

f-ESTRUCTURAS EN VARIEDADES BANDERA

GLADYS PATRICIA ARDILA AMADO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2011

f-ESTRUCTURAS EN VARIEDADES BANDERA

GLADYS PATRICIA ARDILA AMADO

Trabajo presentado como requisito parcial para
optar al título de magister en matemáticas

Directora

Dra. SOFÍA PINZÓN DURÁN, Ph.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2011

*A Wilson y a nuestro hijo Sebastián lo más bello que nos ha
dado la vida*

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios, por ayudarme a terminar este proyecto y por las bendiciones y regalos que recibo día tras día.

A mi mamá y mi hermana, gracias por su amor, su apoyo y confianza incondicional en todas las etapas de mi vida.

Agradezco también a mi directora de tesis la Dra. Sofia Pinzón por su ayuda no sólo en el sentido académico sino también humano.

Gracias a los Directivos de la Universidad Pontificia Bolivariana porque su apoyo fue fundamental para realizar mis estudios de maestría.

También a los profesores: Godofredo, Graciela y Guillermo por motivar la realización de éste proyecto.

Gracias también a los Profesores y compañeros de la Maestría que han estado conmigo en este proceso de formación. Y a las secretarias de la escuela de matemáticas Claudia y Rosalba por estar siempre dispuestas a colaborarnos.

Muchas gracias.

RESUMEN

TÍTULO: f -ESTRUCTURAS EN VARIEDADES BANDERA*

AUTOR: GLADYS PATRICIA ARDILA AMADO**

PALABRAS CLAVES: Variedad bandera, grupos y álgebras de Lie, métrica invariante, f -estructura, digrafos, subálgebra de Cartan.

DESCRIPCIÓN:

El objetivo de este trabajo es hacer una extensión de la condición de variedad (1,2)-simpléctica al caso en que una f -estructura \mathcal{F} es considerada sobre una variedad bandera maximal \mathbb{F} , dotada de una métrica invariante. Una f -estructura \mathcal{F} es un endomorfismo del espacio tangente en un punto de una variedad, el cual satisface que $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$. Este estudio fue motivado por la relación que existe entre una f -variedad (1,2)-simpléctica y la existencia de aplicaciones armónicas mediante aplicaciones holomorfas.

Inicialmente son presentados algunos conceptos preliminares que permiten adentrarse en el lenguaje de los grupos y álgebras de Lie y de las variedades bandera. Se estudia también la relación entre estructuras casi-complejas y torneos. Posteriormente es considerado el caso especial de la variedad bandera maximal $\mathbb{F}(n)$ asociada al álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ y se da una descripción completa de las f -estructuras invariantes (1,2)-admisibles, analizando los casos $\mathbb{F}(2)$, $\mathbb{F}(3)$ y $\mathbb{F}(4)$, las f -estructuras localmente transitivas, los digrafos completamente no transitivos y por último se estudia el caso de la variedad bandera general, para concluir: una f -estructura invariante \mathcal{F} sobre $\mathbb{F}(n)$ es localmente transitiva si, y solamente si, ella es (1,2)-admisibile, esto es, existe una métrica ds_Λ^2 tal que $(\mathbb{F}(n), \Lambda, \mathcal{F})$ es (1,2)-simpléctica.

Por último se muestran las características (subálgebra de Cartan y sistema simple de raíces) del álgebra de Lie semisimple de dimensión finita B_l . También se considera la variedad bandera maximal asociada a las álgebras de Lie de rango menor o igual a tres, con una métrica y una f -estructura invariante, se demuestra la equivalencia entre localmente transitiva y (1,2)-simpléctica para los casos mencionados demostrando caso por caso.

*Tesis de Grado

**FACULTAD DE CIENCIAS, ESCUELA DE MATEMÁTICAS, MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS.
Dra. SOFÍA PINZÓN DURÁN, Directora.

ABSTRACT

TITLE: f -STRUCTURES ON FLAG MANIFOLD*

AUTHOR: GLADYS PATRICIA ARDILA AMADO**

KEYWORDS: Flag manifolds, Lie groups and algebras, Invariant metric, f -structure, digraphs, Cartan subalgebra.

DESCRIPTION:

The goal of this work is to make an extent of the condition (1,2)-symplectic to the case in which an f -structure \mathcal{F} is considered on a maximal flag manifold \mathbb{F} endowed with an invariant metric. An f -structure \mathcal{F} is an endomorphism of the tangent space at a point of a manifold, which satisfies that $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$. This study was motivated by the relation between an f -manifold (1,2)-symplectic and the existence of symplectic harmonic applications by holomorphic applications.

Initially, Some preliminary concepts that allow us to get into the language of Lie groups and algebras and flag manifolds are introduced. Also the relation between almost-complex structures and tournaments are studied. Then it is considered the special case of the maximal flag manifold $\mathbb{F}(n)$ associated with $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, endowed with an invariant f -structure \mathcal{F} and it is given a complete description of f -structures \mathcal{F} (1,2)-admisibles analyzing cases $\mathbb{F}(2)$, $\mathbb{F}(3)$ and $\mathbb{F}(4)$, the f -structures locally transitives, completely non-transitive digraphs and the general flag manifold. To conclude: an invariant f -structure \mathcal{F} on $\mathbb{F}(n)$ is locally transitive if and only if it is (1,2)-admissible, that is, there is a metric ds_{Λ}^2 such that $(\mathbb{F}(n), \Lambda, \mathcal{F})$ is (1,2)-symplectic.

Finally the characteristics (Cartan subalgebra and simple system of roots) semisimple Lie algebra of finite dimension B_l are shown. Also it is considered the maximal flag manifold associated to Lie algebras of rank less than or equal to three with a metric and an invariant f -structure, demonstrating the equivalence between locally transitive and (1,2)-symplectic for the above cases showing case by case.

*Graduate dissertation.

**FACULTY OF SCIENCES, MATHEMATICS SCHOOL, MATHEMATICS MASTER
Dra. SOFÍA PINZÓN DURÁN, Directora.

Tabla de Contenido

Introducción	12
1. Preliminares	15
1.1. Grupo de Lie	15
1.2. Álgebra de Lie	16
1.3. Representación Adjunta	19
1.4. Álgebras de Lie Simples y Nilpotentes	20
1.5. Raíces	21
1.6. Álgebras Semisimples	25
1.7. Variedades bandera	26
1.8. Métricas Invariantes	29
1.9. Conexión afín	31
1.10. Conexión Riemanniana en \mathbb{F}	33
1.11. Estructuras Casi-complejas Invariantes	34
1.12. Forma de Kähler	35
1.13. Torneos y Estructuras Casi-complejas (1,2)-Admisibles	39
2. f-ESTRUCTURAS	42
2.1. f -Estructuras	42

2.2.	Aplicaciones armónicas y aplicaciones f -holomorfas	43
2.3.	f -Estructuras Invariantes en $\mathbb{F}(n)$	44
2.4.	Forma de Kähler extendida a f -Estructuras	47
3.	EL CASO A_n	49
3.1.	Los casos $\mathbb{F}(2)$, $\mathbb{F}(3)$ y $\mathbb{F}(4)$	52
3.2.	f -Estructuras Localmente Transitivas	56
3.3.	Digrafos Completamente No Transitivos	59
3.4.	El Caso General	60
4.	Álgebras de Lie de Rango tres	63
4.1.	Álgebra de Lie de tipo B_l	63
4.2.	Transitividad Local General	69
4.3.	El Caso $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$ con \mathbb{F} asociada al álgebra B_3	71
4.4.	El Caso $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$ con \mathbb{F} asociada al álgebra G_2	100
	Conclusiones	106
	Bibliografía	107

Lista de Figuras

3.1. Condiciones de métrica	52
3.2. Clases de isomorfismos para $n = 2$	52
3.3. clases de isomorfismos para $n = 3$	53
3.4. clases de isomorfismos para $n = 4$	54
3.5. clases de isomorfismos para $n = 4$	55
3.6. clases de isomorfismos para $n = 4$	56

Introducción

En este trabajo estudiaremos la extensión de la condición de variedad (1,2)-simpléctica al caso en que una f -estructura \mathcal{F} es considerada sobre una variedad bandera maximal \mathbb{F} , dotada de una métrica invariante. Una f -estructura \mathcal{F} es un endomorfismo del espacio tangente en un punto de una variedad, el cual satisface que $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$. Claramente la noción de f -estructura es una extensión de la noción de estructura casi-compleja, esto es, un endomorfismo J del espacio tangente en un punto de una variedad tal que $J^2 = -1$. En [8] y [25], se estudió las condiciones necesarias y suficientes para que la variedad bandera maximal geométrica $\mathbb{F}(n)$ dotada de una métrica invariante ds_{Λ}^2 y una estructura casi-compleja invariante J sea (1,2)-simpléctica. Estudiaremos aquí los resultados obtenidos por Pinzón en su tesis doctoral [28] para las variedades bandera maximales asociadas a álgebras de Lie semisimples de rango menor o igual a tres.

Geoméricamente una variedad bandera es un espacio homogéneo $G/C(S)$, donde G es un grupo de Lie complejo semisimple y $C(S)$ es el centralizador de un toro (no necesariamente maximal). Cuando S es un toro maximal decimos que la variedad bandera es maximal y la denotamos por \mathbb{F} . Aquí consideraremos la variedad bandera maximal \mathbb{F} asociada a las álgebras de Lie semisimples finitas A_n , B_l y G_2 y siguiendo lo realizado en [28], estudiaremos las condiciones necesarias y suficientes para que la variedad sea una f -variedad (1,2)-simpléctica en el sentido definido por Black en [2].

Hemos organizado la presentación de nuestro estudio en cuatro capítulos así: En el primer capítulo presentaremos conceptos preliminares de la teoría de grupos y álgebras de Lie, necesarios para trabajar las variedades bandera que vamos a considerar. De la misma forma hacemos un recorrido por lo tratado en [8] con respecto a la relación entre estructuras casi-complejas y torneos (grafos dirigidos completos). También en éste capítulo estudiaremos las variedades bandera, y utilizando la combinatoria proveniente de los sistemas de raíces asociados al álgebra de Lie correspondiente, revisamos la expresión, en la base

de Weyl, de las estructuras casi-complejas invariantes, la métrica invariante considerada sobre la variedad, la conexión riemanniana y la forma de Kähler.

En el segundo capítulo presentaremos la motivación del estudio de f -estructuras, particularmente el teorema que aparece en Black [2] el cual se enuncia a continuación:

Teorema 0.1. *Sea $\phi : (M, g, J) \rightarrow (N, h, \mathcal{F})$ una aplicación tal que*

1. ϕ es f -holomorfa, esto es, $d\phi.J = \mathcal{F}.d\phi$,
2. M es co-simpléctica, esto es, $d^*(\omega) = 0$,
3. $(\nabla\mathcal{F})^{(1,1)} = 0$,

entonces ϕ es armónica.

Este teorema permite relacionar aplicaciones f -holomorfas con aplicaciones armónicas. Un tema interesante en la matemática consiste en encontrar ejemplos de aplicaciones armónicas por su aplicación en la Física, la Geometría, las Ecuaciones Diferenciales, etc.

Lo interesante de encontrar condiciones necesarias y suficientes para que $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$ sea f -variedad (1,2)-simpléctica, es porque, para encontrar aplicaciones armónicas se debe resolver un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal de orden dos, en tanto que encontrar aplicaciones f -holomorfas se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales de orden uno.

En el tercer capítulo estudiaremos el caso $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$, cuando \mathbb{F} está asociada al álgebra de Lie A_n , que corresponde al álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Aquí particularmente seguiremos lo realizado en [28], estableciendo las condiciones para que la variedad bandera $(\mathbb{F}(n), \Lambda, \mathcal{F})$, sea una f -variedad (1,2)-simpléctica. Para lo anterior analizaremos los casos $\mathbb{F}(2)$, $\mathbb{F}(3)$ y $\mathbb{F}(4)$, las f -estructuras localmente transitivas, los digrafos completamente no transitivos y por último se estudia el caso de la variedad bandera general, para concluir el resultado principal de este capítulo que es: una f -estructura invariante \mathcal{F} sobre $\mathbb{F}(n)$ es localmente transitiva si, y solamente si, ella es (1,2)-admisibles, esto es, existe una métrica ds_Λ^2 tal que $(\mathbb{F}(n), \Lambda, \mathcal{F})$ es (1,2)-simpléctica.

En el cuarto y último capítulo se hace un estudio del algebra de Lie semisimple finita de tipo B_l , en particular una representación de una subálgebra de Cartan, el sistema de raíces simples y la matriz de Cartan. Se estudian los conceptos de transitividad local en términos de raíces y en las dos últimas secciones se toma como base el artículo [9]

y se explicitan las f -estructuras y las métricas invariantes que se pueden definir en las variedades bandera maximales asociadas a las álgebras de lie de rango menor o igual que tres, de forma que, $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$ sea una f -variedad (1,2)-simpléctica.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos algunas nociones básicas que nos permitan adentrarnos en el lenguaje de las álgebras de Lie semisimples complejas de dimensión finita y algunos resultados existentes sobre la geometría de las variedades bandera.

Hacemos un recuento de los principales trabajos realizados alrededor del estudio de las estructuras casi-complejas invariantes y su relación con los torneos. Presentamos además las condiciones establecidas en este contexto para que la variedad bandera maximal clásica admita métricas invariantes de modo que la variedad bandera considerada sea $(1, 2)$ -simpléctica (ver, por ejemplo [7], [8], [9], [21] y [25]).

1.1. Grupo de Lie

Un **grupo de Lie** es una variedad diferenciable G con estructura de grupo, en la cual se ha definido una estructura diferenciable, esto es, las aplicaciones:

1. Producto: $G \times G \rightarrow G$, tal que $(x, y) \mapsto xy$, y
2. Inversa: $G \rightarrow G$, tal que $x \mapsto x^{-1}$,

son de clase C^∞ .

Un ejemplo imprescindible de un grupo de Lie es: $GL(n, \mathbb{R})$, el grupo de las transformaciones lineales invertibles de \mathbb{R}^n , o en otras palabras el grupo de las matrices invertibles $n \times n$. Este grupo es un subconjunto abierto de un espacio vectorial $M_n(\mathbb{R})$ de matrices

$n \times n$, y por tanto es una variedad diferenciable. Las operaciones de grupo son claramente diferenciables pues: el producto en el grupo $GL(n, \mathbb{R})$ es el producto usual de matrices. Si $X = (x_{ij})$ y $Y = (y_{ij})$ son matrices $n \times n$, entonces $Z = XY = (z_{ij})$, donde (z_{ij}) está dado por:

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik}y_{kj},$$

que es un polinomio de grado dos en las variables x_{ij}, y_{ij} y por tanto es una aplicación diferenciable.

La matriz inversa de $A = (a_{ij})$ puede ser escrita como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Cof}(A)^t$$

donde si denotamos por A_{ij} a la matriz que se obtiene de A eliminando la fila i y la columna j , la matriz cofactor (*cof*) tiene como entradas $(\text{Cof}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ (y por tanto un polinomio en los términos de A) y $\det A$ es un polinomio de los términos de A que no se anula. Se concluye que los términos de A^{-1} son funciones racionales sobre $GL(n, \mathbb{R})$, cuyos denominadores no se anulan, en consecuencia diferenciable. En definitiva $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

Asociado a un grupo de Lie se tiene la noción de Álgebra de Lie. La importancia del estudio de las álgebras para los grupos de Lie es que: las categorías de álgebras de Lie de dimensión finita y la de grupos de Lie conexos y simplemente conexos son equivalentes. Más aún, todo grupo de Lie conexo y simplemente conexo está completamente determinado, salvo isomorfismo, por su álgebra de Lie de campos de vectores invariantes a izquierda. El estudio de los grupos se reduce en gran medida al estudio de sus álgebras de Lie. El nexo entre un grupo y su álgebra de Lie está dado porque el espacio tangente al Grupo de Lie en la identidad tiene estructura de álgebra de Lie. Los ejemplos más importantes son grupos y álgebras de Lie de matrices, toda álgebra de Lie tiene un representante en su clase de isomorfismo que es un álgebra de Lie de matrices.

1.2. Álgebra de Lie

Un álgebra de Lie es un espacio vectorial \mathfrak{g} dotado de una operación producto llamada corchete o conmutador denotado por:

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. Bilinealidad, es decir, que para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ y $a, b \in \mathbb{K}$ se cumple que

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y].$$
2. Antisimétrica: $[X, Y] = -[Y, X]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.
3. Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Aquí \mathbb{K} es el campo escalar asociado a \mathfrak{g} como espacio vectorial. Un ejemplo de una álgebra de Lie es el siguiente:

Ejemplo: Sea $V = \mathbb{R}^3$, para $X, Y \in \mathbb{R}^3$ definimos: $[X, Y] = X \times Y$, esto es el Producto cruz o vectorial de dos vectores en \mathbb{R}^3 .

Demostración: Utilizando las propiedades del producto vectorial y el producto escalar tenemos:

i) Sean $X, Y \in \mathbb{R}^3$ y $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= (aX + bY) \times Z \\ &= (aX \times Z) + (bY \times Z) \\ &= a(X \times Z) + b(Y \times Z) \\ &= a[X, Z] + b[Y, Z] \end{aligned}$$

luego $[\cdot, \cdot]$ es bilineal.

ii) $[X, Y] = X \times Y = -Y \times X = -[Y, X]$.

Se cumple la antisimetría.

$$\begin{aligned} \text{iii) } [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] &= \\ &= X \times (Y \times Z) + Y \times (Z \times X) + Z \times (X \times Y) \\ &= Y(X \cdot Z) - Z(X \cdot Y) + Z(Y \cdot X) - X(Y \cdot Z) + X(Z \cdot Y) - Y(Z \cdot X) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego cumple la identidad de Jacobi. Por I, II y III, \mathbb{R}^3 con el corchete definido anteriormente es un álgebra de Lie. \square

Un álgebra de Lie se llama abeliana o conmutativa si $[X, Y] = 0$ para cualquier $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Definición 1.1. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Una subálgebra de Lie es un subespacio vectorial \mathfrak{h} de \mathfrak{g} que es cerrado por el corchete; esto es, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ cuando $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Claramente una subálgebra de Lie es un álgebra de Lie con la estructura heredada de la estructura de \mathfrak{g} . Veamos unos ejemplos de subálgebras de Lie.

Ejemplo: Sea $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ el espacio de todas las transformaciones lineales de un espacio vectorial de dimensión n en \mathbb{C} , es decir, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ es el álgebra de Lie de las matrices de tamaño $n \times n$. El corchete está dado por:

$$[X, Y] = XY - YX, \quad X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}).$$

Algunas subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ son:

1. $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : X + \bar{X}^t = 0\}$.
2. $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : \text{tr} X = 0\}$.
3. $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) : X + X^t = 0\}$.
4. $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{sl}(2l, \mathbb{C}) : XJ + JX^t = 0\}$, siendo J la matriz antisimétrica $2l \times 2l$ escrita en bloques de tamaño $l \times l$ como:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_{l \times l} \\ 1_{l \times l} & 0 \end{pmatrix}$$

donde 1 representa la matriz identidad de tamaño $l \times l$.

Definición 1.2. Un subespacio $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es un ideal si $\forall Y \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}, [X, Y] \in \mathfrak{h}$ esto es, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{h}$.

Es claro que todo ideal automáticamente es subálgebra. Mientras que no toda subálgebra es ideal. El $\{0\}$ y toda el álgebra \mathfrak{g} son ideales de \mathfrak{g} , llamados ideales triviales.

Una subálgebra \mathfrak{h} que es abeliana e ideal se llama ideal abeliano.

Una herramienta muy importante para el estudio de las álgebras de Lie, es la representación adjunta, para definirla es necesario presentar algunas nociones básicas sobre las representaciones.

1.3. Representación Adjunta

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie, V un espacio vectorial y $\mathfrak{gl}(V)$ el álgebra de Lie de transformaciones lineales de V . Una representación \mathfrak{g} en V es un homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ que satisface que $\rho([x, y]) = [\rho x, \rho y]$.

Estaremos particularmente interesados en una representación, la representación adjunta de \mathfrak{g} (recordemos que \mathfrak{g} es un espacio vectorial dado que \mathfrak{g} es álgebra de Lie) denotada por $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, donde para cada $X \in \mathfrak{g}$, se tiene

$$ad(X) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

$$Y \longmapsto ad(X)(Y) = [X, Y].$$

Ejemplo: Dada la aplicación $ad : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}))$, utilizando que cualquier elemento en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ es de la forma:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -b \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},$$

y considerando la base $\{X, H, Y\}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$, donde

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las matrices adjuntas en la base son respectivamente,

$$ad(X) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad ad(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

de forma que si tomamos cualquier elemento en el álgebra, lo podemos escribir como $Z = aH + bX + cY$, y aplicando la representación ad tenemos

$$ad(Z) = ad(aH + bX + cY) = a ad(H) + b ad(X) + c ad(Y) =$$

$$a \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -2b & 0 \\ -c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix}$$

esta última matriz es la representación adjunta de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$.

Definición 1.3. Dada una representación ρ de dimensión finita del álgebra de Lie \mathfrak{g} , definimos en \mathfrak{g} una forma bilineal simétrica llamada la forma traza, que está dada por

$$\beta_\rho(X, Y) = \text{tr}(\rho(X)\rho(Y)).$$

En el caso de que la representación sea la *adjunta*, esta forma bilineal es llamada forma de *Cartan-Killing*.

Por lo anterior la forma de *Cartan-Killing* de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es una forma bilineal simétrica denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y dada por

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)).$$

Existe una representación de un grupo de Lie G en su álgebra de Lie, es la representación Adjunta denotada por: $\text{Ad}(h)$. Esta representación es construida de la siguiente forma: un elemento $g \in G$ define el automorfismo interno $C_g(x) = gxg^{-1}$. Es claro que $C_g(1) = 1$, por tanto $d(C_g)_1$ es una aplicación lineal $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Dados $g, h \in G$.

$$C_g \circ C_h(x) = g(hxh^{-1})g^{-1} = C_{gh}(x)$$

lo que implica que $d(C_g)_1 \circ d(C_h)_1 = d(C_{gh})_1$. Por esto la aplicación $g \mapsto d(C_g)_1$ es una representación de G en \mathfrak{g} .

1.4. Álgebras de Lie Simples y Nilpotentes

Para hablar de las álgebras simples y de las álgebras nilpotentes debemos hablar primero de las series de composición, ya que serán la base para tratar estos temas.

Definición 1.4. Dada una álgebra de Lie \mathfrak{g} definimos, por inducción, los siguientes subespacios de \mathfrak{g} :

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g} & y & \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] & & \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] & & \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]. \end{array}$$

Donde $[A, B]$ denota el subespacio generado por $\{[X, Y]; X \in A, Y \in B\}$, con A y B subconjuntos de \mathfrak{g} . Decimos que $\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}', \dots, \mathfrak{g}^{(k)}, \dots$ es la serie derivada de \mathfrak{g} y que $\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^2, \dots, \mathfrak{g}^k, \dots$ es la serie central descendente de \mathfrak{g} .

Tenemos que $\mathfrak{g}^{(k)}$ y \mathfrak{g}^k son ideales de \mathfrak{g} , $\mathfrak{g}^{(k+1)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}$, $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$ y $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$.

Definición 1.5. Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} , decimos que

- 1) \mathfrak{g} es soluble si existe $k_0 \geq 1$, tal que $\mathfrak{g}^{(k_0)} = \{0\}$ y
- 2) \mathfrak{g} es nilpotente si existe $k_0 \geq 1$, tal que $\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$.

Definición 1.6. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie. Una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} es una subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ que es nilpotente y cuyo normalizador en \mathfrak{g} es el propio \mathfrak{h} , esto es, si $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ entonces $X \in \mathfrak{h}$.

