

**SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES QUE DESCRIBEN EL COMPORTAMIENTO  
DE LOS MODOS HÍBRIDOS EN UNA GUÍA DE ONDA RECTANGULAR  
PARCIALMENTE LLENA MEDIANTE EL MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN  
RECOCIDO SIMULADO (SIMULATED ANNEALING)**

**AUTORES:**

**JORGE EDUARDO ROMERO AMAYA**

**JOHN HARVEY SUAREZ MORENO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA,  
ELECTRÓNICA Y DE TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA**

**2013**

**SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES QUE DESCRIBEN EL COMPORTAMIENTO  
DE LOS MODOS HÍBRIDOS EN UNA GUÍA DE ONDA RECTANGULAR  
PARCIALMENTE LLENA MEDIANTE EL MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN  
RECOCIDO SIMULADO (SIMULATED ANNEALING)**

**JORGE EDUARDO ROMERO AMAYA  
JOHN HARVEY SUAREZ MORENO**

**Trabajo de Grado para optar al título de  
INGENIERO ELECTRÓNICO**

**Director**

**PhD. CARLOS RODRIGO CORREA CELY**

**Co-Director**

**PhD(c). IVÁN MAURICIO AMAYA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA,  
ELECTRÓNICA Y DE TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA**

**2013**

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco ante todo a Dios, que me permitió alcanzar una meta más y que en momentos de dificultad me llenó de fortaleza.

Al grupo de investigación CEMOS, por la oportunidad de realizar este trabajo de investigación.

A los profesores Rodrigo Correa e Iván Amaya, por el gran apoyo que me brindaron.

A la universidad Industrial de Santander, la escuela de Ingeniería eléctrica electrónica y telecomunicaciones que fueron mi segundo hogar.

John Harvey Suárez Moreno

Primero que todo agradezco a Dios, porque me ha dado la fuerza para seguir adelante y lograr mis metas.

A mi madre, Ubaldina Amaya, quien ha sido mi pilar fundamental, a quien le debo todo y con quien estaré infinitamente agradecido. A mi padre, Jorge Alfonso Romero, aunque no esté terrenalmente conmigo, por todo lo que me enseñó.

A mis hermanos, Lina Fernanda y Julián Alberto, que siempre me han apoyado en mis decisiones.

Al Doctor Rodrigo Correa y al Ingeniero Iván Amaya, quienes me ayudaron y guiaron en este trabajo de grado. A la Universidad Industrial de Santander, que me acogió y me formó para ser un gran profesional.

A mis amigos, compañeros y familiares, quienes aportaron un granito de arena en mi formación.

Jorge Eduardo Romero Amaya

## DEDICATORIAS

A mi madre por su comprensión, amor y paciencia.

A mi padre que me guía desde el cielo.

A mi hermana, por su gran apoyo.

A mis amigos por compartir conmigo este sueño.

John Harvey Suarez Moreno

A Dios, por marcarme el camino para lograr mi sueño. A mi madre, por tanto amor y comprensión que me ha brindado. Gracias a ella estoy culminando esta meta y nada será suficiente para mostrarle el infinito amor y respeto que tengo hacia ella. A mi padre, que desde el cielo está observando este logro y seguramente estará muy orgulloso. A mi hermana, quien ha sido un gran ejemplo para mí y me ha acompañado en todos los desafíos de mi vida. A mi hermanito, Julián Alberto, quien es mi principal motor para salir adelante, a quien le dedicó este trabajo y le deseo muchos éxitos en su vida, puesto que es mi gran orgullo.

Jorge Eduardo Romero Amaya

## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN .....	19
1. DESCRIPCION DEL TRABAJO DE GRADO .....	21
1.1 Objetivo General .....	21
1.2 Objetivos Específicos.....	21
2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.....	22
2.1 Conceptos previos .....	22
2.1.1 Ecuaciones de Maxwell .....	22
2.1.2 Propiedades electromagnéticas de los materiales.....	24
2.2 Guía de ondas .....	25
2.2.1 Modos de propagación en una guía de onda .....	25
2.3 Guía de onda uniforme rectangular .....	26
2.4 Guía de onda rectangular parcialmente llena (50%).....	29
2.5 Recocido simulado (simulated annealing-SA).....	33
3. EVALUACIÓN DEL ALGORITMO A TRAVÉS DE FUNCIONES ESTANDAR	38
3.1 Términos utilizados para parámetros y soluciones .....	38
3.2 Funciones Estándar .....	39
3.2.1 Función de Booth .....	39
3.2.2 Función de Beale.....	40
3.2.3 Función B2 .....	41
3.2.4 Función de Wood .....	42
4. ANÁLISIS Y RESULTADOS.....	44
4.1 Aplicación de sA en la solución de las ecuaciones QUE DESCRIBEN EL COMPORTAMIENTO DE LOS MODOS HÍBRIDOS .....	44

4.1.1	Procedimiento para encontrar la frecuencia de corte .....	45
4.1.2	Solución de las ecuaciones (Función Objetivo).....	48
4.2	Reproducción de resultados mediante Bisección complementado con Newton-Raphson .....	53
4.3	Reproducción de curvas de dispersión de los modos híbridos con diferentes parámetros.....	56
5.	COMPARACIÓN DE RESULTADOS .....	70
6.	OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES .....	72
7.	RECOMENDACIONES .....	74
8.	BIBLIOGRAFIA.....	75
9	ANEXOS .....	77

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Especificaciones del hardware utilizado en la solución de funciones estándar .....	38
Tabla 2. Resultados del algoritmo en la función de Booth .....	40
Tabla 3. Resultados del algoritmo en la función de Beale .....	41
Tabla 4. Resultados del algoritmo en la función de B2 .....	42
Tabla 5. Resultados del algoritmo en la función de Wood .....	43
Tabla 6. Especificaciones del hardware utilizado en la solución de las ecuaciones. ....	45
Tabla 7. Parámetros y resultados del algoritmo para la frecuencia de corte en los modos EH .....	47
Tabla 8. Parámetros y resultados del algoritmo para la frecuencia de corte en los modos HE .....	47
Tabla 9. Resultados obtenidos mediante SA para los modos $EHmn$ .....	49
Tabla 10. Resultados para las variables $k1y$ y $k2y$ en los modos $EHmn$ .....	49
Tabla 11. Resultados obtenidos mediante SA para los modos $HEmn$ .....	50
Tabla 12. Resultados para las variables $k1y$ y $k2y$ en los modos $HEmn$ .....	51
Tabla 13. Resultados obtenidos mediante Bisección y Newton- Raphson para los modos $EHmn$ .....	53
Tabla 14. Resultados obtenidos mediante Bisección y Newton- Raphson para los modos $HEmn$ .....	54
Tabla 15. Resultados para las variables $k1y$ y $k2y$ de modos $EHmn$ obtenidos mediante bisección y Newton -Raphson .....	54
Tabla 16. Resultados para las variables $k1y$ y $k2y$ de modos $HEmn$ obtenidos mediante bisección y Newton -Raphson .....	55
Tabla 17. Comparación de las soluciones para el modo $HE_{11}$ correspondientes a la frecuencia 9.55 MHz .....	70

Tabla 18. Comparación de las soluciones para el modo $EH_{11}$ correspondientes a la frecuencia 9.55 MHz .....	71
Tabla 19. Datos de $k_z$ hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo $EH_{01}$ .....	81
Tabla 20. Datos de $k_z$ hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo $EH_{11}$ .....	81
Tabla 21. Datos de $k_z$ hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo $EH_{21}$ .....	83
Tabla 22. Datos de $k_z$ hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo $EH_{31}$ .....	84
Tabla 23. Datos de $k_z$ hallado por SA para graficar la curva de dispersión del modo $HE_{11}$ .....	85
Tabla 24. Datos de $k_z$ hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo $HE_{12}$ .....	86
Tabla 25. Datos de $k_z$ hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo $HE_{21}$ .....	87
Tabla 26. Datos de $k_z$ hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo $HE_{22}$ .....	88
Tabla 27. Datos de $k_z$ hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo $HE_{31}$ .....	89
Tabla 28. Datos de $k_z$ hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo $HE_{41}$ .....	90
Tabla 29. Datos de $k_z$ hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo $EH_{01}$ .....	91
Tabla 30. Datos de $k_z$ hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo $EH_{11}$ .....	92
Tabla 31. Datos de $k_z$ hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo $EH_{21}$ .....	93
Tabla 32. Datos de $k_z$ hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo $EH_{31}$ .....	94

Tabla 33. Datos de $k_z$ hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo $HE_{11}$ .....	95
Tabla 34. . Datos de $k_z$ hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo $HE_{12}$ .....	96
Tabla 35. Datos de $k_z$ hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo $HE_{21}$ .....	97
Tabla 36. Datos de $k_z$ hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo $HE_{22}$ .....	98
Tabla 37. Datos de $k_z$ hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo $HE_{31}$ .....	99
Tabla 38. Datos de $k_z$ hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo $HE_{41}$ .....	100

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 : Guía de onda rectangular uniforme .....	27
Figura 2: Guía de onda parcialmente llena .....	30
Figura 3. Representación de pasos para la ejecución del algoritmo .....	37
Figura 4. Curvas de dispersión de los modos híbridos obtenidas mediante SA. ...	52
Figura 5. Curvas de dispersión de los modos híbridos obtenidas mediante Bisección complementado con Newton-Raphson.....	56
Figura 6. Curvas de dispersión de los modos híbridos con $\epsilon_r = 3$ . ....	57
Figura 7. Curvas de dispersión de los modos híbridos con $\epsilon_r = 20$ . ....	58
Figura 8. Curva de dispersión para el modo $HE_{12}$ con $\epsilon_r = 20$ mediante bisección y Newton-Raphson. ....	59
Figura 9. Curva de dispersión para el modo $EH_{11}$ variando la permitividad relativa.....	60
Figura 10. Curvas de dispersión para el modo $HE_{11}$ variando la permitividad relativa. ....	61
Figura 11. Curvas para el modo $HE_{12}$ con $\mu_r=20$ mediante SA. ....	62
Figura 12. Curvas de dispersión de los modos híbridos con un dieléctrico que ocupa el 1% de la guía.....	63
Figura 13. Curvas de dispersión de los modos híbridos con un dieléctrico que ocupa el 25% de la guía.....	64
Figura 14. Curvas de dispersión de los modos híbridos con un dieléctrico que ocupa el 60% de la guía.....	65
Figura 15. Curvas de dispersión de los modos híbridos con un dieléctrico que ocupa el 95% de la guía.....	66
Figura 16. Curvas de dispersión para el modo $EH_{11}$ variando el porcentaje de ocupación del dieléctrico.....	67
Figura 17. Curvas de dispersión para el modo $EH_{11}$ variando el porcentaje de ocupación del dieléctrico.....	68

Figura 18. Curvas de dispersión para diferentes modos híbridos.....	69
Figura 19. Barrido en frecuencia para los modos HE. ....	77
Figura 20. Barrido en frecuencia para modos EH. ....	78

## LISTA DE ANEXOS

ANEXO A : Guía de uso del software .....	77
ANEXO B: Valores de $k_z$ hallados por Simulated Annealing utilizados para graficar las curvas de dispersión.....	80
ANEXO C: Valores de $k_z$ hallados por bisección y Newton Raphson utilizados para graficar las curvas de dispersión.....	91

## RESUMEN

### TÍTULO:

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES QUE DESCRIBEN EL COMPORTAMIENTO DE LOS MODOS HÍBRIDOS EN UNA GUÍA DE ONDA RECTANGULAR PARCIALMENTE LLENA MEDIANTE EL MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN RECOCIDO SIMULADO (SIMULATED ANNEALING)\*

### AUTORES:

Jorge Eduardo Romero Amaya<sup>+</sup> y John Harvey Suárez Moreno<sup>+</sup>

### PALABRAS CLAVE:

Metaheurística, modos híbridos, probabilístico, recocido simulado.

### DESCRIPCIÓN:

Los métodos metaheurísticos se han vuelto muy importantes para resolver problemas de diversos campos. Debido a esto, este trabajo de investigación propone utilizar el método de Simulated Annealing (Recocido Simulado) para resolver las ecuaciones que describen la propagación de los modos híbridos dentro de una guía de onda parcialmente llena por un dieléctrico.

En este documento, primero se muestran unas nociones básicas que introducen al lector en el tema, donde se hace una explicación sobre las guías de onda y también sobre el método utilizado para resolver el problema planteado en este trabajo de investigación. Los autores realizaron el código en Matlab para obtener soluciones mediante Simulated Annealing, al cual se le hicieron pruebas para evaluar su rendimiento y eficiencia con funciones estándar encontradas en la literatura y luego se procedió a resolver el problema planteado en este documento.

Los resultados esperados son conseguidos dado que se logra generar curvas de dispersión para los diferentes modos híbridos encontrados en la literatura, y además se hacen otras curvas que no se encuentran en la bibliografía actual, esperando que futuros trabajos de investigación profundicen en este tema. Por último, se realiza una comparación entre los resultados obtenidos con el método de solución propuesto en este trabajo y bisección complementado con Newton-Raphson.

---

\* Trabajo de grado creado por el profesor Rodrigo Correa en la línea de investigación de optimización del grupo CEMOS.

<sup>+</sup> Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Director: Carlos Rodrigo Correa. Codirector: Iván Mauricio Amaya

## ABSTRACT

### TITLE:

SOLUTION OF THE EQUATIONS THAT DESCRIBE THE BEHAVIOR OF HYBRID MODES IN A PARTIALLY FILLED RECTANGULAR WAVEGUIDE THROUGH OPTIMIZATION METHOD OF SIMULATED ANNEALING\*

### AUTHORS:

Jorge Eduardo Romero Amaya<sup>+</sup> and John Harvey Suárez Moreno<sup>+</sup>

### KEYWORDS:

Metaheuristic, hybrid modes, probabilistic and simulated annealing.

### DESCRIPTION:

The metaheuristic methods have become very important to solve problems in various engineer's fields. Because of, this research work proposes to use simulated annealing method to solve the equations that describe the propagation of hybrid modes in a partially filled rectangular waveguide by dielectric.

In this document, first we show basic notions that introduce the reader to the subject, where we do an explanation of the waveguides and also the method used to solve the problem. The authors made the code in Matlab to obtain solutions through Simulated Annealing, which was made tests to evaluate its performance and efficiency with standard functions which were found in literature and after that we proceeded to solve the problem in this paper.

The expected results are obtained provided that it is achieved to generate dispersion curves for the different hybrid modes found in the literature, and in addition there are done other curves that they don't find in the current literature where we modify some waveguide's parameters like relative permittivity, waveguide dimensions and dielectric percent, hoping that future research works delve into this topic .Last but one we compare the simulated annealing results with the bisection complemented with Newton- Raphson to see differences between those methods.

---

\* Undergraduate thesis.

<sup>+</sup> Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Advisor: Carlos Rodrigo Correa. Co-Advisor: Iván Mauricio Amaya.

## INTRODUCCIÓN

Hoy en día los sistemas de comunicación utilizan diversos medios para transmitir información, por ejemplo, las líneas de transmisión o los cables coaxiales. Sin embargo, en altas frecuencias estos presentan una atenuación muy elevada causada por el efecto de superficie. Debido a esto, la transmisión de información no es eficiente, convirtiéndolos en medios de transmisión inapropiados para aplicaciones de UHF y microondas. El uso de guías de onda es una alternativa con grandes ventajas sobre la antes mencionada. Una de ellas es la capacidad de manejar potencias más altas y a su vez la reducción de las pérdidas por disipación de la misma [13], [15]. En esta medida, las guías de onda están definidas como tubos conductores huecos, de corte transversal circular, rectangular o elíptico, para el transporte de energía electromagnética.

El hombre siempre ha buscado darle solución a todas las incógnitas que se presentan en el diario vivir, buscando utilizar el mejor método posible. En algunos casos con un simple método analítico es suficiente, pero para otras situaciones es necesario utilizar métodos más robustos y complejos. Es por eso que aparecieron los métodos metaheurísticos que buscan resolver problemas para los cuales los métodos convencionales son insuficientes. El campo de la búsqueda probabilística ha crecido de manera acelerada, por lo cual han aparecido infinidad de técnicas que en muchos casos simulan procesos físicos a la hora de buscar una solución válida.

Un método metaheurístico definido para este trabajo fue Simulated Annealing (Recocido Simulado) el cual ha sido ampliamente utilizado en diversos campos para la solución de problemas de optimización. Su funcionamiento se basa en el símil con el proceso de recocido del acero, que consiste en calentar y luego enfriar lentamente el material para llevarlo a un estado de equilibrio térmico [5]. En este trabajo se programó un script en Matlab con el fin de implementar este método

para la solución de un problema específico relacionado con los modos de propagación de una onda dentro de una guía de onda. El problema se centra en resolver las ecuaciones que describen el comportamiento de los modos híbridos, usando una técnica probabilística, como Simulated Annealing. Los alcances y objetivos del trabajo se explican en el capítulo 1. Algunos conceptos de teoría electromagnética se presentan en el capítulo 2.

Luego se valida el algoritmo implementado en Matlab para poder solucionar el problema central del trabajo. Para esto se solucionaron algunas funciones estándar encontradas en la literatura, las cuales son conocidas y sus resultados se muestran en el capítulo 3. Después de validar el método implementado en Matlab, se procede a abordar las ecuaciones que describen el comportamiento de los modos dentro de las guías de onda, donde también se recurre a un algoritmo que resuelve utilizando el método de bisección complementado con Newton-Raphson para poder hacer una comparación del funcionamiento de los mismos. Todos estos resultados que se obtienen al aplicar estos métodos se muestran en el capítulo 4. Un resumen de la comparación de estos métodos se muestra en el capítulo 5, donde hay unas tablas donde se puede ver fácilmente las diferencias en los resultados obtenidos. Para finalizar, en el capítulo 6 se encuentran las conclusiones que arrojó este trabajo de grado, y también unas observaciones y recomendaciones dadas por los autores.

# 1. DESCRIPCION DEL TRABAJO DE GRADO<sup>1</sup>

En el presente trabajo de grado modalidad investigación se aborda el estudio de una guía de onda rectangular parcialmente llena proponiéndose la solución del sistema de ecuaciones que describen el comportamiento de sus modos híbridos, mediante el método de optimización global SA. También se resolvieron estas ecuaciones con otros métodos numéricos y sus resultados se compararán con los obtenidos con el método de optimización SA.

A continuación se transcriben los objetivos aprobados para el presente trabajo.

## 1.1 OBJETIVO GENERAL

Solucionar las ecuaciones que describen el comportamiento de los modos híbridos en una guía de onda rectangular parcialmente llena mediante el método de optimización “simulated annealing” (SA).

## 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Implementar el algoritmo de optimización “simulated annealing” para solucionar las ecuaciones de modos híbridos de un tipo de guía de onda en particular.
2. Comparar los resultados obtenidos mediante “simulated annealing” con otro método de solución de ecuaciones.

---

<sup>1</sup> Esto constituye un aporte intelectual consensuado de los estudiantes Jorge Romero y John Suárez, el profesor Rodrigo Correa y el estudiante de doctorado Iván Amaya.

## 2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

### 2.1 CONCEPTOS PREVIOS

Antes de profundizar en los resultados de este informe de investigación, es conveniente aclarar algunos conceptos, buscando facilitar la comprensión los temas que se van a tratar más adelante.

#### 2.1.1 Ecuaciones de Maxwell

En 1864, James Clerk Maxwell, formuló un conjunto de ecuaciones, en donde recopiló el trabajo de grandes científicos como Ampere, Faraday, Gauss entre otros. Estas ecuaciones describen todos los fenómenos electromagnéticos y en forma general, están definidas en las ecuaciones (1) - (4) [11].

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (1)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (4)$$

donde,

$E$ : Intensidad del campo eléctrico [V/m].

$D$ : Densidad de flujo eléctrico [C/m<sup>2</sup>].

$H$ : Intensidad de campo magnético [A/m].

$B$ : Densidad de flujo magnético [T].

$J$ : Densidad de corriente [A/m<sup>2</sup>].

$\rho$ : Densidad de carga [C/m].

Al analizar las ondas electromagnéticas en el espacio libre, se observa que el medio carece de fuente y por lo tanto  $\rho = J = 0$ ,  $B = \mu H$  y  $D = \epsilon E$ . Como se puede ver, con estas condiciones, las ecuaciones de Maxwell en el vacío solo se pueden escribir en términos de  $E$  y  $H$  [6].

$$\nabla \cdot E = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \quad (7)$$

$$\nabla \times H = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (8)$$

Las anteriores ecuaciones, se pueden escribir de forma fasorial, quedando como se describe en (9) - (12) [6].

$$\nabla \cdot E = 0 \quad (9)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (10)$$

$$\nabla \times E = -j\omega\mu H \quad (11)$$

$$\nabla \times H = j\omega\varepsilon E \quad (12)$$

Estas ecuaciones constituyen el punto de partida para el presente trabajo. A continuación, se describe brevemente las propiedades electromagnéticas que conforman las ecuaciones constitutivas necesarias para la solución de las ecuaciones de Maxwell en medios diferentes al vacío.

## **2.1.2 Propiedades electromagnéticas de los materiales**

### **2.1.2.1 Permitividad eléctrica**

Permitividad eléctrica o simplemente permitividad  $\varepsilon$ , es una constante que determina la interacción que existe entre un campo eléctrico y un determinado medio. Esta constante está definida como la capacidad que tiene un material para polarizarse en presencia de un campo eléctrico [13]. La permitividad en el espacio libre, cuyo símbolo es  $\varepsilon_0$ , es aproximadamente igual a  $8.8541 \cdot 10^{-12} (F/m)$ . En medios diferentes al vacío, la permitividad absoluta del material  $\varepsilon$  suele ser expresada en términos de  $\varepsilon_0$ , mediante la permitividad relativa o constante dieléctrica  $\varepsilon_r$ , como se muestra en la ecuación (13) [2].

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (13)$$

### **2.1.2.2 Permeabilidad Magnética**

Permeabilidad magnética ( $\mu$ ) es la capacidad de un material para absorber o permitir el paso de campo magnético a través de él. Esta constante está definida como la relación entre el campo magnético existente y el campo inducido al interior del material [13]. La permeabilidad en el vacío  $\mu_0$  es igual a  $4\pi \cdot 10^{-7} (H/m)$ . La permeabilidad absoluta para materiales diferentes al vacío, es expresada en términos de  $\mu_0$ , a través de la permeabilidad relativa  $\mu_r$  como lo indica la ecuación (14) [2].

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (14)$$

Los materiales se pueden clasificar según su permeabilidad magnética relativa en ferromagnéticos, cuando es muy superior a 1, paramagnéticos cuando es aproximadamente 1 y diamagnéticos cuando es inferior a 1.

## **2.2 GUÍA DE ONDAS**

Una guía de onda es un tubo conductor hueco, de corte transversal circular, rectangular o elíptico cuya función es la propagación dirigida y acotada de ondas electromagnéticas de alta frecuencia a través de ella. En una guía, los campos eléctricos y magnéticos se encuentran confinados en su interior y están limitados por sus paredes conductoras [4]. La transmisión de energía por medio de guías de onda es más eficiente comparándola con otros métodos debido a que presenta baja atenuación ocasionada por la resistencia y por consiguiente pocas pérdidas por disipación de energía [15].

### **2.2.1 Modos de propagación en una guía de onda**

En la guía se presentan modos de propagación que dependen de la longitud de onda, la polarización y las dimensiones de la misma. Existen modos longitudinales

y transversales. Los primeros son un tipo particular de onda estacionaria formada por un confinamiento de ondas en la cavidad. Los segundos se dividen en los siguientes tipos [14]:

**Modo TE (Transversal Eléctrico):** En este modo la componente eléctrica en la dirección de propagación es nula.

**Modo TM (Transversal Magnético):** En este modo la componente magnética en la dirección de propagación es nula.

**Modo TEM (Transversal Electromagnético):** En este modo tanto la componente eléctrica como la magnética en la dirección de propagación son nulas.

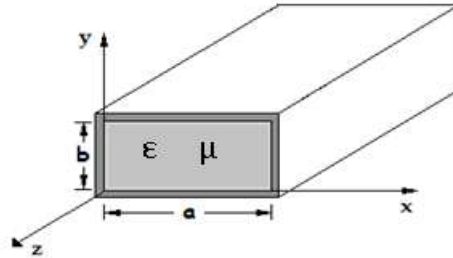
**Modos EH y HE (Híbridos):** Estos modos se presentan cuando en la dirección de propagación se presentan componentes de tipo eléctrico y magnético. Para que se presenten estos modos, dentro de la guía deben haber dos o más medios de propagación. Hay dos tipos de modos híbridos, EH y HE. En el primero, el campo magnético es reducido y el campo eléctrico es el dominante. HE, es el caso contrario, donde el campo magnético es el dominante mientras el campo eléctrico es reducido. Para el caso EH, y cuando la frecuencia tiende a la frecuencia crítica (o frecuencia de corte), el campo magnético es reducido casi hasta desaparecer, por lo que se obtiene prácticamente un modo TM. Lo mismo sucede para el modo HE, donde el campo eléctrico es reducido casi hasta desaparecer, por lo que prácticamente aparece un modo TE [7].

### 2.3 GUÍA DE ONDA UNIFORME RECTANGULAR

Una guía de onda uniforme es aquella que tiene sección transversal uniforme, paredes paralelas a la dirección de propagación y tiene un solo medio en su

interior. Éste tiene características electromagnéticas propias, como se observa en la Figura 1. Este tipo de guía de onda puede soportar los modos TE (Transversal Eléctrico) y TM (Transversal Magnético).

