

**ESTABILIDAD DE ÓRBITAS CIRCULARES EN
MODELOS DE GALAXIAS COMPUESTOS DE
DISCOS DELGADOS Y HALOS ESFEROIDALES**

Fernando Cortés Serrano

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2018

**ESTABILIDAD DE ÓRBITAS CIRCULARES EN
MODELOS DE GALAXIAS COMPUESTOS DE
DISCOS DELGADOS Y HALOS ESFEROIDALES**

Fernando Cortés Serrano

Trabajo de Investigación para optar al título de Magíster en
Física

Director: Guillermo Alfonso González Villegas
Doctor en Matemática Aplicada

Co-Director: Fabio Duvan Lora Clavijo
Doctor en Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2018

“El primer principio es que uno no se debe engañar a sí mismo y uno es la persona más fácil de engañar. ”

R. P. Feynman

“Enamórate de alguna actividad y ¡hazlo! Nunca nadie realmente se da cuenta de lo que se trata la vida en realidad, y eso no importa. Explora el mundo. Prácticamente todo a nuestro alrededor es realmente interesante, si lo observas profundamente. Trabaja duro y cuanto puedas en las cosas que más te gusta hacer. No pienses en lo que quieres ser, sino lo que tú quieres hacer ”

R. P. Feynman

“Nothing is impossible. Not if you can imagine it. That’s what being a scientist is all about. ”

Professor H. J. Farnsworth.

Agradezco a mis padres Argemiro Cortés Hernández y María Eduviges Serrano Osma por su apoyo incondicional durante el proceso de formación que he llevado hasta el momento y que me seguirán apoyando y acompañando en adelante.

Agradezco a mis directores Dr. Guillermo Alfonso González Villegas y Dr. Fabio Duvan Lora Clavijo por su apoyo y orientación en el desarrollo de este trabajo.

Agradezco a mis compañeros del Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG) por el intercambio de conocimientos que se desarrolla dentro del grupo, lo cual ha contribuido en los resultados del presente trabajo.

Agradezco a la Universidad Industrial de Santander porque ha sido la institución en la que he desarrollado este proceso de formación como Físico.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	15
1 MARCO TEÓRICO	18
1.1 MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS DE PRUEBA EN EL PLANO MERIDIONAL EN PRESENCIA DE UN CAMPO GRAVITACIONAL CON SIMETRÍA AXIAL	19
1.1.1 Normalización del Hamiltoniano y de las ecuaciones de movimiento	21
1.1.2 Condición de órbita circular normalizada	22
1.1.3 Criterio del momento angular para la estabilidad de órbitas circulares	23
1.2 CARACTERÍSTICAS DE LOS MODELOS DE DISCO Y HALO EMPLEADOS	24
1.2.1 Modelos de disco delgado finito	24
1.2.2 Modelos de halo de materia	25
1.2.3 Modelos de disco delgado y halo	25
1.2.4 Condición de órbita circular	26
1.2.5 Potencial efectivo	26

2	RESULTADOS OBTENIDOS PARA UN MODELO PARTICULAR DE DISCO Y HALO	28
2.1	ESTUDIO DE HALOS DE GRAN EXTENSIÓN	28
2.1.1	Condición de órbita circular	31
2.1.2	Comportamiento del potencial efectivo en función de los parámetros del halo	34
2.1.3	Análisis de estabilidad para órbitas circulares	37
2.1.4	Solución numérica de las ecuaciones de movimiento	39
2.2	ESTUDIO DE HALOS PEQUEÑOS	44
2.2.1	Condición de órbita circular	44
2.2.2	Comportamiento del potencial efectivo en función de los parámetros del halo	46
2.2.3	Análisis de estabilidad para órbitas circulares	48
2.2.4	Solución numérica de las ecuaciones de movimiento	51
3	CONCLUSIONES	55
	BIBLIOGRAFÍA	58

LISTA DE FIGURAS

2.1	Perfil de densidad del modelo de disco utilizado	29
2.2	Contornos de densidad de un halo aplanado y de mayor extensión radial que el radio del disco.	29
2.3	Contornos de densidad de un halo achatado y de mayor extensión que el radio del disco	30
2.4	Contornos de densidad del segundo halo con la mayor extensión	30
2.5	Contornos de densidad del halo con la mayor extensión	31
2.6	Condición de órbita circular al realizar variaciones del parámetro \tilde{b} del halo de materia.	33
2.7	Condición de órbita circular al realizar variaciones del parámetro \tilde{b} , con halo masivo de materia.	33
2.8	Condición de órbita circular al realizar variaciones de la razón de masa entre el disco y el halo \tilde{M}	34
2.9	Variación del potencial efectivo en función de la magnitud del parámetro \tilde{b} del halo de materia, donde la masa del halo es menor que la masa del disco	35
2.10	Modificación del potencial efectivo cuando se varía la magnitud del parámetro \tilde{b} del halo de materia, en el que la masa del halo es igual que la masa del disco	36

2.11	Variación del potencial efectivo en función de la magnitud del parámetro \tilde{b} del halo de materia, donde la masa del halo es varias veces mayor que la masa del disco	36
2.12	Variación del potencial efectivo en función del momento angular normalizado.	37
2.13	Movimiento del punto crítico desde una posición de inestabilidad hasta una posición de estabilidad, en función del aumento de la masa del halo	38
2.14	Órbita circular y perturbación radial de la órbita, en la región de inestabilidad, donde la razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 0.5$	40
2.15	Órbita circular y perturbación radial de la órbita, en la región de inestabilidad, donde la razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 1$	40
2.16	Órbita circular y perturbación radial de la órbita, en un punto dentro de la región de inestabilidad, donde la razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 3$	41
2.17	Órbita circular y perturbación radial de la órbita, en un punto dentro de la región de inestabilidad, donde la razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 7$	41
2.18	Órbita circular y perturbación radial de la órbita, en un punto dentro de la región de estabilidad, donde la razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 1$	42
2.19	Órbita circular y perturbación radial de la órbita, en un punto dentro de la región de estabilidad, donde la razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 1$	43
2.20	Órbita circular y perturbación radial de la órbita, en un punto dentro de la región de estabilidad, donde la razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 1$	43
2.21	Contornos de densidad del halo de menor extensión, en comparación con los dos halos restantes tratados en esta sección	44
2.22	Contornos de densidad del halo de tamaño intermedio, en comparación con los dos halos restantes tratados en esta sección	45

2.23	Contornos de densidad del halo de mayor tamaño, en comparación con los dos halos restantes tratados en esta sección	45
2.24	En esta gráfica se pueden observar los cambios sobre la condición de órbita circular en función de la variación del parámetro \tilde{b} del halo de materia, en el caso de halos pequeños y con una masa más pequeña que la del disco. Donde $\tilde{M} = 0.3$ y $\tilde{a} = 0.001$	47
2.25	Condición de órbita circular en función del parámetro \tilde{b} del halo de materia, donde éste es más pequeño pero más masivo que el disco	47
2.26	Condición de órbita circular en función del parámetro \tilde{M} del halo de materia, en este caso el halo es el más pequeño de los tres halos seleccionados.	48
2.27	Variación del potencial efectivo en función del parámetro $\tilde{b} = b/a_d$, el cual puede ser utilizado para obtener halos de diferente tamaño	49
2.28	Variación del potencial efectivo en función del parámetro \tilde{M} , que representa la razón entre la masa del halo y la masa del disco.	49
2.29	Evolución del punto crítico, en la posición $\tilde{R} = 1.05$ en la gráfica del potencial efectivo, desde un estado inestable hasta un estado estable, en función del aumento de la masa del halo	50
2.30	Órbita circular y perturbación de la órbita, en el caso de tener un punto crítico inestable. La razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 0.3$	52
2.31	Órbita circular y perturbación de la órbita, en el caso de tener un punto crítico inestable. La razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 1$	52
2.32	Órbita circular en un punto crítico inestable cuya posición es $\tilde{R} = 1.05$. La razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 2.5$	53
2.33	Órbita circular en un punto crítico inestable en la posición $\tilde{R} = 1.05$. La razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 4$	53
2.34	Órbita circular y perturbación radial de la órbita, en un punto dentro de la región de estabilidad, donde la razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 1$	54

2.35	Órbita circular y perturbación radial de la órbita, en un punto dentro de la región de estabilidad, donde la razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 1$	54
------	---	----

Resumen

TÍTULO: ESTABILIDAD DE ÓRBITAS CIRCULARES EN MODELOS DE GALAXIAS COMPUESTOS DE DISCOS DELGADOS Y HALOS ESFEROIDALES*

AUTOR: CORTÉS SERRANO, Fernando**.

PALABRAS CLAVES: Modelos de Galaxias, dinámica de partículas, estabilidad de las órbitas.

DESCRIPCIÓN:

Un aspecto relevante en el estudio de las galaxias es el análisis de estabilidad de éstas, tal estudio se lleva a cabo de diferentes maneras, dependiendo el tipo de estabilidad que se desee analizar y el modelo de galaxia que se plantee. En el presente trabajo de investigación se realiza un análisis de la estabilidad de órbitas circulares de partículas de prueba, en modelos de galaxias compuestos por discos delgados y halos esferoidales. Como punto de partida se observan los cambios en el potencial efectivo y en la condición de órbita circular (COC) mientras se mantiene la misma configuración de disco y se varían los parámetros de los halos de materia, los cuales representan cambios en su tamaño, forma y masa. Se encontró que entre más masivos son los halos mayor es el incremento en el momento angular dado por la COC. Con respecto al análisis de estabilidad de órbitas circulares, se resolvieron las ecuaciones de movimiento teniendo en cuenta la COC y el criterio de estabilidad del momento angular. A partir del análisis del perfil de la COC se encontró que la región de inestabilidad disminuye en extensión a medida que se introducen halos cada vez más masivos. Posteriormente, se resolvieron las ecuaciones de movimiento en la zona de inestabilidad y se verificó que después de perturbar la órbita circular de la partícula de prueba, ubicada en un máximo local del potencial efectivo, ésta pasa a oscilar alrededor de un punto crítico estable sin regresar en ningún momento al radio inicial. Además se perturbaron las órbitas en la región estable y se verificó que éstas oscilaban en torno al radio inicial.

*Trabajo de Investigación.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo Alfonso González Villegas (Director), Fabio Duvan Lora Clavijo (Co-Director).

Abstract

TITLE: STABILITY OF CIRCULAR ORBITS FOR GALAXY MODELS COMPOUNDED OF THIN DISKS AND SPHEROIDAL HALOS *

AUTHOR: CORTES SERRANO, Fernando **.

KEY WORDS: Galaxy models, particle dynamics, stability of the orbits

DESCRIPTION:

A relevant issue in the study of galaxies is their stability analysis. This can be done by different methods and depends on the stability analysis that you study and also of the galaxy model that you picked. In the present work is analysed the stability of circular orbits for test particles in galaxy models compounded by thin disks and spheroidal halos. As a starting point, changes in the effective potential and in the circular orbit condition (COC) are studied when the parameters of the disk are fixed and the mass, size and shape of the halo are varied. It was found that the increment in the angular momentum given by the COC is larger as a result of an increment of the halo's mass. On the other hand, concerning the orbital analysis, the equations of motion are solved taking into account the COC and the stability criterium of the angular momentum.

From the stability analysis of the disk and halo model chosen, the following results were obtained: if the only component of the model is the thin disk, then the instability region is located in a small region between the disk radius to a near region where the stability returns. In that case, the stability region decreased its extension when more massive halos are introduced. The equations of motion are solved in the instability region. By perturbing the position of the test particle one can verify that the circular orbit falls into a potential well, such that the test particle is confined and it can not return to the initial value of the circular orbit. In addition, the circular orbits, in the stability region, are perturbed and it was found that the test particles oscillate around the initial radius.

*Research work

**Faculty of science, School of physics, Guillermo A. González Villegas (Advisor), Fabio Duvan Lora Clavijo (Co-Advisor).

INTRODUCCIÓN

En el estudio de las galaxias es de gran interés el análisis de estabilidad de las órbitas mediante potenciales gravitacionales analíticos. El empleo de éstos implica la siguiente aproximación: si bien las galaxias se componen de miles de millones de estrellas, se desprecian las fuerzas de las estrellas individuales, donde se asume que los campos gravitacionales de las galaxias son lisos, es decir, que no se consideran las irregularidades producidas por estrellas o por objetos de mayor tamaño (BINNEY and TREMAINE, 2008). Estos potenciales analíticos son empleados para construir modelos de galaxias, o modelos de las grandes estructuras observadas en las galaxias. Algunos de los potenciales empleados para el análisis de las órbitas en cúmulos globulares son: el potencial armónico esférico, el potencial de Kepler y el potencial isócrono.

Para desarrollar una mejor comprensión de la cinemática y dinámica de los objetos astrofísicos es importante resaltar el papel que desempeña la teoría sobre la estabilidad de órbitas. A continuación se resumen algunos de los trabajos de investigación que involucran uno o más métodos para el análisis de la estabilidad de algunos modelos de galaxias. Por ejemplo, VANDERVOORT (1973) utiliza la teoría epicíclica en el estudio de las galaxias espirales, para obtener soluciones a las ecuaciones de movimiento en aquellas regiones cercanas donde ocurren las resonancias Lindblad, las cuales se producen cuando la frecuencia epicíclica de un objeto es un múltiplo de una frecuencia de forzado. Las soluciones que obtiene corresponden a los órdenes más bajos en el espaciado de los brazos espirales y en la amplitud epicíclica y del campo espiral. Por otra parte CONTOPOULOS and PAPAYANNOPOULOS (1980) realizan un análisis de las órbitas en modelos de barras inmersos en medios axialmente simétricos, en tres casos diferentes, cuando la densidad de la barra es 1%, 10% y 100%, de la densidad del medio en el que está inmersa. En algunos de los resultados, en el caso de barras débiles, 1% de la densidad del medio, e intermedias, 10% de la densidad del medio, encuentran órbitas más excéntricas a lo largo de la barra. También observan otro conjunto de órbitas perpendiculares a la barra, cuya posición respecto a las resonancias Lindblad debe ser revisada en el artículo. En el caso de barras fuertes, 100% de la densidad del medio, localizan órbitas inestables en la región externa a la zona de corrotación.

Así mismo, en el estudio realizado por GRIVNEV (1988), se hace uso de la teoría de perturbaciones a segundo orden y se encuentran las ecuaciones para las órbitas de estrellas en un disco galáctico. También se logra obtener una expresión para el movimiento de arrastre de las estrellas en el plano galáctico, concluyendo que dicho movimiento, a lo largo de la órbita circular, se origina a partir de la rotación diferencial del disco. Por otra parte, PFENNIGER (1990) estudia la estabilidad de los puntos de Lagrange en las galaxias barradas, utilizando los siguientes tres criterios de estabilidad: i). aproximación epicíclica, ii). potencial efectivo y iii). discriminante de la ecuación característica del sistema linealizado. Además, PATSIS (2006) propone un modelo para explicar la estructura de algunas galaxias espirales en relación con las barras de éstas, en el cual se plantea que la parte de las espirales que están unidas a la barra es debida a órbitas caóticas y que una posible continuación de la estructura espiral, para ángulos grandes, puede deberse a órbitas periódicas estables atrapadas en la región de corrotación. Por otra parte, SAHA (1992) desarrolla un método para construir modelos esféricos de galaxias con velocidad anisótropa. Como parte del estudio, Saha escoge dos familias de modelos de parámetros para analizar la inestabilidad radial, donde se encuentra que la anisotropía de las velocidades en el núcleo es importante para dar origen a dicha inestabilidad. Sin embargo, en este trabajo también se encuentra que hay dependencia de otros factores, de tal manera que no encuentra un criterio simple para realizar predicciones de inestabilidad.

Otra contribución al análisis de estabilidad de órbitas es la que realiza KALNAJS (1979) quien emplea una aproximación en la que se perturba el cuadrado del radio, teniendo en cuenta un potencial isócrono y se realiza la comparación entre las órbitas obtenidas por este método con las órbitas obtenidas mediante la aproximación epicíclica a primer orden. Por otra parte, PFENNIGER (1984) se interesa por analizar la estabilidad de las órbitas en $3D$ para modelos de galaxias barradas, encontrando bandas de inestabilidad horizontal y vertical. Adicionalmente, se concluye que la importancia de la banda está determinada por la influencia de sus familias de bifurcación en $3D$ y por el rango en el espacio de parámetros para los cuales la banda se forma. Otro estudio destacado, en el que se encuentran estados estables, es el realizado por NINKOVIC and JOVANOVIC (2009), en el cual se presenta un caso particular de un estado estable con simetría axial, haciendo uso del potencial de MIYAMOTO and NAGAI (1975). En este trabajo se determinan numéricamente las órbitas de partículas de prueba variando las condiciones iniciales y los parámetros del potencial. De esta manera se encuentra que mientras se mantiene la masa constante y se varían los parámetros del potencial no se producen diferencias importantes en las curvas de rotación

Por otra parte, en el trabajo realizado por RAMOS-CARO et al. (2008) se estudia el movimiento de partículas de prueba en el campo gravitacional generado por los primeros miembros de la familia de discos de Kalnajs, donde se analiza la estabilidad de las órbitas

circulares al realizar perturbaciones radiales y verticales. A partir de este análisis se encuentra que la estabilidad de las órbitas circulares aumenta en la medida en que se incrementa el número de términos que se utilizan para representar el modelo. También se observa que el rango de momento angular axial, para el cual se encuentra movimiento ligado dentro del disco, disminuye con el número de términos. Por otra parte, en el estudio realizado por NIETO NARVÁEZ (2015) se analiza la estabilidad radial de órbitas circulares en el plano ecuatorial tanto para los discos de Tomme como para los discos generalizados de Kalnajs. Mientras tanto, MARTÍNEZ (2015) realiza un estudio del movimiento de partículas en campos gravitacionales con simetría axial, donde se hallan regiones de regularidad e irregularidad en órbitas tridimensionales para los primeros cuatro términos de la familia de potenciales tipo MIYAMOTO and NAGAI (1975). Para el primer modelo se encuentra que predominan las órbitas tipo caja, en el segundo y tercer modelo se obtiene desde órbitas tipo caja hasta órbitas de forma toroidal y en el último modelo aparecen órbitas que forman un diagrama tipo banano.