Por la proposición 1.28 dada en [31] tenemos que existe en \mathfrak{g} un único ideal soluble, llamado radical soluble $\tau(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ que contiene todos los ideales solubles de \mathfrak{g} . Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.7. Dada un álgebra de Lie \mathfrak{g} , decimos que:

- 1) \mathfrak{g} es semisimple si el radical soluble de \mathfrak{g} es nulo.
- 2) \mathfrak{g} es simple si $\dim \mathfrak{g} \neq 1$ y los únicos ideales de \mathfrak{g} son $\{0\}$ y \mathfrak{g} .

Tomando las definiciones anteriores tenemos los criterios de Cartan-Killing, cuyas demostraciones son encontradas en la sección 3.2 de [31].

- 1) Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces \mathfrak{g} es soluble si, y solamente si, $\langle X, Y \rangle = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}'$ y $Y \in \mathfrak{g}$.
- 2) La forma de Cartan-Killing es no-degenerada, esto es, $\langle X, Y \rangle = 0$, para todo $Y \in \mathfrak{g}$, implica $X = 0$ si y solamente si \mathfrak{g} es semisimple.

1.5. Raíces

Sean \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple sobre \mathbb{C} y $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} . Sea α un funcional lineal sobre el espacio vectorial complejo \mathfrak{h} , y denótese por \mathfrak{g}_α el subespacio lineal de \mathfrak{g} dado por

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X, \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\},$$

nótese que para $\alpha = 0$, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h}$. Si $\alpha \neq 0$ y $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$, el funcional lineal α es llamado una raíz (de \mathfrak{g} con respecto a \mathfrak{h}). En tal caso \mathfrak{g}_α es llamado un *subespacio raíz*.

Denotamos por Π el conjunto de raíces no nulas del par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. El conjunto Π de las raíces genera \mathfrak{h}^* el dual de \mathfrak{h} , es decir, $H = 0$ si $\beta(H) = 0$ para toda raíz β . (Ver lema 6.7 en [31]).

Definimos la correspondiente forma de Cartan-Killing en el dual \mathfrak{h}^* de \mathfrak{h} . Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una forma bilineal, ella define una aplicación $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$ por

$$H \rightarrow \alpha_H(\cdot) = \langle H, \cdot \rangle.$$

Como la restricción de la forma de Cartan-Killing a \mathfrak{h} es no degenerada, esa aplicación es un isomorfismo entre \mathfrak{h}^* y \mathfrak{h} . Para $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, su imagen por la inversa de ese isomorfismo será denotada por H_α , es decir, H_α es definido por la igualdad $\langle H, H_\alpha \rangle = \alpha(H)$ para todo $H \in \mathfrak{h}$.

Usando ese isomorfismo, tome $(\alpha, \beta) = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle$ para toda $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, entonces (\cdot, \cdot) es una forma bilineal simétrica no degenerada sobre \mathfrak{h}^* .

Las raíces $\alpha \in \Pi$ definen un número finito de elementos especiales H_α en \mathfrak{h} . Como el conjunto de las raíces genera \mathfrak{h}^* , el conjunto $\{H_\alpha | \alpha \text{ es raíz}\}$ genera a \mathfrak{h} . Consideremos la siguiente sucesión de elementos de \mathfrak{h}^*

$$\dots, \beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots$$

que será denominada una α -sucesión iniciada en β . Se desea saber cuántos de los elementos de la sucesión son raíces. La respuesta está dada por la fórmula de Killing dada a seguir.

Los elementos de la α -sucesión iniciada en β que son raíces forman un intervalo que contiene a β , es decir, existen enteros $p, q \geq 0$ tales que

$$\beta - p, \dots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \dots, \beta + q\alpha$$

son la únicas raíces de la forma $\beta + k\alpha$ con k entero, además, es válida la siguiente fórmula, llamada fórmula de Killing

$$p - q = \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}. \quad (1.1)$$

De lo anterior tenemos las siguientes observaciones:

1. En la fórmula de Killing α y β no son simétricos, para la β -sucesión iniciada en α , son otros los valores de p y q que definen el intervalo de las raíces.
2. El segundo miembro de la igualdad (1.1) es un entero que es llamado número de Killing asociado a las raíces α y β .

Dentro del conjunto de las raíces, escogeremos bases especiales de \mathfrak{h} y \mathfrak{h}^* , de tal manera que en relación a ellas, los elementos de Π serán escritos con coordenadas enteras, por eso es conveniente trabajar sobre los subespacios racionales de \mathfrak{h} y \mathfrak{h}^* generados por las raíces y sus duales (la razón por lo que es posible trabajar sobre subespacios racionales se debe a que la forma de Cartan-Killing asume valores racionales cuando es evaluada en las raíces). Como el campo de los escalares \mathbb{K} es de característica cero, contiene el campo \mathbb{Q} de los racionales. Por ello \mathfrak{h} puede ser considerada como un espacio vectorial sobre \mathbb{Q} . El subespacio racional de \mathfrak{h} generado por H_α , $\alpha \in \Pi$ será denotado por

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} = \{a_1 H_{\alpha_1} + \dots + a_k H_{\alpha_k} \mid a_i \in \mathbb{Q}, \alpha_i \in \Pi\}.$$

Como el conjunto de raíces es finito, $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre los racionales. La restricción de la forma de Cartan-Killing define en $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ una forma bilineal simétrica, pues $\langle \cdot, \cdot \rangle$ asume valores racionales en Π . Como las dimensiones de \mathfrak{h} y $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ coinciden, la forma es no degenerada y restringida a $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$ es un producto interno. (Ver proposiciones 6.13 y 6.14 en [31]).

El subespacio racional $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ generado por las raíces tiene dimensión igual a la dimensión de \mathfrak{h} y se identifica con el dual de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$. De la misma manera, la forma de Cartan-Killing es un producto interno en $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$.

Buscamos construir sistemas simples de raíces para esto tenemos que definir primero un orden lexicográfico en espacios vectoriales. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{Q} y $\{v_1, \dots, v_l\}$ una base ordenada de V . Sean $v, w \in V$ escritos en coordenadas como

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_l v_l$$

$$w = b_1 v_1 + \dots + b_l v_l.$$

El orden lexicográfico en V en relación a esa base esta definido por $v \leq w$ si $v = w$ o si $a_i < b_i$, donde i es el primer índice en que las coordenadas de u y v son diferentes. Esta relación define un orden que es compatible con la estructura de espacio vectorial. (esto es, $v \leq w \Rightarrow v + u \leq w + u$ y $xv \leq xw$ si $x > 0$ y $v \leq w$).

Una raíz no nula $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$, se llama positiva si su primera componente no nula a_i , para algún $i = 1, \dots, n$, es un número positivo, donde $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ es una base de \mathfrak{h} . El conjunto de raíces positivas del par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ es denotado por Π^+ .

Definición 1.8. Una raíz $\alpha \in \Pi$ es simple en relación a un orden lexicográfico fijado si

i) $\alpha > 0$.

ii) No existen $\beta, \gamma \in \Pi$ tal que β y γ son positivas y

$$\alpha = \beta + \gamma.$$

El conjunto de raíces simples será denotada por Σ .

Definición 1.9. Un subconjunto $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ que satisface:

a) Σ es una base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ y

b) toda raíz β que puede ser escrita como

$$\beta = n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l,$$

con coeficientes enteros y todos ellos del mismo signo se denomina sistema simple de raíces.

Fijando un orden lexicográfico, dado por una base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ por las raíces simples es un sistema simple de raíces. Recíprocamente partiendo de un sistema simple de raíces Σ , se puede definir en $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$ un orden lexicográfico definido por Σ , de forma que Σ es una base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$.

El siguiente teorema nos permitirá caracterizar en términos de la subálgebra de Cartan \mathfrak{h} y de un sistema de raíces Π , una base especial para el álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Teorema 1.10. Sean \mathfrak{g} un álgebra de Lie semisimple compleja y \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} .

1. El álgebra de Lie \mathfrak{g} admite una descomposición en espacios de raíces en la siguiente forma:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

2. Los espacios raíz \mathfrak{g}_α , $\alpha \in \Pi$, son de dimensión compleja uno. Donde Π es un sistema de raíces.
3. Si α y β son dos raíces cualesquiera (incluyendo 0) y $\beta \neq -\alpha$, entonces \mathfrak{g}_α y \mathfrak{g}_β son ortogonales con relación a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
4. Si α es una raíz no nula, $\Pi \cap \mathbb{Z}\{\alpha\} = \{\alpha, -\alpha\}$.
5. Para cada $\alpha \in \Pi$ existe un vector $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ de tal forma que para todo $\alpha, \beta \in \Pi$ tenemos:
 - $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$, $[H, X_\alpha] = \alpha(H)X_\alpha$, (para todo $H \in \mathfrak{h}$);
 - $[X_\alpha, X_\beta] = 0$, si $\alpha + \beta \neq 0$ y $\alpha + \beta \notin \Pi$;
 - $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 1$ si $\alpha + \beta = 0$ y $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0$ en los otros casos.
 - $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}$, si $\alpha + \beta \in \Pi$ con $m_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$, y $m_{-\alpha,-\beta} = -m_{\alpha,\beta}$
 $m_{-\alpha,\alpha+\beta} = m_{\alpha+\beta,-\beta} = m_{-\beta,-\alpha}$.

Los elementos $\{X_\alpha : \alpha \in \Pi\}$ que satisfacen el numeral 5 en el teorema anterior serán llamados una *base de Weyl o Cartan- Weyl* de \mathfrak{g} módulo \mathfrak{h} .

Los números de Killing asociados a las raíces simples, determinan todas las raíces de \mathfrak{h} , estos son colocados en forma de matriz $l \times l$ como

$$C = \left(\frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \right)_{ij}.$$

Esta matriz recibe el nombre de *matriz de Cartan* del sistema simple de raíces. Los elementos de la diagonal de la matriz son todos iguales a 2 y los elementos de fuera de la diagonal son enteros negativos. En la proposición 6.23 en [31] se muestra que las posibilidades para los elementos fuera de la diagonal, son bastante restringidas.

1.6. Álgebras Semisimples

Para estudiar las álgebras semisimples se realiza el siguiente procedimiento: A través de la subálgebra de Cartan se analiza la representación adjunta. Los corchetes entre los espacios asociados o raíces de la representación adjunta determinan toda la estructura del

álgebra. Tales corchetes, a su vez, dependen de sumas de raíces correspondientes y estas son completamente determinadas por los valores que asume la forma de Cartan-Killing en las raíces. Así, toda estructura de una álgebra semisimple está dada por las relaciones mutuas entre un número finito de elementos en un espacio vectorial con un producto interno (sistemas de raíces), siendo posible, obtener una clasificación de esas álgebras. Utilizando la teoría de sistemas de raíces se puede clasificar las álgebras semisimples de dimensión finita obteniendo así la siguiente clasificación:

■ Álgebras clásicas Las álgebras de Lie clásicas son:

1. $A_l, l \geq 1$; corresponde a $\mathfrak{sl}(l+1) = \{A \in \mathfrak{gl}(l, \mathbb{C}), \text{tr}(A) = 0\}$.
2. $B_l, l \geq 2$; Corresponde al álgebra de matrices antisimétricas de dimensión impar $\mathfrak{so}(2l+1) = \{A \in \mathfrak{sl}(2l+1) : A + A^t = 0\}$.
3. $C_l, l \geq 3$; Corresponde al álgebra simpléctica $\mathfrak{sp}(l) = \{A \in \mathfrak{sl}(2l) : AJ + JA^t = 0\}$. siendo J la matriz antisimétrica $2l \times 2l$ escrita en bloques de tamaño $l \times l$ como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_{l \times l} \\ 1_{l \times l} & 0 \end{pmatrix}$$

donde 1 representa la matriz identidad de tamaño $l \times l$.

4. $D_l, l \geq 4$; Corresponde al álgebra de matrices antisimétricas de dimensión par $\mathfrak{so}(2l) = \{A \in \mathfrak{sl}(2l) : A + A^t = 0\}$.

■ Álgebras excepcionales:

1. G_2 es la álgebra construida sobre el espacio vectorial $\mathfrak{sl}(3) \oplus V \oplus V^*$, donde $V = \mathbb{K}^3$ con \mathbb{K} un campo cualquiera.
2. E_6, E_7, E_8 . La construcción de las álgebras E_6, E_7 puede ser realizada a partir de la construcción de E_8 , que es el álgebra construida sobre el espacio vectorial $\mathfrak{sl}(9) \oplus V \oplus V^*$, donde $V = \Lambda^3 \mathbb{K}^9$ con \mathbb{K} un campo cualquiera.

1.7. Variedades bandera

En general en matemática una bandera es una sucesión creciente de subespacios, creciente en el sentido que cada subespacio es un subespacio del siguiente. Geométricamente una

variedad bandera es un espacio homogéneo $G/C(S)$, donde G es un grupo de Lie complejo semisimple y $C(S)$ es el centralizador de un toro (no necesariamente maximal). Cuando S es un toro maximal decimos que la variedad bandera es maximal y la denotamos por \mathbb{F} . En un grupo de Lie G un toro es un subgrupo de Lie que es isomorfo al producto $S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$. Un toro T es un toro maximal en G si para cualquier toro S en G , con $T \subset S \subset G$, entonces $T = S$. El centralizador de un toro es el conjunto de elementos del grupo que conmutan con el toro.

Lo anterior, en términos de sistemas de raíces asociadas al grupo G , se puede escribir de la siguiente forma: Sea \mathfrak{g} una álgebra de Lie semisimple compleja, \mathfrak{h} una subálgebra de Cartan de \mathfrak{g} y Π el conjunto de raíces del par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Tomamos una base de Weyl de \mathfrak{g} fija. Sea $\Pi^+ \subset \Pi$ una escogencia de raíces positivas. Sea Σ el sistema simple de raíces correspondiente. Tome Θ un subconjunto de raíces de Σ y $\langle \Theta \rangle$ el conjunto de raíces generado por Θ . Sobre \mathfrak{g} tenemos la siguiente descomposición:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\beta \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\beta}, \quad (1.2)$$

donde $\mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \Pi$, es el espacio raíz complejo correspondiente a α .

Sea ahora \mathfrak{p}_Θ la subálgebra parabólica de \mathfrak{g} determinada por Θ . Esto es, una subálgebra parabólica \mathfrak{p} de \mathfrak{g} , es una subálgebra que contiene alguna subálgebra de Borel y una subálgebra \mathfrak{a} de \mathfrak{g} es una subálgebra de Borel si ella es una subálgebra soluble maximal. Entonces,

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\beta. \quad (1.3)$$

Así, la ecuación (1.2) puede ser reescrita como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_\Theta \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\beta}. \quad (1.4)$$

La variedad bandera general \mathbb{F}_Θ asociada al par $\{\mathfrak{g}, \Theta\}$, corresponde al espacio homogéneo $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$, donde G es el grupo de Lie complejo cuya álgebra de Lie es \mathfrak{g} y P_Θ es el normalizador de \mathfrak{p}_Θ en G .

Denotamos por \mathfrak{u} la forma real compacta de \mathfrak{g} , y por $U \subset G$ el subgrupo conexo asociado a \mathfrak{u} . Tomamos \mathfrak{u} como el subespacio real generado por $i\mathfrak{h}_\mathbb{R}, A_\alpha, iS_\alpha$, con $\alpha \in \Pi \setminus \Theta$, donde $A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ y $S_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha})$. Sea $K_\Theta = P_\Theta \cap U$, el cual por construcción, es

el centralizador de un toro. U actúa transitivamente sobre \mathbb{F}_Θ , y así podemos escribir $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$. Si $\Theta = \emptyset$, $\mathbb{F}_\Theta = \mathbb{F} = U/T$ donde T es el toro maximal, corresponde a la variedad bandera maximal, y en el caso contrario corresponde a una variedad bandera parcial. En este trabajo solo consideraremos variedades bandera maximales.

La variedad bandera general $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ es un espacio homogéneo reductivo. De hecho sea $\mathfrak{u}_\beta = \mathfrak{u} \cap (\mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{-\beta})$, $\beta \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$, $\mathfrak{q}_\Theta = \sum_{\beta \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{u}_\beta$ y \mathfrak{t}_Θ corresponde a la subálgebra de Cartan real. Entonces,

$$(i) \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{t}_\Theta \oplus \mathfrak{q}_\Theta, \mathfrak{t}_\Theta \cap \mathfrak{q}_\Theta = \emptyset,$$

$$(ii) \quad Ad(K_\Theta)\mathfrak{q}_\Theta \subset \mathfrak{q}_\Theta, \text{ esto implica } [\mathfrak{t}_\Theta, \mathfrak{q}_\Theta] \subset \mathfrak{q}_\Theta,$$

satisfaciendo así las condiciones para que \mathbb{F}_Θ sea espacio homogéneo reductivo (ver [18]).

Identificamos $\mathfrak{q} = T_{b_0}(\mathbb{F})$. Esta identificación es dada por $X \in \mathfrak{q} \rightarrow X_{b_0} \in T_{b_0}(\mathbb{F})$, es decir, por evaluación de $X \in \mathfrak{q}$ en b_0 como un campo vectorial sobre $T_{b_0}(\mathbb{F})$ (vea [18]).

La variedad bandera geométrica maximal $\mathbb{F}(n)$ es la variedad asociada al álgebra de Lie $sl(n, \mathbb{C})$ (ver por ejemplo [25]) y está definida de la siguiente forma:

$$\mathbb{F}(n) = \{(L_1, \dots, L_n) : L_i \text{ subespacio de } \mathbb{C}^n, \dim_{\mathbb{C}} L_i = 1, L_i \perp L_j\}. \quad (1.5)$$

El grupo unitario $U(n) = \{A \in Mat(n, \mathbb{C}) : A\bar{A}^t = I\}$ actúa transitivamente sobre $\mathbb{F}(n)$ así:

$$\begin{aligned} U(n) \times \mathbb{F}(n) &\longrightarrow \mathbb{F}(n) \\ (A, (L_1, \dots, L_n)) &\mapsto (AL_1, \dots, AL_n). \end{aligned}$$

Usando esta acción obtenemos la siguiente representación algebraica

$$\mathbb{F}(n) = \frac{U(n)}{T}, \quad (1.6)$$

donde $T = \underbrace{U(1) \times \dots \times U(1)}_{n\text{-veces}}$ es un toro maximal en $U(n)$. Por tal razón, estas variedades son conocidas como variedades banderas maximales.

Es de amplio conocimiento que, el álgebra de Lie del grupo de Lie $U(n)$ es

$$u(n) = \{X \in Mat(n, \mathbb{C}) : X + \bar{X}^t = 0\}.$$

y es tal que

$$\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{q} \oplus \underbrace{\mathfrak{u}(1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}(1)}_{n\text{-veces}}.$$

Es decir, \mathfrak{q} es un subespacio vectorial de $\mathfrak{u}(n)$ y por tanto sus elementos son matrices complejas $n \times n$ (véase [11]).

1.8. Métricas Invariantes

Una métrica Riemanniana ds^2 sobre \mathbb{F} que cumple que para todo $x \in \mathbb{F} = U/T$ se tiene

$$ds^2(dg_x X, dg_x Y) = ds^2(X, Y), \text{ si } X, Y \in T_x(\mathbb{F}), g \in U$$

se dice U -invariante. Aquí estamos considerando g como una aplicación de \mathbb{F} en \mathbb{F} .

Proposición 1.11. Una métrica Riemanniana U -invariante ds^2 sobre \mathbb{F} está completamente determinada por su valor en el origen esto es, por un producto interno (\cdot, \cdot) en \mathfrak{q} que es invariante bajo la acción adjunta de T .

Demostración: Sea (\cdot, \cdot) un producto interno en \mathfrak{q} , que es invariante bajo la acción adjunta de T , esto es, $([Z, X], Y) + (X, [Z, Y]) = 0$, $Z \in \mathfrak{t}$, $X, Y \in \mathfrak{q}$, dados $x \in \mathbb{F}$ y $g \in U$, tal que $gb_0 = x$, definimos

$$ds^2(X, Y) = ((dg_{b_0})^{-1}X, (dg_{b_0})^{-1}Y) \text{ para } X, Y \in T_x(\mathbb{F}).$$

Tenemos:

a. La definición de ds^2 es independiente de la escogencia de g . De hecho, si $gb_0 = \tilde{g}b_0$ con $\tilde{g} \in U$, entonces $g^{-1}\tilde{g}b_0 = b_0$ y $h = g^{-1}\tilde{g} \in T$. Notemos que $h : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ está dada por $[g] \mapsto [hg]$ y $[hg] = [hgh^{-1}]$, pues $(hg)^{-1}hgh^{-1} = h^{-1} \in T$. Luego, $dh_{b_0} = d(C_h)_{b_0} = Ad(h)$, donde $C_h : G \rightarrow G$ está dada por $C_h(g) = hgh^{-1}$. Tenemos que $(X, Y) = (Ad(h)X, Ad(h)Y)$, $h \in T$, $X, Y \in \mathfrak{q}$ y $Ad(h) = dh_{b_0}$. Queremos mostrar que

$$((dg_{b_0})^{-1}X, (dg_{b_0})^{-1}Y) = ((d\tilde{g}_{b_0})^{-1}X, (d\tilde{g}_{b_0})^{-1}Y), X, Y \in T_x(\mathbb{F});$$

$$\begin{aligned}
((dg_{b_0})^{-1}X, (dg_{b_0})^{-1}Y) &= ((dg^{-1})_{g b_0}X, (dg^{-1})_{g b_0}Y) \\
&= ((dh\tilde{g}^{-1})_{g b_0}X, (dh\tilde{g}^{-1})_{g b_0}Y) \\
&= (dh_{b_0}((d\tilde{g}^{-1})_{g b_0}X), dh_{b_0}((d\tilde{g}^{-1})_{g b_0}Y)) \\
&= ((d\tilde{g}^{-1})_{g b_0}X, (d\tilde{g}^{-1})_{g b_0}Y) \\
&= ((d\tilde{g}_{b_0})^{-1}X, (d\tilde{g}_{b_0})^{-1}Y),
\end{aligned}$$

como queríamos.

b. ds^2 es U -invariante. De hecho, si $\tilde{g} \in U$, $X, Y \in T_x(\mathbb{F})$ y $g b_0 = \tilde{g}x$, entonces

$$\begin{aligned}
ds^2(d\tilde{g}_x X, d\tilde{g}_x Y) &= ((d\tilde{g}_{b_0})^{-1}d\tilde{g}_x X, (d\tilde{g}_{b_0})^{-1}d\tilde{g}_x Y) \\
&= (d(g^{-1}\tilde{g})_x X, d(g^{-1}\tilde{g})_x Y) \\
&= ds^2(X, Y),
\end{aligned}$$

pues $(g^{-1}\tilde{g})b_0 = x$ y por (a) la definición de ds^2 es independiente de la escogencia de g . \square

En [3] se demostró que cualquier producto interno en \mathfrak{q} , U -invariante tiene la forma:

$$ds_\Lambda^2(X, Y) = (X, Y)_\Lambda := -\langle \Lambda \circ X, Y \rangle,$$

con $\Lambda : \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$ definida positiva con relación a la forma de Cartan-Killing, esto es, $\langle \Lambda \circ X, Y \rangle > 0$, para todo $X, Y \in \mathfrak{q}$ y \circ es el producto de Hadamard o producto de matrices componente a componente. Podemos extender el producto interno $(\cdot, \cdot)_\Lambda$ para una forma bilineal simétrica sobre el complejificado $\mathfrak{q}_\mathbb{C}$ de \mathfrak{q} , donde $(X + iY, Z + iW)_\Lambda := (X, Z)_\Lambda + i(X, W)_\Lambda + i(Y, Z)_\Lambda - (Y, W)_\Lambda$. Usaremos la misma notación $(\cdot, \cdot)_\Lambda$ para esta forma bilineal simétrica, así como para la correspondiente aplicación complejificada Λ , que es dada por $\Lambda(X + iY) := \Lambda(X) + i\Lambda(Y)$. La T -invarianza de $(X, Y)_\Lambda$ es equivalente a que los elementos de la base canónica $A_\alpha, iS_\alpha, \alpha \in \Pi$, serán autovectores de Λ , para el mismo autovalor λ_α . Así mismo, en el espacio tangente complejo tenemos

$$\begin{aligned}
\Lambda(X_\alpha) &= \Lambda\left(\frac{A_\alpha + S_\alpha}{2}\right) \\
\Lambda(X_\alpha) &= \frac{1}{2}(\lambda_\alpha A_\alpha + \lambda_\alpha S_\alpha) \\
\Lambda(X_\alpha) &= \frac{1}{2}\lambda_\alpha(2X_\alpha) \\
\Lambda(X_\alpha) &= \lambda_\alpha X_\alpha.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Además de eso, $\lambda_\alpha > 0$, pues $0 < -\langle \Lambda(X_\alpha), X_{-\alpha} \rangle = -\langle \lambda_\alpha X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = -\lambda_\alpha \langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = \lambda_\alpha$. También $\lambda_{-\alpha} = \lambda_\alpha$, pues $A_{-\alpha} = X_{-\alpha} - X_{-(-\alpha)} = -X_\alpha - X_{-\alpha} = -A_\alpha$, o sea, $\lambda_{-\alpha} A_{-\alpha} = \Lambda(A_{-\alpha}) = \Lambda(-A_\alpha) = -\lambda_\alpha A_\alpha$.

