

MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

**Matematización del Teorema Fundamental del Cálculo con el uso de  
tecnologías digitales**

**Ingrid Janeth Jácome Anaya**

**Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación  
Matemática**

**Director:**

**Jorge Enrique Fiallo Leal**

**Doctor en Didáctica de las Matemáticas**

**Universidad Industrial de Santander**

**Facultad de Ciencias**

**Escuela de Matemáticas**

**Bucaramanga**

**2019**

## Agradecimientos

A Dios, el que siempre me acompaña y me da fuerzas para lograr mis objetivos.

A mis padres, María y Pedro, quienes con su ejemplo y apoyo incondicional me alientan a mejorar personal y profesionalmente. Este logro también es de ustedes.

A Javier, por su amor, comprensión y apoyo incondicional.

Al Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal, mi director de tesis, quien con su experiencia, disposición, entrega y paciencia permitió que este sueño se hiciera realidad. Gracias por todas sus enseñanzas, motivaciones y apoyo durante este proceso.

Al Dr. Fernando Hitt, quien con su experiencia, disposición y enseñanzas permitió ampliar y enriquecer mi proceso de aprendizaje como investigadora.

A mis evaluadores, Dr. Vicente Liern y Dr. Fernando Hitt, por los aportes realizados durante mi proceso de aprendizaje que permitieron enriquecer nuestro proyecto de investigación.

A la Dra. Sandra Evely Parada, quien con su entrega, motivación, apoyo y enseñanzas enriqueció mi proceso de aprendizaje.

A la Escuela de Matemáticas de la UIS y el grupo de investigación EDUMAT – UIS, por el apoyo brindado para la asistencia a eventos académicos que permitieron enriquecer mi proceso de aprendizaje como educadora matemática.

A Edwin, Sergio y César, mis compañeros de maestría, quienes con sus aportes, apoyo y motivación me dieron fuerzas para terminar con éxito este proceso.

Al profesor Carlos Bautista, por permitirme participar en su curso de Cálculo Integral y por los aportes realizados. A Harold, Juliana y Arturo (pseudónimos) por aceptar ser parte de esta investigación.

A todos ustedes ¡muchas gracias!

## Tabla de Contenido

Introducción .....	13
1. Planteamiento de la investigación .....	17
1.1 Contexto y problemática de la investigación .....	17
1.2 Pregunta de Investigación .....	22
1.3 Objetivos de Investigación.....	23
1.3.1 Objetivo General.....	23
1.3.2 Objetivo Específico.....	23
2. Antecedentes y revisión bibliográfica .....	23
2.1 Algunas propuestas didácticas para la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo con el uso de tecnologías digitales.....	23
2.2 Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo que incluyen aspectos asociados a la Demostración. ....	28
2.3 Algunos estudios asociados a la Educación Matemática Realista. ....	30
3. Aspectos Teóricos.....	34
3.1 Educación Matemática Realista.....	34
3.1.1 Matematización.....	37
3.1.2 Niveles de Matematización.....	38
3.1.3 Reinención guiada e interacción .....	42
3.1.4 Fenomenología Didáctica .....	43
4. Proceso Metodológico .....	45
4.1 Fase I: Análisis Fenomenológico Didáctico .....	45
4.1.1 Revisión acerca del origen y evolución del Teorema Fundamental del Cálculo.....	46
4.1.1.1 Movimiento, áreas y volúmenes en la historia.....	47
4.1.1.2 El Teorema Fundamental del Cálculo en Barrow, Leibniz y Newton.....	50
4.1.2 Acerca de la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo.....	53
4.1.3 Fenómenos, contextos y situaciones .....	56
4.2 Fase II: Diseño de la secuencia de tareas enmarcadas en situaciones matemáticas realistas. ....	60
4.2.1 Fenómeno Caída Libre (FCL).....	61
4.2.1.1 Nivel Situacional.....	61
4.2.1.2 Nivel Referencial .....	67
4.2.1.3 Nivel General .....	69
4.2.2 Análisis a priori de las tareas diseñadas en cada situación matemática realista enmarcada en el Fenómeno Caída Libre (FCL).....	70
4.2.3 Fenómeno Área y Perímetro (FAP) .....	77

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

4.2.3.1 Nivel Situacional.....	77
4.2.3.2 Nivel Referencial .....	81
4.2.3.3 Nivel General.....	83
4.2.4 Análisis a priori de las tareas diseñadas en cada situación matemática realista enmarcada en el Fenómeno Área y Perímetro (FAP) .....	84
4.3 Fase III: Pilotaje de la secuencia.....	89
4.4 Fase IV: Descriptores a priori de los Niveles de Matemización.....	90
4.4.1 Nivel Situacional FCL y FAP .....	90
4.4.2 Nivel Referencial FCL y FAP.....	91
4.4.3 Nivel General FCL y FAP .....	92
4.5 Fase V: Trabajo de campo .....	92
4.6 Fase VI: Selección Casos de Estudio.....	93
4.7 Fase VII: Análisis de los datos y reporte de resultados .....	93
5. Análisis de datos: el caso de Juliana, Harold y Arturo.....	94
5.1 Fenómeno Caída Libre Primera Situación.....	94
5.1.1 Matemización Horizontal – Nivel Situacional.....	94
5.1.1.1 El caso de Juliana (J).....	95
5.1.1.2 El caso de Arturo (A).....	97
5.1.1.3 El caso de Harold (H) .....	99
5.1.1.4 Principio de Interacción y Reinención Guiada .....	101
5.1.2 Matemización Vertical – Nivel Referencial.....	111
5.1.2.1 El caso de Arturo (A).....	112
5.1.2.2 El caso de Harold (H) .....	113
5.1.2.3 El caso de Juliana (J).....	114
5.1.2.4 Principio de Interacción y Reinención Guiada .....	114
5.2 Fenómeno Caída Libre Segunda Situación.....	118
5.2.1 Matemización Horizontal – Nivel Situacional.....	118
5.2.1.1 El caso de Juliana, Harold y Arturo .....	119
5.2.1.2 Principio de Interacción y Reinención Guiada. ....	121
5.2.2 Matemización Vertical– Nivel Referencial.....	126
5.2.2.1 El caso de Juliana, Harold y Arturo .....	127
5.2.2.2 Principio Interacción Guiada y Reinención .....	129
5.3 Fenómeno Caída Libre Primera y Segunda Situación .....	130
5.3.1 Nivel General.....	130
5.3.1.1 El caso de Juliana, Harold y Arturo .....	130

