayor que la edad del universo, justificando así el modelamiento de galaxias como sistemas sin colisiones.

En este capítulo se estudiarán sistemas sin colisiones y en equilibrio, asumiendo que el tiempo libre medio y el tiempo de relajación son arbitrariamente grandes. Los modelos que describen este tipo de sistemas constituyen la principal herramienta para hacer comparaciones entre la observación y la teoría relacionada con dinámica de galaxias. Inclusive, es posible aplicarlos a clusters de estrellas, que por lo general tienen un tiempo de relajación menor a su tiempo de vida, debido a que éstos evolucionan lentamente en comparación con los tiempos de observación.

En la sección 1.2 se analizará mas a fondo la validez de la aproximación de campo medio y se determinarán las condiciones necesarias para modelar un sistema sin colisiones. En la sección 1.3 se definirá la función de distribución y se deducirá la ecuación de Boltzmann sin colisiones, que es la ecuación fundamental que describe la evolución del sistema. En la sección 1.4 se mostrará que las soluciones de la ecuación de Boltzmann sin colisiones, para sistemas en estado de equilibrio, pueden ser halladas fácilmente si se conocen las integrales de movimiento propias del sistema. En la sección 1.5 se utilizarán estas soluciones para estudiar modelos con simetría axial y se hallarán las relaciones de la función de distribución con los principales observables. En la sección 1.6 se planteará la ecuación integral que relaciona a la función de distribución con el par potencial-densidad, y por último, en la sección 1.7 se encontrará la función de distribución mas probable, correspondiente a diferentes estados de rotación.

1.2 El tiempo de relajación

Para analizar cuantitativamente los hechos mencionados anteriormente, estudiamos qué tan buena es la aproximación de una galaxia compuesta de N estrellas idénticas de masa m modelada como un sistema con densidad y potencial gravitacional suaves. Para esto, seguimos el movimiento de una estrella individual A (usualmente denotada como *subject star*) cuya órbita cruza la galaxia, y estimamos un orden de magnitud de la diferencia entre la velocidad real de la estrella después de un intervalo y la velocidad que tendría si la masa del resto se modelara mediante una distribución suave. Suponemos que la estrella A pasa a una distancia b de otra estrella B (usualmente llamada *field star*). Queremos estimar la deflexión de la velocidad $\delta\mathbf{v}$ generada durante el encuentro, donde \mathbf{v} es la velocidad de la estrella A. Para hacer esta estimación, asumimos que $|\delta\mathbf{v}|/v \ll 1$ y que la estrella B es estacionaria durante el encuentro. En este caso, $\delta\mathbf{v}$ es perpendicular a \mathbf{v} , puesto que las aceleraciones paralelas a \mathbf{v} se promedian a cero. Podemos calcular la magnitud del cambio en la velocidad, $\delta v \equiv |\delta\mathbf{v}|$, asumiendo que la

estrella A lleva una trayectoria rectilínea, e integrando la fuerza perpendicular F_{\perp} a lo largo de esta trayectoria.

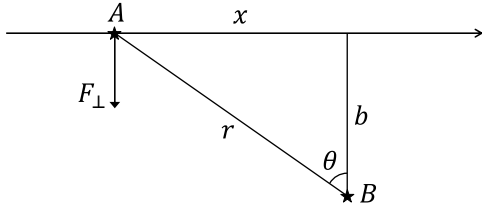


Figura 1.2: Una estrella A se acerca a la estrella B a una velocidad v y con parámetro de impacto b . Se estima el cambio en la velocidad de A aproximando su trayectoria como una línea recta.

Se toma el origen del tiempo en el instante de mayor cercanía entre las estrellas, y de acuerdo con la notación de la figura 1.2,

$$F_{\perp} = \frac{Gm^2}{b^2 + x^2} \cos \theta = \frac{Gm^2 b}{(b^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{Gm^2}{b^2} \left[1 + \left(\frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-3/2}. \quad (1.1)$$

Ahora, por la segunda ley de Newton,

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} \quad \text{luego} \quad \delta v = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dt F_{\perp}, \quad (1.2)$$

y por lo tanto

$$\delta v = \frac{Gm}{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{[1 + (vt/b)^2]^{3/2}} = \frac{Gm}{bv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(1 + s^2)^{3/2}} = \frac{2Gm}{bv}. \quad (1.3)$$

Pero, si $\delta v \simeq v$, no sería posible hacer la suposición de trayectoria rectilínea y por lo tanto (1.3) estaría incorrecto; esto ocurre si el parámetro de impacto $b \lesssim b_{\perp} = 2Gm/v^2$ (el subíndice \perp se refiere a una deflexión de 90°).

La densidad superficial de estrellas en la galaxia es del orden de $N/\pi R^2$, donde N es el número de estrellas y R es el radio de la galaxia; entonces, una vez cruzada la galaxia, la estrella de estudio ha sufrido

$$\delta n = \frac{N}{\pi R^2} 2\pi b db = \frac{2N}{R^2} b db \quad (1.4)$$

encuentros con parámetros de impacto en el rango entre b y $b + db$. Cada uno de esos encuentros produce una perturbación $\delta \mathbf{v}$ a la velocidad de la estrella de estudio, pero como estas pequeñas perturbaciones están orientadas aleatoriamente en el plano perpendicular a \mathbf{v} , su valor promedio se anula.² A pesar de que el cambio medio en la

²Estrictamente, el cambio medio en la velocidad es cero solo si la distribución de las estrellas es la misma en todas las direcciones. Un cálculo más preciso revela que el cambio medio en la velocidad se debe justamente a una distribución de masa suave lo cual se ignora porque el objetivo de este cálculo es determinar la *diferencia* entre la aceleración debida a la distribución de masa suave y la distribución real debida a las estrellas.

velocidad es cero, el cambio medio cuadrático no lo es: después de haber cruzado una vez la galaxia éste suma

$$\sum \delta v^2 \simeq \delta v^2 \delta n = \left(\frac{2Gm}{bv} \right)^2 \frac{2N}{R^2} b db. \quad (1.5)$$

Integrando la ecuación (1.5) sobre todos los parámetros de impacto desde b_{min} hasta b_{max} , encontramos el cambio en la velocidad media cuadrática por cruce

$$\Delta v^2 \equiv \int_{b_{min}}^{b_{max}} \sum \delta v^2 \simeq 8N \left(\frac{Gm}{Rv} \right)^2 \ln \Lambda, \quad (1.6)$$

donde el factor

$$\ln \Lambda \equiv \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \quad (1.7)$$

es llamado el logaritmo de Coulomb [6]. La suposición de trayectoria rectilínea no se cumple para parámetros de impacto menores que b_{\perp} , entonces fijamos $b_{min} = f_1 b_{\perp}$, donde f_1 es un factor del orden de la unidad. Por otra parte, la suposición de una distribución homogénea de estrellas deja de ser válida para parámetros de impacto de orden R , entonces fijamos $b_{max} = f_2 R$. Por tanto

$$\ln \Lambda = \ln \left(\frac{R}{b_{\perp}} \right) + \ln(f_2/f_1). \quad (1.8)$$

En la mayoría de sistemas de interés $R \gg b_{\perp}$ (por ejemplo, en una galaxia típica $R/b_{\perp} \gtrsim 10^{10}$), por lo que la incertidumbre de $\ln \Lambda$ debida a los valores de f_1 y f_2 es muy pequeña y podemos suponer $f_2/f_1 = 1$, sin perder mucha precisión.

La velocidad típica v de una estrella en la galaxia puede ser tomada como la velocidad de una partícula que describe una órbita circular en el borde de dicha galaxia,

$$v^2 \approx \frac{GNm}{R}. \quad (1.9)$$

Ahora, si eliminamos R de la ecuación (1.6) usando la ecuación (1.9), obtenemos

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} \approx \frac{8 \ln \Lambda}{N}. \quad (1.10)$$

Si la estrella en cuestión cruza varias veces la galaxia, la velocidad \mathbf{v} cambiaría por aproximadamente Δv^2 en cada cruce, y el número de cruces n_{relax} requeridos para que el cambio en la velocidad sea del orden de v , está dado por

$$n_{relax} \simeq \frac{N}{8 \ln \Lambda}. \quad (1.11)$$

El **tiempo de relajación** se define como $t_{relax} = n_{relax} t_{cross}$, donde $t_{cross} = R/v$ es el tiempo de cruce [6]; es decir, el tiempo requerido por una estrella típica para cruzar la

galaxia. Además, $\Lambda = R/b_{\perp} \approx Rv^2/(Gm)$, que es $\approx N$ por la ecuación (1.9). Entonces, finalmente se obtiene

$$t_{relax} \simeq \frac{0,1N}{\ln N} t_{cross}. \quad (1.12)$$

Después de un tiempo de relajación, como consecuencia de los encuentros estelares, la órbita real de una estrella resultaría significativamente diferente a la trayectoria calculada mediante la aproximación de campo medio. En efecto, después de un tiempo de relajación una estrella ha perdido la memoria de sus condiciones iniciales. Las galaxias típicas tienen $N \approx 10^{11}$ estrellas y tienen una edad de unos cientos de tiempos de cruce, entonces para estos sistemas los encuentros son irrelevantes, excepto en regiones cercanas al centro. Por otra parte, en un cluster de estrellas con tiempo de vida típico de 10Gyr, $N \approx 10^5$ y $t_{cross} \approx 1\text{Myr}$, luego los encuentros en este caso juegan un papel importante. En todos estos sistemas, la dinámica durante escalas de tiempo $\lesssim t_{relax}$ puede ser modelada como la de un **sistema sin colisiones**, donde las partículas constituyentes se mueven bajo la influencia del campo gravitacional generado por una distribución de masa suave, en lugar que un conjunto de masas puntuales.

1.3 La ecuación de Boltzmann sin colisiones

Cuando se modela una galaxia como un sistema sin colisiones, no es práctico seguir cada una de las órbitas de los billones de estrellas que la componen. La mayoría de las predicciones medibles dependen de la probabilidad de encontrar una estrella con una posición en el elemento $d^3\mathbf{x}$ alrededor de \mathbf{x} y con una velocidad en el elemento $d^3\mathbf{v}$ alrededor de \mathbf{v} . Por esto, se define la función de distribución (DF) f tal que $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$ representa la probabilidad de encontrar una estrella en el rango dado en un tiempo t [21]. Para hacer una definición mas precisa de $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, consideramos el espacio de fase 6-dimensional conformado por las coordenadas (\mathbf{x}, \mathbf{v}) de una estrella.³ Un punto en este espacio representa el estado de una estrella. Así mismo, en cualquier instante de tiempo, el estado de un sistema entero conformado por N estrellas está representado por N puntos en el espacio de fase. En cada punto del espacio de fase se construye un elemento de volumen $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$, tal como se muestra en la figura 1.3. Si medimos la probabilidad de encontrar una estrella en este volumen, el resultado es por definición $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$.

Como consecuencia de su definición probabilista, f debe satisfacer la condición de normalización:

$$\int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 1, \quad (1.13)$$

donde la integral se extiende sobre todo el volumen del espacio de fase. Si modeláramos

³Nos referimos a la colección de coordenadas espaciales y de velocidades (\mathbf{x}, \mathbf{v}) como las coordenadas de la estrella.

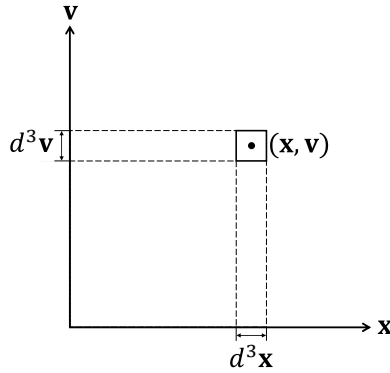


Figura 1.3: El espacio de fase 6-dimensional.

un sistema estelar como un gas sin interacciones, f sería independiente de \mathbf{x} y por lo tanto,

$$\int d^3\mathbf{v} f(\mathbf{v}, t) = \frac{1}{V}. \quad (1.14)$$

Esto funciona bien para un gas confinado que está uniformemente distribuido en el espacio, pero no para sistemas estelares debido a que, en este caso, la interacción debida a la fuerza gravitacional no se puede despreciar. El objetivo es entonces, encontrar la función de distribución $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, dada la forma de la interacción. Para hacer esto, el primer paso consiste en encontrar una ecuación que describa la evolución de dicha función de distribución.

Debido a la interacción gravitatoria, una estrella dada se va desplazando y va cambiando su momentum y, por lo tanto, la probabilidad de encontrarla en algún punto del espacio de fase también varía con el tiempo. Suponiendo que no hay colisiones, una estrella con coordenadas (\mathbf{x}, \mathbf{v}) en el tiempo t tendría coordenadas $(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\delta t, \mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}\delta t)$ en el instante $t + \delta t$, donde $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}/m$, siendo \mathbf{F} la fuerza externa que actúa sobre la estrella. Entonces, todas las estrellas contenidas en un elemento de volumen $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$ en (\mathbf{x}, \mathbf{v}) , en el instante t , se encontrarían en un elemento $d^3\mathbf{x}'d^3\mathbf{v}'$, en $(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\delta t, \mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}\delta t)$ en el instante $t + \delta t$. Debido a esto, en ausencia de colisiones se cumple la igualdad

$$f(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\delta t, \mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}\delta t)d^3\mathbf{x}'d^3\mathbf{v}' = f(\mathbf{x}, \mathbf{v})d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}, \quad (1.15)$$

la cual se reduce a

$$f(\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\delta t, \mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}\delta t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad (1.16)$$

porque $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v} = d^3\mathbf{x}'d^3\mathbf{v}'$. Este último hecho se deduce fácilmente, teniendo en cuenta que la fuerza \mathbf{F} depende solamente de la posición. En cualquier instante de tiempo t podemos escoger $d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{v}$ como un cubo 6-dimensional. Es suficiente mostrar que el área de cualquier proyección de este cubo no cambia, digamos por ejemplo, que $dx dv_x$ no cambia. Un cálculo simple muestra que esta proyección, originalmente un cuadrado, se vuelve un paralelogramo de la misma área en el tiempo $t + \delta t$, como se ilustra en la figura 1.4. Esta invariancia es válida mientras (\mathbf{x}, \mathbf{v}) sean un sistema arbitrario de coordenadas canónicas [21].

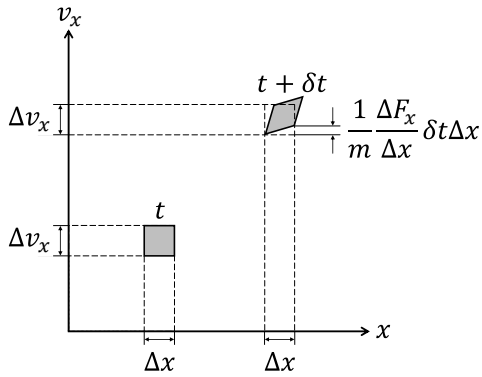


Figura 1.4: La invariancia del elemento de volumen en el espacio de fase bajo la evolución dinámica de la función de distribución.

Expandiendo la parte izquierda de (1.16) a primer orden con respecto a δt y tomando el límite cuando $\delta t \rightarrow 0$, se obtiene una ecuación de movimiento para la función de distribución, llamada la **ecuación de Boltzmann sin colisiones**,⁴

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.17)$$

Esta es una ecuación en derivadas parciales de f como función de las 6 coordenadas del espacio de fase y del tiempo, describiendo la evolución de la función de distribución.

Es posible obtener una interpretación más clara de la ecuación de Boltzmann sin colisiones si se emplean las ecuaciones de Hamilton para transformar (1.17) en una ecuación de continuidad,⁵

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}, \quad (1.18a)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(f \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(f \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} \right), \quad (1.18b)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (f \dot{\mathbf{x}}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (f \dot{\mathbf{v}}). \quad (1.18c)$$

Con esto, (1.17) queda

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} \cdot (f \dot{\mathbf{w}}) = 0, \quad (1.19)$$

donde $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ son las coordenadas del espacio de fase. En analogía con la dinámica de fluidos, ésta última establece que mientras f evoluciona en el tiempo, $f \dot{\mathbf{w}}$ puede ser interpretada como una corriente de probabilidad sobre el espacio de fase. De igual forma, la condición de normalización (1.13) puede ser interpretada como la conservación de probabilidad.

La ecuación (1.17) puede ser escrita en diferentes formas, cada una de las cuales siendo

⁴También es llamada la ecuación de Vlasov, a pesar de que ésta es una versión simplificada de la ecuación original obtenida por L. Boltzmann [20].

⁵Sin perder generalidad, normalizamos la masa a 1 por comodidad.

útil en diferentes contextos [6]. La ecuación (1.18a) nos permite escribir

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}, \quad (1.20a)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + [f, \mathcal{H}], \quad (1.20b)$$

donde el corchete cuadrado representa un corchete de Poisson [18].

Otra forma alternativa de la ecuación de Boltzmann sin colisiones puede ser obtenida considerando la derivada total de f con respecto a t ,

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial w_k} \dot{w}_k; \quad (1.21)$$

df/dt representa la tasa de cambio de la densidad de probabilidad local vista por un observador que se mueve en el espacio de fase con una estrella. De acuerdo con (1.19), la ecuación de Boltzmann sin colisiones se reduce a

$$\frac{df}{dt} = 0. \quad (1.22)$$

En palabras, el flujo de probabilidad a través del espacio de fase es incompresible; es decir, a pesar de que la densidad f varíe de punto a punto, ésta es constante en el sistema de referencia de una estrella particular.

1.3.1. Limitaciones de la ecuación de Boltzmann sin colisiones

(a) Estrellas con tiempos de vida finitos

Una de las bases físicas en las cuales se sustenta la ecuación de Boltzmann sin colisiones es la conservación del número de partículas descritas por la DF. En realidad, la cantidad de estrellas no se conserva debido a que ellas nacen y mueren, entonces su flujo a través del espacio de fase sería descrito más acertadamente por una ecuación del tipo [6]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = B - D, \quad (1.23)$$

donde $B(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ y $D(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ son las tasas por unidad de volumen del espacio de fase a las cuales las estrellas nacen y mueren. En la ecuación de Boltzmann sin colisiones, $B - D$ es igual a 0, lo cual es una aproximación útil si y sólo si $B - D$ es menor en magnitud que los términos a la izquierda de la ecuación (1.23). El término $\dot{\mathbf{x}} \cdot \partial f / \partial \mathbf{x}$ es del orden de $v f / R$, donde v y R son la velocidad característica y el radio de la galaxia. La razón R/v es simplemente el tiempo de cruce t_{cross} . De manera similar, el término $\dot{\mathbf{v}} \cdot \partial f / \partial \mathbf{v}$ es del orden de $a f / v$, donde a es la aceleración característica. Como

$a \approx v/t_{cross}$, los dos últimos términos del lado derecho de la ecuación (1.23) son del orden de f/t_{cross} . Entonces, consideremos el parámetro

$$\gamma = \left| \frac{B - D}{f/t_{cross}} \right|. \quad (1.24)$$

La ecuación de Boltzmann sin colisiones es válida si $\gamma \ll 1$, lo cual se cumple para la mayoría de sistemas estelares, incluso cuando los objetos descritos son de vida corta como en el caso de las nebulosas planetarias, pues se tiene que $B \simeq D$ garantizando ésta condición [6].

(b) Correlaciones entre estrellas

La densidad de estrellas en un elemento de volumen infinitesimal del espacio de fase es Nf , donde N es el número total de estrellas en la galaxia. Sin embargo, en la práctica lo único que podemos medir es la densidad promedio en un volumen lo suficientemente grande para contener varias estrellas. La suposición que usualmente se hace es que la densidad en dicho volumen es $N\bar{f}$, donde \bar{f} es el promedio de f (sobre el mismo volumen). No obstante, ésto solo sería correcto si las posiciones de las estrellas en el espacio de fase no estuvieran correlacionadas; es decir, cuando el hecho de que una estrella se encuentre en un determinado punto del espacio de fase no influye en la probabilidad de que otra estrella tenga una localización dada. Matemáticamente, si no existe tal correlación, decimos que la probabilidad de que una estrella se encuentre en un punto A y otra estrella en el punto B es el producto de las probabilidades individuales.⁶ Cuando esta suposición se mantiene, la probabilidad $P_{\mathcal{V}}(k)$ de encontrar k estrellas en un volumen dado \mathcal{V} del espacio de fase está dada por la distribución de Poisson [6]

$$P_{\mathcal{V}}(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad \text{donde } \mu \equiv N\bar{f}\mathcal{V}. \quad (1.25)$$

Es fácil ver que el número medio de estrellas predichas por esta distribución de probabilidad es $\langle k \rangle = N\bar{f}\mathcal{V}$. Entonces, $N\bar{f}$ es de hecho el valor esperado de la densidad de estrellas en el volumen \mathcal{V} , si la DF es separable. Podemos sacar dos conclusiones directas: (i) el valor esperado de la masa en el volumen \mathcal{V} es

$$\langle m \rangle = M\bar{f}(\mathbf{w})\mathcal{V}, \quad (1.26)$$

donde M es la masa total del sistema, y (ii) el valor esperado de luminosidad emitida en el volumen \mathcal{V} es

$$\langle l \rangle = L\bar{f}(\mathbf{w})\mathcal{V}, \quad (1.27)$$

donde L es la luminosidad total del sistema.

En realidad, la presencia de una estrella en A siempre incrementa la probabilidad de que otra estrella se encuentre en un B cercano, debido a la naturaleza atractiva de

⁶DFs que presentan este tipo de comportamiento son llamadas “separables”.

la interacción gravitacional. Por lo tanto, la suposición de que las distribuciones de probabilidad de estrellas individuales sean separables no es estrictamente válida. Sin embargo, la fuerza ejercida sobre una estrella por sus vecinas es mucho menor a la que le ejerce el resto del sistema, razón por la cual las correlaciones no juegan un papel muy relevante en escalas de tiempo menores al tiempo de relajación [6].

1.4 El teorema de Jeans

El teorema de Noether es un resultado fundamental en física teórica que expresa que la existencia de ciertas simetrías en un sistema físico conlleva a la existencia de leyes de conservación [18]. Constituye, por tanto, una explicación de porqué ciertas cantidades físicas no cambian a lo largo de la evolución temporal de un sistema y esto permite la simplificación de una gran variedad de problemas.

En la formulación del teorema se deriva una expresión que relaciona alguna cantidad física que se conserva, llamada integral de movimiento, con su correspondiente condición de invariancia o transformación. Los ejemplos más comunes enmarcados en la mecánica clásica son:

- La invariancia de translación en el espacio trae como consecuencia la conservación del momento lineal.
- La invariancia de rotación en el espacio trae como consecuencia la conservación del momento angular.
- La invariancia de translación en el tiempo trae como consecuencia la conservación de la energía.

En general, es sencillo determinar cuales cantidades permanecen constantes en el tiempo para un sistema determinado. Si el Hamiltoniano no depende explícitamente de una coordenada generalizada, entonces su momento conjugado será una integral de movimiento [18]. Además, una función de las coordenadas del espacio de fase $I(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, es una integral de movimiento, sí y solo sí

$$\frac{d}{dt}I[\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)] = 0; \quad (1.28)$$

es decir,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0. \quad (1.29)$$

En particular, estamos interesados en estudiar sistemas que se encuentren en estados de equilibrio o estados estacionarios; es decir, estados cuya función de distribución es independiente del tiempo. Teniendo en cuenta este hecho, $\partial f/\partial t = 0$ y, por tanto, la ecuación de Boltzmann sin colisiones se puede expresar como

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.30)$$

La mecánica estadística demuestra que, con el paso del tiempo, todo sistema finalmente alcanzará un estado de equilibrio y, además, un sistema que se encuentre en equilibrio permanecerá en dicho estado mientras no interactúe con otros.⁷ Debido a esto, un sistema estelar cuya edad sea arbitrariamente grande podrá ser modelado como un sistema en estado de equilibrio.⁸

Un hecho de gran relevancia es que la condición (1.28) para que una cantidad I sea una integral de movimiento es exactamente idéntica a la condición (1.30) de que I sea una solución en estado de equilibrio de la ecuación de Boltzmann sin colisiones. Esto conlleva a un poderoso teorema, formulado originalmente por Jeans [6].

Teorema de Jeans: *Cualquier solución en estado estable de la ecuación de Boltzmann sin colisiones depende de las coordenadas del espacio de fase solo a través de las integrales de movimiento del sistema. Además, cualquier función de las integrales constituye una solución en estado estable de la ecuación de Boltzmann sin colisiones.*

Para demostrar este teorema, suponemos que f es una solución en estado de equilibrio de la ecuación de Boltzmann sin colisiones. Entonces, como se ha mostrado, f es una integral de movimiento y por tanto se verifica la primera parte del teorema. Ahora, si I_1, I_2, \dots, I_n son integrales de movimiento y f es una función arbitraria de n variables que depende de las integrales,

$$\frac{d}{dt} f[I_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \dots, I_n(\mathbf{x}, \mathbf{v})] = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial I_k} \frac{dI_k}{dt} = 0. \quad (1.31)$$

Este teorema constituye una herramienta muy fuerte en la construcción de modelos autoconsistentes, especialmente para aquellos que presentan algún tipo de simetría, al reducir el número de variables de las cuales pueda depender la función de distribución. De esta forma, el problema de encontrar una DF que satisfaga la ecuación de Boltzmann sin colisiones, para un sistema dado, queda solucionado al considerar cualquier función que dependa sólo de sus integrales de movimiento.