Denotamos por ds_Λ^2 la métrica invariante dada por Λ . En lo que sigue abusaremos de la notación y diremos que Λ es la métrica invariante.

1.9. Conexión afín

Definición 1.12. *Una conexión afín ∇ sobre una variedad diferenciable M es una aplicación*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

donde $\mathfrak{X}(M)$ es el espacio de los campos diferenciables de M , denotamos la conexión por $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$, verificando las siguientes propiedades:

- (i). $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$.
- (ii). $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$.
- (iii). $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

para todo trio de campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y para todo par de funciones diferenciables f y g .

El término *conexión* no tiene un significado especial y hay que interpretarlo justamente como un operador que actúa de una forma similar a la derivada direccional. Para el caso concreto de variedades riemannianas podemos definir las siguientes propiedades de las conexiones:

Definición 1.13. *Una conexión afín ∇ en una variedad riemanniana M es compatible con la métrica si y sólo si*

$$X(Y, Z) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Definición 1.14. *Una conexión afín ∇ en una variedad M es simétrica si*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposición 1.15. Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ . Entonces existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial V a lo largo de la curva diferenciable $c : I \rightarrow M$ otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de c , denominado derivada covariante de V a lo largo de c , tal que:

a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, donde W es un campo de vectores a lo largo de c y f es una función diferenciable en I .

c) Si V está inducido por un campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, es decir, $V(t) = Y(c(t))$, entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y$.

Demostración: Supongamos inicialmente que existe una correspondencia que satisface (a), (b) y (c). Sea $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ un sistema de coordenadas con $c(I) \cap \mathbf{x}(U) \neq \emptyset$ y sea $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ la expresión local de $c(t)$, $t \in I$. Sea $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Entonces podemos expresar el campo V localmente como $V = \sum_j v^j X_j$, $j = 1, \dots, n$, donde $v^j = v^j(t)$ y $X_j = X_j(c(t))$.

Por a) y b), tenemos que

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}.$$

Por c) y (I) en la definición 1.12, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{DX_j}{dt} &= \nabla_{dc/dt} X_j = \nabla_{(\sum \frac{dx_i}{dt} X_i)} X_j \\ &= \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j. \quad (1.8)$$

La expresión (1.8) nos muestra que si existe una correspondencia satisfaciendo las condiciones de la proposición anterior, entonces tal correspondencia es única. Para mostrar la existencia, definamos $\frac{DV}{dt}$ en $\mathbf{x}(U)$ como en (1.8).

Es inmediato verificar que (1.8) posee las propiedades deseadas. Si $\mathbf{y}(W)$ es otra vecindad coordenada, con $\mathbf{y}(W) \cap \mathbf{x}(U) \neq \emptyset$ y definimos $\frac{DV}{dt}$ en $\mathbf{y}(W)$ por (1.8), las definiciones

concuerdan en $\mathbf{y}(W) \cap \mathbf{x}(U)$, por la unicidad de $\frac{DV}{dt}$ en $\mathbf{x}(U)$. Se sigue que la definición puede ser extendida para todo M , y esto concluye la demostración. \square

Este resultado prueba que la elección de una conexión afín conduce a una buena definición de la derivada de campos de vectores a lo largo de curvas. La noción de conexión proporciona, además, una manera de diferenciar vectores a lo largo de curvas, permitiendo hablar por ejemplo de la aceleración de una curva.

1.10. Conexión Riemanniana en \mathbb{F}

En una variedad riemanniana una conexión riemanniana o de Levi-Civita es una conexión afín que es simétrica y compatible con la métrica definida sobre la variedad. A continuación vamos a encontrar una expresión para la conexión riemanniana en \mathbb{F}

Como \mathbb{F} es un espacio homogéneo reductivo, por el teorema 3.3 en el capítulo X en [18] podemos definir una aplicación bilineal simétrica $U : \mathfrak{q} \times \mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q}$ por

$$2\Lambda(U(X, Y), Z) = \Lambda(X, [Y, Z]_{\mathfrak{q}}) + \Lambda([Z, X]_{\mathfrak{q}}, Y)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{q}$, o sea:

$$2\langle \Lambda \circ U(X, Y), Z \rangle = \langle \Lambda \circ X, [Y, Z]_{\mathfrak{q}} \rangle + \langle [Z, X]_{\mathfrak{q}}, \Lambda \circ Y \rangle$$

utilizando la invarianza de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, esto es:

$$\langle [X, Y]_{\mathfrak{q}}, Z \rangle = \langle X, [Y, Z]_{\mathfrak{q}} \rangle \tag{1.9}$$

tenemos

$$2\langle \Lambda \circ U(X, Y), Z \rangle = -\langle [\Lambda \circ X, Y]_{\mathfrak{q}}, Z \rangle + \langle [X, \Lambda \circ Y]_{\mathfrak{q}}, Z \rangle$$

luego

$$2\Lambda \circ U(X, Y) = [X, \Lambda \circ Y]_{\mathfrak{q}} - [\Lambda \circ X, Y]_{\mathfrak{q}}. \tag{1.10}$$

Como la conexión Riemanniana ∇ en un espacio homogéneo reductivo (ver [18]) está dada por:

$$2\nabla_X Y = [X, Y]_{\mathfrak{q}} + 2U(X, Y), \tag{1.11}$$

en (\mathbb{F}, Λ) tenemos entonces

$$2\nabla_X Y = [X, Y]_{\mathfrak{q}} + \Lambda^{-1}([X, \Lambda Y]_{\mathfrak{q}} - [\Lambda X, Y]_{\mathfrak{q}}). \quad (1.12)$$

Con $X, Y \in \mathfrak{q}$ y Λ^{-1} la inversa de Λ con respecto al producto de Hadamard.

Es importante notar que los autovalores de $(\Lambda)^{-1}$ corresponden a los inversos multiplicativos de los autovalores de Λ , o sea $(\Lambda)^{-1} = (\lambda_{\alpha}^{-1})$.

La acción concreta de la conexión Riemanniana sobre los elementos de la base de Weyl se describe a continuación:

Proposición 1.16. Para (\mathbb{F}, Λ) sean $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Pi$ y $X_{\alpha}, X_{\beta}, X_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{q}$ elementos en la base de Weyl. Entonces

$$\nabla_{X_{\alpha}} X_{\beta} = m_{\alpha, \beta} \frac{\lambda_{\alpha+\beta} + \lambda_{\beta} - \lambda_{\alpha}}{2\lambda_{\alpha+\beta}} X_{\alpha+\beta}. \quad (1.13)$$

Demostración: De la ecuación (1.12) realizando cálculo directo, usando el item 5 en el Teorema 1.10, y la ecuación (1.7), tenemos:

$$\begin{aligned} 2\nabla_{X_{\alpha}} X_{\beta} &= [X_{\alpha}, X_{\beta}]_{\mathfrak{q}} + \Lambda^{-1} \circ ([X_{\alpha}, \Lambda \circ X_{\beta}]_{\mathfrak{q}} - [\Lambda \circ X_{\alpha}, X_{\beta}]_{\mathfrak{q}}) \\ &= m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} + \Lambda \circ (m_{\alpha, \beta} \lambda_{\beta} X_{\alpha+\beta} - m_{\alpha, \beta} \lambda_{\alpha} X_{\alpha+\beta}) \\ &= m_{\alpha, \beta} \frac{\lambda_{\alpha+\beta} + \lambda_{\beta} - \lambda_{\alpha}}{\lambda_{\alpha+\beta}} X_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

□

1.11. Estructuras Casi-complejas Invariantes

Una estructura casi-compleja U -invariante J sobre \mathbb{F} (en forma abreviada *ecci*) es la asociación, para cada $x \in \mathbb{F}$, de un endomorfismo J_x del espacio tangente $T_x(\mathbb{F})$ tal que $J_x^2 = -1$ y $dg_x \circ J_x = J_{g_x} \circ dg_x$, para todo $g \in U$, donde 1 denota la aplicación identidad. J es casi hermítica, esto es $[JX, JY] = -[X, Y]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{q}$, de hecho $[JX, JY] = J^2[X, Y] = -[X, Y]$, lo anterior es equivalente $J \circ Ad(h) = Ad(h) \circ J$, para todo $h \in T$.

Recordemos que complejificar un espacio vectorial es extender el conjunto de los escalares de los \mathbb{R} a los \mathbb{C} . Denotamos también por J su complejificado $\mathfrak{q}^{\mathbb{C}}$. La invarianza de J asegura que $J(\mathfrak{g}_{\alpha}) = \mathfrak{g}_{\alpha}$ para todo $\alpha \in \Pi$. De hecho, dado $Y \in J(\mathfrak{g}_{\alpha})$, entonces

$Y = JX$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, por la definición de \mathfrak{g}_α , debemos mostrar que $[H, Y] = \alpha(H)Y$, para todo $H \in \mathfrak{h}$. Más, $[H, Y] = [H, JX] = J[H, X] = J(\alpha(H)X) = \alpha(H)(JX) = \alpha(H)Y$, para todo $H \in \mathfrak{h}$.

Los autovalores de J son $\pm i$, los autovectores en $\mathfrak{q}^\mathbb{C}$ son X_α , $\alpha \in \Pi$. Así mismo $J(X_\alpha) = i\varepsilon_\alpha X_\alpha$, con $\varepsilon_\alpha = \pm 1$. Notemos que $A_\alpha - i(iS_\alpha) = X_\alpha - X_{-\alpha} - i(i(X_\alpha + X_{-\alpha})) = 2X_\alpha$, luego $X_\alpha = \frac{1}{2}(A_\alpha - i(iS_\alpha))$ y

$$\begin{aligned} JX_\alpha &= \frac{1}{2}J(A_\alpha - i(iS_\alpha)) = \frac{1}{2}(JA_\alpha - iJ(iS_\alpha)) = \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha i(A_\alpha - i(iS_\alpha)) \\ &= \frac{1}{2}i\varepsilon_\alpha A_\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha iS_\alpha = \frac{1}{2}(i\varepsilon_\alpha A_\alpha + \varepsilon_\alpha iS_\alpha). \end{aligned}$$

Tomando las igualdades de las partes real e imaginaria tenemos $JA_\alpha = \varepsilon_\alpha(iS_\alpha)$ y $J(iS_\alpha) = -\varepsilon_\alpha iA_\alpha$. como $A_\alpha = -A_{-\alpha}$, entonces $J(A_\alpha) = J(-A_{-\alpha})$ o sea, $\varepsilon_\alpha(iS_\alpha) = -JA_{-\alpha} = -\varepsilon_{-\alpha}(iS_{-\alpha})$. Ahora $S_\alpha = S_{-\alpha}$ y por tanto $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_{-\alpha}$.

Usualmente, los autovectores asociados a $+i$ son llamados del tipo $(1, 0)$, y los autovectores asociados a $-i$ son llamados del tipo $(0, 1)$.

Una *ecci* sobre \mathbb{F} está completamente determinada por un conjunto de signos $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$, con $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_{-\alpha}$. En lo que sigue del trabajo abusaremos de la notación y diremos que una estructura casi-compleja invariante sobre \mathbb{F} es $J = \{\varepsilon_\alpha\}$.

1.12. Forma de Kähler

Cualquier métrica invariante ds_Λ^2 es casi hermítica con respecto a cada J , esto es,

$$ds_\Lambda^2(JX, JY) = ds_\Lambda^2(X, Y).$$

De hecho, $ds_\Lambda^2(JX_\alpha, JX_\beta) = ds_\Lambda^2(i\varepsilon_\alpha X_\alpha, i\varepsilon_\beta X_\beta) = -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta ds_\Lambda^2(X_\alpha, X_\beta)$.

Si $\alpha = -\beta$, entonces

$$-\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = -\varepsilon_\alpha \varepsilon_{-\alpha} = \varepsilon_\alpha^2 = 1.$$

Luego $ds_\Lambda^2(JX_\alpha, JX_\beta) = ds_\Lambda^2(X_\alpha, X_\beta)$.

Si $\alpha \neq -\beta$, como $ds_\Lambda^2(X_\alpha, X_\beta) = -\langle \Lambda X_\alpha, X_\beta \rangle = -\lambda_\alpha \langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0$. Entonces

$$ds_\Lambda^2(JX_\alpha, JX_\beta) = ds_\Lambda^2(X_\alpha, X_\beta) = 0.$$

Sea $\Omega = \Omega_{J,\Lambda}$ la forma de Kähler correspondiente a J y Λ o sea

$$\Omega(X, Y) = ds_\Lambda^2(X, JY) = -\langle \Lambda X, JY \rangle. \quad (1.14)$$

Esta forma se extiende naturalmente a una 2-forma U -invariante sobre la complejificada $\mathfrak{q}_\mathbb{C}$ de \mathfrak{q} , la cual denotamos también por Ω . Ω es antisimétrica, dado que, su acción sobre los elementos de la base de Weyl estaba descrita por:

$$\Omega(X_\alpha, X_\beta) = -\langle \Lambda X_\alpha, JX_\beta \rangle = -\langle \lambda_\alpha X_\alpha, i\varepsilon_\beta X_\beta \rangle = -i\lambda_\alpha \varepsilon_\beta \langle X_\alpha, X_\beta \rangle \quad (1.15)$$

como $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0$, a menos que $\alpha + \beta \doteq 0$, en este caso tenemos $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 1$ y

$$\begin{aligned} \Omega(X_\alpha, X_\beta) &= -i\lambda_\alpha \varepsilon_\beta = i\lambda_\alpha \varepsilon_\alpha = \\ &= -(-i\lambda_\beta \varepsilon_\alpha \langle X_\beta, X_\alpha \rangle) = -\Omega(X_\beta, X_\alpha). \end{aligned}$$

entonces $\Omega(X_\alpha, X_\beta) = 0$ siempre que $\alpha + \beta \neq 0$ y $\Omega(X_\alpha, X_{-\alpha}) = -i\lambda_\alpha \varepsilon_{-\alpha} = i\lambda_\alpha \varepsilon_\alpha$ si $\alpha \doteq -\beta$.

La siguiente fórmula es bien conocida (ver [18]).

Lema 1.17. *Sea w una K -forma diferencial invariante sobre el espacio homogéneo L/H . Entonces*

$$dw(X_1, \dots, X_{k+1}) = (k+1) \sum_{i < j} (-1)^{i+j} w([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}).$$

para X_1, \dots, X_{k+1} en el álgebra de Lie \mathfrak{l} de L .

Aplicando este lema para la forma Ω obtenemos

$$d\Omega(X, Y, Z) = 3[\Omega([X, Y], Z) - \Omega([X, Z], Y) + \Omega([Y, Z], X)] \quad (1.16)$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{q}$.

Contextualizando lo anterior en términos de la base de Weyl tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.18. Si $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi$ y $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, entonces $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$ en caso contrario, si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, entonces

$$d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -3im_{\alpha,\beta}(\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma). \quad (1.17)$$

Demostración: Por las ecuaciones (1.15) y (1.16) tenemos que:

$$\begin{aligned}
d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= 3[\Omega([X_\alpha, X_\beta], X_\gamma) - \Omega([X_\alpha, X_\gamma], X_\beta) + \Omega([X_\beta, X_\gamma], X_\alpha)] \\
&= 3[\Omega(m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}, X_\gamma) - \Omega(m_{\alpha,\gamma}X_{\alpha+\gamma}, X_\beta) + \Omega(m_{\beta,\gamma}X_{\beta+\gamma}, X_\alpha)] \\
&= 3[m_{\alpha,\beta}\Omega(X_{\alpha+\beta}, X_\gamma) - m_{\alpha,\gamma}\Omega(X_{\alpha+\gamma}, X_\beta) + m_{\beta,\gamma}\Omega(X_{\beta+\gamma}, X_\alpha)] \\
&= 3[-m_{\alpha,\beta}i\lambda_{\alpha+\beta}\varepsilon_\gamma\langle X_{\alpha+\beta}, X_\gamma \rangle + m_{\alpha,\gamma}i\lambda_{\alpha+\gamma}\varepsilon_\beta\langle X_{\alpha+\gamma}, X_\beta \rangle \\
&\quad - m_{\beta,\gamma}i\lambda_{\beta+\gamma}\varepsilon_\alpha\langle X_{\beta+\gamma}, X_\alpha \rangle].
\end{aligned}$$

Como $\langle X_\delta, X_\eta \rangle = 0$ si $\delta + \eta \neq 0$, entonces $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$ si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

La identidad $\alpha + \beta + \gamma = 0$ implica que $m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\gamma} = m_{\gamma,\alpha}$ por el Lema 8.6 de [31].

También $m_{\alpha,\gamma} = -m_{\gamma,\alpha}$ pues $-m_{\gamma,\alpha}X_{\gamma+\alpha} = -[X_\gamma, X_\alpha] = [X_\alpha, X_\gamma] = m_{\alpha,\gamma}X_{\alpha+\gamma}$. Luego,

$$\begin{aligned}
d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= 3[-im_{\alpha,\beta}\lambda_{-\gamma}\varepsilon_\gamma\langle X_{-\gamma}, X_\gamma \rangle - im_{\alpha,\beta}\lambda_{-\beta}\varepsilon_\beta\langle X_{-\beta}, X_\beta \rangle \\
&\quad - im_{\alpha,\beta}\lambda_{-\alpha}\varepsilon_\alpha\langle X_{-\alpha}, X_\alpha \rangle] \\
&= -3im_{\alpha,\beta}(\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma).
\end{aligned}$$

Lo que corresponde a la ecuación (1.17). □

Considerando la expresión de $d\Omega$, hacemos la siguiente distinción entre las triplas de raíces.

Definición 1.19. Sea $J = \{\varepsilon_\alpha\}$ una *ecci*. Una tripla de raíces α, β, γ tal que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ es llamada:

- 1) Una $\{0, 3\}$ -tripla si $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$ y
- 2) Una $\{1, 2\}$ -tripla en los otros casos.

Definición 1.20. Una variedad casi hermitica es llamada $(1,2)$ -simplética (o casi-Kähler) si

$$d\Omega(X, Y, Z) = 0$$

cuando uno de los vectores X, Y, Z es del tipo $(1,0)$ y los otros dos son del tipo $(0,1)$.

Proposición 1.21. (\mathbb{F}, J, Λ) es una variedad $(1,2)$ -simplética si, y solamente si,

$$\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0$$

para toda $\{1, 2\}$ - tripla $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Demostración: Supongamos que (\mathbb{F}, Λ, J) es $(1,2)$ -simplética. Dada una $\{1,2\}$ -tripla $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, si uno de los vectores es del tipo $(1,0)$ y los otros dos son del tipo $(0,1)$, entonces, por hipótesis y por la ecuación (1.17).

$$0 = d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -3im_{\alpha,\beta}(\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma), \quad (1.18)$$

o sea

$$\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0.$$

Si uno de los vectores es del tipo $(0,1)$ y los otros dos son del tipo $(1,0)$, no podemos usar la hipótesis directamente. Mas, en este caso, $\{-\alpha, -\beta, -\gamma\}$ es una $\{1,2\}$ -tripla con uno de los vectores del tipo $(1,0)$ y los otros dos son del tipo $(0,1)$. Luego, por hipótesis

$$0 = d\Omega(X_{-\alpha}, X_{-\beta}, X_{-\gamma}) = -3im_{-\alpha,-\beta}(\varepsilon_{-\alpha}\lambda_{-\alpha} + \varepsilon_{-\beta}\lambda_{-\beta} + \varepsilon_{-\gamma}\lambda_{-\gamma}),$$

lo que implica

$$0 = \varepsilon_{-\alpha}\lambda_{-\alpha} + \varepsilon_{-\beta}\lambda_{-\beta} + \varepsilon_{-\gamma}\lambda_{-\gamma} = -\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha - \varepsilon_\beta\lambda_\beta - \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = -(\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma).$$

Supongamos ahora $\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0$ para toda $\{1,2\}$ -tripla $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Queremos probar que $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$. Si uno de los vectores es del tipo $(1,0)$ y los otros dos son del tipo $(0,1)$. Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, entonces $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$, por la proposición 1.17. Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, entonces $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ es una $\{1,2\}$ -tripla ya que uno de los vectores es del tipo $(1,0)$ y los otros dos son del tipo $(0,1)$. En este caso por hipótesis y por la ecuación (1.17)

$$d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -3im_{\alpha,\beta}(\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma) = 0.$$

Con lo anterior se completa la demostración. \square

Definición 1.22. Decimos que Λ es $(1,2)$ -simplética con respecto a J si (\mathbb{F}, Λ, J) es $(1,2)$ -simplética. También, J es $(1,2)$ -admisibile, si existe Λ tal que (\mathbb{F}, Λ, J) es $(1,2)$ -simplética.

Veamos ahora algunos conceptos de la teoría de grafos y especialmente de torneos y su relación con estructuras casicomplejas sobre $\mathbb{F}(n)$

1.13. Torneos y Estructuras Casi-complejas (1,2)-Admisibles

Definición 1.23. Un grafo $\mathcal{G} = (V, A)$ consta de un conjunto finito no vacío V de elementos llamados vértices y A una familia finita de pares no necesariamente ordenados de elementos de V llamados aristas.

Definición 1.24. Un digrafo es un grafo orientado finito. Esto es, un digrafo es un par $\mathcal{G} = (V, A)$. Si $x, y \in V$, entonces $x \rightarrow y$ indica que $xy \in A$ mientras que $x \leftrightarrow y$ indica $xy \in A$ o $yx \in A$.

Definición 1.25. Un torneo con n vértices o n -torneo \mathcal{T} es un grafo, consistente de un conjunto finito p_1, p_2, \dots, p_n de vértices o jugadores distintos, tal que cada par de vértices está unido por exactamente un arco orientado $p_i \rightarrow p_j$ o $p_j \rightarrow p_i$. Si $p_i \rightarrow p_j$ decimos que p_i le gana a p_j .

Para el lector interesado en torneos vea específicamente, [23] y [25].

Existe una identificación natural entre estructuras casi-complejas invariantes sobre $\mathbb{F}(n)$ y torneos con n vértices (véase [6] o [21]), la cual es clave en el estudio de la geometría de las variedades bandera. Después dada una estructura casi-compleja invariante J , es posible hacerle corresponder un torneo (grafo dirigido completo) $\mathcal{T}(j)$ con n jugadores $\{1, \dots, n\}$ de la siguiente forma: Si $J(a_{ij}) = (a'_{ij})$ entonces $\mathcal{T}(j)$ es tal que para $i < j$

$$(i \rightarrow j \iff a'_{ij} = \sqrt{-1}a'_{ij}) \quad \text{o} \quad (i \leftarrow j \iff a'_{ij} = -\sqrt{-1}a'_{ij}).$$

Definición 1.26. Sea \mathcal{T}_1 un torneo con n jugadores y \mathcal{T}_2 un torneo con m jugadores $\{1, \dots, m\}$. un homomorfismo entre \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 es una función $\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tal que

$$s \xrightarrow{\mathcal{T}_1} t \implies \phi(s) \xrightarrow{\mathcal{T}_2} \phi(t) \quad \text{o} \quad \phi(s) = \phi(t)$$

Cuando ϕ es biyectiva decimos que \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 son isomorfos.