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

5.3.1.2 Principio de Interacción Guiada y Reinención .....	133
5.4 Fenómeno Área y Perímetro Primera Situación .....	136
5.4.1 Matemización Horizontal – Nivel Situacional.....	136
5.4.1.1 El caso de Juliana (J).....	136
5.4.1.2 El caso de Arturo (A).....	137
5.4.1.3 El caso de Harold (H) .....	139
5.4.1.4 Principio de Interacción y Reinención Guiada .....	139
5.4.2 Matemización Vertical – Nivel Referencial.....	146
5.4.2.1 El caso de Juliana, Harold, Arturo. Principio de Interacción y Reinención Guiada	146
5.5 Fenómeno Área y Perímetro Segunda Situación .....	149
5.5.1 Matemización Horizontal – Nivel Situacional.....	149
5.5.1.1 El caso de Juliana, Harold y Arturo .....	149
5.5.1.2 Principio de Reinención e Interacción Guiada.....	151
5.5.2 Matemización Vertical– Nivel Referencial.....	156
5.5.2.1 El caso de Juliana, Harold y Arturo .....	156
5.5.2.2 Principio de Interacción y Reinención Guiada .....	158
5.6 Fenómeno Área y Perímetro Primera y Segunda Situación.....	161
5.6.1 Nivel General.....	161
5.6.1.1 El caso de Juliana, Harold y Arturo. Principio de Interacción y Reinención Guiada	161
6. Conclusiones.....	170
6.1 Caracterización a posteriori de los niveles de matemización del Teorema Fundamental del Cálculo .....	171
6.1.1 Nivel Situacional FCL y FAP .....	172
6.1.2 Nivel Referencial FCL y FAP.....	174
6.1.3 Nivel General FCL y FAP .....	176
6.2 Caracterización a posteriori y algunas modificaciones de la secuencia de tareas diseñadas en el FCL.....	177
6.3 Caracterización a posteriori y algunas modificaciones de la secuencia de tareas diseñadas en el FAP.....	184
Referencias Bibliográficas .....	191

### Lista de Figuras

Figura 1. Niveles de Matematización. Adaptado de Bressan, Gallego, Pérez, y Zolkower (2016).....	39
Figura 2. Esquema Proceso Metodológico .....	45
Figura 3. Velocidad y aceleración uniformes Oresme. Adaptado de Boyer (1949).....	48
Figura 4. Velocidad y aceleración uniformes Galileo. Adaptado de Boyer (1949).....	49
Figura 5. Indivisibles Cavalieri. Adaptado de Boyer (1949).....	50
Figura 6. Diagrama Barrow. Adaptado de Ponce (2013).....	51
Figura 7. Diagrama sintético Leibniz. Adaptado de Ponce (2013).....	52
Figura 8. Diagrama sintético Newton. Adaptado de Ponce, (2013) .....	53
Figura 9. Contenido Cálculo Integral primer corte - UIS .....	54
Figura 10. Relación velocidad distancia con integral .....	58
Figura 11. Relación Área perímetro con derivada .....	59
Figura 12. Relación perímetro y área con integral.....	60
Figura 13. Primera Situación - FCL.....	62
Figura 14. Tareas dirigidas al surgimiento de modelos gráficos que representen la magnitud velocidad.....	63
Figura 15. Tareas dirigidas a la creación de modelos algebraicos que representen el comportamiento de la velocidad .....	64
Figura 16. Tareas dirigidas al descubrimiento de la relación entre velocidad y distancia con ideas de acumulación de cambio en intervalos de tiempo .....	65
Figura 17. Segunda Situación - FCL.....	66
Figura 18. Tareas dirigidas al descubrimiento de la relación entre distancia y velocidad con ideas de variación en intervalos de tiempo .....	66
Figura 19. Tareas dirigidas a la creación de modelos algebraicos y gráficos de la relación entre distancia y acumulación de cambio .....	68
Figura 20. Tareas dirigidas al surgimiento de modelos algebraicos y gráficos de la relación entre la velocidad y la razón de cambio instantánea de la distancia.....	69
Figura 21. Conjeturar la relación entre cantidad variable, acumulación de cambio y razón de cambio de acumulación.....	69
Figura 22. Primera Situación - FAP.....	77
Figura 23. Tareas dirigidas al surgimiento de modelos gráficos y algebraicos que representen el comportamiento de la magnitud variable perímetro .....	78
Figura 24. Tareas direccionadas al descubrimiento de la relación entre el perímetro de una circunferencia de radio $x$ y el área del círculo del mismo radio con las ideas de la región barrida por el rastro de segmentos .....	79
Figura 25. Cambio de los incrementos .....	79
Figura 26. Segunda Situación FAP.....	80
Figura 27. Tareas dirigidas al descubrimiento de la relación entre la magnitud de la pendiente de la recta tangente a la función área y el perímetro de la circunferencia del mismo radio ....	80
Figura 28. Relación entre la pendiente de la recta tangente a la función área y el perímetro de una circunferencia de radio $x$ .....	81
Figura 29. Tarea dirigida a la creación de modelos algebraicos acerca de la relación entre la función perímetro de una circunferencia de radio $x$ y el área de un círculo del mismo radio.	82

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Figura 30. Tareas dirigidas a la creación de modelos algebraicos acerca de la relación entre la pendiente de la recta tangente a la función área y el perímetro de la circunferencia .....	82
Figura 31. Relación entre la pendiente de la recta tangente al área y el perímetro .....	83
Figura 32. Conjeturar la relación entre derivada e integral .....	83
Figura 33. Resumen Matematización Horizontal - Primera Situación .....	95
Figura 34. Solución Juliana SIT1 .....	95
Figura 35. Solución Arturo SIT1 .....	97
Figura 36. Solución Harold SIT1 .....	99
Figura 37. Comportamiento de la velocidad - Arturo .....	101
Figura 38. Representación tabular y gráfica de la velocidad de la pelota en Tracker .....	102
Figura 39. Gráficas Harold y Arturo .....	102
Figura 40. Regresión en Tracker .....	103
Figura 41. Curva de mejor ajuste forma global .....	105
Figura 42. Conjetura Harold .....	109
Figura 43. Conjetura Juliana .....	111
Figura 44. Resumen Nivel Referencial Primera Situación .....	112
Figura 45. "Modelo de" A .....	112
Figura 46. "Modelo de" H .....	113
Figura 47. "Modelo de" J .....	114
Figura 48. "Modelo de" algebraico A .....	116
Figura 49. "Modelo de" algebraico J .....	116
Figura 50. Resumen Matematización Horizontal Segunda Situación .....	119
Figura 51. Solución Juliana SIT2 .....	119
Figura 52. Solución Arturo SIT2 .....	119
Figura 53. Solución Harold SIT2 .....	120
Figura 54. Conjetura retórica Arturo .....	125
Figura 55. Conjetura retórica Juliana .....	125
Figura 56. Conjetura retórica y algebraica Harold .....	126
Figura 57. Resumen Nivel Referencial Segunda Situación .....	127
Figura 58. Conjetura Arturo .....	128
Figura 59. Conjetura Harold .....	128
Figura 60. Conjetura Juliana .....	128
Figura 61. Justificación Arturo .....	129
Figura 62. Resumen Nivel General Primera y Segunda Situación .....	130
Figura 63. Relación magnitudes Juliana .....	131
Figura 64. Respuesta Harold .....	132
Figura 65. Respuesta Juliana .....	132
Figura 66. Explicación Arturo .....	133
Figura 67. Relación derivada e integral Harold .....	134
Figura 68. Relación derivada e integral Juliana .....	136
Figura 69. Resumen Matematización Horizontal - Primera Situación .....	136
Figura 70. Solución Juliana .....	137
Figura 71. Solución Arturo .....	137
Figura 72. Solución Harold .....	139
Figura 73. Representación Arturo y Harold .....	141
Figura 74. Representación Juliana .....	142