⁷Esto es consecuencia directa de la segunda ley de la termodinámica [46].

⁸Específicamente, la edad debe ser suficientemente grande para haber terminado el periodo de formación.

1.5 DFs para sistemas axialmente simétricos

La simetría axial implica la invariancia de un sistema al someterse a una rotación espacial alrededor de un eje. El sistema de coordenadas usualmente utilizado este caso es el cilíndrico; no obstante, existen otros sistemas que también presentan un eje de rotación y son usados dependiendo del contexto. Ejemplos de estos sistemas son las coordenadas esféricas, biesféricas, esferoidales prolatas, esferoidales oblatas, parabólicas y toroidales [1].

En coordenadas cilíndricas, un sistema es axialmente simétrico si todas sus propiedades son independientes del ángulo azimutal ϕ . El momento conjugado de ϕ es $L_z = Rv_\phi$ el cual permanece constante a medida que el sistema evoluciona y es por tanto una integral de movimiento [18]. Por otra parte, para sistemas aislados cuyas propiedades no dependen del tiempo, la energía total E constituye una segunda integral de movimiento. De modo que centraremos nuestra atención en la búsqueda de DFs de la forma $f(E, L_z)$.

En general, $f(E, L_z)$ se puede descomponer en una parte que es par respecto a L_z y otra parte impar [6]

$$f(E, L_z) = f_+(E, L_z) + f_-(E, L_z), \quad (1.32)$$

donde

$$f_\pm(E, L_z) \equiv \frac{1}{2}[f(E, L_z) \pm f(E, -L_z)]. \quad (1.33)$$

Consideremos ahora la integral

$$\nu(\mathbf{x}) \equiv \int d^3\mathbf{v} f(E, L_z). \quad (1.34)$$

Para una posición dada \mathbf{x} , (1.34) da la probabilidad por unidad de volumen de encontrar una estrella particular en \mathbf{x} , independientemente de su velocidad. Dado que $f_-(E, L_z)$ es impar respecto a L_z , ésta no contribuye a la integral. Esta cantidad está profundamente relacionada con los observables mas inmediatos, pues al multiplicar por el número total de estrellas N , la masa total M o la luminosidad L de una galaxia, se obtiene la densidad de estrellas $n(\mathbf{x})$, la densidad de masa $\rho(\mathbf{x})$ y la densidad de luminosidad $j(\mathbf{x})$, respectivamente [6]. Estos observables son cantidades escalares y, por tanto, no dependen del sistema de referencia. Además, son de gran importancia pues pueden ser medidos experimentalmente mediante técnicas fotométricas.

En algunas ocasiones, es conveniente modificar la definición de la DF de tal modo que $f d^6\mathbf{w}$ no represente la probabilidad de encontrar una estrella dada en el volumen del espacio de fase $d^6\mathbf{w}$, sino quizás, el valor esperado, masa total, o luminosidad total de las estrellas en $d^6\mathbf{w}$. Estas modificaciones corresponden a multiplicar f por N , M , o L , respectivamente. Idealmente, estas diferentes definiciones deberían estar reflejadas en diferentes notaciones para la DF. En la práctica la definición usualmente es clara según el contexto, y f es usada para denotar todas estas cantidades.

Otro tipo de observables son aquellos relacionados con las velocidades, los cuales se pueden determinar en la práctica mediante experimentos que involucran el efecto Doppler. En nuestro sistema de referencia, las cantidades medibles están determinadas por la velocidad media a lo largo de la línea de visión $\bar{v}_{\parallel}(\mathbf{x})$ y la dispersión de velocidades estelares en cada punto de la galaxia alrededor de $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$, la cual está caracterizada por el tensor de dispersión de velocidades. Este tensor es diagonal en el marco de referencia de la galaxia y sus componentes son [6]

$$\sigma_{ij}^2(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\nu(\mathbf{x})} \int d^3\mathbf{v} (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j. \quad (1.35)$$

Dado que $v_{\parallel}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{v}$ (donde $\hat{\mathbf{s}}$ es un vector unitario que va desde el observador hasta el centro de la galaxia), para determinar $\bar{v}_{\parallel}(\mathbf{x})$ primero es necesario calcular la velocidad media de una estrella en el sistema de referencia de la galaxia, cuyas componentes son [6]

$$\bar{v}_R = \frac{1}{\nu} \int dv_R v_R \int dv_z \int dv_{\phi} f \left[\frac{1}{2}(v_R^2 + v_z^2 + v_{\phi}^2) + \Phi, Rv_{\phi} \right] = 0, \quad (1.36a)$$

$$\bar{v}_z = \frac{1}{\nu} \int dv_z v_z \int dv_R \int dv_{\phi} f \left[\frac{1}{2}(v_R^2 + v_z^2 + v_{\phi}^2) + \Phi, Rv_{\phi} \right] = 0, \quad (1.36b)$$

$$\bar{v}_{\phi} = \frac{1}{\nu} \int dv_{\phi} v_{\phi} \int dv_R \int dv_z f \left[\frac{1}{2}(v_R^2 + v_z^2 + v_{\phi}^2) + \Phi, Rv_{\phi} \right]. \quad (1.36c)$$

Las integrales para \bar{v}_R y \bar{v}_z se anulan porque los integrandos son funciones impares de v_R y v_z respectivamente. La integral de \bar{v}_{ϕ} se anularía si el integrando fuera impar y debido a esto, solamente contribuye $f_-(E, L_z)$.⁹

Como se puede observar, las partes par e impar de la función de distribución desempeñan papeles independientes. En realidad, si se parte del par potencial-densidad solo es posible determinar $f_+(\varepsilon, L_z)$, existiendo un número infinito de posibilidades para $f_-(\varepsilon, L_z)$, de las cuales cada una representa un estado de rotación diferente.

1.6 La ecuación fundamental

Sean Φ el potencial gravitacional y E la energía de una partícula en un sistema estelar. Resulta conveniente definir un potencial relativo Ψ y una energía relativa ε de una estrella como [6]

$$\Psi \equiv -\Phi + \Phi_0 \quad \text{y} \quad \varepsilon \equiv -E + \Phi_0 = \Psi - \frac{1}{2}v^2, \quad (1.37)$$

en donde Φ_0 es una constante. En la práctica, generalmente se elige Φ_0 tal que $f > 0$ para $\varepsilon > 0$ y $f = 0$ para $\varepsilon \leq 0$. Obviamente, $\varepsilon = 0$ corresponde a la energía relativa de

⁹El producto $v_{\phi} f_-(E, L_z)$ es par respecto a v_{ϕ} .

escape del sistema. El potencial relativo de un sistema aislado satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi G \rho, \quad (1.38)$$

sujeto a la condición de contorno $\Psi \rightarrow \Phi_0$ cuando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

Dado un sistema estelar con potencial relativo $\Psi = \Psi(\mathbf{x})$ y densidad de masa $\rho = \rho(\mathbf{x})$ consistente con la ecuación de Poisson, su función de distribución $f = f(\varepsilon, L_z)$ satisface la siguiente ecuación integral¹⁰

$$\rho(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{v} f_+(\varepsilon, L_z). \quad (1.39)$$

Los sistemas que satisfacen esta relación son llamados sistemas autoconsistentes porque la densidad determina al potencial a través de la ecuación de Poisson y, al mismo tiempo, el potencial determina la densidad de tal forma que sea consistente con la ecuación de Boltzmann sin colisiones. Ahora, pasaremos a estudiar detenidamente (1.39) para sistemas tridimensionales y para sistemas planos, caso en el que las dimensiones del espacio de fase se reducen y, por esta razón, la relación entre el par potencial-densidad y la función de distribución sufre un cambio sustancial.

1.6.1. Sistemas tridimensionales

De acuerdo con la definición de la energía relativa y el potencial relativo, es posible reescribir la ecuación (1.39) de tal forma que las variables de integración sean ε y L_z . Utilizando coordenadas cilíndricas (v_m, ξ, v_ϕ) para el espacio de velocidades, con el eje de simetría en dirección azimutal, se obtiene $v_R = v_m \cos \xi$, $v_z = v_m \sin \xi$. En la figura 1.5 se muestra un esquema que representa este cambio de coordenadas.

En este nuevo sistema, el diferencial de volumen queda $d^3\mathbf{v} = v_m dv_m dv_\phi d\xi$. Además, dado que el integrando es par respecto a v_ϕ , (1.39) puede ser reescrita de la forma

$$\rho(\mathbf{x}) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{v_{\phi\max}} \int_{v_{m\min}}^{v_{m\max}} f_+(\varepsilon, L_z) v_m dv_m dv_\phi d\xi. \quad (1.40)$$

Para pasar a las variables ε y L_z se calcula el jacobiano

$$J = \frac{\partial(\varepsilon, L_z)}{\partial(v_\phi, v_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varepsilon}{\partial v_\phi} & \frac{\partial\varepsilon}{\partial v_m} \\ \frac{\partial L_z}{\partial v_\phi} & \frac{\partial L_z}{\partial v_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -v_\phi & -v_m \\ R & 0 \end{vmatrix} = Rv_m. \quad (1.41)$$

¹⁰De aquí en adelante, se utiliza la definición de la DF tal que $f d^6\mathbf{w}$ representa la masa total en el elemento $d^6\mathbf{w}$.

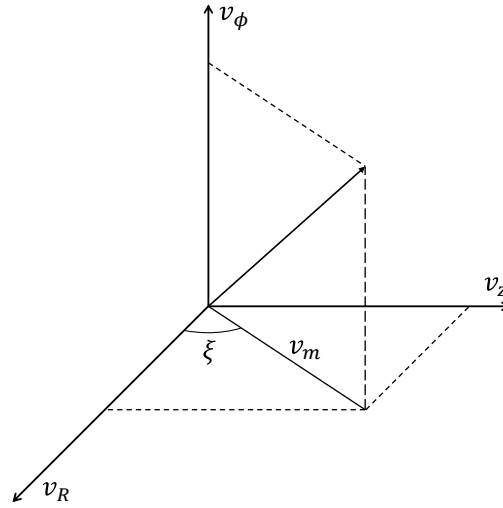


Figura 1.5: Espacio de las velocidades en coordenadas cilíndricas.

Entonces, $dv_m dv_\phi d\xi = J^{-1} d\varepsilon dL_z d\xi$ y por lo tanto, al integrar sobre ξ , la ecuación (1.40) se reduce a:

$$\rho = \frac{4\pi}{R} \int_{\varepsilon_{\min}}^{\varepsilon_{\max}} \left[\int_0^{L_{z\max}} f_+(\varepsilon, L_z) dL_z \right] d\varepsilon. \quad (1.42)$$

Los límites de (1.42) se escogen de acuerdo con relación $\varepsilon = \Psi - \frac{1}{2}(v_m^2 + L_z^2/R^2)$. Cuando $v_m = 0$, se obtiene $L_{z\max} = R\sqrt{2(\Psi - \varepsilon)}$. El valor mínimo de ε es 0 por definición, mientras que el máximo resulta ser Ψ , cuando $L_z = v_m = 0$. Con esto, la ecuación queda

$$\rho = \frac{4\pi}{R} \int_0^\Psi \left[\int_0^{R\sqrt{2(\Psi - \varepsilon)}} f_+(\varepsilon, L_z) dL_z \right] d\varepsilon. \quad (1.43)$$

Esta ecuación es la llamada **ecuación fundamental**, pues relaciona a f_+ , Ψ y ρ , y al solucionarla se conforma automáticamente el modelo autoconsistente. Como en el caso resuelto por Eddington [11], (1.43) es una ecuación integral de primera clase en donde la función desconocida f solo está presente dentro de la integral. Una característica usual de estas ecuaciones es que la función desconocida por lo general no es tan bien comportada como la función conocida fuera de la integral [8], en este caso ρ . Dejonghe [9] mostró varios ejemplos en los cuales una función de distribución discontinua puede generar una densidad suavemente distribuida. Hunter & Qian [23] dieron ejemplos en los cuales funciones de distribución con singularidades pueden producir densidades bien comportadas. Este comportamiento está presente en la solución de Eddington, en la cual son requeridas dos derivadas de la densidad para obtener f [11]. Además, existen fuertes evidencias de que los requerimientos necesarios para solucionar la ecuación (1.43) son más exigentes, o al menos eso es lo que reflejan los casos en los cuales se ha logrado obtener una solución analítica.

1.6.2. Sistemas planos

En el caso de sistemas planos, las estrellas están restringidas al plano $z = 0$, razón por la cual las dimensiones del espacio de fase se reducen a 4. De esta manera, la ecuación (1.39) tiene que ser modificada de la siguiente manera

$$\Sigma(\mathbf{x}) = \int d^2\mathbf{v} f_+(\varepsilon, L_z), \quad (1.44)$$

donde $\Sigma(\mathbf{x})$ es la densidad superficial de masa y $d^2\mathbf{v} = dv_r dv_\phi$. Ahora, dado que el integrando es par tanto en v_r como en v_ϕ , podemos escribir

$$\Sigma(\mathbf{x}) = 4 \int_0^{v_{\phi\max}} \int_0^{v_{r\max}} f_+(\varepsilon, L_z) dv_r dv_\phi. \quad (1.45)$$

Para pasar a las variables ε y L_z se calcula el jacobiano

$$J = \frac{\partial(\varepsilon, L_z)}{\partial(v_\phi, v_r)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varepsilon}{\partial v_\phi} & \frac{\partial\varepsilon}{\partial v_r} \\ \frac{\partial L_z}{\partial v_\phi} & \frac{\partial L_z}{\partial v_r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -v_\phi & -v_r \\ R & 0 \end{vmatrix} = Rv_r. \quad (1.46)$$

Dado que $\varepsilon = \Psi - \frac{1}{2}(v_r^2 + v_\phi^2) = \Psi - \frac{1}{2}(v_r^2 + L_z^2/R^2)$,¹¹ despejando v_r podemos escribir

$$Rv_r = \sqrt{2R^2(\Psi - \varepsilon) - L_z^2}. \quad (1.47)$$

Entonces, como $d^2\mathbf{v} = J^{-1}d\varepsilon dL_z$, escogiendo los límites de igual forma que en el caso tridimensional finalmente se llega a

$$\Sigma = 4 \int_0^\Psi \left[\int_0^{R\sqrt{2(\Psi-\varepsilon)}} \frac{f_+(\varepsilon, L_z)}{\sqrt{2R^2(\Psi - \varepsilon) - L_z^2}} dL_z \right] d\varepsilon. \quad (1.48)$$

La ecuación (1.48) es llamada la ecuación fundamental, para el caso de sistemas planos. Al igual que (1.43), una vez solucionada esta ecuación queda construido automáticamente el modelo autoconsistente. Los estudios de la ecuación (1.48) han sido comparativamente menores que en el caso de sistemas tridimensionales; los resultados más relevantes fueron hechos por Kalnajs [31], quien solucionó la ecuación asumiendo una forma particular para la función de distribución. Por último, cabe mencionar que Hunter & Qian [23] encontraron que es posible utilizar los métodos desarrollados para sistemas tridimensionales en el caso de sistemas planos, si se construye una pseudo-densidad volumétrica de masa de la forma

$$\hat{\rho}(\Psi, R) = \sqrt{2} \int_0^\Psi \frac{\Sigma(\Psi', R)}{\sqrt{\Psi - \Psi'}} d\Psi', \quad (1.49)$$

la cual tomaría el lugar de ρ en la ecuación (1.43). Aunque este hecho es un resultado útil, el cálculo analítico de (1.49) puede resultar bastante complicado para ciertas $\Sigma(\Psi, R)$.

¹¹Obviamente, en este caso Ψ representa el potencial relativo evaluado en $z = 0$.

1.7 El principio de máxima entropía

Una de las más importantes conclusiones de las secciones precedentes es que el número de configuraciones accesibles a un sistema sin colisiones es elevado, cada una caracterizada por una f_- y un estado de rotación diferente. La pregunta inmediata es ¿cuál es la causa que determina la preferencia por una configuración particular en un sistema dado? En principio, existen dos posibles explicaciones a ese hecho. (i) La configuración adoptada es consecuencia de un principio físico fundamental, de la misma forma que la distribución de velocidades de todo gas ideal finalmente adquiere la forma de la distribución de Maxwell-Boltzmann [46]. (ii) La configuración presente es el reflejo de las condiciones iniciales particulares que dieron inicio a la formación del sistema. Aunque estos dos argumentos en principio corresponden a diferentes argumentos, no son mutuamente excluyentes en el sentido que una vez se ha alcanzado la etapa de relajación, el sistema pierde la memoria de las condiciones iniciales [6]. Entonces, la pregunta fundamental puede ser formulada como ¿cuál de los estados accesibles representa un estado más probable que cualquier otra configuración?

Alrededor de 1890, J. W. Gibbs descubrió que las relaciones fundamentales entre las variables termodinámicas pueden ser obtenidas bajo la hipótesis de que la probabilidad de encontrar un sistema en cualquier elemento de volumen $d\tau$ de su espacio de fase es proporcional a $e^{-\beta H} d\tau$, donde β es un parámetro que él identificó como el inverso de la temperatura del sistema, y H es su Hamiltoniano [21]. Desde los tiempos de Gibbs ha habido innumerables intentos de explicar por qué funciona esta hipótesis, y después de años de debate, los científicos aún están lejos de ofrecer una respuesta satisfactoria. Sin embargo, es generalmente aceptado que la hipótesis de Gibbs puede ser derivada de un principio alternativo, **el principio de máxima entropía**: las relaciones termodinámicas de un sistema físico pueden ser obtenidas buscando la densidad de probabilidad en el espacio de fase, p , que maximice la entropía¹²

$$S \equiv - \int d\tau p \ln p + C, \quad (1.50)$$

sujeto a todas las ligaduras relevantes. ¿Será posible aplicar este principio a los sistemas estelares en consideración?

El espacio de fase de una galaxia de N estrellas es $6N$ -dimensional, y el $d\tau$ en la ecuación (1.50) se refiere a un elemento de este espacio de fase, en lugar de un elemento del espacio de fase de una sola estrella. Sin embargo, como fue discutido en la sección 1.3.1, es posible desprestigiar las correlaciones entre partículas de un sistema sin colisiones, de modo que la probabilidad $p d\tau$ asociada con un rango de configuraciones en el espacio de fase $6N$ -dimensional de toda la galaxia es justamente el producto de los factores $f d^6\mathbf{w}$ asociados con estrellas individuales. En estas circunstancias, la ecuación (1.50)

¹²La constante C debe escogerse de tal forma que se cumpla la tercera ley de la termodinámica.

se convierte en

$$S = -N \int d^6 \mathbf{w} f \ln f + C. \quad (1.51)$$

El siguiente paso consiste en buscar la forma de f , sujeta a las características conocidas del sistema. Por comodidad reescribimos (1.51) como

$$S = -N \int d^6 \mathbf{w} f [\ln(f/f_p) - 1], \quad (1.52)$$

donde f_p es una constante que resulta de hacer $C = N(1 + \ln f_p)$ en la ecuación (1.51). Ahora, la parte par de la función de distribución está relacionada con la densidad a través de

$$\rho = \int d^3 \mathbf{v} f_+(\varepsilon, L_z) = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{v} (f^+ + f^-), \quad (1.53)$$

siendo $f^\pm = f(\varepsilon, \pm L_z)$. Entonces, tomando la variación de (1.53) se obtiene que

$$\delta f^+ = -\delta f^-, \quad (1.54)$$

debido a que $\delta \rho = 0$. La integral de (1.52) respecto a v_ϕ se puede dividir en 2 partes y reescribir como:

$$\begin{aligned} & \int_{-2\sqrt{\Psi-\varepsilon}}^0 dv_\phi f [\ln(f/f_p) - 1] + \int_0^{2\sqrt{\Psi-\varepsilon}} dv_\phi f [\ln(f/f_p) - 1] \\ &= \int_0^{2\sqrt{\Psi-\varepsilon}} dv_\phi \{ f^+ [\ln(f^+/f_p) - 1] + f^- [\ln(f^-/f_p) - 1] \}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Tomando la variación de la entropía, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S = -N \int d^6 \mathbf{w} \{ & \delta f^+ \ln(f^+/f_p) + \delta f^- \ln(f^-/f_p) - f^+ \delta \ln(f^+/f_p) \\ & + f^- \delta \ln(f^-/f_p) - \cancel{\delta f^+} - \cancel{\delta f^-} \}, \end{aligned} \quad (1.56a)$$

$$\begin{aligned} = -N \int d^6 \mathbf{w} \left\{ & \delta f^+ \ln(f^+/f_p) + \delta f^- \ln(f^-/f_p) - \cancel{f^+ \frac{f_p \delta f^+}{f^+}} \\ & + \cancel{f^- \frac{f_p \delta f^-}{f^-}} \right\}, \end{aligned} \quad (1.56b)$$

$$= -N \int d^6 \mathbf{w} \delta f^+ \ln(f^+/f^-), \quad (1.56c)$$

donde la integral respecto a v_ϕ va desde 0 hasta $2\sqrt{\Psi - \varepsilon}$. Entonces, como buscamos un extremal para la entropía, la ecuación que se debe solucionar es

$$\int d^6 \mathbf{w} \delta f^+ \ln(f^+/f^-) = 0. \quad (1.57)$$

Por otra parte, para un sistema con momento angular total $L_{z\text{total}}$, por la ecuación (1.36c) se cumple que

$$L_{z\text{total}} = \frac{1}{2} \int d^6\mathbf{w} (f^+ - f^-) L_z. \quad (1.58)$$

Tomando la variación de (1.58) se llega a la relación

$$\int d^6\mathbf{w} \delta f^+ L_z = 0, \quad (1.59)$$

debido a que $\delta L_{z\text{total}} = 0$. Las ecuaciones (1.57) y (1.59) constituyen un problema variacional con ligaduras. La técnica comúnmente utilizado para solucionar este tipo de problemas es el método de los multiplicadores de Lagrange [1]. En este caso, el multiplicador de lagrange α se escoge de tal forma que se satisface la ecuación

$$\ln \left(\frac{f^+}{f^-} \right) - \alpha L_z = 0, \quad (1.60)$$

de manera que

$$f^+ = f^- e^{\alpha L_z}. \quad (1.61)$$

Finalmente, por la ecuación (1.33) se deduce que

$$f_-(\varepsilon, L_z) = f_+(\varepsilon, L_z) \frac{e^{\alpha L_z} - 1}{e^{\alpha L_z} + 1}, \quad (1.62)$$

y por lo tanto, la función de distribución total queda

$$f(\varepsilon, L_z) = \frac{2f_+(\varepsilon, L_z)}{1 + e^{-\alpha L_z}}. \quad (1.63)$$

Este resultado fue obtenido por primera vez por Dejonghe [9], y representa una herramienta muy útil en la construcción de modelos autoconsistentes puesto que, una vez hallado f_+ , permite encontrar la DF que representa el estado más probable de rotación. Además, es aplicable tanto a sistemas tridimensionales como a sistemas planos debido a que en su formulación no se utiliza la ecuación fundamental y ninguna integral se desarrolla explícitamente.

Puede verse que $|f_-(\varepsilon, L_z)| \leq f_+(\varepsilon, L_z)$, garantizando que la función de distribución total sea siempre positiva. El sistema está en un estado sin rotación cuando $\alpha = 0$, y rotación máxima cuando $\alpha \rightarrow \pm\infty$. Para $\alpha \rightarrow +\infty$, la rotación es en sentido antihorario y $f(\varepsilon, L_z) = [1 + \text{sign}(L_z)]f_+(\varepsilon, L_z)$. Para $\alpha \rightarrow -\infty$, la rotación se da en sentido horario y $f(\varepsilon, L_z) = [1 - \text{sign}(L_z)]f_+(\varepsilon, L_z)$. Como se observa, el parámetro α define las características rotacionales del sistema.

CAPÍTULO 2

FORMALISMO

2.1 Introducción

Se han desarrollado varios métodos analíticos para solucionar la ecuación fundamental (1.43) en el caso de sistemas tridimensionales y (1.48) en el caso de sistemas planos. Los más relevantes son los resultados de Fricke (ver apéndice A.1) y los resultados de Jiang & Ossipkov (ver apéndice A.2), los cuales, a pesar de ser métodos directos, asumen una dependencia particular entre la densidad y el potencial y, por esto, solo pueden ser aplicados a una variedad limitada de modelos. Por otra parte, se han utilizado otras técnicas para solucionar la ecuación integral mediante el uso de transformadas pero las dificultades son aún mayores. La motivación principal de este capítulo consiste en formular un método más general que el sugerido por Jiang & Ossipkov y que reproduzca los resultados obtenidos por Fricke.