Figura 1 : Guía de onda rectangular uniforme



Basado en : [7]

Se parte de la suposición de una guía de onda infinita llena de un medio homogéneo con una permitividad  $\epsilon$  y una permeabilidad  $\mu$ . Además, se tiene una onda electromagnética que se está propagando en la dirección  $z$ . Para este caso, los campos eléctrico y magnético se pueden expresar en función de sus componentes longitudinales y transversales, como se muestra en las siguientes expresiones

$$E = E_t + \hat{z}E_z = [e_t(x, y) + \hat{z}e_z(x, y)] * e^{-jk_z z} \quad (15)$$

$$H = H_t + \hat{z}H_z = [h_t(x, y) + \hat{z}h_z(x, y)] * e^{-jk_z z} \quad (16)$$

donde  $k_z$  representa la constante de propagación a lo largo de la dirección de propagación.

Con el procedimiento matemático descrito en [4] se obtienen las componentes transversales de los campos eléctrico y magnético.

$$E_t = \frac{1}{k_t^2} (j\omega\mu\hat{z} \times \nabla_t H_z - jk_z \nabla_t E_z) \quad (17)$$

De igual manera a como se obtuvo la ecuación anterior, se obtiene la correspondiente al campo magnético, que se muestra en la ecuación (18).

$$H_t = \frac{1}{k_t^2} (-j\omega\varepsilon\hat{z} \times \nabla_t E_z - jk_z \nabla_t H_z) \quad (18)$$

Como se observa en las ecuaciones (17) y (18) las componentes transversales se pueden expresar en función de las longitudinales. Es decir que una vez obtenidas las componentes del campo en la dirección de propagación, se pueden hallar las restantes. Para una guía de onda homogénea, donde la permitividad y la permeabilidad son constantes, las ecuaciones de Helmholtz quedan definidas como se ve en (19) y (20).

$$\nabla_t^2 E_z + k_t^2 E_z = 0 \quad (19)$$

$$\nabla_t^2 H_z + k_t^2 H_z = 0 \quad (20)$$

Mediante las ecuaciones de Maxwell (11),(12) y haciendo una manipulación matemática, se obtienen unas relaciones entre las componentes como se observa en las ecuaciones (21) - (24) [4]:

$$E_x = \frac{1}{k_t^2} \left( -j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} - jk_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (21)$$

$$E_y = \frac{1}{k_t^2} \left( j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - jk_z \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (22)$$

$$H_x = \frac{1}{k_t^2} \left( j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - jk_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (23)$$

$$H_y = \frac{1}{k_t^2} \left( -j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - jk_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (24)$$

Las cuatro expresiones anteriores muestran que si conocemos las componentes longitudinales de la onda, podemos conseguir las transversales de una manera sencilla. Sustituyendo estas cuatro ecuaciones en las ecuaciones (19) y (20) (de Helmholtz), obtenemos (25) y (26).

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_t^2 \right) E_z = 0 \quad (25)$$

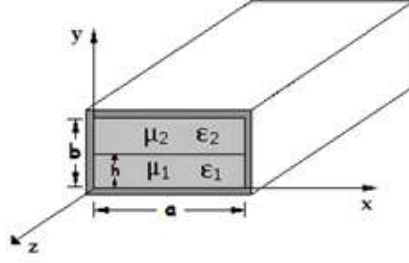
$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_t^2 \right) H_z = 0 \quad (26)$$

Las ecuaciones anteriores están desacopladas para componentes longitudinales, por lo cual se comprueba que pueden existir dos tipos independientes de modos de propagación (TM y TE).

## 2.4 GUÍA DE ONDA RECTANGULAR PARCIALMENTE LLENA (50%)

Una guía de onda parcialmente llena es aquella que en su interior tiene dos o más medios de propagación, cada uno con sus respectivas propiedades magnéticas y eléctricas. En este tipo específico no se pueden presentar los modos TE (Transversal Eléctrico) o TM (Transversal Magnético) de manera independiente, sino que se manifiestan los modos híbridos (EH o HE), que se explicaron anteriormente [14]. A continuación se considera una guía de onda rectangular ocupada por dos materiales homogéneos, como se muestra en la Figura 2. El material 1 ocupa la región comprendida entre  $0 < y < h$ , el cual tiene una permitividad  $\varepsilon_1$  y una permeabilidad  $\mu_1$ . El material 2 ocupa la región comprendida entre  $h < y < b$ , el cual tiene una permitividad  $\varepsilon_2$  y una permeabilidad  $\mu_2$  [7].

Figura 2: Guía de onda parcialmente llena



Basado en : [7]

Ahora se reemplaza la ecuación (18) en (12), y se obtiene (27).

$$\nabla_t \cdot \left( \frac{\epsilon}{k_t^2} \nabla_t E_z \right) + \frac{k_z}{\omega} \hat{z} \cdot \left[ \nabla_t \times \left( \frac{1}{k_t^2} \nabla_t H_z \right) \right] + \epsilon E_z = 0 \quad (27)$$

Haciendo un procedimiento similar, reemplazando la ecuación (17) en la (11), se tiene la ecuación (28).

$$\nabla_t \cdot \left( \frac{\mu}{k_t^2} \nabla_t H_z \right) + \frac{k_z}{\omega} \hat{z} \cdot \left[ \nabla_t \times \left( \frac{1}{k_t^2} \nabla_t E_z \right) \right] + \mu H_z = 0 \quad (28)$$

Dado que las ecuaciones se encuentran acopladas, se concluye que en este tipo de guías de onda no puede existir el modo TE o TM de forma independiente, por lo que aparecen los modos híbridos. En cada región de la guía,  $E_z$  y  $H_z$ , cumplen con la ecuación de Helmholtz. Utilizando las ecuaciones de frontera en las paredes de la guía de onda, se obtienen las componentes que se describen a continuación.

Para la región 1 comprendida entre 0 y h:

$$E_{1z} = A_1 \text{sen}(k_x * x) \text{sen}(k_{1y} * y) e^{-jk_z z} \quad (29)$$

$$H_{1z} = B_1 \text{cos}(k_x * x) \text{cos}(k_{1y} * y) e^{-jk_z z} \quad (30)$$

Para la región 2 comprendida entre h y b:

$$E_{2z} = A_2 \text{sen}(k_x * x) \text{sen}(k_{2y} * (b - y)) e^{-jk_z z} \quad (31)$$

$$H_{2z} = B_2 \text{cos}(k_x * x) \text{cos}(k_{2y} * (b - y)) e^{-jk_z z} \quad (32)$$

Para relacionar las constantes de las ecuaciones anteriores, se utilizan las ecuaciones auxiliares (33) y (34).

$$k_x^2 + k_{1y}^2 + k_z^2 = k_1^2 = \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 \quad (33)$$

$$k_x^2 + k_{2y}^2 + k_z^2 = k_2^2 = \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \quad (34)$$

Una vez más, teniendo las componentes en la dirección de propagación, se pueden encontrar las demás.

Para la región 1,  $0 < y < h$ :

$$E_{1x} = (-A_1 k_x k_z + B_1 \omega \mu_1 k_{1y}) \frac{j}{k_{1t}^2} \text{cos}(k_x x) \text{sin}(k_{1y} y) e^{-jk_z z} \quad (35)$$

$$E_{1y} = (-A_1 k_{1y} k_z - B_1 \omega \mu_1 k_x) \frac{j}{k_{1t}^2} \text{sin}(k_x x) \text{cos}(k_{1y} y) e^{-jk_z z} \quad (36)$$

$$H_{1x} = (A_1 \omega \varepsilon_1 k_{1y} - B_1 k_x k_z) \frac{j}{k_{1t}^2} \text{sin}(k_x x) \text{cos}(k_{1y} y) e^{-jk_z z} \quad (37)$$

$$H_{1y} = (-A_1 \omega \varepsilon_1 k_x - B_1 k_{1y} k_z) \frac{j}{k_{1t}^2} \text{cos}(k_x x) \text{sen}(k_{1y} y) e^{-jk_z z} \quad (38)$$

Para la región 2,  $h < y < b$ :

$$E_{2x} = (-A_2 k_x k_z - B_2 \omega \mu_2 k_{2y}) \frac{j}{k_{2t}^2} \text{cos}(k_x x) \text{sin}(k_{2y} (b - y)) e^{-jk_z z} \quad (39)$$

$$E_{2y} = (A_2 k_{2y} k_z - B_2 \omega \mu_2 k_x) \frac{j}{k_{2t}^2} \text{sin}(k_x x) \text{cos}(k_{2y} (b - y)) e^{-jk_z z} \quad (40)$$

$$H_{2x} = (-A_2 \omega \varepsilon_2 k_{2y} + B_2 k_z k_x) \frac{j}{k_{2t}^2} \text{sin}(k_x x) \text{cos}(k_{2y} (b - y)) e^{-jk_z z} \quad (41)$$

$$H_{2y} = (-A_2\omega\varepsilon_2k_x - B_2k_{2y}k_z) \frac{j}{k_{2t}^2} \cos(k_x x) \sin(k_{2y}(b-y)) e^{-jk_z z} \quad (42)$$

En la frontera  $y = h$ , debe existir continuidad en los campos, por lo que  $E_{1z}$  y  $E_{2z}$  son iguales. De la misma manera,  $H_{1z}$  es igual a  $H_{2z}$ . Luego de aplicar las condiciones se obtienen las ecuaciones (43) - (46).

$$A_1 \operatorname{sen}(k_{1y}h) = A_2 \operatorname{sen}(k_{2y}(b-h)) \quad (43)$$

$$B_1 \cos(k_{1y}h) = B_2 \cos(k_{2y}(b-h)) \quad (44)$$

$$(A_1 k_x k_z - B_1 \omega \mu_1 k_{1y}) * \frac{\operatorname{sen}(k_{1y} * h)}{k_{1t}^2} = (A_2 k_x k_z - B_2 \omega \mu_2 k_{2y}) * \frac{\operatorname{sen}(k_{2y} * (b-h))}{k_{2t}^2} \quad (45)$$

$$(A_1 \omega \varepsilon_1 k_{1y} + B_1 k_x k_z) * \frac{\cos(k_{1y} * h)}{k_{1t}^2} = (-A_2 \omega \varepsilon_2 k_{2y} + B_2 k_x k_z) * \frac{\operatorname{sen}(k_{2y} * (b-h))}{k_{2t}^2} \quad (46)$$

A partir de las ecuaciones anteriores, y siguiendo el procedimiento descrito en [7] se obtienen las ecuaciones que describen los modos híbridos donde la ecuación (47) hace referencia a los modos EH y la ecuación (48) a los HE.

$$\frac{\mu_1}{k_{1y}} \tan(k_{1y}h) = -\frac{\mu_2}{k_{2y}} \tan(k_{2y}(b-h)) \quad (47)$$

$$\frac{k_{1y}}{\varepsilon_1} \tan(k_{1y}h) = -\frac{k_{2y}}{\varepsilon_2} \tan(k_{2y}(b-h)) \quad (48)$$

El método SA que se implementó en este trabajo, actuó sobre estas ecuaciones, junto con (33) y (34) para resolver el problema electromagnético y obtener el comportamiento de los modos híbridos en la guía de onda.

## 2.5 RECOCIDO SIMULADO (SIMULATED ANNEALING-SA)

El SA es un algoritmo de búsqueda clásico que hace parte de la metaheurística, la cual es un tipo de solución aproximada a problemas utilizado cuando la solución analítica no es posible. La simplicidad y buenos resultados de este método han hecho que sea aplicado en diversos campos de la ciencia. El método se ha empleado para la optimización de antenas, filtros digitales, aplicaciones de microelectrónica entre otros [10]. El objetivo de este algoritmo es encontrar una buena aproximación en un espacio de búsqueda grande. A esta aproximación se le denomina óptimo global. El nombre recocido simulado es debido a que el algoritmo se fundamenta en el proceso metalúrgico, que consta de llevar un sólido a un estado de equilibrio térmico. Esto se consigue al llevar el material a altas temperaturas para luego enfriarlo lentamente y así variar sus propiedades físicas. Este proceso de calentamiento se hace con el fin de que los átomos que se encuentran en diferentes niveles de energía cambien de su estado inicial, y luego al enfriarse, las probabilidades de que estos átomos se recristalicen en configuraciones con menor energía son mayores [12],[16].

Este algoritmo tiene una aplicación general, y puede encontrar soluciones cercanas en un espacio de búsqueda grande. Sin embargo, es importante tener en cuenta que para llegar a un valor óptimo es necesario un alto uso computacional, lo que en algunos casos puede aumentar el tiempo de cómputo de manera considerable. Debido a que Simulated Annealing puede resolver muchos problemas de optimización, hay que ser precisos al escoger las etapas del algoritmo, las ecuaciones y variables específicas. El éxito del programa depende del uso de sus parámetros propios tales como los valores iniciales (temperatura, factor de enfriamiento), la generación de los puntos vecinos, la evaluación de la funciones objetivo y la precisión aceptada por el programa [5].

Este método fue planteado y descrito por Scott Kirkpatrick, C. Daniel Gelatt y Mario P. Vecchi en 1983, y también por Vlado Černý en 1985 [9]. En cada iteración del algoritmo, se evalúa el estado actual, y además se hace una perturbación para evaluar también los estados vecinos y probabilísticamente el algoritmo decide si debe hacer una transición hacia el nuevo estado o si es mejor permanecer en el actual. Las iteraciones se hacen sucesivamente, evaluando los estados vecinos hasta que se llegue a una aproximación óptima que cumpla con los requisitos específicos de cada problema. A medida que pasa cada iteración el parámetro de temperatura va disminuyendo, y este parámetro es necesario para hallar una probabilidad que al ser comparada con un número aleatorio entre 0 y 1 determina si la nueva solución es aceptada o rechazada.

#### **Regla de aceptación:**

El algoritmo siempre tiene la posibilidad de permanecer en la solución,  $x$ , o hacer una transición hacia una nueva solución,  $x'$ . Para esto, el algoritmo se basa en una probabilidad que evalúa si debe cambiar a la nueva solución o permanecer en la actual. Si al evaluar la nueva solución,  $x'$ , en la función objetivo se tiene un mejor valor que el evaluado con la solución actual,  $x$ , se reemplaza  $x = x'$  [16]. En caso contrario,  $x = x$ . La probabilidad ( $P$ ) de que una nueva solución sea aceptada o no, está dada por la ecuación (49), donde  $\Delta Z$  es la diferencia entre la evaluación de la nueva solución y la actual,  $C$  es la constante de Boltzman que tiene un valor teórico de  $1.38054 \times 10^{-23}$  y  $T$  representa la temperatura absoluta.

$$P(\Delta Z) = \exp\left(\frac{-\Delta Z}{C * T}\right) \quad (49)$$

Es importante saber que en la literatura encontrada, en algunos casos se utiliza la constante de Boltzman y en otros no. Esto depende de la característica que tiene cada problema. Algunos aspectos de los parámetros que son tenidos en cuenta son:

**Temperatura:**

Este parámetro es importante porque la probabilidad que utiliza el algoritmo para aceptar o rechazar una nueva solución depende directamente del valor de la temperatura. Al escoger la temperatura inicial, es necesario tener en cuenta que debe ser suficientemente grande para que en las primeras iteraciones la probabilidad sea cercana a uno y así el algoritmo acepte casi todas las nuevas soluciones. Esto se hace con el fin de evitar que el algoritmo quede encerrado en mínimos locales, y así pueda encontrar el mínimo global. A medida que transcurren las iteraciones, la temperatura va disminuyendo sistemáticamente, y de esta manera la probabilidad va disminuyendo haciendo cada vez más selectiva la regla de aceptación para poder llegar a una solución muy exacta.

**Cambio de temperatura:**

La disminución de temperatura se hace a través de un factor de enfriamiento, el cual es una constante que disminuye el parámetro de temperatura al paso de cada iteración. En la literatura, se recomiendan valores para el factor de enfriamiento comprendidos entre 0.8 y 0.95. Este valor se debe escoger según las características del problema que se esté resolviendo.

**Punto inicial y vecindad:**

Es importante definir un espacio de soluciones para escoger de manera aleatoria el punto inicial. A partir de este valor se deben generar vecinos para evaluarlos en la función y de esta manera escoger el valor más adecuado en cada iteración.

**Probabilidad:**

Este parámetro es muy importante porque es el que evita que la solución quede encerrada en un mínimo local. Esta probabilidad depende directamente de la diferencia entre la evaluación de los puntos, la temperatura y en algunos casos se tiene en cuenta la constante de Boltzman. El algoritmo debe generar un número

aleatorio entre cero y uno, para hacer la comparación con la probabilidad; si la probabilidad es mayor que dicho número, se acepta la nueva solución [3].

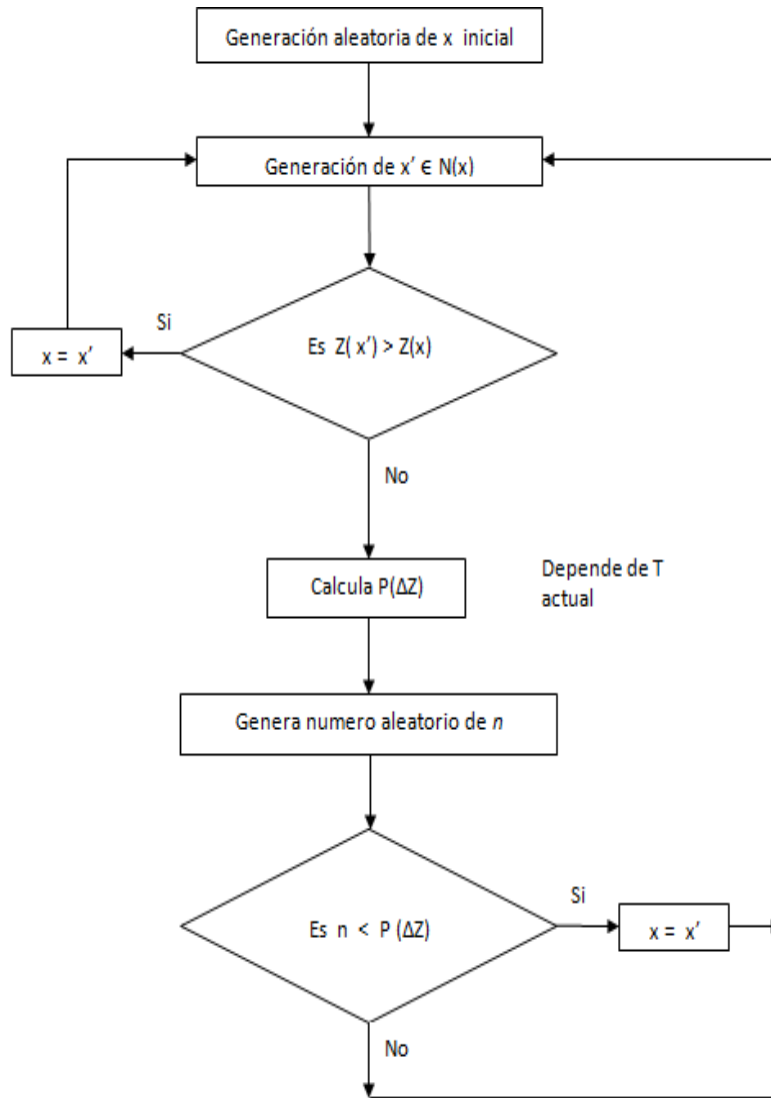
### **Algoritmo de Recocido Simulado (SA)**

Ahora se mostrarán los pasos del algoritmo:

1. Definir  $T=T_0$ .
2. Definir el factor de enfriamiento.
3. Definir  $i=0$ .
4. Se usa un While (condición de parada).
5. Generar un nuevo vecino.
6. Evaluar el vecino.
7. Hallar la diferencia entre las evaluaciones de la solución nueva y la actual.
8. Aceptar o rechazar la nueva solución.
9. En caso de rechazar la nueva solución, hallar una probabilidad.
10. Generar un número aleatorio entre 0 y 1.
11. Comparar la probabilidad y el número aleatorio para aceptar o rechazar la nueva solución.
12. Disminuir temperatura de acuerdo al factor de enfriamiento.
13.  $i=i+1$
14. Nueva iteración.
15. Fin.

En la Figura 3, se muestra un diagrama de bloques que representa los pasos para la ejecución del algoritmo recocido simulado [8].

Figura 3. Representación de pasos para la ejecución del algoritmo



### 3. EVALUACIÓN DEL ALGORITMO A TRAVÉS DE FUNCIONES ESTANDAR

En este capítulo se mostrará el comportamiento del método SA cuando resuelve ciertas funciones estándar. Para hacer la evaluación del algoritmo se utilizó Matlab y un equipo de cómputo cuyas características se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Especificaciones del hardware utilizado en la solución de funciones estándar

Equipo de cómputo	
<b>Procesador</b>	AMD Sempron™ SI-40 @ 2.00 GHz
<b>Memoria RAM</b>	1.00 GB
<b>Alimentación</b>	Conectado a la red eléctrica
<b>Plan de Energía</b>	Alto rendimiento
<b>Sistema Operativo</b>	Microsoft® Windows™ 7 Ultimate 32-bit

#### 3.1 TÉRMINOS UTILIZADOS PARA PARÁMETROS Y SOLUCIONES

En esta sección se mostrarán los parámetros y sus respectivas abreviaturas, que se utilizaron para la ejecución de este trabajo.

T: Parámetro temperatura del algoritmo.

$\alpha$ : Factor de enfriamiento.

LimS: Límite superior de la variable.

LimI: Límite inferior de la variable.

Ite: Número de iteraciones.

Tc: Tiempo de cómputo [s].

Tol: Tolerancia aceptada por el algoritmo.

$x_i$ : Solución para la variable  $i$ .

Error: Valor obtenido al evaluar las soluciones obtenidas en la función objetivo.

## 3.2 FUNCIONES ESTÁNDAR

En esta sección se evaluará el algoritmo programado con algunas funciones de prueba con el fin de validar su efectividad. Se utilizaron funciones de prueba preestablecidas encontradas en la literatura. Las funciones que se van a utilizar son la función de Booth, la función de Beale, la función B2 y Wood. Los resultados obtenidos de estas ejecuciones se muestran detalladamente a continuación, donde se utilizaron como parámetros  $T=1e25$  y  $\alpha=0.95$ .

### 3.2.1 Función de Booth

Es una función continua muy utilizada en optimización, su expresión general para dos variables se muestra en la ecuación (50).

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2 - 7)^2 + (2x_1 + x_2 - 5)^2 \quad (50)$$

Esta función tiene un óptimo global en  $f(1,3) = 0$ . En la Tabla 2 se muestran las pruebas hechas para esta función, donde se exponen los parámetros utilizados y los resultados obtenidos con el algoritmo SA.

Tabla 2. Resultados del algoritmo en la función de Booth

	Prueba 1	Prueba 2	Prueba 3
<b>X<sub>1</sub></b>	1.000480212	0.999888586	1.000083633
<b>X<sub>2</sub></b>	2.999409953	2.999708138	3.000060279
<b>LimI1:LimS1</b>	-4:4	-4:4	-4:4
<b>LimI2:LimS2</b>	-4:4	-4:4	-4:4
<b>Error</b>	$6.270125701 * 10^{-7}$	$7.481200524 * 10^{-7}$	$9.347267760 * 10^{-7}$
<b>lte</b>	1275	828	1297
<b>Tc [s]</b>	3.159732	2.777975	2.995165
<b>Tol</b>	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$

De la Tabla 3 se puede observar que el algoritmo converge en un tiempo promedio de 2.977624 [s], y además se puede ver que la prueba 1 es la que presenta el error más bajo. Para comprobar las soluciones obtenidas por SA, se evalúan los puntos obtenidos en la prueba 1, y se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}
 f(1.0004, 2.9994) &= (1.0004 + 2 * 2.9994 - 7)^2 + (2 * 1.0004 + 2.9994 - 5)^2 \\
 f(1.0004, 2.9994) &= 6.8 * 10^{-7}
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

En este caso, al evaluar la función se obtiene un número mayor al presentado en el software debido a error por truncamiento.

### 3.2.2 Función de Beale

La función de Beale es una ecuación continua y de dos variables que está dada por la expresión (52).

$$f(x) = \sum_{i=1}^3 (y_i - x_1(1 - x_2))^2
 \tag{52}$$

donde  $y_1$ ,  $y_2$  y  $y_3$  son constantes y sus valores son 1.5, 2.25 y 2.625, respectivamente.

Esta función tiene el mínimo global en  $f(3,0.5) = 0$ . Se utilizó SA para encontrar la solución de la función de Beale; se hicieron tres pruebas y los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 3.

**Tabla 3. Resultados del algoritmo en la función de Beale**

	<b>Prueba 1</b>	<b>Prueba 2</b>	<b>Prueba 3</b>
<b>X<sub>1</sub></b>	3.000204193	3.000959631	3.001474219
<b>X<sub>2</sub></b>	0.500254316	0.500167344	0.500379433
<b>LimI1:LimS1</b>	-4:4	-4:4	-4:4
<b>LimI2:LimS2</b>	-4:4	-4:4	-4:4
<b>Error</b>	$9.640914149 * 10^{-7}$	$2.620639345 * 10^{-7}$	$3.518887843 * 10^{-7}$
<b>Ite</b>	1302	1461	1699
<b>Tc [s]</b>	3.226201	3.299946	3.676706
<b>Tol</b>	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$

La prueba 2 tiene menor error y utilizó 3.299 [s]; entonces se comprobó que SA si converge para este problema.

### 3.2.3 Función B2

La función B2 es una función continua que para dos variables está definida mediante la expresión (53).

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 0.3 \cos(3\pi x_1) - 0.4 \cos(4\pi x_2) + 0.7 \quad (53)$$

Esta función tiene el mínimo global en  $f(x_1, x_2) = f(0,0) = 0$ , por lo tanto se hicieron tres pruebas usando SA y los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 4.