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Figura 75. Situación 2.1 Representación gráfica de la función perímetro - GeoGebra.....	142
Figura 76. Coincidencia de las gráficas Arturo .....	143
Figura 77. Representación gráfica función perímetro y circunferencia.....	143
Figura 78. Comparación Harold y Arturo.....	144
Figura 79. Región barrida por el rastro del segmento y la circunferencia.....	146
Figura 80. Resumen Nivel Referencial Primera Situación .....	146
Figura 81. Conjetura Harold .....	147
Figura 82. Región barrida por el rastro .....	148
Figura 83. Conjetura Arturo.....	149
Figura 84. Conjetura Juliana .....	149
Figura 85. Resumen Nivel Situacional Segunda Situación .....	149
Figura 86. Solución segunda situación Harold, Juliana y Arturo respectivamente .....	150
Figura 87. Argumentos Arturo.....	151
Figura 88. Situación 2.2 Recta Tangente a la función Área .....	152
Figura 89. Pendiente de la recta tangente .....	153
Figura 90. Relación entre pendiente de la recta tangente a la función área y el perímetro ...	154
Figura 91. Modelo retórico Juliana y Arturo .....	155
Figura 92. Modelo retórico y algebraico Harold .....	156
Figura 93. Resumen Nivel Referencial Segunda Situación .....	156
Figura 94. Magnitud Segmento AG.....	157
Figura 95. Magnitud AG Juliana .....	157
Figura 96. Magnitud AG Arturo .....	158
Figura 97. Magnitud AG Harold.....	158
Figura 98. Visión del perímetro como función Harold.....	159
Figura 99. "Modelo de" Juliana .....	159
Figura 100. "Modelo de" Harold .....	160
Figura 101. Resumen Nivel General Primera y Segunda Situación .....	161
Figura 102. Modelo retórico Arturo.....	161
Figura 103. Modelo algebraico Juliana.....	162
Figura 104. Modelo algebraico Harold.....	163
Figura 105. Relación fuera del contexto Harold.....	165
Figura 106. Relación fuera del contexto Juliana.....	165
Figura 107. Relación fuera del contexto Arturo .....	165
Figura 108. Conjetura Arturo.....	167
Figura 109. Conjetura Juliana .....	167
Figura 110. Conjetura Harold .....	168
Figura 111. Cuestionamiento del modelo Juliana.....	168

### Lista de Tablas

Tabla 1. Fenómenos, Contextos y Situaciones – Teorema Fundamental del Cálculo.....	57
Tabla 2. Análisis a priori Nivel Situacional y Referencial Primera Situación FCL .....	70
Tabla 3. Análisis a priori Nivel Situacional y Referencial Segunda Situación FCL .....	74
Tabla 4. Análisis a priori Nivel General Primera y Segunda Situación FCL .....	76
Tabla 5. Análisis a priori Nivel Situacional y Referencial Primera Situación FAP .....	84
Tabla 6. Análisis a priori Nivel Situacional y Referencial Segunda Situación FAP .....	86
Tabla 7. Análisis a priori Nivel General Primera y Segunda Situación FAP .....	88
Tabla 8. Descriptores a priori Nivel Situacional FCL y FAP .....	90
Tabla 9. Descriptores a priori Nivel Referencial FCL y FAP.....	91
Tabla 10. Descriptores a priori Nivel General FCL y FAP .....	92
Tabla 11. Descriptores a posteriori Nivel Situacional FCL y FAP.....	173
Tabla 12. Caracterización a posteriori Nivel Referencial FCL y FAP .....	175
Tabla 13. Caracterización a posteriori Nivel General FCL y FAP .....	176
Tabla 14. Análisis a posteriori Nivel Situacional y Referencial Primera Situación FCL.....	177
Tabla 15. Análisis a posteriori Nivel Situacional y General Segunda Situación FCL .....	182
Tabla 16. Análisis a priori Nivel General Primera y Segunda Situación FCL .....	184
Tabla 17. Análisis a posteriori Nivel Situacional y Referencial Primera Situación FAP.....	185
Tabla 18. Análisis a posteriori Nivel Situacional y Referencial Segunda Situación FAP.....	187
Tabla 19. Análisis a posteriori Nivel General Primera y Segunda Situación FAP.....	189

**Lista de Apéndice**

Apéndice A. Secuencia de Tareas: fenómeno de Caída Libre.....	197
Apéndice B. Secuencia de Tareas: fenómeno de Área y Perímetro .....	201

**RESUMEN**

**TÍTULO:** MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO  
CON EL USO DE TECNOLOGÍAS DIGITALES\*

**AUTOR:** INGRID JANETH JACOME ANAYA\*\*

**PALABRAS CLAVES:** MATEMATIZACIÓN, TEOREMA FUNDAMENTAL DEL  
CÁLCULO, TECNOLOGÍAS DIGITALES.

**DESCRIPCIÓN:**

En este documento presentamos resultados de una investigación de corte didáctico y cognitivo, la cual tuvo como objetivo específico diseñar, implementar y evaluar una secuencia de tareas que permita caracterizar los niveles de matematización logrados por estudiantes de un curso de cálculo integral sobre el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) con el uso de tecnologías digitales.

Para lograr el objetivo, se utilizaron elementos de la Teoría de la Educación Matemática Realista la cual, por medio del Análisis Fenomenológico Didáctico del TFC nos permitió diseñar la secuencia de tareas enmarcadas en dos fenómenos, promoviendo los principios de reinención guiada e interacción, así como el posterior análisis de la matematización del TFC lograda por los estudiantes en los tres primeros niveles, Situacional, Referencial y General.

En esta investigación se realizó la caracterización a priori de los tres primeros niveles de matematización del TFC, con el fin de que estos descriptores fueran los lentes teóricos para analizar la matematización del objeto matemático de estudio asociado a la secuencia de tareas diseñadas.

Finalmente, esta investigación además de caracterizar los niveles de matematización del TFC, propone una secuencia de actividades que pueda ser usada por profesores de educación superior en las aulas de clase para favorecer la comprensión del TFC.

---

\* Trabajo de Grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal

**ABSTRACT**

**TITLE:** MATEMATIZATION OF THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS  
WITH THE USE OF DIGITAL TECNOLOGIES\*

**AUTHOR:** INGRID JANETH JACOME ANAYA\*\*

**KEY WORDS:** MATEMATIZATION, FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS,  
DIGITAL TECNOLOGIES.

**DESCRIPTION:**

In this document we present results of a cognitive and didactic investigation, which has a specific objective: design, evaluate and implement a sequence of tasks that allow to characterize the mathematization levels achieved by students of an integral calculus course about the Fundamental Theorem of Calculus (FTC), with the use of digital technologies.