El método de Jiang & Ossipkov, a pesar de representar un resultado importante, asume una dependencia de la DF solamente a través de potencias enteras del momento angular y, debido a esto, no reproduce estrictamente los resultados de Fricke. Además, no puede ser aplicado directamente al caso de sistemas planos, debido a que en dicho caso la ecuación fundamental no se reduce a la ecuación integral de Abel. Por esta razón, resulta necesario la formulación de un método mucho más general, que pueda ser aplicado a una variedad más amplia de sistemas. En este capítulo se presentará un nuevo formalismo, desarrollado con herramientas de cálculo fraccional, que puede ser empleado en la obtención de funciones de distribución, tanto para sistemas tridimensionales como para sistemas planos, y generaliza muchos de los métodos mencionados anteriormente. En la sección 2.2 se desarrollará el análisis para sistemas tridimensionales; en la sección 2.3 se estudiarán sistemas planos, y por último, en la sección 2.4 se discutirán los resultados obtenidos y se planteará una posible interpretación.

2.2 Sistemas tridimensionales

Para poder solucionar la ecuación (1.43), es necesario encontrar algún tipo de relación funcional entre la densidad de masa y el potencial gravitacional. Debido a esto, escribimos la ecuación fundamental como

$$\rho(R, \Psi) = \frac{4\pi}{R} \int_0^\Psi \left[\int_0^{R\sqrt{2(\Psi-\varepsilon)}} f_+(\varepsilon, L_z) dL_z \right] d\varepsilon. \quad (2.1)$$

Ahora, analizaremos el problema detenidamente, suponiendo varios tipos de dependencias de la DF con respecto a la energía relativa ε y el momento angular L_z .

2.2.1. DFs de la forma $\sum_n L_z^{2\alpha_n} h_n(\varepsilon)$

Para generalizar el método de Jiang & Ossipkov, tenemos en cuenta que la DF puede depender incluso de potencias del momento angular que no sean enteras. De esta forma, suponemos que la función de distribución puede ser escrita como

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_n L_z^{2\alpha_n} h_n(\varepsilon), \quad (2.2)$$

donde el 2 en el exponente de L_z garantiza que la función sea par respecto a L_z y $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Ahora, utilizando (2.2) en (2.1) e integrando respecto a L_z se obtiene

$$\rho(R, \Psi) = \sum_n \frac{4\pi 2^{\alpha_n+1/2} R^{2\alpha_n}}{2\alpha_n + 1} \int_0^\Psi h_n(\varepsilon) (\Psi - \varepsilon)^{\alpha_n+1/2} d\varepsilon, \quad \text{para } \alpha_n > -1/2, \quad (2.3)$$

mientras que si $\alpha_n \leq -1/2$ la integral diverge. Debido a esto, suponemos que la densidad se puede escribir en la forma

$$\rho(R, \Psi) = \sum_n R^{2\alpha_n} \tilde{\rho}_n(\Psi), \quad \text{para } \alpha_n > -1/2. \quad (2.4)$$

Comparando término a término las ecuaciones (2.3) y (2.4) se llega a la relación

$$\tilde{\rho}_n(\Psi) = \frac{4\pi 2^{\alpha_n+1/2}}{2\alpha_n + 1} \int_0^\Psi h_n(\varepsilon) (\Psi - \varepsilon)^{\alpha_n+1/2} d\varepsilon. \quad (2.5)$$

En este punto, se introduce el operador de derivada fraccional D_x^j , que representa una derivada de orden j , respecto a x , para cualquier valor real de j (ver apéndice A.3). Asumiendo que $(D_\Psi^j \tilde{\rho}_n(\Psi))_{\Psi=0} = 0$ para todo $j \in (0, \alpha_n + 1/2)$, entonces, aplicando la derivada fraccional de orden $\alpha_n + 1/2$ a la ecuación (2.5), ésta adquiere la forma

$$D_\Psi^{\alpha_n+1/2} \tilde{\rho}_n(\Psi) = \pi 2^{\alpha_n+3/2} \Gamma(\alpha_n + 1/2) \int_0^\Psi h_n(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (2.6)$$

Esta ecuación integral es un poco mas sencilla y se puede invertir fácilmente si se deriva una vez mas respecto a Ψ :

$$h_n(\varepsilon) = \frac{1}{\pi 2^{\alpha_n+3/2} \Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_{\Psi}^{\alpha_n+3/2} \tilde{\rho}_n(\Psi) \Big|_{\Psi=\varepsilon}, \quad (2.7)$$

por lo tanto, la función de distribución queda

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_n \frac{L_z^{2\alpha_n}}{\pi 2^{\alpha_n+3/2} \Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_{\Psi}^{\alpha_n+3/2} \tilde{\rho}_n(\Psi) \Big|_{\Psi=\varepsilon}. \quad (2.8)$$

Cuando $\alpha_n \in \mathbb{N}$, utilizando la definición del operador de Riemann-Liouville dada por (A.10), la ecuación (2.8) coincide con resultado obtenido por Jiang & Ossipkov [28].

Como caso particular, supongamos que $\tilde{\rho}_n(\Psi)$ puede expresarse como potencias de Ψ en la forma

$$\tilde{\rho}_n(\Psi) = \sum_k A_{nk} \Psi^{\beta_k}. \quad (2.9)$$

Entonces:

$$D_{\Psi}^{\alpha_n+3/2} \sum_k A_{nk} \Psi^{\beta_k} = \sum_k A_{nk} D_{\Psi}^{\alpha_n+3/2} \Psi^{\beta_k} = \sum_k \frac{A_{nk} \Gamma(\beta_k + 1)}{\Gamma(\beta_k - \alpha_n - 1/2)} \Psi^{\beta_k - \alpha_n - 3/2}, \quad (2.10)$$

para $\beta_k > n + 1/2$, y la función de distribución queda:

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_n \sum_k \frac{A_{nk} \Gamma(\beta_k + 1)}{\pi 2^{\alpha_n+3/2} \Gamma(\alpha_n + 1/2) \Gamma(\beta_k - \alpha_n - 1/2)} L_z^{2\alpha_n} \varepsilon^{\beta_k - \alpha_n - 3/2}. \quad (2.11)$$

Este resultado es totalmente equivalente la solución de Fricke, para valores reales de α_n , y por lo tanto puede ser considerado como una generalización.

2.2.2. DFs de la forma $\sum_n L_z^{2\alpha_n} g_n(Q)$

Se puede obtener una expresión mas general para la función de distribución, si asumimos que ésta depende de $Q = \varepsilon - L_z^2/(2R_a^2)$ y L_z , donde R_a es un radio de escala. Suponemos que el sistema solo tiene estrellas con $Q > 0$, de forma que $f(Q, L_z) = 0$ para $Q \leq 0$. Obviamente, $Q \rightarrow \varepsilon$ cuando $R_a \rightarrow \infty$. Haciendo el cambio de variables a $dL_z dQ$, la ecuación fundamental se puede escribir como

$$\rho(R, \Psi) = \frac{4\pi}{R} \int_0^{\Psi} \left[\int_0^{R\sqrt{2(\Psi-Q)/(1+R^2/R_a^2)}} f_+(Q, L_z) dL_z \right] dQ, \quad (2.12)$$

donde $f_+(Q, L_z) = [f(Q, L_z) + f(Q, -L_z)]/2$. Naturalmente, $f_+(Q, L_z)$ es la parte par de $f(Q, L_z)$. Siguiendo un procedimiento similar al efectuado en la sección 2.2.1, suponemos que la función de distribución se puede escribir como

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_n L_z^{2\alpha_n} g_n(Q), \quad (2.13)$$

siendo α_n un número real. Entonces, bajo esta suposición, se realiza la integral (2.12) obteniendo

$$\rho(R, \Psi) = \sum_n \frac{4\pi 2^{\alpha_n+1/2} R^{2\alpha_n}}{(2\alpha_n + 1)(1 + R^2/R_a^2)^{\alpha_n+1/2}} \int_0^\Psi g_n(Q) (\Psi - Q)^{\alpha_n+1/2} dQ, \quad (2.14)$$

cuando $\alpha_n > -1/2$. Ahora, suponemos que la densidad se puede escribir en la forma

$$\rho(R, \Psi) = \sum_n \frac{R^{2\alpha_n} \tilde{\rho}_n(\Psi)}{(1 + R^2/R_a^2)^{\alpha_n+1/2}}, \quad \text{para } \alpha_n > -1/2, \quad (2.15)$$

y por comparación de las ecuaciones (2.14) y (2.15), se obtiene

$$\tilde{\rho}_n(\Psi) = \frac{4\pi 2^{\alpha_n+1/2}}{2\alpha_n + 1} \int_0^\Psi g_n(Q) (\Psi - Q)^{\alpha_n+1/2} dQ. \quad (2.16)$$

Esta ecuación es equivalente a (2.5) de modo que, realizando el mismo procedimiento, se llega a

$$g_n(Q) = \frac{1}{\pi 2^{\alpha_n+3/2} \Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_\Psi^{\alpha_n+3/2} \tilde{\rho}_n(\Psi) \Big|_{\Psi=Q}, \quad (2.17)$$

y la función de distribución queda

$$f_+(Q, L_z) = \sum_n \frac{L_z^{2\alpha_n}}{\pi 2^{\alpha_n+3/2} \Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_\Psi^{\alpha_n+3/2} \tilde{\rho}_n(\Psi) \Big|_{\Psi=Q}. \quad (2.18)$$

Sumando sobre todos los valores posibles de R_a , se obtiene una expresión que generaliza a (2.8):

$$f_+(Q, L_z) = \sum_a \sum_n \frac{L_z^{2\alpha_n}}{\pi 2^{\alpha_n+3/2} \Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_\Psi^{\alpha_n+3/2} \tilde{\rho}_n(\Psi) \Big|_{\Psi=Q}, \quad (2.19)$$

correspondiente a una densidad de la forma

$$\rho(R, \Psi) = \sum_a \sum_n \frac{R^{2\alpha_n} \tilde{\rho}_n(\Psi)}{(1 + R^2/R_a^2)^{\alpha_n+1/2}}, \quad (2.20)$$

con $R_a > 0$ y $\alpha_n > -1/2$.

2.2.3. Modelos con potencial gravitacional divergente

En el caso de un sistema cuyo potencial gravitacional no tiene límite superior, es decir, cuando el potencial tiende a ∞ a largas distancias, no es posible definir de manera correcta el potencial relativo Ψ y la energía relativa ε , debido a que la energía de escape del sistema es ∞ . Entonces, al escribir la ecuación fundamental en términos de E y Φ (en lugar de ε y Ψ), se obtiene

$$\rho(R, \Phi) = \frac{4\pi}{R} \int_{\Phi}^{\infty} \left[\int_0^{R\sqrt{2(E-\Phi)}} f_+(E, L_z) dL_z \right] dE, \quad (2.21)$$

donde $f_+(E, L_z) = [f(E, L_z) + f(E, -L_z)]/2$. Ahora, supongamos que la función de distribución puede ser escrita como

$$f_+(E, L_z) = \sum_n L_z^{2\alpha_n} h_n(E), \quad \alpha_n > -1/2, \quad (2.22)$$

y que la densidad se puede expresar como

$$\rho(R, \Phi) = \sum_n R^{2\alpha_n} \tilde{\rho}_n(\Phi), \quad \alpha_n > -1/2. \quad (2.23)$$

Entonces, integrando respecto a L_z se llega a la relación

$$\tilde{\rho}_n(\Phi) = \frac{4\pi 2^{\alpha_n+1/2}}{2\alpha_n + 1} \int_{\Phi}^{\infty} h_n(E) (E - \Phi)^{\alpha_n+1/2} dE. \quad (2.24)$$

Asumiendo que

$$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} D_{\Phi}^j \tilde{\rho}_n(\Phi) = 0 \quad (2.25)$$

para todo $j \in (0, \alpha_n + 1/2)$, entonces,

$$D_{\Phi}^{\alpha_n+1/2} \tilde{\rho}_n(\Phi) = \pi(-1)^{\alpha_n+1/2} 2^{\alpha_n+3/2} \Gamma(\alpha_n + 1/2) \int_{\Phi}^{\infty} h_n(E) dE, \quad (2.26)$$

y derivando una vez mas se llega a

$$h_n(E) = \frac{(-2)^{-(\alpha_n+3/2)}}{\pi \Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_{\Phi}^{\alpha_n+3/2} \tilde{\rho}_n(\Phi) \Big|_{\Phi=E}. \quad (2.27)$$

Con esto, la función de distribución queda

$$f_+(E, L_z) = \sum_n \frac{(-2)^{-(\alpha_n+3/2)} L_z^{2\alpha_n}}{\pi \Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_{\Phi}^{\alpha_n+3/2} \tilde{\rho}_n(\Phi) \Big|_{\Phi=E}, \quad \alpha_n > -1/2. \quad (2.28)$$

Ahora, si asumimos que la densidad se puede expresar como

$$\rho(R, \Phi) = \sum_n \frac{R^{2\alpha_n} \tilde{\rho}_n(\Phi)}{(1 + R^2/R_a^2)^{\alpha_n+1/2}}, \quad \alpha_n > -1/2, \quad (2.29)$$

entonces, siguiendo un procedimiento análogo a la sección 2.2.2, la DF correspondiente sería

$$f_+(Q, L_z) = \sum_n \frac{(-2)^{-(\alpha_n+3/2)} L_z^{2\alpha_n}}{\pi\Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_\Phi^{\alpha_n+3/2} \tilde{\rho}_n(\Phi) \Big|_{\Phi=Q}, \quad \alpha_n > -1/2, \quad (2.30)$$

con $Q = E + L_z^2/(2R_a^2)$ y suponiendo que se satisface (2.25). Sumando sobre todos los valores posibles de R_a , se obtiene la expresión general

$$f_+(Q, L_z) = \sum_a \sum_n \frac{(-2)^{-(\alpha_n+3/2)} L_z^{2\alpha_n}}{\pi\Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_\Phi^{\alpha_n+3/2} \tilde{\rho}_n(\Phi) \Big|_{\Phi=Q}, \quad (2.31)$$

correspondiente a una densidad de la forma

$$\rho(R, \Phi) = \sum_a \sum_n \frac{R^{2\alpha_n} \tilde{\rho}_n(\Phi)}{(1 + R^2/R_a^2)^{\alpha_n+1/2}}, \quad (2.32)$$

con $R_a > 0$ y $\alpha_n > -1/2$.

2.3 Sistemas planos

Este mismo formalismo puede ser empleado directamente en el caso de sistemas planos, caso que no ocurría con el método de Jiang & Ossipkov, pues la ecuación fundamental no podía ser resuelta utilizando la ecuación integral de Abel. Por comodidad, reescribimos la ecuación fundamental (1.48) como

$$\Sigma(R, \Psi) = 4 \int_0^\Psi \left[\int_0^b \frac{f_+(\varepsilon, L_z) dL_z}{\sqrt{b^2 - L_z^2}} \right] d\varepsilon, \quad (2.33)$$

donde $b = R\sqrt{2(\Psi - \varepsilon)}$. Ahora, se procederá de forma similar al caso tridimensional, encontrando la forma general de la DF como función de ε y L_z . Así mismo, el resultado se generalizará asumiendo que la DF depende de Q y L_z y por último, se analizará el caso en el que el potencial gravitacional no tiene límite superior.

2.3.1. DFs de la forma $\sum_n L_z^{2\alpha_n} h_n(\varepsilon)$

Al igual que en el caso tridimensional, suponemos que la función de distribución puede ser escrita como

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_n L_z^{2\alpha_n} h_n(\varepsilon), \quad (2.34)$$

donde el 2 en el exponente de L_z garantiza que la función sea par respecto a L_z , y α_n puede tomar cualquier valor real. Ahora, utilizando (2.34) en (2.33) e integrando respecto a L_z se obtiene

$$\Sigma(R, \Psi) = \sum_n \frac{\sqrt{\pi} R^{2\alpha_n} 2^{\alpha_n+1} \Gamma(\alpha_n + 1/2)}{\Gamma(\alpha_n + 1)} \int_0^\Psi (\Psi - \varepsilon)^{\alpha_n} h_n(\varepsilon) d\varepsilon, \quad \alpha_n > -1/2. \quad (2.35)$$

Suponemos entonces que la densidad superficial es de la forma

$$\Sigma(R, \Psi) = \sum_n R^{2\alpha_n} \sigma_n(\Psi), \quad \alpha_n > -1/2, \quad (2.36)$$

y comparando término a término se llega a la siguiente relación:

$$\sigma_n(\Psi) = \frac{\sqrt{\pi} 2^{\alpha_n+1} \Gamma(\alpha_n + 1/2)}{\Gamma(\alpha_n + 1)} \int_0^\Psi (\Psi - \varepsilon)^{\alpha_n} h_n(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (2.37)$$

Se asume que $(D_\Psi^j \sigma_n(\Psi))_{\Psi=0} = 0$ para todo $j \in (0, \alpha_n)$. Entonces, aplicando derivada fraccional de orden α_n a la ecuación (2.37), esta se convierte en

$$D_\Psi^{\alpha_n} \sigma_n(\Psi) = \sqrt{\pi} 2^{\alpha_n+1} \Gamma(\alpha_n + 1/2) \int_0^\Psi h_n(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (2.38)$$

Esta ecuación, similar a (2.6), se puede invertir fácilmente si se deriva una vez mas:

$$h_n(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{\alpha_n+1} \Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_\Psi^{\alpha_n+1} \sigma_n(\Psi) \Big|_{\Psi=\varepsilon}, \quad (2.39)$$

con lo que la función de distribución queda

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_n \frac{L_z^{2\alpha_n}}{\sqrt{\pi} 2^{\alpha_n+1} \Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_\Psi^{\alpha_n+1} \sigma_n(\Psi) \Big|_{\Psi=\varepsilon}. \quad (2.40)$$

Este resultado corresponde al método desarrollado por Kalnajs [31] (para $\alpha_n = 0$), trabajando en un marco de referencia apropiado.

Ahora, si suponemos que $\sigma_n(\Psi)$ puede expresarse como una suma de potencias de Ψ en la forma

$$\sigma_n(\Psi) = \sum_k A_{nk} \Psi^{\beta_k}. \quad (2.41)$$

Entonces:

$$D_\Psi^{\alpha_n+1} \sum_k A_{nk} \Psi^{\beta_k} = \sum_k A_{nk} D_\Psi^{\alpha_n+1} \Psi^{\beta_k} = \sum_k \frac{A_{nk} \Gamma(\beta_k + 1)}{\Gamma(\beta_k - \alpha_n)} \Psi^{\beta_k - \alpha_n - 1}, \quad (2.42)$$

y la función de distribución, en este caso, queda:

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_n \sum_k \frac{A_{nk} \Gamma(\beta_k + 1)}{\sqrt{\pi} 2^{\alpha_n+1} \Gamma(\alpha_n + 1/2) \Gamma(\beta_k - \alpha_n)} L_z^{2\alpha_n} \varepsilon^{\beta_k - \alpha_n - 1}. \quad (2.43)$$

Este resultado corresponde al caso análogo de la expansión de Fricke, cuando los sistemas en estudio son planos, y puede ser verificado calculando la pseudo-densidad volumétrica de la componente $R^{2\alpha_n} \Psi^{\beta_k}$ y tomando la componente de Fricke, del caso tridimensional.

2.3.2. DFs de la forma $\sum_n L_z^{\alpha_n} g_n(Q)$

Asumiendo que la función de distribución depende de $Q = \varepsilon - L_z^2/(2R_a^2)$, en lugar de ε , es posible llegar a una generalización. De esta manera, el resultado de la sección 2.3.1 correspondería a tomar el límite cuando $R_a \rightarrow \infty$. Suponemos que el sistema solo tiene estrellas con $Q > 0$, de tal forma que $f(Q, L_z) = 0$ para $Q \leq 0$. Haciendo el cambio de variables a L_z y a Q , la ecuación fundamental puede ser escrita como

$$\Sigma(R, \Psi) = 4 \int_0^\Psi \left[\int_0^b \frac{f_+(Q, L_z) dL_z}{\sqrt{b^2 - L_z^2}} \right] dQ, \quad (2.44)$$

donde $b = R\sqrt{2(\Psi - Q)/(1 + R^2/R_a^2)}$. Entonces, suponemos que la función de distribución puede ser escrita como

$$f_+(Q, L_z) = \sum_n L_z^{2\alpha_n} g_n(Q), \quad (2.45)$$

donde α_n puede tomar cualquier valor real. Ahora, reemplazamos (2.45) en (2.44) y haciendo la integral respecto a L_z se llega a

$$\Sigma(R, \Psi) = \sum_n \frac{\sqrt{\pi} R^{2\alpha_n} 2^{\alpha_n+1} \Gamma(\alpha_n + 1/2)}{\Gamma(\alpha_n + 1)(1 + R^2/R_a^2)^{\alpha_n}} \int_0^\Psi (\Psi - Q)^{\alpha_n} g_n(Q) dQ, \quad \alpha_n > -1/2. \quad (2.46)$$

Debido a esto, suponemos que la densidad superficial es de la forma

$$\Sigma(R, \Psi) = \sum_n \frac{R^{2\alpha_n} \sigma_n(\Psi)}{(1 + R^2/R_a^2)^{\alpha_n}}, \quad \alpha_n > -1/2, \quad (2.47)$$

y comparando término a término con la ecuación (2.46) se llega a la siguiente relación:

$$\sigma_n(\Psi) = \frac{\sqrt{\pi} 2^{\alpha_n+1} \Gamma(\alpha_n + 1/2)}{\Gamma(\alpha_n + 1)} \int_0^\Psi (\Psi - Q)^{\alpha_n} g_n(Q) dQ. \quad (2.48)$$

Asumiendo que $(D_\Psi^j \sigma_n(\Psi))_{\Psi=0} = 0$ para todo $j \in (0, \alpha_n)$, se aplica la derivada fraccional de orden α_n y la ecuación (2.48) se convierte en

$$D_\Psi^{\alpha_n} \sigma_n(\Psi) = \sqrt{\pi} 2^{\alpha_n+1} \Gamma(\alpha_n + 1/2) \int_0^\Psi g_n(Q) dQ. \quad (2.49)$$

Derivamos una vez mas para obtener:

$$g_n(Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{\alpha_n+1} \Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_\Psi^{\alpha_n+1} \sigma_n(\Psi) \Big|_{\Psi=Q}, \quad (2.50)$$

y la función de distribución queda

$$f_+(Q, L_z) = \sum_n \frac{L_z^{2\alpha_n}}{\sqrt{\pi} 2^{\alpha_n+1} \Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_\Psi^{\alpha_n+1} \sigma_n(\Psi) \Big|_{\Psi=Q}. \quad (2.51)$$

Al sumar sobre todos los valores posibles de R_a , se obtiene la siguiente expresión general para la función de distribución:

$$f_+(Q, L_z) = \sum_a \sum_n \frac{L_z^{2\alpha_n}}{\sqrt{\pi} 2^{\alpha_n+1} \Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_{\Psi}^{\alpha_n+1} \sigma_n(\Psi) \Big|_{\Psi=Q}, \quad (2.52)$$

correspondiente a una densidad superficial de la forma

$$\Sigma(R, \Psi) = \sum_a \sum_n \frac{R^{2\alpha_n} \sigma_n(\Psi)}{(1 + R^2/R_a^2)^{\alpha_n}}, \quad (2.53)$$

con $R_a > 0$ y $\alpha_n > -1/2$.

2.3.3. Modelos con potencial gravitacional divergente

Cuando el potencial gravitacional no tiene un límite superior, la energía de escape del sistema tiende a ∞ y por esto, no se pueden definir apropiadamente la energía relativa ε y el potencial relativo Ψ . La ecuación fundamental en este caso se puede escribir en términos de E y Φ como

$$\Sigma(R, \Phi) = 4 \int_{\Phi}^{\infty} \left[\int_0^b \frac{f_+(E, L_z) dL_z}{\sqrt{b^2 - L_z^2}} \right] dE, \quad (2.54)$$

donde $b = R\sqrt{2(E - \Phi)}$. Si suponemos que la función de distribución tiene la forma

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_n L_z^{2\alpha_n} h_n(E), \quad \alpha_n > -1/2, \quad (2.55)$$

y que la densidad se puede expresar como

$$\Sigma(R, \Phi) = \sum_n R^{2\alpha_n} \sigma_n(\Phi), \quad \alpha_n > -1/2, \quad (2.56)$$

entonces, al integrar respecto a L_z se llega a la relación

$$\sigma_n(\Phi) = \frac{\sqrt{\pi} 2^{\alpha_n+1} \Gamma(\alpha_n + 1/2)}{\Gamma(\alpha_n + 1)} \int_{\Phi}^{\infty} (E - \Phi)^{\alpha_n} h_n(E) dE. \quad (2.57)$$

Asumiendo que

$$\lim_{\Phi \rightarrow \infty} D_{\Phi}^j \sigma_n(\Phi) = 0 \quad (2.58)$$

para todo $j \in (0, \alpha_n)$, entonces,

$$D_{\Phi}^{\alpha_n} \sigma_n(\Phi) = \sqrt{\pi} (-1)^{\alpha_n} 2^{\alpha_n+1} \Gamma(\alpha_n + 1/2) \int_{\Phi}^{\infty} h_n(E) dE. \quad (2.59)$$

Al derivar una vez mas se llega a

$$h_n(E) = \frac{(-2)^{-(\alpha_n+1)}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_{\Phi}^{\alpha_n+1} \sigma_n(\Phi)|_{\Phi=E}. \quad (2.60)$$

Con esto, la función de distribución queda

$$f_+(E, L_z) = \sum_n \frac{(-2)^{-(\alpha_n+1)} L_z^{2\alpha_n}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_{\Phi}^{\alpha_n+1} \sigma_n(\Phi)|_{\Phi=E}, \quad \alpha_n > -1/2. \quad (2.61)$$

Ahora, es posible generalizar el resultado suponiendo que la DF depende de E a través de $Q = E + L_z^2/(2R_a^2)$. Realizando un procedimiento similar al planteado en la sección 2.3.2, se concluye que a una densidad superficial de la forma

$$\Sigma(R, \Phi) = \sum_n \frac{R^{2\alpha_n} \sigma_n(\Phi)}{(1 + R^2/R_a^2)^{\alpha_n}}, \quad (2.62)$$

le corresponde una DF de la forma

$$f_+(Q, L_z) = \sum_n \frac{(-2)^{-(\alpha_n+1)} L_z^{2\alpha_n}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_{\Phi}^{\alpha_n+1} \sigma_n(\Phi)|_{\Phi=Q}, \quad (2.63)$$

con $\alpha_n > -1/2$ y suponiendo que se satisface la condición (2.58). Sumando sobre todos los valores posibles de R_a , se obtiene la expresión general

$$f_+(Q, L_z) = \sum_a \sum_n \frac{(-2)^{-(\alpha_n+1)} L_z^{2\alpha_n}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha_n + 1/2)} D_{\Phi}^{\alpha_n+1} \sigma_n(\Phi)|_{\Phi=Q}, \quad (2.64)$$

correspondiente a una densidad de la forma

$$\Sigma(R, \Phi) = \sum_a \sum_n \frac{R^{2\alpha_n} \sigma_n(\Phi)}{(1 + R^2/R_a^2)^{\alpha_n+1/2}}, \quad (2.65)$$

con $R_a > 0$ y $\alpha_n > -1/2$.