Las clases de isomorfismos de torneos para $n = 2$ se pueden observar en la Figura 3.2 y corresponden a la clase (2). Para $n = 3$ en la Figura 3.3 las clases (6) y (7) y para $n = 4$ en las Figuras 3.5 y 3.6 las clases (35)-(38). Es decir, Los digrafos completos de las Figuras 3.2 a 3.6.

Cada torneo determina un vector, llamado vector resultado o vector marcador,

$$(s_1, \dots, s_n), \text{ tal que } \sum_{i=1}^n s_i = \binom{n}{2},$$

y cuyas entradas corresponden al número de juegos que cada jugador ha ganado. Claramente, torneos isomorfos tienen el mismo vector resultado. Lo contrario no es cierto, pues para $n \geq 5$ existen torneos que tienen el mismo vector resultado y no son isomorfos.

El torneo con n jugadores $\{1, \dots, n\}$, definido por: $i \rightarrow j \iff i < j$, es llamado torneo canónico y su vector marcador es $(0, 1, 2, \dots, n-1)$.

Definición 1.27. *Un torneo \mathcal{T} es transitivo si para cualesquiera tres vértices x, y, z tales que $x \rightarrow y$ y $y \rightarrow z$ tenemos $x \rightarrow z$.*

Definición 1.28. *Dado un torneo \mathcal{T} y un vértice $v \in \mathcal{T}$ definimos los subtorneos*

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}^+(v) = x \in \mathcal{T} : v \rightarrow x\} \text{ y} \\ \{\mathcal{T}^-(v) = x \in \mathcal{T} : x \rightarrow v\}, \end{aligned}$$

son llamados torneo ganador y perdedor de v , respectivamente.

Definición 1.29. *\mathcal{T} es llamado localmente transitivo si, y solo si, el subtorneo $\mathcal{T}^-(v)$ y $\mathcal{T}^+(v)$ son transitivos para cada vértice (vea [5]).*

Definición 1.30. *Dado un torneo \mathcal{T} , decimos que un 3-ciclo formado por los vértices i, j, k de \mathcal{T} es conado si existe otro vértice x tal que*

$$(x \rightarrow i, x \rightarrow j \text{ o } x \rightarrow k) \quad \text{o} \quad (i \rightarrow x, j \rightarrow x \text{ y } k \rightarrow x)$$

Decimos que el torneo \mathcal{T} es libre de cono si, y solo si, no contiene un 3-ciclo conado, esto es no contiene un subtorneo isomorfo a las clases (37) y (39) de la figura 3.6.

Proposición 1.31. *Un torneo \mathcal{T} es localmente transitivo si, y solo si, es libre de cono.*

Demostración: Supongamos que \mathcal{T} no es libre de cono. Entonces él contiene uno de los 4-torneos (37) o (39) en la Figura 3.6. Si \mathcal{T} contiene (37) entonces el vértice que gana a los otros tres vértices es tal que éste es $\mathcal{T}^-(x)$ y no es transitivo. Similarmente, si \mathcal{T} contiene (39) entonces el vértice que pierde con los otros vértices es tal que $\mathcal{T}^+(x)$ no es transitivo.

Ahora, supongamos que \mathcal{T} no es localmente transitivo. Entonces existe un vértice x tal que $\mathcal{T}^-(x)$ no es transitivo o $\mathcal{T}^+(x)$ no es transitivo.

Si $\mathcal{T}^-(x)$ no es transitivo, entonces, él contiene un 3-ciclo $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$ y $i \rightarrow x$, $j \rightarrow x$ y $k \rightarrow x$. Por tanto, el torneo formado por los vértices i, j, k, x es como el (39) de la figura 3.6. Así \mathcal{T} no es libre de cono. \square

Proposición 1.32. Un torneo \mathcal{T} es localmente transitivo si, y solo si, todos los 4-subtorneos de \mathcal{T} son localmente transitivos.

Demostración: Si \mathcal{T} es localmente transitivo entonces todos los subtorneos de \mathcal{T} son localmente transitivos; en particular, todo 4-subtorneos son localmente transitivos.

Ahora, suponga que \mathcal{T} no es localmente transitivo. Entonces existe un vértice v de \mathcal{T} tal que $\mathcal{T}^-(v)$ y $\mathcal{T}^+(v)$ no es transitivo. Si $\mathcal{T}^-(v)$ no es transitivo, entonces, él contiene un 3-ciclo. por lo tanto, el 4-subtorneo determinado por el 3-ciclo y v no es localmente transitivo. \square

Cohen, Paredes y Pinzón en [10] demostraron que la variedad bandera maximal $(\mathbb{F}(n), J)$ admite una métrica invariante (1,2)-simpléctica si, y solo si, el torneo asociado es localmente transitivo.

Capítulo 2

f -ESTRUCTURAS

En este capítulo se estudia la generalización de los resultados ya conocidos de la geometría hermítica de una variedad bandera, al caso de las variedades bandera maximal dotada de una f -estructura. También presentamos la motivación para el estudio de las f -estructuras y las variedades bandera, la que tiene relación con el teorema de Black [2] el cual permite relacionar aplicaciones armónicas con aplicaciones f -holomorfas.

2.1. f -Estructuras

K. Yano en 1961 introduce la noción de f -estructura para una variedad Riemanniana cualquiera, de la siguiente forma:

Definición 2.1. *Sea M una variedad Riemanniana n -dimensional y \mathcal{F} un campo tensorial de tipo $(1,1)$ tal que, $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$. \mathcal{F} es llamado una f -estructura sobre TM .*

Una variedad Riemanniana con una f -estructura \mathcal{F} será llamada una f -variedad.

2.2. Aplicaciones armónicas y aplicaciones f -holomorfas

Sean (M, g) y (N, h) dos variedades Riemannianas. Una aplicación $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ es armónica si ella es un punto crítico del funcional de energía

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |d\phi(x)|^2 v_g \quad (2.1)$$

donde $d\phi(x) : T_x M \rightarrow T_{\phi(x)} M$, $x \in M$ y la norma de $d\phi(x)$ está dada por:

$$|d\phi(x)|^2 = \sum_{i=1}^n \langle d\phi(x)(X_i), d\phi(x)(X_i) \rangle_h \quad (2.2)$$

para X_1, \dots, X_m una base ortonormal de $T_x M$.

Esto es, ϕ es armónica si y solamente si satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\delta E(\phi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E(\phi_t) = 0 \quad (2.3)$$

para toda variación (ϕ_t) , $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, de ϕ . La anterior ecuación, como se puede ver es no lineal de orden dos.

Definición 2.2. Una aplicación $\phi : (M, g, J) \rightarrow (N, h, \mathcal{F})$ es holomorfa si satisface

$$d\phi \cdot J = \mathcal{F} \cdot d\phi.$$

La ecuación de holomorfía es lineal de orden uno. El siguiente teorema debido a Black [2], el cual tiene origen en [19], es determinante para generar la motivación alrededor del estudio de f -variedades.

Teorema 2.3. Sea $\phi : (M, g, J) \rightarrow (N, h, \mathcal{F})$ una aplicación tal que

1. ϕ es f -holomorfa
2. M es co-simpléctica, esto es, $d^*(\omega) = 0$,
3. $(\nabla \mathcal{F})^{(1,1)} = 0$.

Entonces ϕ es armónica.

A raíz del teorema anterior nace la siguiente definición.

Definición 2.4.

- (i) Definimos $(\nabla\mathcal{F})^{(1,1)}(X, Y)$ como $\nabla\mathcal{F}(X, Y)$ con $X \in TN^+$ y $Y \in TN^-$.
- (ii) (N, h, \mathcal{F}) se dice que es una f -variedad $(1,2)$ -simpléctica si $(\nabla\mathcal{F})^{(1,1)} = 0$.

El Teorema 2.3 nos permite relacionar aplicaciones armónicas y aplicaciones f -holomorfas y por lo tanto es interesante encontrar las condiciones para que una variedad bandera dotada de una f -estructura y una métrica invariante sea una f -variedad $(1,2)$ -simpléctica. Recientemente, han sido publicados varios trabajos en física en los cuales se usan variedades bandera y aplicaciones armónicas. Entre dichos trabajos podemos mencionar los de Fioresi [12] y Karabegov [16].

2.3. f -Estructuras Invariantes en $\mathbb{F}(n)$

Definición 2.5. Una f -estructura \mathcal{F} es llamada U -invariante si para cada $x \in \mathbb{F}$ el endomorfismo $\mathcal{F}_x : T_x\mathbb{F} \rightarrow T_x\mathbb{F}$ satisface que $du_x \circ \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{ux} \circ du_x \forall u \in U$.

Proposición 2.6. Una f -estructura invariante \mathcal{F} es completamente determinada por un endomorfismo $\mathcal{F} : \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$ satisfaciendo $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$ y \mathcal{F} conmuta con una acción adjunta de K , esto es,

$$Ad(K)\mathcal{F} = \mathcal{F}Ad(K).$$

Demostración: Tomando \mathcal{F} con las condiciones de la proposición, sea $x \in \mathbb{F}$. Como la acción adjunta de U sobre \mathcal{F} es transitiva, existe $u \in U$ tal que $x = ub_0$. Considerando la multiplicación a izquierda $u : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ definimos un homomorfismo

$$\mathcal{F}_x : T_x(\mathbb{F}) \rightarrow T_x(\mathbb{F})$$

de la siguiente forma:

$$\mathcal{F}_x = du_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (du_{b_0})^{-1}.$$

Ahora debemos mostrar:

- a. La definición de \mathcal{F}_x no depende de la escogencia de $u \in U$.

b. $\mathcal{F}_x^3 + \mathcal{F}_x = 0$

c. $du_x \circ \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{ux} \circ du_x$.

Demostración: Para mostrar **a)** tomamos $u, \tilde{u} \in U$ tales que $ub_0 = \tilde{u}b_0 = x$ de igual forma, $u^{-1}\tilde{u}b_0 = b_0$ y $h = u^{-1}\tilde{u} \in K$.

Tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} du_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (du_{b_0})^{-1} &= d\tilde{u}_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (d\tilde{u}_{b_0})^{-1} \Leftrightarrow \\ \mathcal{F} \circ du_x^{-1} &= (du_{b_0})^{-1} \circ d\tilde{u}_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (d\tilde{u}_{b_0})^{-1} \Leftrightarrow, \\ \mathcal{F} \circ du_x^{-1} &= du_x^{-1} \circ d\tilde{u}_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (d\tilde{u}_{b_0})^{-1} \Leftrightarrow \\ \mathcal{F} \circ du_x^{-1} \circ d\tilde{u}_{b_0} &= du_x^{-1} \circ d\tilde{u}_{b_0} \circ \mathcal{F} \Leftrightarrow \\ \mathcal{F} \circ d(u^{-1}\tilde{u})_{b_0} &= d(u^{-1}\tilde{u})_{b_0} \circ \mathcal{F} \Leftrightarrow \\ \mathcal{F} \circ d(h)_{b_0} &= dh_{b_0} \circ \mathcal{F} \Leftrightarrow \\ \mathcal{F} \circ Ad(h) &= Ad(h) \circ \mathcal{F} \end{aligned}$$

Luego, la definición de \mathcal{F}_x no depende de la escogencia de u .

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{F}_x^3 &= (du_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (du_{b_0})^{-1}) \circ (du_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (du_{b_0})^{-1}) \circ (du_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (du_{b_0})^{-1}) \\ &= du_{b_0} \circ (\mathcal{F})^3 \circ (du_{b_0})^{-1} = -\mathcal{F}_x. \end{aligned}$$

c) Por último vamos a mostrar que

$du_x \circ \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_{ux} \circ du_x$ que es equivalente a probar que:

$$du_x \circ d\tilde{u}_{b_0} \circ \mathcal{F}_0 (d\tilde{u}_{b_0})^{-1} = d\tilde{u}_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (d\tilde{u}_{b_0})^{-1} \circ du_x \text{ donde } \tilde{u}b_0 = ux \text{ y } \tilde{u}_{b_0} = x.$$

Como $u\tilde{u}x_0 = x$, por a) basta probar que:

$$\begin{aligned} du_x \circ d(u^{-1}\tilde{u})_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (d(u^{-1}\tilde{u})_{b_0})^{-1} &= d\tilde{u}_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (d\tilde{u}_{b_0})^{-1} \circ du_x \\ du_x \circ du_{ux}^{-1} \circ d\tilde{u}_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (d\tilde{u}_{b_0})^{-1} \circ (du_{ux}^{-1})^{-1} &= d\tilde{u}_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (d\tilde{u}_{b_0})^{-1} \circ du_x. \end{aligned}$$

Mas, $du_x \circ du_{ux}^{-1} = d(uu')_{ux} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} du_x \circ du_{ux}^{-1} \circ d\tilde{u}_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (d\tilde{u}_{b_0})^{-1} \circ (du_{ux}^{-1})^{-1} &= d\tilde{u}_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (d\tilde{u}_{b_0})^{-1} \circ (du_{ux}^{-1})^{-1} \\ &= d\tilde{u}_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (d\tilde{u}_{b_0})^{-1} \circ d(u^{-1})_x^{-1} \\ &= d\tilde{u}_{b_0} \circ \mathcal{F} \circ (d\tilde{u}_{b_0})^{-1} \circ du_x. \end{aligned}$$

□

Denotamos también por \mathcal{F} a su complejificada, esto es, el endomorfismo $\mathcal{F} : \mathfrak{q}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{q}^{\mathbb{C}}$, \mathcal{F} es diagonalizable con valores propios $i, 0, -i$ y determina los espacios propios correspondientes $\mathfrak{q}^+, \mathfrak{q}^0, \mathfrak{q}^-$. Tenemos entonces $\mathfrak{q}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{q}^{++} + \mathfrak{q}^0 + \mathfrak{q}^-$ con $\overline{\mathfrak{q}^+} = \mathfrak{q}^-$. La U -invariancia de \mathcal{F} garantiza que $\mathcal{F}(\mathfrak{g}_\alpha) \subseteq \mathfrak{g}_\alpha$ para todo $\alpha \in \Pi$, se cumple la igualdad cuando \mathcal{F} es una

estructura casi-compleja invariante. Así mismo \mathcal{F} es determinado de manera única por los valores $\varepsilon_\alpha \in \{0, \pm 1\}$, $\alpha \in \Pi$, definidos por $\mathcal{F}(X_\alpha) = i\varepsilon_\alpha X_\alpha$. Estos valores satisfacen $\varepsilon_{-\alpha} = -\varepsilon_\alpha$, por tanto \mathcal{F} es definida por sus valores en Π^+ . Abusamos de la notación e identificamos la f -estructura invariante \mathcal{F} sobre \mathbb{F} con $\varepsilon = \{\varepsilon_\alpha : \alpha \in \Pi\}$.

\mathcal{F} es una extensión de las estructuras casi-complejas dado que toda estructura casi-compleja es una f -estructura. En analogía con estas estructuras, los vectores propios asociados a 0 serán del tipo $(1, 0, 0)$, los asociados a $+i$ del tipo $(0, 1, 0)$ y los asociados a $-i$ de tipo $(0, 0, 1)$.

Recordemos que $(F(n), \mathcal{F}, ds^2)$ es $(1,2)$ -simpléctica si $(\nabla \mathcal{F})^{(1,1)} \equiv 0$, esto es, $(\nabla \mathcal{F})(X, Y) = 0$ cuando $X \in \mathfrak{q}^+$ y $Y \in \mathfrak{q}^-$. Cuando \mathcal{F} es una estructura casi-compleja, esta definición es equivalente a $(d\Omega)^{(1,2)} = 0$, con Ω la forma de Kähler, es por esto que se dio la definición de f -variedad $(1,2)$ -simpléctica.

Lema 2.7. *La f -variedad $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$ es $(1,2)$ -simpléctica si, y solamente si, para todo α, β , $\alpha + \beta \in \Pi$ con $X_\alpha \in \mathfrak{q}^+$ y $X_\beta \in \mathfrak{q}^-$ tenemos:*

$$\text{Si } X_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{q}^0 \text{ entonces } \lambda_\alpha = \lambda_\beta; \quad (2.4)$$

$$\text{si } X_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{q}^+ \text{ entonces } \lambda_\alpha = \lambda_\beta + \lambda_{\alpha+\beta}. \quad (2.5)$$

Demostración: Con X_α, X_β como en el teorema y usando la definición 2.4 y la ecuación (1.13) tenemos

$$\begin{aligned} (\nabla \mathcal{F})(X_\alpha, X_\beta) &= -im_{\alpha,\beta} \frac{\lambda_{\alpha+\beta} + \lambda_\beta - \lambda_\alpha}{\lambda_{\alpha+\beta}} X_{\alpha+\beta} - im_{\beta,\alpha} \frac{\lambda_{\alpha+\beta} + \lambda_\alpha - \lambda_\beta}{2\lambda_{\alpha+\beta}} X_{\alpha+\beta} + \\ &\quad - \mathcal{F}(m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}) = im_{\alpha,\beta} \frac{\lambda_\beta - \lambda_\alpha - \varepsilon_{\alpha+\beta} \lambda_{\alpha+\beta}}{\lambda_{\alpha+\beta}} X_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Por eso, si $X_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{q}^0$ tenemos

$$0 = (\nabla \mathcal{F})(X_\alpha, X_\beta) = im_{\alpha,\beta} \frac{\lambda_\beta - \lambda_\alpha}{\lambda_{\alpha+\beta}} X_{\alpha+\beta}.$$

Luego $\lambda_\beta = \lambda_\alpha$. En forma semejante, si $X_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{q}^+$ tenemos

$$0 = (\nabla \mathcal{F})(X_\alpha, X_\beta) = im_{\alpha,\beta} \frac{\lambda_\beta - \lambda_\alpha - \lambda_{\alpha+\beta}}{\lambda_{\alpha+\beta}} X_{\alpha+\beta},$$

y así $\lambda_\beta = \lambda_\alpha + \lambda_{\alpha+\beta}$. □

2.4. Forma de Kähler extendida a f -Estructuras

Sea $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$ una f -variedad bandera general, se define la forma de Kähler extendida como

$$\Omega(X, Y) = \Lambda(X, \mathcal{F}(Y)) = -\langle \Lambda \circ X, \mathcal{F} \circ Y \rangle.$$

Extendemos esta 2-forma U -invariante a una 2-forma sobre la complejificada $\mathfrak{q}^{\mathbb{C}}$ de \mathfrak{q} , la cual denotamos también por Ω . Ω es antisimétrica, dado que, su acción sobre los elementos en la base de Weyl está descrita por

$$\Omega(X_\alpha, X_\beta) = -i\lambda_\alpha \varepsilon_\beta \langle X_\alpha, X_\beta \rangle.$$

Recordemos que $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0$ a menos que $\alpha + \beta = 0$, en este caso tenemos

$$\begin{aligned} \Omega(X_\alpha, X_\beta) &= -i\lambda_\alpha \varepsilon_\beta = i\lambda_\alpha \varepsilon_\alpha = \\ &= -(-i\lambda_\beta \varepsilon_\alpha \langle X_\beta, X_\alpha \rangle) = -\Omega(X_\beta, X_\alpha). \end{aligned}$$

Resumiendo: Ω no es trivial solamente en los casos $\alpha = -\beta$ con $\varepsilon_\alpha \neq 0$, produciendo el valor

$$\Omega(X_\alpha, X_{-\alpha}) = i\lambda_\alpha \varepsilon_\alpha. \quad (2.6)$$

De igual forma que en el primer capítulo hallamos $d\Omega$.

Proposición 2.8. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi$. Entonces $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ es cero a menos que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ y $\{X_\alpha, X_\beta, X_\gamma\} \not\subset \mathfrak{q}^0$. En este caso tenemos

$$3d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -im_{\alpha, \beta}(\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma).$$

Demostración: Si $X, Y, Z \in \mathfrak{q}$ entonces $d\Omega$ en el origen está dada por (ver [18])

$$\begin{aligned} 3d\Omega(X, Y, Z) &= (\nabla_X \Omega)(Y, Z) & - & (\nabla_Y \Omega)(X, Z) & + & (\nabla_Z \Omega)(X, Y) & = \\ &= \nabla_X \Omega(Y, Z) & - & \Omega(\nabla_X Y, Z) & - & \Omega(Y, \nabla_X Z) & - \\ &- \nabla_Y \Omega(Y, Z) & + & \Omega(\nabla_Y X, Z) & + & \Omega(X, \nabla_Y Z) & + \\ &+ \nabla_Z \Omega(X, Y) & - & \Omega(\nabla_Z X, Y) & - & \Omega(X, \nabla_Z Y) & = \\ &= -\Omega([X, Y], Z) & + & \Omega(X, [Y, Z]) & - & \Omega(Y, \nabla_X Z) & - \\ &- \Omega(\nabla_Z X, Y). \end{aligned}$$

Ahora usando el item 5 en el Teorema 1.10 y 1.12 tenemos

$$3d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -m_{\alpha,\beta}\Omega(X_{\alpha+\beta}, X_\gamma) + m_{\beta,\gamma}\Omega(X_\alpha, X_{\beta+\gamma}) - m_{\alpha,\gamma}\frac{\lambda_{\alpha+\gamma} + \lambda_\gamma - \lambda_\alpha}{2\lambda_{\alpha+\gamma}}\Omega(X_\beta, X_{\alpha+\gamma}) - m_{\gamma,\alpha}\frac{\lambda_{\alpha+\gamma} + \lambda_\alpha - \lambda_\gamma}{2\lambda_{\alpha+\gamma}}\Omega(X_{\alpha+\gamma}, X_\beta).$$

Si en el lado derecho aplicamos (2.6), vemos que $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ se anula a menos que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ y $\{X_\alpha, X_\beta, X_\gamma\} \not\subset \mathfrak{q}^0$. En este caso

$$3d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = i(-m_{\alpha,\beta}\varepsilon_\gamma\lambda_\gamma - m_{\beta,\gamma}\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + m_{\alpha,\gamma}\frac{\lambda_{\alpha+\gamma} + \lambda_\gamma - \lambda_\alpha}{2\lambda_{\alpha+\gamma}}\varepsilon_\beta\lambda_\beta - m_{\gamma,\alpha}\frac{\lambda_{\alpha+\gamma} + \lambda_\alpha - \lambda_\gamma}{2\lambda_{\alpha+\gamma}}\varepsilon_\beta\lambda_\beta).$$

La identidad $\alpha + \beta + \gamma = 0$ implica que $m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\gamma} = m_{\gamma,\alpha}$ (ver [14]). Además de eso, como $m_{\alpha,\beta} = -m_{\beta,\alpha}$ tenemos finalmente

$$3d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -im_{\alpha,\beta}(\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma).$$

□

Definición 2.9. Sea $\mathcal{F} = \{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$ una f -estructura invariante. Una tripla de raíces $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi$ será llamada una (p, q, r) -tripla ($p + q + r = 3$) si

- (i) $\alpha + \beta + \gamma = 0$;
- (ii) El conjunto $\{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma\}$ contiene p ceros, q unos y r menos uno.
- (iii) Denotaremos por $\{p, q, r\} = (p, q, r) \cup (p, r, q)$.

En esta notación las $\{0, 3, 0\}$ -triplas y $\{0, 1, 2\}$ -triplas corresponden respectivamente a las $\{0, 3\}$ -triplas y $\{1, 2\}$ -triplas, en el caso casi-complejo (vea, [32], [33]). Además de las anteriores, aparecen las $\{3, 0, 0\}$ -triplas, Las $\{2, 1, 0\}$ -triplas, las $\{1, 2, 0\}$ -triplas y las $\{1, 1, 1\}$ -triplas.

