

Efecto Sagnac y otros efectos relativistas en el sistema satelital de navegación global - GPS

Dennis Katherine Viveros Sanabria

Trabajo de investigación para optar al título de Física

Director

Antonio Calixto Gutiérrez Piñeres

Doctorado en Física

Co-Director

Carlos Mauricio Nieto Guerrero

Doctorado en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2023

Dedicatoria

*A mi abuelita Alicia,
a mi mami, mi papi y Mariale,
a mi amor, Jhan.*

Ode To The Mets - The Strokes

Agradecimientos

Mi mayor agradecimiento es para mi abuelita Alicia, por ser la mejor y más bonita persona que he conocido en mi vida, y hubiera querido entregarle los frutos de muchos esfuerzos en vida. A mi mami y a mi papi por siempre hacer los mejores esfuerzos para poder cumplir mis sueños y hacer de mí la persona que soy hoy. A Mariale por siempre acompañarme, escucharme y apoyarme en todo lo que me propongo. A la familia Sanabria, por estar siempre pendiente de que todo me salga bien y de mi bienestar. A mi abuelito Eulogio, por siempre enseñarme fortaleza ante todo. A mi amorcito, Jhan, por ser el mejor compañero de vida y hacerme siempre muy feliz. A Jesús, por aguantarme tanto tiempo, quererme y ser el mejor amigo siempre.

También le agradezco a cada una de las personas que contribuyeron en mi formación profesional, como lo son algunos profesores y profesionales de Escuela de Física, al grupo GIRG por acogermé y aconsejarme siempre. A Daniela, Paola, William, Juan José, Cristian, Esteban y Jose, por acompañarme en los buenos y malos momentos.

Tabla de Contenido

Introducción	10
1. Sistemas satelitales de navegación global	12
1.1. GNSS	12
1.2. GPS	13
2. Relatividad en el GPS	17
2.1. Efecto Sagnac	17
2.2. Tiempo coordinado del GPS	24
2.3. Determinación del tiempo coordinado	28
2.4. Efectos relativistas en relojes satélites	31
2.4.1. Órbitas satelitales	31
2.4.1.1. Corrección de excentricidad	34
2.5. Efecto Doppler	36
2.6. Intervalo de entrecruzamiento	36
2.7. Cambios de frecuencia inducidos por los cambios en las órbitas	38
2.7.1. Conservación de la energía	40
2.8. Efectos relativistas secundarios	41
2.8.1. Retraso en la propagación de la señal	42

GNSS-GPS	5
2.8.2. Efecto en la distancia geodésica	44
2.9. Sistemas de aumento o mejora para el GPS	44
2.10. Aplicaciones	46
3. Invariantes de curvatura	48
3.1. Métrica estática	52
3.1.1. Escalar de Kretschmann	52
3.1.2. Escalar de ChernPontryagin	53
3.1.3. Escalar de Euler	53
3.2. Métrica estacionaria	54
3.2.1. Escalar de Kretschmann	54
3.2.2. Escalar de ChernPontryagin	54
3.2.3. Escalar de Euler	55
4. Estimación de tiempo de llegada de las señales	56
4.1. Métrica estática	56
4.2. Métrica estacionaria	62
5. Conclusiones	69
Referencias Bibliográficas	70
Apéndices	74

Lista de Figuras

Figura 1.	Esquema de la constelación de satélites activos GPS.GOV (1019).	14
Figura 2.	Ejemplo de trilateración para un GNSS GISGeography (1019).	15
Figura 3.	Representación gráfica de lo descrito en la ecuación (1).	17
Figura 4.	Esquema del interferómetro de Sagnac Post (1967).	18
Figura 5.	Configuración simplificada de Sagnac Post (1967).	18
Figura 6.	Distancias para el emisor, r_1 , y receptor de la señal, r_2 , medidas desde el centro de la tierra.	43

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Escalares de curvatura para la métrica estática	74
Apéndice B. Escalares de curvatura para la métrica estacionaria	79

Resumen

Título: Efecto Sagnac y otros efectos relativistas en el sistema satelital de navegación global - GPS *

Autor: Dennis Katherine Viveros Sanabria **

Palabras Clave: Efecto Sagnac, efectos relativistas, Relatividad General, GNSS, GPS, Invariantes de curvatura.

Descripción: El efecto Sagnac y otros efectos relativistas, como el efecto Doppler, la dilatación del tiempo, las perturbaciones debidas al cambio en las órbitas y los efectos debidos a otros cuerpos en el sistema solar, deben ser tenidos en cuenta en los sistemas satelitales de navegación global (GNSS) porque todos aportan correcciones importantes en la recepción de la información. Por eso, en este trabajo se estudió teóricamente la presencia de todos los efectos mencionados anteriormente en el GPS, el sistema global de navegación satelital más conocido del mundo. Además, también se calcularon los tiempos de llegada de las señales para una métrica estática y una métrica estacionaria con tres potenciales distintos, los cuales buscan describir la tierra lo mejor posible, de allí se obtuvo que las correcciones debidas a la rotación de la tierra son del orden de los picosegundos. Por último, con el ánimo de caracterizar las métricas que se usaron, se calcularon los invariantes de curvatura de Kretschmann, Chern-Pontryagin y Euler, para cada una de las métricas con tres potenciales distintos. Estos invariantes mostraron que para la métrica estática los resultados son funciones que dependen de r y θ , en cambio para la métrica estacionaria los resultados son funciones que dependen de r , θ y ω_E , donde ω_E es la frecuencia angular de rotación de la tierra.

* Trabajo de investigación

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Antonio Calixto Guitiérrez Piñeres, Doctorado en Física. Co-Director: Carlos Mauricio Nieto Guerrero, Doctorado en Física.

Abstract

Title: The Sagnac effect and other relativistic effects in the Global Navigation Satellite System - GPS *

Author: Dennis Katherine Viveros Sanabria **

Keywords: Sagnac effect, relativistic effects, General Relativity, GNSS, GPS, Curvature invariants.

Description: The Sagnac effect and other relativistic effects, like Doppler effect, time dilatation, frequency shifts induced by orbit changes and gravitational effects due to other solar system bodies, must be taken into account in the Global Navigation Satellite System (GNSS) because all the effects provide important corrections. Therefore, in this BSc thesis I study the presence of all the effects mentioned above in GPS, the world's best-known global satellite navigation system. Additionally, the arrival times of the signals for a static metric and a stationary metric, which seek to describe the earth as well as possible, with three different potentials were also calculated; from there it was obtained that the corrections due to the rotation of the earth are of the order of picoseconds. Finally, in order to characterize the metrics that I used, the Kretschmann, Chern-Pontryagin, and Euler curvature invariants were calculated for each of the metrics with three different potentials. These invariants showed that for the static metric the results are functions that depend on r and θ , while for the stationary metric the results are functions that depend on r , θ and ω_E , where ω_E is the angular frequency of rotation of the earth.

* BSc Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Antonio Calixto Gutiérrez Piñeres, PhD in Physics. Co-Director: Carlos Mauricio Nieto Guerrero, PhD in Physics.

Introducción

Durante las últimas tres décadas el avance de la investigación en Relatividad General se ha visto favorecido gracias a pruebas de alta precisión. Tales pruebas se han convertido en un activo y desafiante campo de acción que invita a revisar nuevas versiones de viejos experimentos decisivos sobre la validez de la teoría, entre los cuales se encuentran, la observación de las ondas gravitacionales (Abbott et al., 2017), el arrastre gravitacional y el efecto geodésico como manifestación de la curvatura del espacio-tiempo (Abuter et al., 2018; Akiyama et al., 2019), se tiene también el interferómetro de Sagnac, el cual será de particular interés en el presente trabajo (Will, 2018; Thorne et al., 2000; Sun et al., 1996).

Así, la investigación en geodesia relativista constituye un dinámico escenario que incluye la descripción del espacio-tiempo mediante sistemas coordinados cuatro-dimensionales junto con la descripción de trayectorias de objetos de prueba, como satélites artificiales, en presencia de fuentes de campo gravitacional. Por otra parte, el reciente progreso de metrología cuántica de relojes atómicos estables y la geodesia relativista han provisto a la Relatividad General de una de sus más importantes aplicaciones prácticas: los sistemas modernos de navegación satelital, como por ejemplo el GPS (por sus siglas en inglés Global Positioning System).

Como consecuencia de lo anterior, numerosos grupos de investigación actualmente centran sus esfuerzos y recursos en el avance de aspectos, tanto teóricos como experimentales, de la Relatividad General que incluyen en específico el desarrollo de geodesia satelital, modelos de alta precisión del campo gravitacional terrestre, el manejo de nuevas técnicas de decorrelación de datos

observacionales y métodos interferométricos. Todo ello coincidente con el desarrollo y puesta en marcha de futuros sistemas de navegación Flury (2016). En Colombia, la investigación enfocada en estos temas es poca Toledo (2015). Por eso, en el capítulo 1 de este trabajo se habla de qué es un sistema satelital de navegación global y por qué es importante estudiar el GPS, además se abordan teóricamente algunos de los efectos relativistas necesarios para entender a fondo el GPS; entre ellos el efecto Sagnac, el efecto Doppler, la dilatación del tiempo, la determinación de los tiempos coordinados en tierra y en los satélites, el intervalo de tiempo de entrecruzamiento de las señales de un satélite a otro, algunos sistemas de mejora y sus aplicaciones, todo esto en el capítulo 2. En el capítulo 3, se hace un análisis de la caracterización del campo gravitacional terrestre a través de los vectores de Killing y la condición de congruencia normal para determinar si las métricas usadas en este trabajo son estáticas o estacionarias; además de esto también se calculan los invariantes de curvatura de Krestschmann, Chern-Pontryagin y Euler con tres diferentes potenciales. Seguido de esto, en el capítulo 4 se encuentran los tiempos de llegada de la señal de un satélite a la tierra para las dos métricas con tres potenciales distintos, esto se hace con el fin de entender cómo mejorar los sistemas de navegación satelital. Finalmente, en el capítulo 5 se consignan todas las conclusiones de este trabajo.

1. Sistemas satelitales de navegación global

1.1. GNSS

Los sistemas globales de navegación satelital (GNSS) son una de las aplicaciones más importantes de la Relatividad general. Consiste en un sistema que utiliza satélites para proporcionar posicionamiento geoespacial con alta precisión a través de señales de tiempo transmitidas desde los satélites. Se les denomina GNSS a los sistemas satelitales que tienen una cobertura global. En el mundo existen cuatro sistemas de navegación: el más conocido es el GPS (Global Positioning System), creado en Estados Unidos, se compone de una constelación de 24 satélites activos ubicados en 4 planos orbitales, lo cual garantiza que los usuarios puedan ver al menos cuatro satélites desde prácticamente cualquier punto del planeta (GPS.GOV, 1019); en segundo lugar está GLONASS (Global'naya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema), creado por la Unión Soviética y administrado hoy en día por la Federación Rusa, este sistema de navegación cuenta con una constelación de 24 satélites activos ubicados en 3 planos orbitales IAC (1019); en tercer lugar se encuentra Galileo, creado por la Unión Europea, actualmente su constelación cuenta con 22 satélites activos en 3 planos orbitales, pero se espera que cuando esté funcionando a plenitud, tenga 30 satélites activos EGSA (1019); y por último está BDS (BeiDou Navigation Satellite System), creado en China para usuarios en la región de Asia - Pacífico, actualmente está en funcionamiento su segunda versión la cual cuenta con una constelación de 35 satélites activos ubicados en 5 planos orbitales, se espera que este sistema de navegación satelital sea el más preciso en comparación con los mencionados anteriormente BeiDou (1019).

Todos los sistemas satelitales de navegación global tienen numerosos efectos relativistas, que en caso de no tenerlos en cuenta el sistema no funcionaría Ashby (2003). A pesar de que existen cuatro GNSS, este trabajo se va a concentrar en estudiar el GPS ya que es el sistema de navegación con más información disponible al público.

1.2. GPS

El GPS usa relojes atómicos estables y precisos en los satélites y en tierra para determinar la posición y el tiempo en todo el mundo. Estos relojes tienen cambios debidos a la gravedad y el movimiento, ya que el tiempo no corre de la misma manera en la tierra que en el espacio. Parte de este trabajo es discutir las bases conceptuales fundadas en relatividad especial y general que dan soporte a los sistemas globales de navegación satelital.

El GPS consta de tres segmentos principales:

- El segmento espacial: Consiste esencialmente de 24 satélites, los cuales portan relojes atómicos. Hay cuatro satélites en cada uno de los 6 planos orbitales inclinados a 55° con respecto al plano ecuatorial, distribuidos de tal forma que en cualquier punto de la tierra, cuatro o más satélites casi siempre están por encima del horizonte local. Vinculado al reloj están las señales de tiempo que se transmiten desde cada satélite. Esto puede considerarse como una secuencia de eventos en el espacio-tiempo, caracterizada por posiciones y tiempos de transmisión. Asociados con estos eventos, los mensajes especifican las coordenadas espaciotemporales Ashby (2003).

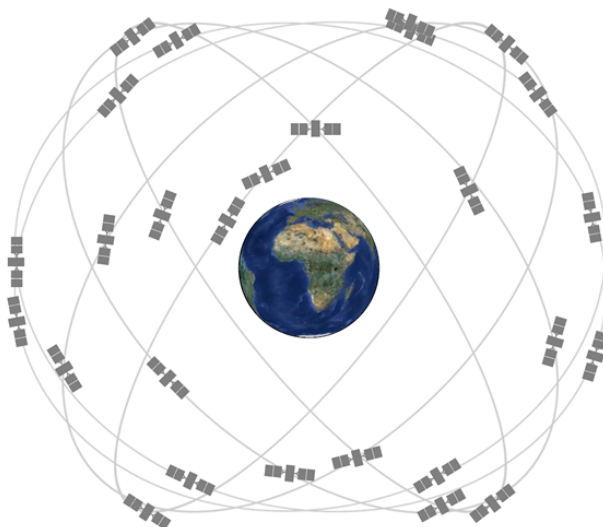


Figura 1. Esquema de la constelación de satélites activos GPS.GOV (1019).

Todos los GNSS, incluyendo el GPS, funcionan a partir de satélites artificiales. Para obtener una posición y hora específica sólo se necesitan tres satélites. Estas cantidades se determinan usando un método llamado trilateración, el cual funciona de la siguiente manera: Una vez el usuario requiere su posición o tiempo, los satélites emiten una señal, esta dibuja una esfera imaginaria sobre el horizonte local donde el centro de dicha esfera es el satélite, el lugar donde se interseque la señal de los 3 satélites, es la posición del usuario, un ejemplo de este método se muestra en la figura 2. A medida que el usuario se mueve, el radio de cada esfera también cambiará.

- El segmento de control: Está compuesto por varias estaciones de monitoreo terrestre, los cuales recopilan continuamente información de los satélites. Estos datos se envían a la estación de control principal en Colorado, donde se analiza la constelación y se proyectan las posiciones del satélite y el comportamiento del reloj durante las próximas horas, luego

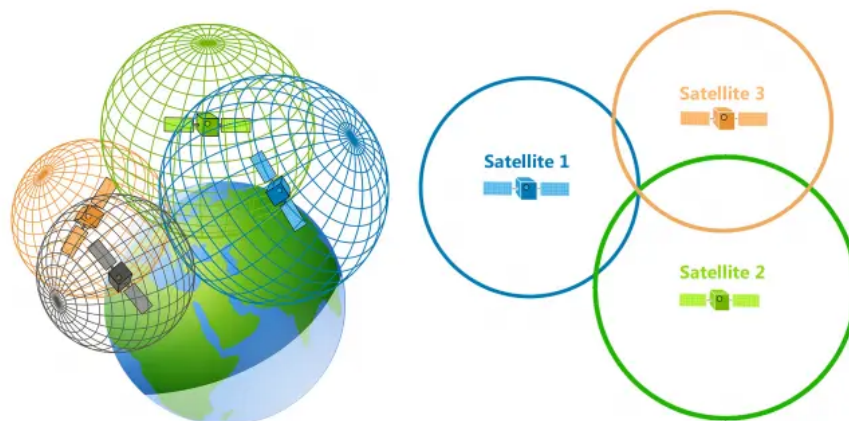


Figura 2. Ejemplo de trilateración para un GNSS GISGeography (1019).

esta información es cargada dentro de los satélites para retransmitirla a los usuarios Ashby (2003).