En este trabajo de investigación se realiza un análisis de la estabilidad de órbitas circulares, en el plano ecuatorial, para modelos de galaxias caracterizados por un disco delgado finito, siguiendo el primer modelo de discos de KALNAJS (1972), y un halo de materia, a partir del potencial de MIYAMOTO and NAGAI (1975). Como parte de la solución del problema se reducen los grados de libertad en las ecuaciones de movimiento, teniendo en cuenta que el modelo tiene dos simetrías, la simetría axial y la simetría de reflexión. Posteriormente se normalizan las ecuaciones de movimiento, el potencial efectivo y la condición de órbita circular. En la primera parte de los resultados, sección 2.1, se realiza un análisis de los cambios ocurridos en el potencial efectivo y en la condición de órbita circular en función de los parámetros del potencial gravitacional del disco y el halo de materia. Este estudio se realiza para halos de gran extensión en comparación con el radio del disco. Por otra parte, se resuelven las ecuaciones de movimiento, de forma numérica, teniendo en cuenta la condición de órbita circular para asignar valores a los parámetros y datos iniciales. Además se realizan perturbaciones a las órbitas circulares obtenidas previamente, mediante el conocimiento de las zonas estables e inestables dadas por el criterio del momento angular, tanto al interior como al exterior del disco. En la segunda parte de los resultados, sección 2.2, se repite la misma metodología pero esta vez se realiza un análisis para halos de menor extensión que el radio del disco. Finalmente, se muestran las conclusiones sobre los resultados obtenidos para el análisis de la condición de órbita circular, el potencial efectivo y las órbitas circulares, en el caso de halos de gran extensión y en el caso de halos pequeños.

CAPITULO 1

MARCO TEÓRICO

Este capítulo está dividido en dos secciones. En la sección 1.1 se muestra la formulación del problema asociado al movimiento de una partícula de prueba en un campo gravitacional con simetría axial y de reflexión con respecto al plano $z = 0$, de las coordenadas cilíndricas. En tales condiciones, se obtienen las expresiones para el potencial efectivo, el Hamiltoniano, las ecuaciones de movimiento, la condición de órbita circular y el criterio de estabilidad del momento angular. Además se realiza el proceso de normalización de estas expresiones. En la sección 1.2 se presentan el potencial gravitacional y la densidad superficial empleados para modelar el disco galáctico, correspondiente al primer modelo de discos de Kalnajs. También se presentan las expresiones analíticas de los halos tridimensionales de materia como lo son el potencial gravitacional y la densidad del halo. De igual manera, en esta sección se muestran las expresiones normalizadas para la condición de órbita circular y el potencial efectivo del modelo.

MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS DE PRUEBA EN EL PLANO MERIDIONAL EN PRESENCIA DE UN CAMPO GRAVITACIONAL CON SIMETRÍA AXIAL

El presente estudio parte del análisis del movimiento de una partícula de prueba en el potencial gravitacional, $\Phi(R, \phi, z)$, del modelo particular a tratar, el cual posee dos simetrías: la simetría axial $\Phi = \Phi(R, z)$ y la simetría de reflexión $\Phi(R, z) = \Phi(R, -z)$, donde (R, ϕ, z) son las coordenadas cilíndricas. Como punto de partida de este estudio se plantea el Lagrangiano por unidad de masa $\mathcal{L} = L/m$, en coordenadas cilíndricas

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 \right) - \Phi(R, z), \quad (1.1)$$

donde m es la masa de la partícula de prueba y la notación de puntos hace referencia a la derivada temporal. Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange (BINNEY and TREMAINE, 2008; GOLDSTEIN, 1965; JOSÉ and SALETAN, 1998), se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 + \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R} = 0, \quad (1.2)$$

$$\ddot{z} + \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial z} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(R^2 \dot{\phi} \right) = 0, \quad (1.4)$$

donde se observa, a partir de la ecuación (1.4), que la cantidad $R^2 \dot{\phi}$ es una constante del movimiento, cuyo análisis dimensional muestra que tiene unidades de momento angular por unidad de masa, $l_z = L_z/m$

$$l_z = R^2 \dot{\phi}. \quad (1.5)$$

Ya que la cantidad conservada es el momento angular a lo largo del eje z .

Por otra parte, se obtiene el Hamiltoniano de esta partícula de prueba a partir de la transformación de Legendre (GOLDSTEIN, 1965; JOSÉ and SALETAN, 1998),

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\dot{R}^2 + R^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 \right) + \Phi(R, z), \quad (1.6)$$

tal que al sustituir $\dot{\phi}$ dentro de éste, en términos del momento angular (1.5), se obtiene

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\dot{R}^2 + \dot{z}^2 \right) + \frac{l_z^2}{2R^2} + \Phi(R, z), \quad (1.7)$$

a partir del cual se observan dos términos que no dependen de las velocidades, (\dot{R}, \dot{z}) . Tales términos se utilizan para definir el potencial efectivo como se muestra a continuación

$$\Phi_{ef}(R, z) = \frac{l_z^2}{2R^2} + \Phi(R, z), \quad (1.8)$$

cuyo primer término se conoce como el potencial centrífugo y depende del momento angular de la partícula.

En lo que respecta al análisis del potencial efectivo, es importante conocer dónde se encuentran los puntos críticos; es decir, los valores de las variables R y z donde la derivada respecto a cada una de las variables es igual a cero

$$\frac{\partial \Phi_{ef}(R, z)}{\partial R} = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \Phi_{ef}(R, z)}{\partial z} = 0, \quad (1.10)$$

ya que en estos puntos se obtienen órbitas circulares. Además, teniendo en cuenta que se supone simetría de reflexión con respecto al plano ecuatorial, la condición (1.10) se satisface en el plano $z = 0$ (CARROLL and OSTLIE, 2006). Así pues, las condiciones (1.9) y (1.10), considerando la forma del potencial efectivo (1.8), se convierten en las siguientes relaciones

$$\frac{\partial \Phi(R, 0)}{\partial R} = \frac{l_z^2}{R^3}, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \Phi(R, 0)}{\partial z} = 0, \quad (1.12)$$

donde la expresión (1.11) se conoce como *condición de órbita circular* (COC), expresada en términos del potencial gravitacional, en el plano ecuatorial $\Phi(R, 0)$. Así mismo, la condición dada por la ecuación (1.12) es válida en el plano ecuatorial $z = 0$.

Para reducir las ecuaciones de movimiento al plano ecuatorial se deben satisfacer las siguientes condiciones: $\ddot{z} = 0$, $\dot{z} = 0$, $z = 0$. Para finalizar, el Hamiltoniano efectivo (1.7) se reduce a la siguiente expresión:

$$\mathcal{H} = \frac{\dot{R}^2}{2} + \frac{l_z^2}{2R^2} + \Phi(R, 0), \quad (1.13)$$

de tal manera que el Hamiltoniano sólo depende de la coordenada radial y de la velocidad radial, \dot{R} . Como consecuencia de esto no habrá movimiento a lo largo del eje z , la partícula se moverá en el plano $z = 0$. De igual manera se observa una reducción

en los grados de libertad del potencial efectivo (1.8), tal que dicho potencial queda dependiendo solamente de la coordenada radial

$$V(R) = \frac{l_z^2}{2R^2} + \Phi(R, 0). \quad (1.14)$$

Por las consideraciones anteriores, se puede reescribir el Hamiltoniano y la ecuación radial de movimiento en términos del potencial efectivo como se muestra a continuación:

$$\mathcal{H} = \mathcal{E} = \frac{\dot{R}^2}{2} + V(R) \quad (1.15)$$

$$\ddot{R} = -\frac{dV(R)}{dR}, \quad (1.16)$$

donde \mathcal{E} es la energía total de la órbita.

1.1.1 Normalización del Hamiltoniano y de las ecuaciones de movimiento

Para el estudio numérico de las órbitas es recomendable normalizar las ecuaciones de movimiento y todas las expresiones involucradas en su solución. Por esta razón el siguiente paso es normalizar el Hamiltoniano efectivo (1.13), mediante la siguiente transformación de coordenadas:

$$\tau = \frac{t}{t_c}, \quad (1.17)$$

$$\tilde{R} = R/L, \quad (1.18)$$

donde \tilde{R} , τ son la coordenada radial y el tiempo normalizados, respectivamente. Las cantidades t_c y L son el tiempo característico y la longitud característica del sistema, respectivamente, los cuales dependen del sistema astrofísico que se esté estudiando. Aplicando las transformaciones para normalizar, (1.17) y (1.18), al Hamiltoniano efectivo (1.13), se obtiene la expresión para la energía por unidad de masa

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{t_c^2} \left(\frac{d\tilde{R}}{d\tau} \right)^2 + \frac{l_z^2}{2L^2\tilde{R}^2} + \frac{MG}{L} \tilde{\Phi}(\tilde{R}), \quad (1.19)$$

la cual se puede reescribir de forma normalizada como se muestra a continuación:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{R}}{d\tau} \right)^2 + \frac{\tilde{l}_z^2}{2\tilde{R}^2} + c\tilde{\Phi}(\tilde{R}), \quad (1.20)$$

en el que $\epsilon = t_c^2 \mathcal{E} / L^2$ es la energía normalizada, $\tilde{l}_z^2 = l_z^2 t_c^2 / L^4$ es el momento angular normalizado y $c = MGt_c^2 / L^3$ es otra constante de normalización. Entonces las variables, parámetros y el potencial $\tilde{\Phi}(\tilde{R})$, en el Hamiltoniano normalizado (1.20), ahora son adimensionales. En este trabajo, por fines prácticos y sin perder generalidad, se ha escogido el valor de la constante $c = 1$.

De igual manera como se normalizó el Hamiltoniano (1.13), se normaliza la ecuación de movimiento radial (1.2) y la ecuación de evolución para la fase (1.5), con el fin de obtener las ecuaciones de movimiento normalizadas

$$\frac{d^2 \tilde{R}}{d\tau^2} = \frac{\tilde{l}_z^2}{\tilde{R}^3} - \frac{\partial \tilde{\Phi}(\tilde{R})}{\partial \tilde{R}}, \quad (1.21)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\tilde{l}_z}{\tilde{R}^2}, \quad (1.22)$$

tal que todas las variables y parámetros, junto con las soluciones a este sistema de ecuaciones, estarán normalizadas.

1.1.2 Condición de órbita circular normalizada

A partir de la ecuación normalizada de la energía (1.20), se define el potencial efectivo por medio de los términos que no dependen de las velocidades como se ve a continuación:

$$\tilde{V}(\tilde{R}) = \frac{\tilde{l}_z^2}{2\tilde{R}^2} + \tilde{\Phi}(\tilde{R}), \quad (1.23)$$

donde se ha escogido el valor de la constante $c = 1$. Para este trabajo en particular, es de interés analizar los puntos críticos del potencial efectivo, los cuales se obtienen cuando se satisface la siguiente condición:

$$\left. \frac{d\tilde{V}(\tilde{R})}{d\tilde{R}} \right|_{\tilde{R}=\tilde{R}_c} = 0, \quad (1.24)$$

en donde \tilde{R}_c es el valor del radio donde se ubica el valor mínimo, el máximo o el punto de inflexión del potencial efectivo. Realizando el cálculo de la derivada (1.24), sobre el potencial efectivo (1.23), se obtiene la COC normalizada

$$\tilde{l}_z^2 = \tilde{R}_c^3 \left. \frac{d\tilde{\Phi}(\tilde{R})}{d\tilde{R}} \right|_{\tilde{R}=\tilde{R}_c}, \quad (1.25)$$

que relaciona el momento angular y el potencial gravitacional del modelo a tratar. Es necesario resaltar que cuando se evalúa el momento angular \tilde{l}_z , en la COC (1.25), para un radio arbitrario \tilde{R}_c y se asigna tal valor a las condiciones iniciales de las ecuaciones de movimiento (1.21), (1.22), se obtiene una órbita circular.

1.1.3 Criterio del momento angular para la estabilidad de órbitas circulares

Un criterio que permite el análisis de estabilidad de órbitas circulares, equivalente al realizado por medio de los puntos críticos del potencial efectivo, es aquel que tiene en cuenta el signo de la derivada de la componente z del momento angular, \tilde{l}_z . A continuación se describe la metodología para llegar a tal criterio. Para empezar, se realiza la segunda derivada del potencial efectivo adimensional (1.23), con respecto a la coordenada radial \tilde{R} , para obtener la siguiente expresión

$$\frac{d^2\tilde{V}(\tilde{R})}{d\tilde{R}^2} = \frac{3\tilde{l}_z^2}{\tilde{R}^4} + \frac{d\tilde{\Phi}(\tilde{R})}{d\tilde{R}^2}. \quad (1.26)$$

Teniendo en cuenta la COC (1.25), se obtiene

$$\frac{d^2\tilde{V}(\tilde{R})}{d\tilde{R}^2} = \frac{1}{\tilde{R}^3} \frac{d}{d\tilde{R}} \left[\tilde{R}^3 \frac{d\tilde{\Phi}(\tilde{R})}{d\tilde{R}} \right], \quad (1.27)$$

donde nuevamente se utiliza la COC (1.25), para llegar al siguiente resultado

$$\frac{d^2\tilde{V}(\tilde{R})}{d\tilde{R}^2} = \frac{1}{\tilde{R}^3} \frac{d\tilde{l}_z^2}{d\tilde{R}}, \quad (1.28)$$

tal que, el término de la izquierda se usa para establecer el criterio de estabilidad de la segunda derivada de una función. El criterio de la segunda derivada de una función,

$$\frac{d^2\tilde{V}(\tilde{R})}{d\tilde{R}^2} \geq 0, \quad (1.29)$$

en este caso el potencial efectivo, $\tilde{V}(\tilde{R})$, establece que si el valor de la segunda derivada es positivo el punto crítico es estable, si el valor es cero se puede tratar de un punto neutro y finalmente si la segunda derivada es negativa, el punto de equilibrio es inestable. A partir de este resultado se obtiene el criterio de estabilidad de órbitas circulares en términos de la componente z del momento angular

$$\left. \frac{d\tilde{l}_z^2(\tilde{R})}{d\tilde{R}} \right|_{\tilde{R}=\tilde{R}_c} \geq 0, \quad (1.30)$$

donde \tilde{R}_c es el punto crítico donde se quiere analizar la estabilidad. De los resultados anteriores, se puede concluir que el criterio de estabilidad (1.30) permite conocer la estabilidad de órbitas circulares, siempre que se conozca el potencial gravitacional $\tilde{\Phi}(\tilde{R})$.

CARACTERÍSTICAS DE LOS MODELOS DE DISCO Y HALO EMPLEADOS

1.2.1 Modelos de disco delgado finito

El modelo particular de disco empleado en este estudio corresponde al primer modelo de discos de Kalnajs (KALNAJS, 1972; GONZÁLEZ and REINA, 2006), donde la forma explícita del potencial gravitacional, en coordenadas cilíndricas, se muestra a continuación:

$$\Phi_d(\tilde{R}) = \frac{M_d G}{a_d} \left\{ \frac{3\pi}{8} (\tilde{R}^2 - 2) H(1 - \tilde{R}) - \left[\cot^{-1}(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1}) - \frac{1}{4} ((3\tilde{R}^2 - 2) * \cot^{-1}(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1}) - 3\sqrt{\tilde{R}^2 - 1}) \right] (1 - H(1 - \tilde{R})) \right\}, \quad (1.31)$$

donde M_d es la masa del disco y a_d es el radio del disco, el cual corresponde a la longitud característica del sistema. La coordenada radial R se ha normalizado con respecto a la escala de longitud del disco, tal que la longitud radial normalizada se escribe como: $\tilde{R} = R/a_d$. Además, se ha empleado la función de Heaviside

$$H(u) = \begin{cases} 1 & \text{Si } u \geq 0 \\ 0 & \text{Si } u < 0 \end{cases}, \quad (1.32)$$

para mostrar de manera compacta la forma matemática del potencial al interior y al exterior del disco.

En este modelo de disco la materia se distribuye en una superficie en el plano $z = 0$, hasta un radio a_d , con densidad superficial normalizada dada por la siguiente expresión (KALNAJS, 1979; GONZÁLEZ and REINA, 2006; CORTÉS-SERRANO, 2014):

$$\tilde{\sigma}(\tilde{R}) = \frac{\pi a_d^2 \sigma}{M_d} = \frac{3}{2} (1 - \tilde{R}^2)^{1/2}, \quad (1.33)$$

tal que $\tilde{\sigma}$ es la densidad superficial normalizada, $\tilde{R} = 0$. Se caracteriza por ser máxima en el centro y decrece monótonamente hasta anularse en el borde del disco, $\tilde{R} = 1$.