2.4 Discusión

A diferencia de los métodos que emplean técnicas de transformadas, este método no requiere que la densidad tenga una continuación analítica para valores complejos de los argumentos, lo cual constituye la principal debilidad de tales técnicas, aparte de su complejidad matemática. Además, puede ser considerado como una generalización de varios resultados existentes: la expansión de Fricke, el método de Kalnajs y el método de Jiang & Ossipkov, y dado que puede ser aplicado a una variedad mas amplia de

modelos, representa una herramienta fuerte y muy valiosa, en la construcción de modelos autoconsistentes.

Por otra parte, esta solución muestra un posible vínculo con la rama de las matemáticas conocida como geometría fractal, como consecuencia del uso de derivadas fraccionales en el cálculo de la función de distribución. Se ha demostrado, por ejemplo, que la derivada fraccional de una función ordinaria da como resultado una función fractal [55]. Tales funciones describen objetos geométricos cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. Esto no es algo totalmente nuevo, pues muchos sistemas complejos en la naturaleza obedecen a este comportamiento particular. En efecto, la distribución de estrellas en galaxias irregulares ha sido modelada satisfactoriamente mediante fractales (ver por ejemplo el texto de Mandelbrot, *“The fractal geometry of nature”* [40]). Aunque la relación entre el cálculo fraccional y la geometría fractal aún no está del todo clara, en el momento es un área de investigación activa y existe evidencia matemática de una conexión a nivel fundamental [38, 56].

En el caso de sistemas estelares axialmente simétricos, la conexión al parecer se da no solo con la distribución de estrellas en el espacio, sino con la distribución de las mismas en el espacio de fase. ¿Será posible modelar sistemas complejos mediante el uso de geometría fractal, en el espacio de posiciones y velocidades? Esto queda como una pregunta abierta, pues en el contexto científico aún no se han propuesto este tipo de modelos en ningún sistema conocido. Sería interesante, por ejemplo, encontrar tales modelos para estudiar la evolución de sistemas en el tiempo, bajo diferentes tipos de interacciones.

CAPÍTULO 3

APLICACIONES

3.1 Introducción

En este capítulo se mostrarán algunas aplicaciones de interés, utilizando el formalismo introducido en el capítulo 2. En la sección 3.2 se estudiará el caso correspondiente al modelo logarítmico de Binney, el cual es un modelo tridimensional y por lo tanto se utilizarán las técnicas desarrolladas en la sección 2.2. En la sección 3.3 se estudiará el disco de Mestel, el cual es un modelo plano y se adapta a las técnicas introducidas en la sección 2.3. En la sección 3.4 se mostrará el caso de los discos generalizados de Kalnajs, encontrando las DFs correspondientes a los 4 primeros modelos. Finalmente en la sección 3.5, se formulará una nueva familia de discos y se estudiarán sus propiedades básicas: potencial gravitacional, densidad superficial, curvas de rotación y funciones de distribución respectivas.

3.2 Modelo logarítmico de Binney

El modelo logarítmico de Binney [6] tiene masa infinita y su potencial gravitacional es de la forma

$$\Phi(R, z) = \frac{1}{2}v_0^2 \ln \left(1 + R^2 + \frac{z^2}{q^2} \right), \quad (3.1)$$

donde v_0 es una constante que representa la velocidad circular en el plano ecuatorial a largas distancias, y q es una constante que determina el grado de achatamiento de las superficies equipotenciales. Podemos observar que el potencial gravitacional no tiene

límite superior. La densidad de masa, obtenida por medio de la ecuación de Poisson, es

$$\rho(R, z) = \frac{v_0^2}{4\pi Gq^2} \frac{(1 + 2q^2 + R^2 + (2 - q^{-2})z^2)}{(1 + R^2 + z^2q^{-2})^2}. \quad (3.2)$$

Para escribir la densidad en términos de la coordenada radial y del potencial, resolvemos el logaritmo en la ecuación (3.1) con lo cual se obtiene

$$1 + R^2 + z^2q^{-2} = e^{2\Phi/v_0^2}. \quad (3.3)$$

Observamos que (3.3) tiene precisamente la forma del denominador en (3.2). Para la parte del numerador, despejamos z^2 de (3.3):

$$z^2 = q^2(e^{2\Phi/v_0^2} - 1 - R^2). \quad (3.4)$$

Ahora, reemplazando (3.3) y (3.4) en (3.2), podemos escribir la densidad como

$$\rho(R, \Phi) = \frac{v_0^2}{4\pi Gq^2} \left\{ 2(1 - q^2)R^2 e^{-4\Phi/v_0^2} + 2e^{-4\Phi/v_0^2} + (2q^2 - 1)e^{-2\Phi/v_0^2} \right\}. \quad (3.5)$$

Entonces, utilizando la ecuación (2.28), se obtiene la parte par de la función de distribución:

$$f_+(E, L_z) = AL_z^2 e^{-4E/v_0^2} + Be^{-4E/v_0^2} + Ce^{-2E/v_0^2}, \quad (3.6)$$

donde A , B y C son las constantes dadas por

$$A = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{5/2} \frac{(1 - q^2)}{Gq^2 v_0^3}, \quad B = \left(\frac{2}{\pi^5}\right)^{1/2} \frac{1}{Gq^2 v_0}, \quad C = \frac{2q^2 - 1}{4\pi^{5/2} Gq^2 v_0}, \quad (3.7)$$

que es la misma DF encontrada por Jiang & Ossipkov [28] utilizando la ecuación integral de Abel, y también fue calculada por Evans [12] utilizando el método de Lynden-Bell. La parte impar de la función de distribución se puede hallar por el principio de máxima entropía, con lo cual se obtiene

$$f(E, L_z) = \frac{2(AL_z^2 e^{-4E/v_0^2} + Be^{-4E/v_0^2} + Ce^{-2E/v_0^2})}{1 + e^{-\alpha L_z}}. \quad (3.8)$$

Las figuras 3.1 y 3.2 muestran el comportamiento de esta DF. En la figura 3.1 se grafican los contornos de (3.8), para diferentes valores de α . Se observa que para $\alpha = 0$ la DF es par respecto a L_z y por lo tanto la velocidad angular media es cero. A medida que α se incrementa, la probabilidad de encontrar estrellas con L_z positivo va aumentando. En la figura 3.1 se mantiene fijo el parámetro α y se varían q y v_0 . Se observa que en el caso oblató, es decir con $q < 1$, la probabilidad de encontrar estrellas con cierto L_z es mayor a medida que L_z crece en magnitud, mientras que en el caso prolato, las estrellas tienen mayor probabilidad de tener L_z pequeños. Por otra parte, el parámetro v_0 define la tasa de variación de la función de distribución; es decir, cuando v_0 es grande, la DF varía lentamente y los contornos son separados, mientras que si v_0 es pequeña, la DF varía rápidamente y los contornos tienen una separación menor.

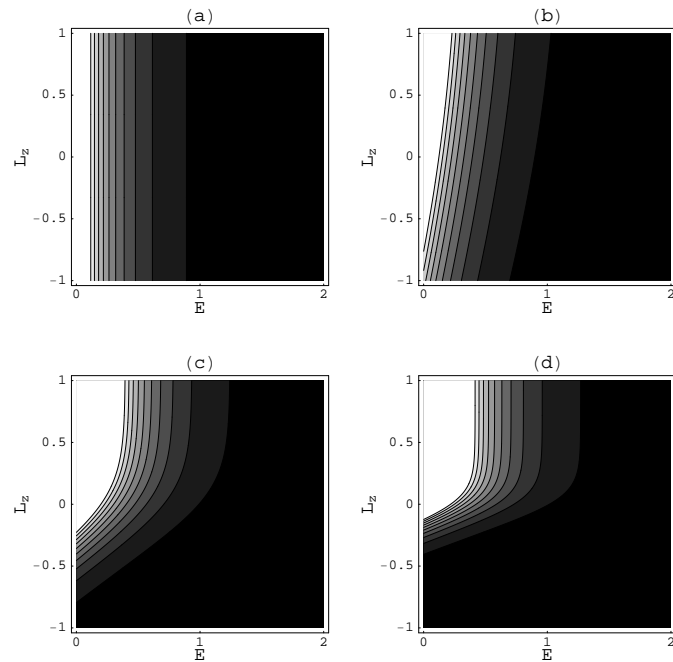


Figura 3.1: Contornos de f , dados por (3.8), para $q = 1$, $v_0 = 1$ y (a) $\alpha = 0$; (b) $\alpha = 1$; (c) $\alpha = 5$; (d) $\alpha = 10$. Las zonas claras representan mayor probabilidad.

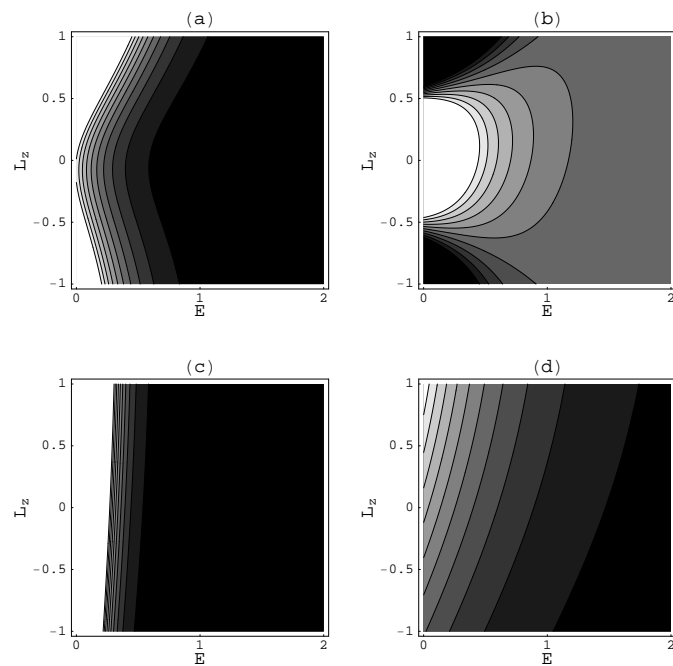


Figura 3.2: Contornos de f , dados por (3.8), para $\alpha = 1$ y (a) $q = 0,5$, $v_0 = 1$; (b) $q = 1,5$, $v_0 = 1$; (c) $q = 1$, $v_0 = 0,5$; (d) $q = 1$, $v_0 = 1,5$. Las zonas claras representan mayor probabilidad.

3.3 Disco de Mestel

El disco de Mestel es un modelo plano, con masa infinita y potencial gravitacional dado por

$$\Phi(R) = v_c^2 \ln \left(\frac{R}{R_0} \right), \quad (3.9)$$

donde v_c corresponde a la velocidad circular, que es constante para este modelo en particular, y R_0 es un radio de escala. Al igual que el modelo logarítmico de Binney, el potencial del disco de Mestel no tiene un límite superior. La densidad superficial de masa, que puede ser obtenida por medio de la ley de Gauss, es

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 \frac{R_0}{R}, \quad (3.10)$$

donde $\Sigma_0 = v_c^2 / (2\pi G R_0)$.

Entonces necesitamos escribir la densidad superficial en términos del radio y del potencial gravitacional. Como primer paso despejamos R de la ecuación (3.9):

$$R = R_0 e^{\Phi/v_c^2}. \quad (3.11)$$

Ahora, reescribimos la densidad superficial de la forma

$$\Sigma(R) = R^{2m} \frac{\Sigma_0 R_0}{R^{2m+1}}, \quad (3.12)$$

donde m puede ser cualquier valor real. Reemplazando (3.11) en denominador de (3.12), se obtiene

$$\Sigma(R) = R^{2m} \frac{\Sigma_0}{R_0^{2m}} e^{-(2m+1)\Phi/v_c^2}. \quad (3.13)$$

Por aplicación directa de la ecuación (2.61), se obtiene la parte par de la función de distribución:

$$f_+(E, L_z) = F L_z^{2m} e^{-E/\sigma^2}, \quad (3.14)$$

donde

$$\sigma^2 = \frac{v_c^2}{2m+1} \quad \text{y} \quad F = \frac{\Sigma_0 2^{-(m+1)} \pi^{-1/2}}{\Gamma(m+1/2) R_0^{2m} \sigma^{2m+2}}. \quad (3.15)$$

Aunque esta solución ya era conocida por Toomre [53], lo sorprendente es que no había sido deducida directamente del par potencial-densidad. Toomre realizó lo que se conoce como el problema inverso; supuso una forma particular para la función de distribución y encontró que el par potencial-densidad asociados al disco de Mestel eran solución. La parte impar de la función de distribución se halla mediante (1.62) y la DF total queda

$$f(E, L_z) = \frac{2F L_z^{2m} e^{-E/\sigma^2}}{1 + e^{-\alpha L_z}}. \quad (3.16)$$

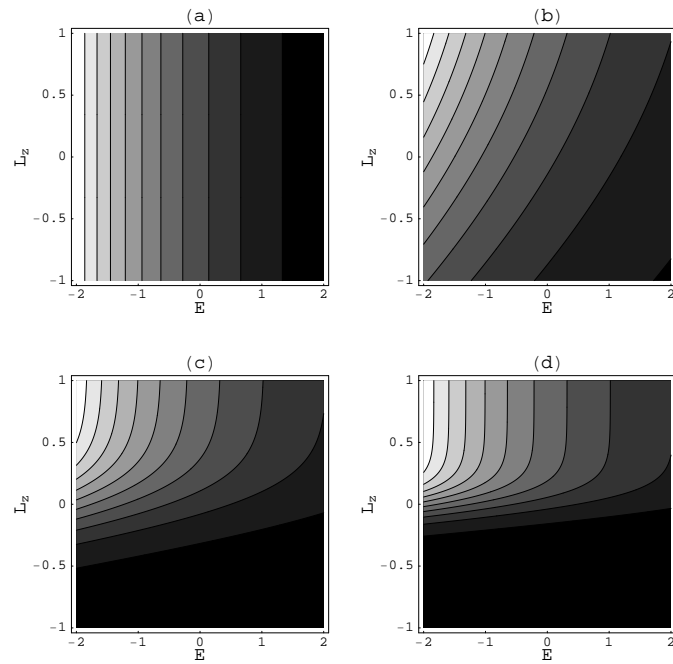


Figura 3.3: Contornos de f , dados por (3.16), para $m = 0$, $v_c = 1,5$ y (a) $\alpha = 0$; (b) $\alpha = 1$; (c) $\alpha = 5$; (d) $\alpha = 10$. Las zonas claras representan mayor probabilidad.

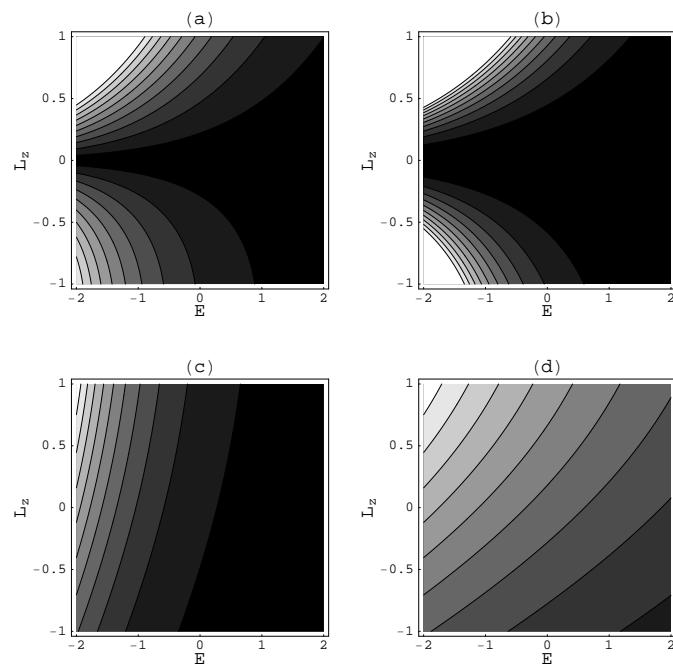


Figura 3.4: Contornos de f , dados por (3.16), para $\alpha = 1$ y (a) $m = 0,5$, $v_c = 1,5$; (b) $m = 1$, $v_c = 1,5$; (c) $m = 0$, $v_c = 1$; (d) $m = 0$, $v_c = 2$. Las zonas claras representan mayor probabilidad.

Las figuras 3.3 y 3.4 muestran el comportamiento de la función de distribución. En la figura 3.3 se grafican los contornos de (3.16), para diferentes valores de α . Para $\alpha = 0$ la DF es par respecto a L_z y el sistema no tiene rotación neta. A medida que α se incrementa, la probabilidad de encontrar estrellas con L_z positivo va aumentando. En la figura 3.4 se mantiene fijo el parámetro α y se varían m y v_c . Se observa que cuando $m \neq 0$ el comportamiento de la DF es similar al caso oblató de Binney, mostrado en la figura 3.2(a). A medida que m aumenta, la probabilidad de encontrar estrellas con L_z grande (en magnitud) se incrementa, mientras que la probabilidad de encontrar estrellas con L_z pequeños va decreciendo. El parámetro v_c juega un papel similar al parámetro v_0 correspondiente al modelo de Binney; cuando v_c es grande, la DF varía lentamente y los contornos son separados, mientras que si v_c es pequeña, la DF varía rápidamente y los contornos tienen una separación menor.

3.4 Discos generalizados de Kalnajs

Un caso de mayor interés físico son los modelos correspondientes a los discos generalizados de Kalnajs, introducidos recientemente por González & Reina [19, 47], (ver apéndice A.4). Estos discos constituyen una familia infinita de sistemas estelares, planos y con radio finito. Además, son importantes porque presentan una densidad superficial y una velocidad circular comparables con la observación, por lo que podrían modelar acertadamente algunas galaxias conocidas. Su potencial gravitacional, en coordenadas esferoidales oblatas,¹ está dado por

$$\Phi_m(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^m C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (3.17)$$

donde $m \geq 1$, $P_{2n}(\eta)$ y $q_{2n}(\xi) = i^{2n+1} Q_{2n}(i\xi)$ son los polinomios de Legendre y las funciones de Legendre de segunda clase, respectivamente, y C_{2n} son las constantes dadas por

$$C_{2n} = \frac{MG}{2a} \left[\frac{\pi^{1/2} (4n+1)(2m+1)!}{2^{2m} (2n+1)(m-n)! \Gamma(m+n+\frac{3}{2}) q_{2n+1}(0)} \right]. \quad (3.18)$$

La densidad superficial correspondiente a estos modelos es

$$\Sigma_m(R) = \Sigma_c^{(m)} \left(1 - \frac{R^2}{a^2} \right)^{m-1/2}, \quad (3.19)$$

donde $\Sigma_c^{(m)}$ está dado por

$$\Sigma_c^{(m)} = \frac{(2m+1)M}{2\pi a^2}. \quad (3.20)$$

¹Dichas coordenadas están relacionadas con las coordenadas cilíndricas a través de las expresiones $R = a\sqrt{(1-\eta^2)(1+\xi^2)}$, $z = a\xi\eta$, siendo a el radio del disco.

Hallar las funciones de distribución de tales modelos no es tan sencillo como los casos mencionados anteriormente, debido a que el potencial es una función polinómica de orden $2m$, con coeficientes no triviales, y no es posible encontrar una relación directa con la densidad superficial para poder determinar $\Sigma_m(R^2, \Phi_m)$, mediante funciones elementales, en el caso general.² Como caso práctico, suponemos que Σ_m puede ser expresada solamente en términos de Φ_m . De esta manera, se procederá analizando caso por caso, hasta donde sea factible encontrar dicha relación.

3.4.1. Caso $m = 1$

El primer modelo correspondiente a la familia de discos generalizados de Kalnajs corresponde al conocido disco de Kalnajs [19, 30, 47]. El potencial gravitacional en el disco, dado por (3.17) cuando $m = 1$, se puede escribir como

$$\Phi = \Omega_0^2 \left(\frac{1}{2} R^2 - a^2 \right), \quad (3.21)$$

donde $\Omega_0 = [3\pi GM/(4a^3)]^{1/2}$ representa la velocidad angular de partículas con órbitas circulares. De acuerdo a (1.37), se definen el potencial relativo $\Psi = \Phi_0 - \Phi$ y la energía relativa $\varepsilon = \Phi_0 - E$ de tal forma que en el sistema solo haya estrellas con $E < \Phi_0$ y $f_+(\varepsilon, L_z)$ esté definida cuando $\varepsilon > 0$. Para esto, escogemos Φ_0 como el potencial máximo que puede tener una estrella dentro de la galaxia. En el caso del potencial correspondiente a los discos generalizados de Kalnajs, esto se da para una estrella con $R = a$ (ver figura A.2) y por lo tanto

$$\Phi_0 = \Phi(a) = -\frac{1}{2}\Omega_0^2 a^2. \quad (3.22)$$

La energía relativa queda definida como

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{1}{2}\Omega_0^2 a^2 - E = -\frac{1}{2}\Omega_0^2 a^2 - \frac{1}{2}v^2 - \Omega_0^2 \left(\frac{1}{2}R^2 - a^2 \right), \\ &= \frac{1}{2}\Omega_0^2 (a^2 - R^2) - \frac{1}{2}v^2, \end{aligned} \quad (3.23)$$

mientras que el potencial relativo queda

$$\Psi = -\frac{1}{2}\Omega_0^2 a^2 - \Phi = \frac{1}{2}\Omega_0^2 (a^2 - R^2). \quad (3.24)$$

La densidad superficial del disco de Kalnajs, dada por (3.19) cuando $m = 1$, es

$$\Sigma = \Sigma_c^{(1)} \left(1 - \frac{R^2}{a^2} \right)^{1/2} = \frac{3M}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{R^2}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (3.25)$$

Ahora, podemos expresar la densidad superficial en términos del potencial relativo de la siguiente manera:

$$\Sigma(\Psi) = \frac{\sqrt{2}\Sigma_c^{(1)}}{\Omega_0 a} \Psi^{1/2}. \quad (3.26)$$

²En realidad, hay varias formas de hallar $\Sigma_m(R^2, \Phi_m)$, pero como una sumatoria infinita de términos. Esto se debe a que el potencial es una función polinómica, mientras que la densidad no lo es.

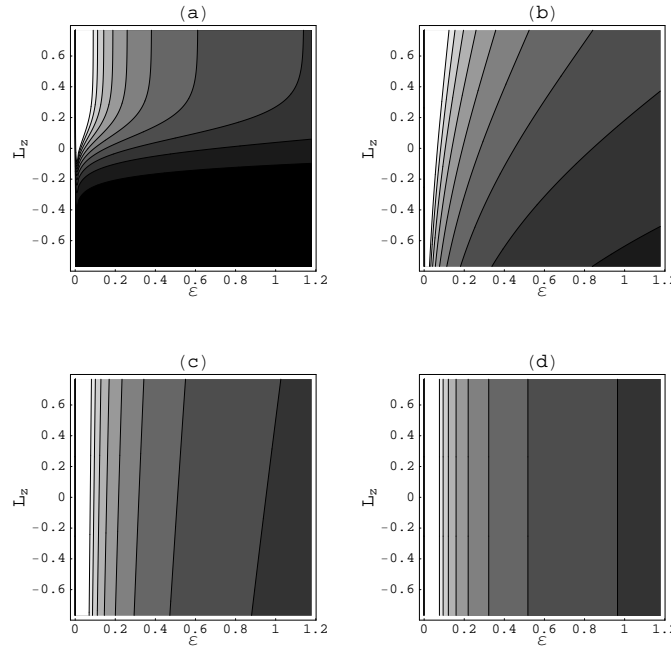


Figura 3.5: Contornos de $f_1^{(A)}$, dados por (3.28), para (a) $\alpha = 10$; (b) $\alpha = 1$; (c) $\alpha = 0,1$; (d) $\alpha = 0$. Las zonas claras representan mayor probabilidad.