- El segmento del usuario: Consiste en todos los usuarios que al recibir señales desde los satélites pueden determinar su posición, velocidad y hora en sus relojes locales Ashby (2003).

El GPS es un sistema de navegación y cronometraje operado por el Departamento de defensa de EE.UU y por lo tanto muchos aspectos del GPS son reservados. Muchas organizaciones monitorean independientemente las señales del GPS y proporcionan servicios a partir de los cuales se puede saber la posición del satélite y el comportamiento del reloj, por lo que tener una precisión de 5 a 10 cm en un vecindario no es inusual.

Las señales del GPS son recibidas en la tierra a dos frecuencias, $L_1 = 1575.42$ MHz y $L_2 = 1227.6$ MHz. L_1 está modulada por dos tipos de código de ruido pseudoaleatorio, uno a 1.023 MHz, llamado coarse/acquisition (C/A) (en español gruesa/adquisición) y otro encriptado a 10.23 MHz llamado P-code. P-code tiene acceso a las dos frecuencias L_1 y L_2 y puede corregir

retrasos ionosféricos, mientras que los usuarios civiles solo tienen acceso al código C/A. Estos usuarios están limitados en la precisión de posicionamiento aproximadamente ± 100 metros Ashby (2003).

Los relojes hechos a partir de osciladores de cuarzo son los que se encuentran comúnmente en los receptores del GPS, estos suelen tener mejores características de rendimiento de estabilidad a corto plazo, sin embargo los relojes de cesio después de 100 segundos tienen mucho mejor rendimiento, es por esto que los mejores relojes en órbita son de cesio, ya que al dejarlo solo durante un día este presenta un retardo de no más de 4 nanosegundos. Lo anterior es muy importante porque en el caso que existan errores en el tiempo de 1 nanosegundo, esto dará lugar a errores en el posicionamiento de unos 30cm.

Para establecer la posición y la transferencia de tiempo en el GPS, se toman 4 relojes atómicos sincronizados que transmiten pulsos bien definidos desde las posiciones \mathbf{r}_j en los tiempos t_j , donde j corre de 1 a 4 ($j = 1, 2, 3, 4$), este índice indica los diferentes eventos de transmisión Ashby (2003), como se muestra en la figura 3. Ahora, suponiendo que estas 4 señales se reciben en la posición \mathbf{r} en el mismo instante t , y usando el principio de la constancia de la velocidad de la luz, se puede relacionar la distancia recorrida por la señal, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2$, con la distancia recorrida por la señal escrita en términos del tiempo, $c^2(t - t_j)^2$, de acuerdo a

$$c^2(t - t_j)^2 \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^2, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (1)$$

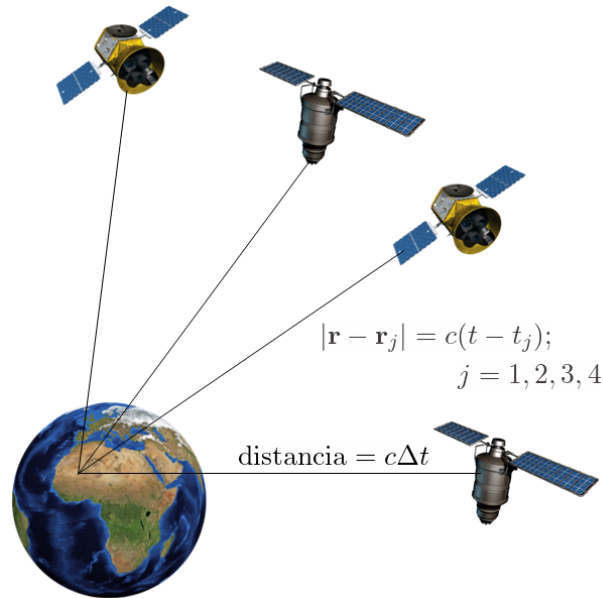


Figura 3. Representación gráfica de lo descrito en la ecuación (1).

2. Relatividad en el GPS

En este capítulo se estudian algunos de los efectos relativistas y conceptos que se deben tener en cuenta para el correcto funcionamiento del GPS. Como el efecto Sagnac, el tiempo coordinado para los relojes atómicos en tierra y en los satélites, el efecto Doppler, el proceso de intercambio de señales de un satélite a otro, por último se muestran algunos sistemas de mejora y aplicaciones del GPS.

2.1. Efecto Sagnac

En 1899 Georges Sagnac desarrolló una teoría respecto de la existencia de un éter mecánico inmóvil e ideó un interferómetro giratorio para probar sus ideas (Benedetto et al., 2019). Al fenómeno resultante se le llama Efecto Sagnac, el cual surge de la diferencia de tiempo de viaje entre

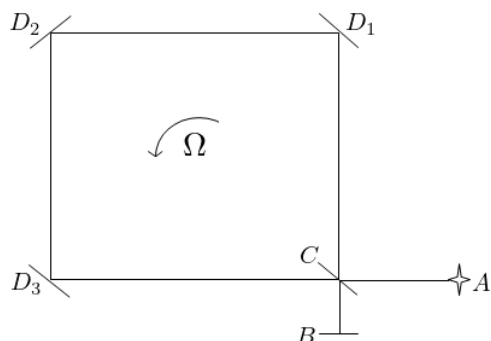


Figura 4. Esquema del interferómetro de Sagnac Post (1967).

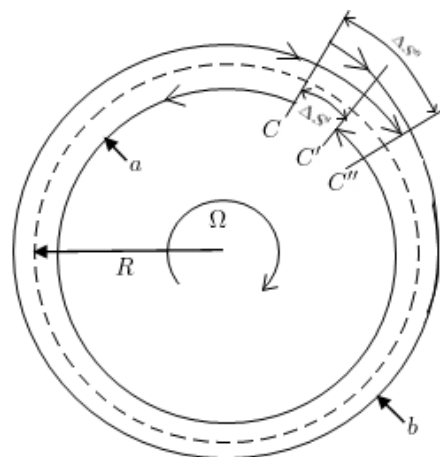


Figura 5. Configuración simplificada de Sagnac Post (1967).

dos haces de luz que viajan en el mismo camino pero en direcciones opuestas en un sistema rotante. Para encontrar la diferencia de tiempo, se presenta el esquema del interferómetro de Sagnac en la figura 4 y la configuración simplificada de Sagnac en la figura 5.

El interferómetro de Sagnac mostrado en la figura 4 consiste en un haz de luz que va desde la fuente A , se separa en C en un rayo que circula el interferómetro en sentido horario ($CD_3D_2D_1C$) y un rayo que circula por el mismo camino en sentido antihorario ($CD_1D_2D_3C$). Los dos rayos se encuentran en C y se observan las franjas de interferencia en B . Cuando todo el interferómetro con una fuente de luz y un detector de franjas de interferencia se establece con una rotación, una velocidad angular Ω y un corrimiento de franjas ΔZ , se observa este corrimiento con respecto del corrimiento de posición para el interferómetro estático Post (1967).

Se debe tener cuidado a la hora de hacer el análisis de esta configuración. Para esto se requiere que las observaciones hechas por el observador estático estén relacionadas con las observaciones hechas por el observador en movimiento, para encontrar esta relación se debe hacer una

transformación de coordenadas; esta provee una interrelación físicamente significativa dentro del marco de la relatividad especial, la cual busca que las leyes de la física tengan la misma forma en todos los sistemas de referencia.

Un análisis más claro del efecto Sagnac se puede hacer con una configuración simplificada (ver en la figura 5). En este sistema se hace uso de pequeños espejos que generan una trayectoria casi circular del haz de radio R . Se definen dos sistemas de referencia que comparten su origen, uno de ellos es un sistema de referencia estático y el otro es un sistema de referencia rotante con una velocidad angular ω respecto del anterior. Estos dos sistemas están definidos para describir un haz de luz que se propaga en una trayectoria circular. Así, se puede calcular la diferencia de tiempo entre una circulación horaria y antihoraria, visto por el observador estático. Los dos haces parten del punto C ; el haz que va en sentido antihorario va opuesto a la dirección de rotación y se vuelve a unir con el haz en el punto C' , lo que da un corrimiento de $\Delta S'$ respecto de C . Por otro lado, el haz que va en sentido horario viaja en la misma dirección de rotación del interferómetro y se une con el haz en la posición C'' , lo que da un corrimiento de $\Delta S''$ con respecto de C .

De la configuración simplificada, mostrada en la figura 5, se pueden calcular los tiempos de llegada de cada haz, para posteriormente encontrar la diferencia de tiempo de llegada entre los haces. Para estas relaciones se le llama t' para el haz en sentido antihorario, t'' para el haz en sentido horario, c como la velocidad de la luz en un espacio libre en un marco inercial y Ω como la frecuencia angular de rotación del interferómetro.

Usando $t = d/v$, donde la d es el perímetro del interferómetro \pm el corrimiento y $v = \omega r \Rightarrow c = R\Omega$,

$$t' = \frac{2\pi R - \Delta S'}{c} = \frac{\Delta S'}{\Omega R} \quad \text{y} \quad t'' = \frac{2\pi R + \Delta S''}{c} = \frac{\Delta S''}{\Omega R}. \quad (2)$$

Despejando $\Delta S'$ y $\Delta S''$ para encontrar las expresiones explícitas de t' y t'' ,

$$t' = \frac{\Delta S'}{\Omega R} = \frac{2\pi R}{c + \Omega R}, \quad t'' = \frac{\Delta S''}{\Omega R} = \frac{2\pi R}{c - \Omega R}, \quad (3)$$

luego encontrando Δt_s ,

$$(\Delta t)_s = t'' - t' = \frac{4\pi R^2 \Omega}{c^2 - (\Omega R)^2}, \quad (4)$$

donde πR^2 corresponde al área del interferómetro. De esta forma, el tiempo para el observador estacionario es

$$(\Delta t)_s = \frac{4A\Omega}{c^2 - (\Omega R)^2}. \quad (5)$$

Este intervalo de tiempo entre C' y C'' del divisor del haz es observado en un marco estático, el cual tiene la forma de estar dilatado por un factor γ . Ahora se define un intervalo $(\Delta t)_m$ observado desde el divisor del haz en movimiento $(\Delta t)_m = \frac{(\Delta t)_s}{\gamma}$.

Ahora, para encontrar la diferencia de tiempo $(\Delta t)_m$ para el observador en el sistema de referencia rotante, se hace una transformación al elemento de línea (6) a un sistema de referencia rotante. Para esto se elige el elemento de línea de Minkowski

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2. \quad (6)$$

Para saber cómo se relacionan y saber quién es γ se debe hacer uso de las transformaciones de Lorentz, las cuales están dadas por

$$\begin{cases} dt = \gamma dt' \\ dr = dr' \\ d\phi = d\phi' + \gamma\Omega dt', \end{cases} \quad (7)$$

donde las coordenadas primadas representan el marco rotante, así, el elemento de línea toma la forma

$$ds^2 = c^2 \gamma^2 dt'^2 - dr'^2 - R^2 (d\phi' + \gamma\Omega dt')^2. \quad (8)$$

El camino circular de los haces ocurre en un radio $r' = R$, por lo tanto $dr' = 0$, por lo tanto, el elemento de línea es

$$ds^2 = c^2 \gamma^2 dt'^2 - R^2 (d\phi' + \gamma\Omega dt')^2. \quad (9)$$

Para un rayo de luz se tiene que $ds^2 = 0$. Así, se encuentra

$$dt' = \frac{\pm R d\phi'}{\gamma(c \mp \Omega R)}. \quad (10)$$

Ahora, se integra el lado izquierdo de (10) de un t_1 a un t_2 y el lado derecho de (10) de 0 a 2π y de 0 a -2π respectivamente, además se asume que γ no depende de ϕ' . Así, se obtiene que

$$t'_1 = \frac{R2\pi}{\gamma(c - \Omega R)}, \quad t'_2 = \frac{R2\pi}{\gamma(c + \Omega R)}. \quad (11)$$

Donde t_1 y t_2 corresponde al tiempo de propagación de la luz en contra y a favor de las manecillas del reloj, respectivamente.

Ahora, haciendo la diferencia de tiempo para el marco rotante, $(\Delta t)_m = t'_1 - t'_2$, se obtiene

$$(\Delta t)_m = \frac{4A\Omega}{\gamma(c^2 - (\Omega R)^2)}. \quad (12)$$

Luego, tomando γ como

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\Omega R)^2}{c^2}}} \quad (13)$$

$(\Delta t)_m$ es entonces

$$\begin{aligned} (\Delta t)_m &= \frac{4A\Omega}{\gamma(c^2 - (\Omega R)^2)} \\ &= \frac{4A\Omega}{c^2} (1 - (\Omega R/c)^2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (14)$$

Como consecuencia, las transformaciones de Lorentz mostradas en la ecuación 7, toman la

forma

$$\begin{cases} dt = dt' / (1 - (\Omega R/c)^2)^{1/2} \\ dr = dr' \\ d\phi = d\phi' + \Omega dt' / (1 - (\Omega R/c)^2)^{1/2} \end{cases} . \quad (15)$$

De las transformaciones anteriores se puede notar que en dt hay una dilatación temporal en el haz y en dt' hay una contracción temporal en el haz, además en $d\phi$ se nota el corrimiento espacial debido al γ .

En el caso del GPS, se puede usar el anterior razonamiento para calcular los tiempos de llegada de las señales de los satélites a la tierra o también, para realizar la sincronización de los relojes en tierra con los relojes en los satélites.

Para la sincronización de los relojes se usa la métrica (8), se procede a encontrar las diferencias de tiempo. En este caso también se trabaja solo con términos de primer orden en el parámetro de la velocidad angular. Así, el tiempo para que la luz recorra algún camino es

$$\int_{path} dt' = \int_{path} \frac{d\sigma'}{c} + \frac{2\omega_E}{c^2} \int_{path} dA'_z. \quad (16)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (16) corresponde al tiempo medido por los observadores fijos en la tierra y el segundo término corresponde a la corrección en el tiempo medido por los observadores en un marco giratorio, los cuales se ven afectados por la rotación de

la tierra.

De esta forma, se puede considerar que el efecto Sagnac surge de la diferencia de tiempo de viaje entre dos haces de luz que viajan en el mismo camino pero en direcciones opuestas en un sistema rotante; por otra parte, también se puede considerar como la diferencia entre los tiempos propios de un reloj satelital y un reloj de referencia fijado en la superficie de la tierra. .

2.2. Tiempo coordinado del GPS

A continuación se describe el campo gravitacional en el exterior de la tierra. Supongamos por el momento que la distribución de masa de la Tierra es estática, y que existe un sistema de coordenadas de caída libre, no giratorio, inercial localmente con origen en el centro de masa de la Tierra. Bajo estas suposiciones, la métrica que describe el campo gravitacional de la tierra en coordenadas isotrópicas es

$$-ds^2 = - \left(1 + \frac{2V}{c^2} \right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (17)$$

En la métrica anterior, (r, θ, ϕ) son coordenadas polares esféricas y V es el potencial gravitacional Newtoniano de la tierra, dado aproximadamente por

$$V = - \frac{GM_E}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{a_1}{r} \right)^2 P_2(\cos \theta) \right], \quad (18)$$

donde $GM_E = 3.986004418 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ es el producto de la masa de la tierra y la constante gravitacional Newtoniana, $J_2 = 1.0826300 \times 10^{-3}$ es el coeficiente del momento cuadrupolar de la tierra y $a_1 = 6.3781370 \times 10^6 \text{ m}$ es el radio ecuatorial de la tierra y P_2 es el polinomio de

Legendre de grado 2. Además, en el potencial no se tienen en cuenta contribuciones mayores en el momento multipolar ya que no es relevante para el GPS porque sus correcciones en el tiempo son mucho menores que las del termino cuadrupolar.