To achieve the objective, we used elements of the Realistic Mathematics Education Theory, through the Didactic Phenomenological Analysis of the FTC, we design the sequence of tasks framed in two phenomena. The purpose of those activities is to promote the principles of guided reinvention and interaction. as well as the subsequent analysis of the mathematization of the TFC achieved by the students in the first three levels: situational, referential and general.

In this investigation, the characterization was carried out of the three first levels of TFC matematization for the purpose of these descriptors were theoretical lenses to analyze the matematization of the mathematical goal of study associated with the sequence of tasks designed.

Finally, this investigation not only characterizes the levels of TFC matematization, it also propose a sequence of activities that can be used by higher education teachers in class to promote the understanding of TFC.

---

\* Degree work

\*\* Faculty of Sciences. School of Mathematics PhD. Jorge Enrique Fiallo Leal

## Introducción

De acuerdo con Robles, Tellechea y Font (2014) el Teorema Fundamental del Cálculo establece la articulación entre las ideas de variación y acumulación, donde su uso práctico, esto es, el cálculo de integrales definidas y antiderivadas conlleva a que en los cursos donde se enseña la integral haya un énfasis excesivo en el cálculo de algoritmos dejando de lado lo conceptual.

Muñoz (2000) identifica una condición teórica necesaria para promover el enlace entre lo algorítmico y lo conceptual, la cual hace referencia al uso de situaciones problemas. Específicamente, Freudenthal (1973) se refiere al uso de situaciones matemáticas realistas en el sentido de representables e imaginables para los estudiantes, concibiendo la matemática como una actividad humana que conlleva a la organización de la matemática a partir de la realidad. Dicha actividad, Matemización, pasa por distintos niveles los cuales se caracterizan por el tipo de modelos emergentes (Gravemeijer citado en Van den Heuvel-Panhuizen, 2003), entendiendo por modelo todo aquello que hacen los estudiantes para resolver la situación problema.

El reto está en la búsqueda de situaciones que permitan el surgimiento de modelos y la abstracción de los mismos. Para ello, Freudenthal (1973) propone la realización de un análisis fenomenológico didáctico con el fin de encontrar los fenómenos, situaciones y contextos en los cuales el objeto matemático de estudio es un organizador.

En particular, en la Universidad Industrial de Santander (UIS) el TFC es estudiado en el curso de Cálculo Integral (asignatura del ciclo básico de los programas de ciencias e ingenierías), contexto desde el cual se desarrolla la investigación que aquí se presenta cuyo objetivo es: Caracterizar los niveles de matemización logrados por estudiantes de un curso

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

de Cálculo Integral que estudian el Teorema Fundamental del Cálculo con el uso de tecnologías digitales

El estudio desarrollado es de corte didáctico y cognitivo en el cual se diseña una secuencia de tareas enmarcadas en situaciones problemáticas realistas para la matematización del TFC, la cual se implementa y se evalúa en el marco de la Educación Matemática Realista (EMR).

El documento está organizado de la siguiente manera: en el primer capítulo se presenta la problemática, el contexto, la pregunta y los objetivos de investigación. En el segundo capítulo se presenta la revisión de algunas investigaciones referentes a la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo y algunas investigaciones en el marco de la EMR. En el tercer capítulo se exponen los aspectos teóricos, conceptuales y metodológicos de la teoría de la EMR, sobre los cuales se sustenta la investigación en cuanto al diseño y análisis de la secuencia de tareas enmarcadas en situaciones problemáticas realistas. En el cuarto capítulo se presenta de forma detallada la metodología empleada para el diseño y análisis de la secuencia de tareas; los instrumentos usados para la recolección de los datos; la selección de los casos de estudio y la técnica utilizada para el análisis de los datos. En el quinto capítulo se presentan los resultados del análisis de los datos en relación con la caracterización de los niveles de matematización logrados por estudiantes que estudian el TFC con el uso de tecnologías digitales promoviendo los principios de interacción y reinención guiada. En el sexto capítulo se sintetizan los hallazgos enmarcados en la caracterización a posterior de los niveles de matematización del TFC, la caracterización a priori de la secuencia de tareas y algunos aspectos generales en cuanto a su diseño y aplicación. Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas.

## 1. Planteamiento de la investigación

Para dar a conocer nuestro objeto de estudio presentamos en este capítulo el contexto, problemática, pregunta y objetivos de investigación.

### 1.1 Contexto y problemática de la investigación

El cálculo en una variable se divide en dos partes denominadas: i) Cálculo Diferencial y ii) Cálculo Integral. El primero está relacionado con las ideas de variación, esto es, con la razón de cambio instantánea de dos variables relacionadas funcionalmente, cuya representación geométrica hace referencia a la recta tangente a una curva en un punto. El segundo está relacionado con el problema de la acumulación infinita de los valores de una función, cuya representación geométrica es el área de una región entre una curva que representa una función y el eje horizontal ligado a la variable independiente.

De acuerdo con Robles, Tellechea y Font (2014), la comprensión de los objetos matemáticos asociados a las ideas de variación y acumulación son complejos, y más aún es la articulación entre éstos, articulación que se establece a través del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC).

Este teorema, desarrollado independientemente por Newton y Leibniz a finales del siglo XVII proporciona la idea raíz del cálculo diferencial e integral (Courant, 1937). La relación entre derivada e integral se expresa con frecuencia de forma similar en los libros de texto más usados en la enseñanza del cálculo. Stewart (2008) lo enuncia de la siguiente manera:

Suponga que  $f$  es continua sobre un intervalo  $[a, b]$

1. Si  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$  por lo tanto  $G'(x) = f(x)$

2.  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ , donde  $F$  es cualquier antiderivada de  $f$ , es decir,  $F' = f$

La parte 1 se puede volver a escribir como

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

en la cual se afirma que si se integra  $f$  y a continuación, deriva el resultado, regresa a la función original,  $f$ . Como  $F'(x) = f(x)$ , la parte 2 puede reescribirse así

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

En esta versión se afirma que si se toma una función  $F$ , la deriva y luego integra el resultado, vuelve a la función original  $F$ , pero en la forma  $F(b) - F(a)$ . Tomadas juntas, las dos partes del Teorema Fundamental del Cálculo expresan que la derivación y la integración son procesos inversos. Cada una deshace lo que hace la otra (p. 387).

En estos mismos textos se presenta la demostración de las dos partes del teorema de forma algebraica, la cual, al ser presentada a los estudiantes es considerada como suficiente para suponer que entienden la articulación entre derivada e integral (Robles, Tellechea y Font, 2014).

Las representaciones estáticas y limitadas presentadas en estos libros restringen la naturaleza dinámica de los objetos, lo cual conduce a desarrollar una imagen limitada del concepto en cuestión (Tall y Sheath, 1983), razón por la cual se sugiere el uso de la tecnología en la enseñanza de la matemática puesto que permiten la visualización dinámica de conceptos matemáticos que no se visualizan fácilmente en el papel. En este sentido, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2004) resalta que

Con la aparición de las tecnologías computacionales, como calculadoras graficadoras, sistemas de álgebra computacional (CAS), geometría dinámica, programación, etc. se ampliaron las posibilidades de representación de los fenómenos de variación y de poder pasar de manera versátil de un sistema de representación a otro (p.27).