**Tabla 4. Resultados del algoritmo en la función de B2**

	<b>Prueba 1</b>	<b>Prueba 2</b>	<b>Prueba 3</b>
<b>X<sub>1</sub></b>	-1.561248197e-5	2.184956250e-4	1.862098752e-4
<b>X<sub>2</sub></b>	6.054290885e-5	-7.997010987e-5	-4.037411305e-5
<b>LimI1:LimS1</b>	-3:5	-3:5	-3:5
<b>LimI2:LimS2</b>	-3:5	-3:5	-3:5
<b>Error</b>	1.265870801e-7	8.985996573e-7	5.514129344e-7
<b>Ite</b>	631	633	617
<b>Tc</b>	3.062504 [s]	2.776954 [s]	2.805629 [s]
<b>Tol</b>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-6</sup>

En la Tabla 4 se puede observar que la prueba 1 tiene un error más pequeño y además tiene el tiempo de cómputo más corto. Se demuestra que SA converge para esta función estándar.

### 3.2.4 Función de Wood

La función de Wood es una función continua de cuatro variables cuya expresión está dada por la ecuación (54).

$$\begin{aligned}
 f(x) = & (10(x_2 - x_1^2))^2 + (1 - x_1)^2 + \left( (90)^{1/2}(x_4 - x_3^2) \right)^2 + (1 - x_3)^2 + \\
 & + \left( (10)^{1/2}(x_2 + x_4 - 2) \right)^2 \left( (10)^{-1/2}(x_2 - x_4^2) \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{54}$$

Esta función de cuatro variables tiene el mínimo global en  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(1,1,1,1) = 0$ . Como se ha hecho en los casos anteriores, con esta función también se utilizó SA obteniendo los resultados mostrados en la Tabla 5.

**Tabla 5. Resultados del algoritmo en la función de Wood**

	<b>Prueba 1</b>	<b>Prueba 2</b>	<b>Prueba 3</b>
<b>X<sub>1</sub></b>	0.999474573	0.999476291	0.999478840
<b>X<sub>2</sub></b>	0.998946035	0.998953655	0.998954621
<b>X<sub>3</sub></b>	1.000526201	1.000526030	1.000530758
<b>X<sub>4</sub></b>	1.001054769	1.001051322	1.001059055
<b>LimI1:LimS1</b>	-4:4	-4:4	-4:4
<b>LimI2:LimS2</b>	-4:4	-4:4	-4:4
<b>LimI3:LimS3</b>	-4:4	-4:4	-4:4
<b>LimI4:LimS4</b>	-4:4	-4:4	-4:4
<b>Error</b>	$9.991837413 * 10^{-7}$	$9.914043452 * 10^{-7}$	$9.998328349 * 10^{-7}$
<b>Ite</b>	85421	79029	95647
<b>Tc [s]</b>	96.876808	86.429207	97.555024
<b>Tol</b>	$10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$

Para una función objetivo de cuatro variables el método converge pero como se puede ver en la Tabla 5, el tiempo de cómputo del algoritmo aumenta considerablemente debido a que se deben hacer muchas iteraciones para llegar a los valores de mínimo global. El error obtenido en las tres pruebas es aproximadamente de  $9.9 * 10^{-7}$ .

## 4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este trabajo se abordó el problema de una guía de onda parcialmente llena (50%) con un dieléctrico con ciertas propiedades electromagnéticas. Para resolverlo es preciso conocer las características de la guía y del dieléctrico que se encuentra en su interior. Se parte del hecho de que es una guía de onda rectangular con una relación entre el ancho y la altura de 2, y su sección transversal está ocupada en un 50% por un dieléctrico. También es importante saber que la permitividad relativa entre los dos medios  $\epsilon_r$  es 4 y la permeabilidad relativa  $\mu_r$  es 1. Con la aplicación del método SA se solucionaron las ecuaciones que describen los modos híbridos mostrados anteriormente. Seguidamente se encontraron las curvas de dispersión de los modos híbridos para los porcentajes de llenado de 1%, 25%, 50%, 60% y 95% con el mismo dieléctrico. Luego se realizaron estas curvas variando el parámetro  $\epsilon_r$  manteniendo fijo el porcentaje de ocupación en 50%.

### 4.1 APLICACIÓN DE SA EN LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES QUE DESCRIBEN EL COMPORTAMIENTO DE LOS MODOS HÍBRIDOS

En esta sección se muestra la aplicación del algoritmo, para dar solución a las ecuaciones que describen los modos híbridos de la guía parcialmente llena, cumpliendo con el objetivo general y uno de los objetivos específicos de este informe de investigación. El equipo de cómputo con el cual se trabajó tiene las especificaciones que se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6. Especificaciones del hardware utilizado en la solución de las ecuaciones.

<b>Fabricante</b>	Toshiba®
<b>Modelo</b>	Satellite™ A665 S6059
<b>Procesador</b>	AMD Phenom™ II P920 Quad-Core @1.60 GHz
<b>RAM</b>	4.00 GB
<b>Sistema operativo</b>	Microsoft® Windows™ 7 Ultimate 64-bit
<b>Alimentación</b>	Conectado a la red eléctrica
<b>Plan de energía</b>	Alto rendimiento

El software utilizado para la implementación del algoritmo es la herramienta de computo Matlab®, en donde se desarrollaron los scripts para el algoritmo y sus correspondientes pruebas.

Cada uno de los modos híbridos presentes en una guía de onda parcialmente llena (50%), está descrito por un sistema de tres ecuaciones. El modo  $EH_{mn}$ , está modelado mediante las ecuaciones (47), (33) y (34), y el modo  $HE_{mn}$  por el conjunto formado por (48), (33) y (34). Al analizar cada uno de estos sistemas, se observó que las incógnitas son  $k_{1y}$ ,  $k_{2y}$  y  $k_z$ . Además de las incógnitas, hay un parámetro que no está definido, la frecuencia. Para poder determinar las frecuencias a la cual cada modo se va a propagar y así proceder a la solución de las ecuaciones, es necesario encontrar la frecuencia de corte de cada uno.

#### 4.1.1 Procedimiento para encontrar la frecuencia de corte

Para que un modo guiado se propague, la frecuencia de la onda debe ser mayor a la denominada frecuencia de corte, de lo contrario, la onda se atenuará. Por lo tanto, cuando la frecuencia de la onda es igual a la frecuencia de corte, la constante de propagación en la dirección z es igual a cero.

Cuando  $f = f_c$ , las ecuaciones (33) y (34) se reescriben como se muestra en (55) y (56).

$$k_x^2 + k_{1y}^2 = (2\pi f_c)^2 \mu_1 \varepsilon_1 \quad (55)$$

$$k_x^2 + k_{2y}^2 = (2\pi f_c)^2 \mu_2 \varepsilon_2 \quad (56)$$

De la anteriores ecuaciones, se despeja  $k_{1y}$  y  $k_{2y}$  y se reemplazan en (47) y (48) respectivamente, quedando las ecuaciones de los modos sólo en términos de la frecuencia de corte, como se muestra en (57) y (58).

$$\frac{\mu_1}{\sqrt{(2\pi f_c)^2 \mu_1 \varepsilon_1 - k_x^2}} \tan\left(\sqrt{(2\pi f_c)^2 \mu_1 \varepsilon_1 - k_x^2} * h\right) = -\frac{\mu_2}{\sqrt{(2\pi f_c)^2 \mu_2 \varepsilon_2 - k_x^2}} \tan\left(\sqrt{(2\pi f_c)^2 \mu_2 \varepsilon_2 - k_x^2} * (b - h)\right) \quad (57)$$

$$\frac{\sqrt{(2\pi f_c)^2 \mu_1 \varepsilon_1 - k_x^2}}{\varepsilon_1} \tan\left(\sqrt{(2\pi f_c)^2 \mu_1 \varepsilon_1 - k_x^2} * h\right) = -\frac{\sqrt{(2\pi f_c)^2 \mu_2 \varepsilon_2 - k_x^2}}{\varepsilon_2} \tan\left(\sqrt{(2\pi f_c)^2 \mu_2 \varepsilon_2 - k_x^2} * (b - h)\right) \quad (58)$$

donde,

$$k_x = \frac{m * \pi}{a} \quad (59)$$

Las frecuencias de corte para los modos  $EH_{mn}$  se obtuvieron solucionando la ecuación (57) mediante SA, utilizando una temperatura (T) igual a  $1 * 10^{15}$ , un alfa ( $\alpha$ ) de 0.95 y una tolerancia (Tol) de  $1 * 10^{-22}$  como parámetros de inicialización del algoritmo. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 7.

**Tabla 7. Parámetros y resultados del algoritmo para la frecuencia de corte en los modos EH**

<b>Modos</b>	<b>Tc [s]</b>	<b>Ite</b>	<b>Error</b>	<b><math>f_c</math> [MHz]</b>
<b><math>EH_{01}</math></b>	3.4792	934	9.944686 e-23	4.5721573418
<b><math>EH_{11}</math></b>	3.9421	992	1.258843 e-22	5.0705565841
<b><math>EH_{12}</math></b>	3.6630	972	2.004332 e-23	10.777429465
<b><math>EH_{21}</math></b>	3.6860	950	7.011726 e-23	6.2805234201
<b><math>EH_{22}</math></b>	3.7133	1019	4.423774 e-25	11.623697629
<b><math>EH_{23}</math></b>	3.6527	903	3.113023 e-23	16.205525861
<b><math>EH_{31}</math></b>	3.7002	939	1.418347e-23	7.7972386059

Para las frecuencias de los modos  $HE_{mn}$ , se solucionó la ecuación (58) mediante el método SA utilizando una temperatura (T) igual a  $1 * 10^{45}$ , un alfa ( $\alpha$ ) de 0.95 y una tolerancia (Tol) de  $1 * 10^{-3}$  como parámetros de inicialización del algoritmo. Los resultados se muestran en Tabla 8.

**Tabla 8. Parámetros y resultados del algoritmo para la frecuencia de corte en los modos HE**

<b>Modos</b>	<b>Tc [s]</b>	<b>Ite</b>	<b>Error</b>	<b><math>f_c</math> [MHz]</b>
<b><math>HE_{11}</math></b>	8.165	4579	2.2130625 e-4	2.7944440833
<b><math>HE_{12}</math></b>	8.3598	4821	8.4589133 e-5	5.4147173093
<b><math>HE_{21}</math></b>	7.6665	4303	6.4173946 e-7	4.8275633584
<b><math>HE_{22}</math></b>	8.2077	4707	1.8788626 e-4	7.8072727873
<b><math>HE_{23}</math></b>	8.54527	4793	4.90201869 e-4	11.5231629328
<b><math>HE_{31}</math></b>	8.7325	5133	3.0765082 e-4	6.5399750869
<b><math>HE_{41}</math></b>	8.8692	5184	4.4412576 e-5	8.2636658622

#### 4.1.2 Solución de las ecuaciones (Función Objetivo)

Como se describió en la sección anterior, cuando la frecuencia de la onda es igual a la frecuencia de corte ( $f_c$ ), la constante de propagación en dirección z ( $k_z$ ), es igual a cero. Para solucionar la ecuaciones de los modos, se escogió un valor de frecuencia muy cercana a la frecuencia de corte, esto para tener la certeza que la variable  $k_z$  va a ser un valor próximo a cero. Al momento de resolver el sistema de ecuaciones que describe el comportamiento del los modos  $EH_{mn}$ , el algoritmo no converge, debido a que la función objetivo compuesta por las tres ecuaciones es muy sensible a cambios. Para resolver este inconveniente, se despejó  $k_{1y}$  y  $k_{2y}$  de (33) y (34) respectivamente y se reemplazaron en (47), quedando una sola expresión en función de  $k_z$ , que en últimas es la función objetivo (60) requerida por el algoritmo utilizando una frecuencia muy cercana a la frecuencia de corte, una temperatura (T) igual a  $1 * 10^{15}$ , un alfa ( $\alpha$ ) de 0.95 y una tolerancia (Tol) de  $1 * 10^{-23}$ . Los resultados obtenidos se muestran en Tabla 9.

$$F_{obj} = \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{(2\pi * f)^2 * \epsilon_1 \mu_1 - k_x^2 - k_z^2}} * \tan \left( \sqrt{(2\pi * f)^2 * \epsilon_1 \mu_1 - k_x^2 - k_z^2} * h \right) + \right. \\ \left. + \frac{\mu_2}{\sqrt{(2\pi * f)^2 * \epsilon_2 \mu_2 - k_x^2 - k_z^2}} * \tan \left( \sqrt{(2\pi * f)^2 * \epsilon_2 \mu_2 - k_x^2 - k_z^2} * (b - h) \right) \right)^2 \quad (60)$$

Para facilidad del lector se repiten las ecuaciones (33) y (34):

$$k_x^2 + k_{1y}^2 + k_z^2 = k_1^2 = \omega^2 \mu_1 \epsilon_1 \quad (61)$$

$$k_x^2 + k_{2y}^2 + k_z^2 = k_2^2 = \omega^2 \mu_2 \epsilon_2 \quad (62)$$

**Tabla 9. Resultados obtenidos mediante SA para los modos  $EH_{mn}$**

	$EH_{01}$	$EH_{11}$	$EH_{21}$	$EH_{31}$
<b><math>f</math> [MHz]</b>	4.57216764	5.07056644	6.28053394	7.79724871
<b>Tc [s]</b>	1.417	1.3761	2.424	2.689
<b>lte</b>	1067	1669	2270	2247
<b>Error</b>	$1.65123 \cdot 10^{-24}$	$3.25506 \cdot 10^{-26}$	$8.95748 \cdot 10^{-24}$	$8.97067 \cdot 10^{-26}$
<b><math>k_z</math></b>	$3.4017 \cdot 10^{-4}$	$3.63255 \cdot 10^{-4}$	$4.17891 \cdot 10^{-4}$	$4.8230 \cdot 10^{-4}$

Ahora con los valores de  $k_z$  obtenidos anteriormente, se hallan los valores de  $k_{1y}$  y  $k_{2y}$  despejándolas de (33) y (34) respectivamente. Los resultados se muestran en la Tabla 10

**Tabla 10. Resultados para las variables  $k_{1y}$  y  $k_{2y}$  en los modos  $EH_{mn}$**

<b>Modos</b>	$k_{1y}$	$k_{2y}$
$EH_{01}$	0.095531	0.1910634
$EH_{11}$	0.071104	0.1967973
$EH_{21}$	$0.086334 \cdot i$	0.21025641
$EH_{31}$	$0.170219 \cdot i$	0.2250590

Para resolver los modos  $HE_{mn}$ , se realizó un procedimiento similar al descrito anteriormente. Se despejó  $k_{1y}$  y  $k_{2y}$  de (33) y (34) y se reemplazaron en (48) creando una sola ecuación con la cual se generó la función objetivo (63). Para

este caso se utilizaron como parámetros del algoritmo una temperatura (T) igual a  $1 * 10^{40}$ , un alfa ( $\alpha$ ) de 0.95 y una tolerancia (Tol) de  $1 * 10^{-6}$ . Los resultados arrojados por el algoritmo se muestran en la Tabla 11.

$$F_{obj} = \left( \frac{\sqrt{(2\pi * f)^2 * \epsilon_1 \mu_1 - k_x^2 - k_z^2}}{\epsilon_1} * \tan \left( \sqrt{(2\pi * f)^2 * \epsilon_1 \mu_1 - k_x^2 - k_z^2} * h \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{(2\pi * f)^2 * \epsilon_2 \mu_2 - k_x^2 - k_z^2}}{\epsilon_2} * \tan \left( \sqrt{(2\pi * f)^2 * \epsilon_2 \mu_2 - k_x^2 - k_z^2} * (b - h) \right) \right)^2 \quad (63)$$

**Tabla 11. Resultados obtenidos mediante SA para los modos  $HE_{mn}$**

	$HE_{11}$	$HE_{12}$	$HE_{21}$	$HE_{22}$	$HE_{31}$	$HE_{41}$
<b>f [MHz]</b>	2.79445408	5.4147273	4.82757335	7.80728278	6.53998508	8.26367586
<b>Tc [s]</b>	1.079	1.064	1.101	1.056	1.056	1.115
<b>lte</b>	951	964	1002	966	969	998
<b>Error</b>	8.6281e-7	7.3015e-7	3.2741e-9	8.7169e-7	9.2410e-7	2.6915e-7
<b><math>k_z</math></b>	2.24646e-4	2.68167e-4	3.74101e-4	2.96594e-4	4.65989e-4	5.31870e-4

En la Tabla 12 se muestran los valores  $k_{1y}$  y  $k_{2y}$  para los modos  $HE_{mn}$ .

Tabla 12. Resultados para las variables  $k_{1y}$  y  $k_{2y}$  en los modos  $HE_{mn}$

Modos	$k_{1y}$	$k_{2y}$
$EH_{11}$	$0.05253001 * i$	0.08641788
$EH_{12}$	0.0814327	0.2122048
$EH_{21}$	$0.1204147 * i$	0.1265842
$EH_{22}$	0.0440039	0.2859504
$EH_{31}$	$0.1919481 * i$	0.1384691
$EH_{41}$	$0.2624572 * i$	0.1433659

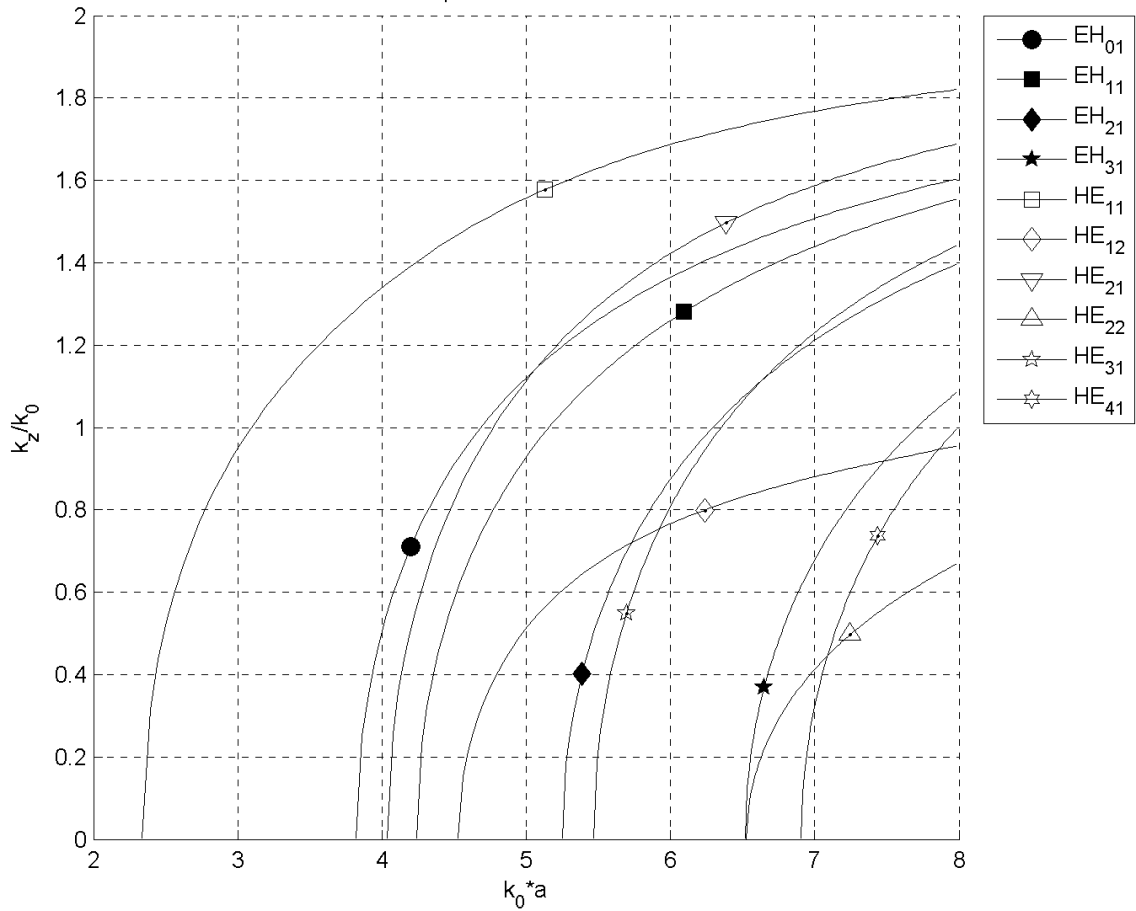
A continuación, se hallaron valores de  $k_z$  correspondientes a frecuencias más altas que la frecuencia de corte. Para demostrar que son soluciones, se graficaron las curvas de dispersión de los modos híbridos para poderlas comparar con las gráficas mostradas en [7]. Para hacer este procedimiento, se obtuvieron cien valores distintos de  $k_z$  los cuales corresponden a distintas frecuencias. Si el lector desea ver en detalle todos los valores de  $k_z$  utilizados para generar la grafica puede ver el ANEXO B. El eje  $y$  de la gráfica es la relación entre  $k_z$  y  $k_0$ , donde se utilizaron los valores de  $k_z$  obtenidos y se hallan los valores de  $k_0$ , los cuales dependen de la frecuencias y de las características del medio como se muestra en la ecuación (64). El eje  $x$  de la figura es la multiplicación entre  $k_0$  y  $a$ , siendo este último parámetro el ancho de la guía.

$$k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \quad (64)$$

La Figura 4 muestra las curvas de dispersión que fueron descritas y explicadas anteriormente, donde se tiene una guía de onda que en su interior está ocupada en un 50% por un dieléctrico con una permitividad relativa de 4. Para generar esta

gráfica, se hizo para cada modo, un barrido de frecuencia desde la frecuencia de corte hasta 9.55 MHz, esto con el fin de obtener unas curvas con el mismo rango en el eje horizontal que las gráficas encontradas en la literatura, para así poder compararlas.

**Figura 4. Curvas de dispersión de los modos híbridos obtenidas mediante SA.**  
Curvas de dispersión de los modos híbridos



## 4.2 REPRODUCCIÓN DE RESULTADOS MEDIANTE BISECCIÓN COMPLEMENTADO CON NEWTON-RAPHSON

En esta sección se mostrarán los resultados obtenidos con otro método de solución para hacer una comparación con SA. Se utilizaron los métodos de bisección y Newton-Raphson para resolver el problema, ya que este método es rápido y en la mayoría de las veces arroja muy buenos resultados. El algoritmo que describe este tipo de búsqueda está descrito en [1].

Se hizo un script de Matlab, para resolver el problema de la guía de onda parcialmente llena. Se hicieron pruebas para los modos EH y HE; primero se obtiene la frecuencia de corte para luego poder obtener los  $k_z$  cercanos a cero. La Tabla 13 resume los resultados obtenidos de este procedimiento para el modo EH.

Tabla 13. Resultados obtenidos mediante Bisección y Newton- Raphson para los modos  $EH_{mn}$

	$EH_{01}$	$EH_{11}$	$EH_{21}$	$EH_{31}$
<b><math>f</math> [MHz]</b>	4.57215764	5.07055644	6.28052394	7.79723871
<b>Tc [s]</b>	0.13810	0.138989	0.173193	0.156657
<b>lte</b>	43	43	43	43
<b>Error</b>	1.0164e-20	1.3553e-19	3.3881e-21	5.9292e-21
<b><math>Kz</math></b>	0.00034018	0.00036326	0.0004179	0.0004823

Ahora, en la Tabla 14 se muestran los resultados obtenidos para los modos HE.

Tabla 14. Resultados obtenidos mediante Bisección y Newton- Raphson para los modos  $HE_{mn}$

	$HE_{11}$	$HE_{12}$	$HE_{21}$	$HE_{22}$	$HE_{31}$	$HE_{41}$
<b>f [MHz]</b>	2.79445408	5.41472730	4.82757335	7.80728278	6.53998508	8.26367586
<b>Tc [s]</b>	0.338940	0.141508	0.158973	0.341119	0.00046599	0.161011
<b>lte</b>	44	44	44	45	44	44
<b>Error</b>	3.8146e-6	1.1444e-5	1.3351e-5	4.7683e-6	3.0517e-5	2.2888e-5
<b>Kz</b>	0.00022465	0.00026817	0.0003741	0.00029659	0.00046599	0.00053187

Luego de obtener los valores de  $k_z$  para todos los casos y con las ecuaciones (33) y (34) se pueden calcular los valores de  $k_{1y}$  y  $k_{2y}$  para cada caso. La Tabla 15 muestra esos valores para los modos EH.