1.2.2 Modelos de halo de materia

Para construir modelos con halos de materia se utiliza el potencial gravitacional planteado por MIYAMOTO and NAGAI (1975) dado por la siguiente expresión

$$\Phi_h(R, z) = -\frac{M_h G}{\left(R^2 + \left(a_h + (b^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.34)$$

donde M_h es la masa del halo, a_h y b son parámetros con unidades de longitud, empleados para caracterizar la forma y el tamaño de los halos. Además, una característica importante del potencial gravitacional del halo (1.34) es que satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi_h(R, z) = 4\pi G \rho, \quad (1.35)$$

tal que la densidad del halo está dada por

$$\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z}) = \frac{\tilde{b}^2 \left(\tilde{a} \tilde{R}^2 + \tilde{a}^3 + 5\tilde{a}^2 \zeta + 7\tilde{a} \zeta^2 + 3\zeta^3 \right)}{\zeta^3 \left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \zeta)^2 \right]}, \quad (1.36)$$

donde $\tilde{\rho} = 4\pi a_h^3 \rho / M_h$ es la densidad normalizada, $\tilde{b} = b/a_h$ es el espesor del halo normalizado respecto al tamaño del halo, $\zeta = \sqrt{\tilde{b}^2 + \tilde{z}^2}$, (\tilde{R}, \tilde{z}) son las coordenadas espaciales normalizadas con respecto al parámetro a_h . La característica más destacada de los halos construidos utilizando el potencial (1.34), es que la densidad tiene su máximo valor en el centro y éste es finito.

1.2.3 Modelos de disco delgado y halo

El modelo de galaxias que se estudiará en este trabajo de investigación consiste en la superposición de dos potenciales gravitacionales:

$$\Phi(R, z) = \Phi_d(R, z) + \Phi_h(R, z), \quad (1.37)$$

donde el potencial del disco (1.31) y el potencial del halo (1.34) poseen dos escalas de longitud, a_d y a_h , que deben ser unificadas mediante la definición del parámetro adimensional \tilde{a} , que representa la razón entre las escalas de longitud

$$\tilde{a} = \frac{a_h}{a_d}. \quad (1.38)$$

Como consecuencia, el potencial gravitacional total se normaliza con respecto al mismo parámetro, el radio del disco a_d , como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\tilde{R}, \tilde{z}) = & \left\{ \frac{3\pi}{8} (\tilde{R}^2 - 2) H(1 - \tilde{R}) - \left[\cot^{-1} \left(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right) - \frac{1}{4} \left((3\tilde{R}^2 - 2) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. * \cot^{-1} \left(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right) - 3\sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right) \right] (1 - H(1 - \tilde{R})) \right\} \\ & - \frac{\tilde{M}}{\sqrt{\tilde{R}^2 + \left(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{b}^2 + \tilde{z}^2} \right)^2}}, \end{aligned} \quad (1.39)$$

tal que $\tilde{\Phi}(\tilde{R}, \tilde{z}) = a_d \Phi(\tilde{R}, \tilde{z}) / M_d G$ es el potencial gravitacional normalizado para el modelo de disco y halo escogido, $\tilde{M} = M_h / M_d$ es la razón entre la masa del disco y la masa del halo, $\tilde{R} = R / a_d$, $\tilde{z} = z / a_d$ y $\tilde{b} = b / a_d$, $\tilde{a} = a_h / a_d$.

1.2.4 Condición de órbita circular

El comportamiento de esta función permite conocer el valor del momento angular, \tilde{l}_z , necesario para obtener órbitas circulares en una de las posiciones, \tilde{R} , de la partícula de prueba. La COC (1.25), para el modelo particular de disco y halo (1.39), adquiere la siguiente forma normalizada:

$$\begin{aligned} \tilde{l}_z^2 = & \frac{3}{4} \pi \tilde{R}^4 H(1 - \tilde{R}) + \frac{3}{2} \frac{\tilde{R}^4}{\sqrt{\tilde{R}^2 - 1}} \left[\frac{1}{\tilde{R}^2} + \sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \cot^{-1} \left(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right) \right. \\ & \left. - 1 \right] (1 - H(1 - \tilde{R})) + \tilde{M} \tilde{R}^4 \left(\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \tilde{b})^2 \right)^{-3/2}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

donde $\tilde{M} = M_h / M_d$ es la razón de masas entre el halo y el disco, $\tilde{a} = a_h / a_d$ es la razón entre las escalas de longitud, a_h del halo y a_d del disco, el parámetro normalizado $\tilde{b} = b / a_d$ es la razón entre el parámetro b del halo y el tamaño del disco, a_d .

1.2.5 Potencial efectivo

A partir de la expresión general normalizada del potencial efectivo (1.23), y teniendo en cuenta la forma del potencial gravitacional del modelo de disco y halo (1.39), se obtiene

el potencial efectivo normalizado

$$\tilde{V}(\tilde{R}) = \frac{\tilde{l}_z^2}{2\tilde{R}^2} + \frac{3\pi}{8} (\tilde{R}^2 - 2) H(1 - \tilde{R}) - \cot^{-1} \left(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right) + \frac{1}{4} \left[(3\tilde{R}^2 - 2) \cot^{-1} \left(\sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right) - 3\sqrt{\tilde{R}^2 - 1} \right] (1 - H(1 - \tilde{R})) - \frac{\tilde{M}}{\sqrt{\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \tilde{b})^2}}, \quad (1.41)$$

del modelo planteado. Las variables de las que depende el potencial efectivo están normalizadas con respecto al parámetro a_d del disco de materia, como se ha mostrado anteriormente en el caso de la densidad del halo, la COC, etc.

CAPITULO 2

RESULTADOS OBTENIDOS PARA UN MODELO PARTICULAR DE DISCO Y HALO

SECCIÓN 2.1

ESTUDIO DE HALOS DE GRAN EXTENSIÓN

Los halos de materia analizados en esta sección se construyen teniendo en cuenta el potencial gravitacional total (1.39), normalizado con respecto a la escala de longitud del disco a_d , de tal manera que la densidad superficial del disco (1.33), la densidad del halo de materia (1.36) y cada una de las coordenadas y parámetros quedan normalizados con respecto a este parámetro.

La distribución superficial de masa del disco se puede observar en la figura 2.1, que se caracteriza por tener un valor máximo en el centro, el cual decrece monótonamente hasta anularse en el borde del disco. Como el potencial gravitacional del disco es axialmente simétrico, el perfil de densidad superficial también es axialmente simétrico. Por otra parte, el conjunto de halos empleados en esta sección se puede observar en las figuras 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5, los cuales se caracterizan por su gran tamaño, el cual puede ser verificado a través de los primeros contornos de densidad más representativos, $1 \leq \tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z}) \leq 0.1$, los cuales se extienden radialmente a una distancia mayor que el radio del disco, $\tilde{R} = 1$. Cabe aclarar que los contornos de densidad están normalizados

con respecto a la densidad central, $\tilde{\rho}(\tilde{R}, \tilde{z})/\tilde{\rho}(\tilde{R} = 0, \tilde{z} = 0)$, ya que allí se encuentra el máximo valor de la densidad y éste es finito. Cada uno de los halos de gran tamaño estudiados en esta sección, se caracteriza por tener el mismo valor del parámetro $\tilde{a} = 1$, mientras se asignó diferentes magnitudes al parámetro \tilde{b} para obtener halos de diferente forma y tamaño. De esta manera, el halo de menor tamaño y más aplanado es el correspondiente al valor $\tilde{b} = 0.1$ y se puede ver en la figura 2.2, el halo de mayor extensión y más esférico es el correspondiente al parámetro $\tilde{b} = 20$, se observa en la figura 2.5; los halos restantes, con parámetros $\tilde{b} = 1$ y $\tilde{b} = 10$ son halos de tamaño y achatamiento intermedio y se pueden observar en las figuras 2.3 y 2.4. Para concluir, a medida que disminuye el valor del parámetro \tilde{b} , mientras se mantiene el valor de \tilde{a} constante, la estructura se hace más pequeña y aplanada.

Figura 2.1: Perfil de densidad superficial del primer modelo de disco de Kalnajs.

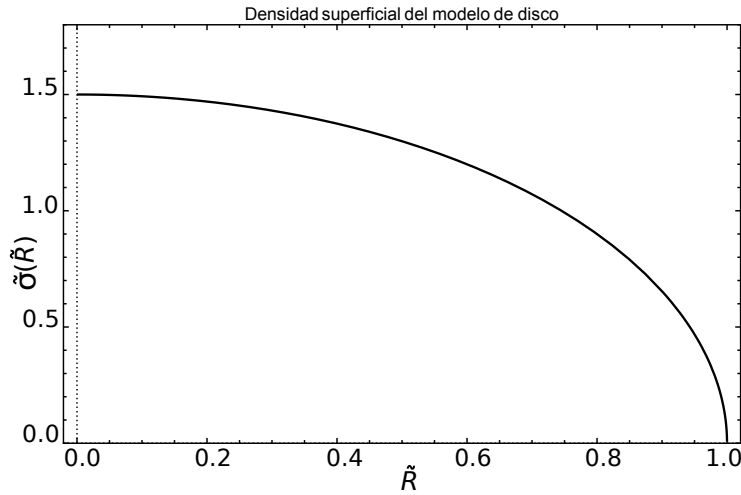


Figura 2.2: Contornos de densidad normalizados, con una extensión radial mayor que la del disco delgado. La razón entre las escalas de longitud del halo y el disco es $\tilde{a} = a_h/a_d = 1$ y la razón entre el parámetro del halo y el disco es $\tilde{b} = 0.1$.

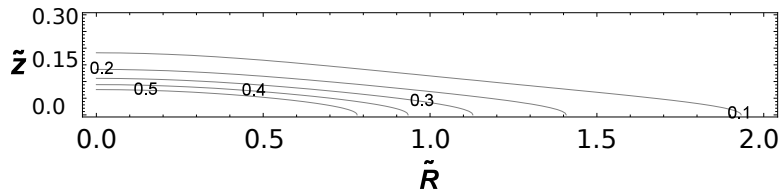


Figura 2.3: Contornos de densidad de un halo achatado y de mayor extensión radial que el radio del disco, siendo el segundo halo de menor tamaño. La razón entre las escalas de longitud es: $\tilde{a} = a_h/a_d = 1$ y $\tilde{b} = 1$.

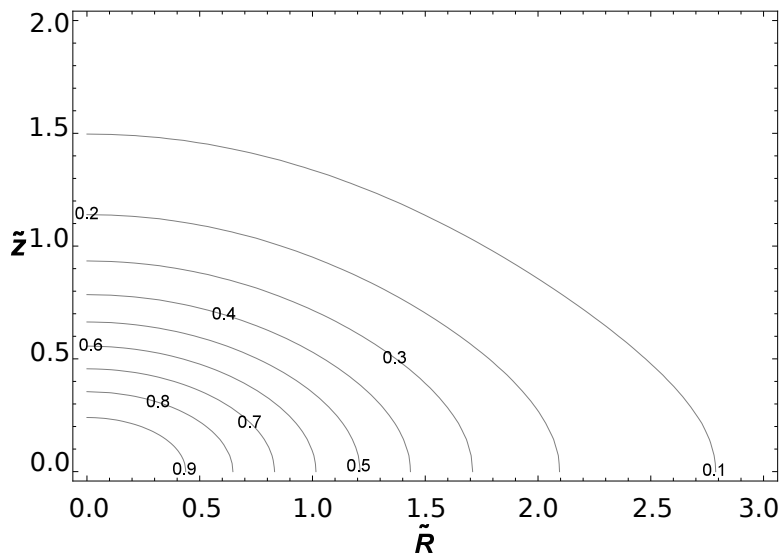


Figura 2.4: Contornos de densidad normalizados para el segundo halo de mayor tamaño. La razón entre las escalas de longitud es $\tilde{a} = a_h/a_d = 1$ y $\tilde{b} = 10$.

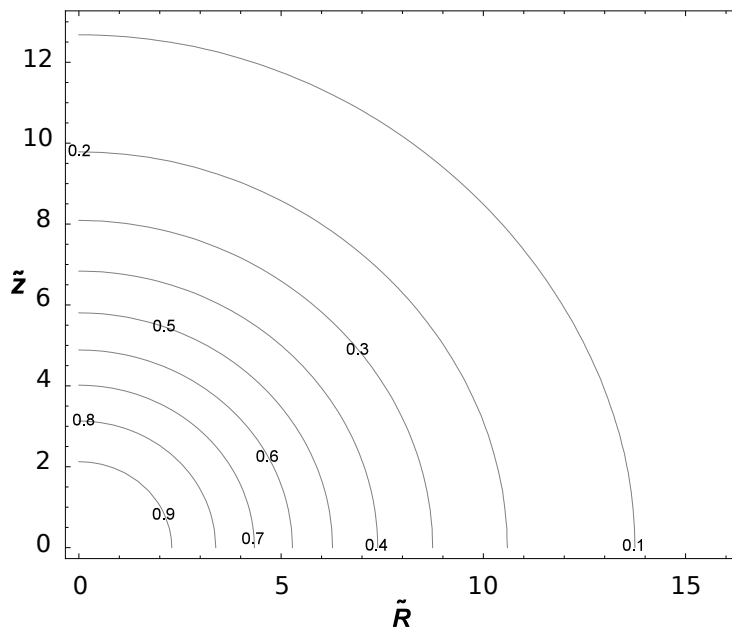
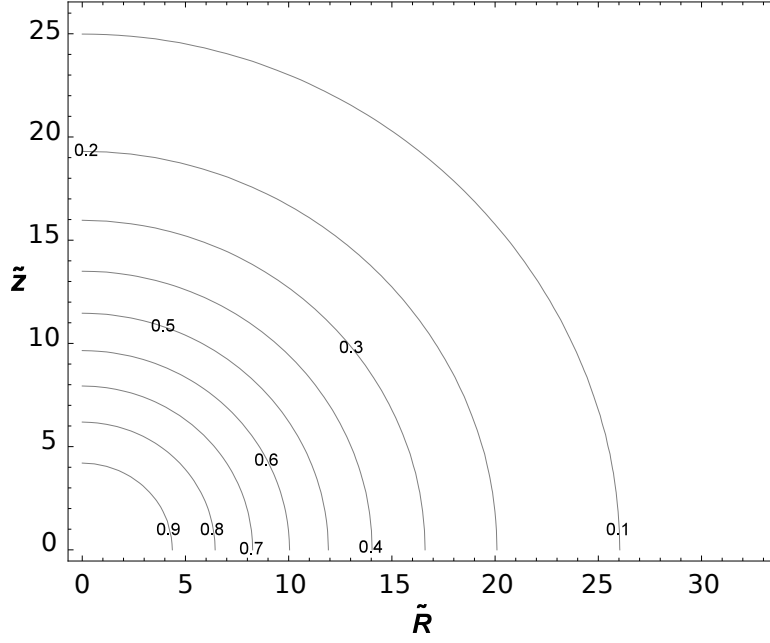


Figura 2.5: Contornos de densidad normalizados del halo de mayor extensión. La razón entre las escalas de longitud es $\tilde{a} = a_h/a_d = 1$ y $\tilde{b} = 20$.



2.1.1 Condición de órbita circular

Los cambios producidos en la COC (1.40), debido a variaciones del parámetro \tilde{b} , las cuales están dadas por $\tilde{b} = 0.1, 1, 10, 20$, se pueden observar en la figura 2.6, donde la razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 0.3$. Lo que se observa es un mayor incremento en la magnitud del momento angular \tilde{l}_z , para los valores más pequeños de este parámetro, $\tilde{b} = 0.1, 1$, en la región más cercana al radio del disco. Esto es así puesto que valores pequeños de \tilde{b} representan halos más compactos como se observa en las figuras 2.2 y 2.3, en comparación con los halos de mayor tamaño y menos aplanados de las figuras 2.4 y 2.5, representados por los halos con un valor mayor del parámetro $\tilde{b} = 10, 20$. En las figuras 2.4 y 2.5 se muestran halos más grandes que el halo de la figura 2.2, lo cual hace que el efecto producido en la COC (ver figura 2.6) sea muy parecido al del disco, es decir, las curvas son indistinguibles hasta un radio aproximado de $\tilde{R} \approx 4$. Sin embargo, a distancias grandes todas las curvas que incluyen el halo de materia tienden a solaparse hacia una misma curva. En otras palabras, cuando se tienen halos de igual masa pero diferente tamaño, los halos que producen cambios visibles sobre la COC, en regiones cercanas al radio del disco, son los de menor tamaño, mientras que

para ver los efectos sobre la COC, debido a halos muy grandes, es necesario alejarse a más de 10 veces el radio del disco.

En el caso de halos masivos $\tilde{M} = 7$, también se analizó el efecto producido sobre la COC en función de las variaciones del parámetro \tilde{b} . Tales cambios se pueden observar en la figura 2.7. El efecto producido por los halos más pequeños, dados por $\tilde{b} = 0.1, 1$, en las figuras 2.2 y 2.3, consiste en un ligero incremento en la magnitud del momento angular para las regiones al interior del disco y un incremento del momento angular mucho más grande en las regiones exteriores al radio del disco, $\tilde{R} > 1$. A diferencia de los halos más extendidos en las figuras 2.4 y 2.5, los cuales no muestran un efecto notable en la COC hasta un radio $\tilde{R} \approx 3$. A partir de esa distancia el comportamiento asintótico se aleja de la curva sin halo, ya que la magnitud del momento angular se incrementa proporcional a la razón de masas entre el halo y el disco.