Aplicando la ecuación (2.40) cuando $n = 0$, se obtiene la parte par de la función de distribución:

$$f_{1+}^{(A)}(\varepsilon) = \frac{\Sigma_c^{(1)}}{2\pi\Omega_0 a\sqrt{2\varepsilon}}. \quad (3.27)$$

Cabe mencionar que (3.27) es un caso particular de la DF formulada por Binney & Tremaine [6], cuando $\bar{v}_\phi = 0$.³ Para obtener la función de distribución total, se utiliza el principio de máxima entropía, y por medio de la ecuación (1.63) se obtiene:

$$f_1^{(A)}(\varepsilon, L_z) = \frac{\Sigma_c^{(1)}}{\pi\Omega_0 a\sqrt{2\varepsilon}(1 + e^{-\alpha L_z})}. \quad (3.28)$$

Como se muestra en la figura 3.5, α determina un estado particular de rotación del sistema (para generar las gráficas, se normalizan las constantes $G = a = M = 1$). Cuando α se incrementa, la probabilidad de encontrar una estrella con L_z positivo también se incrementa. Un resultado similar puede ser obtenido para $\alpha < 0$; a medida que α decrece, la probabilidad de encontrar una estrella con L_z negativo se incrementa, y las gráficas correspondientes serían análogas a la figura 3.5, después de una reflexión respecto a $L_z = 0$.

Es posible generalizar este resultado si se realiza el análisis en un marco de referencia en rotación, y al final, se retorna al sistema original. Asumimos que el marco de referencia

³La DF introducida por Binney & Tremaine fue formulada suponiendo una dependencia particular respecto a ε y L_z , y cuadrando las constantes apropiadas para obtener la densidad al realizar la integral.

en el cual el potencial Φ es estático rota con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$.⁴ En este marco, la velocidad de una estrella está dada por $\dot{\mathbf{x}}$, y la velocidad correspondiente al sistema inercial sería $\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$. Entonces, el Lagrangiano en este sistema es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2 - \Phi(\mathbf{x}). \quad (3.29)$$

El momentum en el sistema inercial queda

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}. \quad (3.30)$$

Ahora, se calcula el Hamiltoniano:⁵

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \mathcal{L}, \\ &= \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) - \frac{1}{2}p^2 + \Phi, \\ &= \frac{1}{2}p^2 + \Phi + \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dado que $\mathbf{x} \times \mathbf{p} = \mathbf{L}$ es el momento angular en el sistema de referencia inercial, podemos escribir el Hamiltoniano del sistema en rotación $\mathcal{H}' = \frac{1}{2}p^2 + \Phi$ en términos del Hamiltoniano del sistema de referencia inercial \mathcal{H} como

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L}. \quad (3.32)$$

Este resultado es importante para nuestro propósito debido que una vez encontrada la función de distribución en el marco de referencia en rotación, haciendo el cambio de variable $E' \rightarrow E - \Omega L_z$ se encuentra la DF correspondiente al marco de referencia original.⁶

Ahora, podemos reescribir la expresión para el Hamiltoniano en el sistema inercial, si reemplazamos (3.30) en (3.31), para dejar todo en términos de \mathbf{x} y $\dot{\mathbf{x}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}p^2 + \Phi, \\ &= (\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 + \Phi, \\ &= |\dot{\mathbf{x}}|^2 - \dot{\mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) - \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2 + \dot{\mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2 + \Phi, \\ &= \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2 + \Phi - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2, \\ &= \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{x}}|^2 + \Phi_e, \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde se define el potencial efectivo como $\Phi_e = \Phi - \frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}|^2$, el cual tiene en cuenta los efectos de las fuerzas ficticias, que surgen como consecuencia de la rotación del marco de referencia.⁷ Tomando $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{e}_z$ y $\mathbf{x} = R \hat{e}_r$, se obtiene:

$$\Phi_e = \Phi - \frac{1}{2}\Omega^2 R^2. \quad (3.34)$$

⁴Estático en el sentido que en este sistema de referencia el momento angular total es 0.

⁵En el último paso se hace uso de la identidad $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$.

⁶ $J = E - \Omega L_z$ se conoce como la integral de Jacobi [18].

⁷Las fuerzas ficticias en un marco de referencia en rotación, con velocidad angular constante, son: la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga [18].

Trabajando en un sistema de referencia en rotación, con velocidad angular Ω , se obtiene el siguiente potencial efectivo para el disco de Kalnajs

$$\Phi_e = \Omega_0^2 \left(\frac{1}{2} R^2 - a^2 \right) - \frac{1}{2} \Omega^2 R^2. \quad (3.35)$$

Definimos entonces un potencial relativo-efectivo de la forma $\Psi_e = \Phi_{0e} - \Phi_e$ donde Φ_{0e} es una constante que representa la energía de escape del sistema, en el marco de referencia en rotación. Escogiendo apropiadamente Φ_{0e} se llega a:

$$\Psi_e = \frac{(\Omega_0^2 - \Omega^2)a^2}{2} \left(1 - \frac{R^2}{a^2} \right). \quad (3.36)$$

De esta manera, podemos expresar la densidad superficial del disco de la forma

$$\Sigma(\Psi_e) = \frac{\sqrt{2}\Sigma_c^{(1)}}{a\sqrt{\Omega_0^2 - \Omega^2}} \Psi_e^{1/2}, \quad (3.37)$$

y aplicando la ecuación (2.40) con $n = 0$, se encuentra la parte par de la función de distribución, medida desde el marco de referencia en rotación:

$$f_{1+}^{(B)}(\varepsilon') = \frac{\Sigma_c^{(1)}}{2\pi a \sqrt{\Omega_0^2 - \Omega^2} \sqrt{2\varepsilon'}}. \quad (3.38)$$

Aquí ε' representa la energía relativa medida en este sistema de referencia, la cual se relaciona con la energía relativa ordinaria mediante la expresión:

$$\begin{aligned} E' = E - \Omega L_z &\Rightarrow \Phi_{0e} - \varepsilon' = \Phi_0 - \varepsilon - \Omega L_z \\ &\Rightarrow \varepsilon' = \varepsilon + \Omega L_z + (\Phi_{0e} - \Phi_0). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Entonces, retornando al sistema original obtenemos:

$$f_1^{(B)}(\varepsilon, L_z) = \frac{\Sigma_c^{(1)} [2(\varepsilon + \Omega L_z) - \Omega^2 a^2]^{-1/2}}{2\pi a \sqrt{\Omega_0^2 - \Omega^2}}. \quad (3.40)$$

Esta función de distribución es equivalente a la DF formulada por Binney & Tremaine [6]. No obstante, cabe mencionar que ellos no la obtuvieron siguiendo un proceso riguroso. El método que ellos emplearon fue formular una DF con varios parámetros y al hacer la integral respecto a las velocidades, compararon el resultado con la densidad superficial para ajustar las constantes necesarias. Obviamente, el caso de $\Omega = 0$ coincide con (3.27), encontrada anteriormente.

Las gráficas de contornos correspondientes a $f_1^{(B)}(\varepsilon, L_z)$, mostradas en la figura 3.6, revelan que la probabilidad de encontrar estrellas con $\varepsilon < \Omega^2 a^2 / 2 - \Omega L_z$ es cero, mientras que es máxima cuando $\varepsilon \gtrsim \Omega^2 a^2 / 2 - \Omega L_z$ (esto define la franja blanca mostrada en la figura) y decrece a medida que ε aumenta. Sin embargo, esta DF es un poco irreal, ya

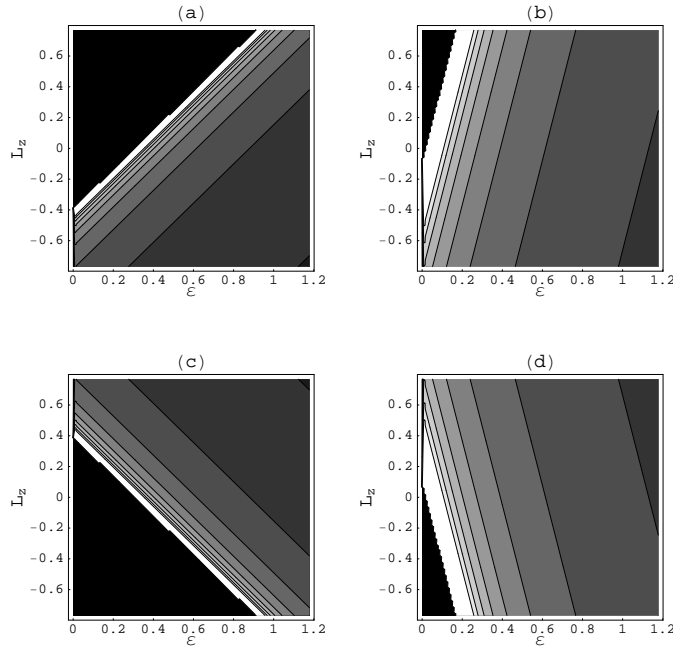


Figura 3.6: Contornos de $f_1^{(B)}$, dados por (3.40), para (a) $\Omega = -\pi/4$; (b) $\Omega = -\pi/16$; (c) $\Omega = \pi/4$; (d) $\Omega = \pi/16$. Las zonas claras representan mayor probabilidad.

que representa un estado en el cual $\bar{v}_\phi = \Omega R$, es decir, un estado en el cual el sistema se comporta como un sólido rígido, lo cual está en desacuerdo con la observación.

A pesar de este hecho, es posible generar una DF que represente un estado mas probable, si se toma la parte par de (3.40) y se utiliza el principio de máxima entropía. Como resultado, se obtiene una DF de la forma

$$\tilde{f}_1^{(B)}(\varepsilon, L_z) = \frac{2f_{1+}^{(B)}(\varepsilon, L_z)}{1 + e^{-\alpha L_z}}. \quad (3.41)$$

Como se muestra en la figura 3.7, existe una zona de probabilidad cero, justo en la intersección de las zonas negras producidas por $f_1^{(B)}(\varepsilon, \pm L_z)$; además, se muestran dos franjas de máxima probabilidad, correspondientes a $\varepsilon \gtrsim \Omega^2 a^2 / 2 \pm \Omega L_z$. La variación del parámetro Ω da como resultado el cambio en la inclinación de las franjas de máxima probabilidad y es fácil ver que la DF sería invariante respecto al cambio de signo en Ω , por la definición de la parte par (1.33). Por otra parte, α desempeña un papel similar que en la figura 3.5, incrementando la probabilidad de encontrar estrellas con mayor L_z a medida que α aumenta y viceversa.

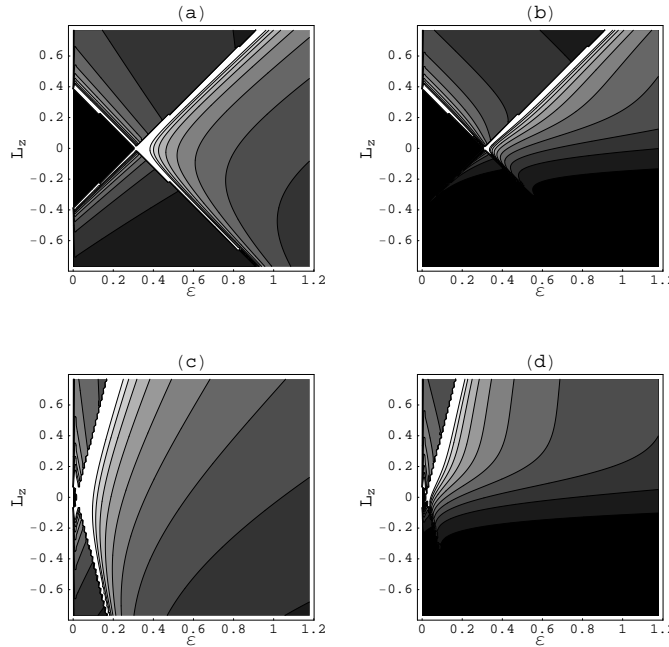


Figura 3.7: Contornos de $\tilde{f}_1^{(B)}$, dados por (3.41), para $\Omega = \pi/4$ y (a) $\alpha = 1$; (b) $\alpha = 10$. Para $\Omega = \pi/16$ se grafican (c) $\alpha = 1$; (d) $\alpha = 10$. Las zonas claras representan mayor probabilidad.

3.4.2. Caso $m = 2$

El segundo modelo correspondiente a la familia de discos generalizados de Kalnajš corresponde al potencial gravitacional dado por (3.17) cuando $m = 2$. A partir de aquí, se trabaja en coordenadas oblatas con el fin de obtener una relación más directa entre la densidad y el potencial. De esta manera, el potencial gravitacional se puede expresar como

$$\Phi = -\frac{45GM\pi}{128a} - \frac{15GM\pi}{64a}\eta^2 - \frac{45GM\pi}{128a}\eta^4. \quad (3.42)$$

El potencial efectivo en un sistema de referencia en rotación, con velocidad angular Ω , está dado por

$$\Phi_e = \Phi - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 (1 - \eta^2). \quad (3.43)$$

Para calcular el potencial relativo-efectivo, $\Psi_e = \Phi_{0e} - \Phi_e$, se define por conveniencia $\Phi_{0e} = \Phi_e(\eta = 0)$ obteniendo

$$\Psi_e = \frac{45GM\pi}{128a}\eta^4 + \frac{15GM\pi - 32a^3\Omega^2}{64a}\eta^2. \quad (3.44)$$

Por otra parte, la densidad superficial del disco, dada por (3.19) cuando $m = 2$, es

$$\Sigma = \Sigma_c^{(2)}\eta^3 = \frac{5M}{2\pi a^2}\eta^3. \quad (3.45)$$

Evidentemente, el problema de expresar a Σ como función de Ψ_e es equivalente a resolver la ecuación (3.44) para despejar η en función de Ψ_e , que para este caso corresponde a

una ecuación cuadrática. Escribimos el potencial como

$$\Psi_e = (\kappa_1 \eta^2 + \kappa_2)^2 + \kappa_3, \quad (3.46)$$

donde las constantes κ_1 , κ_2 y κ_3 están dadas por

$$\kappa_1 = \sqrt{\frac{45GM\pi}{128a}}, \quad (3.47)$$

$$\kappa_2 = \sqrt{\frac{128a}{45GM\pi} \frac{15GM\pi - 32a^3\Omega^2}{128a}}, \quad (3.48)$$

$$\kappa_3 = -\frac{128a}{45GM\pi} \left(\frac{15GM\pi - 32a^3\Omega^2}{128a} \right)^2. \quad (3.49)$$

Despejando η^2 de la ecuación (3.46), se obtiene

$$\eta^2 = \frac{\sqrt{\Psi_{2e} - \kappa_3} - \kappa_2}{\kappa_1}. \quad (3.50)$$

Ahora, de las ecuaciones (3.45) y (3.50) se llega a la relación

$$\Sigma = \Sigma_c^{(2)} \left(\frac{\sqrt{\Psi_e - \kappa_3} - \kappa_2}{\kappa_1} \right)^{3/2}. \quad (3.51)$$

Finalmente, utilizando la ecuación (2.40) cuando $n = 0$, se obtiene la parte par de la función de distribución, en el sistema de referencia en rotación:

$$f_2(\varepsilon') = \frac{3\Sigma_c^{(2)}}{8\pi\kappa_1^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon' - \kappa_3} - \kappa_2}{\varepsilon' - \kappa_3} \right)^{1/2}. \quad (3.52)$$

Retornando al sistema de referencia original, se obtiene

$$f_2(\varepsilon, L_z) = \frac{3\Sigma_c^{(2)}}{8\pi\kappa_1^{3/2}} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon + \Omega L_z - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 - \kappa_3} - \kappa_2}{\varepsilon + \Omega L_z - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 - \kappa_3} \right)^{1/2}. \quad (3.53)$$

Al igual que en el caso $m = 1$, resulta conveniente hallar una DF que represente un estado mas probable de rotación. Entonces, por medio de la ecuación (1.63), podemos escribir

$$\tilde{f}_2(\varepsilon, L_z) = \frac{2f_{2+}(\varepsilon, L_z)}{1 + e^{-\alpha L_z}}. \quad (3.54)$$

Podemos ver el comportamiento de estas DFs en la figura 3.8. En (a) y (b) se muestran los contornos de (3.53) para dos estados rotacionales diferentes. En general, se observa que la DF es máxima en una diagonal cerca a la zona de probabilidad cero y la probabilidad decrece a medida que ε aumenta, de manera similar al caso mostrado en la figura 3.6. Además, a medida que Ω se incrementa, la inclinación de las franjas aumenta y la DF varía mas rápidamente originando bandas mas angostas. En (c) y (d) se muestran los contornos de (3.54) para diferentes valores del parámetro α , mostrando un comportamiento similar a $\tilde{f}_1^{(B)}$.

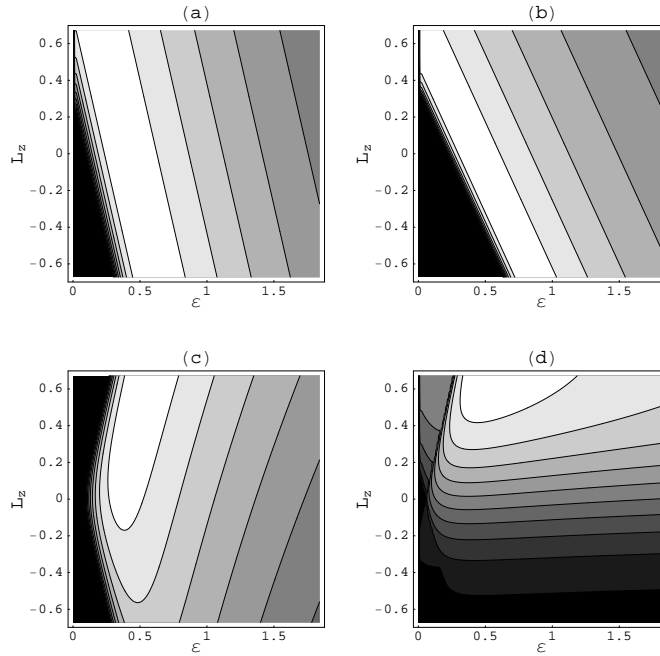


Figura 3.8: En (a) y (b) se muestran los contornos de f_2 dados por (3.53), para $\Omega = \pi/10$ y $\Omega = \pi/5$, respectivamente. Las figuras restantes representan los contornos de f_2 , dados por (3.54), para $\Omega = \pi/10$ y (c) $\alpha = 0,1$; (d) $\alpha = 5$. Las zonas claras representan mayor probabilidad.

3.4.3. Caso $m = 3$

El tercer modelo correspondiente a la familia de discos generalizados de Kalnajs corresponde al potencial gravitacional dado por (3.17) cuando $m = 3$. En este caso, calculamos el potencial relativo-efectivo de la misma forma que se hizo en la sección 3.4.2 y el resultado es:

$$\Psi_e = \frac{175GM\pi}{512a}\eta^6 + \frac{105GM\pi}{512a}\eta^4 + \frac{105GM\pi - 256a^3\Omega^2}{512a}\eta^2. \quad (3.55)$$

Así mismo, la densidad superficial para este modelo dada por (3.19) cuando $m = 3$, es

$$\Sigma = \Sigma_c^{(3)}\eta^5 = \frac{7M}{2\pi a^2}\eta^5. \quad (3.56)$$

El problema en este caso consiste en solucionar la ecuación cúbica dada por (3.55), para encontrar $\eta(\Psi_e)$ y de esta manera, poder expresar $\Sigma(\Psi_e)$. La ecuación cúbica puede ser solucionada de manera exacta mediante métodos analíticos, aunque sus soluciones son tan complicadas que en este caso serían de poca utilidad. Afortunadamente, todavía tenemos el parámetro Ω libre, de tal forma que al escoger un sistema de referencia adecuado se simplificaría el problema en consideración. Entonces, podemos ver que es posible escribir (3.55) como

$$\Psi_e(\eta) = (\kappa_1\eta^2 + \kappa_2)^3 + \kappa_3, \quad (3.57)$$

donde κ_1 , κ_2 y κ_3 son las constantes

$$\kappa_1 = \left(\frac{175GM\pi}{512a} \right)^{1/3}, \quad (3.58)$$

$$\kappa_2 = \left(\frac{512a}{175GM\pi} \right)^{2/3} \frac{105GM\pi}{1536a}, \quad (3.59)$$

$$\kappa_3 = -\frac{7GM\pi}{2560a}, \quad (3.60)$$

y Ω debe ser escogido como

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{21GM\pi}{64a^3}}. \quad (3.61)$$

Ahora, reemplazando (3.56) en (3.57) se obtiene

$$\Sigma_3 = \Sigma_c^{(3)} \left(\frac{(\Psi_{3e} - \kappa_3)^{1/3} - \kappa_2}{\kappa_1} \right)^{5/2}, \quad (3.62)$$

y utilizando la ecuación (2.40) cuando $n = 0$, se obtiene la parte par de la función de distribución, en el sistema de referencia en rotación:

$$f_3(\varepsilon') = \frac{5\Sigma_c^{(3)} ((\varepsilon' - \kappa_3)^{1/3} - \kappa_2)^{3/2}}{12\pi\kappa_1^{5/2}(\varepsilon' - \kappa_3)^{2/3}}. \quad (3.63)$$

Retornando al sistema original, el resultado es:

$$f_3(\varepsilon, L_z) = \frac{5\Sigma_c^{(3)} ((\varepsilon + \Omega L_z - \Omega^2 a^2/2 - \kappa_3)^{1/3} - \kappa_2)^{3/2}}{12\pi\kappa_1^{5/2} (\varepsilon + \Omega L_z - \Omega^2 a^2/2 - \kappa_3)^{2/3}}, \quad (3.64)$$

mientras que la respectiva DF con máxima entropía es:

$$\tilde{f}_3(\varepsilon, L_z) = \frac{2f_{3+}(\varepsilon, L_z)}{1 + e^{-\alpha L_z}}. \quad (3.65)$$

En la figura 3.9 se muestra el comportamiento de estas DFs. En (a) se grafican los contornos de f_3 , mientras que en las figuras (b), (c) y (d) se muestran los contornos de \tilde{f}_3 para diferentes valores de α . Podemos ver que el comportamiento de estas DFs es contrario a los casos anteriores; la probabilidad de encontrar estrellas con cierta energía aumenta a medida que la energía relativa se incrementa. Por otra parte, el papel del parámetro α es el mismo, pues como se estudió en la sección 1.7, es una característica común de las DFs con máxima entropía.

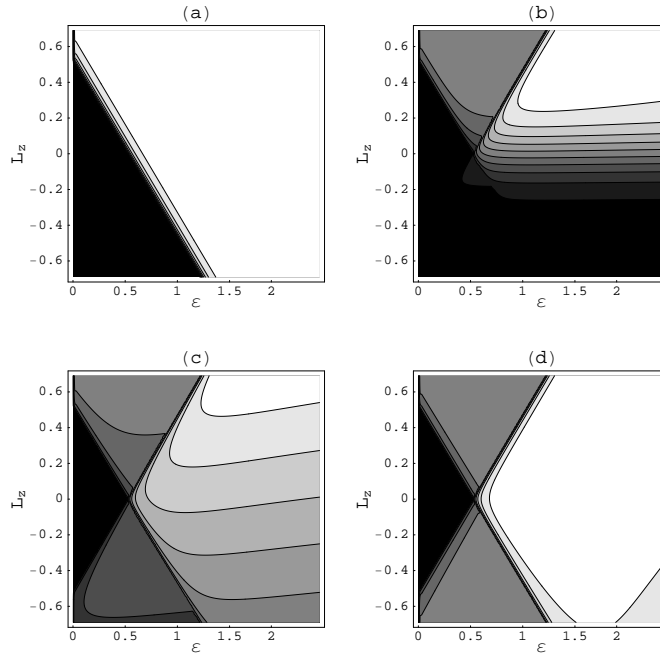


Figura 3.9: En (a) se muestran los contornos de f_3 dados por (3.64), tomando el valor positivo de Ω . Las figuras restantes representan los contornos de \tilde{f}_3 , dados por (3.65), para (b) $\alpha = 10$; (c) $\alpha = 1$; (d) $\alpha = 0,1$. Las zonas claras representan mayor probabilidad.