Ahora, se hace una transformación a la ecuación (17) a un sistema de coordenadas giratorio ECEF, este es un sistema de coordenadas cartesianas, al cual se le conoce como sistema terrestre convencional. El punto (0,0,0) esta en el centro de masa de la tierra. Sus ejes están alineados con el polo de referencia internacional y el meridiano de referencia internacional (Greenwich). Para este caso la tierra no gira sobre el eje z de este sistema, el eje z de este sistema se extiende a través del norte y no coincide con su eje de rotación. El eje x está a 0° de latitud (línea del ecuador) y 0° de longitud (meridiano de Greenwich). Esto quiere decir que el sistema gira con la tierra y por lo tanto, las coordenadas en un punto fijo en la superficie de la tierra no cambian. Siguiendo esto, la condiciones de la transformación son

$$\left\{ \begin{array}{l} t = t' \\ r = r' \\ \theta = \theta' \\ \phi = \phi' + \omega_E t' \end{array} \right. \quad (19)$$

se obtiene una métrica estacionaria después de despreciar los términos con c^{-4}

$$\begin{aligned}
 -ds^2 = & - \left[1 + \frac{2V}{c^2} - \left(\frac{\omega_E r' \sin \theta'}{c} \right)^2 \right] (cdt')^2 + 2\omega_E r'^2 \sin^2 \theta' d\phi' dt' \\
 & + \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) (dr'^2 + r'^2 d\theta'^2 + r'^2 \sin^2 \theta' d\phi'^2).
 \end{aligned} \tag{20}$$

El coeficiente g'_{00} de la métrica en el marco rotante es

$$g'_{00} = - \left[1 + \frac{2V}{c^2} - \left(\frac{\omega_E r' \sin \theta'}{c} \right)^2 \right] \equiv - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right), \tag{21}$$

donde Φ corresponde al potencial efectivo en el marco rotante, el cual incluye el potencial gravitacional estático de la tierra y un termino de potencial centrípeto.

Los relojes en la superficie de la tierra se mueven debido a la rotación de la tierra y se encuentran a distancias distintas del centro de la tierra, ya que su forma es oblata. Además, se necesita una expresión de modelo para la forma de esta superficie y un valor para el potencial gravitacional efectivo en esta superficie en el marco giratorio. Para realizar este cálculo, se hace uso de la ecuación (20) en el sistema ECEF, entonces para un reloj en reposo la ecuación (20) se reduce a

$$-ds^2 = - \left(1 + \frac{2V}{c^2} - \frac{\omega_E^2 r'^2 \sin^2 \theta'}{c^2} \right) (cdt')^2, \tag{22}$$

donde V es el potencial descrito en la ecuación (18). Esta ecuación determina el radio r' del modelo de la tierra en función del ángulo polar θ' . El valor numérico para Φ se puede determinar

en el ecuador tomando $\theta = \pi/2$ y $r' = a_1$, y así

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_0}{c^2} &= -\frac{GM_E}{a_1 c^2} - \frac{GM_E J_2}{2a_1 c^2} - \frac{\omega_E^2 a_1^2}{2c^2} \\ &= -6.95348 \times 10^{-10} - 3.764 \times 10^{-13} - 1.203 \times 10^{-12} \\ &= -6.96927 \times 10^{-10} . \end{aligned} \quad (23)$$

Como se puede ver en la ecuación (23), hay tres contribuciones al potencial efectivo: una contribución $1/r$ debido a la masa de la tierra, otra de potencial cuadrupolar y un último termino centrípeto debido a la rotación de la tierra. Sin embargo, la mayor contribución la hace el potencial gravitacional debido a la masa de la tierra, el termino centrípeto es unas 500 veces más pequeño y el termino cuadrupolar unas 2000 mil veces más pequeño.

Con esto, se tiene desde la ecuación (20) que para los relojes en la superficie de la tierra

$$d\tau = ds/c = dt' \left(1 + \frac{\Phi_0}{c^2} \right). \quad (24)$$

El termino del octopolo en la expansión multipolar del potencial gravitacional es miles de veces más pequeño que la contribución cuadrupolar, por lo tanto los efectos de los términos de orden superior al cuadrupolo son muy pequeños y se pueden despreciar. Los observadores en reposo en el geoide definen la unidad de tiempo en términos de la frecuencia adecuada de los relojes atómicos. En la ecuación (24), $d\tau$ corresponde al incremento de tiempo propio transcurrido en un reloj estándar en reposo, en términos del tiempo coordenado transcurrido dt .

En la ecuación (17) el cambio en el tiempo coordenado está definido por relojes en reposo en el infinito. Para definir estos relojes en reposo en la superficie de la tierra se define un nuevo tiempo coordenado t''

$$t'' = (1 + \Phi/c^2)t' = (1 + \Phi/c^2)t. \quad (25)$$

Cuando se realiza este cambio de escala, la métrica (20) en el sistema de referencia giratorio fijo en la tierra es

$$\begin{aligned} -ds^2 = & - \left(1 + \frac{2(V - \Phi_0)}{c^2} \right) (cdt'')^2 + 2\omega_E r'^2 \sin^2 \theta' d\phi' dt'' \\ & + \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) (dr'^2 + r'^2 d\theta'^2 + r'^2 \sin^2 \theta' d\phi'^2), \end{aligned} \quad (26)$$

en donde se han despreciado los términos con c^{-4} . Así, la ecuación (17) en el sistema de referencia ECI es

$$-ds^2 = - \left(1 + \frac{2(V - \Phi_0)}{c^2} \right) (cdt'')^2 + \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) (dr'^2 + r'^2 d\theta'^2 + r'^2 \sin^2 \theta' d\phi'^2). \quad (27)$$

2.3. Determinación del tiempo coordenado

En esta sección se va a estudiar la sincronización de los relojes en el GPS, teniendo en cuenta que esta está establecida en un marco de referencia local inercial. La métrica que se usa es

$$-ds^2 = - \left(1 + \frac{2(V - \Phi_0)}{c^2} \right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (28)$$

La diferencia $(V - \phi_0)$ que aparece en el primer termino de la ecuación (28) se debe a que el sistema de coordenadas localmente inercial, centrado en la tierra, la unidad de tiempo se determina moviendo los relojes en un campo gravitacional.

Para ver como surgen los efectos relativistas en un reloj atómico que se mueve lentamente, se resuelve la ecuación (28) para dt , para esto, primero sale como factor común $(cdt)^2$ del lado derecho de la ecuación

$$-ds^2 = - \left[1 + \frac{2(V - \Phi_0)}{c^2} - \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}{(cdt)^2} \right] (cdt)^2. \quad (29)$$

Luego, se hace uso del sistema de coordenadas ECI, este sistema de coordenadas se caracteriza porque los marcos inerciales tienen su origen en el centro de masa de la tierra y no giran con respecto a las estrellas. Para los objetos en el espacio, las ecuaciones de movimiento que describen el movimiento orbital son más simples en un marco no giratorio como ECI. Para mostrar una ubicación sobre la tierra utilizando ECI se utilizan coordenadas cartesianas, donde el plano xy coincide con el plano ecuatorial terrestre. El eje x está fijo permanentemente en una dirección relativa a la esfera celeste que no gira como lo hace la tierra. El eje z está a un ángulo de 90° con

respecto al plano ecuatorial y se extiende a través del polo norte. Entonces, la velocidad en este sistema de coordenadas es

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}{dt^2}. \quad (30)$$

Reemplazando (30) en la ecuación (28), se tiene

$$-ds^2 = - \left[1 + \frac{2(V - \Phi_0)}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + \frac{2Vv^2}{c^4} \right] (cdt)^2. \quad (31)$$

El último término se puede despreciar porque está suprimido por un factor de c^{-4} . Así, se obtiene

$$ds = \left[1 + \frac{2(V - \Phi_0)}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right]^{1/2} cdt. \quad (32)$$

Usando la expansión de la forma $(1+x)^{1/2} \approx 1+x/2$, se llega a

$$ds \approx \left[1 + \frac{(V - \Phi_0)}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right] cdt. \quad (33)$$

Por último, usando la definición de tiempo propio en la ecuación anterior

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \left[1 + \frac{(V - \Phi_0)}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right] dt, \quad (34)$$

se tiene que el incremento del tiempo propio en un reloj en movimiento es aproximadamente

$$dt = \frac{d\tau}{\left[1 + \frac{(V - \Phi_0)}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right]}. \quad (35)$$

Así, el tiempo coordenado de un reloj en la superficie de la tierra, mostrado en la ecuación (34), está corregido en la siguiente expresión

$$\int_{path} dt = \int_{path} \left[1 - \frac{(V - \Phi_0)}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2}\right] d\tau. \quad (36)$$

2.4. Efectos relativistas en relojes satélites

En esta sección se estudian las correcciones en el tiempo coordenado para un satélite debidas a las orbitas satelitales y su excentricidad. Para los relojes atómicos en satélites es más conveniente considerar los movimientos tal como se observarían en el marco local ECI. De esta forma, el efecto Sagnac se vuelve irrelevante. En esta sección se hará uso de la expresión para el tiempo coordenado transcurrido que se muestra en la ecuación (36).

2.4.1. Órbitas satelitales. Una buena aproximación para el caso de los satélites GPS es asumir que los satélites se mueven a lo largo de una orbita Kepleriana. Al asumir esto se necesitan algunas relaciones para simplificar la ecuación (36). Como el cuadrupolo es despreciado del potencial terrestre, la ecuación (36) queda con el potencial gravitacional newtoniano usual. De esta forma, los cálculos para el tiempo coordenado de un reloj satelital se puede hacer usando la mecánica Newtoniana orbital de los satélites. Así, se toma el semieje mayor de la orbita del satélite como a y la excentricidad como e . La solución a las ecuaciones orbitales se pueden revisar en Fitzpatrick (2012). Para este trabajo se va usar la ecuación de una elipse en coordenadas polares,

así la distancia radial r desde el centro de la tierra al satélite en las coordenadas ECI

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e \cos f)}. \quad (37)$$

El ángulo f se llama anomalía verdadera, se mide desde el perigeo a lo largo de la órbita hasta la posición instantánea del satélite. La anomalía verdadera es uno de los tres parámetros angulares que definen una posición a lo largo de una órbita, siendo los otros dos la anomalía excéntrica y la anomalía media. La anomalía verdadera puede ser calculada en términos de la anomalía excéntrica E , usando las siguientes relaciones

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin f = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}. \quad (38)$$

Otra forma de escribir la distancia radial r es

$$\begin{aligned} r &= \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \left(\frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \right)} \\ &= a(1 - e \cos E). \end{aligned} \quad (39)$$

En la mecánica Newtoniana, el campo gravitacional es un campo conservativo.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{GMm}{r}.$$

Por lo tanto, la energía total se conserva Ashby (2003). Así, la energía por unidad de masa

es

$$\frac{E}{m} = \varepsilon = \frac{1}{2}v^2 + \frac{GM_E}{r}. \quad (40)$$

Por otra parte, para una orbita elíptica la energía es negativa por ser una orbita delimitada.

Entonces, para una orbita de este tipo con una semi eje mayor a , la energía es

$$\varepsilon = -\frac{GM_E}{2a}. \quad (41)$$

Usando los dos conceptos anteriores para la energía total y la energía de la orbita, se obtiene

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM_E}{r} = -\frac{GM_E}{2a}. \quad (42)$$

Ahora, despejando para $v^2/2$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM_E}{r} - \frac{GM_E}{2a},$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{3GM_E}{2a} - \frac{2GM_E}{a} - \frac{GM_E}{r} + \frac{2GM_E}{r},$$

se obtiene

$$\frac{v^2}{2} = \frac{3GM_E}{2a} - \frac{GM_E}{r} - 2GM_E \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right). \quad (43)$$

Reemplazando esto en la ecuación (36), se tiene

$$\Delta t = \int_{path} d\tau \left[1 - \left(\frac{-GM_E}{rc^2} \right) + \frac{\Phi_0}{c^2} + \frac{3GM_E}{2ac^2} - \frac{GM_E}{rc^2} - \frac{2GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right], \quad (44)$$

y finalmente, se encuentra la siguiente expresión para el tiempo coordenado transcurrido para el reloj satelital

$$\Delta t = \int_{path} d\tau \left[1 + \frac{\Phi_0}{c^2} + \frac{3GM_E}{2ac^2} - \frac{2GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right]. \quad (45)$$

2.4.1.1. Corrección de excentricidad. La anomalía excéntrica es un parámetro angular que define la posición de un cuerpo que se mueve a lo largo de una órbita elíptica de Kepler. Entonces, para encontrar la anomalía excéntrica E , se debe resolver la siguiente ecuación trascendental Ashby (2003)

$$E - e \sin E = \sqrt{\frac{GM_E}{a^3}} (t - t_p), \quad (46)$$

donde t_p es el tiempo coordenado del paso por el perigeo. Ahora, calculando la razón de cambio de la anomalía excéntrica respecto del tiempo, se tiene

$$\delta E - e \cos \delta E = \sqrt{\frac{GM_E}{a^3}} \delta t, \quad (47)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\sqrt{GM_E/a^3}}{1 - e \cos E}. \quad (48)$$

Así, el último término de la ecuación (45) se puede integrar haciendo uso de la ecuación (48)

$$\begin{aligned} \Delta t_r &= \int \left[\frac{2GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \right] \frac{ds}{c} = \frac{2GM_E}{ac^2} \left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{GM_E}} \right) \int \frac{e \cos E (1 - e \cos E)}{1 - e \cos E} dE \\ &= \frac{2\sqrt{aGM_E}}{c^2} \int e \cos E dE, \end{aligned}$$

y se obtiene

$$\Delta t_r = \int \left[\frac{2GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \right] \frac{ds}{c} = \frac{2e\sqrt{aGM_E}}{c^2} \sin E + c. \quad (49)$$

La constante de integración en la ecuación (49) se puede despreciar, ya que este termino se agrupa con otros efectos de desplazamiento del reloj. Así, la corrección total para el desplazamiento del reloj debido a los efectos relativistas que varían en el tiempo es

$$\Delta t_r = 4.4428 \times 10^{-10} e \sqrt{a} \sin E \quad [s/\sqrt{m}]. \quad (50)$$

Claramente, el resultado anterior depende de la trayectoria del satélite. Este hecho se puede ver de la dependencia que la ecuación (50) tiene con la excentricidad, la cual no tiene unidades y el semieje mayor de la órbita a , con unidades de metros.

2.5. Efecto Doppler

Es sabido que el efecto Doppler se evidencia como un cambio en la frecuencia percibida de una onda cuando hay un movimiento relativo entre la fuente y un observador. Sin embargo, en relatividad general, este cambio en la frecuencia tendrá también una contribución adicional que proviene de la gravedad.

Para el potencial gravitacional y la velocidad del satélite se va a tomar V_j y \mathbf{v}_j respectivamente, f_0 será la frecuencia de transmisión del satélite, la cual corresponde a 10.23MHz, entonces para un receptor con una velocidad \mathbf{v}_R y un potencial gravitacional V_R , la frecuencia recibida es

$$f_R = f_0 \left[1 + \frac{-V_R + \mathbf{v}_R^2/2 + \Phi_0 + 2GM_E/a + 2V_j}{c^2} \right] \frac{1 - \mathbf{N} \cdot \mathbf{v}_R/c}{1 - \mathbf{N} \cdot \mathbf{v}_j/c}, \quad (51)$$

donde \mathbf{N} es el vector unitario en dirección de propagación en el marco inercial local. Para un receptor fijo en la superficie de la tierra, se escribe como

$$f_R = f_0 \left[1 + \frac{2GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right] \frac{(1 - \mathbf{N} \cdot \mathbf{v}_R/c)}{(1 - \mathbf{N} \cdot \mathbf{v}_j/c)}. \quad (52)$$

El resultado anterior se usará más adelante para determinar cambios en la frecuencia de las señales enviadas y recibidas por los satélites.

2.6. Intervalo de entrecruzamiento

Ahora, se va a estudiar el proceso de transferencia del tiempo coordinado de un reloj satelital a otro mediante el intercambio de señales. Esto es de gran relevancia cuando se implementa la auto navegación en el GPS.

En primera instancia, el reloj atómico estándar en el satélite transmisor sufre un ajuste en el cambio de tiempo coordinado de transferencia debido a un retardo relativista en el tiempo coordinado. Esto se da por la propagación de la señal entre los satélites. Además, cuando se envía una señal al satélite receptor se debe incorporar una corrección en la excentricidad para obtener el tiempo atómico en el reloj del satélite receptor.