En la figura 2.8 se observan los cambios en la COC cuando se utiliza el potencial gravitacional de un halo como el observado en la figura (2.4), al realizar variaciones de la razón de masas \tilde{M} , entre el halo y el disco; donde los parámetros del halo están dados por $\tilde{a} = 1$ y $\tilde{b} = 10$. Puesto que el halo elegido es de gran tamaño, el efecto de incremento en la magnitud del momento angular \tilde{l}_z , en el caso del halo con masa de $\tilde{M} = 1$, es pequeño antes del radio del disco, posteriormente se observa una separación con respecto a la curva continua que representa la COC para el disco solo. En el caso de los halos más masivos, $\tilde{M} = 3$ y $\tilde{M} = 7$, con parámetros $\tilde{b} = 10$ y $\tilde{b} = 20$, respectivamente, se observa que las curvas están bien diferenciadas al interior del disco, las cuales posteriormente se separan una distancia aún mayor en la región exterior del disco. En conclusión, el comportamiento asintótico de la COC se debe a la masa de las estructuras en consideración.

Figura 2.6: Condición de órbita circular al realizar variaciones del parámetro \tilde{b} del halo de materia. La razón entre la masa del halo y la masa del disco es $\tilde{M} = 0.3$, mientras que la razón entre las escalas de longitud es de $\tilde{a} = a_h/a_d = 1$.

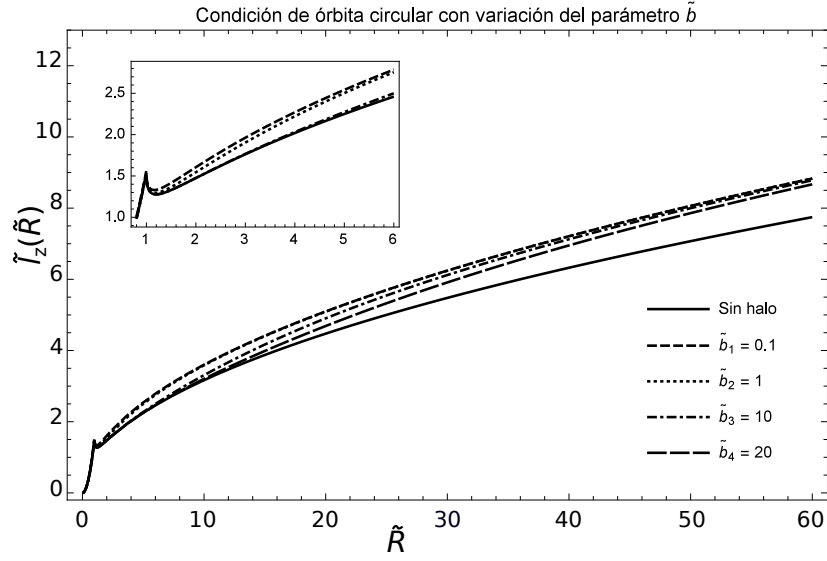


Figura 2.7: Condición de órbita circular al realizar variaciones del parámetro \tilde{b} del halo de materia. La razón entre la masa del halo y la masa del disco es $\tilde{M} = 7$, mientras que la razón entre las escalas de longitud es $\tilde{a} = a_h/a_d = 1$.

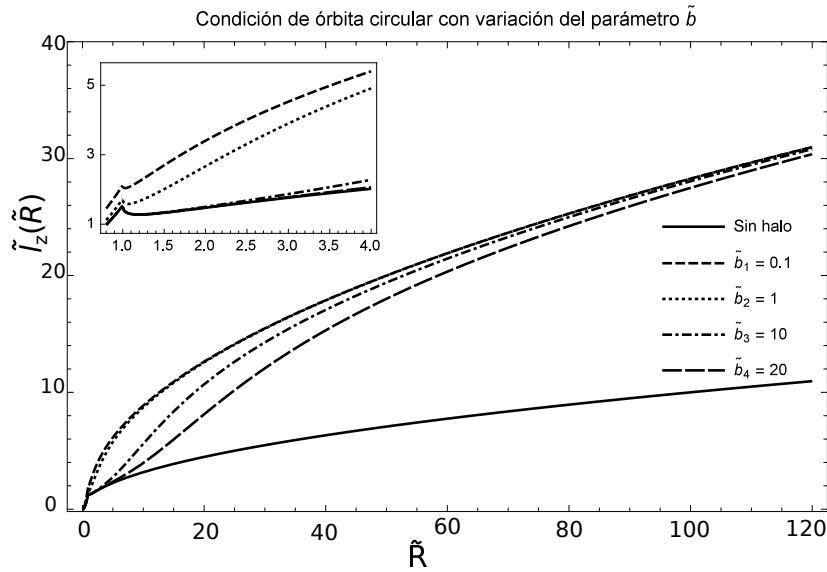
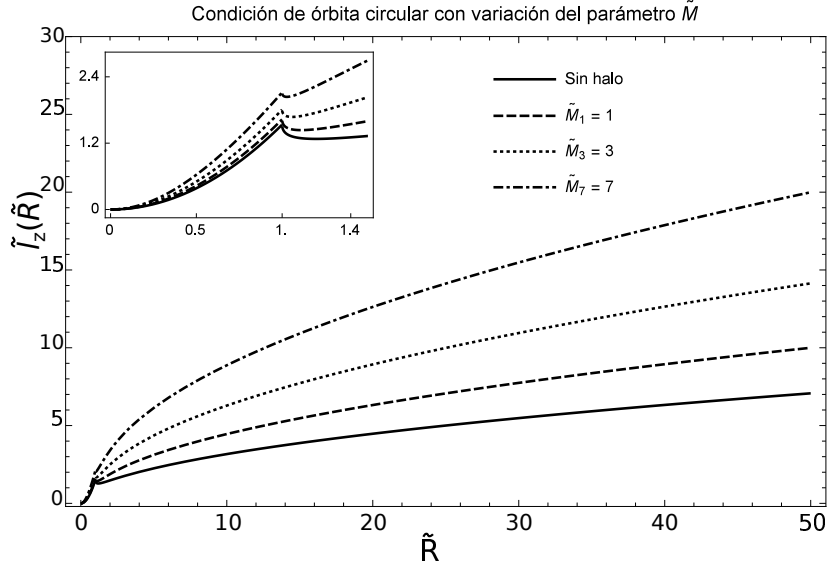


Figura 2.8: En esta gráfica se observa el cambio en la condición de órbita circular cuando se cambia la razón entre la masa del disco y la masa del halo de materia \tilde{M} . El valor del parámetro $\tilde{b} = 10$.



2.1.2 Comportamiento del potencial efectivo en función de los parámetros del halo

A continuación se analiza qué le ocurre al potencial efectivo de una partícula de prueba con momento angular \tilde{l}_z , en presencia del potencial gravitacional de un disco delgado 1.33, cuando se incorpora, además, el potencial gravitacional de un halo de diferente tamaño, forma y masa. Las figuras 2.9, 2.10 y 2.11 muestran los cambios en el potencial efectivo para halos de diferente tamaño $\tilde{b} = 1, 10, 20$, como se observan en las figuras 2.3, 2.4 y 2.5, respectivamente. En la figura 2.9 la razón de masas de cada uno de los halos es de $\tilde{M} = 0.3$, el momento angular de la partícula de prueba es $\tilde{l}_z = 1.330$, y la razón entre las escalas de longitud es $\tilde{a} = 1$, donde se ve que el halo de menor tamaño, con valor de $\tilde{b}_1 = 1$, es el que crea el mayor aumento en la profundidad del pozo de potencial, mientras que el menor cambio en la profundidad de éste fue generado por el halo de mayor tamaño, con el valor de $\tilde{b}_3 = 20$. Después, en la figura 2.10 se introduce un halo con una razón de masas $\tilde{M} = 1$, donde la razón entre las escalas de longitud es $\tilde{a} = 1$ y el momento angular de la partícula de prueba es $\tilde{l}_z = 1.330$. En este caso el halo de menor tamaño, $\tilde{b}_1 = 1$, nuevamente es el que genera el mayor incremento en la profundidad del pozo, comparado con los demás halos de mayor tamaño y también comparado con el halo menos masivo y con el mismo valor \tilde{b}_1 de la figura 2.9. Para

finalizar, en la figura 2.11 se observan los mismos halos que en los casos anteriores pero esta vez la razón de masas es de $\tilde{M} = 7$. La tendencia en el aumento de la profundidad del pozo es igual que en los casos anteriores, siendo el halo más pequeño, con $\tilde{b}_1 = 1$, el que genera la mayor profundidad del pozo, comparado con los halos más grandes, $\tilde{b}_2 = 10$ y $\tilde{b}_3 = 20$, y de la misma masa y comparado con los halos de igual tamaño, \tilde{b}_1 , pero de menor masa.

El análisis del comportamiento del potencial efectivo en función de la variación del momento angular se puede ver en la figura (2.12). Lo que se observa es que cuando el momento angular de la partícula es pequeño, $\tilde{l}_z = 0.752$, el pozo de potencial efectivo es más profundo y biceversa, $\tilde{l}_z = 1.535$. De esta manera, los valores grandes en el momento angular \tilde{l}_z hacen que el potencial efectivo se aplane mientras los valores pequeños aumentan la profundidad del pozo. Esto es así puesto que el potencial centrífugo, primer término del potencial efectivo (1.23), se hace más dominante a medida que aumenta la magnitud del momento angular, comparado con el potencial $\tilde{\Phi}(\tilde{R})$.

Figura 2.9: Cambios en el potencial efectivo cuando se varía el valor del parámetro \tilde{b} del halo de materia. La razón entre escalas de longitud es $\tilde{a} = 1$, el valor del momento angular normalizado es $\tilde{l}_z = 1.330$. La razón de masas es $\tilde{M} = 0.3$.

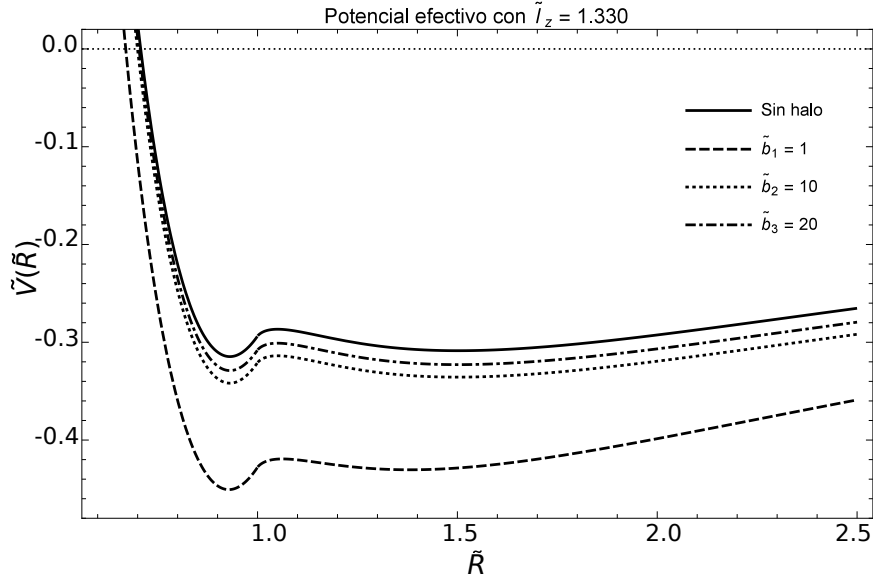


Figura 2.10: Cambios en el potencial efectivo cuando se varía el valor del parámetro \tilde{b} del halo de materia. La razón entre las escalas de longitud es $\tilde{a} = 1$, el valor del momento angular normalizado es $\tilde{l}_z = 1.330$. La razón entre la masa del halo y la masa del disco es de $\tilde{M} = 1$.

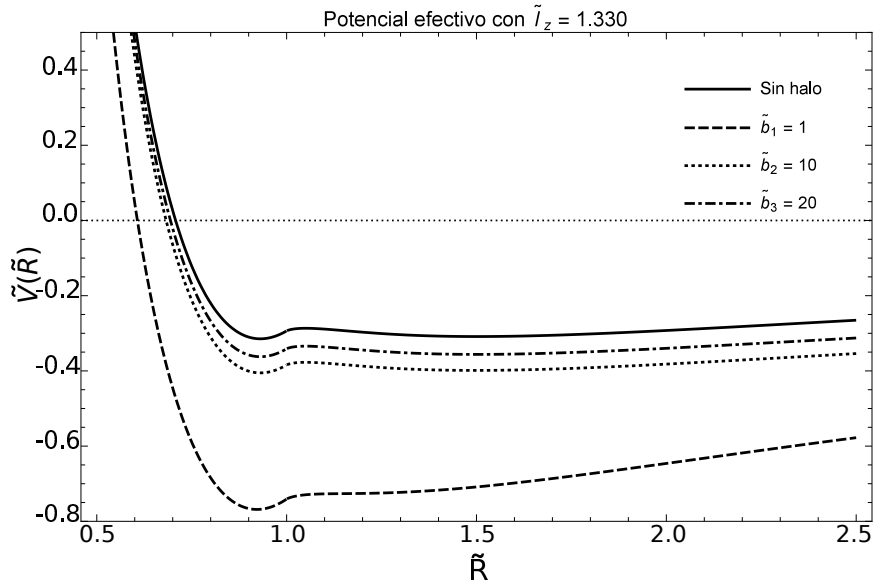


Figura 2.11: En esta gráfica se observa el cambio en el potencial efectivo cuando se varía el valor del parámetro \tilde{b} del halo de materia. El valor del momento angular normalizado es de $\tilde{l}_z = 1.330$, la razón entre las escalas de longitud es $\tilde{a} = 1$ y la razón entre la masa del disco y la masa del halo es de $\tilde{M} = 7$.

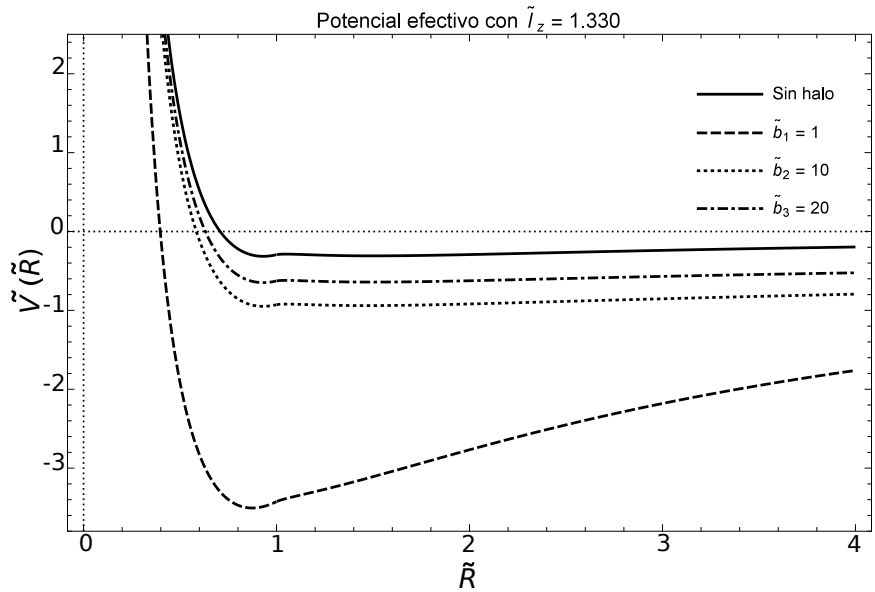
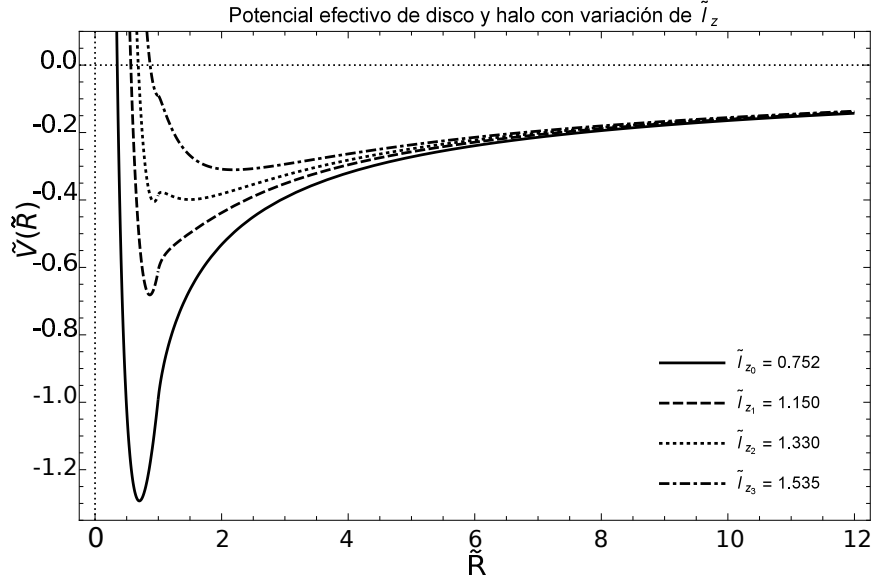


Figura 2.12: En esta gráfica se observa el cambio en el potencial efectivo cuando se varía el valor del momento angular \tilde{l}_z , la razón entre las escalas de longitud es $\tilde{a} = 1$, el valor de la razón entre la masa del disco y el halo es de $\tilde{M} = 1$.