3.4.4. Caso $m = 4$

El cuarto modelo de la familia de discos generalizados de Kalnajs es similar al caso $m = 3$. El potencial gravitacional está dado por (3.17) cuando $m = 4$, y el potencial relativo-efectivo resulta ser

$$\Psi_e = \frac{11025GM\pi}{32768a}\eta^8 + \frac{1575GM\pi}{8192a}\eta^6 + \frac{2835GM\pi}{16384a}\eta^4 + \frac{1575GM\pi - 4096a^3\Omega^2}{8192a}\eta^2. \quad (3.66)$$

La densidad superficial para este modelo, dada por (3.19) cuando $m = 4$, es

$$\Sigma = \Sigma_c^{(4)}\eta^7 = \frac{9M}{2\pi a^2}\eta^7. \quad (3.67)$$

Entonces, para solucionar el problema debemos invertir (3.66), que en este caso es una ecuación cuártica. Ésta es la ecuación polinómica de mas alto orden que tiene solución analítica, sin embargo, como en el caso de la ecuación cúbica, la solución general resultaría bastante complicada. Podemos utilizar el parámetro Ω para simplificar el problema y obtener una ecuación cuártica cuasi simétrica. En este caso, podemos escribir el potencial relativo-efectivo de la forma

$$\Psi_e = ((\kappa_1\eta^2 + \kappa_2)^2 + \kappa_3)^2 + \kappa_4, \quad (3.68)$$

donde κ_1 , κ_2 , κ_3 y κ_4 son las constantes

$$\kappa_1 = \left(\frac{11025GM\pi}{32768a} \right)^{1/4}, \quad (3.69)$$

$$\kappa_2 = \left(\frac{32768a}{11025GM\pi} \right)^{3/4} \frac{1575GM\pi}{32768a}, \quad (3.70)$$

$$\kappa_3 = \left(\frac{32768a}{11025GM\pi} \right)^{1/2} \frac{135GM\pi}{2048a}, \quad (3.71)$$

$$\kappa_4 = -\frac{25281GM\pi}{1605632a}, \quad (3.72)$$

y Ω debe ser escogido como

$$\Omega = \pm \sqrt{\frac{135GM\pi}{448a^3}}. \quad (3.73)$$

Entonces, de las ecuaciones (3.68) y (3.67), se obtiene

$$\Sigma_4 = \Sigma_c^{(4)} \left[\frac{((\Psi_e - \kappa_4)^{1/2} - \kappa_3)^{1/2} - \kappa_2}{\kappa_1} \right]^{7/2}, \quad (3.74)$$

y mediante la ecuación (2.40) cuando $n = 0$, obtenemos la parte par de la función de distribución correspondiente al sistema de referencia en rotación:

$$f_4(\varepsilon') = \frac{7\Sigma_c^{(4)} \left[\left((\varepsilon' - \kappa_4)^{1/2} - \kappa_3 \right)^{1/2} - \kappa_2 \right]^{5/2}}{16\pi\kappa_1^{7/2} \left[\left((\varepsilon' - \kappa_4)^{1/2} - \kappa_3 \right) (\varepsilon' - \kappa_4) \right]^{1/2}}. \quad (3.75)$$

Con esto, la función de distribución en el sistema de referencia original resulta

$$f_4(\varepsilon, L_z) = \frac{7\Sigma_c^{(4)} [g(\varepsilon, L_z) - \kappa_2]^{5/2}}{16\pi\kappa_1^{7/2} g(\varepsilon, L_z) [g^2(\varepsilon, L_z) + \kappa_3]}, \quad (3.76)$$

donde

$$g(\varepsilon, L_z) = \sqrt{\sqrt{\varepsilon + \Omega L_z - \Omega^2 a^2 / 2 - \kappa_4} - \kappa_3}. \quad (3.77)$$

Además, de manera similar a los casos anteriores, resulta conveniente formular otra DF que represente un estado de rotación mas probable. Entonces, haciendo uso del principio de máxima entropía se obtiene

$$\tilde{f}_4(\varepsilon, L_z) = \frac{2f_{4+}(\varepsilon, L_z)}{1 + e^{-\alpha L_z}}. \quad (3.78)$$

La figura 3.10 muestra el comportamiento de estas DFs. En la figura (a) se grafican los contornos de f_4 , mientras que las figuras (b), (c) y (d) representan los contornos de \tilde{f}_4 para diferentes valores de α . Como se puede observar, el comportamiento es similar al caso $m = 3$, mostrado en la figura 3.9.

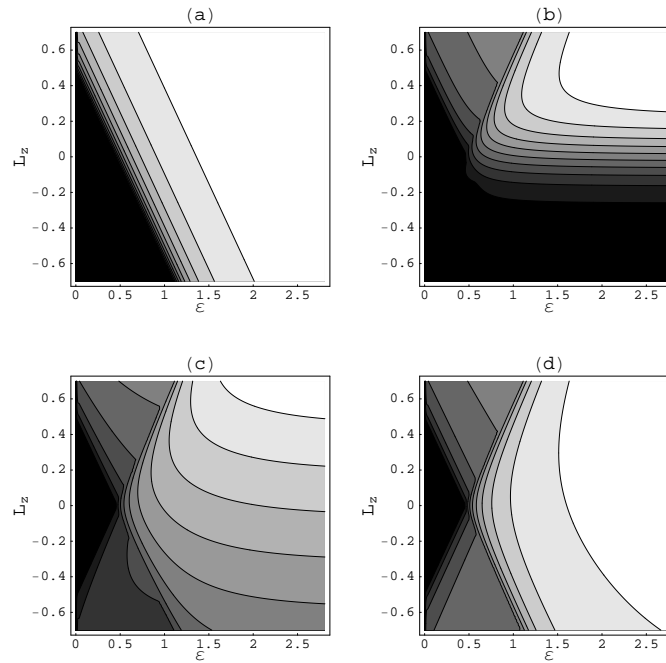


Figura 3.10: En (a) se muestran los contornos de f_4 dados por (3.77), tomando el valor positivo de Ω . Las figuras restantes representan los contornos de f_4 , dados por (3.78), para (b) $\alpha = 10$; (c) $\alpha = 1$; (d) $\alpha = 0,1$. Las zonas claras representan mayor probabilidad.

3.5 Nuevos modelos

En general, para los discos generalizados de Kalnajs observamos que no es posible encontrar la función de distribución respectiva, para discos con $m \geq 5$, debido a la complejidad asociada a la forma del potencial gravitacional. En ese caso, vimos que el potencial es un polinomio de η^2 de grado m , mientras que la densidad superficial es una potencia de η , razón por la cual, para hallar $\Sigma(\Psi)$ era necesario invertir una ecuación de orden m y esto solo es posible en los 4 primeros casos. Pero ¿qué pasaría si sucediera lo contrario? Es decir, ¿qué pasaría si el potencial fuera una simple potencia de η , mientras que la densidad fuera un polinomio? En este caso, la relación $\Sigma(\Psi)$ sería inmediata y el cálculo de la función de distribución muy simple. En esta sección formularemos nuevos modelos que cumplan con esta característica, y veremos que esto es posible mediante combinaciones lineales de los discos generalizados de Kalnajs.

3.5.1. Formulación de los modelos

La teoría de la gravitación Newtoniana tiene la característica particular de que todas sus ecuaciones fundamentales son lineales, de tal forma que si conocemos algunas soluciones, entonces combinaciones lineales entre ellas también serán soluciones. En particular,

si combinamos apropiadamente los n primeros discos de Kalnajs, es posible obtener un potencial gravitacional de la forma $K\eta^{2n}$, de tal manera que se anulen las demás potencias de η .

Para comenzar, partimos del potencial correspondiente a los discos generalizados de Kalnajs:

$$\Phi_m(\eta) = - \sum_{n=0}^m C_{2n} q_{2n}(0) P_{2n}(\eta). \quad (3.79)$$

Expresando los polinomios de Legendre mediante una suma de potencias de η [1], se tiene que

$$P_{2n}(\eta) = \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r (4n - 2r)!}{2^{2n} r! (2n - 2r)! (2n - r)!} \eta^{2n-2r}, \quad (3.80)$$

y de esta manera, el potencial queda

$$\Phi_m(\eta) = - \sum_{n=0}^m \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r (4n - 2r)! C_{2n} q_{2n}(0)}{2^{2n} r! (2n - 2r)! (2n - r)!} \eta^{2n-2r} = - \sum_{n=0}^m \sum_{r=0}^n A_{nr} \eta^{2n-2r}, \quad (3.81)$$

donde A_{nr} son las constantes dadas por

$$A_{nr} = \frac{(-1)^r (4n - 2r)! C_{2n} q_{2n}(0)}{2^{2n} r! (2n - 2r)! (2n - r)!}. \quad (3.82)$$

El potencial relativo, $\Psi = \Phi_0 - \Phi$, se calcula tomando a Φ_0 como el máximo valor que puede tomar Φ . Esto se da precisamente en el borde del disco, y por lo tanto

$$\Psi_m(\eta) = \Phi_m(\eta = 0) + \sum_{n=0}^m \sum_{r=0}^n A_{nr} \eta^{2n-2r} = \sum_{n=1}^m \sum_{r=0}^{n-1} A_{nr} \eta^{2n-2r}. \quad (3.83)$$

Ahora, escogemos combinaciones lineales de estos discos, de tal forma que el nuevo potencial relativo, $\tilde{\Psi}_m$, tenga la forma

$$\tilde{\Psi}_m = \sum_{n=1}^m B_n \Psi_n = A_{m0} \eta^{2m}. \quad (3.84)$$

La densidad superficial correspondiente a estos nuevos modelos sería

$$\tilde{\Sigma}_m(R) = \sum_{n=1}^m B_n \Sigma_c^{(n)} \eta^{2n-1}, \quad (3.85)$$

y mediante el uso de la ecuación (3.84), la densidad (3.85) se podría reescribir como

$$\tilde{\Sigma}_m(R) = \sum_{n=1}^m B_n \Sigma_c^{(n)} (\tilde{\Psi}_m / A_{m0})^{(2n-1)/(2m)}. \quad (3.86)$$

De esta forma, las funciones de distribución de los modelos, calculadas mediante la fórmula (2.8), serían

$$f_{m+}(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi m} \sum_{n=1}^m \frac{B_n \Sigma_c^{(n)} (2n-1) A_{m0}^{-(2n-1)/(2m)}}{\varepsilon^{1-(2n-1)/(2m)}}. \quad (3.87)$$

Pasaremos ahora a calcular los coeficientes tales que se satisfaga la relación (3.84).

3.5.2. Cálculo de B_n

El potencial relativo de los discos generalizados de Kalnajs, en términos de los polinomios de Legendre es

$$\Psi_m(\eta) = - \sum_{n=0}^m C_{2n} q_{2n}(0) P_{2n}(0) + \sum_{n=0}^m C_{2n} q_{2n}(0) P_{2n}(\eta) = \sum_{n=0}^m \tilde{C}_n P_{2n}(\eta), \quad (3.88)$$

donde las constantes \tilde{C}_n están dadas por

$$\tilde{C}_n = C_{2n} q_{2n}(0) - \delta_{0n} \sum_{i=0}^m C_{2i} q_{2i}(0) P_{2i}(0), \quad (3.89)$$

siendo δ_{0n} el delta de Kronecker. Mediante la ecuación (3.84), el potencial relativo de los nuevos modelos queda

$$\tilde{\Psi}_m = \sum_{n=0}^m \sum_{i=0}^n B_n \tilde{C}_i P_{2i}(\eta) = \sum_{n=0}^m D_n P_{2n}(\eta). \quad (3.90)$$

Para calcular las constantes D_n , se observa que

$$D_m = B_m \tilde{C}_m, \quad (3.91a)$$

$$D_{m-1} = B_m \tilde{C}_{m-1} + B_{m-1} \tilde{C}_{m-1}, \quad (3.91b)$$

$$D_{m-2} = B_m \tilde{C}_{m-2} + B_{m-1} \tilde{C}_{m-2} + B_{m-2} \tilde{C}_{m-2}, \quad (3.91c)$$

⋮

$$D_{m-k} = \tilde{C}_{m-k} \sum_{i=0}^k B_{m-i}. \quad (3.91d)$$

Entonces, haciendo el cambio de índices $n = m - k$, se obtiene

$$D_n = \tilde{C}_n \sum_{i=0}^{m-n} B_{m-i}. \quad (3.92)$$

Ahora, dado que

$$\sum_{n=0}^m D_n P_{2n}(\eta) = A_{m0} \eta^{2m}, \quad (3.93)$$

por medio de las propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Legendre [1] se obtiene

$$D_n = A_{m0} \frac{4n+1}{2} \int_{-1}^1 \eta^{2m} P_{2n}(\eta) d\eta. \quad (3.94)$$

Al resolver la integral [4], las constantes quedan

$$D_n = A_{m0} \left[\frac{\pi^{1/2} (4n+1) \Gamma(2m+1)}{2^{2m+1} \Gamma(1+m-n) \Gamma(m+n+\frac{3}{2})} \right]. \quad (3.95)$$

Para recobrar las constantes B_n , procedemos por recurrencia. De esta manera, de la ecuación (3.91a) se obtiene B_m ; de (3.91b) se obtiene B_{m-1} , y así sucesivamente. En general, se observa que

$$B_m = \frac{D_m}{\tilde{C}_m} = 1, \quad (3.96a)$$

$$B_{m-1} = \frac{D_{m-1}}{\tilde{C}_{m-1}} - B_m, \quad (3.96b)$$

$$B_{m-2} = \frac{D_{m-2}}{\tilde{C}_{m-2}} - B_m - B_{m-1}, \quad (3.96c)$$

⋮

$$B_{m-k} = \frac{D_{m-k}}{\tilde{C}_{m-k}} - \sum_{i=0}^{k-1} B_{m-i}, \quad \text{para } k \geq 1. \quad (3.96d)$$

Entonces, haciendo el cambio de índices $n = m - k$, se obtiene finalmente

$$B_n = \frac{D_n}{\tilde{C}_n} - \sum_{i=0}^{m-n-1} B_{m-i}, \quad \text{para } n \leq m-1. \quad (3.97)$$

En la tabla 3.1 se muestran los coeficientes B_n correspondientes a los 4 primeros modelos construidos como combinaciones lineales de los discos generalizados de Kalnajs. Para $m = 2$ se combinan los dos primeros discos, para $m = 3$ se combinan los tres primeros discos, y así sucesivamente.

En general, se observa que los coeficientes B_n para $n < m$ son negativos, y esto resulta razonable, ya que los coeficientes se eligen de tal forma que en el potencial relativo se cancelen las potencias de η^{2n} para $n < m$. Aunque al parecer, el problema correspondiente a la formulación de los nuevos modelos está solucionado, la densidad superficial correspondiente a tales modelos tiene el defecto de tener zonas negativas y por tanto,

m	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
2	$-5/8$	1			
3	$-35/192$	$-7/12$	1		
4	$-105/1024$	$-21/128$	$-9/16$	1	
5	$-1155/16384$	$-231/2560$	$-99/640$	$-11/20$	1

Tabla 3.1: Constantes B_n para los 4 primeros modelos.

no se pueden considerar como modelos reales. En la figura 3.11 se muestra el comportamiento no deseado de la densidad superficial correspondiente a los nuevos modelos. Sin embargo, veremos que es posible solucionar este inconveniente modificando algunos coeficientes, y aun así, siendo factible el cálculo de las funciones de distribución respectivas.

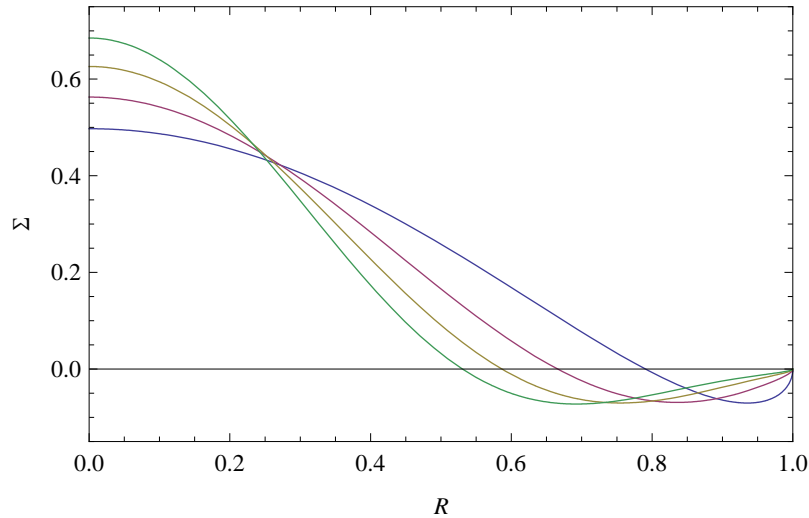


Figura 3.11: Densidad superficial de masa para los 4 primeros discos. Los modelos presentan una zona de densidad negativa y por lo tanto no describen sistemas reales.

3.5.3. Corrección del coeficiente B_1

Una posibilidad simple para corregir los modelos consiste en modificar el coeficiente B_1 , que corresponde al término relacionado con el primer disco de Kalnajs. Este disco, en particular, tiene la característica de que el comportamiento de su densidad superficial cuando $R \rightarrow a$ es diferente al del resto de los discos. Observamos que

$$\lim_{R \rightarrow a} \frac{d\Sigma_m}{dR} = -\frac{\Sigma_c^{(m)}}{a^2} \lim_{R \rightarrow a} R \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{m-3/2} = \begin{cases} -\infty & \text{cuando } m = 1, \\ 0 & \text{cuando } m \geq 2. \end{cases} \quad (3.98)$$

Entonces, la densidad superficial de los discos de Kalnajs tiende asintóticamente a 0 cuando $m \geq 2$, caso que no se da para el primer disco (este comportamiento se puede observar claramente en la figura A.1).

Así, resulta evidente que existe una constante $B_{1\min}$, tal que al multiplicar la densidad del primer disco por dicha constante o un valor superior, se obtiene una función que es mayor que cualquier combinación lineal de las densidades correspondientes al resto de los discos, en el rango $0 \leq R \leq a$. En nuestro caso particular, tenemos que la densidad superficial puede ser escrita como

$$\tilde{\Sigma}_m(R, B_1) = B_1 \Sigma_c^{(1)} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{1/2} + \sum_{n=1}^m B_n \Sigma_c^{(n)} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{n-1/2}, \quad (3.99)$$

donde los B_n para $n \geq 2$ están dados por (3.97). Entonces, según la figura 3.11, para garantizar que la densidad sea siempre positiva debemos solucionar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \frac{d\tilde{\Sigma}(R, B_{1\min})}{dR} \right|_{R=R_{\min}} = 0, \quad (3.100)$$

$$\tilde{\Sigma}(R_{\min}, B_{1\min}) = 0. \quad (3.101)$$

La ecuación (3.100) garantiza que la densidad superficial tenga un mínimo en $B_1 = B_{1\min}$ y $R = R_{\min}$, mientras que la ecuación (3.101) garantiza que ese mínimo sea cero. La solución numérica de este sistema de ecuaciones arroja los valores mostrados en la tabla 3.2, para los 4 primeros modelos.

m	B_{1min}	B₂	B₃	B₄	B₅
2	0	1			
3	0,101273	-7/12	1		
4	0,128914	-21/128	-9/16	1	
5	0,143207	-231/2560	-99/640	-1/20	1

Tabla 3.2: Constantes B_n corregidas, para los 4 primeros modelos.

En la figura 3.12, se grafican las densidades correspondientes a los 4 primeros modelos, para diferentes valores de B_1 mayores que $B_{1\min}$. En general, se observa que la masa se va concentrando en el centro a medida que m aumenta.

Además de esto, resulta interesante analizar otras propiedades importantes de los modelos. Aparte de la densidad, una cantidad comúnmente utilizada para caracterizar a

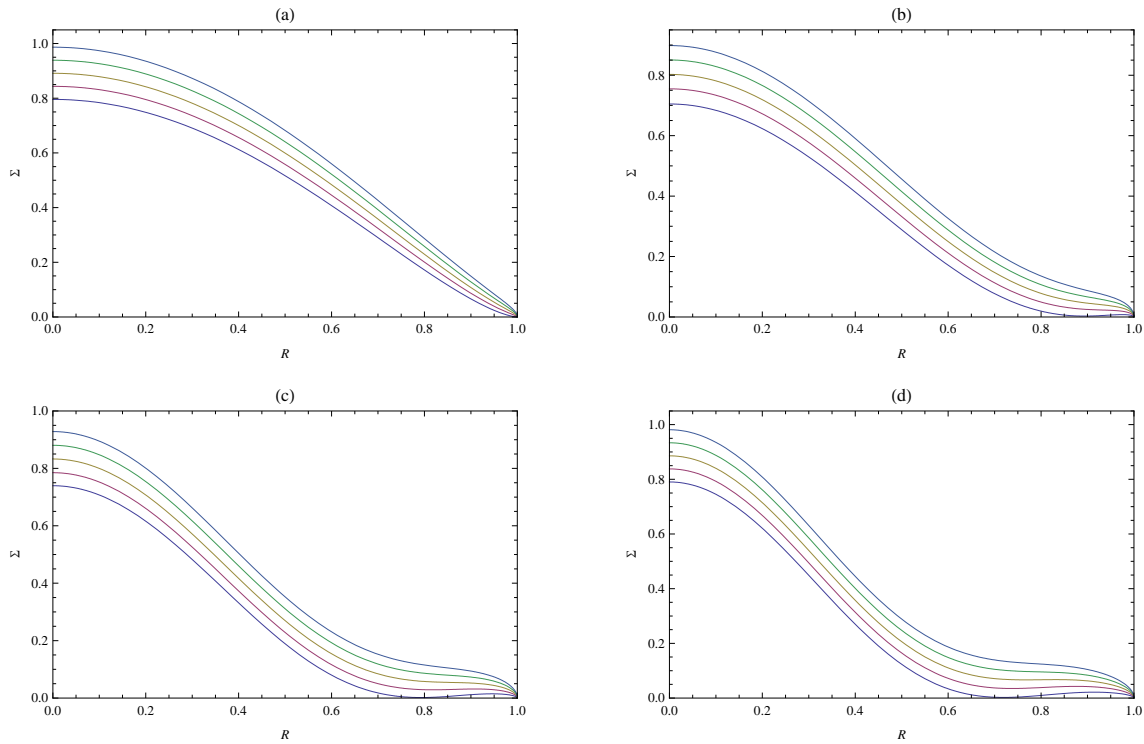


Figura 3.12: Densidad superficial de los 4 primeros discos: (a) $m = 2$, (b) $m = 3$, (c) $m = 4$, (d) $m = 5$. Las gráficas corresponden a diferentes valores de B_1 , comenzando por $B_{1\min}$ y con incrementos de 0,05.

los sistemas estelares es la velocidad circular $V_c(R)$, también llamada curva de rotación, definida como la velocidad tangencial de las estrellas que describen órbitas circulares. Para un potencial gravitacional dado, Φ , es posible calcular V_c a través de la relación[6]

$$V_c^2 = R \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{z=0}. \quad (3.102)$$

Las curvas de rotación correspondientes a los cuatro primeros modelos se muestran en la figura 3.13. Para $B_1 = B_{1\min}$ las curvas presentan un máximo, y luego decaen a un valor constante, el cual es un comportamiento similar al presentado por los discos generalizados de Kalnajs (ver figura A.3). Además, a medida que m se incrementa, el máximo de la curva se presenta en un radio menor. En el caso que B_1 se hace arbitrariamente grande, la curva de rotación tiende a una línea recta, predominando el término que corresponde al primer disco de Kalnajs. Por otra parte, para valores intermedios de B_1 se presenta un caso interesante: las curvas de rotación suben a un máximo y se mantienen aproximadamente constantes. En este caso, los modelos adquieren un particular interés físico, debido a que este es el comportamiento más común obtenido observacionalmente, en el caso de galaxias. Los primeros modelos teóricos de galaxias no presentaban este comportamiento particular y esta fue una de las razones para considerar la existencia de la llamada *materia oscura*.

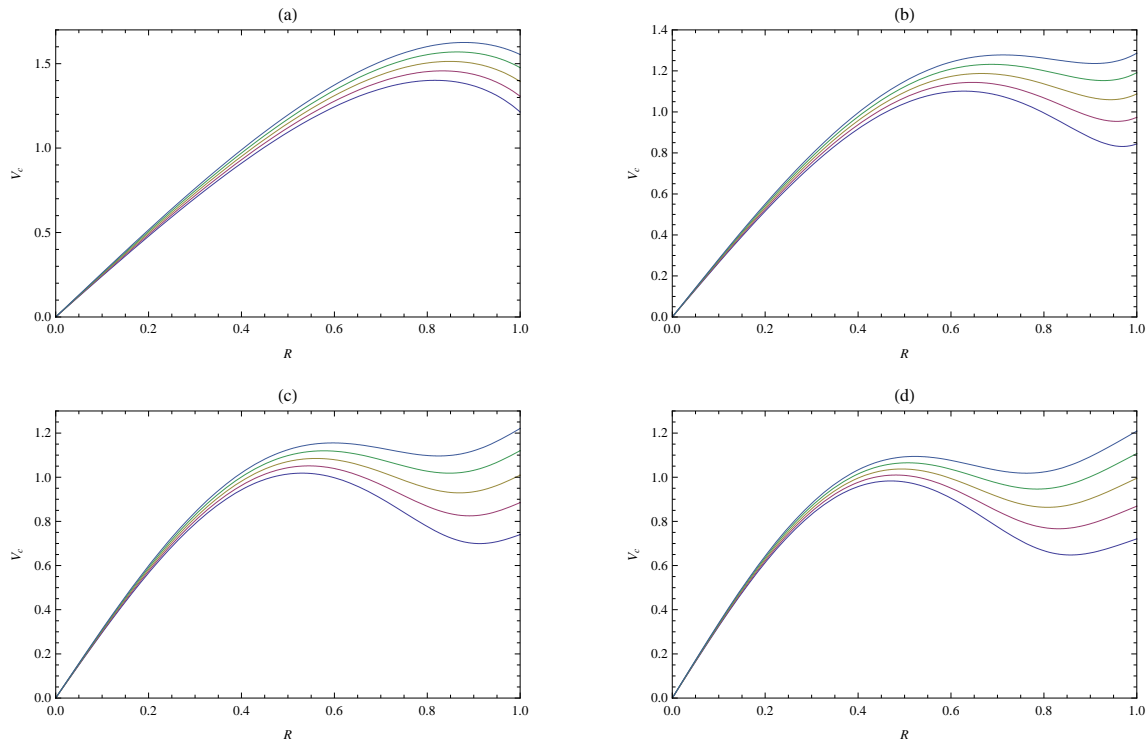


Figura 3.13: Curvas de rotación para los 4 primeros discos: (a) $m = 2$, (b) $m = 3$, (c) $m = 4$, (d) $m = 5$. Las gráficas corresponden a diferentes valores de B_1 , comenzando por $B_{1\min}$ y con incrementos de 0,05.