Tabla 15. Resultados para las variables  $k_{1y}$  y  $k_{2y}$  de modos  $EH_{mn}$  obtenidos mediante bisección y Newton -Raphson

	$K_{1y}$	$K_{2y}$
<b>EH<sub>01</sub></b>	0.0955	0.1911
<b>EH<sub>11</sub></b>	0.0711	0.1968
<b>EH<sub>21</sub></b>	0.0863*i	0.2103
<b>EH<sub>31</sub></b>	0.1702*i	0.2251

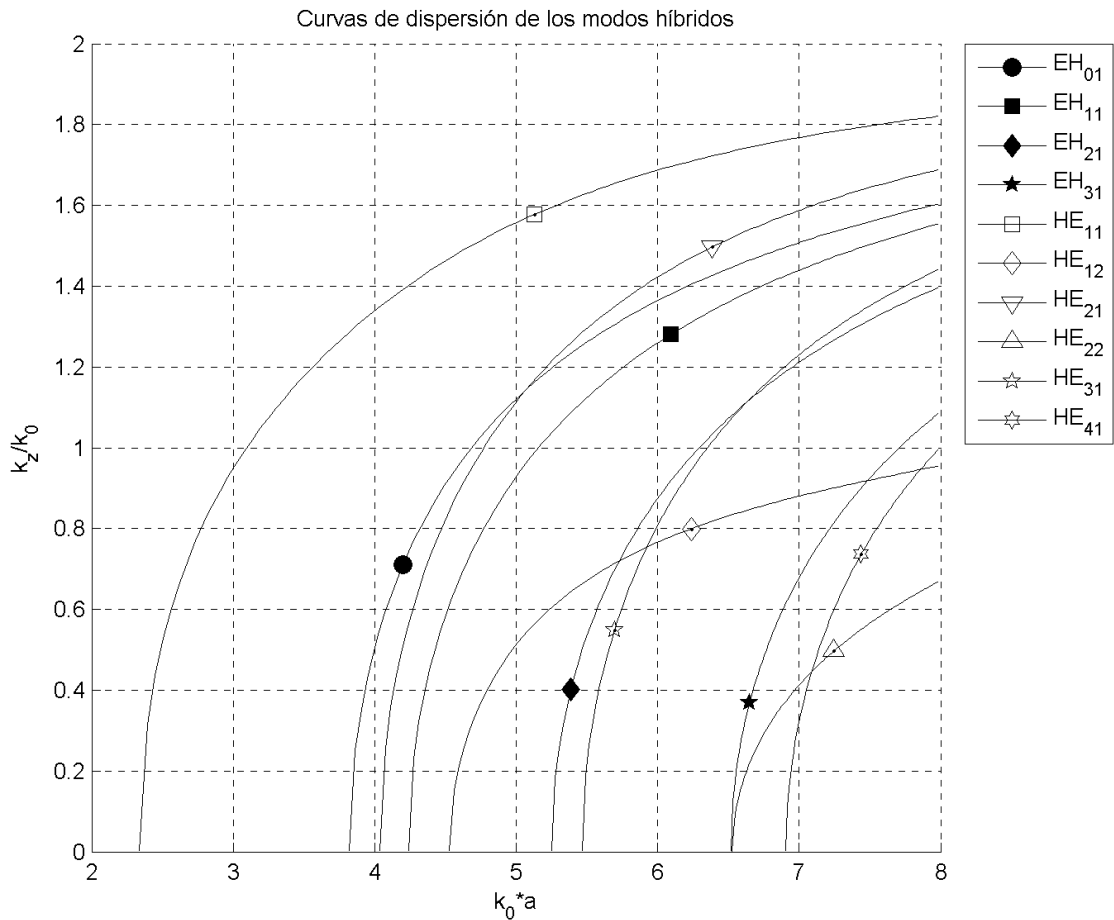
Para los modos HE también se hallaron los valores de  $k_{1y}$  y  $k_{2y}$ , los cuales se muestran en la Tabla 16.

**Tabla 16. Resultados para las variables  $k_{1y}$  y  $k_{2y}$  de modos  $HE_{mn}$  obtenidos mediante bisección y Newton -Raphson**

	$K_{1y}$	$K_{2y}$
<b>HE<sub>11</sub></b>	0.052530*i	0.086417
<b>HE<sub>12</sub></b>	0.081432	1.212204
<b>HE<sub>21</sub></b>	0.120414*i	0.126584
<b>HE<sub>22</sub></b>	0.044004	0.285950
<b>HE<sub>31</sub></b>	0.191948*i	0.138469
<b>HE<sub>41</sub></b>	0.262457	0.143365

Para obtener las curvas de dispersión mediante bisección complementado con Newton-Raphson, se realizó un procedimiento similar al descrito en la sección anterior. Con el algoritmo se encontraron cien valores de  $k_z$  para frecuencia mayores a la frecuencia de corte y con estos datos se graficaron la curvas de dispersión, teniendo en cuenta que el eje  $y$  corresponde a la relación entre  $k_z$  y  $k_0$ ; el eje  $x$  a la multiplicación entre  $k_0$  y  $a$ . Si el lector desea ver en más detalle los valores de  $k_z$ , los puede encontrar en el anexo C. En la Figura 5 se muestran las curvas de los modos híbridos obtenidas mediante Bisección complementado con Newton-Raphson, para una guía de onda 50%.

**Figura 5. Curvas de dispersión de los modos híbridos obtenidas mediante Bisección complementado con Newton-Raphson.**



### 4.3 REPRODUCCIÓN DE CURVAS DE DISPERSIÓN DE LOS MODOS HÍBRIDOS CON DIFERENTES PARÁMETROS

Las curvas de dispersión mostradas anteriormente, corresponden a los mismos parámetros, donde el dieléctrico que se encuentra al interior de la guía ocupa la mitad del espacio y hay una permitividad eléctrica relativa entre los dos medios de 4. Ahora en esa sección se variarán estos parámetros para poder observar los cambios en las curvas de dispersión de los modos híbridos. En este capítulo se utilizó el método SA hecho en este trabajo de grado.

Primero se hizo una variación de la permitividad eléctrica relativa entre los dos medios, la Figura 6 y la Figura 7 muestran las curvas de dispersión para una permitividad relativa de 3 y 20, respectivamente. En estas dos curvas se puede apreciar, que cuando el parámetro  $\epsilon_r$  es mayor, las frecuencias de corte de los modos híbridos son menores.

**Figura 6. Curvas de dispersión de los modos híbridos con  $\epsilon_r = 3$ .**

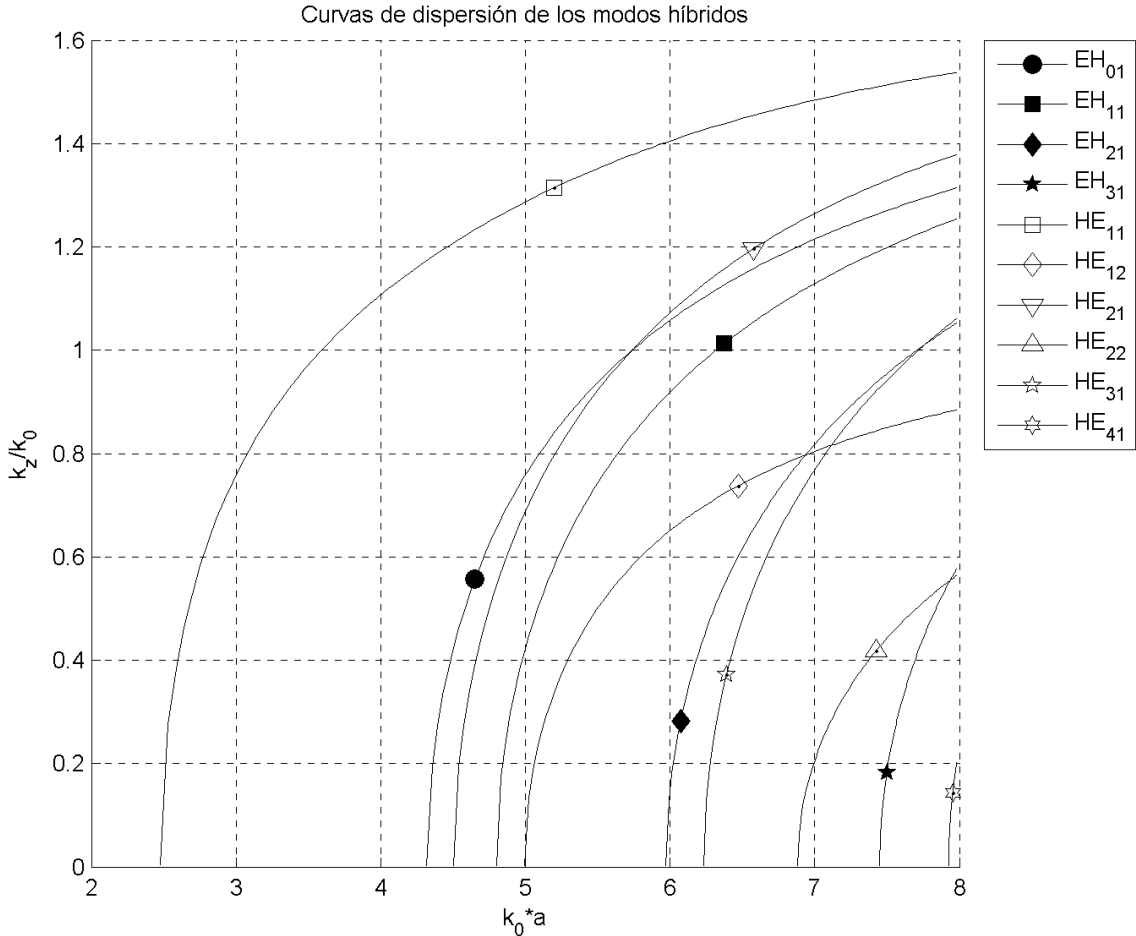
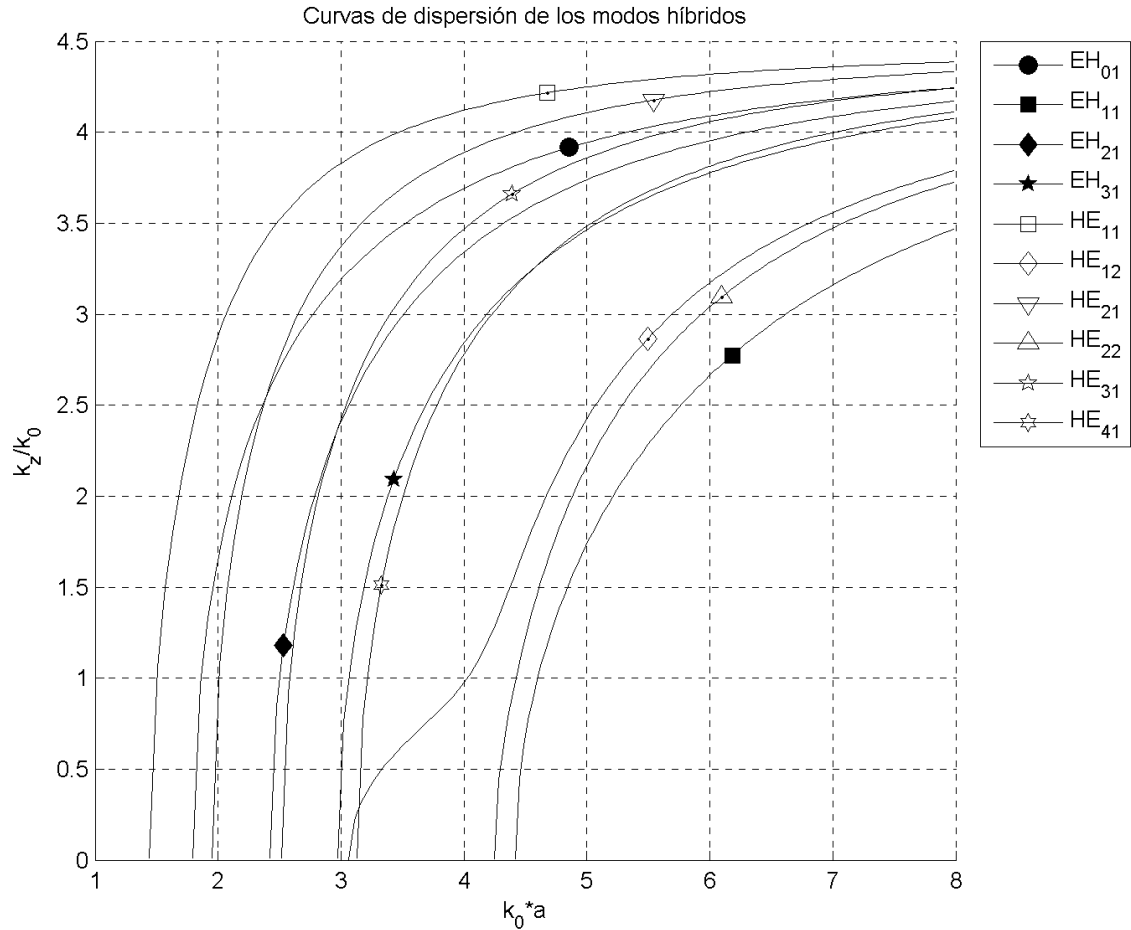
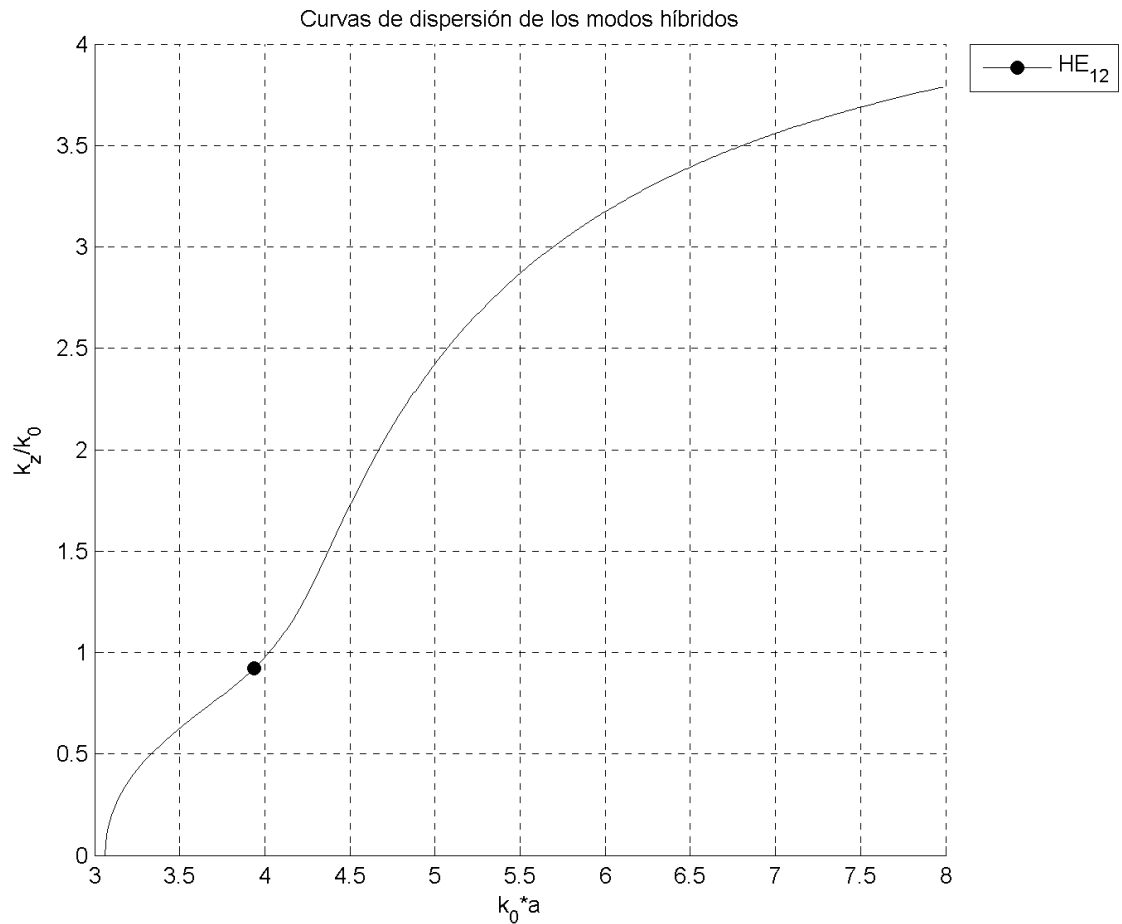


Figura 7. Curvas de dispersión de los modos híbridos con  $\epsilon_r = 20$ .



Como se puede observar en la gráfica anterior, el modo  $HE_{12}$  presenta una forma diferente a las demás, para comprobar que el método SA no haya tenido errores, se solucionó este modo con el método de bisección y Newton-Raphson, y la curva se muestra en la Figura 8.

Figura 8. Curva de dispersión para el modo  $HE_{12}$  con  $\epsilon_r = 20$  mediante bisección y Newton-Raphson.

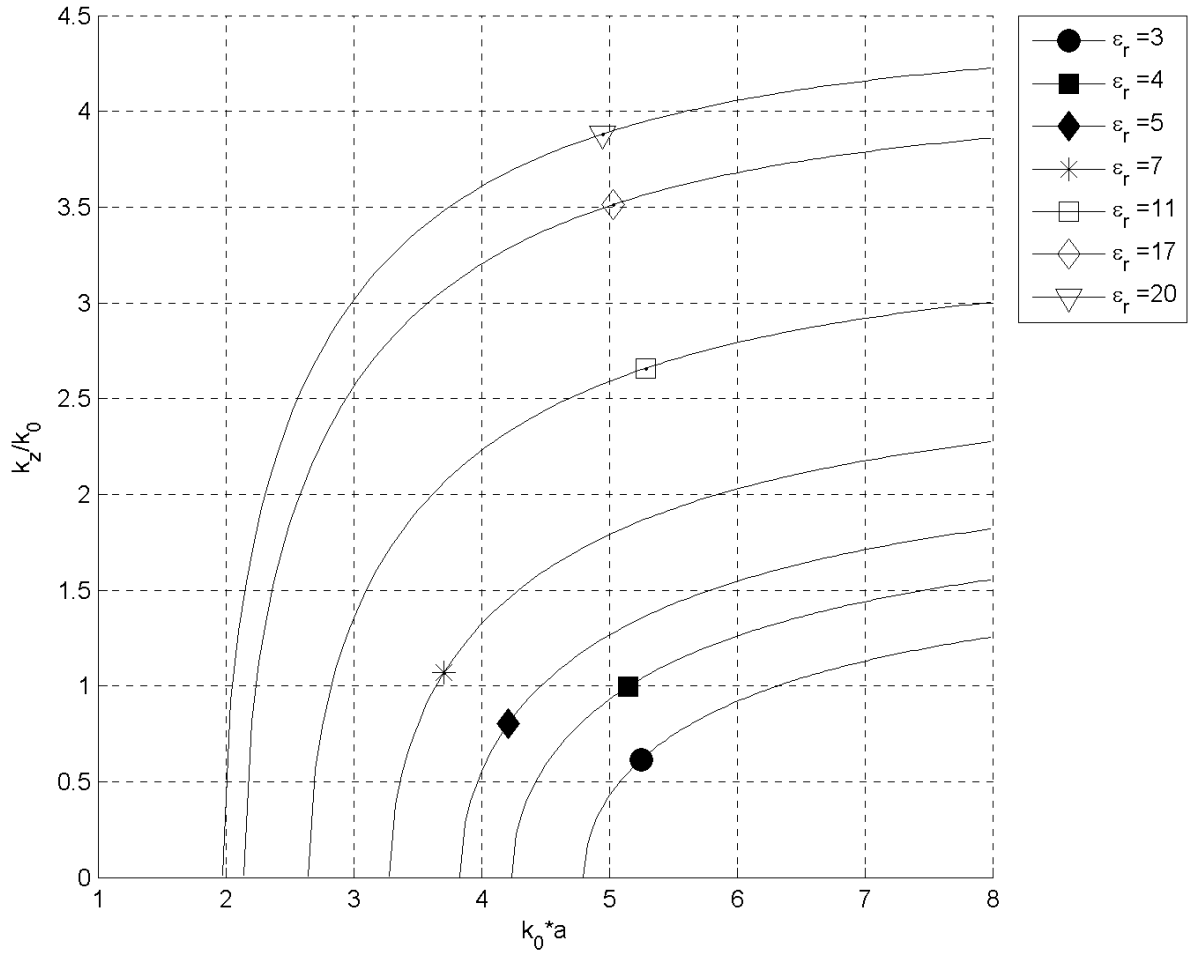


Con el método de bisección y Newton-Raphson se pudo comprobar que la curva para el modo  $HE_{12}$  con  $\epsilon_r = 20$  tiene el mismo comportamiento que presenta al solucionarla con SA.

La Figura 9 muestra las curvas de dispersión para el modo  $EH_{11}$  para diferentes permitividades eléctricas relativas.

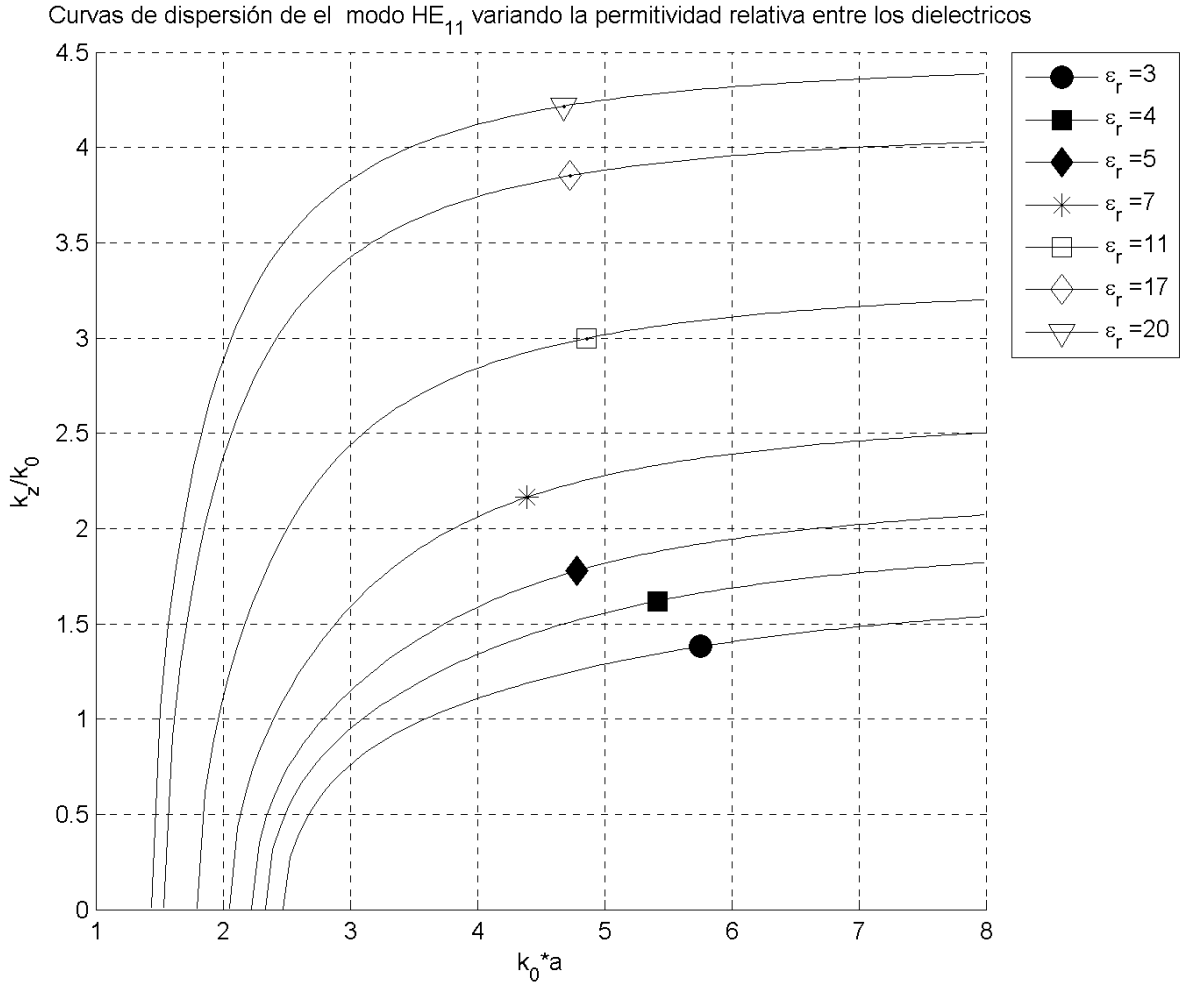
**Figura 9. Curva de dispersión para el modo EH<sub>11</sub> variando la permitividad relativa.**

Curvas de dispersión de el modo EH<sub>11</sub> variando la permitividad relativa entre los dielectricos



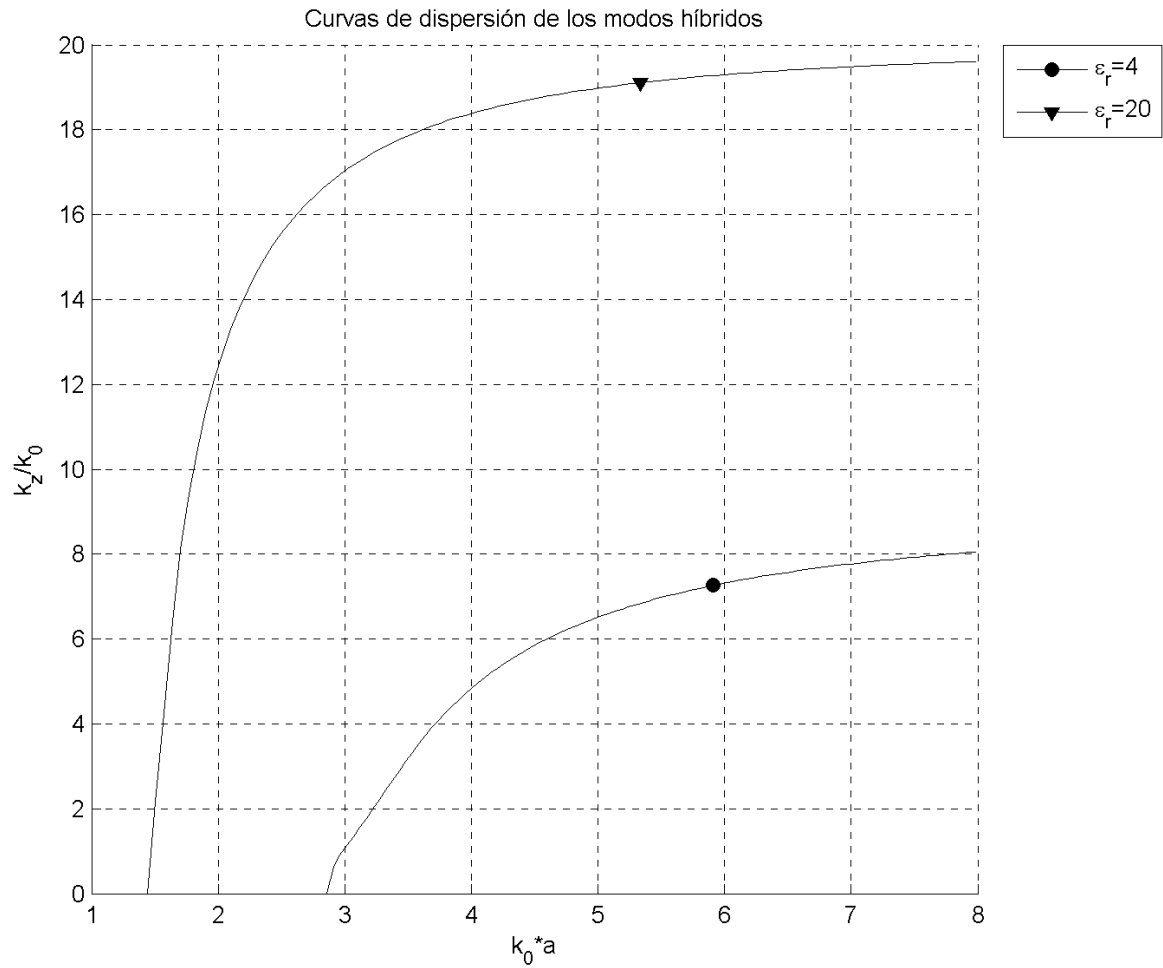
A continuación, la Figura 10 muestra las curvas de dispersión para el modo  $HE_{11}$  variando el parámetro de la permitividad eléctrica relativa.