2.1.3 Análisis de estabilidad para órbitas circulares

Para este análisis se tuvo en cuenta el criterio de estabilidad del momento angular (1.30), el cual se puede reescribir de la siguiente manera

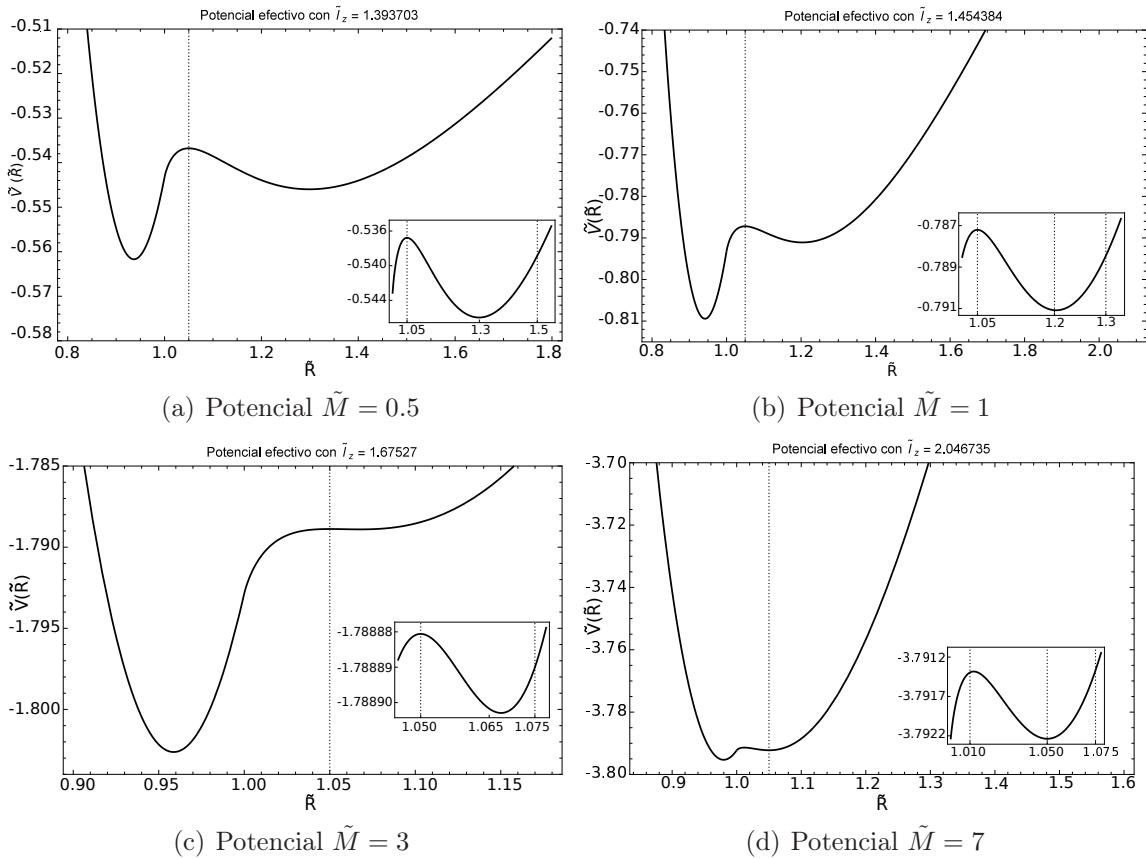
$$\tilde{l}_z(\tilde{R}) \frac{d\tilde{l}_z(\tilde{R})}{d\tilde{R}} \geq 0, \quad (2.1)$$

donde a partir de las figuras (2.6), (2.7) y (2.8) se puede observar que el valor del momento angular, \tilde{l}_z , en la la COC (1.40), es positivo para cualquier posición radial, \tilde{R} . Además, para que el producto (2.1) sea negativo, lo cual implica una condición de inestabilidad, es necesario que la pendiente de la gráfica de $\tilde{l}_z(\tilde{R})$ sea negativa, lo cual se puede observar en una pequeña región después del radio del disco, cuya extensión es diferente dependiendo la masa y el tamaño del halo. Esto se puede ver en cada una de las curvas de las figuras previamente mencionadas.

Con respecto a la región de inestabilidad, a lo largo de las gráficas a), b), c) y d) de la figura 2.13, se observa el comportamiento del potencial efectivo en el punto de inestabilidad $\tilde{R} = 1.05$, a medida que se emplean halos de materia cada vez más masivos. Inicialmente, cuando la razón de masas es de $\tilde{M} = 0.5$ en la figura 2.14(a), el punto de

inestabilidad es un máximo local, lo cual coincide con el criterio de inestabilidad del potencial efectivo, donde la inestabilidad ocurre siempre que $\frac{d^2\tilde{V}(\tilde{R})}{d\tilde{R}^2} < 0$. Asimismo, en las gráficas de las figuras 2.14(b) y 2.14(c) también se observa que el potencial efectivo es un máximo local en la posición $\tilde{R} = 1.05$, tal que cualquier perturbación radial de la órbita es inestable. Finalmente cuando la razón de masas es $\tilde{M} = 7$, el potencial efectivo de la figura 2.14(d) tiene un mínimo local en la posición $\tilde{R} = 1.05$, lo cual implica que la partícula de prueba se encuentra en un punto crítico estable, bajo pequeñas perturbaciones. Para concluir, la zona de inestabilidad se va reduciendo a medida que se incrementa la masa del halo, es decir, la zona donde la función $\tilde{l}_z(\tilde{R})$ tiene pendiente negativa se hace cada vez más pequeña a medida que aumenta la masa del halo.

Figura 2.13: En las gráficas a) , b), c) y d) el interés radica en la evolución del punto crítico del potencial efectivo, $\tilde{R} = 1.05$, a medida que se incorporan halos más masivos. Este punto crítico es inestable en (a), (b) y (c), mientras que en (d) es estable.



2.1.4 Solución numérica de las ecuaciones de movimiento

Para dar solución a las ecuaciones de movimiento (1.21) y (1.22), fue necesario reducir la ecuación de movimiento de segundo orden (1.21) a dos ecuaciones diferenciales de primer orden, mientras que la ecuación (1.22), de primer orden, se dejó como estaba, lo cual condujo al siguiente sistema de ecuaciones normalizado de primer orden:

$$\frac{d\tilde{R}}{d\tau} = \tilde{u}, \quad (2.2)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = \frac{\tilde{l}_z^2}{\tilde{R}^3} - \frac{\partial\tilde{\Phi}(\tilde{R})}{\partial\tilde{R}}, \quad (2.3)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\tilde{l}_z}{\tilde{R}^2}, \quad (2.4)$$

donde \tilde{u} es la velocidad radial de la partícula. Además, el potencial gravitacional del modelo (1.39) es evaluado en $\tilde{z} = 0$. Como se trata de un problema de valor inicial, los datos iniciales son: velocidad radial \tilde{u}_0 , posición radial \tilde{R}_0 , además se asigna el valor del momento angular normalizado \tilde{l}_z , teniendo en cuenta la condición de órbita circular (1.40), y el valor numérico de los parámetros que caracterizan al halo, \tilde{M} , \tilde{a} , \tilde{b} . Los valores iniciales que se asignan a la posición inicial y al momento angular son los correspondientes a la curva dada por la COC (1.40). Para dar solución al sistema de ecuaciones se utilizó el método de Runge Kutta de cuarto orden (PRESS et al., 1993).

En relación con el estudio de estabilidad de órbitas, se resolvieron las ecuaciones de movimiento (2.2), (2.3) y (2.4), teniendo en cuenta la posición del punto crítico, $\tilde{R} = 1.05$, como uno de los valores iniciales, el cual es estable o inestable, dependiendo el tamaño y la masa del halo, como se puede observar en las gráficas de los potenciales efectivos de la figura 2.13. Las órbitas circulares y perturbadas se pueden observar en las figuras (2.14), (2.15), (2.16) y (2.17). Se encontró que después de perturbar la órbita, siempre perturbaciones positivas, la partícula se quedaba oscilando en un pozo de potencial cuyo ancho y profundidad fue disminuyendo a medida que se aumentaba la masa del halo, de esta manera las trayectorias de la partícula se confinaron en regiones cada vez más pequeñas, al exterior del radio inicial, a medida que se aumentó la masa del halo. En otras palabras, como la partícula se encontraba en un punto de equilibrio inestable, un máximo local, un pequeño incremento en la posición radial hacía que la partícula quedara atrapada en un pozo con un mínimo local. Finalmente en la figura (2.17) se observa una oscilación entorno a la órbita circular $\tilde{R}_c = 1.05$, lo cual significa que la órbita es estable, y coincide con el mínimo local observado en esa misma posición del potencial en la figura (2.14(d)). La perturbación realizada en éste último pozo de potencial fue lo suficientemente pequeña, de tal manera que la partícula queda oscilando en un pequeño pozo de potencial.

Figura 2.14: La órbita de color negro corresponde al movimiento circular de una partícula de prueba, en un potencial gravitacional que es superposición de un disco y un halo, para una distancia radial normalizada $\tilde{R} = 1.05$, ubicada en la zona de inestabilidad. Los parámetros del halo están dados por $\tilde{a} = 1$, $\tilde{b} = 0.1$ y la razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 0.5$.

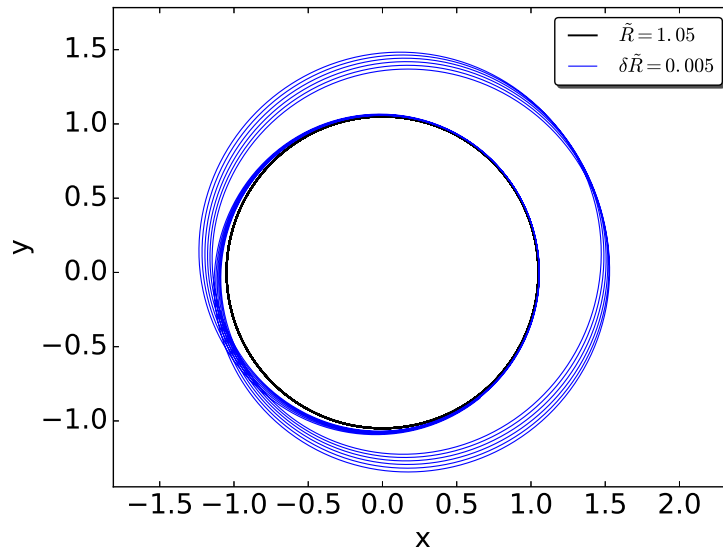


Figura 2.15: La órbita de color negro corresponde al movimiento circular de una partícula de prueba, en un potencial gravitacional que es superposición de un disco y un halo, para una distancia radial normalizada $\tilde{R} = 1.05$, ubicada en la zona de inestabilidad. Los parámetros del halo están dados por $\tilde{a} = 1$, $\tilde{b} = 0.1$ y la razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 1$.

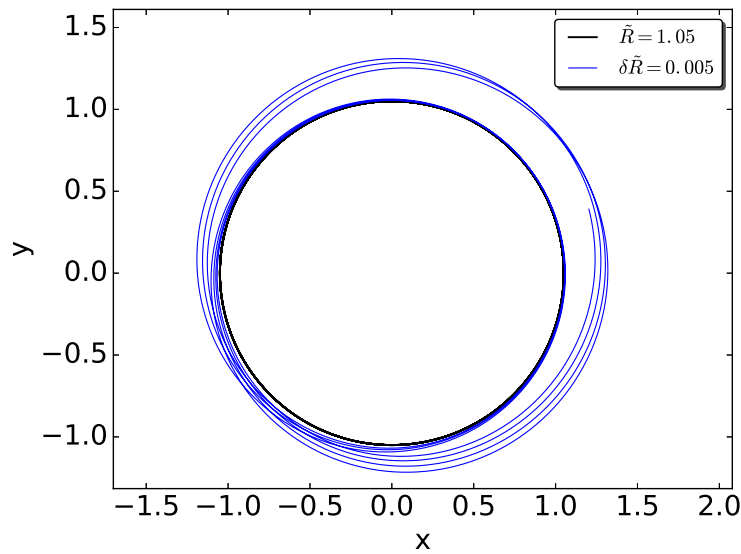


Figura 2.16: La órbita de color negro corresponde al movimiento circular de una partícula de prueba, en un potencial gravitacional que es superposición de un disco y un halo, para una distancia radial normalizada $\tilde{R} = 1.05$, ubicada en la zona de inestabilidad. Los parámetros del halo están dados por $\tilde{a} = 1$, $\tilde{b} = 0.1$ y la razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 3$.

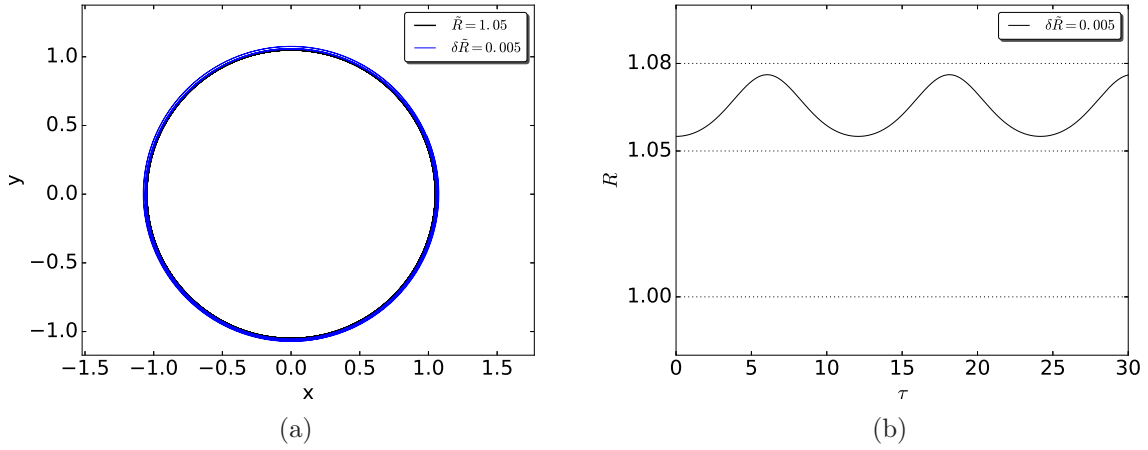
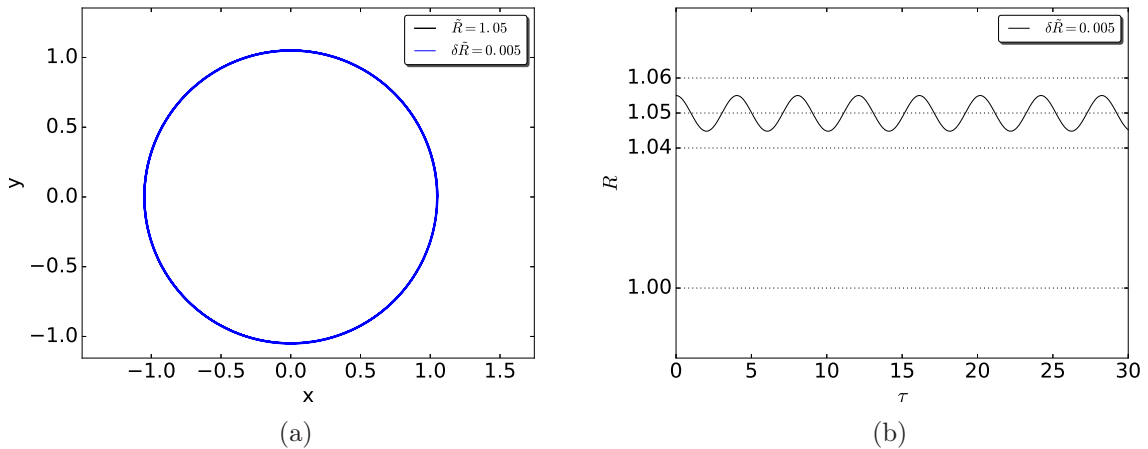


Figura 2.17: La órbita de color negro corresponde al movimiento circular de una partícula de prueba, en un potencial gravitacional que es superposición de un disco y un halo, para una distancia radial normalizada $\tilde{R} = 1.05$, ubicada en la zona de inestabilidad. Los parámetros del halo están dados por $\tilde{a} = 1$, $\tilde{b} = 0.1$ y la razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 7$.



El resultado observado en la figura (2.18) es una órbita circular de radio $\tilde{R} = 0.4$, en la zona estable de la COC (1.40), $0 < \tilde{R} < \tilde{R} = 1$, junto con la perturbación de la órbita circular para un modelo de disco y halo, dado por el potencial gravitacional de la ecuación (1.39). Se ha obtenido la trayectoria circular de forma numérica usando

como datos iniciales: $\tilde{u}_0 = 0$, $\tilde{R}_0 = 0.4$ y el momento angular $\tilde{l}_z = 0.24563749$, cuyo valor se obtiene de la COC (1.40). Lo que se observa es que al realizar la perturbación se genera una órbita cerrada elíptica, en la cual la partícula realizó 14 oscilaciones en el intervalo de tiempo $\tau = 30$.