Definición 2.10. Una $(\mathbb{F}, \mathcal{F})$ es $(1,2)$ -admisiblesi existe una métrica Λ tal que $(\mathbb{F}, \Lambda, \mathcal{F})$ es una f -variedad $(1,2)$ -simpléctica.

Capítulo 3

EL CASO A_n

En este capítulo, consideramos la variedad bandera maximal definida en el capítulo uno, o sea, la variedad bandera maximal $\mathbb{F}(n)$ asociada al álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. y damos una descripción completa de las f -estructuras invariantes (1,2)-admisibles. En este caso el conjunto formado por $E_{jk}, j \neq k$ y $E_{jj} - E_{kk}, j > k$ es una base para $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, \mathfrak{h} es la subálgebra de las matrices diagonales y \mathfrak{q} es generada por las matrices $A_{jk} = E_{jk} - E_{kj}$ y $S_{jk} = i(E_{jk} + E_{kj})$.

Como enunciamos en el primer capítulo para $\mathbb{F}(n)$ y J se puede establecer una correspondencia entre J y un grafo orientado completo (torneo). Vea [8], [22] y [25].

Mo y Negreiros probaron en [20] que las f -estructuras $U(n)$ -invariantes sobre una variedad bandera compleja están en correspondencia 1:1 con las matrices antisimétricas $\epsilon(\mathcal{F}) = \{\epsilon_{ij}\}$ donde ϵ_{ij} toma valores en el conjunto $\{-1, 0, 1\}$, lo que sugiere una correspondencia 1:1 entre f -estructuras invariantes y grafos orientados (digrafos) no necesariamente completos.

Recordemos que la palabra *digrafo* significa un grafo orientado finito $\mathcal{G} = (V, E)$, donde V es el conjunto de vértices y E el conjunto de arcos de \mathcal{G} . Si $v, w \in V$ entonces un arco orientado $v \rightarrow w$, significará $vw \in E$. El símbolo $v \leftrightarrow w$ indicará que vw o wv están en E . Además de eso definimos los conjuntos v -perdedor y v -ganador de la siguiente forma:

$$\mathcal{G}_p(v) = \{w \in V : vw \in E\}, \quad \mathcal{G}_g(v) = \{w \in V : wv \in E\},$$

tales conjuntos considerados como subdígrafos de \mathcal{G} . Decimos que v es un *ganador* (resp. *perdedor*) en \mathcal{G} si $\mathcal{G}_p(v)$ o $\mathcal{G}_g(v)$ es igual a $V \setminus \{v\}$.

De igual forma que en la definición 1.26 se define un homomorfismo entre digrafos así: sean \mathcal{G}_1 un digrafo con n vértices $\{1, \dots, n\}$ y \mathcal{G}_2 un digrafo con m vértices $\{1, \dots, m\}$. un homomorfismo entre \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 es una aplicación

$\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ tal que

$$s \xrightarrow{\mathcal{G}_1} t \implies \phi(s) \xrightarrow{\mathcal{G}_2} \phi(t) \quad \text{o} \quad \phi(s) = \phi(t)$$

y si

$$s \xleftrightarrow{\mathcal{G}_1} t \implies \phi(s) \xleftrightarrow{\mathcal{G}_2} \phi(t)$$

Cuando ϕ es biyectiva decimos que \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 son isomorfos.

En este caso, como se muestra en las Figuras (3.2)-(3.6) para $n = 2$ existen 2 clases de isomorfismos, para $n = 3$ aparecen 7 clases de isomorfismos y 42 clases de isomorfismos para $n = 4$.

Igual que en el caso de J estructuras, las f -estructuras invariantes sobre $\mathbb{F}(n)$, están en correspondencia 1:1 con digrafos de n vértices a través de la matriz de incidencia del digrafo. De hecho, en el caso $\mathbb{F}(n)$ el sistema de raíces Π puede ser identificado como el conjunto $\{(j, k) : 1 \leq j, k \leq n, j \neq k\}$, donde pares de raíces opuestas $\{\alpha, -\alpha\}$ corresponden a pares $\{(j, k), (k, j)\}$. Recordemos que una f -estructura invariante \mathcal{F} está determinada por sus valores en Π^+ . Estos valores son ordenados, formando una matriz $\varepsilon = (\varepsilon_{jk})_{n \times n}$. La matriz ε se puede identificar como la matriz de incidencia de algún digrafo $\mathcal{G} = (V, E)$ con $V = \{1, \dots, n\}$ de la siguiente manera: Si $\mathcal{F}(E_{jk}) = i\varepsilon_{jk}E_{jk}$ entonces $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ es tal que para $j < k$

$$j \rightarrow k \iff \varepsilon_{jk} = 1$$

y

$$j \leftarrow k \iff \varepsilon_{jk} = -1$$

y

$$j \leftrightarrow k \iff \varepsilon_{jk} = 0$$

estableciendo así una correspondencia biunívoca entre f -estructuras invariantes sobre $\mathbb{F}(n)$ y digrafos de n vértices. Una construcción similar es válida para métricas invariantes

$\Lambda = \{\lambda_{jk}\}$ en $(\mathbb{F}(n), \mathcal{F})$, de manera que podemos identificar cada λ_{jk} con un autovalor positivo definido sobre el arco dirigido jk del digrafo E . Note que si $\varepsilon_{jk} = 0$ el autovalor λ_{jk} no aporta mayor información dado que $jk \notin E$.

Ejemplo: Consideremos

$$\mathbb{F}(4) = U(4)/(U(1) \times U(1) \times U(1) \times U(1)) = U(4)/T.$$

En este caso

$$\mathfrak{q} = T(\mathbb{F}(4))_{(b_0)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -\bar{a} & 0 & d & e \\ -\bar{b} & -\bar{d} & 0 & f \\ -\bar{c} & -\bar{e} & -\bar{f} & 0 \end{pmatrix}, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C} \right\}.$$

Tomemos la siguiente f -estructura sobre $\mathbb{F}(4)$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -\bar{a} & 0 & d & e \\ -\bar{b} & -\bar{d} & 0 & f \\ -\bar{c} & -\bar{e} & -\bar{f} & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -ia & -ib & ic \\ -i\bar{a} & 0 & 0 & -ie \\ -i\bar{b} & 0 & 0 & -if \\ i\bar{c} & -i\bar{e} & -i\bar{f} & 0 \end{pmatrix}.$$

Como el elemento (1,2) de la matriz fue multiplicado por $-\sqrt{-1}$, el digrafo correspondiente tiene un arco orientado de 2 para 1; lo mismo ocurre con el elemento (1,3), entonces el digrafo tiene un arco orientado de 3 para 1. El elemento (1,4) fue multiplicado por $\sqrt{-1}$ entonces el digrafo tiene un arco dirigido de 1 a 4. Mientras que el elemento (2,3) fue multiplicado por 0, entonces el digrafo no tiene un arco ligando 2 con 3. El digrafo (34) en la Figura 3.5 es el digrafo asociado a ésta f -estructura.

De acuerdo con Black [2], las condiciones para $(\mathbb{F}(n), \Lambda, \mathcal{F})$ sea (1,2)-simplética son determinadas por las siguientes reglas:

$$Si \quad j \rightarrow l, \quad k \rightarrow l, \quad j \leftrightarrow k \quad entonces \quad \lambda_{lj} = \lambda_{lk}; \quad (3.1)$$

$$Si \quad l \rightarrow j, \quad l \rightarrow k, \quad j \leftrightarrow k \quad entonces \quad \lambda_{lj} = \lambda_{lk}; \quad (3.2)$$

$$Si \quad l \rightarrow j, \quad j \rightarrow k, \quad l \rightarrow k \quad entonces \quad \lambda_{lk} = \lambda_{lj} + \lambda_{jk}. \quad (3.3)$$

Lo que puede ser resumido en la figura 3.1

El propósito de este capítulo es caracterizar las f -estructuras invariantes que admiten métricas (1,2)-simplecticas. Es decir, deseamos caracterizar los digrafos $\mathcal{G} = (V, E)$ que

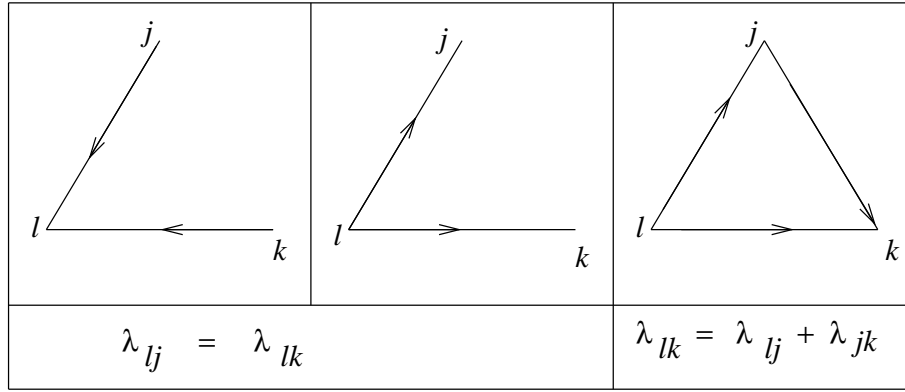


Figura 3.1: Condiciones de métrica

admiten autovalores positivos $\Lambda = (\lambda_{jk})$ los cuales satisfacen las propiedades (3.1), (3.2) y (3.3).

3.1. Los casos $\mathbb{F}(2)$, $\mathbb{F}(3)$ y $\mathbb{F}(4)$

Las figuras (3.2)-(3.6) muestran las clases de isomorfismos de f -estructuras invariantes en $\mathbb{F}(n)$ para $n=2,3,4$, respectivamente. para $n=2,3$ todas las clases son (1,2)-admisibles.

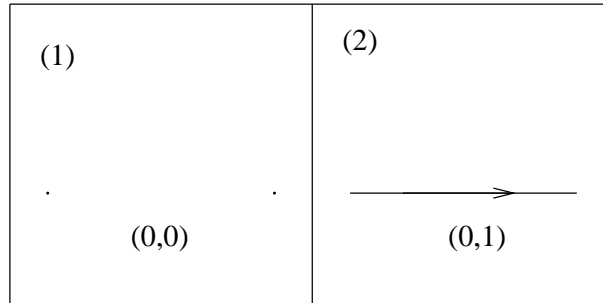


Figura 3.2: Clases de isomorfismos para $n = 2$

De hecho en el caso $\mathbb{F}(3)$ existen 7 clases de isomorfismos de f -estructuras invariantes (ver Figura 3.3). La métrica Cartan-Killing, $\lambda_{ij} = 1$ es (1,2)-simpléctica para todas las f -estructuras en la Figura 3.4 y las f -estructuras correspondientes a (1) – (6) en la Figura 3.3 la clase (7) que corresponde a la estructura casi-compleja invariante integrable (o sea Kähler) y por tanto es (1,2)-admisible (vea [8]).

En $\mathbb{F}(4)$ existen 42 clases de isomorfismos de f -estructuras invariantes (ver Figuras 3.4,

3.5 y 3.6). Solo las 36 que aparecen en 3.4 y 3.5 son (1,2)-admisibles. De hecho las siete clases (1), (2), (3), (6), (7), (15), (25) son trivialmente (1,2)-admisibles, dado que en ellas no aparecen las configuraciones dadas en la Figura 3.1. Las 29 clases (8)-(14), (16)-(24) y (26)-(36) junto con las métricas que ellas admiten, aparecen en el apéndice A de [28].

Las seis clases restantes, (37)-(42), aparecen en la Figura 3.6 y las separamos de las anteriores precisamente por no ser (1,2)-admisibles. Para estas 6 clases aplicamos las condiciones dadas (3.1), (3.2) y (3.3) para mostrar la (1,2)-admisibilidad:

En la clase (37) $\lambda_{23} = \lambda_{12} + \lambda_{31}$, $\lambda_{42} = \lambda_{23} + \lambda_{34}$, $\lambda_{13} = \lambda_{43} + \lambda_{14}$ y $\lambda_{12} = \lambda_{24} + \lambda_{41}$ de lo anterior tendríamos que $\lambda_{12} + \lambda_{34} = 0$, lo que es absurdo dadas las condiciones de la métrica Λ .

En la clase (38) $\lambda_{23} = \lambda_{13} + \lambda_{12}$, $\lambda_{34} = \lambda_{23} + \lambda_{24}$ y $\lambda_{13} = \lambda_{34}$, de lo anterior tendríamos que $\lambda_{12} + \lambda_{24} = 0$ lo que es absurdo dadas las condiciones de la métrica Λ .

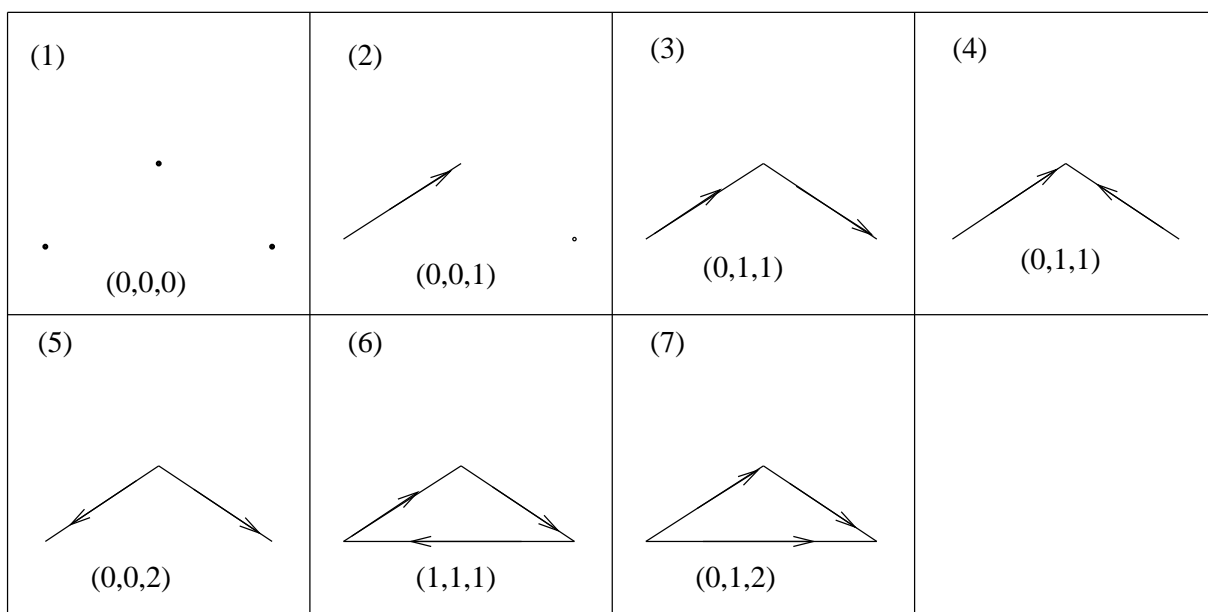


Figura 3.3: clases de isomorfismos para $n = 3$

En la clase (39) $\lambda_{12} = \lambda_{23} + \lambda_{31}$, $\lambda_{32} = \lambda_{34} + \lambda_{42}$, $\lambda_{31} = \lambda_{34} + \lambda_{41}$ y $\lambda_{24} = \lambda_{12} + \lambda_{41}$ de lo anterior tendríamos que $\lambda_{34} = 0$ absurdo.

En la clase (40) $\lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23}$, $\lambda_{34} = \lambda_{13} = \lambda_{23}$, de lo anterior tendríamos que $\lambda_{12} = 0$, absurdo.

En la clase (41) $\lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23}$, $\lambda_{23} = \lambda_{24} + \lambda_{34}$ y $\lambda_{13} = \lambda_{34}$, de lo anterior tendríamos

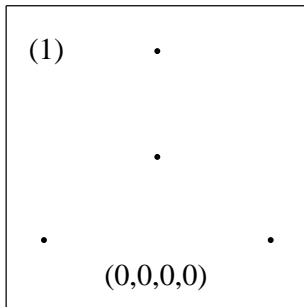
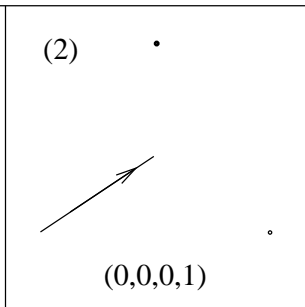
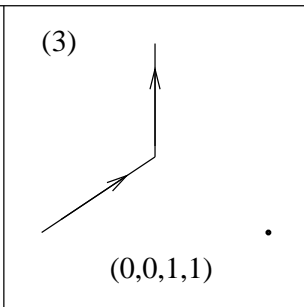
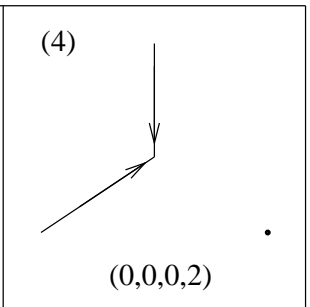
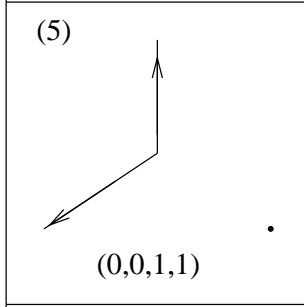
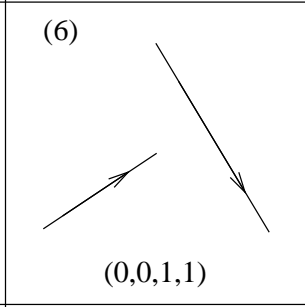
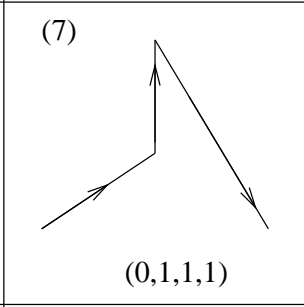
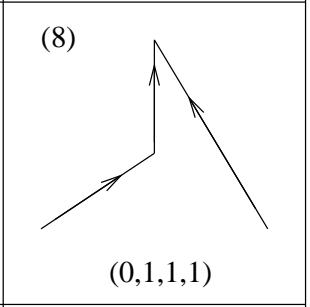
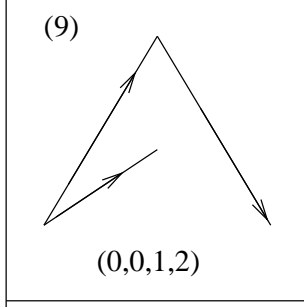
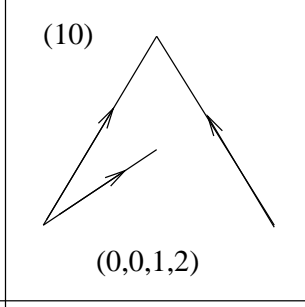
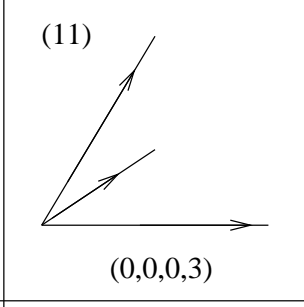
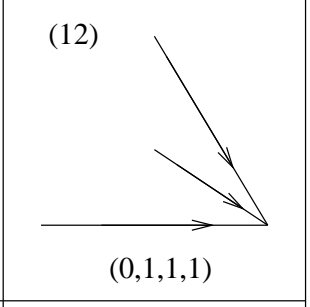
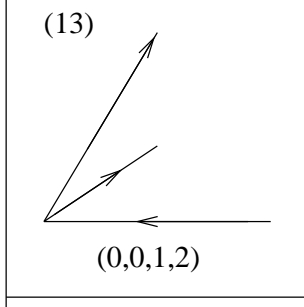
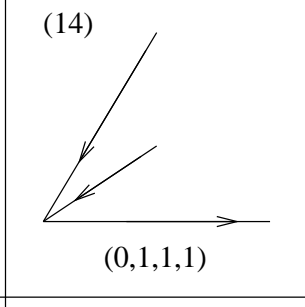
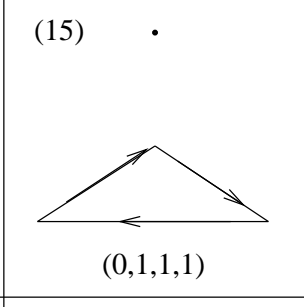
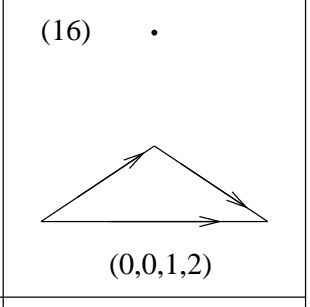
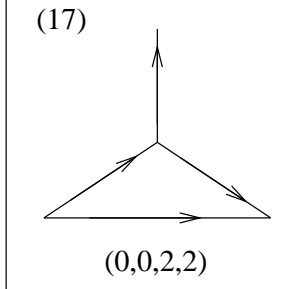
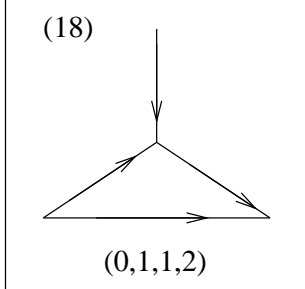
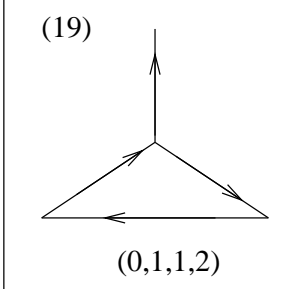
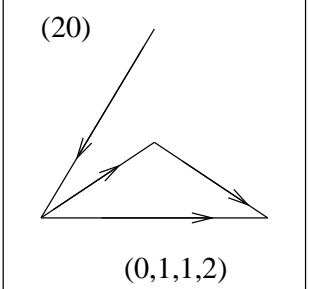
(1)  (0,0,0,0)	(2)  (0,0,0,1)	(3)  (0,0,1,1)	(4)  (0,0,0,2)
(5)  (0,0,1,1)	(6)  (0,0,1,1)	(7)  (0,1,1,1)	(8)  (0,1,1,1)
(9)  (0,0,1,2)	(10)  (0,0,1,2)	(11)  (0,0,0,3)	(12)  (0,1,1,1)
(13)  (0,0,1,2)	(14)  (0,1,1,1)	(15)  (0,1,1,1)	(16)  (0,0,1,2)
(17)  (0,0,2,2)	(18)  (0,1,1,2)	(19)  (0,1,1,2)	(20)  (0,1,1,2)