Para que el ajuste en el cambio de tiempo coordinado no genere confusión en el análisis, se supondrá que los ajustes ya están incluidos y se usará el subíndice “S” para denotar medidas de tiempo coordinadas utilizando relojes satelitales ajustados.

Ahora, supongamos que un satélite i transmite una señal en la posición r_i y con velocidad v_i en las coordenadas ECI, en el tiempo del reloj del satélite, este se llamará $T_s(i)$, a un satélite j , en la posición r_j y con velocidad v_j . La coordenada de tiempo en la que esto ocurre, además del desplazamiento constante mostrado en la ecuación (49), será

$$T^{(i)} = T_s^{(i)} + \frac{2\sqrt{GMa_i}}{c^2} e_i \sin E_i. \quad (53)$$

El tiempo coordinado transcurrido durante la propagación de la señal al receptor en el satélite j , es

$$\Delta T = T^{(j)} - T^{(i)} = l/c. \quad (54)$$

Finalmente, el tiempo coordinado de llegada de la señal está relacionado con el tiempo ajustado del satélite receptor por el inverso de la ecuación (53)

$$T_s^{(j)} = T^{(j)} - \frac{2\sqrt{GMa_j}}{c^2} e_j \sin E_j. \quad (55)$$

Operando estos resultados, se obtiene

$$T_s^{(j)} = \frac{l}{c} + T_s^{(i)} + \frac{2\sqrt{GMa_i}}{c^2} e_i \sin E_i - \frac{2\sqrt{GMa_j}}{c^2} e_j \sin E_j, \quad (56)$$

donde l es la distancia de propagación en coordenadas ECI, de la señal. Expresando esto en términos de la distancia $|\Delta \mathbf{r}| = |\mathbf{r}_j(t_j) - \mathbf{r}_i(t_i)|$ entre los dos satélites en el instante de la transmisión

$$l = |\Delta \mathbf{r}| + \frac{\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_j}{c}. \quad (57)$$

El segundo termino de la ecuación (57) corresponde al movimiento del receptor en el sistema de referencia inercial durante la propagación de la señal. Ahora, reemplazando l/c en la ecuación (56), se obtiene

$$T_s^{(j)} = T_s^{(i)} + \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{c} + \frac{2\sqrt{GMa_i}}{c^2} e_i \sin E_i - \frac{2\sqrt{GMa_j}}{c^2} e_j \sin E_j + \frac{\Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_j}{c^2}. \quad (58)$$

Este resultado contiene todas las correcciones relativistas que deben tenerse en cuenta para la transferencia de tiempo directa mediante la transmisión de tiempo de un satélite a otro.

2.7. Cambios de frecuencia inducidos por los cambios en las órbitas

La combinación del Efecto Doppler y la corrección en el tiempo coordinado mostrado en la ecuación (34) para un reloj en un satélite del GPS nos lleva directamente a una expresión para

el cambio de frecuencia de un reloj satelital en relación con un reloj de referencia fijo en la tierra.

Haciendo uso del potencial gravitacional Newtoniano, se llega a

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{\Phi_0}{c^2} - \frac{GM_E}{rc^2} - \frac{v^2}{2c^2}, \quad (59)$$

donde v es la velocidad del satélite en el sistema local inercial ECI, GM_E es el producto de la constante gravitacional Newtoniana G y la masa de la tierra M_E , c es la velocidad de la luz y Φ_0 es el potencial gravitacional efectivo de la tierra. El termino de ϕ_0 incluye las contribuciones de los momentos monopulares y cuadrupolares de la distribución de masa de la tierra y el potencial centrípeto efectivo en un marco de referencia fijo en la tierra, debido a la rotación de la tierra. El valor para ϕ_0 está descrito en la ecuación (23).

Si la órbita de un satélite del GPS se puede aproximar mediante una órbita kepleriana de semieje mayor a , entonces, en un instante en que la distancia del reloj al centro de masa de la Tierra es r , se puede calcular la expresión para el cambio de frecuencia fraccional con la ecuación (43) y (59), de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f} &= -\frac{1}{c^2} \left(\frac{3GM_E}{2a} - \frac{GM_E}{r} - 2GM_E \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right) - \frac{GM_E}{rc^2} - \frac{\Phi_0}{c^2} \\ &= \frac{-3GM_E}{2ac^2} + \frac{2GM_E}{c^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) - \frac{\Phi_0}{c^2}, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{-3GM_E \delta a}{2ac^2} - \frac{\Phi_0 \delta a}{c^2} + \frac{2GM_E \delta a}{c^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Los dos primeros términos de la ecuación (60) se deben a la compensación en la frecuencia que se aplica a los relojes del GPS antes del lanzamiento para que lleven el ritmo igual a los relojes de referencia en la superficie de la tierra. Y el último término de esta misma ecuación es muy pequeño cuando la excentricidad de la órbita es muy pequeña. Cuando se integra en el tiempo estos términos dan lugar al llamado efecto de excentricidad. Para los siguientes cálculos se supondrá que la excentricidad es muy pequeña.

De la ecuación (60), si el semi-eje mayor cambia en una cantidad δa debido a un ajuste de la órbita, el reloj del satélite experimentará un cambio en frecuencia fraccional

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{3GM_E}{2a^2c^2}. \quad (61)$$

El factor $3/2$ en la expresión (61) se debe al efecto combinado del Doppler y los cambios de frecuencia gravitacional. Si el semi-eje mayor aumenta, el satélite tendrá un mayor potencial gravitacional terrestre y se correrá gravitacionalmente más hacia el azul y como consecuencia se reducirá la velocidad del satélite.

2.7.1. Conservación de la energía. El potencial gravitacional de un satélite en la posición (x, y, z) en las coordenadas ecuatoriales ECI en el modelo que estamos considerando se puede escribir de la siguiente forma

$$V(x, y, z) = -\frac{GM_E}{r} \left(1 - \frac{J_2 a_1^2}{r^2} \left[\frac{3z^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right] \right). \quad (62)$$

Como se está trabajando con fuerza conservativa en este modelo (no se tiene en cuenta efec-

tos como la presión de radiación solar), la energía potencial más la energía cinética se conservan.

Se le llamará ε a la energía por unidad de masa de un punto en la órbita, así

$$\begin{aligned}
 \varepsilon = cte &= \frac{v^2}{2} + V(x, y, z) \\
 &= \frac{v^2}{2} - \frac{GM_E}{r} + \frac{GM_E}{r^3} (J_2 a_1^2) \left[\frac{3z^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right] \\
 &= \frac{v^2}{2} - \frac{GM_E}{r} + V'(x, y, z),
 \end{aligned} \tag{63}$$

donde $V'(x, y, z)$ es el potencial perturbado debido al potencial cuadripolar de la tierra. Haciendo uso de la teoría de perturbación planetaria de Lagrange Fitzpatrick (2012), la condición para la conservación de la energía se puede escribir así

$$\varepsilon = -\frac{GM_E}{2a} + V'(x, y, z), \tag{64}$$

donde a es el semi eje mayor perturbado.

La condición de conservación de la energía se puede utilizar para expresar el desplazamiento del efecto Doppler en términos del potencial. En este trabajo nos interesan los cambios de frecuencia fraccionales causados por el cambio de la órbita.

2.8. Efectos relativistas secundarios

Existen varios efectos relativistas adicionales que se deben tener en cuenta, pero estos aportan correcciones demasiado pequeñas. Estos efectos no son lo suficientemente grandes como para afectar la navegación, pero pueden ser considerados en investigaciones posteriores. En esta sección

se estudiarán algunos de esos efectos.

2.8.1. Retraso en la propagación de la señal. El retraso en la propagación de señal de Shapiro se da porque las señales electromagnéticas que pasan cerca de la tierra experimentan una desviación Shapiro (1964). Esto se encuentra relacionado con la curvatura de la trayectoria de la señal electromagnética. Por esta razón se presentan retrasos en el tiempo y se pueden calcular a partir de la métrica (27), la cual tiene incorporada la razón de tiempo coordinado expresado en términos de ϕ_0/c^2 . Haciendo $ds^2 = 0$ y resolviendo para el incremento de tiempo coordinado a lo largo del incremento del camino $d\sigma = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}$, se tiene que

$$0 = - \left(1 + \frac{2(V - \Phi_0)}{c^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) d\sigma^2.$$

Despejando para dt

$$dt = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{2(V - \Phi_0)}{c^2} \right)^{-1/2} d\sigma,$$

para obtener

$$dt = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{2V}{c^2} + \frac{\Phi_0}{c^2} \right) d\sigma. \quad (65)$$

Ahora, para integrar se supondrá una trayectoria en línea recta de distancia l entre el receptor y el emisor

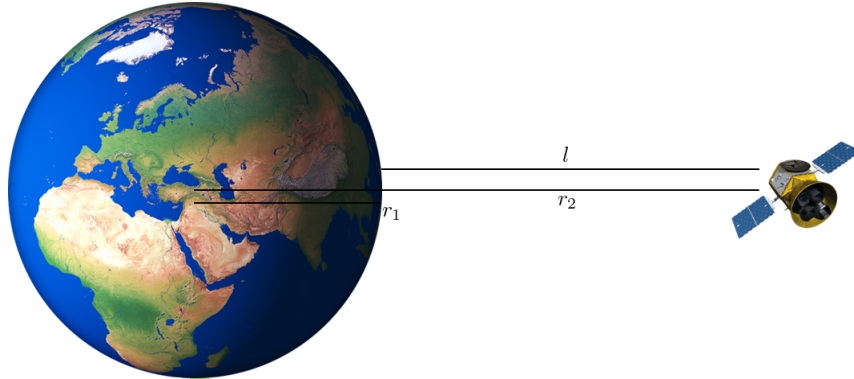


Figura 6. Distancias para el emisor, r_1 , y receptor de la señal, r_2 , medidas desde el centro de la tierra.

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{c} \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} - \frac{\Phi_0}{c^2} \right) dr, \quad (66)$$

y se encuentra

$$\Delta t_{delay} = \frac{1}{c} \left((r_2 - r_1) + \frac{2GM}{c^2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - \frac{\Phi_0}{c^2} (r_2 - r_1) \right). \quad (67)$$

Luego, reescribiendo r_1 y r_2 en términos de l , haciendo uso de la figura 6

$$r_1 = \frac{r_1 + r_2 - l}{2}, \quad r_2 = \frac{r_1 + r_2 + l}{2}, \quad (68)$$

se tiene que el tiempo de retraso es

$$\Delta t_{delay} = \frac{l}{c} + \frac{\Phi_0 l}{c^2 c} + \frac{2GM}{c^3} \ln \left(\frac{r_1 + r_2 + l}{r_1 + r_2 - l} \right). \quad (69)$$

El segundo termino de la ecuación (69) es la expresión usual para el retardo en el tiempo de

Shapiro, aunque es importante notar que está suprimido por un factor de c^{-3} . En el caso del GPS aparece un término extra con signo contrario, porque Φ_0 es negativo, debido a la escogencia de la razón de tiempo coordenado, el cual tiende a cancelar el término logarítmico.

2.8.2. Efecto en la distancia geodésica. Los efectos de la curvatura se deben tener en cuenta al orden de milímetros. Por ejemplo, haciendo uso nuevamente de la métrica (27), la distancia propia entre un punto r_1 y otro punto r_2 es

$$\int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{GM_E}{rc^2} \right) dr = (r_2 - r_1) + \frac{GM_E}{c^2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right). \quad (70)$$

La diferencia entre la distancia propia y la distancia coordenada (y entre la superficie de la tierra y el radio de los satélites del GPS), es aproximadamente

$$\frac{GM_E}{c^2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) = 4.43 \ln \left(\frac{26578000}{6378000} \right) = 4.43 \ln(4.16) \text{mm} = 6.3 \text{mm},$$

donde r_1 y r_2 son las medidas del radio de la tierra y la distancia media de los satélites del GPS desde el centro de la tierra respectivamente. Los efectos con estos ordenes de magnitud son utilizados, por ejemplo en la medición de distancia por láser satelital.

2.9. Sistemas de aumento o mejora para el GPS

La navegación basada en GPS puede fallar de muchas maneras diferentes. Por ejemplo, la potencia transmitida puede ser baja, lo que facilita la interferencia y la pérdida de señal o también las fallas de los relojes atómicos en los satélites pueden pasar desapercibidas durante horas si una estación de monitoreo no está funcionando, lo cual genera transmisiones de señal poco confiables.

Esta desconfianza en las señales ha hecho que se hagan mejoras o aumentos en el GPS con el objetivo de proporcionar a los usuarios señales sin errores y así aumentar la fiabilidad en la navegación con GPS. Por esta razón se han desarrollado varios sistemas de navegación independientes.

Por ejemplo, se tiene WAAS (Wide-Area Augmentation System) el cual proporciona mayor confiabilidad y precisión en Estados Unidos, WAAS está compuesto de 24 receptores en ubicaciones conocidas con precisión y monitorea continuamente las señales de los satélites GPS y calcula las correcciones que se cargan en los satélites geosincrónicos alquilados para su retransmisión a los usuarios que tienen habilitado WAAS. Las correcciones que hace este sistema no involucran correcciones relativistas. Principalmente las correcciones que hace son de desviación en los relojes y retrasos ionosféricos y troposféricos. En Europa se encuentra un sistema que funciona de la misma manera llamado EGNOS (European Geostationary Navigation Overlay System) y en Japón se encuentra MTSAT.

Por otro lado, el QZSS japonés (Quasi-Zenith Satellite System) es un sistema de aumento basado en satélites que consta de tres satélites en órbitas geosincrónicas. En el apogeo, donde los satélites se mueven más lentamente, los satélites pasan más tiempo sobre Japón y es únicamente allí donde funciona. Aunque los satélites llevan relojes atómicos y parezca un sistema satelital de navegación, este sistema se denomina sistema de aumento porque no está disponible a nivel mundial.

También se podría pensar que se deben tener en cuenta los efectos debidos a otros cuerpos en el sistema solar para los sistemas de mejora del GPS, pero estos efectos se cancelan con bastante precisión gracias a la resincronización en los relojes locales debido al movimiento de la tierra

al rededor del sol. Esto es gracias al principio de equivalencia porque se escogió un sistema de referencia en caída libre al rededor del sol, localmente inercial y centrado en la tierra. Por supuesto quedan remanentes, los cuales provienen de la diferencia de potencial del sol entre la posición del reloj y la posición del centro de la tierra, y esto es lo que da lugar a cambios de frecuencia gravitacional fraccionales del orden de una parte en 10^{16} , lo cual es completamente insignificante. De igual manera es la dinámica asociada a la luna.

2.10. Aplicaciones

Todos los sistemas globales de navegación satelital tienen muchas y muy valiosas aplicaciones, por mencionar algunas, se encuentra la sincronización de nodos de líneas eléctricas para la detección de fallas, comunicaciones, medición de pulsars, navegación en el espacio exterior, pruebas de física fundamental, pruebas de teorías de la gravedad, seguimiento de vehículos, búsqueda y rescate, topografía, mapeo, navegación de aviones, esto sin mencionar las aplicaciones a nivel militar. Cabe mencionar que las aplicaciones civiles han superado las aplicaciones militares. A pesar de que hayan tantas aplicaciones, cabe mencionar algunas.

Joseph Taylor en 1993 logró ser ganador del premio nobel de Física por la medición de la tasa de aumento del periodo de un pulsar binario, esta medición dependía de los receptores GPS en el observatorio de Arecibo Hulse and Taylor (1975). Los estándares de tiempo en todo el mundo se comparan haciendo uso del GPS. La información precisa en la posición puede ayudar en la gestión de cuidados de los recursos naturales y animales del mundo. También la agricultura hace uso de los receptores de GPS para la aplicación en tiempo real de pesticidas o fertilizantes. Ruinas submarinas o barcos hundidos pueden ser encontrados por medio del GPS y se puede

regresar una y otra vez con completa certeza de la posición. Las maquinas de movimiento de tierras pueden equiparse con receptores de GPS para ser controlados remotamente con un riesgo mínimo. En caso de haber una tormenta eléctrica o tropical, los receptores de GPS son capaces de hacer mediciones de temperatura, humedad, presión y velocidad del viento de mayor resolución que las que se pueden obtener con cualquier otro método. Los movimientos relativos de partes remotas de la corteza terrestre se pueden medir con precisión en poco tiempo, lo que contribuye a una mejor comprensión de los procesos tectónicos dentro de la tierra y, posiblemente, a futuras predicciones de terremotos.