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Lo cual favorece el desarrollo del proceso de representación en relación con fenómenos de variación y cambio, beneficiando así el sentido de que las funciones sirven para describir cómo cambian las cosas, lo que conlleva a considerar naturalmente los conceptos de tasa de variación (diferenciación) y cambio acumulado (integración), conceptos que el TFC explica como procesos inversos (Tall, 1997).

Al respecto, Hitt (1998) menciona la importancia de promover el uso de varios sistemas de representación, y el uso reflexivo de las nuevas tecnologías que permitan dar un significado concreto a las nociones matemáticas. Menciona a su vez que el impulso que han tenido las nuevas tecnologías obliga a la realización de un análisis curricular, puesto que una gran mayoría de profesores de matemáticas rechazan el uso de calculadoras graficadoras y computadoras porque tienen la creencia que su uso inhibirá las habilidades operatorias de los estudiantes, siendo las nuevas tecnologías una herramienta útil para promover el proceso de representación.

Teniendo en cuenta que los conceptos del cálculo admiten diferentes tipos de representación (Duval, 1999) surge la necesidad de utilizar diferentes representaciones para la formación de un concepto matemático. Al respecto, Hitt y Passaro (2007) realizan una crítica a la prioridad que realiza Duval a las representaciones institucionales puesto que, para ellos, las representaciones no oficiales, estas son, representaciones espontáneas, juegan un papel primordial en la construcción de un objeto matemático. Para ellos, la representación algebraica no es una prioridad puesto que la resolución de una situación problema debe pasar por diferentes representaciones antes de llegar a la representación algebraica, estas son, representación verbal, pictórica, numérica y gráfica, sin representar una jerarquía estrictamente ordenada.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

En este sentido, la Teoría de la Educación Matemática Realista, concibe la idea de las matemáticas como una actividad humana que conlleva a la organización de la matemática desde la realidad, refiriéndose a esta como actividad de Matematización (Freudenthal, 1973).

Esta actividad involucra (Freudenthal, 1991)

- Reconocer características esenciales en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos.
- Crear espontáneamente nuevos objetos mentales y operaciones.
- Descubrir características comunes, similitudes, analogías e isomorfismos.
- Ejemplificar ideas generales y generalizar paradigmas
- Buscar atajos, abreviar estrategias y simbolizaciones iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas.
- Reflexionar acerca de la actividad matematizadora, considerando los fenómenos en cuestión desde diferentes perspectivas.

La matematización se puede llevar a cabo pasando por distintos niveles. Según Van den Heuvel-Panhuizen (2003) estos se dan, desde concebir situaciones informales conectadas con el contexto hasta alcanzar un nivel de esquematización, y finalmente tener una visión de los principios generales detrás de un problema.

En particular, Gravemeijer (citado en Van den Heuvel-Panhuizen, 2003) muestra que el cambio en los modelos se puede conectar con el proceso de crecimiento matemático de forma general. El realiza una distinción entre "modelo de" y "modelo para", lo cual lo lleva a dividir el nivel intermedio, entre el Nivel Situacional y el Nivel Formal y la comprensión matemática, en un Nivel Referencial y General.

Haciendo referencia a los ejercicios presentados en los libros de texto en el capítulo del Teorema Fundamental del Cálculo, los cuales son en su mayoría algebraicos, se espera que los

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

estudiantes calculen la derivada de una función integral y la integral de una función derivada, sin consideración alguna sobre sus niveles de dificultad, validez y conceptualización. Esto “conlleva a que los docentes limiten su acción educativa a repetir los conceptos matemáticos tal como aparecen en los libros, reduciendo sus clases a una algoritmización de los conceptos del cálculo que los estudiantes contemplan, memorizan y repiten en los exámenes” (Moreno y Ríos, 2006, p.28).

En este sentido, Artigue (1995) afirma que:

Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencia sorprendente, que, si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas (p.97).

Por su parte, Muñoz (2000) señala que una de las problemáticas propias de la enseñanza del Cálculo integral consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico, puesto que en los cursos de cálculo integral hay un énfasis excesivo en el cálculo de antiderivadas con poca atención a la conceptualización de la integral definida, la cual se reduce a la definición de Cauchy o la de Riemann, y al momento de abordar las “aplicaciones” es cuando se estudian algunos aspectos de las nociones asociadas a este concepto. En los cursos de cálculo se logra que los estudiantes deriven e integren sin tener la capacidad de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en su comprensión, lo cual conlleva a que los estudiantes construyan una imagen conceptual restringida de los objetos matemáticos de estudio y su utilidad, generando la creencia de que el cálculo son una serie de fórmulas, reglas o métodos sin beneficio (Zuñiga,2007).

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Dicha separación, entre lo algorítmico y lo conceptual, se podría explicar por el hecho de que tradicionalmente se ha abordado la enseñanza del cálculo en los primeros años de las carreras de ingeniería y ciencias de forma mecanicista o formalista, lo que hace que los estudiantes no comprendan de manera satisfactoria los conceptos y métodos de pensamiento propios del Cálculo, por lo que, para propiciar el enlace entre lo algorítmico y lo conceptual, Muñoz (2000) identifica como condición necesaria el uso de situaciones problema a partir de las cuales se forman nociones y procedimientos, asociados, en este caso, a los elementos propios del Cálculo. Freudenthal (1991) define estas situaciones problema como contextos y situaciones problemáticas realistas, en el sentido de representables, razonables e imaginables para los estudiantes y menciona que dichas situaciones son las generadoras de su actividad matematizadora.

### **1.2 Pregunta de Investigación**

Concibiendo la idea de que una finalidad de las matemáticas es matematizar y este proceso implica generalizar y formalizar, donde generalizar conlleva a reflexionar, y la formalización conlleva a modelizar, simbolizar, esquematizar y definir, esta investigación pretende responder a la pregunta:

¿Qué niveles de matematización alcanzan estudiantes de un curso de cálculo integral que estudian el Teorema Fundamental del Cálculo con el uso de tecnologías digitales?

Para ello nos hemos planteado los siguientes objetivos de investigación:

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

### 1.3 Objetivos de Investigación

**1.3.1 Objetivo General.** Caracterizar los niveles de matematización logrados por estudiantes de un curso de Cálculo Integral que estudian el Teorema Fundamental del Cálculo con el uso de tecnologías digitales.

**1.3.2 Objetivo Específico.** Diseñar, Implementar y Evaluar una secuencia de tareas para la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) mediante el uso de tecnologías digitales a la luz de la Teoría de la Educación Matemática Realista.

## 2. Antecedentes y revisión bibliográfica

Orientamos la revisión de la literatura a investigaciones en educación matemática de la siguiente manera: en el primer apartado describimos aspectos referentes a la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo con el uso de tecnologías digitales, en el segundo apartado rescatamos algunos aspectos referentes a la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo asociadas a la concepción de demostración y en el tercer apartado se hace una revisión de algunas investigaciones en el marco de la Educación Matemática Realista.

### 2.1 Algunas propuestas didácticas para la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo con el uso de tecnologías digitales.