Figura 3.4: clases de isomorfismos para $n = 4$

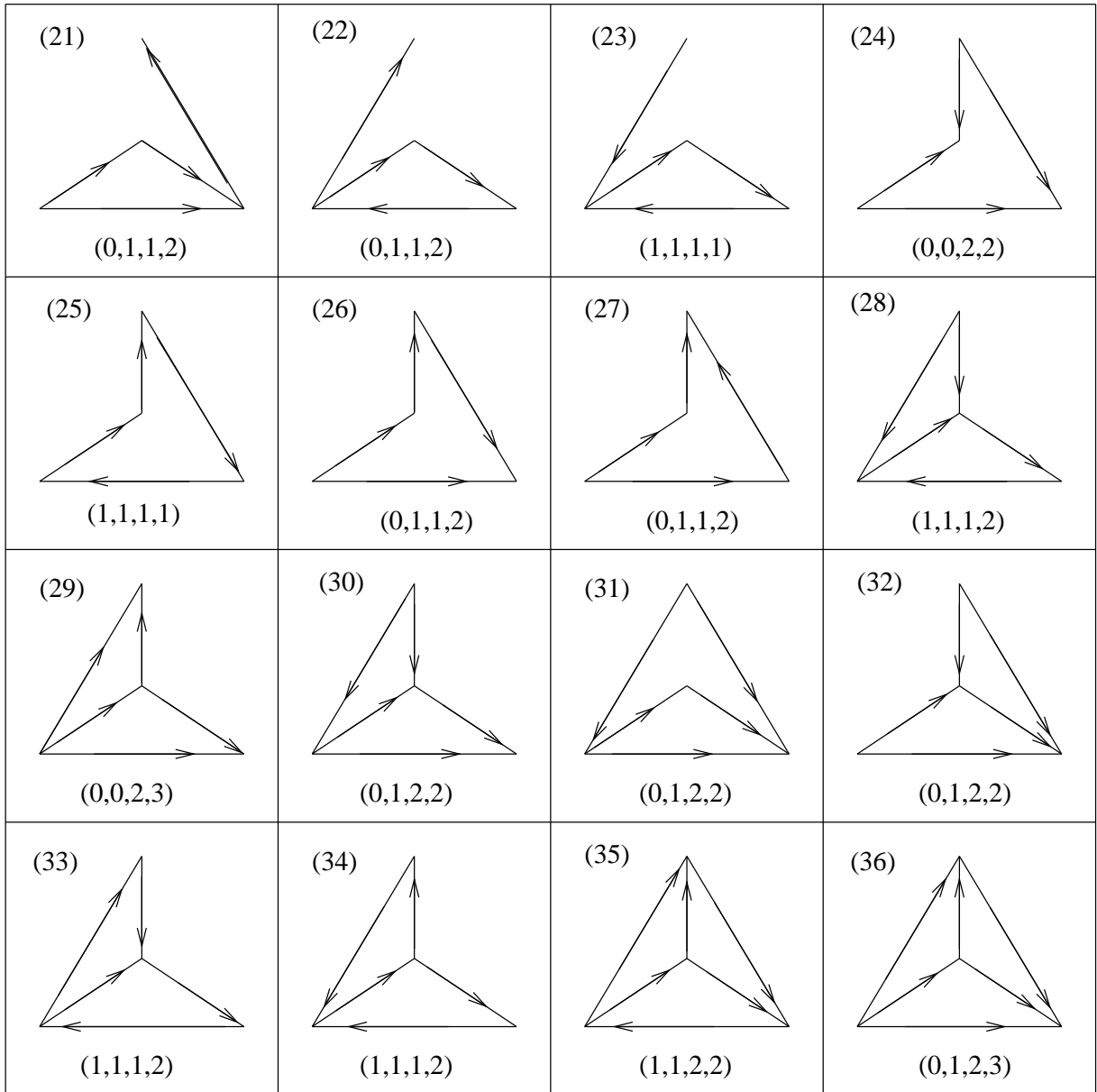


Figura 3.5: clases de isomorfismos para $n = 4$

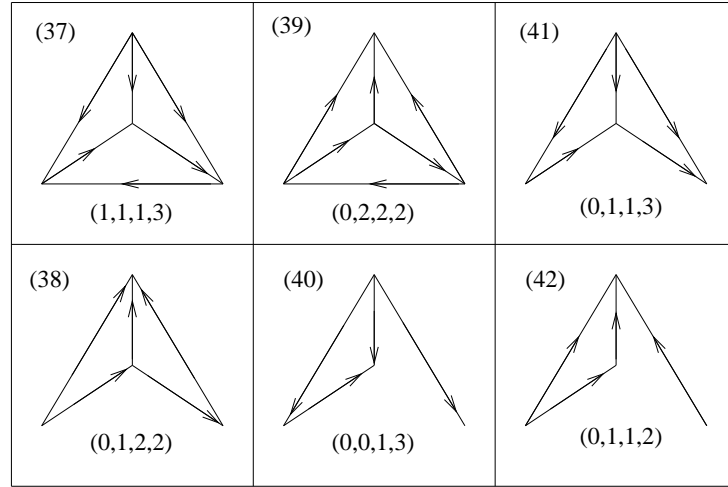


Figura 3.6: clases de isomorfismos para $n = 4$

que $\lambda_{12} + \lambda_{24} = 0$ lo que es absurdo dadas las condiciones de la métrica Λ .

En la clase (42) $\lambda_{23} = \lambda_{13} + \lambda_{12}$, $\lambda_{34} = \lambda_{13} = \lambda_{23}$, de lo anterior tendríamos que $\lambda_{12} = 0$, absurdo.

3.2. f -Estructuras Localmente Transitivas

A continuación daremos esenciales definiciones para obtener nuestro principal resultado en este capítulo.

Definición 3.1. *Un digrafo $\mathcal{G}' := (V', E')$ es llamado:*

1. *Trivial si la cardinalidad de el conjunto E' es cero;*
2. *transitivo si la relación " \rightarrow " es transitiva (o sea, para $i, j, k \in V'$, $i \rightarrow j \rightarrow k$ implica $i \rightarrow k$);*
3. *relativamente conexo si para todo $i, j, k \in V'$, $i \rightarrow j$ implica $i \leftrightarrow k$ o $j \leftrightarrow k$.*

Transitividad en digrafos *completos* también ha sido bastante estudiada y puede ser caracterizada por la ausencia de 3-ciclos (esto es, 3-subdigrafo de la forma $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$). La matriz de incidencia es semejante, a menos de permutaciones, a la matriz canónica $\varepsilon_{jk} = 1$ ($j < k$) [23]. Por ahora, estamos interesados en la siguiente versión *local* de esta

propiedad.

Definición 3.2. *Decimos que el digrafo $\mathcal{G} = (V, E)$ es localmente transitivo si $\forall v \in V$ cada uno de los conjuntos $\mathcal{G}_p(v)$ y $\mathcal{G}_g(v)$ es transitivo y relativamente conexo.*

Con respecto a las f -estructuras invariantes decimos que \mathcal{F} es localmente transitiva si su digrafo asociado es localmente transitivo.

De la definición anterior tenemos:

1. Transitividad local significa que el digrafo $\mathcal{G}_p(v), \mathcal{G}_g(v)$ omite determinados 4-subdigrafos, esto es, aquellos que poseen un subconjunto no vacío de arcos dirigidos de un 3-ciclo, (ver Figura 3.6).
2. En el caso no completo, la definición 3.2 es más flexible: esta definición permite que alguno de estos subdigrafos, decimos $\mathcal{G}_g(v)$, puede ser trivial, en cuanto que $\mathcal{G}_p(v)$ puede ser transitivo y relativamente conexo.
3. Si $\max\{|\mathcal{G}_g(v)|, |\mathcal{G}_p(v)|\} \leq 2 \forall v \in V$, entonces \mathcal{G} es localmente transitivo.

En $\mathbb{F}(3)$, las 7 clases de isomorfismos de f -estructuras invariantes y sus digrafos asociados se pueden observar en la figura 3.3. Por ejemplo, el digrafo (7) es localmente transitivo porque es transitivo y relativamente conexo. De igual forma, se puede ver fácilmente que las 6 clases restantes de isomorfismos de f -estructuras invariantes son todas localmente transitivas, verificando que los digrafos asociados a estas f -estructuras son localmente transitivos.

En $\mathbb{F}(4)$, de las 42 clases de isomorfismos de f -estructuras invariantes, apenas las 36 que aparecen en las Figuras 3.4 y 3.5 son localmente transitivas.

De acuerdo con la figura 3.6, un 4-digrafo no localmente transitivo tiene un ganador o un perdedor, pero no ambos. Los arcos dirigidos del 3-digrafo obtenido borrando el ganador/perdedor forman un subconjunto no vacío de los arcos dirigidos de un 3-ciclo (ver Figura 3.6).

De aquí en adelante identificaremos las f -estructuras invariantes \mathcal{F} con su digrafo asociado \mathcal{G} .

Lema 3.3. \mathcal{G} es localmente transitivo si, y solamente si, cada 4-subdigrafo de \mathcal{G} es localmente transitivo.

Demostración: Si \mathcal{G} es localmente transitivo entonces cualquier subdigrafo de \mathcal{G} , incluso los 4-subdigrafos, son localmente transitivos. Para la demostración del lema en el otro sentido supongamos que \mathcal{G} no es localmente transitivo. Entonces tenemos dos casos, que dejan ver la existencia de un 4-subdigrafo no localmente transitivo, completando así la demostración.

Caso 1: Existe $v \in V$ tal que uno de los conjuntos $\mathcal{G}_p(v), \mathcal{G}_g(v)$ no es transitivo. Esto quiere decir que existen $j, k, l \in V$ tal que $jk, kl \in E$ y $jl \notin E$. Podemos verificar que con las condiciones anteriores si lj pertenece o no a E , el 4-subdigrafo de \mathcal{G} con vértices $\{v, j, k, l\}$ corresponde a uno de los tres primeros digrafos en la Figura 3.6 y, por tanto, no es localmente transitivo.

Caso 2: Existe $v \in V$ tal que uno de los conjuntos $G_p(v), G_g(v)$ no es relativamente conexo. Esto es, estos conjuntos contienen $j, k, l \in V$ tales que $jk \in E$ y $jl, kl, lj, lk \notin E$. Aquí también el 4-subdigrafo con vértices $\{v, j, k, l\}$ obtenido con las condiciones anteriores corresponde a uno de los tres últimos digrafos en la Figura 3.6. Por tanto, no es localmente transitivo.

En el importante caso de los digrafos *completos*, la f -estructura invariante asociada es una estructura casi-compleja. Exactamente dos de los seis 4-digrafos no localmente transitivos en la Figura 3.6 son completos, aquellos que contienen un ganador/perdedor y un 3-ciclo. En [21] estos dos digrafos fueron llamados “conados” y en [7], [8] un digrafo completo \mathcal{G} que omitía estos dos digrafos fue llamado “libre de cono”. El Lema 3.4 establece por tanto que \mathcal{G} es localmente transitivo si, y solamente si, él es libre de cono. Tenemos entonces como resultado que los dos conjuntos de digrafos completos estudiados separadamente en [7], [8], [21],[27] (digrafos libres de cono) y [5] (digrafos localmente transitivos) son iguales. Brouwer en [5] calcula la cantidad de torneos localmente transitivos de n vértices a ser:

$$\sum_{d|n} \left(\frac{2^{d-1}}{d} \text{odd}\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{e|\frac{n}{d}} \frac{\mu(e)}{e} \right), \quad (3.4)$$

□

Donde μ es la función de Möbius y $\text{odd}(j)$ es 1 o cero dependiendo si j es impar o par, respectivamente. Con eso fue respondida la pregunta hecha en [25] sobre la cantidad de estructuras casi-complejas invariantes (1,2)-admisibles en $\mathbb{F}(n)$.

3.3. Digrafos Completamente No Transitivos

Estudiamos aquí la forma de las métricas (1,2)-simplécticas sobre una clase especial de digrafos localmente transitivos que llamaremos digrafos completamente no transitivos.

Definición 3.4.

- (i) Un triángulo transitivo es un digrafo completo transitivo $\mathcal{G}_t = (V_t, E_t)$ con $|V_t| = 3$. Asumiendo $V_t = \{u, v, w\}$ y $E = \{uv, vw, uw\}$, nos referiremos a uv, vw como los lados y a uw como la base de el digrafo \mathcal{G}_t .
- (ii) Un digrafo $\mathcal{G}' = (V', E')$ es completamente no transitivo (simbolizaremos **CNT**) si \mathcal{G}' no contiene triángulos transitivos.

Un digrafo **CNT** es localmente transitivo. De hecho los conjuntos $\mathcal{G}'_g(v)$ y $\mathcal{G}'_p(v)$ son triviales en el sentido de la definición 3.1 (equivalentemente, el digrafo es también libre de cono dado que cada 4-digrafo conado contiene un triángulo transitivo, vea la figura 3.6).

Al mismo tiempo, un digrafo **CNT** admite métricas (1,2)-simplécticas, esto es, autovalores positivos $\{\lambda_e > 0, e \in E'\}$ los cuales satisfacen las identidades (3.1)-(3.3). De hecho debido a ausencia de triángulos transitivos, el sistema de ecuaciones (3.1)-(3.3) no posee identidades de el tipo (3.3); luego la *métrica de Cartan-Killing* $\lambda \equiv 1$, que satisface automáticamente (3.1-3.2), es (1,2)-simpléctica (en general \mathcal{G}' admite métricas (1,2)-simplécticas no-constantas junto con la métrica Cartan-Killing).

Observamos que la métrica Cartan-Killing $\lambda \equiv 1$ sobre un digrafo \mathcal{G}' es (1,2)-simpléctica si, y solamente si, \mathcal{G}' es **CNT**. En particular si \mathcal{G}' es completo, la métrica Cartan-Killing es (1,2)-simpléctica solamente si $|V| \leq 3$, como fue observado en [7].

Ahora definamos la siguiente relación de equivalencia entre los arcos dirigidos de E' : $e \sim e'$ si para algún $v, v', u \in V$ tenemos $e = vu$ y $e' = v'u'$, o $e = uv$ y $e' = u'v'$. Una métrica sobre \mathcal{G}' es (1,2)-simpléctica si, y solamente si, ella es constante sobre cada clase de equivalencia en E' . Así mismo, la dimensión del espacio de las métricas (1,2)-simplécticas es igual a el número de clases de equivalencia η en E' .

3.4. El Caso General

En el estudio de las métricas (1,2)-simplécticas sobre un digrafo localmente transitivo \mathcal{G} , nuestra metodología será la de reducir \mathcal{G} a un digrafo asociado \mathcal{G}' **CNT** con el mismo conjunto de vértices, basado en el siguiente “Lema de remoción de arcos dirigidos”.

Lema 3.5. Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un digrafo localmente transitivo que no es **CNT**. Entonces E contiene por lo menos un arco dirigido el cual es una base mas no un lado. Consecuentemente, el subdigrafo $\tilde{\mathcal{G}} := (V, E \setminus \{e\})$ es localmente transitivo.

Demostración: Sea $\mathcal{G}_* = (V_*, E_*)$ un subdigrafo de \mathcal{G} completo maximal transitivo y $|V_*| \geq 3$. La hipótesis garantiza la existencia de por lo menos uno de esos subdigrafos. Entonces \mathcal{G}_* posee una única base $e \in E_*$ que no es un lado. De hecho \mathcal{G}_* es isomorfo al torneo canónico. El vector resultado de \mathcal{G}_* es $(0, 1, 2, \dots, r-1) V_* = \{1, 2, \dots, r\}$. \mathcal{G}_* posee un arco dirigido uniendo los subdigrafos ganador y perdedor, por ejemplo e_{1r} que es el único arco que es base en cualquier triángulo de \mathcal{G}_* en que él aparece. El arco e_{1r} es por tanto, una base en \mathcal{G} . Afirmamos que e_{1r} no puede ser lado en algún triángulo transitivo de \mathcal{G} . Asumamos al contrario que tal triángulo $\mathcal{G}_t = (V_t, E_t)$ existe. Note que $V_t \not\subset V_*$ dado que e no es un lado en \mathcal{G}_* . Luego, el subdigrafo \mathcal{G}^* de \mathcal{G} soportado sobre $V_* \cup V_t$ contiene estrictamente \mathcal{G}_* . Transitividad local de \mathcal{G} implica que \mathcal{G}^* es de nuevo completo y transitivo. De hecho en \mathcal{G}_t , $V_t = \{1, r, t\}$, $t \geq r$. Para cada $v \in V_*$ considere el 4-subdigrafo de \mathcal{G}^* soportado sobre los vértices $1, t, r, v$. Como \mathcal{G} es localmente transitivo, necesariamente debe existir el arco vt , caso contrario este 4-subdigrafo sería uno de los seis en la Figura 3.6. Luego el vector resultado en cada vértice de V_* aumenta en 1. Por tanto el vector resultado de \mathcal{G}^* es $(0, 1, \dots, r)$ el que implica que \mathcal{G}^* es completo y transitivo, contradiciendo la maximalidad de \mathcal{G}_* .

A continuación mostraremos que $\tilde{\mathcal{G}}$ es localmente transitivo. Por el Lema 3.4 es suficiente mostrar que cada 4-subdigrafo $\hat{\mathcal{G}}$ de $\tilde{\mathcal{G}}$ es localmente transitivo. Si e no es un lado en $\hat{\mathcal{G}}$, no hay nada que demostrar, dado que $\hat{\mathcal{G}}$ es subdigrafo de \mathcal{G} . En caso contrario, asuma $e = uw$ con u, w vértices en $\hat{\mathcal{G}}$. Suponga que $\hat{\mathcal{G}}$ no es localmente transitivo. De acuerdo con la Figura 3.6 $\hat{\mathcal{G}}$ contiene un ganador o un perdedor, v . Dado que e no está en $\hat{\mathcal{G}}$, $v \neq u, w$. En cualquiera de los dos casos, v ganador o perdedor, e es un lado en el triángulo transitivo $\{v, u, w\}$, lo que es imposible por la primera parte del lema. \square

Por el Lema 3.4 y por [8], tenemos que una f -estructura casi-compleja invariante sobre $\mathbb{F}(n)$ es localmente transitiva si, y solamente si, ella es (1,2)-admisibile. La extensión del

resultado anterior, para cualquier f -estructura invariante sobre $\mathbb{F}(n)$ es nuestro principal resultado en este capítulo.

Teorema 3.6. *El digrafo $\mathcal{G} = (V, E)$ admite métricas (1,2)-simplécticas si, y solamente si, es localmente transitivo.*

Demostración: Para $n < 4$, observamos en la sección 3.2, que \mathcal{G} es siempre localmente transitivo. Para $n = 4$, la verificación está basada en los digrafos de las figuras 3.4 y 3.5 y las métricas admitidas aparecen en el Apéndice A de [28]. Así mismo, asuma $n > 4$.

Si \mathcal{G} admite métricas (1,2)-simplécticas, entonces por restricción, cada 4-subdigrafo de \mathcal{G} es (1,2)-admisibles, y por la observación hecha anteriormente, localmente transitivo. Por el Lema 3.4, \mathcal{G} es localmente transitivo.

Recíprocamente, asuma que \mathcal{G} es localmente transitivo. Argumentamos por inducción: Si \mathcal{G} es **CNT** entonces la existencia de métricas (1,2)-simplécticas fue garantizada en la sección anterior. En caso contrario por el Lema 3.6 seguimos removiendo secuencialmente bases e_k , $k = 1, \dots, r$ de $\mathcal{G} = (V, E)$, obteniendo una secuencia de digrafos $\tilde{\mathcal{G}}_k = (V, \tilde{E}_k)$ localmente transitivos. El proceso acaba cuando no existen más triángulos transitivos, o sea, cuando $\tilde{\mathcal{G}}_k = (V, \tilde{E}_k)$ es **CNT**, para algún k . Por la hipótesis de inducción, cada $\tilde{\mathcal{G}}_k$ admite métricas (1,2)-simplécticas. Extendemos, en forma inversa la remoción de bases, la métrica sobre $\mathcal{G}_{\parallel-\infty}$ definiendo $\lambda_{e_k} = \lambda_{\tilde{e}} + \lambda_{\tilde{\tilde{e}}}$, donde \tilde{e} , $\tilde{\tilde{e}}$ son los lados correspondientes a la base e_k . Esta es la única extensión para la cual Λ es (1,2)-simpléctica sobre el triángulo en que están, por tanto la única extensión la cual debe ser (1,2)-simpléctica para todo \mathcal{G} . Queremos mostrar que de hecho ésta es (1,2)-simpléctica.

Paso 1. La extensión es bien definida. Esto es, asuma que $e = uv$ es simultáneamente base para dos triángulos transitivos, decimos, $\{uv, vw, uw\}$ y $\{uz, zw, uw\}$ con $\{u, v, w, z\} \subset V$. Primero mostraremos que

$$\lambda_{uz} + \lambda_{zw} = \lambda_{uv} + \lambda_{vw}. \quad (3.5)$$

Hay dos casos a considerar. Si $v \leftrightarrow z$, podemos asumir por analogía $v \rightarrow z$. En este caso, por (3.3) $\lambda_{vz} = \lambda_{uz} - \lambda_{uv}$ y $\lambda_{vz} = \lambda_{vw} - \lambda_{zw}$, implicando (3.5). Caso contrario, por (3.1-3.2) $\lambda_{uv} = \lambda_{uz} \lambda_{vw} = \lambda_{zw}$, de nuevo implicando (3.5).

Paso 2. Mostramos aquí que la métrica extendida es de hecho (1,2)-simpléctica. Cada conflicto con (3.1-3.3) podría envolver el arco removido e , ya que $\tilde{\mathcal{G}}$ por hipótesis satisface

estas restricciones. Por el Lema (3.6) e no es un lado en \mathcal{G} , por tanto cualquier conflicto (3.3) es de el tipo ya discutido en el paso 1.

Un conflicto con (3.1) implica que $\lambda_e \neq \lambda'_e$ donde, decimos, $e = uw$ y $e' = tw$. Esto puede ocurrir solamente si $t \leftrightarrow u$. Ahora es fácil ver independientemente de la relación entre v y t que \mathcal{G} y $\tilde{\mathcal{G}}$ no pueden ser ambos localmente transitivo, dado que uno de los dos contiene uno de los digrafos no localmente transitivos que aparecen en la Figura 3.6. Esto es una contradicción de nuestras hipótesis.

Un conflicto con (3.2) produce una contradicción semejante, y así mismo la demostración está completa. \square

Asuma que el digrafo localmente transitivo es reducido, vía remoción de bases, a un digrafo **CNT**, \mathcal{G}' . El teorema 3.7 muestra que cada métrica (1,2)-simpléctica sobre \mathcal{G}' se extiende de forma única a una métrica (1,2)-simpléctica sobre \mathcal{G} .

Capítulo 4

Álgebras de Lie de Rango tres

En éste capítulo estudiamos las características (subálgebra de Cartan y sistema simple de raíces) del álgebra de Lie semisimple de dimensión finita B_l . También consideramos la variedad bandera maximal asociada a las álgebras de Lie de rango tres con una métrica y una f -estructura invariante. Demostraremos aquí la equivalencia entre localmente transitiva y (1,2)-simpléctica para los casos mencionados demostrando caso a caso.

Veamos las características del álgebra de Lie de tipo B_l .

4.1. Álgebra de Lie de tipo B_l

Estas álgebras son semi-simples y tienen como representantes las álgebras de matrices antisimétricas de dimensión impar

$$\mathfrak{so}(2l + 1) = \{A \in \mathfrak{sl}(2l + 1) : A^t + A = 0\}.$$

Para encontrar una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(2l + 1)$ es conveniente escribir esta álgebra como las matrices de transformaciones lineales antisimétricas en relación a la forma cuadrática no degenerada.

Las álgebras de matrices antisimétricas en relación a formas cuadráticas no degeneradas distintas son isomorfas. De hecho, suponga que J_1 y J_2 son matrices simétricas que definen formas cuadráticas equivalentes. Entonces existe una matriz invertible g tal que

$J_1 = gJ_2g^t$ para $i = 1,2$, defina

$$\mathfrak{g}_i = \{A \in sl(2l+1) : AJ_i + J_iA^t = 0\}.$$

Se puede verificar que $A \in \mathfrak{g}_2$ si y solo si $gAg^{-1} \in \mathfrak{g}_1$

$$\begin{aligned} gAg^{-1} \in \mathfrak{g}_1 &\Leftrightarrow (gAg^{-1})J_1 + J_1(gAg^{-1})^t = 0 \\ &\Leftrightarrow gAg^{-1}J_1 + J_1(g^{-1})^tA^tg^t = 0 \\ &\Leftrightarrow gAJ_2g^t + gJ_2A^tg^t = 0 \\ &\Leftrightarrow AJ_2g^t + J_2A^tg^t = 0 \\ &\Leftrightarrow Aj_2 + J_2A^t = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, existen diferentes maneras de realizar $\mathfrak{so}(2l+1)$ escogiendo diferentes formas cuadráticas. La forma cuadrática más conveniente para describir una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(2l+1)$ esta dada por la matriz J , escrita en bloques como

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_l \\ 0 & 1_l & 0 \end{pmatrix}$$

donde 1_l indica la matriz identidad $l \times l$. Esta matriz es simétrica y no degenerada. Y si

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & i1_l & 1_l \\ 0 & 1_l & i1_l \end{pmatrix}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ entonces $gg^t = J$. Por tanto, el álgebra de matrices antisimétricas en relación a J es isomorfa a $\mathfrak{so}(2l+1)$.