3.5.4. Funciones de distribución

Debido a la corrección del coeficiente B_1 , las funciones de distribución dadas por (3.87) dejan de ser válidas. No obstante, el cálculo de dichas funciones sigue siendo particularmente sencillo al trabajar en un sistema de referencia apropiado.

Habíamos visto que para un B_1^* dado por la formula de recurrencia (3.97), el potencial relativo resultaba ser

$$\tilde{\Psi}_m = B_1^* \Psi_1 + \sum_{n=2}^m B_n \Psi_n = A_{m0} \eta^{2m}. \quad (3.103)$$

Entonces, al considerar un B_1 diferente, el potencial relativo queda

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_m &= B_1 \Psi_1 + \sum_{n=2}^m B_n \Psi_n = A_{m0} \eta^{2m} + (B_1 - B_1^*) \Psi_1, \\ &= A_{m0} \eta^{2m} + \frac{1}{2} (B_1 - B_1^*) \Omega_0^2 a^2 \eta^2, \end{aligned} \quad (3.104)$$

donde $\Omega_0 = [3\pi GM/(4a^3)]^{1/2}$, definido previamente en la sección 3.4.1.

Ahora, consideremos un sistema de referencia en rotación, con velocidad angular Ω . En este sistema, el potencial efectivo está dado por

$$\Phi_e = \Phi - \frac{1}{2}\Omega^2 R^2 = \Phi + \frac{1}{2}\Omega^2 a^2(\eta^2 - 1), \quad (3.105)$$

de manera que el potencial relativo-efectivo, al escoger las constantes apropiadas, queda

$$\tilde{\Psi}_{e,m} = A_{m0}\eta^{2m} + \frac{1}{2}(B_1 - B_1^*)\Omega_0^2 a^2 \eta^2 - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 \eta^2. \quad (3.106)$$

Entonces, para cancelar los términos de η^2 , escogemos Ω tal que

$$\Omega = \pm\Omega_0\sqrt{B_1 - B_1^*}, \quad (3.107)$$

con lo que (3.106) se reduce a

$$\tilde{\Psi}_{e,m} = A_{m0}\eta^{2m}, \quad (3.108)$$

y la relación entre la densidad y el potencial relativo-efectivo queda

$$\tilde{\Sigma}_m(R) = \sum_{n=1}^m B_n \Sigma_c^{(n)} (\tilde{\Psi}_{e,m}/A_{m0})^{(2n-1)/(2m)}. \quad (3.109)$$

Por último, utilizando la fórmula (2.8), cuando $m = 0$, calculamos las funciones de distribución de los modelos, en el marco de referencia en rotación:

$$f_{m+}(\varepsilon') = \frac{1}{4\pi m} \sum_{n=1}^m \frac{B_n \Sigma_c^{(n)} (2n-1) A_{m0}^{-(2n-1)/(2m)}}{\varepsilon'^{1-(2n-1)/(2m)}}. \quad (3.110)$$

Para pasar al marco de referencia original, hacemos el cambio de variable $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon + \Omega L_z - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2$, obteniendo

$$f_m(\varepsilon, L_z) = \frac{1}{4\pi m} \sum_{n=1}^m \frac{B_n \Sigma_c^{(n)} (2n-1) A_{m0}^{-(2n-1)/(2m)}}{(\varepsilon + \Omega L_z - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2)^{1-(2n-1)/(2m)}}. \quad (3.111)$$

En la tabla 3.3, se muestran las DFs explícitas para los 4 primeros modelos así como las Ω respectivas dadas por (3.107).

Cabe mencionar que las DFs obtenidas mediante (3.111), para los casos $m \geq 3$, pueden resultar negativas en algunas zonas del espacio de fase que se encuentran el dominio físico de interés. Para evitar este inconveniente, es necesario imponer una condición adicional sobre las constantes B_1 , de tal forma que la función de distribución quede bien definida. Entonces, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \frac{df_m(J, B'_{1\min})}{dR} \right|_{J=J_{\min}} = 0, \quad (3.112)$$

$$f_m(J_{\min}, B'_{1\min}) = 0. \quad (3.113)$$

\mathbf{m}	Ω	$\mathbf{f}_m(\mathbf{J})$
2	$\pm \sqrt{\frac{3\pi GM(5+8B_1)}{32a^3}}$	$\frac{3\Sigma_c^{(2)}}{4} \left(\frac{128a}{45GM\pi}\right)^{3/4} J^{-1/4} + \frac{B_1\Sigma_c^{(1)}}{4} \left(\frac{128a}{45GM\pi}\right)^{1/4} J^{-3/4}$
3	$\pm \sqrt{\frac{3\pi GM(35+192B_1)}{768a^3}}$	$\frac{5\Sigma_c^{(3)}}{6} \left(\frac{512a}{175GM\pi}\right)^{5/6} J^{-1/6} - \frac{7\Sigma_c^{(2)}}{24} \left(\frac{512a}{175GM\pi}\right)^{3/6} J^{-3/6} + \frac{B_1\Sigma_c^{(1)}}{6} \left(\frac{512a}{175GM\pi}\right)^{1/6} J^{-5/6}$
4	$\pm \sqrt{\frac{3\pi GM(105+1024B_1)}{4096a^3}}$	$\frac{7\Sigma_c^{(4)}}{8} \left(\frac{32768a}{11025GM\pi}\right)^{7/8} J^{-1/8} - \frac{45\Sigma_c^{(3)}}{128} \left(\frac{32768a}{11025GM\pi}\right)^{5/8} J^{-3/8} - \frac{63\Sigma_c^{(2)}}{1024} \left(\frac{32768a}{11025GM\pi}\right)^{3/8} J^{-5/8}$ $+ \frac{B_1\Sigma_c^{(1)}}{8} \left(\frac{32768a}{11025GM\pi}\right)^{1/8} J^{-7/8}$
5	$\pm \sqrt{\frac{3\pi GM(1155+16384B_1)}{65536a^3}}$	$\frac{9\Sigma_c^{(5)}}{10} \left(\frac{131072a}{43659GM\pi}\right)^{9/10} J^{-1/10} - \frac{77\Sigma_c^{(4)}}{200} \left(\frac{131072a}{43659GM\pi}\right)^{7/10} J^{-3/10} - \frac{99\Sigma_c^{(3)}}{1280} \left(\frac{131072a}{43659GM\pi}\right)^{5/10} J^{-5/10}$ $- \frac{693\Sigma_c^{(2)}}{25600} \left(\frac{131072a}{43659GM\pi}\right)^{3/10} J^{-7/10} + \frac{B_1\Sigma_c^{(1)}}{10} \left(\frac{131072a}{43659GM\pi}\right)^{1/10} J^{-9/10}$

Tabla 3.3: Funciones de distribución correspondientes a los 4 primeros modelos. Las Ω respectivas están dadas por (3.107) y $J = \varepsilon + \Omega L_z - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2$ representa la integral de Jacobi.

La ecuación (3.112) garantiza que la DF tenga un mínimo en $B_1 = B'_{1\min}$ y $R = R_{\min}$, mientras que la ecuación (3.113) garantiza que ese mínimo sea cero. La solución numérica de este sistema de ecuaciones arroja los valores mostrados en la tabla 3.4, para los modelos correspondientes a $m = 3, 4, 5$.

m	$B'_{1\min}$
3	0,182292
4	0,287827
5	0,381061

Tabla 3.4: Constantes $B'_{1\min}$ para $m = 3, 4, 5$.

Entonces, tomando estos valores como límite inferior para B_1 , las funciones de distribución dadas por (3.111) quedan definidas positivamente en el dominio físico del espacio de fase. La figura 3.14 muestra las gráficas de las DFs en función de la integral de Jacobi, para diferentes valores de B_1 .⁸ En general, se observa que la probabilidad es máxima para valores pequeños de J , y tiende a constante a medida que J se incrementa. Además, en los casos $m \geq 3$ se observa que para valores de B_1 cercanos a $B'_{1\min}$ la probabilidad tiene un mínimo en $J \approx J_{\min}$, y es cero para $B_1 = B'_{1\min}$ en $J = J_{\min}$ en concordancia con las ecuaciones (3.112) y (3.113).

Por otra parte, resulta conveniente formular nuevas funciones de distribución que correspondan a estados de rotación mas probable. De igual forma que los casos previamente estudiados, tomamos la parte par de las DFs dadas por (3.111), y mediante el principio de máxima entropía obtenemos

$$\tilde{f}_m(\varepsilon, L_z) = \frac{2f_{m+}(\varepsilon, L_z)}{1 + e^{-\alpha L_z}}. \quad (3.114)$$

En la figura 3.15 se muestra el comportamiento de las DFs dadas por (3.114). En (a) y (b) se grafican los contornos correspondientes al caso $m = 2$, variando el parámetro α . En (c) y (d) se grafican los contornos correspondientes al caso $m = 3$ con $B_1 \approx B'_{1\min}$ para los mismos valores de α . El comportamiento de las DFs para los demás casos es similar al mostrado en estas figuras: cuando $B_1 \gg B'_{1\min}$, los contornos son similares a (a) y (b), mientras que si $B_1 \approx B'_{1\min}$, los contornos son similares a (c) y (d), en concordancia con la figura 3.14.

⁸En este caso no se grafican los contornos de las DFs ya que al depender de la integral de Jacobi, el resultado sería una serie de franjas rectas, similar a las mostradas en la figura 3.6.

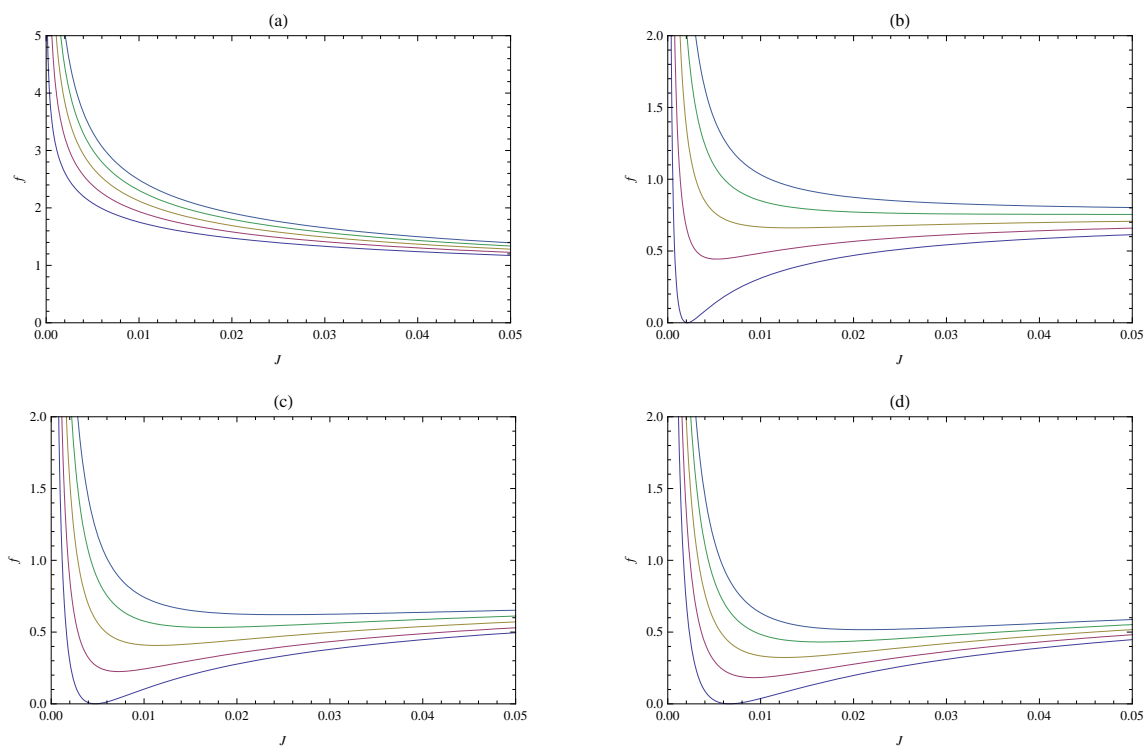


Figura 3.14: Funciones de distribución en función de la integral de Jacobi, correspondientes a los 4 primeros modelos: (a) $m = 2$, (b) $m = 3$, (c) $m = 4$, (d) $m = 5$. Las gráficas corresponden a diferentes valores de B_1 , comenzando por $B'_{1\min}$ y con incrementos de 0,05.

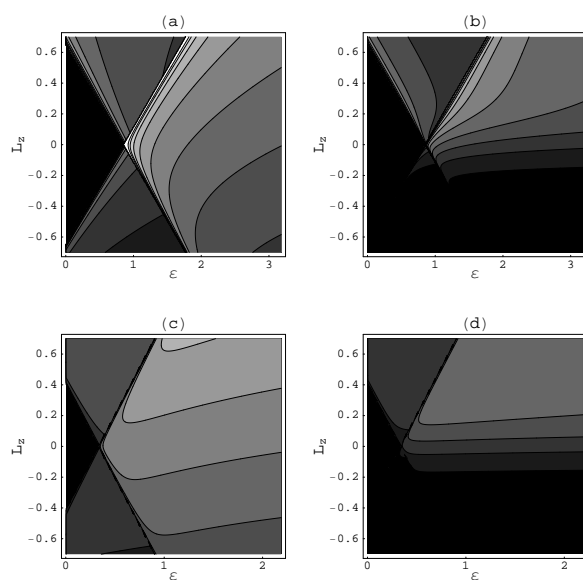


Figura 3.15: Contornos de \tilde{f}_m , dados por (3.114), para $m = 2$, $B_1 = 0,1$ y (a) $\alpha = 1$; (b) $\alpha = 10$. También se muestra el caso $m = 3$ con $B_1 = 0,2$ y (c) $\alpha = 1$; (d) $\alpha = 10$. Las zonas claras representan mayor probabilidad.

CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió el problema referente a la construcción modelos autoconsistentes de sistemas estelares; es decir, modelos con potencial gravitacional, densidad de masa y función de distribución consistentes entre sí por medio de la ecuación de Poisson y la ecuación de Boltzmann sin colisiones. Para hacer esto, se dividió el contenido del trabajo en tres capítulos fundamentales, cada uno de los cuales con resultados y conclusiones independientes.

Como primer paso, se estudió la teoría básica que describe el comportamiento estadístico de los sistemas estelares de muchas partículas, y en particular, aquellos que presentan simetría axial. De este estudio se puede concluir lo siguiente:

1. La ecuación de Boltzmann sin colisiones describe acertadamente la evolución de sistemas estelares con tiempo libre medio y tiempo de relajación arbitrariamente grandes. Además, ésta puede ser interpretada como una ecuación de continuidad para la función de distribución, en el espacio de fase 6-dimensional.
2. Para sistemas que se encuentran en estados de equilibrio, la función de distribución depende de las coordenadas del espacio de fase únicamente a través de las dos integrales de movimiento clásicas; es decir, la energía y el momento angular respecto al eje de simetría.
3. La parte par de la función de distribución, respecto al momento angular, está determinada por el par potencial-densidad y para hallarla se debe solucionar la ecuación fundamental. En el caso de sistemas tridimensionales dicha ecuación está dada por (1.43), mientras que en el caso de sistemas planos la ecuación equivalente es (1.48).
4. La parte impar de la función de distribución depende del estado particular de rotación en el sistema y por lo tanto, no se puede determinar a partir del par potencial-densidad. En este caso, utilizando el principio de máxima entropía fue posible determinar la función que representa el estado mas probable, obteniendo la DF dada por (1.63).

En segunda instancia, se elaboró un desarrollo teórico, en el cual se introdujo un nuevo formalismo para solucionar la ecuación fundamental. Las técnicas utilizadas involucraron el uso del cálculo fraccional, rama de las matemáticas que trabaja con operadores derivada de orden no entero. De éste desarrollo podemos concluir:

1. El método puede ser considerado como una generalización de la expansión de Fricke. Esto representa una característica muy importante, ya que la mayoría de funciones de distribución obtenidas hasta la fecha habían sido halladas utilizando dicho método. Además, para valores enteros de α_n , el método es equivalente a los resultados obtenidos por Jiang & Ossipkov, mientras que el caso $\alpha_n = 0$ correspondiente a la ecuación (2.40) es equivalente al método desarrollado por Kalnajs para sistemas planos.
2. El formalismo utilizado es aplicable tanto a sistemas tridimensionales como a sistemas planos, lo cual es una ventaja sobre los demás métodos desarrollados. Además, en el caso de sistemas planos no es necesario el cálculo de la pseudo-densidad volumétrica de masa, dada por (1.49), que en muchos casos presentaba complicaciones.
3. Las fórmulas obtenidas pueden ser aplicadas a una gran variedad de sistemas estelares, dada la forma genérica de la densidad en términos del potencial y de la coordenada radial.
4. El uso de derivadas fraccionales muestra una posible conexión de la función de distribución con funciones fractales. En este punto, surge la importante pregunta ¿Será posible modelar sistemas complejos, en el espacio de fase, mediante geometría fractal?

Por último, se analizaron varios casos como aplicaciones de los métodos desarrollados en el capítulo 2. Los modelos considerados fueron: el modelo logarítmico de Binney, el disco de Mestel y los 4 primeros discos generalizados de Kalnajs. Además, se propusieron una serie de nuevos modelos como combinación lineal de los discos de Kalnajs, conformando una familia infinita de modelos autoconsistentes, dado que en este caso fue factible el cálculo de las funciones de distribución respectivas. De éste capítulo se puede concluir lo siguiente:

1. En general, el parámetro α correspondiente a los modelos con entropía máxima, determina la rotación del sistema; a medida que se aumenta α , la probabilidad de encontrar estrellas con un L_z grande también se incrementa. Cuando α es negativo se presenta un caso similar; a medida que α disminuye, la probabilidad de encontrar estrellas con L_z menor se va incrementando.
2. Para el modelo logarítmico de Binney, en el caso oblató, hay una gran probabilidad de encontrar estrellas con L_z grande en valor absoluto. En el caso prolato sucede

lo contrario, pues la probabilidad es mayor en el caso de que las estrellas tengan L_z de órdenes bajos.

3. Los parámetros v_0 del modelo de Binney y v_c del disco de Mestel juegan papeles similares. Estos determinan la tasa de cambio de la función de distribución, de manera que los contornos se acercan a medida que v_0 decrece, o éstos se separan a medida que v_0 aumenta. Lo mismo sucede en el caso de v_c .
4. A medida que se incrementa el parámetro m , correspondiente al disco de Mestel, la probabilidad de encontrar estrellas con L_z grande en magnitud también se incrementa, mientras que la probabilidad de encontrar estrellas con L_z pequeño disminuye. Este comportamiento es similar al presentado en el caso oblató correspondiente al modelo de Binney.
5. En el caso de los discos generalizados de Kalnajs solo es posible encontrar las DFs respectivas, en función de la integral de Jacobi, para los 4 primeros modelos. Esto se debe a que, para hacer esto, se debe invertir una ecuación polinómica de orden m , lo cual es posible únicamente para los 4 primeros casos.
6. Es posible construir nuevos modelos estelares, como combinación lineal de modelos existentes. De esta forma, si se combinan apropiadamente ciertos modelos, se simplifica el cálculo de la función de distribución y los modelos construidos quedan automáticamente autoconsistentes.
7. Las densidades obtenidas para los nuevos modelos presentan un comportamiento que concuerda con los datos observacionales para la mayoría de galaxias: tienen un máximo en $R = 0$, decrecen, y se anulan en el borde de la galaxia.
8. Las curvas de rotación de los nuevos modelos, para ciertos valores de B_1 , presentan un comportamiento más realista que las curvas correspondientes a los discos generalizados de Kalnajs. Éstas aumentan con el radio hasta cierto punto y finalmente permanecen en un rango aproximadamente constantes.

Además, cabe mencionar que las curvas de rotación mostradas en la figura 3.13, concuerdan aproximadamente con las curvas obtenidas para las galaxias (a) UGC 6399, (b) NGC 5585, (c) NGC 4088, (d) NGC 4448 [7]. Para un ajuste preciso, sería necesario comparar las curvas dadas por la observación con las curvas teóricas, y minimizar el error mediante el método de mínimos cuadrados para determinar las constantes M y B_1 .

Los resultados del presente proyecto de investigación condujeron a la redacción de tres artículos distribuidos de la siguiente manera:

- “*Fractional derivative approach to the self-gravitation equation*” En este artículo se muestran los desarrollos referentes a la solución de la ecuación fundamental,

formalismo introducido en el capítulo 2, y como ejemplos se muestran los casos correspondientes al potencial logarítmico de Binney y al disco de Mestel.

- *“Two-integral distribution function for generalizad Kalnajs discs”* En este artículo se obtienen las funciones de distribución para los 4 primeros discos generalizados de Kalnajs, de manera similar al procedimiento efectuado en la sección 3.4.
- *“An infinite family of self-consistent models for axisymmetric flat galaxies”* En este artículo se presentan los nuevos modelos, desarrollados en la sección 3.5, se calculan las funciones de distribución y se realiza un análisis mas detallado de la cinemática de partículas alrededor de los modelos, caos y estabilidad de las órbitas circulares.

En el momento, el segundo artículo ha sido sometido a la revista “Monthly Notices of the Royal Astronomical Society”, mientras que los otros dos aún se encuentran en proceso de edición, a fin de ser sometidos a revistas internacionales.

APÉNDICES

A.1 La expansión de Fricke

Fricke (1951) propuso que la forma de las funciones de distribución para sistemas axialmente simétricos eran productos entre potencias de ε y L_z [15]. Se emplea el término **componente de Fricke** para denotar la parte de la DF que tiene la forma $\varepsilon^\beta L_z^{2\alpha}$, donde el 2 en el exponente de L_z garantiza que la componente es par respecto a L_z . De acuerdo a la ecuación (1.43) la densidad es

$$\rho(R, z) = \frac{4\pi}{R} \int_0^\Psi \varepsilon^\beta \left[\int_0^{R\sqrt{2(\Psi-\varepsilon)}} L_z^{2\alpha} dL_z \right] d\varepsilon. \quad (\text{A.1})$$

Al hacer la integral sobre L_z y cambiar la segunda variable de integración a $x = \varepsilon/\Psi$, se obtiene

$$\begin{aligned} \rho(R, z) &= \frac{2^{\alpha+5/2}}{2\alpha+1} \pi R^{2\alpha} \Psi^{\alpha+\beta+3/2} \int_0^1 x^\beta (1-x)^{\alpha+1/2} dx \\ &= 2^{\alpha+3/2} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(\beta+\alpha+\frac{5}{2})} \pi R^{2\alpha} \Psi^{\alpha+\beta+3/2}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

para $\alpha > -1/2$ y $\beta > -1$. Entonces, la densidad correspondiente a una componente de Fricke es una potencia de R multiplicada por una potencia de Ψ . Por comodidad, se emplea (A.2) en la forma

$$\rho = R^{2\alpha} \Psi^\beta \quad \Leftrightarrow \quad f = \frac{2^{-(\alpha+3/2)} \Gamma(\beta+1)}{\pi \Gamma(\alpha+\frac{1}{2}) \Gamma(\beta-\alpha-\frac{1}{2})} L_z^{2\alpha} \varepsilon^{\beta-\alpha-3/2}, \quad (\text{A.3})$$

para $\alpha > -1/2$ y $\beta > n + 1/2$.

A.2 El método de Jiang & Ossipkov

Jiang & Ossipkov (2007) propusieron funciones de distribución para sistemas axialmente simétricos como productos entre potencias de L_z^2 y funciones dependientes de ε [28].