En la figura (2.19) se puede ver una órbita circular, en la región de estabilidad, a una distancia $\tilde{R} = 0.9$, línea color negro y la perturbación de ésta órbita, $\delta\tilde{R} = 0.01$, línea color azul, cuyo movimiento orbital es a través de una elipse, en el que la partícula de prueba realiza aproximadamente 12 oscilaciones en el intervalo de tiempo seleccionado, $\tau = 25$. De igual manera se obtuvieron órbitas circulares, en las regiones exteriores al disco $\tilde{R} = 1.5$, como las observadas en la figura (2.20), donde la perturbación que se realiza sobre la órbita, $\delta\tilde{R} = 0.01$, se caracteriza por una oscilación de la partícula de prueba a ambos lados de la órbita circular. Quiere decir que el punto crítico debe ser un mínimo local, lo que permite verificar la estabilidad de la partícula de prueba.

Hay que aclarar que en los resultados obtenidos para órbitas estables, por fuera de la región de inestabilidad, no se muestran los potenciales efectivos correspondientes a cada una de las órbitas, lo cual permite conocer si la partícula se encuentra en un mínimo local o en un mínimo global.

Figura 2.18: La órbita de color negro corresponde al movimiento circular de una partícula de prueba, en un potencial gravitacional que es superposición de un disco y un halo para un radio inicial normalizado $\tilde{R} = 0.4$. El momento angular normalizado es $\tilde{l}_z = 0.24563749$. Se considera un halo de materia con razón de masa $\tilde{M} = 1$ y cuyos parámetros de longitud son: $\tilde{a} = 1$, $\tilde{b} = 10$. La órbita de color azul corresponde a la perturbación de la órbita circular $\tilde{R} = 0.4$, con el valor de la perturbación dado por $\delta\tilde{R} = 0.01$.

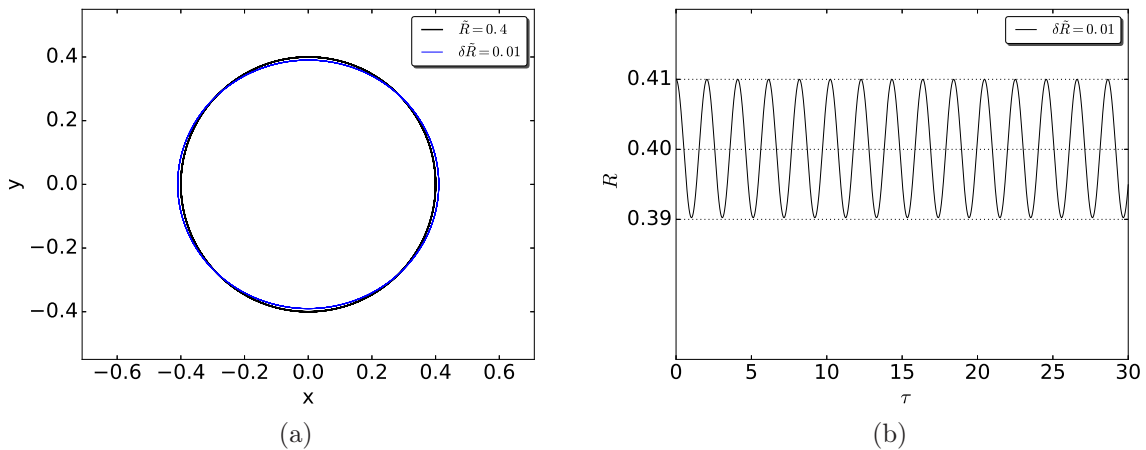


Figura 2.19: La órbita de color negro corresponde al movimiento circular de una partícula de prueba, en el potencial gravitacional de un disco y un halo, para un radio inicial normalizado $\tilde{R} = 0.9$. El momento angular normalizado es $\tilde{l}_z = 1.24337036$. Se considera un halo de materia con razón de masas $\tilde{M} = 1$ y cuyos parámetros de longitud están dados por $\tilde{a} = 1$ y $\tilde{b} = 20$. La órbita de color azul corresponde a la perturbación radial, $\delta\tilde{R} = 0.01$, de la órbita circular $\tilde{R} = 0.9$.

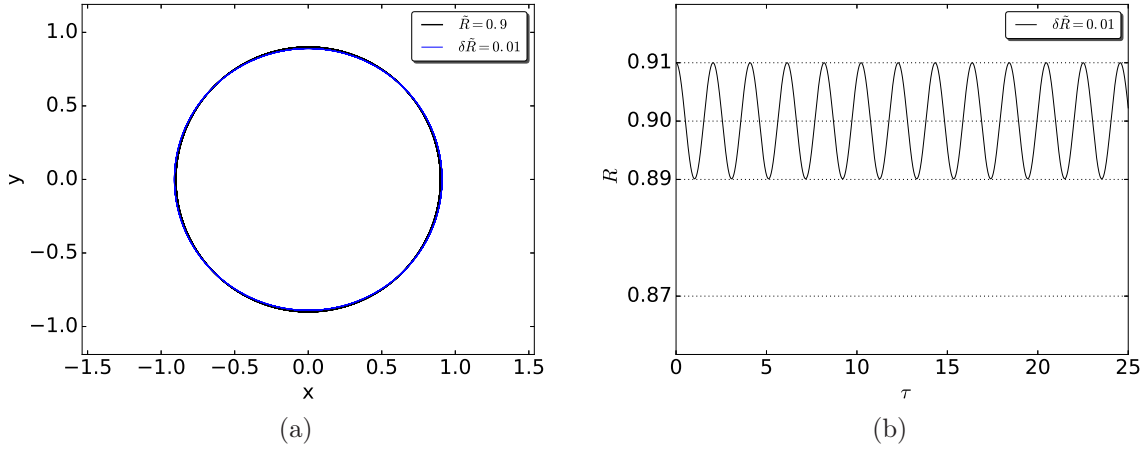


Figura 2.20: La órbita de color negro corresponde al movimiento circular de una partícula de prueba, en el potencial gravitacional de un disco y un halo, para un radio inicial normalizado $\tilde{R} = 1.5$. El momento angular normalizado es $\tilde{l}_z = 1.32986735$. Se considera un halo de materia con razón de masas $\tilde{M} = 1$ y cuyos parámetros de longitud están dados por $\tilde{a} = 1$ y $\tilde{b} = 20$. La órbita de color azul corresponde a la perturbación radial, $\delta\tilde{R} = 0.01$, de la órbita circular $\tilde{R} = 1.5$.

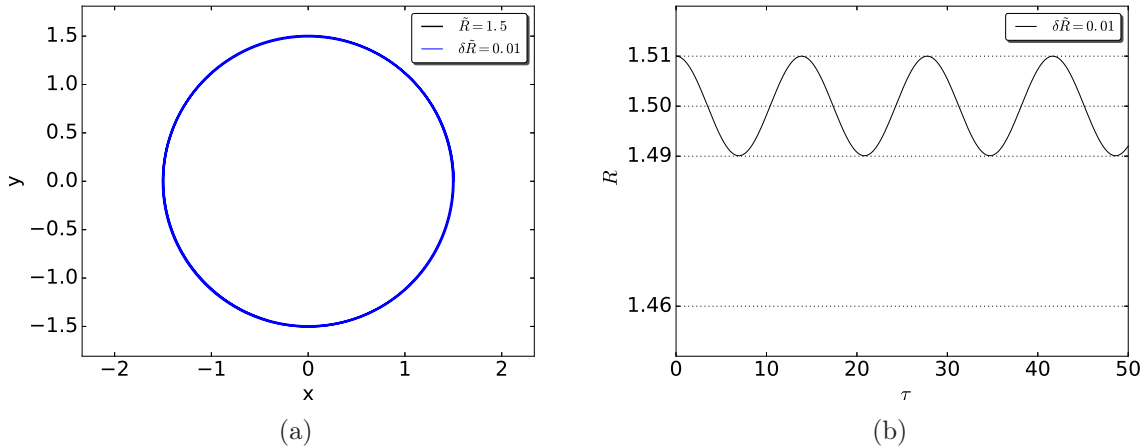
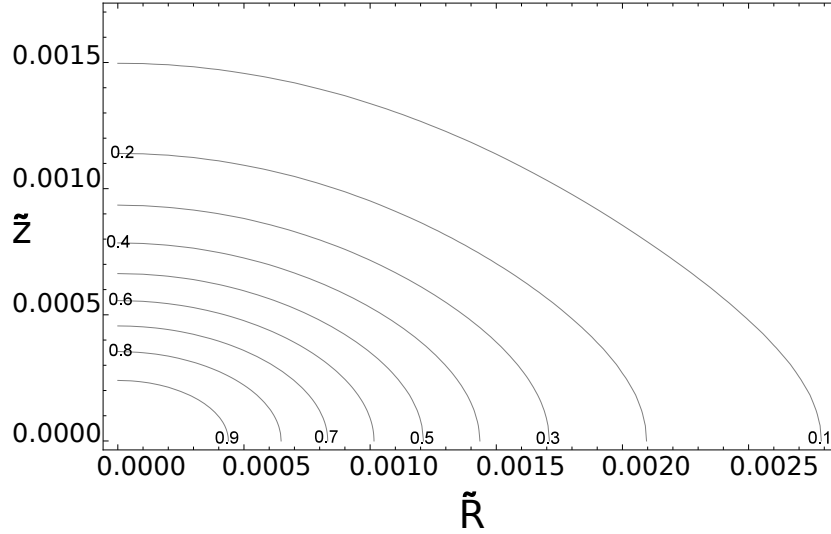


Figura 2.21: Contornos de densidad normalizados para el halo de menor extensión. La razón entre las escalas de longitud del halo y el disco es $\tilde{a} = a_h/a_d = 0.001$ y la razón entre el parámetro del halo y el disco es $\tilde{b} = 0.001$.



SECCIÓN 2.2

ESTUDIO DE HALOS PEQUEÑOS

Las cantidades físicas que se estudian en esta sección se basan en los efectos producidos por halos de pequeña escala, comparados con el radio del disco. Con el ánimo de dar una explicación sobre la extensión de estos halos se plantea el siguiente argumento: si se traza un contorno cuya densidad es $\tilde{\rho}(R) = 0.1\tilde{\rho}_0$, donde $\tilde{\rho}_0 = \tilde{\rho}(R = 0, \tilde{z} = 0)$, el mayor porcentaje de materia del halo se encuentra dentro de este contorno de densidad. En las figuras 2.21, 2.22 y 2.23 se observan los halos considerados como pequeños, desde el más pequeño, menor valor del parámetro \tilde{b} , hasta el más grande, mayor valor de \tilde{b} . La forma de los halos va desde el más aplanado, $\tilde{b} = 0.001$, hasta el más esférico, $\tilde{b} = 0.1$.

2.2.1 Condición de órbita circular

El análisis de la COC (1.40), para el caso de halos pequeños, se realizó a partir de los cambios observados en las curvas de las figuras 2.24, 2.25 y 2.26. Lo que se observa en la figura 2.24 es un incremento en la magnitud de cada una de las curvas, desde el origen de coordenadas, lo cual coincide con el hecho que el mayor porcentaje de la

Figura 2.22: Contornos de densidad normalizados. La razón entre las escalas de longitud del halo y el disco es $\tilde{a} = a_h/a_d = 0.001$ y la razón entre el parámetro del halo y el disco es $\tilde{b} = 0.01$.

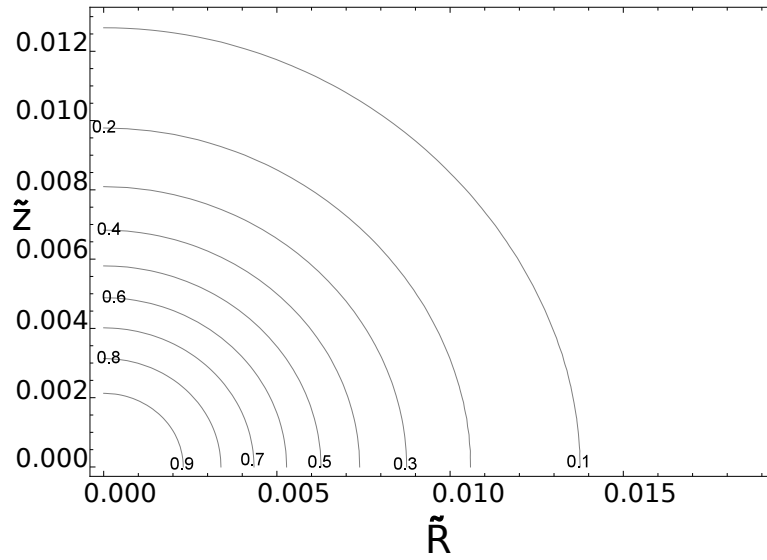
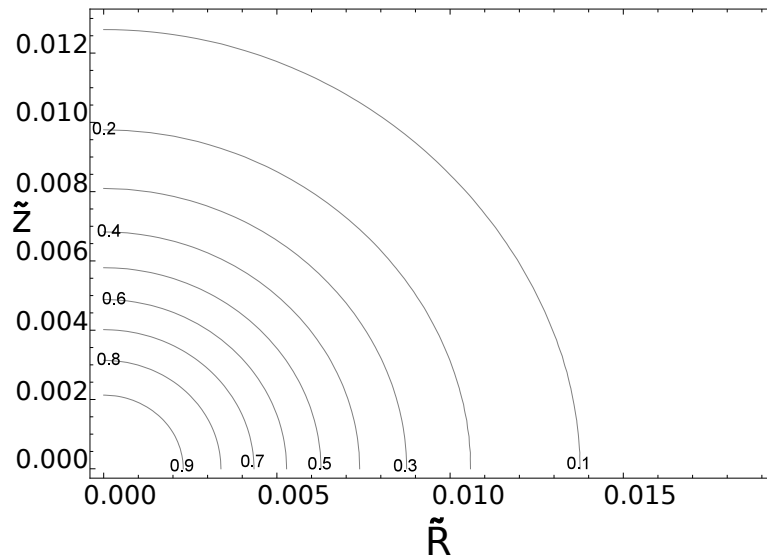


Figura 2.23: Contornos de densidad normalizados. La razón entre las escalas de longitud del halo y el disco es $\tilde{a} = a_h/a_d = 0.001$ y la razón entre el parámetro del halo y el disco es $\tilde{b} = 0.1$.



materia de cualquiera de los halos se encuentra en pequeñas regiones al interior del disco (ver contornos de densidad de las figuras 2.21, 2.22 y 2.23), donde el halo de menor tamaño, $\tilde{b} = 0.001$, es el que representa el mayor cambio sobre la curva, línea a trozos. El efecto producido por la variación del parámetro $\tilde{b} = 0.001, 0.01, 0.1$, mientras se mantiene $\tilde{a} = cte = 0.001$, se observa a distancias inferiores que el radio del disco, para distancias más grandes las curvas se solapan unas sobre otras y la diferencia de magnitud entre ellas es imperceptible.

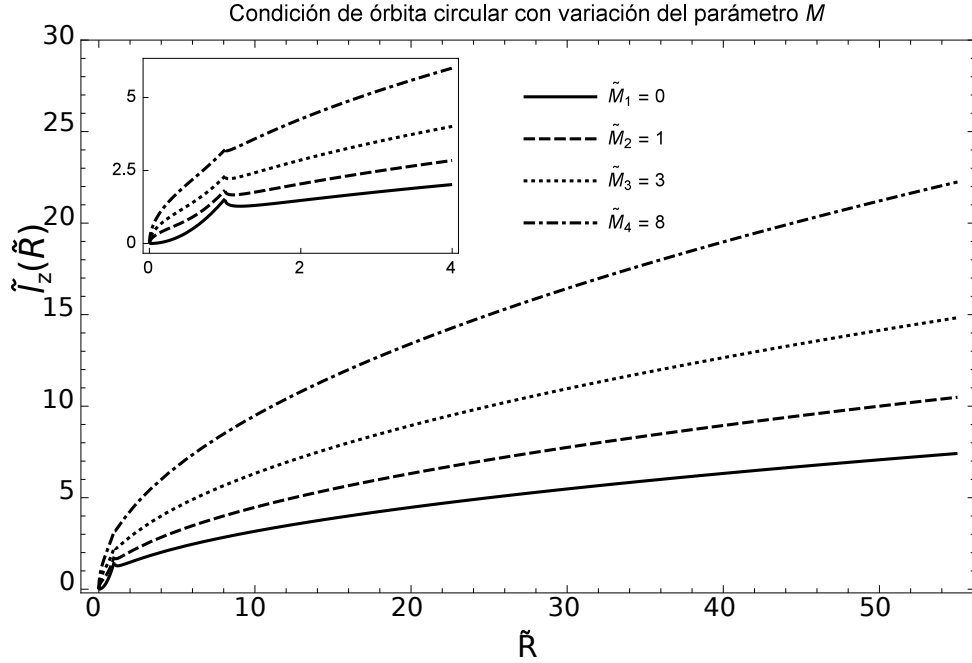
En la figura 2.25 se analiza el efecto producido sobre la COC, cuando se varía el parámetro $\tilde{b} = 0.001, 0.01, 0.1$, pero esta vez los halos son mucho más masivos, tal que la razón de masas entre el halo y el disco es $\tilde{M} = 7$. En este caso el mayor porcentaje de la masa de cada uno de los halos está concentrado en una región mucho más pequeña que el radio del disco. Esta vez el incremento en el momento angular, debido a cada uno de los halos, es muy grande en comparación con la curva que sólo tiene en cuenta el potencial gravitacional del disco. Los cambios en la COC, por variaciones del parámetro \tilde{b} , se pueden distinguir al interior del disco como se observa en el inset de la figura 2.25, en el que nuevamente el halo de menor tamaño, $\tilde{b} = 0.001$, es el que genera el mayor incremento en la magnitud del momento angular.