Sea A una matriz $(2l+1) \times (2l+1)$ en bloques del mismo tamaño que los bloques de J y usando la condición $AJ + JA^t = 0$, $A \in \mathfrak{so}(2l+1)$ si y sólo si A es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -\gamma^t & a & b \\ -\beta^t & c & -a^t \end{pmatrix}$$

con β y γ matrices $1 \times l$ y las demás $l \times l$ y con b y c antisimétricas. De hecho, al realizar:

$$AJ = \begin{pmatrix} x & \beta & \gamma \\ y & a & b \\ z & c & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_l \\ 0 & 1_l & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & \gamma & \beta \\ y & b & a \\ z & q & c \end{pmatrix}$$

$$JA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_l \\ 0 & 1_l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y^t & z^t \\ \beta^t & a^t & c^t \\ \gamma^t & b^t & q^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y^y & z^t \\ \gamma^t & b^t & q^t \\ \beta^t & a^t & c^t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AJ + JA^t = \begin{pmatrix} 2x & \gamma + y^t & \beta + z^t \\ y + \gamma^t & b + b^t & a + q^t \\ z + \beta^t & q + a^t & c + c^t \end{pmatrix} = 0$$

de donde obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$x = 0$$

$$y = -\gamma^t$$

$$b = -b^t$$

$$a = -q^t \Rightarrow q = -a^t$$

$$z = -\beta^t$$

$$c = -c^t.$$

Al solucionar los sistemas de ecuaciones obtenemos la matriz A y comprobamos que $A \in \mathfrak{so}(2l+1)$.

Una subálgebra de Cartan \mathfrak{h} es una subálgebra de dimensión l de matrices diagonales en $\mathfrak{so}(2l+1)$, esto es, $H \in \mathfrak{h}$ si y sólo si H es de la forma

$$H = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \Delta & \\ & & -\Delta \end{pmatrix}$$

con Δ una matriz $l \times l$ diagonal arbitraria.

Verifiquemos que H es una subálgebra de Cartan. De acuerdo a la definición que estudiamos en el primer capítulo debe cumplir que $[A, H] \in H$. De hecho,

$$AH = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -\gamma^t & a & b \\ -\beta^t & c & -a^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \Delta & \\ & & -\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta\Delta & -\gamma\Delta \\ 0 & a\Delta & -b\Delta \\ 0 & c\Delta & a^t\Delta \end{pmatrix}$$

$$HA = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \Delta & \\ & & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -\gamma^t & a & b \\ -\beta^t & c & -a^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\Delta\gamma^t & \Delta a & \Delta b \\ \Delta\beta^t & -\Delta c & \Delta a^t \end{pmatrix}$$

$$[A, H] = AH - HA = \begin{pmatrix} 0 & \beta\Delta & -\gamma\Delta \\ \Delta\gamma^t & a\Delta - \Delta a & -b\Delta - \Delta b \\ -\Delta\beta^t & c\Delta + \Delta c & a^t\Delta - \Delta a^t \end{pmatrix} \in H.$$

Analicemos ahora el sistema de raíces simples. Si α es una raíz, entonces $\alpha(H)$ es una diferencia de autovalores de H .

Sean $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, l$ los funcionales

$$\lambda_j : \Delta = \text{diag}\{a_1, \dots, a_l\} \mapsto a_j.$$

Entonces los autovalores de H son 0 y $\pm\lambda_j(H), j = 1, \dots, l$. Luego los posibles valores que una raíz de \mathfrak{h} asume en H son $\pm\lambda_j(H)$ y $\pm\lambda_j(H) \pm \lambda_k(H)$ para $j, k = 1, \dots, l$. $\pm 2\lambda_j(H), j = 1, \dots, l$ no aparece como autovalor de $ad(H)$, porque las matrices de los autoespacios correspondientes tendrían sus entradas no nulas a lo largo de las diagonales de las matrices c y b de A , y estas matrices son antisimétricas y por tanto las diagonales son nulas, y $\pm 2\lambda_j$ no es una raíz. Los demás funcionales lineales son de hecho raíces de \mathfrak{h} .

Las raíces con los espacios de raíces correspondientes son dadas por:

$\lambda_j, j = 1, \dots, l,$ con un espacio de raíces formado por las matrices A en que $a = b = c = 0$ $\beta = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ y $\gamma = 0$.

$-\lambda_j, j = 1, \dots, l$ con un espacio de raíces dado por $a = b = c = 0$ $\gamma = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ y $\beta = 0$.

$\lambda_i - \lambda_j$ con $i \neq j$ con un espacio de raíces dado por $\beta = \gamma = 0$ $b = c = 0$ y a una matriz $l \times l$ cuya única entrada no nula es ij .

$\lambda_i + \lambda_j$ con $i \neq j$ con un espacio de raíces dado por $\beta = \gamma = 0$ $a = c = 0$ y b una matriz antisimétrica cuyas únicas entradas no nulas están en las posiciones ij y ji .

$-(\lambda_i + \lambda_j)$ con $i \neq j$ con un espacio de raíces dado por la matriz transpuesta de la anterior.

Cada uno de estos espacios de raíces es de dimensión uno y $H = 0$ si $\alpha(H) = 0$ para toda raíz α , como es de esperarse para una álgebra semisimple.

Un sistema simple de raíces está dado por:

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_l\}.$$

Esto porque Σ tiene el mismo número de elementos que la dimensión de \mathfrak{h} y veamos que toda raíz puede ser escrita como una suma, con repeticiones de elementos de Σ ó $-\Sigma$. De hecho, para cada $j = 1, \dots, l$,

$$\lambda_j = (\lambda_j - \lambda_{j+1}) + \dots + (\lambda_{l-1} - \lambda_l) + \lambda_l$$

y por tanto esas raíces son positivas y sus opuestas $-\lambda_j$ son negativas.

Si $i < j$ entonces:

$$\lambda_i + \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j) + 2(\lambda_j - \lambda_{j+1}) + \dots + 2\lambda_l$$

y, por tanto, esas raíces también son positivas, siendo que sus opuestas son negativas. Luego,

$$\lambda_i - \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \dots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j).$$

Para encontrar la forma de Cartan Killing a \mathfrak{h} . Sea H como fue definida anteriormente, con

$$\Lambda = \text{diag} \{a_1, \dots, a_l\}.$$

La lista de raíces encontrada arriba muestra que

$$\langle H, H \rangle = 2 \sum_{i=1}^l a_i^2 + \sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^2 + \sum_{i \neq j} (a_i + a_j)^2$$

$$\langle H, H \rangle = 2 \sum_{i=1}^l a_i^2 + \sum_{i \neq j} ((a_i)^2 - 2a_i a_j + (a_j)^2 + (a_i)^2 + 2a_i a_j + (a_j)^2)$$

$$\langle H, H \rangle = 2 \sum_{i=1}^l a_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} (a_i^2 + a_j^2)$$

$$\langle H, H \rangle = 2 \sum_{i=1}^l a_i^2 + 4 \sum_{i < j} (a_i^2 + a_j^2).$$

Se puede verificar $\sum_{i < j} (a_i^2 + a_j^2) = (l-1) \sum_i a_i^2$,

$$\langle H, H \rangle = 2 \sum_{i=1}^l a_i^2 + 4(l-1) \sum_{i=j}^l a_i^2$$

$$\langle H, H \rangle = \sum_{i=1}^l a_i^2 (2 + 4l - 4) = 2(2l-1) \sum_{i=1}^l a_i^2.$$

Finalmente por la fórmula de polarización

$$\langle H, H' \rangle = 2(2l-1) \sum_{i=1}^l a_i a'_i.$$

Si H' está dado de la misma forma por Λ'

$$\Lambda' = \text{diag} \{a'_1 \dots a'_l\}$$

Denotamos por Λ_α una matriz diagonal $l \times l$ que define H_α un dual de la raíz α . Entonces

$$\Lambda_{\lambda_i} = \frac{1}{2(2l-1)} \text{diag} \{0, \dots, 1_i, \dots, 0\},$$

$$\Lambda_{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{1}{2(2l-1)} \text{diag} \{0, \dots, 1_i, \dots, -1_j, \dots, 0\},$$

$$\Lambda_{\lambda_i + \lambda_j} = \frac{1}{2(2l-1)} \text{diag} \{0, \dots, 1_i, \dots, -1_j, \dots, 0\}.$$

La raíz de menor longitud es λ_l porque:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_i - \lambda_j, \lambda_i - \lambda_j \rangle &= \langle \lambda_i, \lambda_i \rangle - \langle \lambda_i, \lambda_j \rangle - \langle \lambda_j, \lambda_i \rangle + \langle \lambda_j, \lambda_j \rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{2(2l-1)} E_{ii}, \frac{1}{2(2l-1)} E_{ii} \right\rangle = \frac{2^2(2l-1)}{2^2(2l-1)^2} = \frac{1}{2l-1} \end{aligned}$$

y

$$\langle \lambda_l, \lambda_l \rangle = \left\langle \frac{1}{2(2l-1)} E_{ll}, \frac{1}{2(2l-1)} E_{ll} \right\rangle = \frac{2(2l-1)}{2^2(2l-1)^2} = \frac{1}{2(2l-1)}.$$

Por tanto, $\mathfrak{so}(2l+1)$ es una representante de álgebras Bl , $l \geq 2$.

4.2. Transitividad Local General

Definición 4.1. Sea $\mathcal{F} = \{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$ una f -estructura invariante. Sea la cuádrupla $Q := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset \Pi$, con $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ un conjunto sin pares de raíces opuestas o iguales.

- (i) Decimos que una tripla de raíces $\{(u+v), \omega_1, \omega_2\}$ es extraída de Q por u y v si $\{u, v, \omega_1, \omega_2\} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.
- (ii) Decimos que \mathcal{F} es localmente transitiva si el conjunto formado por las $\{0,3,0\}$ -triplas, $\{1,2,0\}$ -triplas y $\{2,1,0\}$ -triplas extraídas de Q , tienen cardinalidad diferente de 1.

Si \mathcal{F} es una estructura casi-compleja, esto es, la variedad bandera es maximal, en esa definición coincide con la definición libre de cono dada en [9]. Así mismo como en [9] la condición de que la cuádrupla no contenga pares de raíces opuestas o iguales es redundante y es incluida solo para enfatizarla. De hecho, si

- (i) $\beta = -\alpha$. Entonces $\delta = -\gamma$ y las triplas extraídas de Q son, $\{\alpha + \gamma, -\alpha, -\gamma\}$, $\{\alpha - \gamma, -\alpha, \gamma\}$, $\{-\alpha + \gamma, \alpha, -\gamma\}$, $\{-\alpha - \gamma, \alpha, \gamma\}$. Suponga por ejemplo, que $\{\alpha + \gamma, -\alpha, -\gamma\}$ es una $(0,0,3)$ -tripla, o $\{1,2,0\}$ -tripla o $\{2,1,0\}$ -tripla, entonces $\{-\alpha - \gamma, \alpha, \gamma\}$ sería una $(0,3,0)$ -tripla o $\{2,1,0\}$ -tripla o $\{1,2,0\}$ -tripla respectivamente. Es fácil ver que en este caso, este tipo de triplas aparece en pares.
- (ii) Si $\alpha = \beta$, como 2α es $\delta + \gamma = -2\alpha$ no pueden ser raíces, las posibles triplas extraídas de Q son $\{\alpha, \alpha + \delta, \gamma\}$, $\{\alpha, \delta, \alpha + \gamma\}$, $\{\alpha, \alpha + \delta, \gamma\}$ y $\{\alpha, \delta, \alpha + \gamma\}$ una vez más la condición localmente transitivo está satisfecha.

La siguiente proposición refuerza el hecho de que la definición general de localmente transitivo está basada en lo que sucede en el caso A_n .

Proposición 4.2. En la variedad bandera maximal asociada a $A_{n-1} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, una f -estructura invariante es localmente transitiva en el sentido de la definición 4.1 si, y solamente si, cada 4-subdigrafo del digrafo asociado no es uno de los seis digrafos en la figura 3.6.

Demostración: Sean \mathcal{F} una f -estructura invariante y $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ su digrafo correspondiente, suponga que \mathcal{F} es localmente transitiva en el sentido de la definición 4.1. Sea $\{i, j, k, l\}$ un 4-subdigrafo de $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ y considere el correspondiente conjunto de las raíces $p = \{\alpha_{ij}, \alpha_{jk}, \alpha_{kl}, \alpha_{li}\} \subset \Pi$ con $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{kl} + \alpha_{li} = 0$. Si $\mathcal{F}|_p$ es una estructura casi-compleja invariante, en [9] se muestra que $\{i, j, k, l\}$ no es un cono, entonces $\{i, j, k, l\}$ no es uno de los seis digrafos en la Figura 3.6. Caso contrario, de $q = \{\alpha_{ij}, \alpha_{jk}, \alpha_{kl}, \alpha_{li}\}$ extraemos cuatro triplas $\{\alpha_{ik}, \alpha_{kl}, \alpha_{li}\}$, $\{\alpha_{jl}, \alpha_{li}, \alpha_{ij}\}$, $\{\alpha_{ki}, \alpha_{ij}, \alpha_{jk}\}$ y $\{\alpha_{lj}, \alpha_{jk}, \alpha_{kl}\}$. Cada una de éstas triplas corresponde a un 3-subdigrafo, esto es, $\{\alpha_{ik}, \alpha_{kl}, \alpha_{li}\}$ está asociado a $\{i, k, l\}$. Dado que el número de triplas del tipo $\{1, 2, 0\}$ y $\{2, 1, 0\}$ extraídas de \mathfrak{q} debe ser diferente de 1, $\{i, j, k, l\}$ es diferente de los últimos cuatro digrafos en 3.6.

Para demostrar lo recíproco, de la misma forma que en [9] un conjunto de cuatro raíces $Q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ con $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ que no contiene pares de raíces opuestas o iguales, tienen la forma $\{\alpha_{ij}, \alpha_{jk}, \alpha_{kl}, \alpha_{li}\}$ para $1 \leq i, j, k, l \leq n$ y como el subdigrafo asociado es diferente de los seis 4-subdigrafos en la Figura 3.6 entonces la cardinalidad del conjunto de triplas extraídas de p del tipo $\{0, 3, 0\}$, $\{1, 2, 0\}$, $\{2, 1, 0\}$ es diferente de 1. Repitiendo el argumento, tenemos la condición de localmente transitivo generalizada.

Teorema 4.3. *Una condición necesaria para $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$ sea $(1, 2)$ -simpléctica es que \mathcal{F} sea localmente transitiva en el sentido de la Definición 4.1.*

Demostración: Recordemos que $d^2 = 0$ computando $d^2\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta)$ tenemos que las únicas cuádruplas $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \subset \Pi$ de interés, son aquellas que satisfacen $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ con $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \not\subseteq \mathfrak{q}^0$. Así como en el caso de las estructuras casi-complejas tenemos los siguientes 6 términos

1. $+im_{\alpha, \beta} m_{\gamma, \delta} (\varepsilon_{\alpha+\beta} \lambda_{\alpha+\beta} + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma + \varepsilon_\delta \lambda_\delta),$
2. $-im_{\beta, \gamma} m_{\delta, \alpha} (\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_{\beta+\gamma} \lambda_{\beta+\gamma} + \varepsilon_\delta \lambda_\delta),$
3. $+im_{\gamma, \delta} m_{\alpha, \beta} (\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_{\gamma+\delta} \lambda_{\gamma+\delta}),$
4. $-im_{\beta, \delta} m_{\alpha, \gamma} (\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma + \varepsilon_{\beta+\delta} \lambda_{\beta+\delta}),$
5. $-im_{\alpha, \gamma} m_{\beta, \delta} (\varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_{\alpha+\gamma} \lambda_{\alpha+\gamma} + \varepsilon_\delta \lambda_\delta),$
6. $+im_{\alpha, \delta} m_{\beta, \gamma} (\varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma + \varepsilon_{\alpha+\delta} \lambda_{\alpha+\delta}).$

Ahora sea $Q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \not\subseteq \mathfrak{q}^0$ una cuádrupla de raíces tal que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$. De los seis términos a que corresponden las $\{1, 2\}$ -triplas, esto es, los términos correspondientes a las $\{0, 1, 2\}$ -triplas y $\{1, 1, 1\}$ -triplas extraídas de Q , son cero si $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$ es $(1, 2)$ -simpléctica. Así mismo para que $d^2\Omega$ sea cero, no existe una métrica Λ tal que al extraer exactamente una tripla de los tipos $\{1, 2, 0\}$ o $\{2, 1, 0\}$ o $\{0, 3, 0\}$ los términos correspondientes en la numeración de arriba sean cero. Si R es el conjunto de las raíces que aparecen en las triplas extraídas de Q y $\mathcal{F}|_R$ es una estructura casi-compleja invariante, este caso corresponde al estudiado en [9] y aquí es imposible extraer exactamente una $\{0, 3, 0\}$ -tripla. Note que es posible aparecer dos de las tres o las tres juntas.

4.3. El Caso $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$ con \mathbb{F} asociada al álgebra B_3

En [9] se muestra que, excepto cuando el sistema de raíces corresponde a G_2 , la condición libre de cono (localmente transitiva) es una condición de subsistemas de Π de rango tres. El propósito de esta sección es extender las f -estructuras invariantes a los resultados obtenidos en [9] para estructuras casi-complejas invariantes en sistemas de raíces de rango tres (principalmente los irreducibles A_3 y B_3). Tengamos en cuenta que los sistemas de raíces reductibles de rango tres son $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$, $A_1 \oplus A_2$ y $A_1 \oplus B_2$. Se puede comprobar que en estos casos las f -estructuras invariantes admiten métricas $(1, 2)$ -simplécticas. De hecho, los casos A_1 y A_2 corresponden a $\mathbb{F}(2)$ y $\mathbb{F}(3)$ respectivamente y ya fueron analizados en el capítulo tres.

Para el caso B_2 el sistema de raíces positivas es $\Pi^+(B_2) = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta\}$. A menos de signo existe sólo una cuádrupla en B_2 , $\{\alpha, \alpha, \beta, -(2\alpha + \beta)\}$, y las dos únicas posibles triplas extraídas de ellas son iguales, por tanto, cualquier f -estructura invariante \mathcal{F} definida sobre la variedad bandera maximal correspondiente es localmente transitiva. Para ver el recíproco, esto es, que \mathcal{F} es $(1, 2)$ -admisibles, basta definir la métrica en la única tripla que aparece $(\alpha, \alpha + \beta, -2\alpha - \beta)$. por tanto para los casos mencionados anteriormente tenemos la equivalencia entre localmente transitivo y $(1, 2)$ -admisibles. A continuación analizamos el caso B_3 .

La realización standard en \mathbb{R}^3 del sistema positivo de raíces de B_3 es $L \cup S$ donde $L = \{e_i \pm e_j : 1 \leq i < j \leq 3\}$ y $S = \{e_i : 1 \leq i < j \leq 3\}$ donde $\{e_i : i = 1, 2, 3\}$ la base canónica de \mathbb{R}^3 son los conjuntos de raíces largas y cortas respectivamente. El Conjunto $L \cup S$ es un sistema de raíces.

Un sistema de raíces está definido así:

Definición 4.4. *Un conjunto $\Pi \subset E$ es un sistema de raíces que satisfice.*

- (i) Π es finito, genera E y no contiene 0.
- (ii) para todo $\alpha \in \Pi$ existe una reflexión r_α en relación a α tal que $r_\alpha(\Pi) = \Pi$.
- (iii) para todos $\alpha, \beta \in \Pi$, $r_\alpha(\beta) - \beta$ es un múltiplo entero de α .

El conjunto L es isomorfo al sistema de raíces positivas de A_3 , $L_3 = \{\alpha_{ij} : 1 \leq i < j \leq 3\}$ via la bisección:

Raíces simples: $\alpha_{12} \leftrightarrow e_2 - e_3$; $\alpha_{23} \leftrightarrow e_1 - e_2$; $\alpha_{34} \leftrightarrow e_2 + e_3$.

Raíces de altura 2 : $\alpha_{13} \leftrightarrow e_1 - e_3$; $\alpha_{24} \leftrightarrow e_1 + e_3$.

Raíces de altura 3 : $\alpha_{14} \leftrightarrow e_1 + e_2$.

Proposición 4.5. Suponga \mathbb{F} la variedad bandera maximal asociada a B_3 con una f -estructura invariante \mathcal{F} . Entonces \mathcal{F} es (1,2)-admisibile si, y solamente si, \mathcal{F} es localmente transitiva.

Demostración: Sea $\mathcal{F} = \{\varepsilon_\alpha\}$ una f -estructura invariante en la variedad bandera maximal asociada a B_3 . Con la restricción \mathcal{F}^l las raíces largas L es también localmente transitiva, por esto podemos asumir que ella está representada por uno de los 34 digrafos en las Figuras 3.4 y 3.5. Así mismo para que \mathcal{F} sea localmente transitiva falta ver lo que sucede en las raíces cortas e_1, e_2, e_3 . Para esto solo presentamos las cuádruplas que aparecen en B_3 que no son cuádruplas de raíces largas. A menos de cambios de signos, son las siguientes 18 cuádruplas.

$$\begin{array}{ll}
 Q_1 = \{-e_1, e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3\}, & Q_2 = \{e_1 - e_2, e_2 + e_3, -e_1, -e_3\}, \\
 Q_3 = \{e_2 - e_3, e_1 + e_3, -e_2, -e_1\}, & Q_4 = \{e_2 - e_3, e_2 + e_3, -e_2, -e_2\}, \\
 Q_5 = \{e_1 - e_2, e_1 + e_2, -e_1, -e_1\}, & Q_6 = \{e_2 + e_3, e_1 - e_3, -e_2, -e_1\}, \\
 Q_7 = \{e_1 - e_3, e_1 + e_3, -e_1, -e_1\}, & Q_8 = \{e_2 - e_3, -(e_2 + e_3), e_3, e_3\}, \\
 Q_9 = \{e_2 - e_3, -(e_1 + e_2), e_3, e_1\}, & Q_{10} = \{e_1 - e_2, -(e_1 - e_3), e_2, -e_3\}, \\
 Q_{11} = \{e_1 - e_2, -(e_1 + e_3), e_2, e_3\}, & Q_{12} = \{e_1 - e_2, -(e_1 + e_2), e_2, e_2\},
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
Q_{13} &= \{e_2 + e_3, -(e_1 + e_3), -e_2, e_1\}, & Q_{14} &= \{e_2 + e_3, -(e_1 + e_2), -e_3, e_1\}, \\
Q_{15} &= \{e_1 - e_3, -(e_1 + e_3), e_3, e_3\}, & Q_{16} &= \{e_1 - e_3, -(e_1 + e_2), e_3, e_2\}, \\
Q_{17} &= \{e_1 + e_3, -(e_1 + e_2), -e_3, e_2\}, & Q_{18} &= \{e_2 - e_3, -(e_1 - e_3), -e_2, e_1\}.
\end{aligned}$$

Presentamos a continuación la triplas extraídas en cada cuádrupla.