Entre las propuestas didácticas para la enseñanza del TFC se destacan las que incluyen los procesos de simulación computacional (Robles et al., 2014; Delgado, 2009; Londoño, 2011; Tall, 1986).

Robles et al. (2014) señalan que el hecho de tener una mirada compleja sobre los objetos matemáticos, en este caso, la idea de variación y acumulación, derivada e integral respectivamente, conlleva al problema de la articulación de dichos componentes. Un elemento clave de la articulación entre derivada e integral es el TFC. El problema radica, añaden los autores, en que el TFC se aborda desde una perspectiva exclusivamente analítica, lo que minimiza la experiencia intuitiva del estudiante. La demostración del TFC por parte del

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

profesor con frecuencia se considera suficiente para suponer que el estudiante entiende la articulación entre la derivada y la integral, y pareciera ser suficiente que el estudiante comprenda que la función integral es la antiderivada de la función que se integra para considerar logrado el objetivo del curso.

Los autores proponen una secuencia didáctica de tareas para la enseñanza del TFC que tenga en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos esenciales del Cálculo, y el papel esencial que desempeña este teorema en esa articulación. La propuesta propicia que el estudiante, con su intuición, descubra el rol del TFC en ese proceso de articulación de la derivada y la integral, que vaya más allá de saber que la derivada de la integral es la función. Utilizan como herramienta básica para su diseño el ambiente interactivo que brinda el Applet Descartes ya que consideran que las representaciones dinámicas promueven la mejor articulación del lenguaje numérico con el gráfico y el analítico, así como la realización de conversiones entre ellos de manera fluida.

Como un primer contacto de los estudiantes con el TFC, plantean el problema de calcular la distancia recorrida por un móvil que se desplaza a velocidad constante durante un tiempo determinado, y a partir de un movimiento rectilíneo uniforme determinar la rapidez con que se mueve el objeto.

Se proponen cinco actividades. En las tres primeras se presenta la relación dada en el TFC basada en la representación gráfica de una función (constante, lineal y combinación de funciones lineales) y el análisis del área de una región entre una curva que representa una función y el eje horizontal ligado a la variable independiente (función integral) mediante el uso de tablas de datos y la gráfica de la misma. El estudiante primero debe realizar dicho proceso con lápiz y papel y responder algunas preguntas, seguidamente debe verificar sus resultados a partir de la interacción con los Applets diseñados para tal fin.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

La idea con estas actividades es que el estudiante llegue a plantear posibles conjeturas tales como: la integral de una función constante es una función lineal y la integral de una función lineal es un polinomio de 2º grado. Se espera que el trabajo realizado con papel y lápiz durante las actividades haya hecho surgir significados que, una vez confirmados o rectificadas con la ayuda de los applets e institucionalizados durante la interacción grupal, constituyan la base para avanzar hacia el TFC.

Las dos últimas actividades se centran en la observación y medición de la linealidad local de la función integral para diversos valores de  $x$ , con el objetivo de confirmar visualmente la relación entre dichas mediciones y los valores correspondientes de la función, lo que constituye la visualización del TFC, cuya institucionalización se sugiere en la actividad final.

Londoño (2011) en su trabajo de tesis doctoral titulada “La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la Teoría Piere y Kieran” implementa una entrevista de carácter socrático a estudiantes de último año de educación media y primer año de universidad, con el fin de favorecer la comprensión de los conceptos de área y pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, conceptos que subyacen en el TFC, para finalmente establecer la relación inversa que hay entre éstos haciendo uso del software de geometría dinámica GeoGebra, en la que conjeturan que el uso de un software dinámico adecuado promueve el desarrollo y construcción de una imagen mental del objeto matemático de estudio, favoreciendo la comprensión del mismo.

Una idea interesante que rescatamos de este trabajo es el análisis del área entre la curva de la función derivada y el eje horizontal de la variable independiente en un intervalo cerrado  $[a, b]$  para así encontrar que dicha área es igual a la diferencia de las imágenes de la función base evaluada en los extremos del intervalo, esto es,

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

Por otra parte, Delgado (2009) hace una propuesta de enseñanza del TFC dirigida a estudiantes en la modalidad de educación virtual basada en simulaciones con el ánimo de presentar la naturaleza dinámica de los fenómenos de variación y acumulación.

El objetivo principal es mostrar las representaciones de dichos fenómenos con el fin de que los estudiantes puedan visualizar la relación entre derivada e integral de dos formas distintas, de forma numérica y forma simbólica, promoviendo así la conexión entre representaciones.

La propuesta está conformada por cuatro actividades con los objetivos de visualizar la integral del valor absoluto de una función como el área limitada por una curva y el eje de la variable independiente; realizar e identificar el comportamiento de la gráfica de la función integral, así como la continuidad de la misma y el Teorema del Valor Medio; y finalmente, de acuerdo con la gráfica y el cálculo de la expresión algebraica de la derivada de la función integral, visualizar el TFC.

Para Delgado, los procesos visuales son necesarios en los procesos de aprendizaje, por ello, el código Maple presentado genera representaciones visuales; gráficas, imágenes estáticas; e imágenes dinámicas o animaciones.

Tall (1986) plantea un enfoque gráfico para la integración y el TFC, en el cual propone, para el cálculo de áreas, los siguientes métodos:

- Algebraicos: los cuales consisten en la aproximación del área por medio del cálculo de la suma de áreas, en un intervalo, de rectángulos superiores e inferiores de igual anchura, siendo un limitante el cálculo de las sumas de las potencias  $k$  –ésimas para curvas de la forma  $y = x^k$ .

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

- Numéricos con el uso de la calculadora: los cuales permiten que las aproximaciones se “computen” numéricamente para la división de intervalos en  $n$  tiras, con  $n$  cada vez más grande (10,100,1000 ...), siendo este trabajo numérico opresivo, a menos de que haya una computadora disponible.
- Numéricos con el uso de la computadora: permiten el uso de métodos muchos más potentes, pero hay mucho más que el cálculo de procesamiento de números.

Los métodos anteriores se concentran en el resultado final de un cálculo de área, descuidando la información dada por las sumas intermedias. Cuando se calcula el área, cada suma parcial de  $a$  a  $x$ , proporciona el área aproximada como una función de  $x$ . Si se pudiera usar esa información de alguna forma, tal vez, se podría llegar al área de forma más directa. Tall propone el uso del computador para realizar las actividades descritas, ya que su uso:

- Propicia la concentración en las ideas más que en los tecnicismos, permitiendo a su vez que los estudiantes puedan explorar muchas posibilidades en poco tiempo puesto que la simulación por medio de ésta es mucho mejor que una imagen estática. Así mismo, al momento de calcular áreas, los estudiantes adquieren conciencia de dos ideas fundamentales:
  - I. Cuando se toman tiras más pequeñas, la aproximación del área se acerca al área verdadera.
  - II. El cálculo del área tiene en cuenta el signo del recorrido y la ordenada de forma significativa.