3. Invariantes de curvatura

Los invariantes de curvatura son cantidades escalares que se construyen con el tensor de Riemann. Estas cantidades sirven para caracterizar el espacio-tiempo de una fuente con un potencial gravitacional específico Thorne et al. (2000).

Dado un espacio-tiempo, existe un número infinito de invariantes de curvatura. Por ejemplo, el escalar más simple que resulta del tensor de Riemann es el escalar de Ricci

$$R \equiv g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} R_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (71)$$

en donde, $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ es el tensor de Levi-Civita. Cabe notar que, en relatividad general, todas las soluciones en el vacío (espacio libre) se caracterizan por tener un escalar de Ricci y un tensor de Ricci iguales a cero Carroll (2019). Entonces esto implica que los invariantes de curvatura contruidos con el escalar de Ricci o el tensor de Ricci serán iguales a cero y no serán útiles para nuestro propósito.

Para este trabajo se encontraron los escalares de curvatura de Kretschmann, Chern-Pontryagin y Euler con el fin de caracterizar las métricas que se están trabajando, descritas en (17) y (20). Para encontrar los escalares se usó el programa Mathematica, con el paquete 'xAct'. Para obtener las expresiones explícitas de los escalares se definió cada potencial, los cuales fueron, el potencial gravitacional de Newton, el potencial gravitacional de Newton con corrección de cuadrupolo y el potencial de Newton generalizado Tejeda and Rosswog (2013).

- **Potencial gravitacional de Newton**

Este potencial gravitacional representa el potencial de un objeto esférico de masa M_E y se escribe como

$$V = -\frac{GM_E}{r}. \quad (72)$$

- **Potencial gravitacional de Newton con corrección del cuadrupolo**

Este potencial resulta de hacer una expansión multipolar en polinomios de Legendre. El término dominante corresponde al término de monopolo y representa el potencial de un objeto esférico de masa M_E . Gracias al carácter atractivo de la interacción gravitacional el término dipolar es nulo. Finalmente, se encuentra la contribución cuadrupolar al potencial gravitacional, la cual intenta modelar el carácter oblató de la tierra. Este potencial tiene la forma

$$V = -\frac{GM_E}{r} \left[1 - J_2 \left(\frac{a_1}{r} \right)^2 P_2(\cos \theta) \right]. \quad (73)$$

La forma explícita de P_2 del polinomio de Legendre en función de θ es

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{4}(1 + 3 \cos 2\theta). \quad (74)$$

Así, el potencial queda de la forma

$$V = -\frac{GM_E}{r} \left[1 - \frac{J_2 a_1^2}{4r^2} - \frac{3J_2 a_1^2}{4r^2} \cos 2\theta \right]. \quad (75)$$

■ Potencial generalizado de Newton

Este tercer potencial corresponde a un trabajo realizado por Emilio Tejada y Stephan Rosswog Tejada and Rosswog (2013), donde se deriva una generalización del potencial newtoniano a partir de partículas de prueba moviéndose a lo largo de geodesicas en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Este potencial tiene la forma

$$V = -\frac{GM}{r} - \left(\frac{2r_g}{r-2r_g} \right) \left[\left(\frac{r-r_g}{r-2r_g} \right) \dot{r}^2 + \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{2} \right]. \quad (76)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (76) es el potencial newtoniano correspondiente a la atracción gravitacional debida a la interacción de la masa central y la masa en reposo de una partícula de prueba, mientras que el segundo término está relacionado con el movimiento de la partícula de prueba. Este potencial satisface la ecuación de Poisson cuando la única fuente del campo gravitacional es una masa central.

Para hacer uso de este potencial, en este trabajo se deben imponer algunas condiciones. Entonces, $r_g = GM/c^2$ es el radio gravitacional, \dot{r} representa la velocidad radial de la partícula de prueba, en este caso será el satélite, por lo que $\dot{r} = 0$ y $\dot{\phi}$ representa la velocidad angular de la partícula de prueba, la cual es igual a la velocidad angular de la tierra, ya que por facilidad en los cálculos se escogió una órbita geoestacionaria en el plano ecuatorial terrestre.

Por lo tanto el potencial generalizado de Newton toma la forma

$$V = -\frac{GM}{r} - \left(\frac{2r_g}{r-2r_g} \right) \left(\frac{r^2 \omega_E^2}{2} \right).$$

Usando la condición de $r_g/r \ll 1$ y expandiendo

$$V = -\frac{GM}{r} - r_g r \omega_E^2 - 2r_g^2 \omega_E^2. \quad (77)$$

Para verificar que los escalares están calculados de forma correcta, se calcularon también para la métrica con la perturbación descrita en (19) pero sin despreciar ningún termino. Esto se hizo porque esta perturbación es simplemente un cambio de coordenadas, por lo tanto, la métrica sería la misma que se puede ver en (17) y así mismo, los escalares son idénticos.

Por último, para saber si las métricas que se están trabajando son estáticas o estacionarias se realizó el siguiente procedimiento. Según el trabajo de Vishveshwara Vishveshwara (1968), para que una métrica sea estática debe cumplir la ecuación de Killing

$$\nabla_b \xi_a + \nabla_a \xi_b = 0, \quad (78)$$

y además debe cumplir la condición de congruencia normal, la cual especifica que el vector de Killing tipo tiempo debe ser ortogonal a la hipersuperficie tipo espacio. Matemáticamente tenemos que se debe cumplir

$$\xi_a \nabla_c \xi_b + \xi_b \nabla_a \xi_c + \xi_c \nabla_b \xi_a = 0. \quad (79)$$

Entonces, el vector de Killing tipo tiempo para la métrica descrita en (17) es $\xi^a = (1, 0, 0, 0)$, este vector de Killing cumple las ecuaciones (78) y (79), por lo tanto esta métrica es estática. Usando este mismo vector de Killing para la métrica (20) se encuentra que sí cumple la ecuación de Killing pero no la ecuación de la congruencia, esto se debe a que este vector de Killing no es ortogonal a la hipersuperficie tipo espacio. Un vector de Killing tipo tiempo ortogonal al espacio para la métrica (20) debe tener la forma $\xi^b = At^b + B\omega^b$ porque se debe tener en cuenta la rotación. Al no tener certeza de cual es el vector de Killing tipo tiempo de la métrica (20) pero al ver que el vector ξ^a si cumple con la ecuación de Killing, suponemos que esta métrica es una métrica estacionaria.

3.1. Métrica estática

En primer lugar se presentan los resultados para los invariantes con la métrica (17) para cada potencial. Debido a la extensión de los resultados. En esta sección se presentan los invariantes como funciones implícitas de las variables involucradas, el resultado explícito se puede ver en el apéndice A.

3.1.1. Escalar de Kretschmann. El escalar de Kretschmann se define como

$$K = R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (80)$$

donde $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ es el tensor de Riemann. Los resultados para este invariante en el caso del

potencial gravitacional de Newton es $K_1 = F_1(r, \theta)$, donde F_1 está descrito en la ecuación (114) del apéndice A. Para el potencial gravitacional de Newton con corrección del cuadrupolo se obtiene $K_2 = F_2(r, \theta)$, con F_2 expresada en la ecuación (115) del apéndice A. Y por último, para el potencial de Newton generalizado se obtiene $K_3 = F_3(r, \theta)$, donde F_3 se encuentra escrita explícitamente en la ecuación (117) del apéndice A.

3.1.2. Escalar de ChernPontryagin. El escalar de Chern-Pontryagin se define como

$$\mathbb{K} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\gamma\sigma} R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\sigma}, \quad (81)$$

donde $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ es el tensor de Riemann y $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ es el tensor de Levi-Civita. En esta sección se encontró que el invariante de ChernPontryagin, independientemente del potencial, es igual a cero.

3.1.3. Escalar de Euler. El escalar de Euler se escribe como

$$\mathcal{K} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\sigma\theta\varphi} R_{\mu\nu\gamma\sigma} R_{\alpha\beta\theta\varphi}, \quad (82)$$

donde $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ es el tensor de Riemann y $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ es el tensor de Levi-Civita. El resultado para el invariante de Euler en el caso del potencial gravitacional de Newton es $\mathcal{K}_1 = \mathcal{F}_1(r, \theta)$, con \mathcal{F}_1 definida en la ecuación (111) del apéndice A. Para el potencial gravitacional de Newton con corrección del cuadrupolo se obtiene $K_2 = \mathcal{F}_2(r, \theta)$, donde \mathcal{F}_2 se encuentra descrito en la ecuación (112) del apéndice A. Y finalmente, para el potencial de Newton generalizado se obtiene

$\mathcal{K}_3 = \mathcal{F}_3(r, \theta)$, con \mathcal{F}_3 escrita explícitamente en la ecuación (113) del apéndice A.

3.2. Métrica estacionaria

En segundo lugar se presentan los resultados para los invariantes con la métrica estacionaria para cada potencial. Debido a la extensión de los resultados; en esta sección se presentan los invariantes como funciones implícitas de las variables involucradas, algunos de los resultados se pueden ver explícitamente en el apéndice B.

3.2.1. Escalar de Kretschmann. Con el escalar de Kretschmann definido en la ecuación (80), se encontró que para el potencial gravitacional de Newton el resultado es $K_4 = F_4(r, \theta, \omega_E)$, con F_4 descrita en la ecuación (120) del apéndice B. Para el potencial gravitacional de Newton con corrección del cuadrupolo se encontró $K_5 = F_5(r, \theta, \omega_E)$, en este caso, F_5 es demasiado extenso para escribirlo explícitamente. Y por último, para el potencial de Newton generalizado se encontró $K_6 = F_6(r, \theta, \omega_E)$, donde F_6 , nuevamente, es una función demasiado extensa para ser escrita explícitamente.

3.2.2. Escalar de ChernPontryagin. Con el escalar de ChernPontryagin definido en la ecuación (81), se encontró que los invariantes en esta sección son tal que se pueden escribir como una función \mathbb{F} por un factor de ω_E a la potencia 1. En el caso del potencial gravitacional de Newton se obtuvo $\mathbb{K}_4 = \omega_E \mathbb{F}_4(r, \theta, \omega_E)$, con \mathbb{F}_4 descrita en la ecuación (121) del apéndice B. Para el potencial gravitacional de Newton con corrección del cuadrupolo se obtuvo $\mathbb{K}_5 = \omega_E \mathbb{F}_5(r, \theta, \omega_E)$, con \mathbb{F}_5 escrita explícitamente en la ecuación (122) del apéndice B. Finalmente, para el potencial de Newton generalizado se obtuvo $\mathbb{K}_6 = \omega_E \mathbb{F}_6(r, \theta, \omega_E)$, con \mathbb{F}_6 definida en la ecuación (123) del apéndice B.

3.2.3. Escalar de Euler. Con el escalar de Euler definido en la ecuación (82). Se obtuvo que para el potencial gravitacional de Newton se obtuvo $\mathcal{K}_4 = \mathcal{F}_4(r, \theta, \omega_E)$, con la función \mathcal{F}_4 descrita en la ecuación (119) del apéndice B. Para el potencial gravitacional de Newton con corrección del cuadrupolo se obtuvo $\mathcal{K}_5 = \mathcal{F}_5(r, \theta, \omega_E)$, donde \mathcal{F}_5 es demasiado extenso para ser escrito explícitamente. Y por último, para el potencial de Newton generalizado se obtuvo $\mathcal{K}_6 = \mathcal{F}_6(r, \theta, \omega_E)$, donde \mathcal{F}_6 es demasiado extenso para ser escrito explícitamente.

4. Estimación de tiempo de llegada de las señales

En este capítulo se calculan las medidas de tiempo de la señal satélite - usuario para la métrica estática y la métrica estacionaria con los tres potenciales usados en el capítulo anterior. Por simplicidad en los cálculos, el satélite va a estar ubicado en el plano ecuatorial terrestre a una distancia r_2 desde el centro de la tierra y el usuario estará ubicado también en el plano ecuatorial terrestre a una distancia r_1 desde el centro de la tierra.

Por lo tanto, las condiciones usadas para realizar los cálculos son

$$\theta = \pi/2, \quad d\theta = 0, \quad d\phi = 0, \quad (83)$$

las cuales representan el plano ecuatorial y además, que no hay ningún cambio en el ángulo azimutal. Para la trayectoria geodésica de la señal electromagnética, el punto de partida será r_1 y el punto de llegada r_2 , descritos respectivamente a continuación

$$\begin{aligned} r_1 &= 6378000[\text{m}] \rightarrow \text{Radio de la tierra,} \\ r_2 &= 26578000[\text{m}] \rightarrow \text{Radio medio de los satélites.} \end{aligned} \quad (84)$$

4.1. Métrica estática

Para empezar, se realizan los cálculos de tiempo de llegada de la señal correspondientes a la métrica estática con los tres potenciales escogidos

$$-ds^2 = -\left(1 + \frac{2V}{c^2}\right)(cdt)^2 + \left(1 - \frac{2V}{c^2}\right)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (85)$$

■ **Potencial gravitacional de Newton**

Remplazando el potencial (72) en la métrica (85) e igualando a cero el elemento de línea, se tiene

$$0 = -\left(1 - \frac{2GM_E}{rc^2}\right)(cdt)^2 + \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2}\right)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (86)$$

Luego, haciendo uso de las condiciones mostradas en la ecuación (83), se obtiene

$$\left(1 - \frac{2GM_E}{rc^2}\right)^{1/2} (cdt) = \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2}\right)^{1/2} dr,$$

y despejando cdt

$$cdt = \left(1 - \frac{2GM_E}{rc^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2}\right)^{1/2} dr.$$

Luego, expandiendo en series de Taylor

$$cdt = \left(1 + \frac{GM_E}{rc^2}\right) \left(1 + \frac{GM_E}{rc^2}\right) dr.$$

Así, se obtiene la expresión para integrar

$$cdt = \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2}\right) dr,$$

al lado izquierdo de la ecuación se integra de un tiempo t_1 hasta un tiempo t_2 y al lado derecho de la ecuación a lo largo de la trayectoria entre r_1 y r_2 descritos en (84)

$$c \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2}\right) dr,$$

para obtener

$$c\Delta t = (r_2 - r_1) + \frac{2GM_E}{c^2} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \quad (87)$$

y evaluando

$$\begin{aligned} c\Delta t &= 20200000 + 0.012659208 \text{ [m]} \\ &= 20200000.012 \text{ [m]}. \end{aligned} \quad (88)$$

Finalmente se encuentra que el tiempo de llegada de la señal desde el satélite hasta el usuario con esta métrica y este potencial es

$$\Delta t = 0.06737994727 \text{ [s]}. \quad (89)$$

■ **Potencial gravitacional de Newton con corrección del cuadrupolo**

Reemplazando el potencial (75) en la métrica (85) e igualando a cero el elemento de línea, se tiene

$$0 = - \left(1 - \frac{2GM_E}{rc^2} \left[1 - \frac{J_2 a_1^2}{4r^2} - \frac{3J_2 a_1^2}{4r^2} \cos 2\theta \right] \right) (cdt)^2 + \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2} \left[1 - \frac{J_2 a_1^2}{4r^2} - \frac{3J_2 a_1^2}{4r^2} \cos 2\theta \right] \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (90)$$