**Figura 10. Curvas de dispersión para el modo  $HE_{11}$  variando la permitividad relativa.**



Ahora, para observar en que influye un aumento de la permeabilidad magnética relativa  $\mu_r$ , se solucionó el modo  $HE_{12}$  para  $\mu_r=20$ ; en la Figura 11 se muestran las curvas para dos valores de  $\epsilon_r$  diferente.

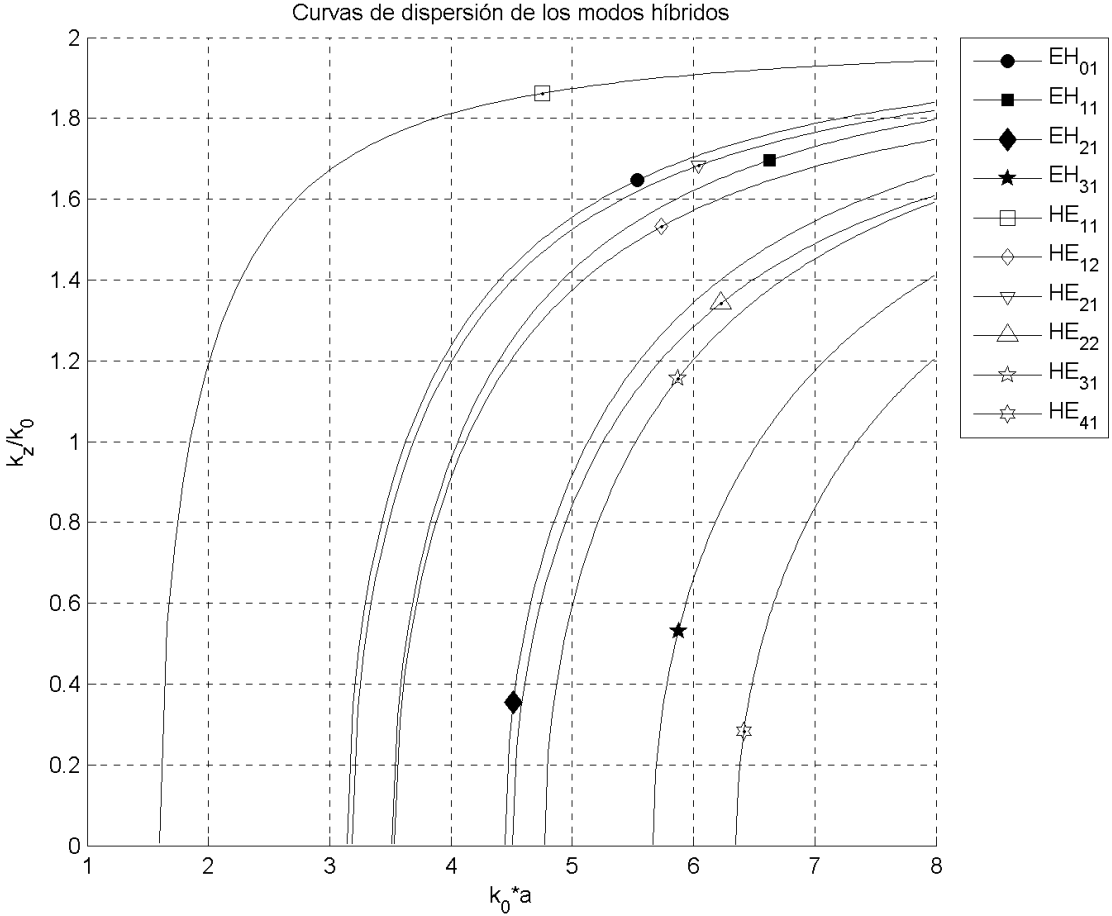
Figura 11. Curvas para el modo  $HE_{12}$  con  $\mu_r=20$  mediante SA.



Ahora, se hicieron variaciones a la altura del dieléctrico dentro de la guía de onda con una permitividad relativa entre los dos medios constante igual a 4. Se varía el porcentaje de ocupación del dieléctrico dentro de la guía de onda para ver cómo cambian las curvas de dispersión para cada caso.

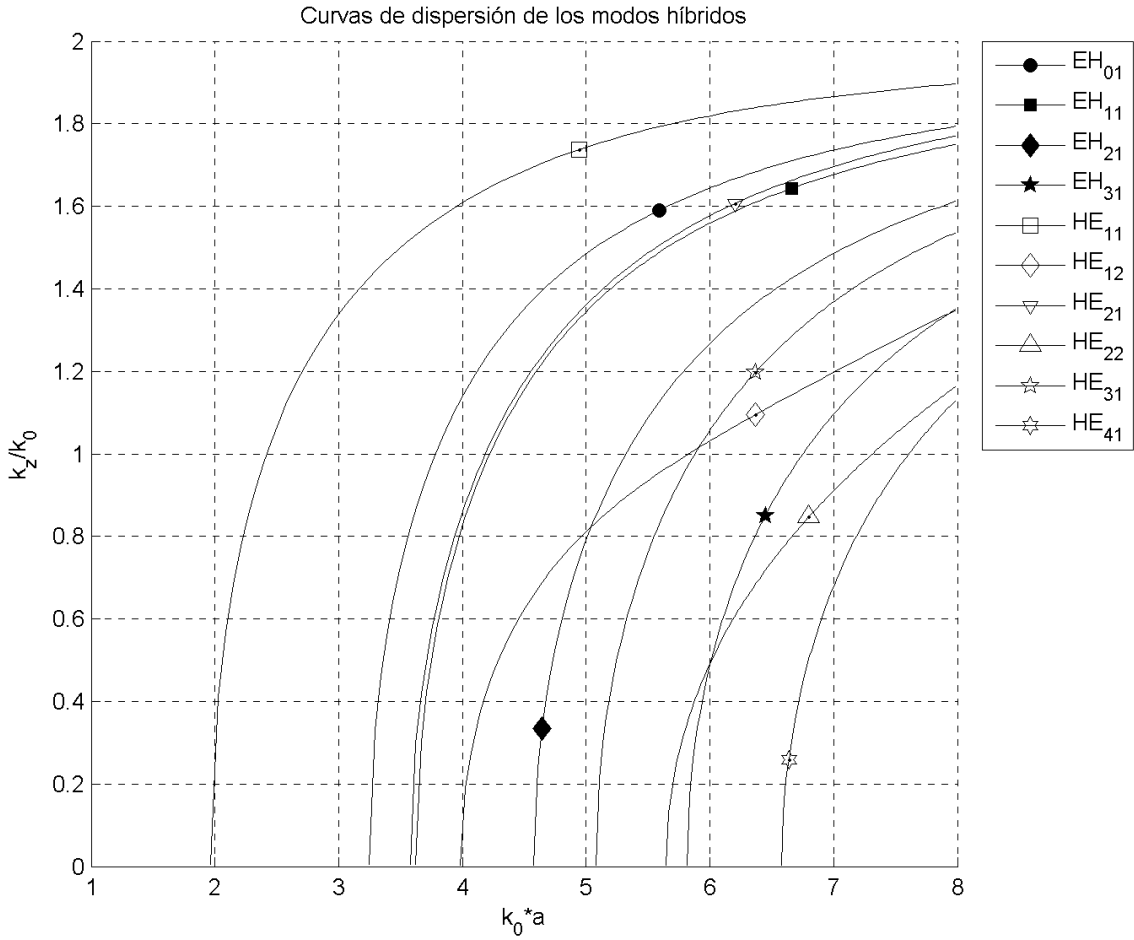
La Figura 12 muestra las curvas de dispersión para una guía de onda que está ocupada en 1% por un dieléctrico con una permitividad eléctrica relativa de 4.

Figura 12. Curvas de dispersión de los modos híbridos con un dieléctrico que ocupa el 1% de la guía.



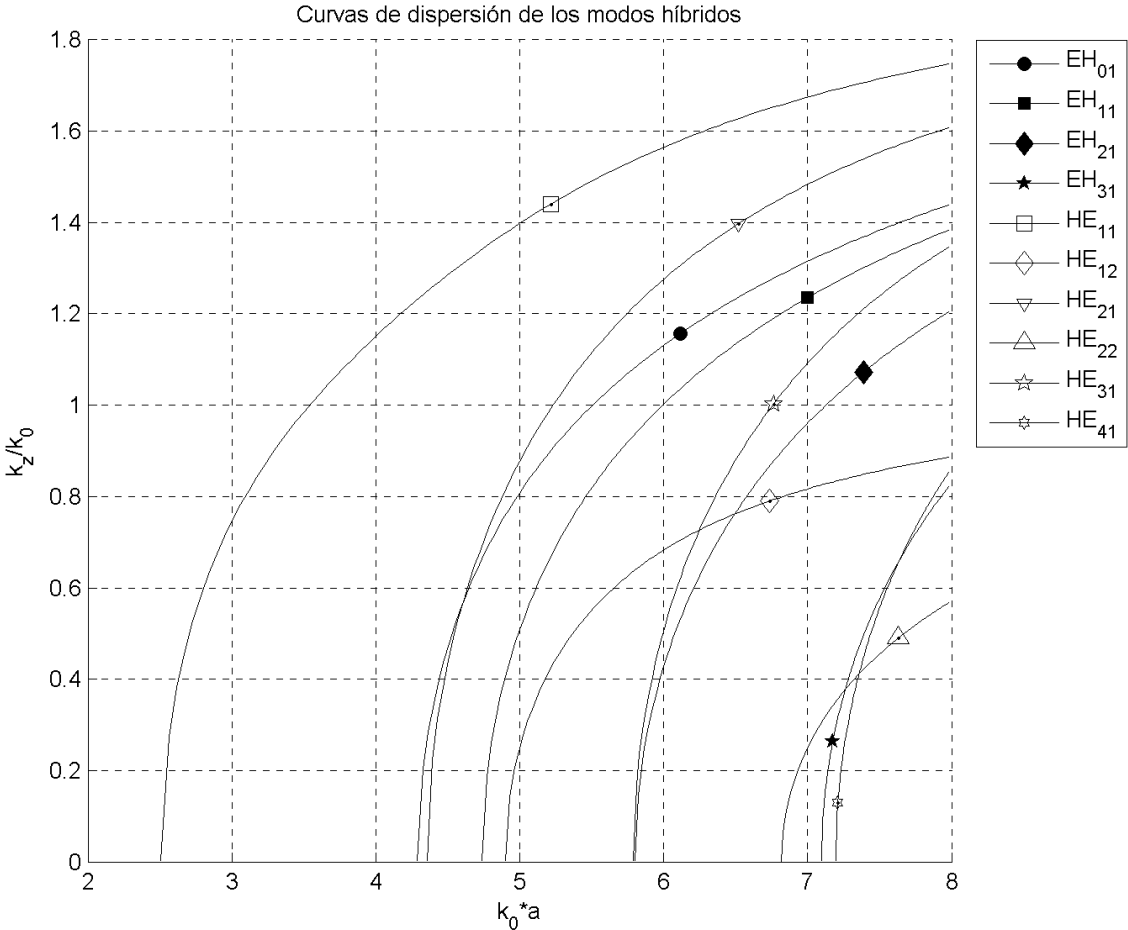
La Figura 13 muestra las curvas de dispersión de los modos híbridos de una guía de onda ocupada 25% por un dieléctrico con una permitividad eléctrica relativa de 4.

**Figura 13. Curvas de dispersión de los modos híbridos con un dieléctrico que ocupa el 25% de la guía.**



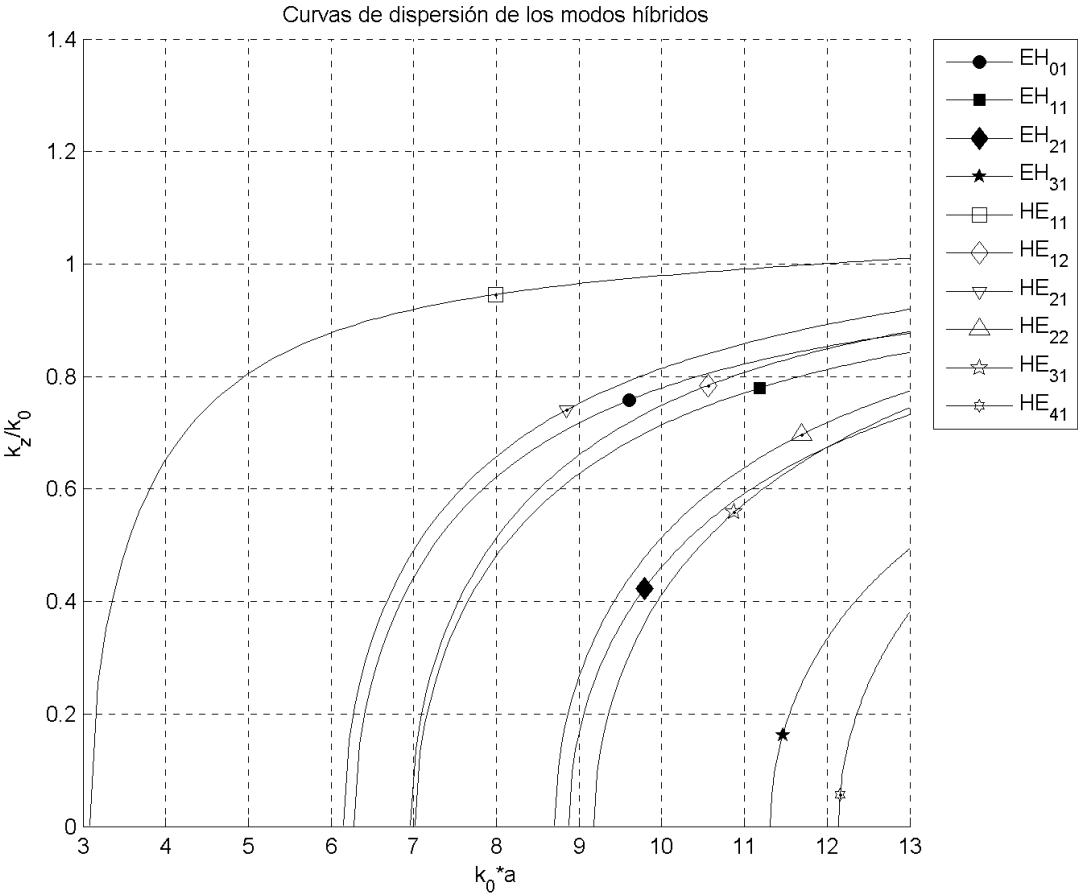
La Figura 14 muestra las curvas de dispersión de los modos híbridos de una guía de onda ocupada 60% por un dieléctrico con permitividad eléctrica relativa de 4.

**Figura 14. Curvas de dispersión de los modos híbridos con un dieléctrico que ocupa el 60% de la guía.**



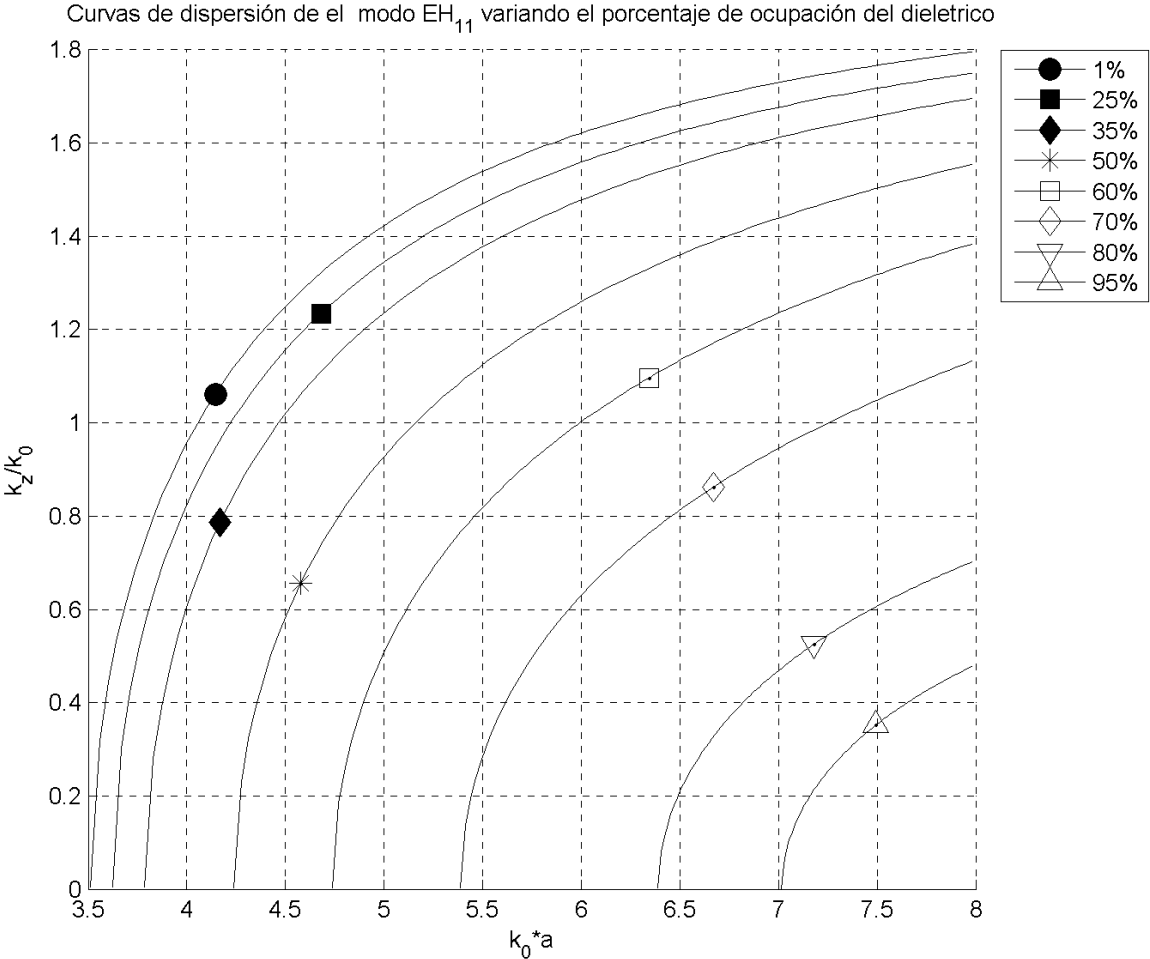
Las curvas de dispersión para una ocupación del 95% del dieléctrico se pueden observar en la Figura 15.

Figura 15. Curvas de dispersión de los modos híbridos con un dieléctrico que ocupa el 95% de la guía.



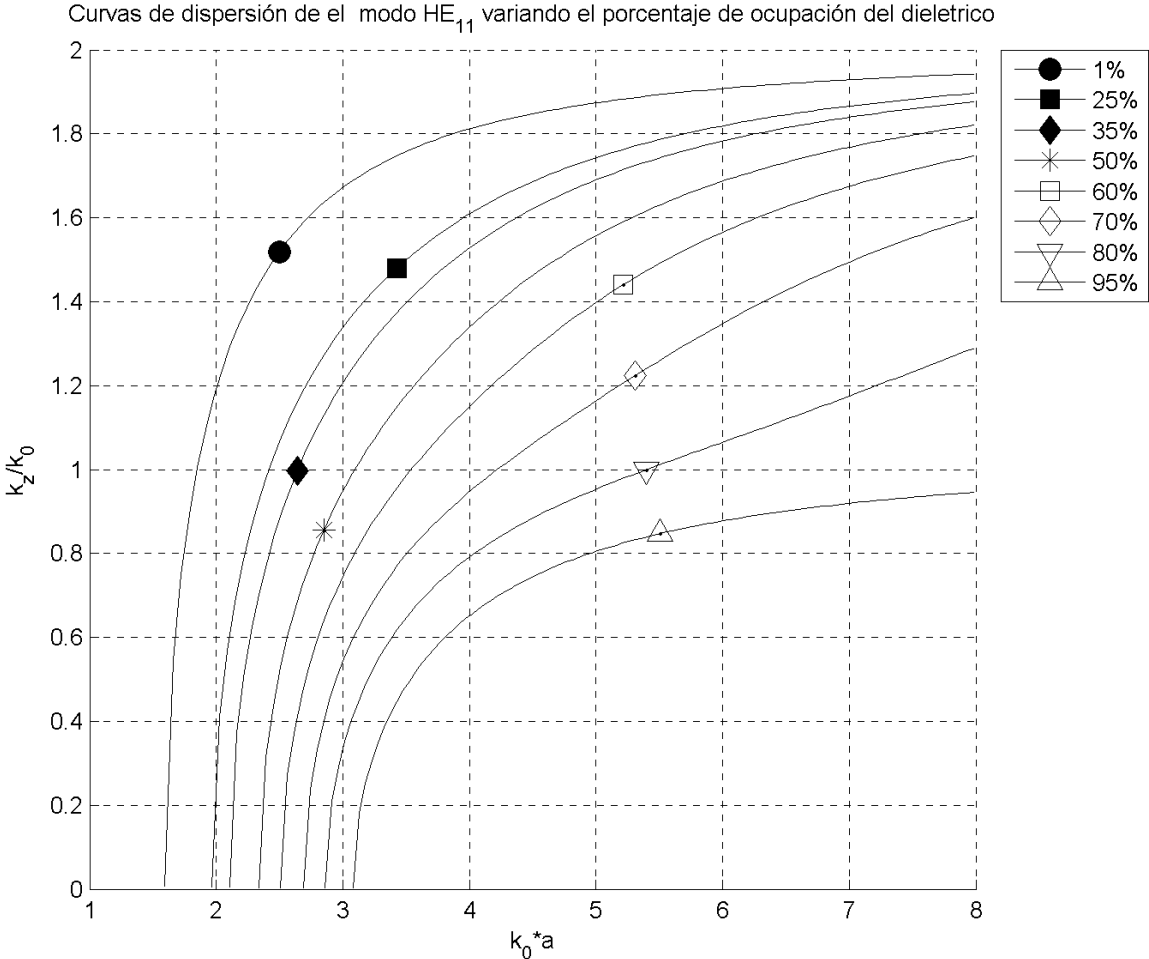
La Figura 16 muestra las curvas de dispersión para el modo  $EH_{11}$  variando los porcentajes de ocupación del dieléctrico dentro de la guía de onda.

**Figura 16. Curvas de dispersión para el modo  $EH_{11}$  variando el porcentaje de ocupación del dieléctrico.**



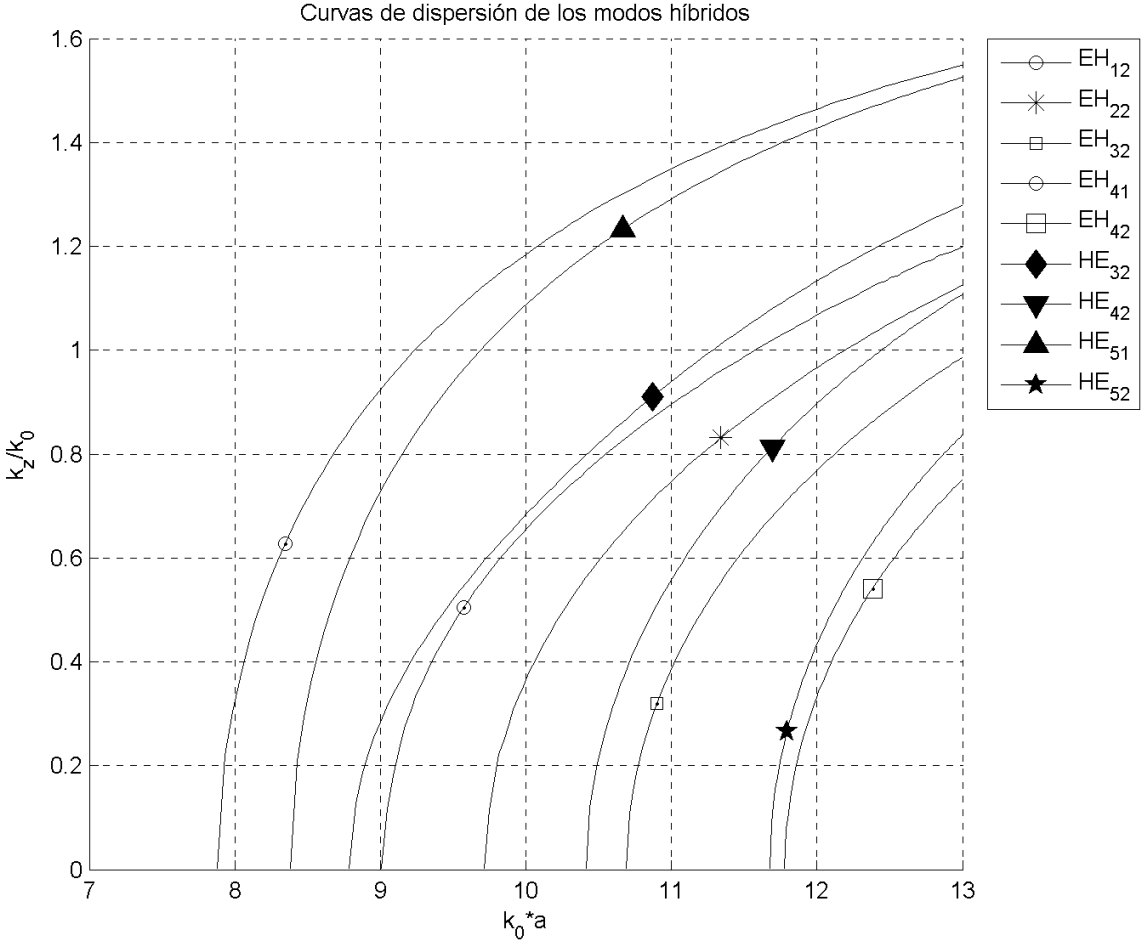
La Figura 17 muestra las curvas de dispersión para el modo  $EH_{11}$  variando los porcentajes de ocupación del dieléctrico dentro de la guía de onda.