Tall menciona que las experiencias de los enfoques precedentes llevan naturalmente a la idea de que la función área  $I(x)$  se deriva para dar la función original  $f(x)$ , por lo que se puede conjeturar el “teorema” que si  $I'(x) = f(x)$  para todos los valores de  $x$  de  $a$  a  $b$ , entonces el área debajo de la gráfica  $y = f(x)$  y el eje  $x$  es  $I(b) - I(a)$ . Preguntándose a su vez si eso es

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

siempre cierto, motivo por el cual sugiere que la escala en el eje  $x$  se haga tan pequeña, de manera que permita ver la sección de la curva  $f(x)$  como una línea recta, de forma tal que el área entre  $x$  y  $x + h$  (donde  $h$  es muy pequeño) es aproximadamente:

$$I(x + h) - I(x) \approx hf(x)$$

De este modo;

$$\frac{I(x + h) - I(x)}{h} \approx f(x)$$

Promoviendo la demostración de forma intuitiva del TFC en la que se discute de forma natural la necesidad de la continuidad para que el teorema funcione. Así mismo muestra que el teorema no requiere que la función tenga derivada, dando el ejemplo para la función  $y = |x|$ .

En conclusión, Tall resalta que un acercamiento gráfico al cálculo no es solo una “forma simple de entrar” para los estudiantes principiantes, sino que también proporciona una visión de los teoremas poderosos que se estudian más tarde en el análisis matemático formal.

### **2.2 Enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo que incluyen aspectos asociados a la Demostración.**

Entre otras propuestas didácticas para la enseñanza del TFC también se destacan las que incluyen aspectos asociados a la concepción de demostración y demostración visual (Ponce, 2006; Kirsch, 2014).

Ponce (2006) investiga la existencia en los profesores de secundaria de los elementos necesarios para presentar coherentemente el TFC, su significado, su demostración y sus implicaciones. En su artículo menciona las diferentes funciones de la demostración propuestas por Hanna (citado en Ponce, 2006) puesto que es importante que los profesores de matemáticas tengan un claro manejo del significado de demostración, pues ésta proporciona pautas para que puedan construir conocimiento matemático y, además, cuando se pide hacer una demostración

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

a los estudiantes, al escribirla pueden mostrar procesos de pensamiento lo cual permite observar cómo un estudiante llega a una conclusión en particular. Dichas funciones son (Hanna citado en Ponce, 2006):

1. Verificación (que tiene que ver con la verdad de una declaración)
2. Explicación (para dar claridad del por qué es verdad)
3. Sistematización (la organización de varios resultados dentro de un sistema deductivo de axiomas, conceptos principales y teoremas)
4. Descubrimiento (invención de nuevos resultados)
5. Comunicación (de conocimiento matemático)
6. Construcción de una teoría empírica
7. Exploración del significado de una definición
8. Incorporación de un hecho bien conocido dentro de un marco de trabajo y de esta manera observarlo desde una nueva perspectiva.

Ponce considera que, en la enseñanza del cálculo, juega un papel importante la “demostración matemática” para la construcción de conocimiento. El papel de la demostración en el salón es diferente que su papel en la investigación. En la investigación su papel es convencer. En el salón, convencer no es un problema, su papel es explicar.

Kirsch (2014) presenta una demostración visual del TFC. Su objetivo es facilitar una comprensión más profunda de la relación entre la integral y la derivada a través de una percepción adecuada de la derivada. Plantea que una prueba visual no debe ser considerada como algo de menor valor que una prueba formal, sino que, al contrario, debe asumirse como un complemento que revela el significado del teorema y permite un entendimiento más profundo de los conceptos. En su trabajo describe los elementos de la demostración visual, reconociendo la derivada como la velocidad instantánea (razón de cambio) y no como la

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

pendiente de la recta tangente, planteando las siguientes preguntas: ¿qué tan rápido está creciendo la zona (área bajo la curva) si se viaja por el eje  $x$  a una velocidad constante? Imagine que el área bajo la curva se va a pintar ¿qué tan rápido se tiene que aplicar la pintura? ¿dónde (en la gráfica de la función) puede verse esa velocidad en un punto dado  $x$ ? Con estas preguntas se espera que los estudiantes planteen las siguientes conjeturas:

- “Uno puede verlo en el borde derecho de la zona, que depende de la altura de la gráfica en el punto  $x$ ”
- “Cuanto más grande sea la altura, más rápido cambia el área”.
- “La velocidad de cambio debe ser proporcional a la altura”.

Siendo esta última la idea central de la validez del TFC. Kirsch concluye haciendo hincapié en lo siguiente: ¿antes de que se pruebe un teorema, tiene que haber ideas básicas apropiadas de su significado -una demanda excesiva de instrucción de matemáticas, tal vez?

### **2.3 Algunos estudios asociados a la Educación Matemática Realista.**

Entre los trabajos realizados en el marco de la Educación Matemática Realista (EMR) destacamos los de González (2015), Henao y Vanegas (2012), Gravemeijer y Doorman (1999), Van den Heuvel-Panhuizen (2003) y Drijvers, Boon, Doorman, Bokhove y Tacoma (2013)

González (2015) aborda la problemática asociada al poco uso de situaciones problema que promuevan la argumentación matemática en el aula de clase en la educación básica y media en contextos de socialización y construcción de conocimientos (Camargo citado por Gonzales, 2015). El autor identifica la necesidad de mostrar, mediante datos empíricos, que a partir de la matematización de situaciones (Freudenthal, 1983) es posible promover la actividad argumentativa en el aula en torno a las matemáticas.

La investigación tiene por objetivo analizar los esquemas de argumentación matemática que surgen en torno a la interacción entre estudiantes de grado décimo cuando se involucran en

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

procesos de matematización de situaciones. Para lograr dicho objetivo diseña tareas específicas para cada nivel de matematización entorno al proceso de argumentación, con las cuales “intenta construir el objeto mental de figura geométrica; donde se ponen en juego los elementos del modelo argumentativo de Toulmin, apoyado fundamentalmente en justificaciones que emergen de una secuencia argumentativa lógica dentro de las matemáticas” (González, 2015, p.111), lo cual le permite caracterizar la matematización horizontal y vertical, evidenciando que los procesos de matematización dados en la situación problema, garantizan el surgimiento de una actividad argumentativa en los estudiantes.

De acuerdo a la caracterización de los niveles de matematización, el autor sugiere la reflexión acerca de las formas de llevar a cabo las prácticas argumentativas en matemáticas fomentadas por el profesor, donde se beneficie las ideas propias de los estudiantes, las reflexiones y la construcción de conocimiento de manera tal que se promueva la necesidad de justificación, explicación y/o discusión durante los procesos de resolución de problemas y su matematización.

Heno y Vanegas (2012) diseñan actividades fundamentadas en la EMR para la enseñanza y aprendizaje de modelos cuadráticos que permita estudiar el proceso de modelación matemática en estudiantes de los últimos grados de educación media (10° y 11°). Dicha investigación se plantea en términos de los niveles de matematización horizontal y vertical para el análisis del desempeño de los estudiantes y las implicaciones didácticas y cognitivas en relación con el proceso de modelación matemática. El propósito de la investigación es caracterizar los niveles de matematización de los estudiantes cuando se involucran en tareas diseñadas desde el enfoque de la EMR a partir del trabajo con modelos cuadráticos.