Haciendo uso nuevamente de las condiciones descritas en (83)

$$cdt = \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2} - \frac{2GM_E J_2 a_1^2}{4r^3 c^2} - \frac{6GM_E J_2 a_1^2}{4r^3 c^2} \cos 2\theta \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2GM_E}{rc^2} + \frac{2GM_E J_2 a_1^2}{4r^3 c^2} + \frac{6GM_E J_2 a_1^2}{4r^3 c^2} \cos 2\theta \right)^{-1/2} dr,$$

y expandiendo en series de Taylor, se obtiene la expresión para integrar

$$cdt = \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2} - \frac{GM_E J_2 a_1^2}{2r^3 c^2} - \frac{3GM_E J_2 a_1^2}{2r^3 c^2} \cos 2\theta \right) dr,$$

al lado izquierdo de la ecuación se integra de un tiempo t_1 hasta un tiempo t_2 y al lado derecho de la ecuación a lo largo de la trayectoria entre r_1 y r_2 descritos en (84)

$$c \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2} - \frac{GM_E J_2 a_1^2}{2r^3 c^2} - \frac{3GM_E J_2 a_1^2}{2r^3 c^2} \cos 2\theta \right) dr$$

operando

$$\begin{aligned} c\Delta t = & (r_2 - r_1) + \frac{2GM_E}{c^2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{GM_E J_2 a_1^2}{4c^2} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \\ & - \frac{3GM_E J_2 a_1^2}{4c^2} \cos 2\theta \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \end{aligned} \quad (91)$$

y evaluando se obtiene

$$\begin{aligned} c\Delta t = & 20200000 + 0.012659208 - 0.00000113129 - 0.00000339387 \text{ [m]} \\ = & 20200000.012 \text{ [m]}. \end{aligned} \quad (92)$$

Así, el tiempo de llegada de la señal desde el satélite hasta el usuario con la métrica mostrada en (85) y potencial (75) es

$$\Delta t = 0.06737994727 \text{ [s]}. \quad (93)$$

■ Potencial generalizado de Newton

Ahora, reemplazando el potencial (77) en la métrica (85) e igualando a cero el elemento de

línea

$$0 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{2r_g r \omega_E^2}{c^2} - \frac{4r_g^2 \omega_E^2}{c^2} \right) (cdt)^2 + \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \frac{2r_g r \omega_E^2}{c^2} + \frac{4r_g^2 \omega_E^2}{c^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (94)$$

De la misma manera que se hizo en los casos anteriores, se usan las condiciones descritas en (83)

$$cdt = \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \frac{2r_g r \omega_E^2}{c^2} + \frac{4r_g^2 \omega_E^2}{c^2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{2r_g r \omega_E^2}{c^2} - \frac{4r_g^2 \omega_E^2}{c^2} \right)^{-1/2} dr,$$

y expandiendo en series de Taylor, se obtiene la expresión para integrar

$$cdt = \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \frac{2r_g r \omega_E^2}{c^2} + \frac{4r_g^2 \omega_E^2}{c^2} \right) dr,$$

al lado izquierdo de la ecuación se integra de un tiempo t_1 hasta un tiempo t_2 y al lado derecho de la ecuación a lo largo de la trayectoria entre r_1 y r_2 descritos en (84)

$$c \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \frac{2r_g r \omega_E^2}{c^2} + \frac{4r_g^2 \omega_E^2}{c^2} \right) dr,$$

se encuentra

$$c\Delta t = (r_2 - r_1) + \frac{2GM}{c^2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_g \omega_E^2}{c^2} (r_2^2 - r_1^2) + \frac{4r_g^2 \omega_E^2}{c^2} (r_2 - r_1), \quad (95)$$

y evaluando se obtiene

$$c\Delta t = 20200000 + 0.012659208 + 1.746787597 \times 10^{-13} + 9.402903146 \times 10^{-23} \text{ [m]}$$

$$= 20200000.012 \text{ [m].}$$

(96)

Por lo tanto, el tiempo de llegada de la señal desde el satélite hasta el usuario con una métrica estática y el potencial (77)

$$\Delta t = 0.06737994727 \text{ [s].} \quad (97)$$

4.2. Métrica estacionaria

En esta sección se realizan los cálculos de tiempo de llegada de la señal correspondientes a la métrica estacionaria con los tres potenciales escogidos

$$\begin{aligned}
-ds^2 = & - \left[1 + \frac{2V}{c^2} - \left(\frac{\omega_E r \sin \theta}{c} \right)^2 \right] (cdt)^2 + 2\omega_E r^2 \sin^2 \theta d\phi dt \\
& + \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2).
\end{aligned} \tag{98}$$

■ Potencial gravitacional de Newton

Reemplazando el potencial (72) en la métrica (98) e igualando a cero el elemento de línea se tiene

$$\begin{aligned}
0 = & - \left[1 - \frac{2GM_E}{rc^2} - \left(\frac{\omega_E r \sin \theta}{c} \right)^{1/2} \right] (cdt)^2 + 2\omega_E r^2 \sin^2 \theta d\phi dt \\
& + \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2).
\end{aligned} \tag{99}$$

Realizando el mismo procedimiento que en los anteriores casos: primero se imponen las condiciones mostradas en (83).

$$0 = - \left[1 - \frac{2GM_E}{rc^2} - \left(\frac{\omega_E r \sin \theta}{c} \right)^2 \right] (cdt)^2 + \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2} \right) dr^2,$$

y luego se hace una expansión en series de Taylor

$$cdt = \left(1 + \frac{GM_E}{rc^2} + \frac{\omega_E^2 r^2 \sin^2 \theta}{2c^2} \right) \left(1 + \frac{GM_E}{rc^2} \right) dr,$$

para así obtener la expresión a integrar

$$cdt = \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2} + \frac{\omega_E^2 r^2 \sin^2 \theta}{2c^2} \right) dr,$$

al lado izquierdo de la ecuación se integra de un tiempo t_1 hasta un tiempo t_2 y al lado derecho de la ecuación a lo largo de la trayectoria entre r_1 y r_2 descritos en (84)

$$c \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2} + \frac{\omega_E^2 r^2 \sin^2 \theta}{2c^2} \right) dr.$$

Finalmente, se obtiene

$$c\Delta t = (r_2 - r_1) + \frac{2GM_E}{c^2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{\omega_E^2}{6c^2} (r_2^3 - r_1^3), \quad (100)$$

y evaluando

$$\begin{aligned} c\Delta t &= 20200000 + 0.012659208 + 0.00018257024 \text{ [m]} \\ &= 20200000.012 \text{ [m]}. \end{aligned} \quad (101)$$

Así, se tiene que el tiempo de llegada de la señal desde el satélite hasta el usuario con la métrica estacionaria (98) y el potencial (72) es

$$\Delta t = 0.06737994727 \text{ [s]}. \quad (102)$$

■ **Potencial gravitacional de Newton con corrección del cuadrupolo**

Reemplazando el potencial (75) en la métrica (98) e igualando a cero el elemento de línea

$$\begin{aligned} 0 = & - \left(1 - \frac{2GM_E}{rc^2} \left[1 - \frac{J_2 a_1^2}{4r^2} - \frac{3J_2 a_1^2}{4r^2} \cos 2\theta \right] - \left(\frac{\omega_E r \sin \theta}{c} \right)^2 \right) (cdt)^2 \\ & + 2\omega_E r^2 \sin^2 \theta d\phi dt + \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2} \left[1 - \frac{J_2 a_1^2}{4r^2} - \frac{3J_2 a_1^2}{4r^2} \cos 2\theta \right] \right) \\ & (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (103)$$

Haciendo uso de las condiciones descritas en (83)

$$\begin{aligned} 0 = & - \left(1 - \frac{2GM_E}{rc^2} \left[1 - \frac{J_2 a_1^2}{4r^2} - \frac{3J_2 a_1^2}{4r^2} \cos 2\theta \right] - \left(\frac{\omega_E r \sin \theta}{c} \right)^2 \right) (cdt)^2 \\ & + \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2} \left[1 - \frac{J_2 a_1^2}{4r^2} - \frac{3J_2 a_1^2}{4r^2} \cos 2\theta \right] \right) dr^2, \end{aligned}$$

y expandiendo en series de Taylor, para obtener la expresión a integrar

$$cdt = \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2} - \frac{GM_E J_2 a_1^2}{2r^3 c^2} - \frac{3GM_E J_2 a_1^2}{2r^3 c^2} \cos 2\theta + \frac{\omega_E^2 r^2 \sin^2 \theta}{2c^2} \right) dr,$$

al lado izquierdo de la ecuación se integra de un tiempo t_1 hasta un tiempo t_2 y al lado derecho de la ecuación a lo largo de la trayectoria entre r_1 y r_2 descritos en (84)

$$c \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{2GM_E}{rc^2} - \frac{GM_E J_2 a_1^2}{2r^3 c^2} - \frac{3GM_E J_2 a_1^2}{2r^3 c^2} \cos 2\theta + \frac{\omega_E^2 r^2 \sin^2 \theta}{2c^2} \right) dr.$$

La integral de la ecuación anterior genera el resultado

$$c\Delta t = (r_2 - r_1) + \frac{2GM_E}{c^2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - \frac{GM_E J_2 a_1^2}{2c^2} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) + \frac{\omega_E^2}{6c^2} (r_2^3 - r_1^3), \quad (104)$$

y evaluando

$$\begin{aligned} c\Delta t &= 20200000 + 0.012659208 - 3.547419219 \times 10^{-13} \\ &0.00018257024 \text{ [m]} \\ &= 20200000.012 \text{ [m]}. \end{aligned} \quad (105)$$

Por lo tanto, se encuentra que el tiempo de llegada de la señal desde el satélite hasta el usuario con la métrica estacionaria mostrada en (98) con el potencial (75) es

$$\Delta t = 0.06737994727 \text{ [s]}. \quad (106)$$

■ **Potencial generalizado de Newton**

Reemplazando el potencial (77) en la métrica estacionaria (98) e igualando a cero el elemento de línea se tiene

$$0 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{2r_g r \omega_E^2}{c^2} - \frac{4r_g^2 \omega_E^2}{c^2} - \frac{\omega_E^2 r^2 \sin^2 \theta}{c^2} \right) (cdt)^2 + \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \frac{2r_g r \omega_E^2}{c^2} + \frac{4r_g^2 \omega_E^2}{c^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (107)$$

Imponiendo las condiciones mostradas en (83)

$$cdt = \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \frac{2r_g r \omega_E^2}{c^2} + \frac{4r_g^2 \omega_E^2}{c^2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{2r_g r \omega_E^2}{c^2} - \frac{4r_g^2 \omega_E^2}{c^2} - \frac{\omega_E^2 r^2 \sin^2 \theta}{c^2} \right)^{-1/2} dr,$$

y expandiendo en series de Taylor, se encuentra la expresión a integrar

$$cdt = \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \frac{2r_g r \omega_E^2}{c^2} + \frac{4r_g^2 \omega_E^2}{c^2} + \frac{\omega_E^2 r^2 \sin^2 \theta}{2c^2} \right) dr,$$

al lado izquierdo de la ecuación se integra de un tiempo t_1 hasta un tiempo t_2 y al lado derecho de la ecuación a lo largo de la trayectoria entre r_1 y r_2 descritos en (84)

$$c \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{2GM}{rc^2} + \frac{2r_g r \omega_E^2}{c^2} + \frac{4r_g^2 \omega_E^2}{c^2} + \frac{\omega_E^2 r^2 \sin^2 \theta}{2c^2} \right) dr.$$

Para así obtener

$$\begin{aligned} c\Delta t = & (r_2 - r_1) + \frac{2GM}{c^2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{r_g \omega_E^2}{c^2} (r_2^2 - r_1^2) \\ & + \frac{4r_g^2 \omega_E^2}{c^2} (r_2 - r_1) + \frac{\omega_E^2}{6c^2} (r_2^3 - r_1^3), \end{aligned} \quad (108)$$

y evaluando

$$\begin{aligned} c\Delta t = & 13822000 + 0.010225666 + 1.746787597 \times 10^{-13} \\ & + 9.402903146 \times 10^{-23} + 0.00018257024 \text{ [m]} \\ = & 20200000.012 \text{ [m]}. \end{aligned} \quad (109)$$

Por lo tanto, el tiempo de llegada de la señal desde un satélite hasta el usuario con la métrica estacionaria mostrada en (98) y el potencial generalizado es

$$\Delta t = 0.6737994727 \text{ [s]}. \quad (110)$$

5. Conclusiones

En este trabajo se estudiaron algunos de los efectos relativistas que tienen un impacto en el funcionamiento del GPS. En este proceso se obtuvieron algunas expresiones explícitas para los tiempos coordinados de los relojes en los satélites y en tierra para que no haya problemas de sincronización. Por otra parte, se encontró la corrección de tiempo debida a la excentricidad de la órbitas, y la expresión para el efecto Doppler a segundo orden y para la transferencia de tiempo de un satélite a otro. Para algunos efectos relativistas secundarios se obtuvieron las expresiones para el retraso en la propagación de la señal, los efectos de la curvatura de la tierra en el GPS.

Con el objetivo de caracterizar las métricas (17) y (20), se realizó un análisis a partir de la ecuación y los vectores de Killing. Este análisis dejó como resultado que la métrica (17) es una métrica estática ya que el vector de Killing tipo tiempo cumple con la ecuación de Killing y además la condición de congruencia normal. En el caso de la métrica (20) se encontró que es estacionaria. Por otro lado, se encontraron los invariantes de curvatura de Krestschmann, Chern-Pontryagin y Euler para las dos métricas con tres potenciales distintos. Para la métrica estática, los escalares Kretschmann y Euler son funciones de r y θ . En el caso estático del escalar de Chern-Pontryagin, sin importar el potencial, el resultado es siempre igual a cero. Para la métrica estacionaria, se obtuvo, en todos los casos, que los resultados son funciones de r , θ y ω_E , lo cual es coherente con el hecho de que la métrica sea estacionaria.

Finalmente, al hacer la distinción entre métricas, se realizaron los cálculos para estimar el tiempo de llegada de la señal desde un satélite hasta la superficie de la tierra con las métricas (17)

y (20) y los potenciales (72), (73) y (76). Se encontró que los cambios debidos a la rotación de la tierra se pueden apreciar a partir de los picosegundos, como se evidencia en los resultados (89), (93),(97), (102), (106) y (110). Gracias a lo anterior se han planteado nuevos sistemas globales de navegación satelital geostacionarios o geosincrónicos. Estas últimas configuraciones de GNSS podría necesitar menos satélites para cubrir toda la superficie terrestre y ser igual de preciso o mejor que el GPS.

Referencias Bibliográficas

- Abbott, B. P. et al. (2017). GW170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical review letters*, 119:161101.
- Abuter, R. et al. (2018). Detection of the gravitational redshift in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole. *Astronomy and Astrophysics*, 615:L15.
- Akiyama, K. et al. (2019). First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal*, 875:L1.
- Ashby, N. (2003). Relativity in the global positioning system. *Living Reviews in relativity*, 6:1–42.
- BeiDou, N. S. S. (11/10/19). Beidou navigation satellite system. <https://cutt.ly/vvZh1H5>.
- Benedetto, E. et al. (2019). On the general relativistic framework of the sagnac effect. *The European Physical Journal C*, 79:1–5.
- Carroll, S. M. (2019). Spacetime and geometry. Cambridge University Press.
- EGSA (11/10/19). Constellation information. <https://cutt.ly/jvZdmZe>.
- Fitzpatrick, R. (2012). *An introduction to celestial mechanics*. Cambridge University Press.
- Flury, J. (2016). Relativistic geodesy. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 723, page 012051. IOP Publishing.

GISGeography (11/10/19). How gps receivers work trilateration vs triangulation. <https://cutt.ly/rvNuzgx>.

GPS.GOV (11/10/19). Constellation arrangement. <https://cutt.ly/cvZjixE>.

Hulse, R. A. and Taylor, J. H. (1975). Discovery of a pulsar in a binary system. *The Astrophysical Journal*, 195:L51–L53.

IAC (11/10/19). Glonass constellation status. <https://cutt.ly/JvK3waa>.

Post, E. J. (1967). Sagnac effect. *Reviews of Modern Physics*, 39:475.

Shapiro, I. I. (1964). Fourth test of general relativity. *Physical Review Letters*, 13(26):789.

Sun, K.-X., Fejer, M., Gustafson, E., and Byer, R. L. (1996). Sagnac interferometer for gravitational-wave detection. *Physical review letters*, 76:3053.

Tejeda, E. and Rosswog, S. (2013). An accurate newtonian description of particle motion around a schwarzschild black hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 433(3):1930–1940.

Thorne, K. S., Misner, C. W., and Wheeler, J. A. (2000). *Gravitation*. Freeman.

Toledo, S. (2015). Un modelo relativista para sistemas satelitales de navegación global. Universidad Nacional de Colombia.