**Figura 17. Curvas de dispersión para el modo  $EH_{11}$  variando el porcentaje de ocupación del dieléctrico.**



También se graficaron las curvas correspondientes a otros modos diferentes para una guía de onda con 50% de dieléctrico y se pueden observar en Figura 18.

**Figura 18. Curvas de dispersión para diferentes modos híbridos.**



## 5. COMPARACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se analizan los resultados obtenidos con el método SA y se comparan con las soluciones obtenidas con Bisección y Newton-Raphson. Para hacer la comparación, se tomaron dos casos: el primero para una solución del modo HE, y el otro para un resultado del modo EH.

Para el modo HE, las soluciones obtenidas se evaluarán en la función objetivo que se muestra en la ecuación (60). La Tabla 17 muestra las soluciones asociadas a una frecuencia alta (9.55 MHz) para el modo HE<sub>11</sub>, donde se puede apreciar que los resultados son los mismos pero el método SA requiere un mayor tiempo de cómputo para alcanzarlo.

Tabla 17. Comparación de las soluciones para el modo HE<sub>11</sub> correspondientes a la frecuencia 9.55 MHz

	Bisección y Newton-Raphson	SA
<b>Kz</b>	0.36322142	0.36322142
<b>K1y</b>	0.31349988*i	0.31349988*i
<b>K2y</b>	0.14548609	0.14548609
<b>Error</b>	9.02233296e-5	9.022333e-5
<b>Tc [s]</b>	0.3535	2.210053

Para hacer las comparaciones en el modo EH, las soluciones se evaluaron en la ecuación (63). La comparación entre Bisección y Newton-Raphson con el método SA se muestra en la Tabla 18 donde también se muestran los tiempos de cómputo y el error. Para este caso se tomaron los valores obtenidos para una frecuencia alta (9.55 MHz) del modo EH<sub>11</sub>.

**Tabla 18. Comparación de las soluciones para el modo  $EH_{11}$  correspondientes a la frecuencia 9.55 MHz**

	<b>Bisección y Newton-Raphson</b>	<b>SA</b>
<b>Kz</b>	0.31009	0.31004
<b>K1y</b>	0.250014*i	0.2500*i
<b>K2y</b>	0.238623	0.2387
<b>Error</b>	1.124859e-18	7.273447e-17
<b>Tc [s]</b>	0.215818	3.369457

## 6. OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES

1. Se cumplieron todos los objetivos propuestos para este trabajo.
2. El método de Simulated Annealing programado fue probado con funciones de pruebas estándar encontradas en la literatura, y se demostró que converge a los resultados esperados. En el caso de la función de prueba de cuatro variables, se presentó un tiempo de cómputo considerablemente alto debido a que es una función más compleja, y el algoritmo necesita un número mayor de iteraciones para llegar a un óptimo global.
3. Es importante mencionar que al aplicar el método SA al problema de la guía de onda parcialmente llena (50%), el algoritmo converge a las respectivas respuestas pero presenta un tiempo de cómputo mayor que el método de Bisección complementado con Newton-Raphson.
4. El trabajo arrojó resultados esperados y válidos. Esto se comprobó al generar las curvas de dispersión de los modos híbridos de una guía de onda parcialmente llena (50%). Estas gráficas mostradas en el Capítulo 4 son las esperadas y al compararlas con las que se encuentran en la literatura se puede ver que son iguales.
5. Al aplicar el algoritmo SA al sistema de ecuaciones que describen el comportamiento de los modos  $EH_{mn}$  de una guía de onda, se encontró que no funciona satisfactoriamente debido a que la función objetivo conformada por este sistema de ecuaciones presenta cambios muy drásticos. Para solucionar este inconveniente, se despejaron  $k_{1y}$  y  $k_{2y}$  y se reemplazaron en la ecuación (47), resultado una única ecuación con una única incógnita, a la cual el

algoritmo convergió a una respuesta correcta. Para los modos  $HE_{mn}$  sucedió el mismo problema, al cual se le aplicó el mismo procedimiento.

6. Cuando se cambió la permitividad eléctrica relativa entre los dos medios se observó que al aumentar este parámetro, las frecuencias de corte disminuyen considerablemente.
  
7. Al variar el porcentaje de ocupación de la guía de onda por parte del dieléctrico ( $\epsilon_r=4$ ), se observó que a mayor presencia del dieléctrico al interior de la estructura, la frecuencia de corte de los modos aumenta como se aprecia en las figuras 12, 13, 14 y 15. Si se quiere que los modos híbridos tengan frecuencias críticas menores, entonces se debe ocupar con menor cantidad de dieléctrico.

## **7. RECOMENDACIONES**

Se recomienda, en otros proyectos futuros, utilizar otros métodos metaheurísticos para resolver las ecuaciones que describen la propagación de los modos híbridos dentro de una guía de onda parcialmente llena, para hacer comparaciones con método de Simulated Annealing.

## 8. BIBLIOGRAFIA

- [1] Burden, Richard L., and J. Douglas Faires. *Análisis Numérico*. 7th ed. Thomson Learning, 1985.
- [2] Cheng, David K. *Fundamentos De Electromagnetismo Para Ingeniería*. Pearson, 1997.
- [3] Diaz, Adenso. *Optimización Heurística y Redes Neuronales*. 1st ed. Madrid, 1996.
- [4] Dios Otín, Federico, David Artigas Garcia, and Jaume Reolons Martos. "Capitulo 5 Guías De Onda." *Campos Electromagnéticos*. Barcelona: Edicions UPC, 1998. 369–408.
- [5] Gutiérrez Andrade, Miguel Angel, Sergio Gerardo De los Cobos Silva, and Blanca Rosa Pérez Salvador. "Optimización Con Recocido Simulado Para El Problema De Conjunto Independiente."
- [6] Hayt, William H. Jr, and Jhon A. Buck. *Teoría Electromagnética*. McGraw-Hill Interamericana de España, 2007.
- [7] Jin, Jian-Ming. "Fields and Waves in Rectangular Coordinates." *Teory and Computation of Electromagnetic Fields*. New Jersey: Jhon Wiley and sons, inc, 2010. 152–199.
- [8] Johnson, David S; et al. "Optimization by Simulated Annealing: An Experimental Number Partitioning." *Operations Research* 39.3 (1991): 29.
- [9] Kirkpatrick, S;, C.D; Gelatt, and M.P; Vecchi. "Optimization by Simulated Annealing." *Science* 220.4598 (1983): 671–680.
- [10] Ramón, Jesús, and Pérez López. "Contribución a Los Métodos De Optimización Basados En Procesos Naturales y Su Aplicación a La Medida De Antenas En Campo Próximo." 2005 : 26.
- [11] Rodríguez, Marcelo, Antonio González, and Consuelo Bellver. "Ecuaciones De Maxwell." *Campos Electromagnéticos*. 2da ed. Universidad De Sevilla, 1999. 484–512.

- [12] Santiago Badillo, Yadira Alondra. "Recocido Simulado Aplicado Al Problema De La Mochila." 2009 : 1–7.
- [13] Solano, Fabian David. "Diseño y Simulación De Guías De Onda Para El Calentamiento De Materiales Con Microondas." 2008 : 126.
- [14] Southworth, George. *Principles and Applications of Waveguide Transmission*. 1st ed. New York: Bell laboratories series, 1959.
- [15] Tomasi, Wayne. *Sistemas De Comunicaciones Electrónicas*. 4th ed. Ciudad de Mexico: Pearson, 2003.
- [16] Vazquez Espi, Mariano. "Recocido Simulado : Un Nuevo Algoritmo Para La Optimacion De Estructuras." 1994 : 223.

## 9 ANEXOS

### ANEXO A : GUÍA DE USO DEL SOFTWARE

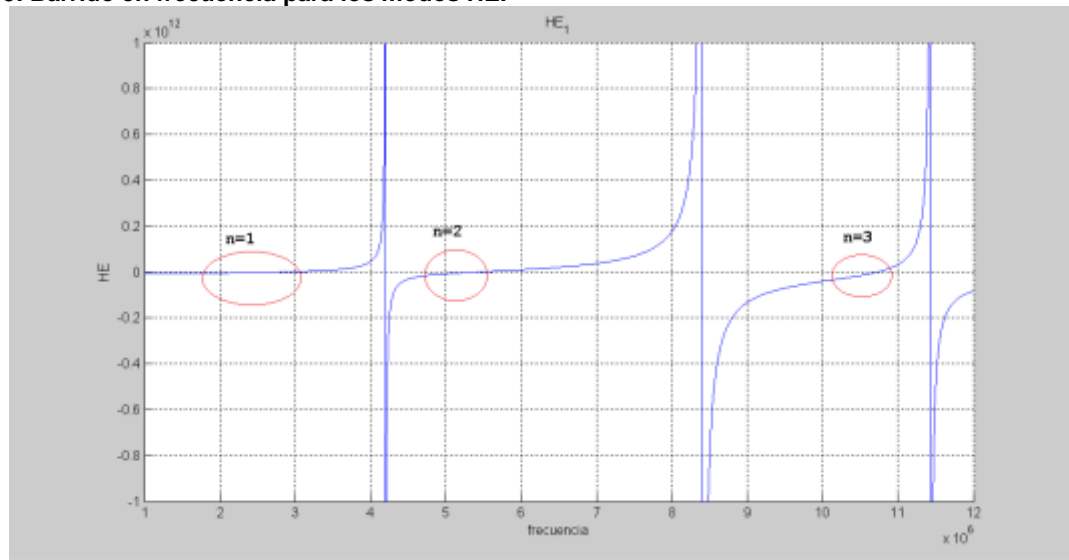
Con el fin de facilitar la ejecución del método SA en Matlab, se hizo un manual donde se explica detalladamente como ejecutar el software para cada caso.

#### Modos Híbridos HE para una guía llena en un 50%

Para solucionar estos modos, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se debe abrir en el editor de Matlab, el archivo llamado "SA\_HE.m".
2. Luego de darle ejecutar, en la ventana de comandos aparece la opción para ingresar el valor de m que se necesite.
3. Al ingresar el valor anterior, aparece una gráfica de un barrido en frecuencia de la función objetivo, la cual tiene varios cortes con el eje x, siendo estos los distintos valores de n, como se muestra en la Figura 19.

Figura 19. Barrido en frecuencia para los modos HE.



4. Con el cursor se escogen dos puntos, los cuales limitan la región donde se encuentra el cruce por cero del respectivo n, para así encontrar la frecuencia de corte.

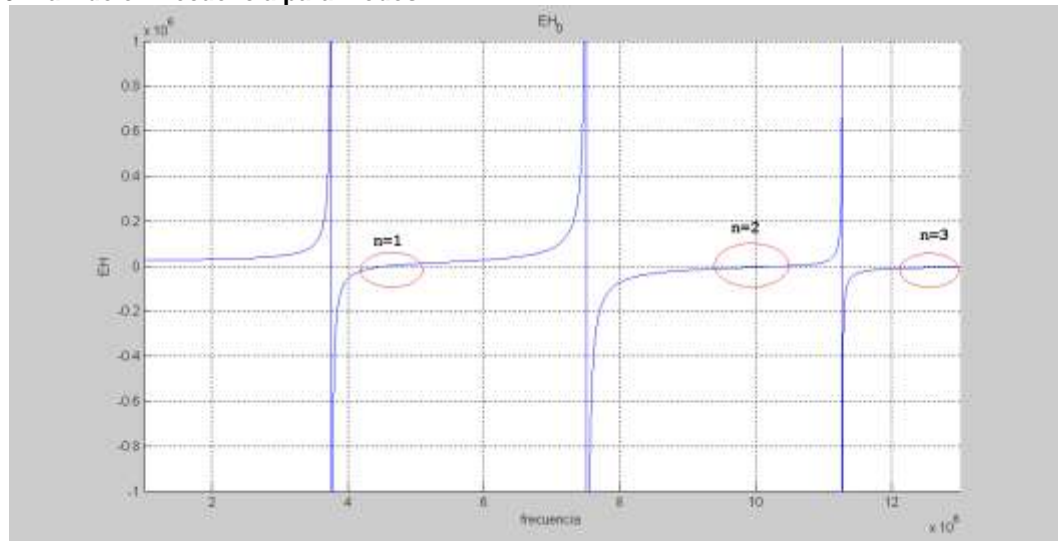
5. Ahora el programa se ejecutará, y primero muestra la frecuencia de corte para el modo que se esté trabajando, y luego muestra los valores de  $k_z$  para cada frecuencia.
6. Al finalizar la ejecución del programa, se abre una nueva ventana donde muestra la curva de dispersión para el modo híbrido solucionado.

### Modos Híbrido EH para una guía de onda llena en un 50%

Para solucionar estos modos, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Se debe abrir en el editor de Matlab, el archivo llamado "SA\_EH.m".
2. Luego de darle ejecutar, en la ventana de comandos aparece la opción para ingresar el valor de  $m$  que se necesite.
3. Al ingresar el valor anterior, aparece una gráfica de un barrido en frecuencia de la función objetivo, la cual tiene varios cortes con el eje  $x$ , siendo estos los distintos valores de  $n$ , como se muestra en la Figura 20.

Figura 20. Barrido en frecuencia para modos EH.



Como se puede observar, la primera frecuencia de corte ( $n=1$ ) está después de la primera asíntota a diferencia de los modos híbridos HE,

donde hay un corte por cero antes de la primera asíntota. Esto es importante tenerlo en cuenta, para no tener errores cuando se necesite hallar un modo determinado.

4. Al igual que para los modos HE, también se deben seleccionar dos puntos para limitar la frecuencia de corte, y así, el programa encuentra el correspondiente cruce por cero.
5. Ahora, el programa mostrará la frecuencia de corte obtenida para determinado modo en la ventana de comandos, y luego mostrará los valores de  $k_z$  para cada correspondiente frecuencia.
6. Al terminar de hallar los cien valores de  $k_z$ , genera la curva de dispersión para el modo solucionado.

### **Modos híbridos con diferentes parámetros**

En general, se siguen los mismos pasos anteriores, solo se deben tener en cuenta unas consideraciones especiales.

Para los modos híbridos HE con un porcentaje de ocupación de 1%, 25% y 60% se debe abrir en el editor de Matlab, el archivo llamado "SA\_HE\_1\_25\_60.m"; el cual se ejecuta con los pasos mostrados anteriormente, pero se debe tener en cuenta que para cambiar el parámetro del porcentaje de ocupación se debe modificar la línea 36, donde está el valor de la altura del dieléctrico. En caso de que se quieran solucionar los modos híbridos EH, se ejecuta el archivo llamado "SA\_HE\_1\_25\_60.m"; se siguen los mismos pasos, y en caso de querer cambiar la altura de los dieléctricos, se modifica la línea 31 del código.

Si se quiere graficar algún modo híbrido para una ocupación del 95% del dieléctrico, se ejecuta el archivo llamado "SA\_HE\_h\_95.m" o el archivo "SA\_EH\_h\_95.m" según sea el caso. Al ejecutar se siguen los pasos normales explicados anteriormente, y el programa genera la curva de dispersión requerida.

Si se quieren generar las curvas para  $\epsilon_r=3$ , se debe ejecutar el archivo "SA\_HE\_er\_3.m" o el archivo "SA\_EH\_er\_3.m", según sea caso, si se necesita solucionar los modos híbridos HE o EH. Luego, se siguen los pasos normales para generar las curvas de dispersión.

Para generar las curvas de dispersión con el parámetro  $\epsilon_r=20$ , se utilizan los archivos "SA\_EH\_er\_20.m" o "SA\_EH\_er\_20.m", según sea el caso.

## **ANEXO B: VALORES DE $K_z$ HALLADOS POR SIMULATED ANNEALING UTILIZADOS PARA GRAFICAR LAS CURVAS DE DISPERSIÓN**

Tabla 19. Datos de  $k_z$  hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo  $EH_{01}$

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
4572167,5	0,00033768	6281726,13	0,15714646	7991284,77	0,24516132
4622448,63	0,02420723	6332007,27	0,15993124	8041565,91	0,24762244
4672729,77	0,03435006	6382288,41	0,16269713	8091847,04	0,25007918
4723010,91	0,04221336	6432569,54	0,16544516	8142128,18	0,25253166
4773292,04	0,04890969	6482850,68	0,16817629	8192409,32	0,25498004
4823573,18	0,0548684	6533131,82	0,17089141	8242690,45	0,25742442
4873854,32	0,06030889	6583412,95	0,17359135	8292971,59	0,25986494
4924135,45	0,06536103	6633694,09	0,17627687	8343252,73	0,2623017
4974416,59	0,07010914	6683975,23	0,17894868	8393533,86	0,26473481
5024697,73	0,07461156	6734256,36	0,18160747	8443815	0,26716439
5074978,86	0,07891065	6784537,5	0,18425386	8494096,14	0,26959051
5125260	0,08303825	6834818,64	0,18688843	8544377,27	0,27201329
5175541,13	0,087019	6885099,77	0,18951174	8594658,41	0,27443282
5225822,27	0,09087243	6935380,91	0,19212429	8644939,55	0,27684917
5276103,41	0,09461433	6985662,04	0,19472658	8695220,68	0,27926243
5326384,54	0,09825765	7035943,18	0,19731906	8745501,82	0,28167268
5376665,68	0,10181317	7086224,32	0,19990215	8795782,95	0,28408
5426946,82	0,10528997	7136505,45	0,20247626	8846064,09	0,28648446
5477227,95	0,10869581	7186786,59	0,20504178	8896345,23	0,28888613
5527509,09	0,11203731	7237067,73	0,20759906	8946626,36	0,29128507
5577790,23	0,11532025	7287348,86	0,21014843	8996907,5	0,29368135
5628071,36	0,11854966	7337630	0,21269022	9047188,64	0,29607503
5678352,5	0,12172994	7387911,14	0,21522473	9097469,77	0,29846616
5728633,63	0,12486501	7438192,27	0,21775224	9147750,91	0,30085481
5778914,77	0,12795832	7488473,41	0,22027303	9198032,05	0,30324103
5829195,91	0,13101298	7538754,54	0,22278735	9248313,18	0,30562487
5879477,04	0,13403176	7589035,68	0,22529544	9298594,32	0,30800637
5929758,18	0,13701716	7639316,82	0,22779754	9348875,45	0,3103856
5980039,32	0,13997144	7689597,95	0,23029386	9399156,59	0,31276258
6030320,45	0,14289665	7739879,09	0,23278461	9449437,73	0,31513737
6080601,59	0,14579464	7790160,23	0,23526998	9499718,86	0,31751002
6130882,73	0,14866713	7840441,36	0,23775017	9550000	0,31988055
6181163,86	0,15151566	7890722,5	0,24022534		
6231445	0,15434167	7941003,64	0,24269567		

Tabla 20. Datos de  $k_z$  hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo  $EH_{11}$

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
5070566,84	0,00037026	6608958,02	0,15633813	8147349,21	0,24027547
5115813,63	0,02450748	6654204,82	0,15903156	8192596,01	0,24259215

5161060,43	0,03475586
5206307,23	0,04268755
5251554,03	0,04943095
5296800,83	0,05542179
5342047,63	0,06088289
5387294,43	0,06594621
5432541,23	0,07069746
5477788,03	0,07519603
5523034,83	0,07948501
5568281,63	0,08359682
5613528,43	0,08755661
5658775,23	0,09138428
5704022,03	0,09509593
5749268,83	0,09870479
5794515,63	0,10222187
5839762,43	0,10565647
5885009,23	0,1090165
5930256,03	0,11230876
5975502,83	0,11553916
6020749,63	0,11871285
6065996,43	0,12183437
6111243,23	0,12490771
6156490,03	0,12793644
6201736,83	0,13092375
6246983,63	0,13387249
6292230,43	0,13678523
6337477,23	0,13966431
6382724,02	0,14251184
6427970,82	0,14532974
6473217,62	0,14811978
6518464,42	0,15088355
6563711,22	0,15362255

6699451,62	0,16170398
6744698,42	0,16435649
6789945,22	0,16699007
6835192,02	0,16960566
6880438,82	0,17220412
6925685,62	0,17478626
6970932,42	0,17735284
7016179,22	0,17990455
7061426,02	0,18244207
7106672,82	0,18496601
7151919,62	0,18747695
7197166,42	0,18997544
7242413,22	0,192462
7287660,02	0,19493712
7332906,82	0,19740124
7378153,62	0,19985481
7423400,42	0,20229824
7468647,22	0,2047319
7513894,02	0,20715617
7559140,82	0,20957139
7604387,62	0,2119779
7649634,41	0,21437599
7694881,21	0,21676598
7740128,01	0,21914814
7785374,81	0,22152274
7830621,61	0,22389003
7875868,41	0,22625025
7921115,21	0,22860365
7966362,01	0,23095043
8011608,81	0,23329081
8056855,61	0,23562498
8102102,41	0,23795314

8237842,81	0,24490333
8283089,61	0,24720919
8328336,41	0,24950987
8373583,21	0,25180552
8418830,01	0,25409628
8464076,81	0,25638228
8509323,61	0,25866365
8554570,41	0,26094052
8599817,21	0,263213
8645064,01	0,2654812
8690310,81	0,26774524
8735557,61	0,27000523
8780804,41	0,27226125
8826051,21	0,2745134
8871298,01	0,27676179
8916544,8	0,2790065
8961791,6	0,28124761
9007038,4	0,28348521
9052285,2	0,28571938
9097532	0,28795019
9142778,8	0,29017772
9188025,6	0,29240204
9233272,4	0,29462322
9278519,2	0,29684132
9323766	0,29905641
9369012,8	0,30126856
9414259,6	0,30347781
9459506,4	0,30568423
9504753,2	0,30788787
9550000	0,3100888

Tabla 21. Datos de  $k_z$  hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo  $EH_{21}$

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
6280533,68	0,00041233	7403380,7	0,14826773	8526227,72	0,22100322
6313558,59	0,02406085	7436405,61	0,15067506	8559252,63	0,22295141
6346583,5	0,03408392	7469430,52	0,15305836	8592277,54	0,22489227
6379608,42	0,04181561	7502455,43	0,15541875	8625302,45	0,22682598
6412633,33	0,04836763	7535480,35	0,15775726	8658327,37	0,22875273
6445658,24	0,05416981	7568505,26	0,16007486	8691352,28	0,23067269
6478683,15	0,0594422	7601530,17	0,16237247	8724377,19	0,23258603
6511708,06	0,06431528	7634555,08	0,16465092	8757402,1	0,23449292
6544732,98	0,06887392	7667580	0,16691101	8790427,02	0,23639351
6577757,89	0,07317696	7700604,91	0,16915348	8823451,93	0,23828794
6610782,8	0,07726715	7733629,82	0,17137903	8856476,84	0,24017637
6643807,71	0,08117672	7766654,73	0,17358833	8889501,75	0,24205893
6676832,63	0,08493066	7799679,65	0,17578198	8922526,67	0,24393575
6709857,54	0,0885488	7832704,56	0,17796058	8955551,58	0,24580698
6742882,45	0,0920472	7865729,47	0,18012468	8988576,49	0,24767273
6775907,36	0,09543904	7898754,38	0,1822748	9021601,4	0,24953313
6808932,28	0,09873536	7931779,3	0,18441144	9054626,31	0,25138829
6841957,19	0,10194545	7964804,21	0,18653506	9087651,23	0,25323833
6874982,1	0,10507723	7997829,12	0,18864611	9120676,14	0,25508336
6908007,01	0,10813754	8030854,03	0,190745	9153701,05	0,25692348
6941031,93	0,11113231	8063878,94	0,19283215	9186725,96	0,25875879
6974056,84	0,11406673	8096903,86	0,19490793	9219750,88	0,2605894
7007081,75	0,11694536	8129928,77	0,19697271	9252775,79	0,26241541
7040106,66	0,11977225	8162953,68	0,19902683	9285800,7	0,2642369
7073131,57	0,122551	8195978,59	0,20107062	9318825,61	0,26605397
7106156,49	0,12528483	8229003,51	0,20310439	9351850,53	0,26786671
7139181,4	0,12797665	8262028,42	0,20512845	9384875,44	0,26967519
7172206,31	0,13062906	8295053,33	0,20714309	9417900,35	0,27147951
7205231,22	0,13324444	8328078,24	0,20914857	9450925,26	0,27327974
7238256,14	0,13582494	8361103,16	0,21114516	9483950,18	0,27507597
7271281,05	0,13837254	8394128,07	0,21313311	9516975,09	0,27686826
7304305,96	0,14088903	8427152,98	0,21511267	9550000	0,27865669
7337330,87	0,14337606	8460177,89	0,21708406		
7370355,79	0,14583516	8493202,81	0,21904751		

Tabla 22. Datos de  $k_z$  hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo  $EH_{31}$

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
7797247,81	0,00046001	8399203,11	0,121298	9001158,41	0,17564502
7814952,38	0,02031413	8416907,68	0,12315639	9018862,97	0,17705198
7832656,95	0,02874616	8434612,24	0,12499207	9036567,54	0,17845131
7850361,51	0,03523133	8452316,81	0,12680605	9054272,11	0,17984318
7868066,08	0,04071092	8470021,38	0,12859924	9071976,68	0,18122776
7885770,65	0,04554929	8487725,95	0,1303725	9089681,24	0,18260521
7903475,22	0,0499332	8505430,51	0,13212663	9107385,81	0,1839757
7921179,78	0,05397351	8523135,08	0,13386238	9125090,38	0,18533939
7938884,35	0,05774238	8540839,65	0,13558046	9142794,95	0,18669641
7956588,92	0,06128992	8558544,22	0,13728153	9160499,51	0,18804691
7974293,49	0,06465257	8576248,78	0,13896623	9178204,08	0,18939104
7991998,05	0,06785782	8593953,35	0,14063513	9195908,65	0,19072892
8009702,62	0,07092703	8611657,92	0,14228879	9213613,22	0,19206069
8027407,19	0,07387714	8629362,49	0,14392773	9231317,78	0,19338647
8045111,76	0,0767219	8647067,05	0,14555247	9249022,35	0,19470638
8062816,32	0,07947263	8664771,62	0,14716345	9266726,92	0,19602055
8080520,89	0,08213877	8682476,19	0,14876115	9284431,49	0,19732909
8098225,46	0,08472831	8700180,76	0,15034596	9302136,05	0,1986321
8115930,03	0,08724808	8717885,32	0,15191831	9319840,62	0,1999297
8133634,59	0,08970395	8735589,89	0,15347856	9337545,19	0,20122199
8151339,16	0,09210104	8753294,46	0,1550271	9355249,76	0,20250907
8169043,73	0,09444382	8770999,03	0,15656426	9372954,32	0,20379104
8186748,3	0,09673624	8788703,59	0,15809037	9390658,89	0,20506799
8204452,86	0,09898181	8806408,16	0,15960576	9408363,46	0,20634002
8222157,43	0,10118363	8824112,73	0,16111072	9426068,03	0,20760722
8239862	0,10334451	8841817,3	0,16260555	9443772,59	0,20886967
8257566,57	0,10546697	8859521,86	0,16409052	9461477,16	0,21012746
8275271,14	0,10755328	8877226,43	0,1655659	9479181,73	0,21138068
8292975,7	0,1096055	8894931	0,16703194	9496886,3	0,2126294
8310680,27	0,11162552	8912635,57	0,16848888	9514590,86	0,2138737
8328384,84	0,11361505	8930340,14	0,16993696	9532295,43	0,21511366
8346089,41	0,11557568	8948044,7	0,1713764	9550000	0,21634935
8363793,97	0,11750884	8965749,27	0,17280742		
8381498,54	0,11941587	8983453,84	0,17423023		

Tabla 23. Datos de  $k_z$  hallado por SA para graficar la curva de dispersión del modo  $HE_{11}$ .