Notamos que las cuádruplas $Q_4, Q_5, Q_7, Q_8, Q_{12}, Q_{15}$ son excluidas por la definición 4.1

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \begin{pmatrix} \{-e_2, e_2 - e_3, e_3\} \\ \{-(e_1 - e_3), e_1 - e_2, e_2 - e_3\} \\ \{e_1 - e_3, -e_1, e_3\} \\ \{e_2, -e_1, e_1 - e_2\} \end{pmatrix} & Q_2 &= \begin{pmatrix} \{e_1 + e_3, -e_1, -e_3\} \\ \{-e_2, e_2 + e_3, -e_3\} \\ \{e_2, e_1 - e_2, -e_1\} \\ \{-(e_1 + e_3), e_1 - e_2, e_2 + e_3\} \end{pmatrix} \\
Q_3 &= \begin{pmatrix} \{e_1 + e_2, -e_2, -e_1\} \\ \{-e_3, e_1 + e_3, -e_1\} \\ \{e_3, e_2 - e_3, -e_2\} \\ \{-(e_1 + e_2), e_2 - e_3, e_1 + e_3\} \end{pmatrix} & Q_6 &= \begin{pmatrix} \{e_1 + e_2, -e_2, -e_1\} \\ \{e_3, e_1 - e_3, -e_1\} \\ \{-e_3, e_2 + e_3, -e_2\} \\ \{-(e_1 + e_2), e_2 + e_3, e_1 - e_3\} \end{pmatrix} \\
Q_9 &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 + e_3), e_3, e_1\} \\ \{e_2, -(e_1 + e_2), e_1\} \\ \{-e_2, e_2 - e_3, e_3\} \\ \{e_1 + e_3, e_2 - e_3, -(e_1 + e_2)\} \end{pmatrix} & Q_{10} &= \begin{pmatrix} \{-(e_2 - e_3), e_2, -e_3\} \\ \{e_1, -(e_1 - e_3), -e_3\} \\ \{-e_1, e_1 - e_2, e_2\} \\ \{e_2 - e_3, e_1 - e_2, -(e_1 - e_3)\} \end{pmatrix} \\
Q_{11} &= \begin{pmatrix} \{-(e_2 + e_3), e_2, e_3\} \\ \{e_1, -(e_1 + e_3), e_3\} \\ \{-e_1, e_1 - e_2, e_2\} \\ \{e_2 + e_3, e_1 - e_2, -(e_1 + e_3)\} \end{pmatrix} & Q_{13} &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 - e_2), -e_2, e_1\} \\ \{e_3, -(e_1 + e_3), e_1\} \\ \{-e_3, e_2 + e_3, -e_2\} \\ \{e_1 - e_2, e_2 + e_3, -(e_1 + e_3)\} \end{pmatrix} \\
Q_{14} &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 - e_3), -e_3, e_1\} \\ \{e_2, -(e_1 + e_2), e_1\} \\ \{-e_2, e_2 + e_3, -e_3\} \\ \{e_1 - e_3, e_2 + e_3, -(e_1 + e_2)\} \end{pmatrix} & Q_{16} &= \begin{pmatrix} \{-(e_2 + e_3), e_3, e_2\} \\ \{-e_1, -(e_1 + e_2), e_2\} \\ \{-e_1, e_1 - e_3, e_3\} \\ \{e_2 + e_3, e_1 - e_3, -(e_1 + e_2)\} \end{pmatrix} \\
Q_{17} &= \begin{pmatrix} \{-(e_2 - e_3), -e_3, e_2\} \\ \{e_1, -(e_1 + e_2), e_2\} \\ \{-e_1, e_1 + e_3, -e_3\} \\ \{e_2 - e_3, e_1 + e_3, -(e_1 + e_2)\} \end{pmatrix} & Q_{18} &= \begin{pmatrix} \{-(e_1 - e_2), -e_2, e_1\} \\ \{-e_3, -(e_1 - e_3), e_1\} \\ \{e_3, e_2 - e_3, -e_2\} \\ \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, -(e_1 - e_3)\} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Cuándo \mathcal{F} es una estructura casi-compleja invariante, los únicos casos a considerar serán (35) y (36) de la figura 3.5. En estos casos se podría asumir $\varepsilon_{e_3} = +1$, dado que la reflexión r_3 con respecto a e_3 deja L_3 invariante fijando la raíz más alta $e_1 + e_2$. El caso $\varepsilon_{e_3} = -1$ se guía por simetría. En nuestro caso, esta invarianza no garantiza la simetría de los resultados, por esto tenemos que estudiar todas las opciones de ε_α para α en las raíces cortas. Las f -estructuras localmente transitivas que pueden ser definidas en B_3 son descritas a partir de los Lemas B.1 a B.34. Para mostrar que cualquier f -estructura localmente transitiva es (1,2)-admisibles las (1,2)-triplas en B_3 tienen que satisfacer 2.4 y 2.5 en el Lema 2.7.

A menos de signos, las triplas que aparecen en B_3 son las siguientes

$$\begin{array}{ll}
\{(e_2 - e_3), (e_1 + e_3), -(e_1 + e_2)\} & \{(e_2 - e_3), (e_1 - e_2), -(e_1 - e_3)\} \\
\{(e_1 - e_2), (e_2 + e_3), -(e_1 + e_3)\} & \{(e_1 - e_3), (e_2 + e_3), -(e_1 + e_2)\} \\
\{(e_2 - e_3), e_3, -e_2\} & \{(e_1 - e_2), e_2, -e_1\} \\
\{(e_2 - e_3), e_3, -e_2\} & \{(e_2 + e_3), -e_3, -e_2\} \\
\{(e_1 + e_2), -e_1, -e_2\} & \{(e_1 + e_3), -e_3, -e_1\}.
\end{array}$$

Al hacer los cálculos directos, verificamos que cualquier f -estructura que no es localmente transitiva también no es (1,2)-admisibles. A continuación presentamos en forma de lemas las f -estructuras invariantes localmente transitivas definidas en la variedad bandera maximal asociada a B_3 . Es importante notar que las demostraciones son presentadas para las cuádruplas donde la condición localmente transitiva no se cumple, en los demás casos basta verificar que todas las cuádruplas satisfacen esta condición. Recordemos que las raíces largas de B_3 están denotadas por \mathcal{F}^l y las cuádruplas son las 18 mencionadas anteriormente.

Lema B.1. *Si \mathcal{F}^l corresponde a (1) en la figura 3.4, \mathcal{F} es localmente transitiva para cualquier valor de e_1, e_2, e_3 .*

Lema B.2. *Si \mathcal{F}^l corresponde a (2) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_{17} no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_{18} no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_{18} no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_{17} no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema B.3. *Si \mathcal{F}^l corresponde a (3) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema B.4. *Si \mathcal{F}^l corresponde a (4) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.5. *Si \mathcal{F}^l corresponde a (5) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.6. *Si \mathcal{F}^l corresponde a (6) y (7) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los casos donde las tres raíces toman valores no nulos al mismo tiempo, esto es:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema B.7. Si \mathcal{F}^l corresponde a (8) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1, 1$ o sea en este caso ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 0$ en Q_{18} no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 0$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema B.8. *Si \mathcal{F}^l corresponde a (9) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1, 1$, o sea en este caso ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema B.9. *Si \mathcal{F}^l corresponde a (10) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 1$.

- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1.$
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1.$
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1,$ o sea en este caso ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1, -1,$ o sea en este caso ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_9 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema B.10. Si \mathcal{F}^l corresponde a (11) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1.$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1.$

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.11. *Si \mathcal{F}^l corresponde a (12) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 0$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema B.12. Si \mathcal{F}^l corresponde a (13) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema B.13. Si \mathcal{F}^l corresponde a (14) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_9 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.14. *Si \mathcal{F}^l corresponde a (15) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 0$ en Q_{16} no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.15. *Si \mathcal{F}^l corresponde a (16) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1,$ o sea en este caso ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1.$

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1, 0$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (viii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.16. Si \mathcal{F}^l corresponde a (17) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$

- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, o sea aquí ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (ix) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (viii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ix) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.17. Si \mathcal{F}^l corresponde a (18) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1,$ o sea aquí ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1.$

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 0$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.18. Si \mathcal{F}^l corresponde a (19) en la figura 3.5, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$

(iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$

(v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$

(vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$

(vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1,$ o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.

(viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$

(ix) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$

Demostración:

(i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(v) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(vi) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(vii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(viii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(ix) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.19. Si \mathcal{F}^l corresponde a (20) y (21) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

(i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$

(ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$

(iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$

(iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$

(v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 1.$

(vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$

(vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1,$ o sea aquí ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.

(viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1.$

Demostración:

(i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(v) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición ii en la definición 4.1.

(vi) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(vii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(viii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.20. Si \mathcal{F}^l corresponde a (22) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

(i) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1.$

(ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$

(iii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$

(iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.

(v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.

Demostración:

(i) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(ii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(iii) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(v) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.21. Si \mathcal{F}^l corresponde a (23) en la figura 3.4, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

(i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1$.

(ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1$.

(iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = -1$.

(iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

(v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1$.

(vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

(vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = -1$.

(viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

Demostración:

(i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (viii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.22. *Si \mathcal{F}^l corresponde a (24) en la figura 3.5, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.23. *Si \mathcal{F}^l corresponde a (25) en la figura 3.5, la \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los casos donde las tres raíces toman valores no nulos al mismo tiempo, esto es:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.24. *Si \mathcal{F}^l corresponde a (26) en la figura 3.5, la \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos :*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1,$ o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1.$
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1,$ o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1.$

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 0$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición ii en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.25. Si \mathcal{F}^l corresponde a (27) en la figura 3.5, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 0$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 0$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.26. Si \mathcal{F}^l corresponde a (28) en la figura 3.5, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = -1$.
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1$.
- (ix) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (viii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ix) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.27. Si \mathcal{F}^l corresponde a (29) en la figura 3.5, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1,$ o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1,$ o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (ix) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 0$ en Q_9 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(viii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(ix) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema B.28. Si \mathcal{F}^l corresponde a (30) en la figura 3.5, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

(i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

(ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.

(iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

(iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

(v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1$.

(vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.

Demostración:

(i) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_{10} no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(iii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(iv) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(v) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(vi) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema B.29. Si \mathcal{F}^l corresponde a (31) en la figura 3.5, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1.$
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (ix) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1.$

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vii) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (viii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ix) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.30. Si \mathcal{F}^l corresponde a (32) en la figura 3.5, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1,$ o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, 1.$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, 1.$
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1,$ o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = \pm 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 0$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema B.31. Si \mathcal{F}^l corresponde a (33) en la figura 3.5, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$

(iv) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, 1.$

(v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$

(vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.

Demostración:

(i) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_{18} no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(iii) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(v) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(vi) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_{17} no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema B.32. Si \mathcal{F}^l corresponde a (34) en la figura 3.5, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:

(i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$

(ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$

(iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$

(iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$

(v) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$

(vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = \pm 1.$

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema B.33. *Si \mathcal{F}^l corresponde a (35) en la figura 3.5, \mathcal{F} no es localmente transitiva sólo en los siguientes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1,$ o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1,$ o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1.$
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1.$

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_{18} no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (viii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

Lema B.34 *si \mathcal{F}^l corresponde a (36) en la figura 3.5, \mathcal{F} no es localmente transitiva si no en los siguientes casos:*

- (i) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (ii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (iii) $\varepsilon_{e_3} = 0, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (iv) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$, o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (v) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, -1$.
- (vi) $\varepsilon_{e_3} = 1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.
- (vii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 0, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$ o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (viii) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = 1, \varepsilon_{e_1} = 0, \pm 1$ o sea ninguna f -estructura invariante es localmente transitiva.
- (ix) $\varepsilon_{e_3} = -1, \varepsilon_{e_2} = -1, \varepsilon_{e_1} = 1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0$ en Q_6 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = -1$ en Q_9 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vi) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (vii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (viii) Si $\varepsilon_{e_1} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1 y si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ix) Si $\varepsilon_{e_1} = 1$ en Q_2 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. □

A continuación analizamos el caso del álgebra de Lie G_2 .

4.4. El Caso $(\mathbb{F}, \mathcal{F}, \Lambda)$ con \mathbb{F} asociada al álgebra G_2

G_2 es el único sistema de raíces de rango dos donde la condición libre de cono, y por extensión la condición localmente transitivo, es no vacía. En esta sección extendemos las f -estructuras invariantes a los resultados obtenidos en este caso para estructuras casi-complejas invariantes en [9].

Como se puede ver en las raíces positivas de G_2 son $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2\}$. El conjunto de raíces cortas $\{\pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2)\}$ es un sistema de raíces del tipo A_2 . Sea \mathcal{F} una f -estructura invariante sobre la variedad bandera asociada al álgebra de Lie G_2 , su restricción al conjunto de raíces cortas está denotada por \mathcal{F}^c . En $\mathbb{F}(3)$, la variedad bandera maximal asociada con A_2 , existen siete clases de isomorfismos

de f -estructuras invariantes correspondientes a los digrafos que aparecen en la Figura 3.3. Si \mathcal{F} es localmente transitiva, \mathcal{F}^c corresponde a uno de esos siete digrafos. A menos del cambio de signos, en G_2 existen tres cuádruplas:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, -(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\}. \\ Q_2 &= \{\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\}. \\ Q_3 &= \{\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2, -(\alpha_1 + \alpha_2), -(\alpha_1 + 2\alpha_2)\}. \end{aligned}$$

Notamos que la cuádrupla Q_2 es excluida por la definición 4.1. A continuación escribimos las triplas extraídas de las cuádruplas restantes.

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \{\alpha_1, \alpha_2, -(\alpha_1 + \alpha_2)\} \\ \{-(\alpha_1 + 3\alpha_2), \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2\} \\ \{\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2, -(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\} \\ \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, -(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\} \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} \{2\alpha_1 + 3\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2), -(\alpha_1 + 2\alpha_2)\} \\ \{\alpha_1 + 3\alpha_2, -\alpha_2, -(\alpha_1 + 2\alpha_2)\} \\ \{\alpha_2, \alpha_1, -(\alpha_1 + \alpha_2)\} \\ \{\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2, -(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\} \end{pmatrix}$$

Cuando \mathcal{F}^c corresponde a una estructura casi-compleja invariante, los únicos casos a considerar son (6) y (7) en la Figura 3.3. En estos casos se puede asumir $\varepsilon_{\alpha_1} = +1$, dado que la reflexión r_1 , con respecto a α_1 satisface $r_1(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$ y $r_1(\alpha_1 + 2\alpha_2) = \alpha_1 + 2\alpha_2$ implicando que r_1 deja \mathcal{F}^c invariante, y por tanto los valores admitidos cuando $\varepsilon_{\alpha_1} = -1$ serán determinados por simetría. En nuestro caso, esta invarianza no garantiza la simetría de los resultados, por esto tenemos que estudiar todas las opciones para las raíces largas. De la misma forma que en B_3 tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.6. *Sea \mathbb{F} la variedad bandera maximal asociada a G_2 dotada de una f -estructura invariante \mathcal{F} . Entonces \mathcal{F} es (1,2)-admisibile si y solamente si \mathcal{F} es localmente transitiva.*

Demostración: Las f -estructuras localmente transitivas que pueden ser definidas en \mathbb{F} son descritas a continuación a partir de los Lemas G.1 a G.7. Para mostrar que cualquier f -estructura localmente transitiva es (1,2)-admisibile las (1,2)-triplas en G_2 , tiene que

satisfacer 2.4 y 2.5 en el Lema 2.7. A menos de signos, las triplas que aparecen en G_2 son las siguientes:

$$\begin{array}{ll} \{\alpha_1, \alpha_2, -(\alpha_1 + \alpha_2)\} & \{\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, -(\alpha_1 + 3\alpha_2)\} \\ \{\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2, -(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\} & \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, -(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\} \\ \{\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, -(\alpha_1 + 2\alpha_2)\}. & \end{array}$$

Al hacer los cálculos directos verificamos que cualquier f -estructura que no es localmente transitiva también no es (1,2)-admisibile. \square

Presentamos en forma de lemas las f -estructuras invariantes localmente transitivas definidas en la variedad bandera maximal asociada a G_2 . Observamos que en las demostraciones solo presentaremos las cuádruplas donde la condición localmente transitiva no está satisfecha, en el resto de los casos basta verificar que todas las cuádruplas satisfacen esta condición. Recordemos que \mathcal{F}^c corresponde a restricción de \mathcal{F} las raíces cortas de G_2 .

Lema G.1. *Si \mathcal{F}^c corresponde a (1) en la Figura 3.3, \mathcal{F} es localmente transitiva para cualquier valor de $\varepsilon_{\alpha_1}, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2}, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2}$.*

Lema G.2. *Si \mathcal{F}^c corresponde a (2) en la Figura 3.3, \mathcal{F} no es localmente transitiva en el caso en que $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = \pm 1$.*

Demostración: En las condiciones del lema, si $\varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = \pm 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema G.3. *Si \mathcal{F}^c corresponde a (3) en la Figura 3.3, \mathcal{F} no es localmente transitiva en los siguientes casos:*

- (i) $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$.
- (ii) $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$.
- (iii) $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

- (ii) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema G.4. Si \mathcal{F}^c corresponde a (4) en la Figura 3.3, \mathcal{F} no es localmente transitiva en los siguientes casos:

- (i) $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1$.
- (ii) $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1$.
- (iii) $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1$.
- (iv) $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1$ en Q_3 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema G.5. Si \mathcal{F}^c corresponde a (5) en la Figura 3.3, \mathcal{F} no es localmente transitiva en los siguientes casos:

- (i) $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$.
- (ii) $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$.
- (iii) $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema G.6. *Si \mathcal{F}^c corresponde a (6) en la Figura 3.3, \mathcal{F} no es localmente transitiva en los siguientes casos:*

- (i) $\varepsilon_{\alpha_1} = 0, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = \pm 1$.
- (ii) $\varepsilon_{\alpha_1} = 0, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1, 0$.
- (iii) $\varepsilon_{\alpha_1} = 0, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1$.
- (iv) $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1$.
- (v) $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1$.

Demostración:

- (i) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = 0, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = \pm 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (ii) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = 0, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1, 0$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iii) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = 0, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (iv) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.
- (v) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 0, 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Lema G.7. Si \mathcal{F}^c corresponde a (7) en la Figura 3.3, \mathcal{F} no es localmente transitiva en los siguientes casos:

$$(i) \quad \varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1.$$

$$(ii) \quad \varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1, 0.$$

Demostración:

(i) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = 1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 0, -1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = 1$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1.

(ii) Si $\varepsilon_{\alpha_1} = -1, \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = 1, \varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1, 0$ en Q_1 no se cumple la condición (ii) en la definición 4.1. \square

Conclusiones

- La relevancia del estudio de las f -estructuras definidas sobre una variedad bandera, \mathbb{F} , está dada por el teorema de Black [2] el cual da una condición suficiente sobre la f -estructura \mathcal{F} de forma que la aplicación $\phi : (M, g, J) \longrightarrow (\mathbb{F}(n), ds_\lambda^2, \mathcal{F})$ sea armónica con respecto a cada métrica invariante ds_λ^2 .
- En el caso de la variedad bandera geométrica maximal existe una correspondencia biunívoca entre una f -estructura definida sobre una variedad y un digrafo. Basados en esta representación se extiende la noción de torneo localmente transitivo, a digrafos no completos.
- Una f -estructura invariante \mathcal{F} sobre $\mathbb{F}(n)$ es localmente transitiva si, y solamente si, ella es (1,2)-admisibile, esto es, existe una métrica ds_λ^2 tal que $(\mathbb{F}(n), ds_\lambda^2, \mathcal{F})$ es (1,2)-simpléctica.

Bibliografía

- [1] BESSE A. L., Einstein Manifolds. Springer-Verlag, Berlin, Heilderbeg, 1987.
- [2] BLACK M., Harmonics Maps into Homogeneous Spaces. Pitman Research Notes, Math series 255. Longman, Harlow, 1991.
- [3] BOREL A. and HIRZEBRUCH F., Characteristic classes and homogeneous spaces I. Amer. J. Math. 80: 458-538. 1958.
- [4] BOURBAKI N., Lie Groups and Lie algebras. Chapters 1-3 (English). Elements of Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1989.
- [5] BROUWER A. E., The enumeration of locally transitive tournaments. Technical Report ZW 138/80, Mathematische Centrum, Amsterdam, April 1980.
- [6] BURSTALL F. E. and SALAMON S., Tournaments, Flags and harmonic maps. Math Ann. 277: 249-265, 1987.
- [7] COHEN N, C. J. C. NEGREIROS AND L. A. B. SAN MARTÍN, Characterización of (1,2)-simplectic metrics on flags manifolds. Contemporary Math 288: 300-304, 2002.
- [8] COHEN N, C. J. C. NEGREIROS and L. A. B. SAN MARTÍN, (1,2)-simplectic metrics, flags manifolds and tournaments. Bull, of London Mzth. Soc. 34: 641-649, 2002.
- [9] COHEN N. NEGREIROS C. J. C. and L. A. B. SAN MARTÍN, A rank three condition for invariant (1,2)-simplectic almost Hermitian structures on flags manifolds. Bull. Braz. Math Soc. New series 33: 49-73, 2002.

- [10] COHEN N. PAREDES M. AND PINZÓN S., Locally Transitive Tournaments and the Classification of (1,2)-symplectic metric on maximal flag manifolds. Illinois Journal. 2004. S0219-2082.
- [11] CHEEGER J. and EBIN D. G., Comparison Theorems in Riemannian Geometry. North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [12] FIORESI R., Quantization of flag manifolds and conformal space time. Reviews in Mathematical Physics 9:4 (1997),453-465
- [13] GRAY A., Minimal Varieties and Almost Hermitian Submanifolds. Michigan Math. J. 2: 273-287, 1965.
- [14] HELGASON S., Differential Geometry, Lie Groups and Symetric Spaces. Acad. Press, 1978.
- [15] ISHIHARA S. and YANO K., On Integrability Conditions of a structure \mathcal{F} satisfying $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$. Quart. J. Math. Oxford (2), 15: 217-222, 1964.
- [16] KARABEGOV A., Pseudo-Kähler quantization on flag manifolds. Conm. in Math. Phi.200: 2 (1999), 355-379.
- [17] KOBAYASHI S. and NOMIZU K., Foundations of Differential Geometry, Vol. I and II, Interscience Publishers, 1963.
- [18] KOBAYASHI S. and NOMIZU K., Foundations of Differential Geometry, Vol. 2, Interscience Publishers, 1969.
- [19] LICHNEROWICZ A., Aplicaciones Armoniques et Variétés Kähleriennes. Simp. Math. 3 (Bologna), 341,402, 1970.
- [20] MO X. and NEGREIROS C. J. C., Horizontal f -estructures, ϵ -matrices and Equiarmonics moving flags. Relatorio de Pesquisa, Instituto de Matemática, Estadística y Computación Científica, UNICAMP. 1999.
- [21] MO X. and NEGREIROS C. J. C., (1,2)-Simplectic Structures on Flags Manifolds, a aparecer en el Tohoku Mathematical Journal (1999).
- [22] MO X. and NEGREIROS C. J. C., Tournaments and Geometry of Full Flag Manifolds, Proceedings of the XI Brazilian Topology Meeting. Rio Claro, Brazil, World Scientific(1999).

- [23] MOON J. W., Topics on Tournaments. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.
- [24] OÑEILL B., Semi-Riemannian Geometry. With Applications to Relativity, Academic Press, 1983.
- [25] PAREDES M., Aspectos da geometria complexa das variedades bandeira. Tesis doctoral, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2000.
- [26] PAREDES M. y PINZÓN S., Geometria de variedades bandera. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias, Vol. 28 (106) (2004), 123-134 .
- [27] PAREDES M., Families of $(1,2)$ -symplectic metrics of flsg Manifolds, Internat. J. Math. Math. Sci. 29: 651-664, 2002.
- [28] PINZÓN S., Variedades bandeira, f -estructuras e Métricas $(1,2)$ -Simplécticas. Tesis doctoral, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2003.
- [29] RAWNSLEY J. H., f -Structures, f -Twistor Spaces and Harmonic Maps. Lec. Notes in Math. 1164, Springer 1986.
- [30] SALAMON S., Harmonic and Holomorphic Maps. Lec. Notes in Math. 1164, Springer 1986.
- [31] SAN MARTÍN, LUIZ A. B., Álgebras de Lie, Campinas-S.P., Editora da Unicamp. 1999.
- [32] SAN MARTÍN L. A. B. and NEGREIROS C. J. C., Invariant almost Hermitian structures on flag manifolds, Adv. Math. 178(2003), 277-310.
- [33] SILVA R.C. de Jesus , Estruturas Quase Hermitianas Invariantes em Espacios Homogéneos de Grupos Semi-simples. Ph.D.Thesis. State University of Campinas, 2003.