Vishveshwara, C. (1968). Generalization of the “schwarzschild surface” to arbitrary static and stationary metrics. *Journal of Mathematical Physics*, 9(8):1319–1322.

Will, C. M. (2018). Theory and experiment in gravitational physics. Cambridge university press.

Apéndices

Apéndice A. Escalares de curvatura para la métrica estática

En este apéndice se presentan los resultados para los invariantes correspondientes a la métrica estática con cada uno de los potenciales escogidos.

Escalar de Euler

Potencial gravitacional de Newton. En este caso se obtuvo

$$\mathcal{K}_1 = \frac{64(GM_E)^2(-3r^3 - 2r^2GM_E + 6r(GM_E)^2) + 6(GM_E)^3}{r^2(r - 2GM_E)^2(r + 2GM_E)^5}. \quad (111)$$

Potencial gravitacional de Newton con corrección del cuadrupolo. En este caso se obtuvo

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2 = & -((64r^2(r^2\chi_1 - 3\chi_2 + 3\cos(2\theta)\chi_3)(-6r^8\chi_1^4 - 6r^6\chi_1^3(r^3 - 12\chi_2 + \\ & 12\cos(2\theta)\chi_3) + 2r^4\chi_1^2(r^6 - 42\chi_2^2 - 31r^3\cos(2\theta)\chi_3 - 42\cos^2(2\theta)\chi_3^2 + \chi_2 \\ & (31r^3 + 84\cos(2\theta)\chi_3)) - 3(\chi_2 - \cos(2\theta)\chi_3)(7r^9 + 2\chi_2^3 - 7r^6\cos(2\theta)\chi_3 + \\ & 2r^3\cos^2(2\theta)\chi_3^2 - 2\cos^3(2\theta)\chi_3^3 + 2\chi_2^2(r^3 - 3\cos(2\theta)\chi_3) + \chi_2(7r^6 - \\ & 4r^3\cos(2\theta)\chi_3 + 6\cos^2(2\theta)\chi_3^2)) + 3r^2\chi_1(r^9 + 8\chi_2^3 + 5r^6\cos(2\theta)\chi_3 - \end{aligned} \quad (112)$$

$$\begin{aligned}
& 22r^3 \cos^2(2\theta)\chi_3^2 - 8 \cos^3(2\theta)\chi_3^3 - 2\chi_2^2(11r^3 + 12 \cos(2\theta)\chi_3) + \chi_2(-5r^6 + \\
& 44r^3 \cos(2\theta)\chi_3 + 24 \cos^2(2\theta)\chi_3^2)))/((r^3 - 2r^2\chi_1 + 2\chi_2 - 2 \cos(2\theta)\chi_3)^2 \\
& (r^3 + 2r^2\chi_1 - 2\chi_2 + 2 \cos(2\theta)\chi_3)^5)),
\end{aligned}$$

con χ_1 , χ_2 y χ_3 definidos en la ecuación (116).

Potencial gravitacional de Newton generalizado. En este caso se obtuvo

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_3 = & (64(\kappa_1 - r^2\kappa_3)(6\kappa_1^4 + 2r\kappa_1^3(3 + 15\kappa_2 + 28r\kappa_3) + 2r^2\kappa_1^2(-1 + 24\kappa_2^2 + 19r\kappa_3 + \\
& 66r^2\kappa_3^2 + \kappa_2(10 + 87r\kappa_3)) + r^5\kappa_3(-1 + 8\kappa_2^3 - r\kappa_3 + 2r^2\kappa_3^2 - 10r^3\kappa_3^3 + 4\kappa_2^2 \\
& (1 + 3r\kappa_3) + \kappa_2(-2 + 4r\kappa_3 - 6r^2\kappa_3^2)) + r^3\kappa_1(-3 + 24\kappa_2^3 - 13r\kappa_3 + 18r^2\kappa_3^2 + \\
& 72r^3\kappa_3^3 + 12\kappa_2^2(1 + 11r\kappa_3) + 2\kappa_2(-3 + 20r\kappa_3 + 93r^2\kappa_3^2)))/((r^2(2\kappa_1 + \\
& r(-1 + 2\kappa_2 + 2r\kappa_3))^2(2\kappa_1 + r(1 + 2\kappa_2 + 2r\kappa_3))^5),
\end{aligned} \tag{113}$$

con κ_1 , κ_2 y κ_3 definidos en la ecuación (118).

Escalar de Krestschmann

Potencial gravitacional de Newton. En este caso se obtuvo

$$K_1 = (4(GM_E)^2(12r^6 - 16r^5GM_E + 43r^4(GM_E)^2 - 72r^3(GM_E)^3 - 104r^2(GM_E)^4 + 32r(GM_E)^5 + 240(GM_E)^6)) / (r^2(r - 2GM_E)^4(r + 2GM_E)^6). \quad (114)$$

Potencial gravitacional de Newton con corrección del cuadrupolo. En este caso se obtuvo

$$K_2 = (4(-32r^3(r^3 - 2r^2\chi_1 + 2\chi_2 - 2\cos(2\theta)\chi_3)^2(r^2\chi_1 - \chi_2 + \cos(2\theta)\chi_3)(r^3 + 2r^2\chi_1 - 2\chi_2 + 2\cos(2\theta)\chi_3)(r^2\chi_1 - 3\chi_2 + 3\cos(2\theta)\chi_3)^3 - 8(r^3 - 2r^2\chi_1 + 2\chi_2 - 2\cos(2\theta)\chi_3)^4(r^3 + 2r^2\chi_1 - 2\chi_2 + 2\cos(2\theta)\chi_3)^2(r^2\chi_1 - 3\chi_2 + 3\cos(2\theta)\chi_3)(r^2\chi_1 - 6\chi_2 + 6\cos(2\theta)\chi_3) + 4(r^2\chi_1 - 6\chi_2 + 6\cos(2\theta)\chi_3)^2(r^6 - 4(r^2\chi_1 - \chi_2 + \cos(2\theta)\chi_3)^2)^2(3r^6 - 4r^3(r^2\chi_1 - \chi_2 + \cos(2\theta)\chi_3) + 12(r^2\chi_1 - \chi_2 + \cos(2\theta)\chi_3)^2) + (r^2\chi_1 - 3\chi_2 + 3\cos(2\theta)\chi_3)^4(11r^{12} - 72r^9) \quad (115)$$

$$\begin{aligned}
& (r^2\chi_1 - \chi_2 + \cos(2\theta)\chi_3) + 216r^6(r^2\chi_1 - \chi_2 + \cos(2\theta)\chi_3)^2 - 224r^3(r^2\chi_1 - \\
& \chi_2 + \cos(2\theta)\chi_3)^3 + 240(r^2\chi_1 - \chi_2 + \cos(2\theta)\chi_3)^4 + 8(r^2\chi_1 - 3\chi_2 + \\
& 3\cos(2\theta)\chi_3)^2(r^6 - 4(r^2\chi_1 - \chi_2 + \cos(2\theta)\chi_3)^2)(r^{12} - 2r^6(r^3 - 7r^2\chi_1 + 42\chi_2 - \\
& 42\cos(2\theta)\chi_3)(r^2\chi_1 - \chi_2 + \cos(2\theta)\chi_3) - 16(r^2\chi_1 - \chi_2 + \cos(2\theta)\chi_3)^4 - 2r^9 \\
& (r^2\chi_1 - 6\chi_2 + 6\cos(2\theta)\chi_3) - 16r^3(r^2\chi_1 - \chi_2 + \cos(2\theta)\chi_3)^2(r^2\chi_1 - 6\chi_2 + \\
& 6\cos(2\theta)\chi_3) + 8(r^2\chi_1 - \chi_2 + \cos(2\theta)\chi_3)^3(r^3 + 3r^2\chi_1 - 18\chi_2 + 18\cos(2\theta)\chi_3)))/ \\
& (r^6(r^3 + 2r^2\chi_1 - 2\chi_2 + 2\cos(2\theta)\chi_3)^6(-2\chi_1 + (r^3 + 2\chi_2 - 2\cos(2\theta)\chi_3)/r^2)^4),
\end{aligned}$$

donde χ_1 , χ_2 y χ_3 son respectivamente,

$$\chi_1 = GM_E, \quad \chi_2 = \frac{GM_E a_1^2}{4}, \quad \chi_3 = \frac{3GM_E J_2 a_1^2}{4}. \quad (116)$$

Potencial gravitacional de Newton generalizado. En este caso se obtuvo

$$\begin{aligned}
K_3 = & (4(-32r(\kappa_1 - r^2\kappa_3)^3(\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3))(r - 2(\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3)))^2(r + 2(\kappa_1 + \\
& r(\kappa_2 + r\kappa_3))) - 8\kappa_1(\kappa_1 - r^2\kappa_3)(r - 2(\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3)))^4(r + 2(\kappa_1 + r(\kappa_2 + \\
& r\kappa_3)))^2 + 4\kappa_1^2(r^2 - 4(\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3))^2)^2(3r^2 - 4r(\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3)) + \\
& \dots)))/ \dots
\end{aligned} \quad (117)$$

$$\begin{aligned}
& 12(\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3))^2) + 8(\kappa_1 - r^2\kappa_3)^2(r^2 - 4(\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3))^2)(r^4 - \\
& 2r^3\kappa_1 - 2r^2(r - 7\kappa_1)(\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3)) - 16r\kappa_1(\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3))^2 + 8(r + \\
& 3\kappa_1)(\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3))^3 - 16(\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3))^4) + (\kappa_1 - r^2\kappa_3)^4(11r^4 - 72r^3 \\
& (\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3)) + 216r^2(\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3))^2 - 224r(\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3))^3 + \\
& 240(\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3))^4)))/(r^8(1 + (2\kappa_1/r) + 2\kappa_2 + 2r\kappa_3)^6(2\kappa_1 + \\
& r(-1 + 2\kappa_2 + 2r\kappa_3))^4),
\end{aligned}$$

con κ_1 , κ_2 y κ_3 descritos como sigue,

$$\kappa_1 = GM_E, \quad \kappa_2 = 2r_g^2\omega_E^2, \quad \kappa_3 = r_g\omega_E^2. \quad (118)$$

Apéndice B. Escalares de curvatura para la métrica estacionaria

En este apéndice se presentan los resultados para los invariantes correspondientes a la métrica estacionaria con cada uno de los potenciales escogidos.

Escalar de Euler

Potencial gravitacional de Newton.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_3 = & (2\beta^2/r^2(2\beta+r)^4(2\beta\omega^2r^3\sin^2(\theta)+4\beta^2-r^2)^3)(-576\beta^5r(5\omega^2r^2\cos(2\theta)- \\
 & 5\omega^2r^2-4)+8\beta^4r^2(45\omega^4r^4\cos(4\theta)+135\omega^4r^4-36\omega^2r^2\cos(2\theta)(5\omega^2r^2+13)+ \\
 & 148\omega^2r^2-16)+2\beta r^5(-25\omega^4r^4\cos(4\theta)+13\omega^4r^4+4\omega^2r^2\cos(2\theta)(3\omega^2r^2+20)- \\
 & 80\omega^2r^2+128)+\beta^2r^4(-7\omega^6r^6\cos(6\theta)-26\omega^6r^6+60\omega^4r^4-152\omega^2r^2+ \\
 & 10\omega^4r^4\cos(4\theta)(\omega^2r^2+2)+\omega^2r^2\cos(2\theta)(23\omega^4r^4-80\omega^2r^2+1432)-448)- \\
 & 2\beta^3r^3(3\omega^6r^6\cos(6\theta)-30\omega^6r^6-254\omega^4r^4+152\omega^2r^2-2\omega^4r^4\cos(4\theta)(9\omega^2r^2+ \\
 & 101)+\omega^2r^2\cos(2\theta)(45\omega^4r^4+456\omega^2r^2-152)+800)+1536\beta^6- \\
 & 32r^6(3\omega^2r^2\cos(2\theta)+2\omega^2r^2-3)),
 \end{aligned}$$

(119)

donde β es GM_E .

Escalar de Krestschmann

Potencial gravitacional de Newton. En este caso se obtuvo

$$\begin{aligned}
K_4 = & (1/2r^2(r+2\beta)^6(r^2-2\omega^2r^3\sin^2(\theta)\beta-4\beta^2)^4)(2\beta^2r^{10}(5\omega^4r^4\cos(4\theta)+ \\
& 15\omega^4r^4+4\omega^2r^2\cos(2\theta)(3\omega^2r^2-8)-48\omega^2r^2+48)+2r^9\beta^3 \\
& (2\omega^6r^6\cos(6\theta)-16\omega^6r^6+13\omega^4r^4\cos(4\theta)+191\omega^4r^4-400\omega^2r^2+ \\
& 2\omega^2r^2\cos(2\theta)(7\omega^4r^4+26\omega^2r^2-40)+320)+(1/16)r^8(483\omega^8r^8- \\
& 5744\omega^6r^6+26784\omega^4r^4-24960\omega^2r^2-8\omega^2r^2\cos(2\theta)(75\omega^6r^6-701\omega^4r^4+ \\
& 1200\omega^2r^2-1584)+25984)+24\omega^8r^8\cos(6\theta)+\omega^8r^8\cos(8\theta)+ \\
& 408\omega^6r^6\cos(6\theta)+4\omega^4r^4\cos(4\theta)(23\omega^4r^4-68\omega^2r^2-200)\beta^4+ \\
& (1/7)\beta^5r^7(8\omega^8r^8\cos(6\theta)+11\omega^8r^8\cos(8\theta)+961\omega^8r^8+212\omega^6r^6\cos(6\theta)- \\
& 6664\omega^6r^6+3008\omega^4r^4+1152\omega^2r^2+4\omega^4r^4\cos(4\theta)(61\omega^4r^4-270\omega^2r^2-368)- \\
& 4\omega^2r^2\cos(2\theta)(306\omega^6r^6-1883\omega^4r^4+2432\omega^2r^2-5344)+8704)- \\
& (1/2)\beta^6r^6(72\omega^8r^8\cos(6\theta)-29\omega^8r^8\cos(8\theta)-1719\omega^8r^8+228\omega^6r^6\cos(6\theta)+ \\
& 3864\omega^6r^6+16168\omega^4r^4+10944\omega^2r^2+\cos(4\theta)(-620\omega^8r^8+680\omega^6r^6+ \\
& 184\omega^4r^4)+4\omega^2r^2\cos(2\theta)(574\omega^6r^6-1193\omega^4r^4+1032\omega^2r^2-8880)-512)+
\end{aligned} \tag{120}$$

$$\begin{aligned}
& \beta^7 r^5 (-88 \omega^8 r^8 \cos(6\theta) + 23 \omega^8 r^8 \cos(8\theta) + 1381 \omega^8 r^8 - 660 \omega^6 r^6 \cos(6\theta) + \\
& 5192 \omega^6 r^6 + 736 \omega^4 r^4 - 32128 \omega^2 r^2 + 4 \omega^4 r^4 \cos(4\theta) (145 \omega^4 r^4 + 446 \omega^2 r^2 + 1320) - \\
& 4 \omega^2 r^2 \cos(2\theta) (474 \omega^6 r^6 + 1579 \omega^4 r^4 + 3552 \omega^2 r^2 - 8032) - 11264) + \beta^8 r^4 \\
& (-72 \omega^8 r^8 \cos(6\theta) + 13 \omega^8 r^8 \cos(8\theta) + 903 \omega^8 r^8 - 976 \omega^6 r^6 \cos(6\theta) + 14496 \omega^6 r^6 + \\
& 64768 \omega^4 r^4 - 24704 \omega^2 r^2 + 4 \omega^4 r^4 \cos(4\theta) (107 \omega^4 r^4 + 1176 \omega^2 r^2 + 4416) - \\
& 8 \omega^2 r^2 \cos(2\theta) (159 \omega^6 r^6 + 2278 \omega^4 r^4 + 8256 \omega^2 r^2 - 528) - 28928) - 256 \beta^9 r^3 \\
& (2 \omega^6 r^6 \cos(6\theta) - 39 \omega^6 r^6 - 439 \omega^4 r^4 - 230 \omega^2 r^2 - \omega^4 r^4 \cos(4\theta) (13 \omega^2 r^2 + 89) + \\
& 2 \omega^2 r^2 \cos(2\theta) (25 \omega^4 r^4 + 200 \omega^2 r^2 + 163) + 56) + (-2048 \beta^{11} r (27 \omega^2 r^2 \cos(2\theta) - \\
& 19 \omega^2 r^2 - 32) + 64 \beta^{10} r^2 (169 \omega^4 r^4 \cos(4\theta) + 923 \omega^4 r^4 - 4 \omega^2 r^2 \cos(2\theta) (209 \omega^2 r^2 + \\
& 478) + 1528 \omega^2 r^2 + 640) + 30720 \beta^{12})),
\end{aligned}$$

donde β es GM_E .