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
2794454,08	0,00022465	5114540,56	0,15075949	7434627,04	0,26523489
2862691,92	0,01874088	5182778,4	0,15424798	7502864,87	0,26847323
2930929,76	0,02676417	5251016,23	0,15773078	7571102,71	0,27170534
2999167,6	0,0331038	5319254,07	0,16120755	7639340,55	0,27493134
3067405,43	0,03860535	5387491,91	0,16467793	7707578,39	0,27815134
3135643,27	0,0435936	5455729,75	0,16814162	7775816,22	0,28136548
3203881,11	0,04823391	5523967,59	0,17159835	7844054,06	0,28457386
3272118,95	0,05262387	5592205,42	0,17504785	7912291,9	0,28777661
3340356,78	0,05682668	5660443,26	0,17848992	7980529,74	0,29097383
3408594,62	0,06088593	5728681,1	0,18192438	8048767,57	0,29416565
3476832,46	0,06483314	5796918,94	0,18535106	8117005,41	0,29735217
3545070,3	0,0686919	5865156,77	0,18876984	8185243,25	0,30053351
3613308,13	0,0724803	5933394,61	0,19218063	8253481,09	0,30370976
3681545,97	0,07621252	6001632,45	0,19558336	8321718,92	0,30688104
3749783,81	0,07989983	6069870,29	0,19897798	8389956,76	0,31004745
3818021,65	0,08355126	6138108,12	0,20236447	8458194,6	0,3132091
3886259,48	0,08717409	6206345,96	0,20574283	8526432,44	0,31636607
3954497,32	0,09077423	6274583,8	0,20911306	8594670,27	0,31951847
4022735,16	0,09435643	6342821,64	0,2124752	8662908,11	0,32266639
4090973	0,09792452	6411059,47	0,21582929	8731145,95	0,32580993
4159210,83	0,10148154	6479297,31	0,2191754	8799383,79	0,32894917
4227448,67	0,10502988	6547535,15	0,2225136	8867621,62	0,33208421
4295686,51	0,10857138	6615772,99	0,22584396	8935859,46	0,33521513
4363924,35	0,11210743	6684010,82	0,22916657	9004097,3	0,33834202
4432162,18	0,11563901	6752248,66	0,23248153	9072335,14	0,34146495
4500400,02	0,1191668	6820486,5	0,23578894	9140572,97	0,34458402
4568637,86	0,1226912	6888724,34	0,23908892	9208810,81	0,34769929
4636875,7	0,12621241	6956962,17	0,24238156	9277048,65	0,35081085
4705113,53	0,12973043	7025200,01	0,245667	9345286,49	0,35391877
4773351,37	0,13324515	7093437,85	0,24894534	9413524,32	0,35702312
4841589,21	0,13675636	7161675,69	0,2522167	9481762,16	0,36012398
4909827,05	0,14026375	7229913,52	0,25548122	9550000	0,36322142
4978064,88	0,14376699	7298151,36	0,258739		
5046302,72	0,1472657	7366389,2	0,26199019		

Tabla 24. Datos de  $k_z$  hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo  $HE_{12}$ .

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
5414727,31	0,00026817	6834921,97	0,10237054	8255116,63	0,15026382
5456497,74	0,01733187	6876692,4	0,10394947	8296887,06	0,15157082
5498268,17	0,02450765	6918462,83	0,10551175	8338657,49	0,15287531
5540038,6	0,03001376	6960233,26	0,10705828	8380427,93	0,15417751
5581809,03	0,03465624	7002003,7	0,10858987	8422198,36	0,15547761
5623579,47	0,03874753	7043774,13	0,11010732	8463968,79	0,15677581
5665349,9	0,04244799	7085544,56	0,11161133	8505739,22	0,1580723
5707120,33	0,04585296	7127314,99	0,11310259	8547509,65	0,15936727
5748890,76	0,04902462	7169085,42	0,11458175	8589280,08	0,16066092
5790661,19	0,05200621	7210855,85	0,11604939	8631050,51	0,16195342
5832431,62	0,05482925	7252626,28	0,1175061	8672820,94	0,16324497
5874202,05	0,05751754	7294396,71	0,1189524	8714591,38	0,16453575
5915972,48	0,06008961	7336167,15	0,12038881	8756361,81	0,16582594
5957742,92	0,06256021	7377937,58	0,1218158	8798132,24	0,16711572
5999513,35	0,06494132	7419708,01	0,12323384	8839902,67	0,16840527
6041283,78	0,0672428	7461478,44	0,12464336	8881673,1	0,16969478
6083054,21	0,06947292	7503248,87	0,12604477	8923443,53	0,17098442
6124824,64	0,07163868	7545019,3	0,12743847	8965213,96	0,17227438
6166595,07	0,07374606	7586789,73	0,12882483	9006984,39	0,17356483
6208365,5	0,07580024	7628560,16	0,13020422	9048754,83	0,17485597
6250135,93	0,07780572	7670330,6	0,13157697	9090525,26	0,17614796
6291906,36	0,07976644	7712101,03	0,13294343	9132295,69	0,177441
6333676,8	0,0816859	7753871,46	0,1343039	9174066,12	0,17873526
6375447,23	0,08356718	7795641,89	0,13565868	9215836,55	0,18003094
6417217,66	0,08541306	7837412,32	0,13700809	9257606,98	0,18132822
6458988,09	0,08722601	7879182,75	0,13835239	9299377,41	0,1826273
6500758,52	0,08900827	7920953,18	0,13969186	9341147,84	0,18392835
6542528,95	0,09076186	7962723,61	0,14102676	9382918,28	0,18523159
6584299,38	0,09248863	8004494,04	0,14235736	9424688,71	0,1865372
6626069,81	0,09419024	8046264,48	0,14368389	9466459,14	0,18784539
6667840,25	0,09586824	8088034,91	0,1450066	9508229,57	0,18915635
6709610,68	0,09752402	8129805,34	0,14632573	9550000	0,1904703
6751381,11	0,09915888	8171575,77	0,14764149		
6793151,54	0,10077402	8213346,2	0,14895412		

Tabla 25. Datos de  $k_z$  hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo  $HE_{21}$ .

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
4827573,36	0,0003741	6449416,85	0,16997836	8071260,34	0,26200634
4875274,64	0,02595173	6497118,13	0,17296125	8118961,62	0,26451294
4922975,92	0,03685553	6544819,41	0,17591974	8166662,9	0,26701173
4970677,2	0,04532757	6592520,69	0,1788549	8214364,18	0,26950293
5018378,48	0,05255665	6640221,97	0,18176777	8262065,46	0,2719867
5066079,75	0,05900082	6687923,25	0,18465928	8309766,74	0,27446324
5113781,03	0,06489376	6735624,53	0,18753034	8357468,02	0,27693271
5161482,31	0,07037354	6783325,81	0,19038178	8405169,3	0,2793953
5209183,59	0,07552961	6831027,09	0,19321436	8452870,58	0,28185116
5256884,87	0,08042378	6878728,36	0,19602883	8500571,86	0,28430044
5304586,15	0,08510076	6926429,64	0,19882588	8548273,14	0,28674331
5352287,43	0,08959411	6974130,92	0,20160615	8595974,42	0,28917991
5399988,71	0,09392977	7021832,2	0,20437026	8643675,7	0,29161038
5447689,99	0,09812823	7069533,48	0,20711879	8691376,97	0,29403486
5495391,27	0,102206	7117234,76	0,20985228	8739078,25	0,29645348
5543092,55	0,10617661	7164936,04	0,21257126	8786779,53	0,29886638
5590793,83	0,11005131	7212637,32	0,21527621	8834480,81	0,30127367
5638495,1	0,11383955	7260338,6	0,2179676	8882182,09	0,30367549
5686196,38	0,11754938	7308039,88	0,22064587	8929883,37	0,30607194
5733897,66	0,12118768	7355741,16	0,22331145	8977584,65	0,30846314
5781598,94	0,12476042	7403442,44	0,22596474	9025285,93	0,3108492
5829300,22	0,1282728	7451143,71	0,22860612	9072987,21	0,31323022
5877001,5	0,1317294	7498844,99	0,23123595	9120688,49	0,31560633
5924702,78	0,13513424	7546546,27	0,23385459	9168389,77	0,3179776
5972404,06	0,1384909	7594247,55	0,23646236	9216091,05	0,32034415
6020105,34	0,14180259	7641948,83	0,23905958	9263792,32	0,32270606
6067806,62	0,14507217	7689650,11	0,24164657	9311493,6	0,32506343
6115507,9	0,14830222	7737351,39	0,2442236	9359194,88	0,32741635
6163209,18	0,1514951	7785052,67	0,24679097	9406896,16	0,32976491
6210910,46	0,15465291	7832753,95	0,24934893	9454597,44	0,33210918
6258611,73	0,15777759	7880455,23	0,25189774	9502298,72	0,33444927
6306313,01	0,16087092	7928156,51	0,25443766	9550000	0,33678523
6354014,29	0,16393452	7975857,79	0,25696891		
6401715,57	0,16696987	8023559,07	0,25949173		

Tabla 26. Datos de  $k_z$  hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo  $HE_{22}$ .

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
7807282,79	0,00029659	8405791,73	0,07422481	9004300,67	0,10765901
7824885,99	0,01245538	8423394,93	0,07536148	9021903,87	0,10853345
7842489,2	0,01762326	8440998,14	0,07648448	9039507,08	0,10940381
7860092,4	0,02159673	8458601,34	0,07759445	9057110,28	0,11027022
7877695,6	0,0249531	8476204,55	0,07869195	9074713,49	0,11113279
7895298,81	0,02791591	8493807,75	0,07977751	9092316,69	0,11199164
7912902,01	0,03059974	8511410,95	0,08085165	9109919,9	0,11284687
7930505,22	0,0330726	8529014,16	0,08191484	9127523,1	0,11369859
7948108,42	0,0353788	8546617,36	0,0829675	9145126,3	0,11454691
7965711,62	0,0375491	8564220,57	0,08401007	9162729,51	0,11539191
7983314,83	0,03960589	8581823,77	0,08504294	9180332,71	0,11623371
8000918,03	0,04156604	8599426,97	0,08606648	9197935,92	0,11707239
8018521,24	0,04344268	8617030,18	0,08708103	9215539,12	0,11790805
8036124,44	0,04524622	8634633,38	0,08808694	9233142,32	0,11874077
8053727,65	0,04698511	8652236,59	0,08908451	9250745,53	0,11957064
8071330,85	0,04866632	8669839,79	0,09007405	9268348,73	0,12039774
8088934,05	0,05029566	8687443	0,09105584	9285951,94	0,12122216
8106537,26	0,05187804	8705046,2	0,09203014	9303555,14	0,12204398
8124140,46	0,05341766	8722649,4	0,09299722	9321158,35	0,12286328
8141743,67	0,05491815	8740252,61	0,09395732	9338761,55	0,12368013
8159346,87	0,05638265	8757855,81	0,09491068	9356364,75	0,1244946
8176950,07	0,05781393	8775459,02	0,09585751	9373967,96	0,12530678
8194553,28	0,05921442	8793062,22	0,09679804	9391571,16	0,12611673
8212156,48	0,06058628	8810665,42	0,09773246	9409174,37	0,12692451
8229759,69	0,06193144	8828268,63	0,09866097	9426777,57	0,12773021
8247362,89	0,06325162	8845871,83	0,09958377	9444380,77	0,12853389
8264966,1	0,06454838	8863475,04	0,10050102	9461983,98	0,1293356
8282569,3	0,06582314	8881078,24	0,10141291	9479587,18	0,13013542
8300172,5	0,06707716	8898681,45	0,10231959	9497190,39	0,13093341
8317775,71	0,06831162	8916284,65	0,10322123	9514793,59	0,13172963
8335378,91	0,06952758	8933887,85	0,10411799	9532396,8	0,13252415
8352982,12	0,07072601	8951491,06	0,10501	9550000	0,13331701
8370585,32	0,07190782	8969094,26	0,10589742		
8388188,52	0,07307383	8986697,47	0,10678038		

Tabla 27. Datos de  $k_z$  hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo  $HE_{31}$ .

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
6539985,09	0,00046599	7573727,58	0,15666295	8607470,08	0,23048196
6570389,28	0,02573509	7604131,77	0,15914504	8637874,27	0,23242629
6600793,47	0,03644292	7634535,96	0,16159976	8668278,46	0,23436168
6631197,66	0,04469432	7664940,16	0,16402833	8698682,65	0,23628834
6661601,85	0,0516795	7695344,35	0,16643188	8729086,84	0,23820648
6692006,04	0,05785883	7725748,54	0,16881146	8759491,03	0,2401163
6722410,23	0,06346804	7756152,73	0,17116807	8789895,22	0,242018
6752814,42	0,06864696	7786556,92	0,17350262	8820299,42	0,24391175
6783218,62	0,07348656	7816961,11	0,17581599	8850703,61	0,24579774
6813622,81	0,07804993	7847365,3	0,17810899	8881107,8	0,24767615
6844027	0,08238293	7877769,49	0,18038238	8911511,99	0,24954713
6874431,19	0,08652014	7908173,68	0,18263689	8941916,18	0,25141086
6904835,38	0,09048836	7938577,87	0,1848732	8972320,37	0,25326748
6935239,57	0,09430889	7968982,07	0,18709195	9002724,56	0,25511716
6965643,76	0,09799896	7999386,26	0,18929375	9033128,75	0,25696003
6996047,95	0,10157275	8029790,45	0,19147918	9063532,94	0,25879624
7026452,14	0,1050421	8060194,64	0,19364878	9093937,13	0,26062593
7056856,33	0,10841701	8090598,83	0,19580307	9124341,33	0,26244923
7087260,53	0,11170599	8121003,02	0,19794254	9154745,52	0,26426627
7117664,72	0,11491641	8151407,21	0,20006766	9185149,71	0,26607718
7148068,91	0,11805463	8181811,4	0,20217887	9215553,9	0,26788207
7178473,1	0,12112625	8212215,59	0,2042766	9245958,09	0,26968106
7208877,29	0,12413618	8242619,79	0,20636126	9276362,28	0,27147428
7239281,48	0,12708878	8273023,98	0,20843322	9306766,47	0,27326183
7269685,67	0,12998793	8303428,17	0,21049286	9337170,66	0,27504381
7300089,86	0,13283712	8333832,36	0,21254053	9367574,85	0,27682034
7330494,05	0,13563946	8364236,55	0,21457656	9397979,04	0,27859152
7360898,25	0,13839779	8394640,74	0,21660129	9428383,24	0,28035744
7391302,44	0,14111467	8425044,93	0,218615	9458787,43	0,2821182
7421706,63	0,14379242	8455449,12	0,22061801	9489191,62	0,2838739
7452110,82	0,14643318	8485853,31	0,22261059	9519595,81	0,28562462
7482515,01	0,14903889	8516257,5	0,22459302	9550000	0,28737046
7512919,2	0,15161134	8546661,7	0,22656556		
7543323,39	0,15415219	8577065,89	0,22852846		

Tabla 28. Datos de  $k_z$  hallados por SA para graficar la curva de dispersión del modo  $HE_{41}$ .

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
8263675,86	0,00053187	8705443,75	0,11337885	9147211,63	0,16254132
8276669,04	0,0191873	8718436,92	0,11508093	9160204,81	0,16379665
8289662,21	0,02714116	8731430,09	0,11676084	9173197,98	0,16504429
8302655,38	0,03325287	8744423,27	0,11841951	9186191,15	0,1662844
8315648,55	0,03841203	8757416,44	0,12005782	9199184,33	0,16751714
8328641,73	0,04296317	8770409,61	0,1216766	9212177,5	0,16874269
8341634,9	0,04708295	8783402,79	0,12327661	9225170,67	0,16996119
8354628,07	0,05087626	8796395,96	0,12485858	9238163,85	0,17117279
8367621,25	0,05441142	8809389,13	0,12642318	9251157,02	0,17237765
8380614,42	0,05773586	8822382,31	0,12797104	9264150,19	0,1735759
8393607,59	0,06088412	8835375,48	0,12950278	9277143,36	0,17476767
8406600,77	0,06388225	8848368,65	0,13101894	9290136,54	0,1759531
8419593,94	0,06675047	8861361,83	0,13252007	9303129,71	0,17713232
8432587,11	0,06950487	8874355	0,13400668	9316122,88	0,17830544
8445580,29	0,07215849	8887348,17	0,13547923	9329116,06	0,17947259
8458573,46	0,07472205	8900341,34	0,13693818	9342109,23	0,18063389
8471566,63	0,07720454	8913334,52	0,13838397	9355102,4	0,18178943
8484559,81	0,07961353	8926327,69	0,13981699	9368095,58	0,18293934
8497552,98	0,0819555	8939320,86	0,14123764	9381088,75	0,18408372
8510546,15	0,08423605	8952314,04	0,14264629	9394081,92	0,18522267
8523539,32	0,08646003	8965307,21	0,14404329	9407075,1	0,18635629
8536532,5	0,0886317	8978300,38	0,14542897	9420068,27	0,18748467
8549525,67	0,09075481	8991293,56	0,14680365	9433061,44	0,18860791
8562518,84	0,0928327	9004286,73	0,14816764	9446054,62	0,18972611
8575512,02	0,09486833	9017279,9	0,14952123	9459047,79	0,19083934
8588505,19	0,09686437	9030273,08	0,15086471	9472040,96	0,1919477
8601498,36	0,09882322	9043266,25	0,15219833	9485034,13	0,19305127
8614491,54	0,10074705	9056259,42	0,15352235	9498027,31	0,19415013
8627484,71	0,10263782	9069252,59	0,15483703	9511020,48	0,19524436
8640477,88	0,10449733	9082245,77	0,15614259	9524013,65	0,19633403
8653471,06	0,10632721	9095238,94	0,15743927	9537006,83	0,19741923
8666464,23	0,10812897	9108232,11	0,15872727	9550000	0,19850002
8679457,4	0,109904	9121225,29	0,16000682		
8692450,57	0,11165357	9134218,46	0,1612781		

**ANEXO C: VALORES DE  $k_z$  HALLADOS POR BISECCIÓN Y NEWTON RAPHSON UTILIZADOS PARA GRAFICAR LAS CURVAS DE DISPERSIÓN.**

**Tabla 29. Datos de  $k_z$  hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo  $EH_{01}$ .**

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
4572167,64	0,00034018	6281726,23	0,15714646	7991284,82	0,24516132
4622448,78	0,02420727	6332007,37	0,15993124	8041565,95	0,24762244
4672729,91	0,03435008	6382288,5	0,16269713	8091847,09	0,25007918
4723011,05	0,04221338	6432569,64	0,16544517	8142128,22	0,25253167
4773292,18	0,04890971	6482850,77	0,1681763	8192409,36	0,25498004
4823573,32	0,05486842	6533131,91	0,17089142	8242690,49	0,25742443
4873854,45	0,0603089	6583413,04	0,17359135	8292971,63	0,25986494
4924135,59	0,06536104	6633694,18	0,17627687	8343252,76	0,2623017
4974416,72	0,07010915	6683975,31	0,17894869	8393533,9	0,26473482
5024697,86	0,07461158	6734256,45	0,18160748	8443815,03	0,26716439
5074978,99	0,07891066	6784537,58	0,18425386	8494096,17	0,26959052
5125260,13	0,08303826	6834818,72	0,18688843	8544377,3	0,2720133
5175541,26	0,08701901	6885099,85	0,18951174	8594658,44	0,27443282
5225822,4	0,09087244	6935380,98	0,19212429	8644939,57	0,27684917
5276103,53	0,09461434	6985662,12	0,19472658	8695220,71	0,27926243
5326384,67	0,09825766	7035943,25	0,19731906	8745501,84	0,28167269
5376665,8	0,10181318	7086224,39	0,19990215	8795782,98	0,28408
5426946,94	0,10528998	7136505,52	0,20247627	8846064,11	0,28648446
5477228,07	0,10869581	7186786,66	0,20504178	8896345,25	0,28888613
5527509,21	0,11203732	7237067,79	0,20759906	8946626,38	0,29128507
5577790,34	0,11532026	7287348,93	0,21014843	8996907,52	0,29368135
5628071,48	0,11854966	7337630,06	0,21269022	9047188,65	0,29607503
5678352,61	0,12172995	7387911,2	0,21522473	9097469,79	0,29846616
5728633,75	0,12486501	7438192,33	0,21775224	9147750,92	0,30085481
5778914,88	0,12795833	7488473,47	0,22027303	9198032,06	0,30324103
5829196,02	0,13101299	7538754,6	0,22278735	9248313,19	0,30562487
5879477,15	0,13403177	7589035,74	0,22529545	9298594,33	0,30800637
5929758,29	0,13701717	7639316,87	0,22779755	9348875,46	0,3103856
5980039,42	0,13997145	7689598,01	0,23029386	9399156,6	0,31276258
6030320,56	0,14289665	7739879,14	0,23278461	9449437,73	0,31513737
6080601,69	0,14579465	7790160,28	0,23526999	9499718,87	0,31751002
6130882,83	0,14866714	7840441,41	0,23775017	9550000	0,31988055
6181163,96	0,15151567	7890722,55	0,24022534		
6231445,1	0,15434167	7941003,68	0,24269568		

**Tabla 30. Datos de  $k_z$  hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo  $EH_{11}$ .**

$f$ [Hz]	$k_z$
5070566,446	0,00036326
5115813,249	0,02450738
5161060,053	0,03475579
5206306,856	0,04268749
5251553,66	0,0494309
5296800,463	0,05542175
5342047,267	0,06088285
5387294,071	0,06594617
5432540,874	0,07069743
5477787,678	0,075196
5523034,481	0,07948497
5568281,285	0,08359679
5613528,089	0,08755658
5658774,892	0,09138425
5704021,696	0,0950959
5749268,499	0,09870476
5794515,303	0,10222185
5839762,106	0,10565644
5885008,91	0,10901647
5930255,714	0,11230874
5975502,517	0,11553914
6020749,321	0,11871283
6065996,124	0,12183435
6111242,928	0,12490769
6156489,731	0,12793642
6201736,535	0,13092373
6246983,339	0,13387247
6292230,142	0,13678522
6337476,946	0,1396643
6382723,749	0,14251182
6427970,553	0,14532973
6473217,357	0,14811976
6518464,16	0,15088354
6563710,964	0,15362254

$f$ [Hz]	$k_z$
6608957,767	0,15633812
6654204,571	0,15903154
6699451,374	0,16170397
6744698,178	0,16435647
6789944,982	0,16699006
6835191,785	0,16960565
6880438,589	0,17220411
6925685,392	0,17478625
6970932,196	0,17735283
7016179	0,17990454
7061425,803	0,18244206
7106672,607	0,184966
7151919,41	0,18747694
7197166,214	0,18997543
7242413,017	0,19246199
7287659,821	0,19493711
7332906,625	0,19740123
7378153,428	0,1998548
7423400,232	0,20229823
7468647,035	0,20473189
7513893,839	0,20715616
7559140,642	0,20957138
7604387,446	0,21197789
7649634,25	0,21437598
7694881,053	0,21676597
7740127,857	0,21914813
7785374,66	0,22152273
7830621,464	0,22389002
7875868,268	0,22625025
7921115,071	0,22860364
7966361,875	0,23095042
8011608,678	0,2332908
8056855,482	0,23562497
8102102,285	0,23795313

Frecuencia	$k_z$
8147349,089	0,24027546
8192595,893	0,24259214
8237842,696	0,24490333
8283089,5	0,24720918
8328336,303	0,24950986
8373583,107	0,25180551
8418829,91	0,25409627
8464076,714	0,25638227
8509323,518	0,25866365
8554570,321	0,26094051
8599817,125	0,26321299
8645063,928	0,2654812
8690310,732	0,26774524
8735557,536	0,27000522
8780804,339	0,27226124
8826051,143	0,2745134
8871297,946	0,27676179
8916544,75	0,2790065
8961791,553	0,28124761
9007038,357	0,28348521
9052285,161	0,28571938
9097531,964	0,28795019
9142778,768	0,29017772
9188025,571	0,29240204
9233272,375	0,29462322
9278519,179	0,29684132
9323765,982	0,29905641
9369012,786	0,30126856
9414259,589	0,30347781
9459506,393	0,30568423
9504753,196	0,30788787
9550000	0,3100888

Tabla 31. Datos de  $k_z$  hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo  $EH_{21}$ .