Expandiendo $\rho(\Psi, R)$ en series de potencias de R^2 se puede escribir

$$\rho(\Psi, R) = \sum_{n=0}^k R^{2n} \tilde{\rho}_n(\Psi). \quad (\text{A.4})$$

Suponiendo que la función de distribución es de la forma

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \sum_{n=0}^k L_z^{2n} h_n(\varepsilon), \quad (\text{A.5})$$

por la ecuación fundamental (1.43) se puede ver que

$$\sum_{n=0}^k R^{2n} \tilde{\rho}_n(\Psi) = \sum_{n=0}^k \frac{4\pi 2^{n+1/2} R^{2n}}{2n+1} \int_0^\Psi h_n(\varepsilon) (\Psi - \varepsilon)^{n+1/2} d\varepsilon, \quad (\text{A.6})$$

al hacer la integral respecto a L_z . Comparando término a término, se llega a

$$\tilde{\rho}_n(\Psi) = \frac{4\pi 2^{n+1/2}}{2n+1} \int_0^\Psi h_n(\varepsilon) (\Psi - \varepsilon)^{n+1/2} d\varepsilon. \quad (\text{A.7})$$

Se asume que $(d^j \tilde{\rho}_n(\Psi)/d\Psi^j)_{\Psi=0} = 0$ para todo $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ y todo $n \in \{0, 1, \dots, k\}$. Entonces, derivando $n+1$ veces respecto a Ψ y utilizando la ecuación integral de Abel [1], se llega a

$$h_n(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} 2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^\varepsilon \frac{d^{n+1} \tilde{\rho}_n(\Psi)}{d\Psi^{n+1}} \frac{d\Psi}{\sqrt{\varepsilon - \Psi}}, \quad (\text{A.8})$$

para $n = 0, 1, \dots, k$. Por lo tanto, la función de distribución queda

$$f_+(\varepsilon, L_z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{n=0}^k \frac{L_z^{2n}}{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^\varepsilon \frac{d^{n+1} \tilde{\rho}_n(\Psi)}{d\Psi^{n+1}} \frac{d\Psi}{\sqrt{\varepsilon - \Psi}} \quad (\text{A.9})$$

Para $n = 0$, la ecuación (A.9) se reduce al caso de Eddington [11]; además, si $\tilde{\rho}_n(\Psi) = \Psi^k$ el resultado es equivalente a la componente de Fricke [15], cuando n es entero.

A.3 La derivada fraccional

En cálculo diferencial, se define la primera derivada de una función por medio de un límite apropiado, el cual representa la razón de cambio de dicha función. También se definen las derivadas sucesivas enteras de una función: segunda derivada, tercera derivada, etc. Sin embargo, es posible concebir teóricamente, en lugar de la primera derivada de una función, una derivada de orden no entero, utilizando para ello técnicas especiales.

La historia del concepto referente una derivada de orden no entero se remonta al nacimiento mismo del cálculo diferencial [49]. A finales del siglo XVII, G. W. Leibniz, filósofo y creador del cálculo moderno, propuso la existencia de la derivada de orden $1/2$ y planteó su posible significado. Sin embargo, la primera investigación rigurosa fue realizada por primera vez por Liouville en una serie de artículos entre 1832-1837, en donde esbozó los primeros avances relacionados con operadores fraccionales. Mas adelante, nuevas investigaciones y desarrollos efectuados entre otros por Riemann, condujeron a la construcción del operador fraccional de Riemann-Liouville, el cual ha sido la piedra angular del cálculo fraccional desde entonces.

Antes de Liouville and Riemann, Euler realizó el primer paso en el estudio de la integración fraccional. Él estudió el caso simple correspondiente a integrales fraccionales de monomios de orden real; se ha dicho que esto lo condujo a la construcción de la función gamma, la cual generaliza el operador factorial para valores reales. Los resultados obtenidos por Liouville fueron retomados mas adelante por el matemático sueco Holmgren, quien en 1865 realizó importantes contribuciones en el desarrollo del cálculo fraccional. Sin embargo, fue Riemann quien dio la forma final al operador derivada fraccional, haciéndolo mucho mas útil que sus predecesores.

En la actualidad, aunque existen diferentes formas y definiciones equivalentes del operador fraccional, el operador de Riemann-Liouville es aún el mas utilizado al efectuar derivadas de orden fraccional. Este operador está dado por

$$D_x^{n+\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[\int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^\alpha} dy \right], \quad (\text{A.10})$$

donde $0 < \alpha < 1$ y n es cualquier número natural. En la tabla A.1 se muestran las derivadas fraccionales correspondientes a las funciones mas comunes.

$f(x)$	$D_x^\alpha f(x)$
x^c	$\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(c-\alpha+1)} x^{c-\alpha}$
e^{cx}	$c^\alpha e^{cx}$
$\sin(cx)$	$c^\alpha \sin(cx + \frac{\alpha\pi}{2})$
$\cos(cx)$	$c^\alpha \cos(cx + \frac{\alpha\pi}{2})$

Tabla A.1: Derivadas fraccionales básicas.

Por otra parte, la derivada fraccional conserva dos de las propiedades fundamentales

presentes en las derivadas ordinarias. Estas son, la propiedad de iteración

$$D_x^{\alpha+\beta} f(x) = D_x^\alpha D_x^\beta f(x), \quad (\text{A.11})$$

y la propiedad de linealidad

$$D_x^\alpha (af(x) + bg(x)) = aD_x^\alpha f(x) + bD_x^\alpha g(x). \quad (\text{A.12})$$

Para un estudio detallado y riguroso del cálculo fraccional ver, por ejemplo, el libro de Samko, Kilbas & Marichev, “*Fractional Integrals and Derivatives: theory and applications*” [49].

A.4 Los discos generalizados de Kalnajs

El primer paso para obtener modelos planos de sistemas estelares consiste en encontrar soluciones de la ecuación de Laplace, que representen el potencial exterior producido por una fuente, en este caso, caracterizada por la densidad superficial de masa. Para un potencial con simetría axial, la ecuación de Laplace se puede escribir como

$$\Phi_{,RR} + \frac{\Phi_{,R}}{R} + \Phi_{,zz} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Además de esto, se impone la condición de que el potencial gravitacional tenga simetría de reflexión con respecto al plano $z = 0$,

$$\Phi(R, z) = \Phi(R, -z). \quad (\text{A.14})$$

De esta forma, la derivada $\partial\Phi/\partial z$ satisface la relación

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R, -z) = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R, z), \quad (\text{A.15})$$

de acuerdo con la naturaleza atractiva del campo gravitacional. Por otra parte, para obtener una distribución superficial de masa, es necesario asumir que $\partial\Phi/\partial z$ no se anula en el plano $z = 0$.

Dado un potencial $\Phi(R, z)$ con estas características, la densidad superficial de masa $\Sigma(R)$ puede ser obtenida por medio de la ley de Gauss [6]. Entonces, utilizando la ecuación (A.15), se obtiene

$$\Sigma(R) = \frac{1}{2\pi G} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)_{z=0^+}. \quad (\text{A.16})$$

Ahora, para obtener una densidad superficial correspondiente a un disco finito, se imponen las condiciones de contorno

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(R, 0^+) \neq 0; \quad R \leq a, \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(R, 0^+) = 0; \quad R > a, \quad (\text{A.18})$$

de tal forma que la distribución de masa se restrinja al disco $z = 0$, $0 \leq R \leq a$.

En este punto, se introducen las coordenadas esferoidales oblatas, cuya simetría se adapta de manera natural a la geometría del modelo. Estas coordenadas están relacionadas con las coordenadas cilíndricas por medio de la relación [1]:

$$R = a\sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)}, \quad (\text{A.19})$$

$$z = a\xi\eta, \quad (\text{A.20})$$

donde $0 \leq \xi < \infty$ y $-1 \leq \eta < 1$ y en el disco $\xi = 0$. En términos de estas coordenadas, la ecuación de Laplace se puede escribir como

$$[(1 + \xi^2)\Phi_{,\xi}]_{,\xi} + [(1 - \eta^2)\Phi_{,\eta}]_{,\eta} = 0, \quad (\text{A.21})$$

y se necesita encontrar soluciones que sean funciones pares de η , sujetas a las condiciones de contorno

$$\Phi_{,\xi}(0, \eta) = F(\eta), \quad (\text{A.22})$$

$$\Phi_{,\eta}(\xi, 0) = 0, \quad (\text{A.23})$$

donde $F(\eta)$ es una función par que puede ser expandida en series de los polinomios de Legendre en el intervalo $-1 \leq \eta \leq 1$ [3].

De acuerdo a esto, el potencial gravitacional para el exterior de un disco plano finito con simetría axial puede ser escrito como [3]:

$$\Phi(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (\text{A.24})$$

donde $P_{2n}(\eta)$ y $q_{2n}(\xi) = i^{2n+1} Q_{2n}(i\xi)$ son los polinomios de Legendre y las funciones de Legendre de segunda clase, respectivamente, y C_{2n} son constantes arbitrarias. Entonces, la densidad superficial de masa dada por (A.16) queda

$$\Sigma(R) = \frac{1}{2\pi a G \eta} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} (2n + 1) q_{2n+1}(0) P_{2n}(\eta), \quad (\text{A.25})$$

mientras que la velocidad circular de los modelos, calculada mediante la ecuación (3.102), satisface la relación

$$V^2(R) = \frac{R^2}{(a^2 - R^2)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(0) P'_{2n}(\eta). \quad (\text{A.26})$$

Para que la densidad superficial de masa (A.16) tenga un comportamiento realista, se deben satisfacer ciertas condiciones. La densidad superficial debe ser una función

monótonamente decreciente, con un máximo en el centro del disco, y debe anularse cuando $R = a$. Para esto, se imponen las condiciones de contorno

$$\Sigma(a) = 0, \quad (\text{A.27})$$

$$\Sigma(0) = \Sigma_{max}, \quad (\text{A.28})$$

y también se requiere que

$$M = 2\pi \int_0^a \Sigma(R)RdR, \quad (\text{A.29})$$

donde M es la masa total del disco.

Ahora, utilizando la condición (A.22), la densidad superficial puede ser escrita de la forma

$$\Sigma(R) = \frac{F(\eta)}{2\pi a G \eta}, \quad (\text{A.30})$$

donde $F(\eta)$ es una función par de η , creciente en el intervalo $0 \leq \eta \leq 1$, y es tal que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{F(\eta)}{\eta} = 0. \quad (\text{A.31})$$

Por otra parte, se debe imponer la condición

$$\int_0^1 F(\eta)d\eta = \frac{MG}{a}, \quad (\text{A.32})$$

de acuerdo con la ecuación (A.29).

Una función simple que satisface todos estos requerimientos es

$$F(\eta) = (2m + 1) \frac{MG}{a} \eta^{2m}, \quad m \geq 1, \quad (\text{A.33})$$

de modo que al escoger esta $F(\eta)$ en particular, se obtiene una familia infinita de discos con densidad superficial de masa dada por

$$\Sigma_m(R) = \frac{(2m + 1)M}{2\pi a^2} \left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)^{m-1/2}. \quad (\text{A.34})$$

Cuando $m = 1$, la densidad resultante corresponde al disco de Kalnajs [30], y de esta manera, esta familia de discos puede ser considerada como una generalización del mismo [19, 47]. Las figura A.1 muestra la densida superficial dada por (A.34), para los primeros miembros de la familia.

Ahora, de acuerdo a la ecuación (A.25), la funición $F(\eta)$ puede ser escrita como

$$F(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n} P_{2n}(\eta), \quad (\text{A.35})$$

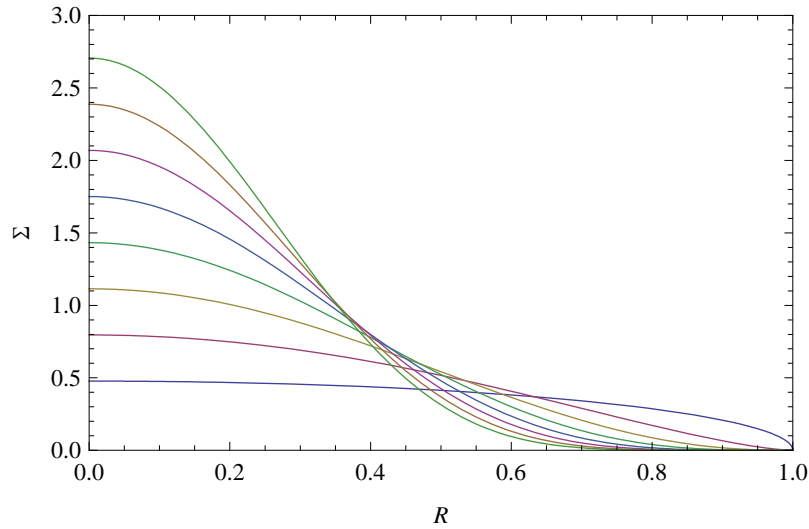


Figura A.1: Densidad superficial de masa para los 8 primeros discos generalizados de Kalnajs. La curva inferior (azul) corresponde a $m = 1$, mientras que la curva superior (verde) corresponde a $m = 8$. La densidad es máxima en $R = 0$ y decrece monótonamente hasta anularse en $R = a$.

donde

$$K_{2n} = (2n + 1)q_{2n+1}(0)C_{2n}. \quad (\text{A.36})$$

Los coeficientes K_{2n} pueden ser obtenidos utilizando la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre a través de la expresión

$$K_{2n} = \frac{4n + 1}{2} \int_{-1}^1 F(\eta)P_{2n}(\eta)d\eta. \quad (\text{A.37})$$

Al hacer la integral [4], se obtiene

$$K_{2n} = \frac{MG}{2a} \left[\frac{\pi^{1/2}(4n + 1)(2m + 1)\Gamma(2m + 1)}{2^{2m}\Gamma(1 + m - n)\Gamma(m + n + \frac{3}{2})} \right], \quad (\text{A.38})$$

y, utilizando propiedades de la función gamma, se obtienen los coeficientes C_{2n} de la ecuación (A.36):

$$C_{2n} = \frac{MG}{2a} \left[\frac{\pi^{1/2}(4n + 1)(2m + 1)!}{2^{2m}(2n + 1)(m - n)!\Gamma(m + n + \frac{3}{2})q_{2n+1}(0)} \right] \quad (\text{A.39})$$

para $n \leq m$ y $C_{2n} = 0$ para $n > m$. La figura A.2 representa el potencial gravitacional en el disco, dado por (A.24) cuando $\xi = 0$, mientras que en la figura A.3 se muestran las curvas de rotación calculadas mediante (A.26), para los primeros miembros de la familia.

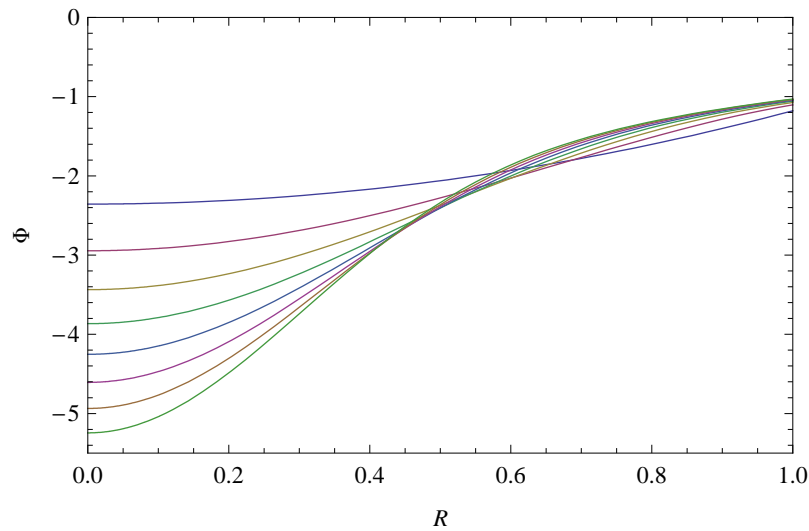


Figura A.2: Potencial gravitacional en el disco, para los 8 primeros discos generalizados de Kalnajs. La curva superior (azul) corresponde a $m = 1$, mientras que la curva inferior (verde) corresponde a $m = 8$. El potencial es mínimo en $R = 0$ y máximo en $R = a$.

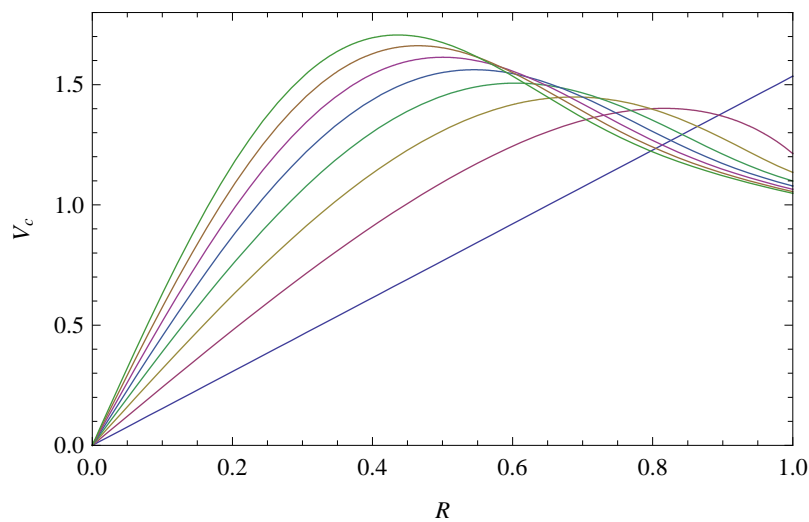


Figura A.3: Curvas de rotación correspondientes a los 8 primeros discos generalizados de Kalnajs. La línea recta (azul) corresponde a $m = 1$, mientras que la curva superior (verde) corresponde a $m = 8$.

REFERENCIAS

- [1] Arfken G., 1973, *Mathematical Methods for Physicists*, 2nd Ed., Academic Press, San Diego.
- [2] Bagin V., 1972, *Model for axisymmetric clusters of stars with uniform mass*, *Astronomicheskii Zhurnal*, Vol. 49, p.1249.
- [3] Bateman H., 1944, *Partial Differential Equations*, Dover, New York.
- [4] Bateman H., 1953, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, McGraw Hill, New York.
- [5] Binney J., 1981, *Resonant excitation of motion perpendicular to galactic planes*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 196, p.455.
- [6] Binney J., Tremaine S., 1987, *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, Princeton.
- [7] Brownstein J., Moffat J., 2006, *Galaxy rotation curves without nonbaryonic dark matter*, *Astrophysical Journal*, Vol. 636, p.721.
- [8] Courant R., Hilbert D., 1953, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1, Interscience Publishers, New York.
- [9] Dejonghe H., 1986, *Stellar dynamics and the description of stellar systems*, *Physics Reports*, Vol. 133, p.217.
- [10] Dejonghe H., de Zeeuw P., 1988, *Analytic axisymmetric galaxy models with three integrals of motion*, *Astrophysical Journal*, Vol. 333, p.90.
- [11] Eddington A., 1916, *The distribution of stars in globular clusters*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 76, p.572.
- [12] Evans N., 1993, *Simple galaxy models with massive haloes*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 260, p.191.
- [13] Evans N., 1994, *The power-law galaxies*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 267, p.333.

-
- [14] Evans N., de Zeeuw P., Lynden-Bell D., 1990, *The flattened isochrone*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 244, p.111.
- [15] Fricke W., 1952, *Dynamics of the velocity distribution in stellar systems*, Astronomische Nachrichten, Vol. 280, p.193.
- [16] Fuchs B., 2001, *Density waves in the shearing sheet. I. Swing amplification*, Astronomy and Astrophysics, Vol. 368, p.107.
- [17] Goldreich P., Lynden-Bell D., 1965, *Gravitational stability of uniformly rotating disks*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 130, p.97.
- [18] Goldstein H., Poole Ch., Safko J., 2002, *Classical Mechanics*, 3rd Ed., Addison-Wesley, San Francisco.
- [19] González G., Reina J., 2006, *An infinite family of generalized Kalnajs discs*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 371, p.1873.
- [20] Hénon M., 1982, *Vlasov equation?*, Astronomy and Astrophysics, Vol. 114, p.211.
- [21] Huang K., 1987, *Statistical Mechanics*, 2nd Ed., John Wiley and Sons, New York.
- [22] Hunter C., 1975, *Determination of the distribution function of an elliptical galaxy*, Astronomical Journal, Vol. 80, p.783.
- [23] Hunter C., Qian E., 1993, *Two-integral distribution functions for axisymmetric galaxies*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 262, p.401.
- [24] Jiang Z., 2000, *Flattened Jaffe models for galaxies*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 319, p.1067.
- [25] Jiang Z., Fang D., Liu H., Moss D., 2002, *General flattened Jaffe models for galaxies*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol. 29, p.31.
- [26] Jiang Z., Moss D., 2002, *Prolate Jaffe models for galaxies*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 331, p.117.
- [27] Jiang Z., Ossipkov L., 2006, *Flattened γ models for galaxies*, Astronomical and Astrophysical Transactions, Vol. 25, p.213.
- [28] Jiang Z., Ossipkov L., 2007, *Two-integral distribution functions for axisymmetric systems*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 379, p.1133.
- [29] Julian W., Toomre A., 1966, *Non-axisymmetric responses of differentially rotating disks of stars*, Astrophysical Journal, Vol. 146, p.810.
- [30] Kalnajs A., 1972, *The equilibria and oscillations of a family of uniformly rotating stellar disks*, Astrophysical Journal, Vol. 175, p.63.

-
- [31] Kalnajs A., 1976, *Dynamics of flat galaxies. III. Equilibrium models*, Astrophysical Journal, Vol. 205, p.751.
- [32] Kutuzov S., 1995, *On the construction of a halo-disk model with a bimodal rotation curve*, Astronomical and Astrophysical Transactions, Vol. 7, p.191.
- [33] Kutuzov S., Ossipkov L., 1980, *Modeling of the spatial gravitational potential of stellar systems*, Astronomicheskii Zhurnal, Vol. 57, p.28.
- [34] Kutuzov S., Ossipkov L., 1986, *The role of equipotential and equidensity surfaces for constructing models of galaxies*, Translated from Astrofizika, Vol. 25, p.545.
- [35] Kutuzov S., Ossipkov L., 1988, *Density in models of highly oblate stellar systems*, Astronomicheskii Zhurnal, Vol. 65, p.468.
- [36] Kuzmin G., Kutuzov S., 1962, *State self-gravitating galaxy model with two-axial velocity distribution*, Bulletin of the Abastumani Astrophysical Observatory, Vol. 27, p.82.
- [37] Lake G., 1981, *Dynamical modeling of elliptical galaxies*, Astrophysical Journal, Vol. 243, p.111.
- [38] Liang Y., Su W., 2007, *Connection between the order of fractional calculus and fractional dimensions of a type of fractal functions*, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 34, p.682.
- [39] Lynden-Bell D., 1962, *Stellar dynamics: Exact solution of the self-gravitation equation*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 123, p.447.
- [40] Mandelbrot B., 1982, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, New York.
- [41] Mestel L., 1963, *On the galactic law of rotation*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 126, p.553.
- [42] Miyamoto M., 1971, *A self-gravitating disk-like stellar system*, Publications of the Astronomical Society of Japan, Vol. 23, p.21.
- [43] Miyamoto M., Nagai R., 1975, *Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies*, Publications of the Astronomical Society of Japan, Vol. 27, p.533.
- [44] Nagai R., Miyamoto M., 1976, *A family of self-gravitating stellar systems with axial symmetry*, Publications of the Astronomical Society of Japan, Vol. 28, p.1.
- [45] Ostriker J., Peebles P., 1973, *A numerical study of the stability of flattened galaxies: or, can cold galaxies survive?*, Astrophysical Journal, Vol. 186, p.467.
- [46] Reif F., 1985, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGraw Hill, New York.

-
- [47] Reina J., 2004, *Potencial gravitacional, densidad superficial y velocidad circular para modelos planos de galaxias*, Trabajo de grado, Universidad Industrial de Santander.
- [48] Reznia V., Sobouti Y., 2000, *Liouville's equation in post Newtonian approximation. I. Static solutions*, Astronomy and Astrophysics, Vol. 354, p.1110.
- [49] Samko S., Kilbas A., Marichev O., 1993, *Fractional Integrals and Derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach, Amsterdam.
- [50] Schenk A., Shapiro S., Teukolsky S., 1999, *Hot, rotating disks in general relativity: collisionless equilibrium models*, Astrophysical Journal, Vol. 521, p.310.
- [51] Satoh C., 1980, *Dynamical models of axisymmetric galaxies and their applications to the elliptical galaxy NGC4697*, Publications of the Astronomical Society of Japan, Vol. 32, p.41.
- [52] Toomre A., 1964, *On the gravitational stability of a disk of stars*, Astrophysical Journal, Vol. 139, p.1217.
- [53] Toomre A., 1982, *Some flattened isothermal models of galaxies*, Astrophysical Journal, Vol. 259, p.535.
- [54] Vorobyov E., Theis Ch., 2006, *Boltzmann moment equation approach for the numerical study of anisotropic stellar discs*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 373, p.197.
- [55] West B., Bologna M., Grigolini P., 2003, *Physics of Fractal Operators*, Springer Verlag, New York.
- [56] Yao K., Su W., Zhou S., 2005, *On the connection between the order of fractional calculus and the dimensions of a fractal function*, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 23, p.621.