Escalar de Chern-Pontryagin

Potencial gravitacional de Newton. En este caso se obtuvo

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_4 = & - \left((32\omega r \cot \theta \csc^6 \theta \beta^2 \sqrt{-\sin^2 \theta (r+2\beta)^2 (-r+2\omega^2 r^3 \sin^2 \theta \beta + 4\beta^2)} (r^3 \right. \\ & (-6 + \omega^2 r^2 + \omega^2 r^2 \cos(2\theta)) - r^2 (8 - 7\omega^2 r^2 + 3\omega^2 r^2 \cos(2\theta)) \beta - 2r(-8 - \\ & \omega^2 r^2 + 5\omega^2 r^2 \cos(2\theta)) \beta^2 - 8(-2 + \omega^2 r^2 + \omega^2 r^2 \cos(2\theta)) \beta^3) / ((r+2\beta)^5 \\ & \left. (-r^2 \csc^2(\theta) + 2\omega^2 r^3 \beta + 4 \csc^2(\theta) \beta^2)^3 \right), \end{aligned} \quad (121)$$

donde β es GM_E .

Potencial gravitacional de Newton con corrección del cuadrupolo. En este caso

se obtuvo

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_5 = & (32\sqrt{2}\omega r^{13} \cos(\theta) \csc(\theta/2) \sec(\theta/2) ((1/r^8) \sin^2(\theta) (r^3 + 2r^2 \chi_1 - 2\chi_2 + \\ & 2 \cos(2\theta) \chi_3)^2 (2r^6 - 8r^4 \chi_1^2 - 8\chi_2^2 + \omega^2 r^5 \chi_3 - 2\omega^2 r^5 \cos(2\theta) \chi_3 + \\ & \omega^2 r^5 \cos(4\theta) \chi_3 - 4\chi_3^2 - 4 \cos(4\theta) \chi_3^2 + 4\chi_2 (\omega^2 r^5 \sin^2(\theta) + 4 \cos(4\theta) \chi_3) - \\ & 4r^2 \chi_1 (\omega^2 r^5 \sin^2(\theta) - 4\chi_2 + 4 \cos(2\theta) \chi_3))^{1/2} (-16r^{10} (-2 + \omega^2 r^2 + \\ & \omega^2 r^2 \cos(2\theta)) \chi_1^5 - 4r^8 \chi_1^4 (r^3 (-8 - \omega^2 r^2 + 5\omega^2 r^2 \cos(2\theta)) - 4(-22 + 5\omega^2 r^2 + \end{aligned} \quad (122)$$

$$\begin{aligned}
& 9\omega^2 r^2 \cos(2\theta))\chi_2 + 4\cos(2\theta)(-22 + 5\omega^2 r^2 + 9\omega^2 r^2 \cos(2\theta))\chi_3) - 2r^6 \chi_1^3 (r^6 \\
& (8 - 7\omega^2 r^2 + 3\omega^2 r^2 \cos(2\theta)) + 32(-17 + 3\omega^2 r^2 + 6\omega^2 r^2 \cos(2\theta))\chi_2^2 + \\
& 4r^3 \cos(2\theta)(-40 - 11\omega^2 r^2 + 23\omega^2 r^2 \cos(2\theta))\chi_3 + 32\cos^2(2\theta)(-17 + 3\omega^2 r^2 + \\
& 6\omega^2 r^2 \cos(2\theta))\chi_3^2 - 4\chi_2(r^3(-40 - 11\omega^2 r^2 + 23\omega^2 r^2 \cos(2\theta)) + 16\cos(2\theta) \\
& (-17 + 3\omega^2 r^2 + 6\omega^2 r^2 \cos(2\theta))\chi_3)) + 6(\chi_2 - \cos(2\theta)\chi_3)^2(r^9(-30 + \omega^2 r^2 + \\
& \omega^2 r^2 \cos(2\theta)) + 8(6 + \omega^2 r^2 + \omega^2 r^2 \cos(2\theta))\chi_2^3 - r^6 \cos(2\theta)(24 - 23\omega^2 r^2 + \\
& 19\omega^2 r^2 \cos(2\theta))\chi_3 - 2r^3 \cos^2(2\theta)(-24 - \omega^2 r^2 + 5\omega^2 r^2 \cos(2\theta))\chi_3^2 - 8\cos^3(2\theta) \\
& (6 + \omega^2 r^2 + \omega^2 r^2 \cos(2\theta))\chi_3^3 - 2\chi_2^2(r^3(-24 - \omega^2 r^2 + 5\omega^2 r^2 \cos(2\theta)) + 12\cos(2\theta) \\
& (6 + \omega^2 r^2 + \omega^2 r^2 \cos(2\theta))\chi_3) + \chi_2(r^6(24 - 23\omega^2 r^2 + 19\omega^2 r^2 \cos(2\theta)) + \\
& 4r^3 \cos(2\theta)(-24 - \omega^2 r^2 + 5\omega^2 r^2 \cos(2\theta))\chi_3 + 24\cos^2(2\theta)(6 + \omega^2 r^2 + \\
& \omega^2 r^2 \cos(2\theta))\chi_3^2)) + 2r^4 \chi_1^2 (r^9(\omega^2 r^2 \cos(2\theta) + \omega^2 r^2 - 6) + 32\chi_2^3(7\omega^2 r^2 \cos(2\theta) + \\
& 4\omega^2 r^2 - 15) - \chi_3 r^6 \cos(2\theta)(31\omega^2 r^2 \cos(2\theta) - 51\omega^2 r^2 + 72) - 8\chi_3^2 r^3 \cos^2(2\theta) \\
& (29\omega^2 r^2 \cos(2\theta) - 17\omega^2 r^2 - 60) - 32\chi_3^3 \cos^3(2\theta)(7\omega^2 r^2 \cos(2\theta) + 4\omega^2 r^2 - 15) - \\
& 8\chi_2^2(12\chi_3 \cos(2\theta)(7\omega^2 r^2 \cos(2\theta) + 4\omega^2 r^2 - 15) + r^3(29\omega^2 r^2 \cos(2\theta) - 17\omega^2 r^2 - \\
& 60)) + \chi_2(96\chi_3^2 \cos^2(2\theta)(7\omega^2 r^2 \cos(2\theta) + 4\omega^2 r^2 - 15) + 16\chi_3 r^3 \cos(2\theta) \\
& (29\omega^2 r^2 \cos(2\theta) - 17\omega^2 r^2 - 60) + r^6(31\omega^2 r^2 \cos(2\theta) - 51\omega^2 r^2 + 72))) - \\
& 2r^2 \chi_1 \chi_2 - \chi_3 \cos(2\theta)(-8\chi_3^3 \cos^3(2\theta)(15\omega^2 r^2 \cos(2\theta) + 11\omega^2 r^2 + 6) + 8\chi_2^3 \\
& (15\omega^2 r^2 \cos(2\theta) + 11\omega^2 r^2 + 6) - \chi_3 r^6 \cos(2\theta)(93\omega^2 r^2 \cos(2\theta) - 121\omega^2 r^2 + \\
& 168) - 20\chi_3^2 r^3 \cos^2(2\theta)(9\omega^2 r^2 \cos(2\theta) - 5\omega^2 r^2 - 24) + 2r^9(3\omega^2 r^2 \cos(2\theta) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \omega^2 r^2 - 24) - 4\chi_2^2 (6\chi_3 \cos(2\theta) (15\omega^2 r^2 \cos(2\theta) + 11\omega^2 r^2 + 6) + 5r^3 \\
& (9\omega^2 r^2 \cos(2\theta) - 5\omega^2 r^2 - 24)) + \chi_2 (24\chi_3^2 \cos^2(2\theta) (15\omega^2 r^2 \cos(2\theta) + 11\omega^2 r^2 \\
& + 6) + 40\chi_3 r^3 \cos(2\theta) (9\omega^2 r^2 \cos(2\theta) - 5\omega^2 r^2 - 24) + r^6 (93\omega^2 r^2 \cos(2\theta) - \\
& 121\omega^2 r^2 + 168)))) / (2\chi_3 \cos(2\theta) + 2\chi_1 r^2 - 2\chi_2 + r^3)^5 (-4\chi_3^2 \cos(4\theta) - \\
& 2\chi_3 \omega^2 r^5 \cos(2\theta) + \chi_3 \omega^2 r^5 \cos(4\theta) + 4\chi_2 (4\chi_3 \cos(2\theta) + \omega^2 r^5 \sin^2(\theta)) + \chi_3 \omega^2 r^5 - \\
& 4\chi_1 r^2 (4\chi_3 \cos(2\theta) - 4\chi_2 + \omega^2 r^5 \sin^2(\theta)) - 8\chi_1^2 r^4 - 8\chi_2^2 - 4\chi_3^2 + 2r^6)^3
\end{aligned}$$

con χ_1 , χ_2 y χ_3 definidos en la ecuación (116).

Potencial gravitacional de Newton generalizado. En este caso se obtuvo

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_6 = & - ((16\omega r \cos(\theta) \csc(\theta/2) \sec(\theta/2) (\kappa_3 (8\omega^2 r (\cos(2\theta) + 3) \kappa_2^4 + 4(r(\cos(2\theta) + \\
& 3)\omega^2 + 2(11\omega^2 r^2 + 5\omega^2 \cos(2\theta)r^2 + 4)\kappa_3) \kappa_2^3 + 2(4r(15\omega^2 r^2 + 9\omega^2 \cos(2\theta)r^2 + \\
& 20)\kappa_3^2 - \omega^2 r (\cos(2\theta) + 3) + 4(5\omega^2 r^2 + \omega^2 \cos(2\theta)r^2 + 2)\kappa_3) \kappa_2^2 + (8r^2(9\omega^2 r^2 + \\
& 7\omega^2 \cos(2\theta)r^2 + 28)\kappa_3^3 - 8r(-7\omega^2 r^2 + \omega^2 \cos(2\theta)r^2 - 6)\kappa_3^2 - 2(3\omega^2 r^2 +
\end{aligned} \tag{123}$$

$$\begin{aligned}
& 5\omega^2 \cos(2\theta)r^2 + 4)\kappa_3 - \omega^2 r(\cos(2\theta) + 3))\kappa_2 + 2\kappa_3(8r^3(\omega^2 r^2 + \omega^2 \cos(2\theta)r^2 + \\
& 6)\kappa_3^3 - 2r^2(-7\omega^2 r^2 + 3\omega^2 \cos(2\theta)r^2 - 8)\kappa_3^2 + (\omega^2 r^3 - 5\omega^2 \cos(2\theta)r^3 - 8r)\kappa_3 - \\
& \omega^2 r^2 - \omega^2 r^2 \cos(2\theta) - 2))r^7 + \kappa_1(-8\omega^2 r(3 \cos(2\theta) + 1)\kappa_2^4 - 4(r(3 \cos(2\theta) + \\
& 1)\omega^2 + 4(-5\omega^2 r^2 + 5\omega^2 \cos(2\theta)r^2 + 8)\kappa_3)\kappa_2^3 + (2r(3 \cos(2\theta) + 1)\omega^2 - 24r \\
& (-11\omega^2 r^2 + 3\omega^2 \cos(2\theta)r^2 + 20)\kappa_3^2 - 64\kappa_3)\kappa_2^2 + (64r^2(4\omega^2 r^2 - 7)\kappa_3^3 + 16r \\
& (-\omega^2 r^2 + 4\omega^2 \cos(2\theta)r^2 - 9)\kappa_3^2 + 4(-7\omega^2 r^2 + 7\omega^2 \cos(2\theta)r^2 + 8)\kappa_3 + \omega^2 r \\
& (3 \cos(2\theta) + 1))\kappa_2 + 2\kappa_3(8r^3(5\omega^2 r^2 + \omega^2 \cos(2\theta)r^2 - 6)\kappa_3^3 + 4r^2(-\omega^2 r^2 + \\
& 5\omega^2 \cos(2\theta)r^2 - 8)\kappa_3^2 + r(-15\omega^2 r^2 + 11\omega^2 \cos(2\theta)r^2 + 24)\kappa_3 - 2\omega^2 r^2 + \\
& 2\omega^2 r^2 \cos(2\theta) + 8))r^5 - 2\kappa_1^2(4(5\omega^2 r^2 + 11\omega^2 \cos(2\theta)r^2 - 12)\kappa_2^3 + 4(-\omega^2 r^2 + \\
& 7\omega^2 \cos(2\theta)r^2 + 3(-3\omega^2 r^2 + 11\omega^2 \cos(2\theta)r^2 - 4)\kappa_3 r - 6)\kappa_2^2 + (-9\omega^2 r^2 + 24 \\
& (-5\omega^2 r^2 + 5\omega^2 \cos(2\theta)r^2 + 8)\kappa_3^2 r^2 + \omega^2 \cos(2\theta)r^2 + 4(-5\omega^2 r^2 + \\
& 11\omega^2 \cos(2\theta)r^2 - 2)\kappa_3 r + 12)\kappa_2 + 32r^3(-2\omega^2 r^2 + \omega^2 \cos(2\theta)r^2 + 5)\kappa_3^3 - \\
& \omega^2 r^2 + 32r^2 \kappa_3^2 - \omega^2 r^2 \cos(2\theta) + (\omega^2 r^3 - 5\omega^2 \cos(2\theta)r^3 + 8r)\kappa_3 + 6)r^3 - \\
& 2\kappa_1^3(-7\omega^2 r^2 + 32(-\omega^2 r^2 + 2\omega^2 \cos(2\theta)r^2 - 1)\kappa_3^2 r^2 + 3\omega^2 \cos(2\theta)r^2 + 4 \\
& (-5\omega^2 r^2 + 9\omega^2 \cos(2\theta)r^2 - 8)\kappa_3 r + 4(9\omega^2 r^2 + 15\omega^2 \cos(2\theta)r^2 - 28)\kappa_2^2 + \\
& 8\kappa_2(-\omega^2 r^2 + 4\omega^2 \cos(2\theta)r^2 + 4(4\omega^2 r^2 \cos(2\theta) - 7)\kappa_3 r - 5) + 8)r^2 - 4\kappa_1^4 \\
& (-\omega^2 r^2 + 5\omega^2 \cos(2\theta)r^2 + 4(\omega^2 r^2 + 5\omega^2 \cos(2\theta)r^2 - 14)\kappa_3 r + 2(7\omega^2 r^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 9\omega^2 \cos(2\theta)r^2 - 20)\kappa_2 - 8)r - 16(\omega^2 r^2 + \omega^2 \cos(2\theta)r^2 - 2)\kappa_1^5) \\
& (-r^2 \cos^6(\theta/2) \sin^2(\theta/2)(2\kappa_1 + r(1 + 2\kappa_2 + 2r\kappa_3))^2(-\sec^4(\theta/2) + (4\sec^4(\theta/2) \\
& (\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3))^2/r^2) + 8\omega^2 r(\kappa_1 + r(\kappa_2 + r\kappa_3)) \tan^2(\theta/2))^{1/2} / ((r(2\kappa_3 r + \\
& 2\kappa_2 + 1) + 2\kappa_1)^5 (r^2(2\kappa_3 \omega^2 r^3 \sin^2(\theta) + 2\kappa_2 r(4\kappa_3 + \omega^2 r \sin^2(\theta)) + 4\kappa_3^2 r^2 + \\
& 4\kappa_2^2 - 1) + 2\kappa_1 r(r(4\kappa_3 + \omega^2 r \sin^2(\theta)) + 4\kappa_2) + 4\kappa_1^2)^3))),
\end{aligned}$$

con κ_1 , κ_2 y κ_3 definidos en la ecuación (118).