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
6280533,94	0,0004179	7403380,87	0,14826774	8526227,8	0,22100323
6313558,85	0,02406095	7436405,78	0,15067507	8559252,71	0,22295142
6346583,76	0,03408399	7469430,69	0,15305837	8592277,62	0,22489227
6379608,67	0,04181567	7502455,6	0,15541876	8625302,53	0,22682598
6412633,58	0,04836768	7535480,51	0,15775727	8658327,44	0,22875273
6445658,49	0,05416985	7568505,42	0,16007487	8691352,35	0,23067269
6478683,4	0,05944224	7601530,33	0,16237248	8724377,26	0,23258604
6511708,31	0,06431532	7634555,24	0,16465093	8757402,17	0,23449292
6544733,22	0,06887395	7667580,15	0,16691102	8790427,08	0,23639351
6577758,13	0,07317698	7700605,06	0,16915349	8823451,99	0,23828794
6610783,04	0,07726718	7733629,97	0,17137904	8856476,9	0,24017637
6643807,95	0,08117675	7766654,88	0,17358834	8889501,81	0,24205893
6676832,86	0,08493069	7799679,79	0,17578199	8922526,72	0,24393576
6709857,77	0,08854883	7832704,7	0,17796059	8955551,63	0,24580698
6742882,68	0,09204722	7865729,61	0,18012469	8988576,54	0,24767273
6775907,59	0,09543907	7898754,52	0,18227481	9021601,45	0,24953313
6808932,5	0,09873539	7931779,43	0,18441145	9054626,36	0,25138829
6841957,41	0,10194547	7964804,34	0,18653507	9087651,26	0,25323833
6874982,32	0,10507725	7997829,25	0,18864611	9120676,17	0,25508336
6908007,23	0,10813756	8030854,16	0,19074501	9153701,08	0,25692348
6941032,14	0,11113233	8063879,07	0,19283216	9186725,99	0,25875879
6974057,05	0,11406675	8096903,97	0,19490794	9219750,9	0,2605894
7007081,96	0,11694538	8129928,88	0,19697272	9252775,81	0,26241541
7040106,87	0,11977227	8162953,79	0,19902683	9285800,72	0,2642369
7073131,78	0,12255102	8195978,7	0,20107062	9318825,63	0,26605397
7106156,68	0,12528485	8229003,61	0,2031044	9351850,54	0,26786671
7139181,59	0,12797666	8262028,52	0,20512846	9384875,45	0,26967519
7172206,5	0,13062907	8295053,43	0,20714309	9417900,36	0,27147951
7205231,41	0,13324445	8328078,34	0,20914857	9450925,27	0,27327974
7238256,32	0,13582496	8361103,25	0,21114517	9483950,18	0,27507597
7271281,23	0,13837255	8394128,16	0,21313312	9516975,09	0,27686826
7304306,14	0,14088904	8427153,07	0,21511268	9550000	0,2786567
7337331,05	0,14337607	8460177,98	0,21708407		
7370355,96	0,14583517	8493202,89	0,21904751		

Tabla 32. Datos de  $k_z$  hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo  $EH_{31}$

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
7797248,71	0,0004823	8399203,7	0,12129807	9001158,69	0,17564504
7814953,27	0,02031463	8416908,26	0,12315645	9018863,25	0,17705201
7832657,83	0,02874652	8434612,82	0,12499213	9036567,81	0,17845133
7850362,39	0,03523162	8452317,38	0,12680611	9054272,36	0,1798432
7868066,95	0,04071117	8470021,93	0,1285993	9071976,92	0,18122778
7885771,51	0,04554951	8487726,49	0,13037255	9089681,48	0,18260523
7903476,06	0,0499334	8505431,05	0,13212668	9107386,04	0,18397572
7921180,62	0,05397369	8523135,61	0,13386243	9125090,6	0,1853394
7938885,18	0,05774255	8540840,17	0,13558051	9142795,16	0,18669642
7956589,74	0,06129008	8558544,73	0,13728158	9160499,71	0,18804693
7974294,3	0,06465272	8576249,29	0,13896627	9178204,27	0,18939105
7991998,86	0,06785797	8593953,84	0,14063517	9195908,83	0,19072893
8009703,42	0,07092716	8611658,4	0,14228883	9213613,39	0,1920607
8027407,97	0,07387727	8629362,96	0,14392778	9231317,95	0,19338648
8045112,53	0,07672202	8647067,52	0,14555251	9249022,51	0,1947064
8062817,09	0,07947275	8664772,08	0,1471635	9266727,06	0,19602056
8080521,65	0,08213888	8682476,64	0,14876119	9284431,62	0,1973291
8098226,21	0,08472842	8700181,19	0,150346	9302136,18	0,19863211
8115930,77	0,08724818	8717885,75	0,15191834	9319840,74	0,19992971
8133635,32	0,08970405	8735590,31	0,1534786	9337545,3	0,201222
8151339,88	0,09210113	8753294,87	0,15502713	9355249,86	0,20250907
8169044,44	0,09444391	8770999,43	0,15656429	9372954,42	0,20379104
8186749	0,09673633	8788703,99	0,1580904	9390658,97	0,20506799
8204453,56	0,09898189	8806408,55	0,15960579	9408363,53	0,20634002
8222158,12	0,10118371	8824113,1	0,16111075	9426068,09	0,20760722
8239862,67	0,10334459	8841817,66	0,16260558	9443772,65	0,20886967
8257567,23	0,10546705	8859522,22	0,16409055	9461477,21	0,21012747
8275271,79	0,10755335	8877226,78	0,16556593	9479181,77	0,21138068
8292976,35	0,10960557	8894931,34	0,16703196	9496886,32	0,2126294
8310680,91	0,11162559	8912635,9	0,1684889	9514590,88	0,2138737
8328385,47	0,11361512	8930340,45	0,16993698	9532295,44	0,21511366
8346090,03	0,11557575	8948045,01	0,17137642	9550000	0,21634935
8363794,58	0,1175089	8965749,57	0,17280744		
8381499,14	0,11941593	8983454,13	0,17423025		

Tabla 33. Datos de  $k_z$  hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo  $HE_{11}$

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
2794454,08	0,00022465	5114540,56	0,15075949	7434627,04	0,26523489
2862691,92	0,01874088	5182778,4	0,15424798	7502864,87	0,26847323
2930929,76	0,02676417	5251016,23	0,15773078	7571102,71	0,27170534
2999167,6	0,0331038	5319254,07	0,16120755	7639340,55	0,27493134
3067405,43	0,03860535	5387491,91	0,16467793	7707578,39	0,27815134
3135643,27	0,0435936	5455729,75	0,16814162	7775816,22	0,28136548
3203881,11	0,04823391	5523967,59	0,17159835	7844054,06	0,28457386
3272118,95	0,05262387	5592205,42	0,17504785	7912291,9	0,28777661
3340356,78	0,05682668	5660443,26	0,17848992	7980529,74	0,29097383
3408594,62	0,06088593	5728681,1	0,18192438	8048767,57	0,29416565
3476832,46	0,06483314	5796918,94	0,18535106	8117005,41	0,29735217
3545070,3	0,0686919	5865156,77	0,18876984	8185243,25	0,30053351
3613308,13	0,0724803	5933394,61	0,19218063	8253481,09	0,30370976
3681545,97	0,07621252	6001632,45	0,19558336	8321718,92	0,30688104
3749783,81	0,07989983	6069870,29	0,19897798	8389956,76	0,31004745
3818021,65	0,08355126	6138108,12	0,20236447	8458194,6	0,3132091
3886259,48	0,08717409	6206345,96	0,20574283	8526432,44	0,31636607
3954497,32	0,09077423	6274583,8	0,20911306	8594670,27	0,31951847
4022735,16	0,09435643	6342821,64	0,2124752	8662908,11	0,32266639
4090973	0,09792452	6411059,47	0,21582929	8731145,95	0,32580993
4159210,83	0,10148154	6479297,31	0,2191754	8799383,79	0,32894917
4227448,67	0,10502988	6547535,15	0,2225136	8867621,62	0,33208421
4295686,51	0,10857138	6615772,99	0,22584396	8935859,46	0,33521513
4363924,35	0,11210743	6684010,82	0,22916657	9004097,3	0,33834202
4432162,18	0,11563901	6752248,66	0,23248153	9072335,14	0,34146495
4500400,02	0,1191668	6820486,5	0,23578894	9140572,97	0,34458402
4568637,86	0,1226912	6888724,34	0,23908892	9208810,81	0,34769929
4636875,7	0,12621241	6956962,17	0,24238156	9277048,65	0,35081085
4705113,53	0,12973043	7025200,01	0,245667	9345286,49	0,35391877
4773351,37	0,13324515	7093437,85	0,24894534	9413524,32	0,35702312
4841589,21	0,13675636	7161675,69	0,2522167	9481762,16	0,36012398
4909827,05	0,14026375	7229913,52	0,25548122	9550000	0,36322142
4978064,88	0,14376699	7298151,36	0,258739		
5046302,72	0,1472657	7366389,2	0,26199019		

Tabla 34. . Datos de  $k_z$  hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo  $HE_{12}$

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
5414727,31	0,00026817	6834921,97	0,10237054	8255116,6	0,1502638
5456497,74	0,01733187	6876692,4	0,10394947	8296887,1	0,1515708
5498268,17	0,02450765	6918462,83	0,10551175	8338657,5	0,1528753
5540038,6	0,03001376	6960233,26	0,10705828	8380427,9	0,1541775
5581809,03	0,03465624	7002003,7	0,10858987	8422198,4	0,1554776
5623579,47	0,03874753	7043774,13	0,11010732	8463968,8	0,1567758
5665349,9	0,04244799	7085544,56	0,11161133	8505739,2	0,1580723
5707120,33	0,04585296	7127314,99	0,11310259	8547509,7	0,1593673
5748890,76	0,04902462	7169085,42	0,11458175	8589280,1	0,1606609
5790661,19	0,05200621	7210855,85	0,11604939	8631050,5	0,1619534
5832431,62	0,05482925	7252626,28	0,1175061	8672820,9	0,163245
5874202,05	0,05751754	7294396,71	0,1189524	8714591,4	0,1645357
5915972,48	0,06008961	7336167,15	0,12038881	8756361,8	0,1658259
5957742,92	0,06256021	7377937,58	0,1218158	8798132,2	0,1671157
5999513,35	0,06494132	7419708,01	0,12323384	8839902,7	0,1684053
6041283,78	0,0672428	7461478,44	0,12464336	8881673,1	0,1696948
6083054,21	0,06947292	7503248,87	0,12604477	8923443,5	0,1709844
6124824,64	0,07163868	7545019,3	0,12743847	8965214	0,1722744
6166595,07	0,07374606	7586789,73	0,12882483	9006984,4	0,1735648
6208365,5	0,07580024	7628560,16	0,13020422	9048754,8	0,174856
6250135,93	0,07780572	7670330,6	0,13157697	9090525,3	0,176148
6291906,36	0,07976644	7712101,03	0,13294343	9132295,7	0,177441
6333676,8	0,0816859	7753871,46	0,1343039	9174066,1	0,1787353
6375447,23	0,08356718	7795641,89	0,13565868	9215836,6	0,1800309
6417217,66	0,08541306	7837412,32	0,13700809	9257607	0,1813282
6458988,09	0,08722601	7879182,75	0,13835239	9299377,4	0,1826273
6500758,52	0,08900827	7920953,18	0,13969186	9341147,8	0,1839284
6542528,95	0,09076186	7962723,61	0,14102676	9382918,3	0,1852316
6584299,38	0,09248863	8004494,04	0,14235736	9424688,7	0,1865372
6626069,81	0,09419024	8046264,48	0,14368389	9466459,1	0,1878454
6667840,25	0,09586824	8088034,91	0,1450066	9508229,6	0,1891564
6709610,68	0,09752402	8129805,34	0,14632573	9550000	0,1904703
6751381,11	0,09915888	8171575,77	0,14764149		
6793151,54	0,10077402	8213346,2	0,14895412		

Tabla 35. Datos de  $k_z$  hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo  $HE_{21}$

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
4827573,4	0,0003741	6449416,9	0,1699784	8071260,3	0,2620063
4875274,6	0,0259517	6497118,1	0,1729613	8118961,6	0,2645129
4922975,9	0,0368555	6544819,4	0,1759197	8166662,9	0,2670117
4970677,2	0,0453276	6592520,7	0,1788549	8214364,2	0,2695029
5018378,5	0,0525566	6640222	0,1817678	8262065,5	0,2719867
5066079,8	0,0590008	6687923,2	0,1846593	8309766,7	0,2744632
5113781	0,0648938	6735624,5	0,1875303	8357468	0,2769327
5161482,3	0,0703735	6783325,8	0,1903818	8405169,3	0,2793953
5209183,6	0,0755296	6831027,1	0,1932144	8452870,6	0,2818512
5256884,9	0,0804238	6878728,4	0,1960288	8500571,9	0,2843004
5304586,2	0,0851008	6926429,6	0,1988259	8548273,1	0,2867433
5352287,4	0,0895941	6974130,9	0,2016062	8595974,4	0,2891799
5399988,7	0,0939298	7021832,2	0,2043703	8643675,7	0,2916104
5447690	0,0981282	7069533,5	0,2071188	8691377	0,2940349
5495391,3	0,102206	7117234,8	0,2098523	8739078,3	0,2964535
5543092,5	0,1061766	7164936	0,2125713	8786779,5	0,2988664
5590793,8	0,1100513	7212637,3	0,2152762	8834480,8	0,3012737
5638495,1	0,1138396	7260338,6	0,2179676	8882182,1	0,3036755
5686196,4	0,1175494	7308039,9	0,2206459	8929883,4	0,3060719
5733897,7	0,1211877	7355741,2	0,2233115	8977584,6	0,3084631
5781598,9	0,1247604	7403442,4	0,2259647	9025285,9	0,3108492
5829300,2	0,1282728	7451143,7	0,2286061	9072987,2	0,3132302
5877001,5	0,1317294	7498845	0,2312359	9120688,5	0,3156063
5924702,8	0,1351342	7546546,3	0,2338546	9168389,8	0,3179776
5972404,1	0,1384909	7594247,6	0,2364624	9216091	0,3203441
6020105,3	0,1418026	7641948,8	0,2390596	9263792,3	0,3227061
6067806,6	0,1450722	7689650,1	0,2416466	9311493,6	0,3250634
6115507,9	0,1483022	7737351,4	0,2442236	9359194,9	0,3274163
6163209,2	0,1514951	7785052,7	0,246791	9406896,2	0,3297649
6210910,5	0,1546529	7832753,9	0,2493489	9454597,4	0,3321092
6258611,7	0,1577776	7880455,2	0,2518977	9502298,7	0,3344493
6306313	0,1608709	7928156,5	0,2544377	9550000	0,3367852
6354014,3	0,1639345	7975857,8	0,2569689		
6401715,6	0,1669699	8023559,1	0,2594917		

Tabla 36. Datos de  $k_z$  hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo  $HE_{22}$

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
7807282,8	0,0002966	8405791,7	0,0742248	9004300,7	0,107659
7824886	0,0124554	8423394,9	0,0753615	9021903,9	0,1085334
7842489,2	0,0176233	8440998,1	0,0764845	9039507,1	0,1094038
7860092,4	0,0215967	8458601,3	0,0775944	9057110,3	0,1102702
7877695,6	0,0249531	8476204,5	0,0786919	9074713,5	0,1111328
7895298,8	0,0279159	8493807,7	0,0797775	9092316,7	0,1119916
7912902	0,0305997	8511411	0,0808517	9109919,9	0,1128469
7930505,2	0,0330726	8529014,2	0,0819148	9127523,1	0,1136986
7948108,4	0,0353788	8546617,4	0,0829675	9145126,3	0,1145469
7965711,6	0,0375491	8564220,6	0,0840101	9162729,5	0,1153919
7983314,8	0,0396059	8581823,8	0,0850429	9180332,7	0,1162337
8000918	0,041566	8599427	0,0860665	9197935,9	0,1170724
8018521,2	0,0434427	8617030,2	0,087081	9215539,1	0,117908
8036124,4	0,0452462	8634633,4	0,0880869	9233142,3	0,1187408
8053727,6	0,0469851	8652236,6	0,0890845	9250745,5	0,1195706
8071330,8	0,0486663	8669839,8	0,090074	9268348,7	0,1203977
8088934,1	0,0502957	8687443	0,0910558	9285951,9	0,1212222
8106537,3	0,051878	8705046,2	0,0920301	9303555,1	0,122044
8124140,5	0,0534177	8722649,4	0,0929972	9321158,3	0,1228633
8141743,7	0,0549181	8740252,6	0,0939573	9338761,5	0,1236801
8159346,9	0,0563826	8757855,8	0,0949107	9356364,8	0,1244946
8176950,1	0,0578139	8775459	0,0958575	9373968	0,1253068
8194553,3	0,0592144	8793062,2	0,096798	9391571,2	0,1261167
8212156,5	0,0605863	8810665,4	0,0977325	9409174,4	0,1269245
8229759,7	0,0619314	8828268,6	0,098661	9426777,6	0,1277302
8247362,9	0,0632516	8845871,8	0,0995838	9444380,8	0,1285339
8264966,1	0,0645484	8863475	0,100501	9461984	0,1293356
8282569,3	0,0658231	8881078,2	0,1014129	9479587,2	0,1301354
8300172,5	0,0670772	8898681,4	0,1023196	9497190,4	0,1309334
8317775,7	0,0683116	8916284,6	0,1032212	9514793,6	0,1317296
8335378,9	0,0695276	8933887,9	0,104118	9532396,8	0,1325241
8352982,1	0,070726	8951491,1	0,10501	9550000	0,133317
8370585,3	0,0719078	8969094,3	0,1058974		
8388188,5	0,0730738	8986697,5	0,1067804		

Tabla 37. Datos de  $k_z$  hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo  $HE_{31}$

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
6539985,1	0,000466	7573727,6	0,156663	8607470,1	0,230482
6570389,3	0,0257351	7604131,8	0,159145	8637874,3	0,2324263
6600793,5	0,0364429	7634536	0,1615998	8668278,5	0,2343617
6631197,7	0,0446943	7664940,2	0,1640283	8698682,7	0,2362883
6661601,9	0,0516795	7695344,3	0,1664319	8729086,8	0,2382065
6692006	0,0578588	7725748,5	0,1688115	8759491	0,2401163
6722410,2	0,063468	7756152,7	0,1711681	8789895,2	0,242018
6752814,4	0,068647	7786556,9	0,1735026	8820299,4	0,2439118
6783218,6	0,0734866	7816961,1	0,175816	8850703,6	0,2457977
6813622,8	0,0780499	7847365,3	0,178109	8881107,8	0,2476761
6844027	0,0823829	7877769,5	0,1803824	8911512	0,2495471
6874431,2	0,0865201	7908173,7	0,1826369	8941916,2	0,2514109
6904835,4	0,0904884	7938577,9	0,1848732	8972320,4	0,2532675
6935239,6	0,0943089	7968982,1	0,1870919	9002724,6	0,2551172
6965643,8	0,097999	7999386,3	0,1892938	9033128,8	0,25696
6996048	0,1015728	8029790,4	0,1914792	9063532,9	0,2587962
7026452,1	0,1050421	8060194,6	0,1936488	9093937,1	0,2606259
7056856,3	0,108417	8090598,8	0,1958031	9124341,3	0,2624492
7087260,5	0,111706	8121003	0,1979425	9154745,5	0,2642663
7117664,7	0,1149164	8151407,2	0,2000677	9185149,7	0,2660772
7148068,9	0,1180546	8181811,4	0,2021789	9215553,9	0,2678821
7178473,1	0,1211262	8212215,6	0,2042766	9245958,1	0,2696811
7208877,3	0,1241362	8242619,8	0,2063613	9276362,3	0,2714743
7239281,5	0,1270888	8273024	0,2084332	9306766,5	0,2732618
7269685,7	0,1299879	8303428,2	0,2104929	9337170,7	0,2750438
7300089,9	0,1328371	8333832,4	0,2125405	9367574,9	0,2768203
7330494,1	0,1356395	8364236,5	0,2145766	9397979	0,2785915
7360898,2	0,1383978	8394640,7	0,2166013	9428383,2	0,2803574
7391302,4	0,1411147	8425044,9	0,218615	9458787,4	0,2821182
7421706,6	0,1437924	8455449,1	0,220618	9489191,6	0,2838739
7452110,8	0,1464332	8485853,3	0,2226106	9519595,8	0,2856246
7482515	0,1490389	8516257,5	0,224593	9550000	0,2873705
7512919,2	0,1516113	8546661,7	0,2265656		
7543323,4	0,1541522	8577065,9	0,2285285		

Tabla 38. Datos de  $k_z$  hallados por bisección y Newton- Raphson para graficar la curva de dispersión del modo  $HE_{41}$

$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$	$f$ [Hz]	$k_z$
8263675,9	0,0005319	8705443,7	0,1133788	9147211,6	0,1625413
8276669	0,0191873	8718436,9	0,1150809	9160204,8	0,1637967
8289662,2	0,0271412	8731430,1	0,1167608	9173198	0,1650443
8302655,4	0,0332529	8744423,3	0,1184195	9186191,2	0,1662844
8315648,6	0,038412	8757416,4	0,1200578	9199184,3	0,1675171
8328641,7	0,0429632	8770409,6	0,1216766	9212177,5	0,1687427
8341634,9	0,0470829	8783402,8	0,1232766	9225170,7	0,1699612
8354628,1	0,0508763	8796396	0,1248586	9238163,8	0,1711728
8367621,2	0,0544114	8809389,1	0,1264232	9251157	0,1723777
8380614,4	0,0577359	8822382,3	0,127971	9264150,2	0,1735759
8393607,6	0,0608841	8835375,5	0,1295028	9277143,4	0,1747677
8406600,8	0,0638822	8848368,7	0,1310189	9290136,5	0,1759531
8419593,9	0,0667505	8861361,8	0,1325201	9303129,7	0,1771323
8432587,1	0,0695049	8874355	0,1340067	9316122,9	0,1783054
8445580,3	0,0721585	8887348,2	0,1354792	9329116,1	0,1794726
8458573,5	0,0747221	8900341,3	0,1369382	9342109,2	0,1806339
8471566,6	0,0772045	8913334,5	0,138384	9355102,4	0,1817894
8484559,8	0,0796135	8926327,7	0,139817	9368095,6	0,1829393
8497553	0,0819555	8939320,9	0,1412376	9381088,7	0,1840837
8510546,2	0,084236	8952314	0,1426463	9394081,9	0,1852227
8523539,3	0,08646	8965307,2	0,1440433	9407075,1	0,1863563
8536532,5	0,0886317	8978300,4	0,145429	9420068,3	0,1874847
8549525,7	0,0907548	8991293,6	0,1468036	9433061,4	0,1886079
8562518,8	0,0928327	9004286,7	0,1481676	9446054,6	0,1897261
8575512	0,0948683	9017279,9	0,1495212	9459047,8	0,1908393
8588505,2	0,0968644	9030273,1	0,1508647	9472041	0,1919477
8601498,4	0,0988232	9043266,2	0,1521983	9485034,1	0,1930513
8614491,5	0,100747	9056259,4	0,1535224	9498027,3	0,1941501
8627484,7	0,1026378	9069252,6	0,154837	9511020,5	0,1952444
8640477,9	0,1044973	9082245,8	0,1561426	9524013,7	0,196334
8653471,1	0,1063272	9095238,9	0,1574393	9537006,8	0,1974192
8666464,2	0,108129	9108232,1	0,1587273	9550000	0,1985
8679457,4	0,109904	9121225,3	0,1600068		
8692450,6	0,1116536	9134218,5	0,1612781		