Ahora bien, en la figura 2.26 se observa el cambio sobre la COC cuando se analiza el efecto de la masa del halo, $\tilde{M} = 0, 1, 3, 8$. Se ha elegido el halo de menor tamaño (ver contornos de densidad de la figura 2.21). Lo que se observa es que las curvas no tienden a solaparse a grandes distancias ya que esto ocurre cuando los halos son de igual masa.

2.2.2 Comportamiento del potencial efectivo en función de los parámetros del halo

Es muy importante conocer los cambios que ocurren en el potencial efectivo, cuando se incluye dentro de un modelo de disco un halo de materia, el cual puede tener variedad de formas, tamaños y masas. Por ejemplo, en la figura 2.27 se analiza el efecto producido en el potencial efectivo cuando se realizan variaciones del parámetro $\tilde{b} = 0.001, 0.5, 1$, lo cual implica obtener halos de diferente tamaño y forma. Donde se utilizaron dos masas diferentes, $\tilde{M} = 3$ y $\tilde{M} = 7$, para analizar el comportamiento asintótico. Lo que se observa es que a medida que el halo se hace más pequeño, disminuyendo la magnitud de \tilde{b} , se puede ver el incremento en la profundidad del pozo de potencial, donde los pozos más profundos se obtuvieron con el parámetro $\tilde{b} = 0.001$. Por otra parte, se puede observar que los potenciales correspondientes a una misma razón de masas \tilde{M} convergen a una misma curva para grandes distancias. Por otra parte, la curva correspondiente al potencial efectivo del disco tiende a cero con mayor rapidez

Figura 2.26: En esta gráfica se pueden observar los cambios sobre la condición de órbita circular en función de la variación del parámetro \tilde{M} , en la que se ha escogido el halo más pequeño. Donde $\tilde{a} = 0.001$ y $\tilde{b} = 0.001$.



y su pozo de potencial es de menor profundidad que la observada en los potenciales efectivos que incluyen un disco y un halo de materia.

En la figura 2.28 se analiza el efecto sobre el potencial efectivo cuando se varía la masa del halo. Lo que se observa es un aumento en la profundidad del pozo de potencial a medida que se incrementa la masa del halo $\tilde{M} = 0, 1, 3, 8$, teniendo en cuenta que se han mantenido constantes los parámetros del halo, $\tilde{a} = 0.001$ y $\tilde{b} = 0.001$, en otras palabras, los mismos contornos de densidad. En el inset de la figura 2.28 se puede observar que a grandes distancias las líneas permanecen separadas entre sí sin solaparse, esto es así puesto que la masa de los halos es diferente y por lo tanto su comportamiento asintótico también lo debe ser.

2.2.3 Análisis de estabilidad para órbitas circulares

Las zonas de inestabilidad para halos pequeños se pueden verificar a partir de la COC (1.40), en las figuras 2.24, 2.25 y 2.26. En cada una de las tres figuras se puede observar una pequeña región a partir del radio del disco $\tilde{R} = 1$, con pendiente negativa, la cual es considerada como una zona de inestabilidad, según lo indica el criterio (2.1). El

Figura 2.27: En esta gráfica se observa el cambio en el potencial efectivo cuando se varía el parámetro \tilde{b} , teniendo en cuenta halos de pequeña escala, comparada con el tamaño del disco. Se muestran dos grupos de parámetros con una razón de masas diferente: $\tilde{M} = 3$ y $\tilde{M} = 7$.

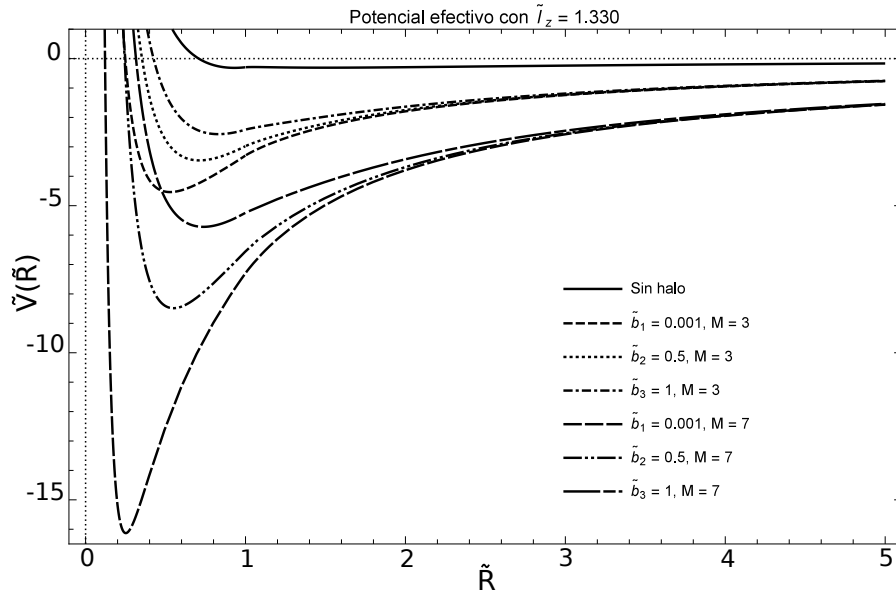


Figura 2.28: En esta gráfica se observa el cambio en el potencial efectivo en función del parámetro \tilde{M} , que representa la razón entre la masa del halo y la masa del disco.

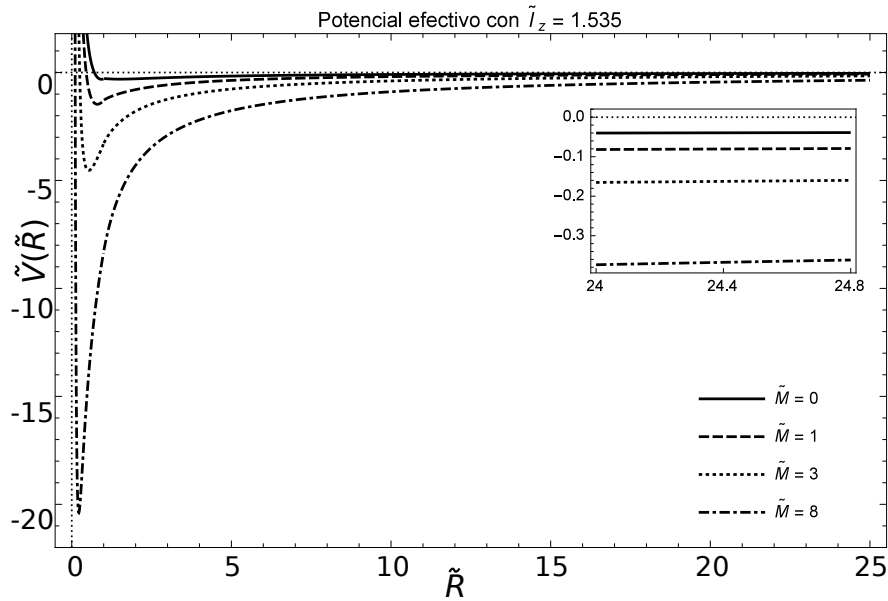
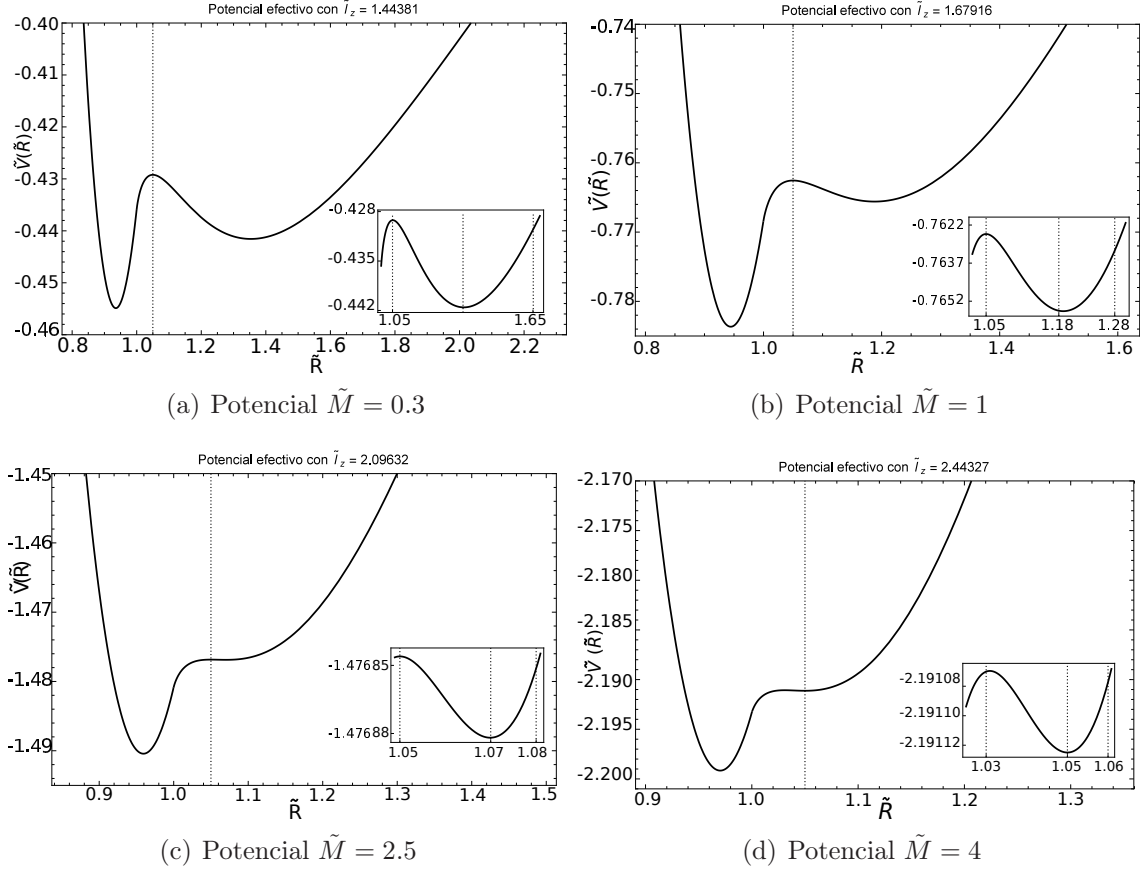


Figura 2.29: Potenciales efectivos para halos pequeños con parámetros $\tilde{a} = 0.001$ y $\tilde{b} = 0.001$. En las gráficas a) , b), c) y d) el interés radica en la evolución del punto crítico del potencial efectivo, máximo local en $\tilde{R} = 1.05$, a medida que se incorporan halos más masivos. **(a)** Pozo de mayor extensión y profundidad a la derecha de $\tilde{R} = 1.05$. **(b)** Potencial dos **(c)** Pozo de menor extensión y profundidad **(d)** En este potencial el punto crítico es un mínimo local, lo cual lo convierte en un punto de equilibrio estable, mientras la perturbación sea pequeña.



estudio de la zona de inestabilidad se realizó para el radio $\tilde{R} = 1.05$, observando el comportamiento de este punto crítico en los potenciales efectivos de la figura 2.29. A partir de estos potenciales se puede ver que a medida que aumenta la razón de las masas \tilde{M} , entre el halo y el disco, el pozo de potencial a la derecha del máximo local, $\tilde{R} = 1.05$, va disminuyendo en tamaño y profundidad, ver figuras 2.30(a), 2.30(b) y 2.30(c). Cuando la razón de las masas es $\tilde{M} = 4$, el punto crítico que previamente era un máximo local, ahora se encuentra en un mínimo local, ver figura 2.30(d), tal que perturbaciones pequeñas implican estabilidad, puesto que la partícula se queda oscilando en torno al punto $\tilde{R} = 1.05$.

2.2.4 Solución numérica de las ecuaciones de movimiento

Se resolvieron las ecuaciones de movimiento (2.2), (2.3) y (2.4), teniendo en cuenta el valor del momento angular, \tilde{l}_z , dado por la condición de órbita circular (1.40). Las órbitas estudiadas en esta sección son las correspondientes a halos pequeños. Las primeras órbitas que se analizaron corresponden a la zona de inestabilidad, observar las regiones con pendiente negativa de las figuras 2.24, 2.25 y 2.26. En particular se analizó el efecto producido en la órbita, al realizar un pequeño incremento en la posición del punto crítico, a medida que se aumenta la masa del halo de materia.

Inicialmente se analizó el comportamiento de las órbitas en la región de inestabilidad a medida que se incrementa la masa de los halos de materia. Lo que se observa en las órbitas perturbadas de las figuras 2.30, 2.31, 2.32 y 2.33 es que la oscilación al exterior del radio inicial, $\tilde{R} = 1.05$, va disminuyendo en amplitud a medida que el halo se hace cada vez más masivo. En otras palabras, el conjunto de trayectorias de la partícula perturbada, después de varios periodos, forman una especie de anillo al exterior del disco, el cual se hace más delgado a medida que aumenta la masa del halo. Finalmente, en la figura 2.33 se observa que la trayectoria perturbada oscila a ambos lados del radio inicial, $\tilde{R} = 1.05$, con una amplitud casi imperceptible. Quiere decir que este punto ahora es estable bajo pequeñas perturbaciones, ya que el pozo de potencial en el que se encuentra es un mínimo local de muy poca profundidad, como se puede verificar en el potencial efectivo de la figura 2.30(d).

En la región de estabilidad interior al radio del disco, aplicar el criterio de estabilidad (2.1) en la COC de las figuras 2.24, 2.25 y 2.26, también se generaron órbitas circulares y se perturbaron tales órbitas para verificar su estabilidad. Por ejemplo, en la figura 2.34 se observa la órbita de radio $\tilde{R} = 0.5$, junto con la trayectoria generada después de realizar una pequeña perturbación de $\delta\tilde{R} = 0.01$, donde los parámetros del halo son $\tilde{a} = 0.001$, $\tilde{b} = 0.001$ y $\tilde{M} = 6$, con una distribución de masa como se observa en la figura 2.21. El conjunto de trayectorias genera un anillo delgado cuyo centro es la trayectoria circular, verificando de esta manera la estabilidad de esta órbita.

Ahora bien, también se obtuvo una órbita circular en un punto crítico estable en $\tilde{R} = 1.5$, cuya distancia es mayor que el radio del disco, tal resultado se puede ver en la figura 2.35. Los parámetros correspondientes al halo de materia son $\tilde{a} = 0.001$, $\tilde{b} = 0.001$ y $\tilde{M} = 6$. Luego de realizar la perturbación, $\delta\tilde{R} = 0.005$, la órbita perturbada describe una oscilación con respecto al radio, lo cual muestra la estabilidad del punto crítico, tal resultado es consistente con el criterio de estabilidad (2.1) aplicado a la COC en las figuras 2.24, 2.25 y 2.26.

Figura 2.30: En la figura se puede observar la órbita circular de radio $\tilde{R} = 1.05$ en presencia de un halo como el observado en la figura (2.21), cuya razón de masa es $\tilde{M} = 0.3$ y sus parámetros están dados por $\tilde{a} = 0.001$ y $\tilde{b} = 0.001$.

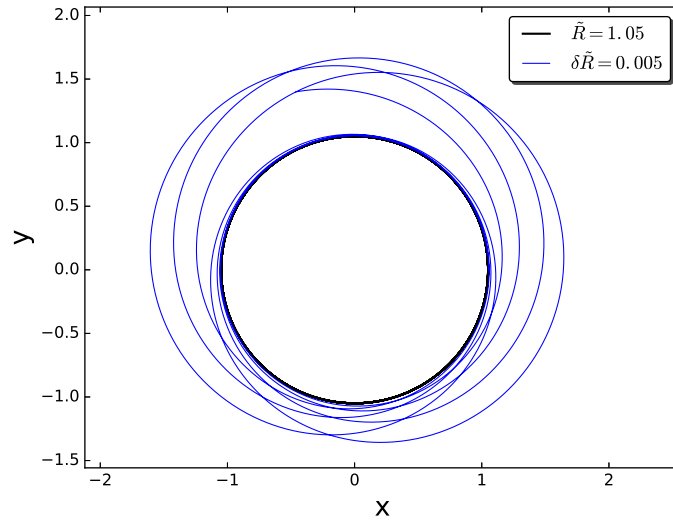


Figura 2.31: En la figura se puede observar la órbita circular de radio $\tilde{R} = 1.05$ en presencia de un halo como el observado en la figura (2.21), cuya razón de masa es $\tilde{M} = 1$ y sus parámetros están dados por $\tilde{a} = 0.001$ y $\tilde{b} = 0.001$.

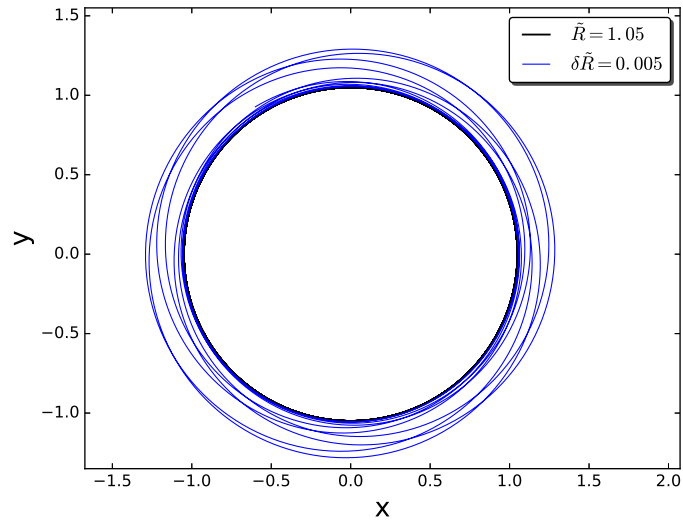


Figura 2.32: En la figura a) se puede observar la órbita circular de radio $\tilde{R} = 1.05$, con perturbación radial $\delta R = 0.005$, en presencia de un halo como el observado en la figura (2.21), cuya razón de masa es $\tilde{M} = 2.5$ donde sus parámetros son $\tilde{a} = 0.001$ y $\tilde{b} = 0.001$.

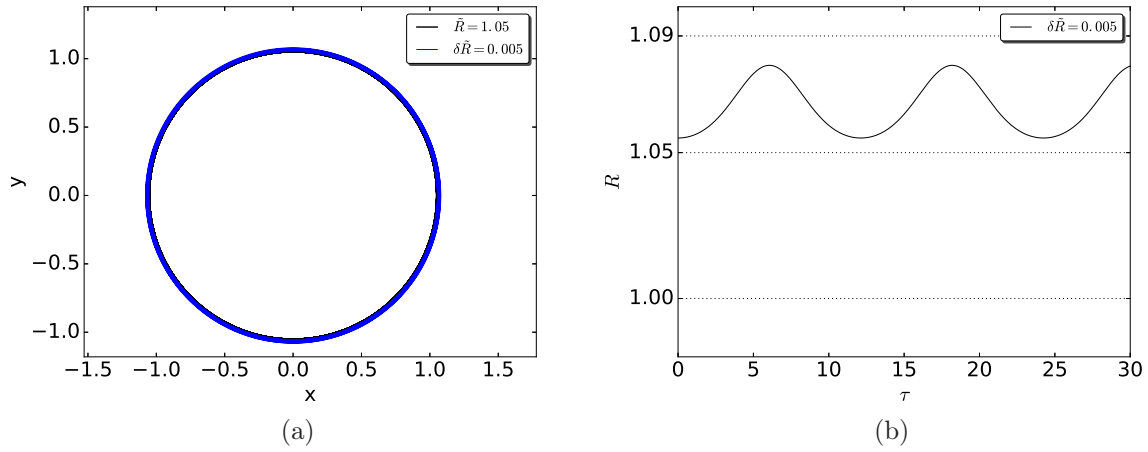


Figura 2.33: En la figura se puede observar la órbita circular de radio $\tilde{R} = 1.05$, que se encuentra en un punto crítico estable. En presencia de un halo como el observado en la figura (2.21), cuya razón de masa es $\tilde{M} = 4$ cuya razón de masa es $\tilde{M} = 2.5$ donde sus parámetros son $\tilde{a} = 0.001$ y $\tilde{b} = 0.001$.

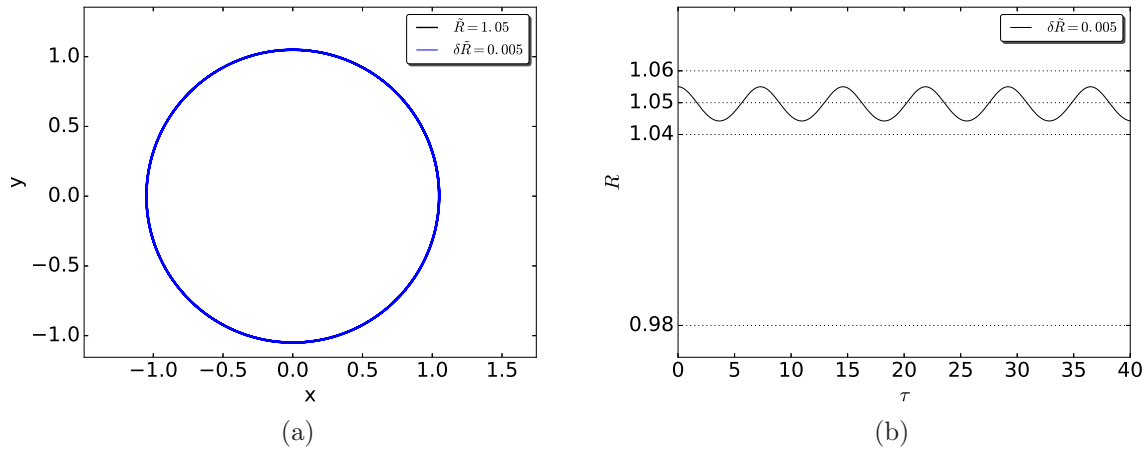


Figura 2.34: La órbita de color negro corresponde al movimiento circular de una partícula de prueba, en el potencial gravitacional de un disco y un halo, para un radio inicial normalizado $\tilde{R} = 0.5$. El momento angular normalizado es $l_z = 1.77403217$. Se considera un halo de materia con razón de masas $\tilde{M} = 6$ y cuyos parámetros de longitud están dados por $\tilde{a} = 0.001$ y $\tilde{b} = 0.001$. La órbita de color azul corresponde a la perturbación radial, $\delta\tilde{R} = 0.005$.

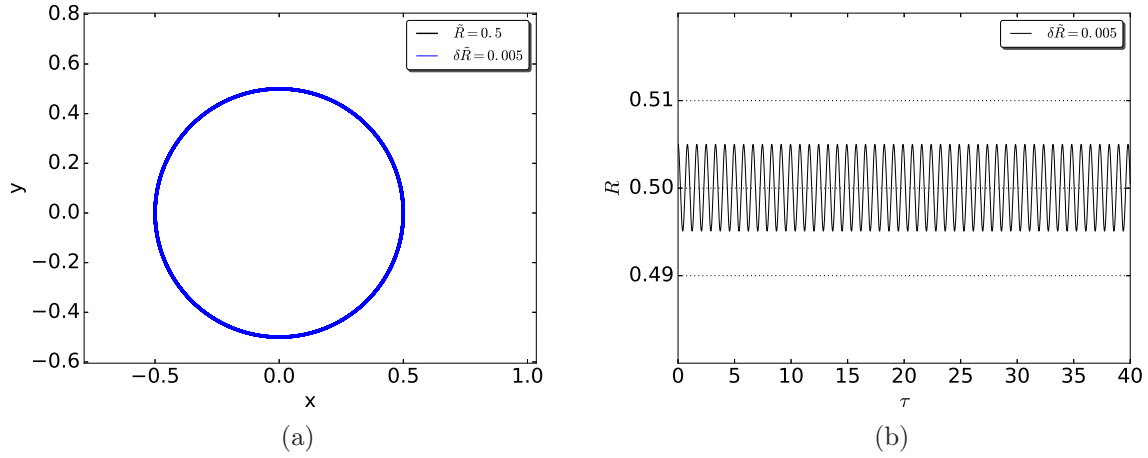
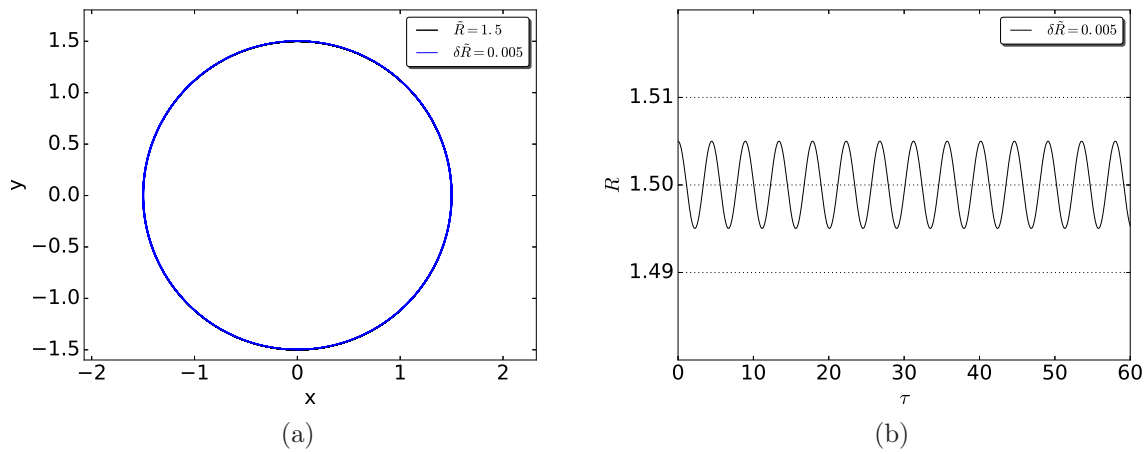


Figura 2.35: La órbita de color negro corresponde al movimiento circular de una partícula de prueba, en el potencial gravitacional de un disco y un halo, para un radio inicial normalizado $\tilde{R} = 0.5$. El momento angular normalizado es $l_z = 3.28146014$. Se considera un halo de materia con razón de masas $\tilde{M} = 6$ y cuyos parámetros de longitud están dados por $\tilde{a} = 0.001$ y $\tilde{b} = 0.001$. La órbita de color azul corresponde a la perturbación radial, $\delta\tilde{R} = 0.005$.



CAPITULO 3

CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó un estudio en el cual se analizó el efecto producido por un halo tridimensional de materia, en superposición con un modelo de disco delgado finito. Se analizó el efecto producido por halos de gran extensión, más grandes que el radio del disco y el efecto producido por halos de menor tamaño que el disco. Estos efectos se analizaron en la condición de órbita circular (COC), en las regiones de estabilidad e inestabilidad de la COC y también el efecto de los diferentes halos en el potencial efectivo. Finalmente se observó las trayectorias de las partículas de prueba después de realizar perturbaciones a la posición radial, siendo esta posición un punto crítico del potencial efectivo, es decir, un punto donde la órbita es circular.

En uno de los resultados más destacados de este trabajo de investigación se encontró que la zona de inestabilidad, para el modelo de disco galáctico y halo escogido, disminuye en extensión a medida que se introducen halos cada vez más masivos. Esto se evidenció con la transición de un punto crítico, en la posición $\tilde{R} = 1.05$, de la zona de inestabilidad a la zona de estabilidad después de incrementar la masa del halo. Esta transición también depende del tamaño del halo, tal que para halos más grandes se requiere un mayor aumento de su masa para que el punto crítico pueda realizar esta transición.

Con respecto al estudio realizado sobre la COC, se encontró que cuando se introduce un halo de materia en superposición con un disco delgado finito, ocurre un incremento en el momento angular a lo largo de la curva dada por COC que depende del tamaño, la forma y la razón de masas entre el halo y el disco. Por ejemplo, en el caso de halos más pequeños que el radio del disco y con una razón de masas que puede ser

más pequeña que la unidad, se observa que el momento angular sufre un incremento en su magnitud desde el origen de coordenadas. Donde el incremento en la magnitud del momento angular se compara con el perfil de la COC, al tener en cuenta sólo el potencial gravitacional del disco delgado.

Otro resultado importante tiene que ver con el comportamiento asintótico observado en la COC. Lo que se encontró para halos de gran tamaño, es que al realizar variaciones del tamaño del halo, manteniendo la masa constante, ocurren cambios en la magnitud del momento angular, distinguibles de la curva asociada solamente a un disco, a distancias del orden del radio del disco e incluso más lejos. Sin embargo, a medida que la distancia aumenta lo suficiente, todas las curvas tienden a solaparse sobre una misma curva. Esto se debe a que la masa es igual para todos los halos y la rapidez a la que se manifiesta el efecto de ésta sobre la COC depende del tamaño del halo.

Con respecto al potencial efectivo, se analizó el efecto producido por: el tamaño del halo, la magnitud del momento angular y la razón de masas entre el halo y el disco. Se observó que el efecto producido por un halo de materia de gran extensión y poco masivo es que entre mayor es el tamaño del halo, menor es el incremento en la profundidad del pozo de potencial, mientras se mantiene la masa del halo constante. Ahora bien, cuando se analizó el efecto producido por el momento angular sobre el potencial efectivo se encontró que a medida que incrementa la magnitud del momento angular ocurre una disminución en la profundidad del pozo de potencial, tal comportamiento es el esperado ya que el término centrífugo se hace más dominante para mayores valores del momento angular. Con respecto al efecto producido por la masa del halo, se encontró que para el caso de halos pequeños, comparados con el radio del disco, se encontró que la profundidad de los pozos de potencial fue mayor para los halos más masivos.

En el estudio realizado sobre estabilidad de órbitas circulares se agrupan los resultados en tres regiones de estabilidad para la COC, la zona al interior del disco, la zona inestable dada por la pendiente negativa de la COC y la zona estable exterior al radio del disco, posterior a la zona inestable. Con respecto a la región estable, al interior del disco, se emplearon halos de gran extensión y de pequeña extensión, masivos y poco masivos y se observaron pequeñas oscilaciones en torno a la órbita circular, para cada una de las configuraciones de disco y halo analizadas, después de realizar una pequeña perturbación al radio inicial.

En la región de inestabilidad se generaron órbitas circulares en una misma posición para diferentes valores de masa del halo y se encontró que la estabilidad del modelo empezó a aumentar con el incremento de la masa del halo, ya que la región de inestabilidad se iba reduciendo hasta que el punto crítico pasó de inestable a estable. Se aclara que no se buscó el valor mínimo de la masa del halo necesaria para que el punto pasara de

inestable a estable, lo que se hizo fue escoger un valor cada vez mayor de la masa del halo hasta hacer que el punto fuese estable. Otra característica observada en el caso de órbitas inestables es que cuando la masa de los halos es pequeña, la oscilación de las órbitas perturbadas, al exterior del radio inicial, alcanza amplitudes grandes para los valores más pequeños de la masa del halo.

De igual manera se analizó la estabilidad de las órbitas al exterior del disco, en la zona estable, y se verificó la estabilidad de éstas tanto para halos de pequeña escala, gran escala, masivos y con poca masa. Lo que se observó en cada una de las órbitas perturbadas fue una pequeña oscilación en torno al radio de la órbita circular. De los resultados obtenidos para las órbitas perturbadas, en la región estable al exterior del disco, se encontró que ninguna pasó de estable a inestable debido a la presencia del halo. Es un resultado esperado puesto que la pendiente de la COC es positiva en esta región, lo cual implica estabilidad en la región, y el efecto de la masa del halo es incrementar el valor de esta pendiente.

BIBLIOGRAFÍA

- BINNEY, J. and TREMAINE, S. (2008). *Galactic Dynamics: Second Edition*. Princeton University Press.
- CARROLL, B. W. and OSTLIE, D. A. (2006). *An introduction to modern astrophysics and cosmology*. Pearson International Edition.
- CONTOPOULOS, G. and PAPAYANNOPOULOS, T. (1980). Orbits in weak and strong bars. *Astronomy and Astrophysics*, 92:33–46.
- CORTÉS-SERRANO, F. (2014). Pares potencial densidad para modelos de galaxias compuestos de discos delgados y halos esferoidales. Trabajo de Grado, Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.
- GOLDSTEIN, H. (1965). *Classical mechanics*. Pearson Education India.
- GONZÁLEZ, G. A. and REINA, J. I. (2006). An infinite family of generalized kalnajs discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 371(4):1873–1876.
- GRIVNEV, E. (1988). Galactic star orbits in the post epicyclic approximation. *Soviet Astronomy*, 32:139.
- JOSÉ, J. V. and SALETAN, E. J. (1998). *Classical dynamics: a contemporary approach*. Cambridge University Press.
- KALNAJS, A. (1979). A better epicyclic approximation for plane galactic orbits. *The Astronomical Journal*, 84:1697–1700.
- KALNAJS, A. J. (1972). The equilibria and oscillations of a family of uniformly rotating stellar disks. *The Astrophysical Journal*, 175:63.
- MARTÍNEZ, S. M. (2015). Estudio de órbitas tridimensionales en campos gravitacionales axialmente simétricos. Trabajo de Grado, Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.

- MIYAMOTO, M. and NAGAI, R. (1975). Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 27:533–543.
- NIETO NARVÁEZ, O. A. (2015). Estudio numérico de la estabilidad de órbitas circulares sobre el plano ecuatorial en potenciales axialmente simétricos. Trabajo de Grado, Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.
- NINKOVIC, S. and JOVANOVIĆ, B. (2009). On orbits for a particular case of axial symmetry. *Serbian Astronomical Journal*, 178:29–37.
- PATSIĆ, P. (2006). The stellar dynamics of spiral arms in barred spiral galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 369(1):L56–L60.
- PFENNIGER, D. (1984). The 3d dynamics of barred galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 134:373–386.
- PFENNIGER, D. (1990). Stability of the lagrangian points in stellar bars. *Astronomy and Astrophysics*, 230:55–66.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, t. A., VETTERLING, t. T., FLANNERY, t. P., LLOYD, C., and REES, P. (1993). Book review: Numerical recipes in fortran: the art of scientific computing/cambridge u press. *The Observatory*, 113:214.
- RAMOS-CARO, J., LÓPEZ-SUSPES, F., and GONZÁLEZ, G. A. (2008). Chaotic and regular motion around generalized kalnajs discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 386(1):440–446.
- SAHA, P. (1992). Constructing stable spherical galaxy models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 254(1):132–138.
- VANDERVOORT, P. O. (1973). Resonant stellar orbits in spiral galaxies. *The Astrophysical Journal*, 180:739–758.