Para la fundamentación teórica de las tareas realizan un análisis fenomenológico didáctico de las nociones cuadráticas, de manera tal que les permita reconocer cuales son los fenómenos

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

que se organizan mediante lo cuadrático y cómo estos organizan la matemática misma. El análisis permitió ampliar la comprensión sobre cómo las nociones matemáticas se pueden manifestar en los estudiantes y como éstos pueden construirlas.

Los autores concluyen que los estudiantes hacen uso de diferentes conceptos matemáticos, procesos intuitivos y estrategias heurísticas tratando de conectar la matemática con los fenómenos cercanos a su realidad, donde las tareas diseñadas a partir del análisis fenomenológico didáctico promueven la creación de modelos y la abstracción de los mismos, permitiéndoles esto avanzar en los niveles de matematización.

Gravemeijer y Doorman (1999) diseñan un curso de cálculo enmarcado en la EMR, teniendo en cuenta los trabajos de Oresme y Galileo sobre la relación entre la velocidad y la distancia recorrida. Con esto pretenden mostrar que la teoría basada en el diseño heurístico que usa los problemas de contexto y el modelado también se ajusta a un tema avanzado como el cálculo.

A la luz de los “modelos de” y los “modelos para” el cambio, argumentan que las funciones discretas y sus gráficos juegan un papel clave como intermediario entre los problemas de contexto que deben resolverse y el cálculo formal que se desarrolla. Presentan algunos modelos de enseñanza del cálculo tradicionales y algunas alternativas que apuntan a diseñar una secuencia instructiva perspicaz, donde los estudiantes tengan la oportunidad de basar su comprensión en su propio conocimiento informal y donde la instrucción se base en las contribuciones propias de los estudiantes al proceso de enseñanza-aprendizaje. Dichos enfoques alternativos conciben que el aprendizaje de las matemáticas debe tener las características del crecimiento cognitivo, y no el de un proceso de apilamiento de piezas.

Van den Heuvel-Panhuizen (2003) centra la atención en cómo enseñar conceptos matemáticos asociados el número racional como el porcentaje, muestra cómo los estudiantes pueden aprenderlo y cómo los modelos se usan didácticamente para llevar a cabo el proceso de

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

aprendizaje, precisando en la idea de que son las actividades de modelización de los estudiantes los que hacen posible el crecimiento de su comprensión matemática. La autora se centra en el uso del modelo de barras dentro de una trayectoria longitudinal en porcentaje que ha sido diseñado para Matemáticas en Contexto, un currículo para la escuela media de los Estados Unidos, estrategia en la cual a los estudiantes no se les entrega modelos ya hechos, sino que se les debe plantear problemas en contexto que susciten actividades de modelización, lo que a su vez da lugar al surgimiento de modelos que son usados y manipulados de forma flexible por los estudiantes, dando lugar al avance de los mismos y el paso del pensamiento informal al formal.

Concluye que esta estrategia no es una receta, sino una estrategia para enseñar y aprender porcentajes, en la que el uso didáctico de modelos desempeña un papel fundamental.

Drijvers et al. (2013) investigan cómo los principios de la EMR se pueden aplicar al diseño de tareas digitales. Para ello presentan algunos ejemplos de tareas en el campo del álgebra, cálculo y geometría diseñadas en el Entorno Matemático Digital (DME) del Instituto Freudenthal, el cual integra un sistema de gestión de contenidos, un sistema de gestión de aprendizaje y un entorno de autoría, donde el contenido consiste en módulos en línea en forma de applets Java.

En las tareas digitales para el álgebra, destacan las realizadas por Bokhove y Drijvers (citado en Drijvers et al. 2013), las cuales se centran en resolver ecuaciones polinomiales donde las prácticas van más allá de los cálculos algebraicos, centrándose en el desarrollo del sentido de los símbolos y las habilidades estratégicas. En el diseño de las actividades la reinención guiada es uno de los aspectos principales, puesto que permite la matematización progresiva. En las tareas digitales sobre cálculo se centran en el desarrollo conceptual de la comprensión de las nociones de función, siendo un factor crucial en el diseño de estas, la búsqueda de contextos

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

adecuados para que el surgimiento de los modelos sea de forma natural, de manera tal que vayan aumentando la complejidad y abstracción. Las tareas digitales para geometría se centran en explorar, descubrir y probar propiedades de bisectrices, alturas y medianas en triángulos. El desafío en el diseño de estas tareas es ofrecer apoyo y orientación para la demostración que permitan la reinención.

Los autores concluyen que los principios de *reinención guiada*, *fenomenología didáctica* y *modelos emergentes* pueden informar y guiar el diseño digital teniendo en cuenta que algunos aspectos funcionan de forma diferente en comparación con el diseño de tareas a lápiz y papel, así mismo, las tecnologías digitales ofrecen oportunidades para la exploración e investigación, permitiendo esto la reinención.

### **3. Aspectos Teóricos**

En este capítulo describimos los elementos teóricos con los cuales se sustenta la investigación, exponemos los elementos esenciales de la Teoría de la Educación Matemática Realista, la cual nos permitió diseñar las situaciones matemáticas realistas y las tareas enmarcadas en dichos fenómenos teniendo en cuenta los principios de fenomenología didáctica, reinención guiada e interacción y el análisis de la matematización progresiva del Teorema Fundamental del Cálculo.

#### **3.1 Educación Matemática Realista**

La corriente conocida internacionalmente como Educación Matemática Realista (EMR), fue desarrollada en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática de la Universidad de Utrecht, Holanda (IOWO - Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs), conocido actualmente como Instituto Freudenthal. Precisamente se reconoce como iniciador de esta teoría a Hans Freudenthal (1905-1990), matemático y educador alemán (naturalizado holandés). Su punto de partida es su crítica a la educación matemática tradicional, se opone

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

ferozmente a lo que él llama una inversión anti-didáctica (Freudenthal, 1973) concibiendo la idea de las matemáticas como actividad y no como un sistema listo para usar. La actividad central es la matematización, que significa organizar las soluciones a problemas propuestos desde una perspectiva matemática, proceso que conlleva una reinención de las matemáticas (Gravemeijer y Doorman, 1999).

La EMR no pretende ser una teoría general de aprendizaje, se trata de una teoría global, que se fundamenta en ideas centradas en el cómo y en el qué de la enseñanza de las matemáticas (Alsina, 2009). Así mismo, busca desarrollar la adquisición de herramientas matemáticas y la comprensión de conceptos en los estudiantes a través de la resolución de problemas que tengan sentido para ellos, estas son, situaciones matemáticas realistas, como las denomina la misma teoría, en el sentido de representables e imaginables para ellos.

En este sentido Van den Heuvel-Panhuizen (2003), aclara que:

Por una parte, el adjetivo “realista” concuerda definitivamente con la forma de ver la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas dentro de la EMR, pero por la otra, este término también puede dar lugar a confusión. En holandés, el verbo “zich realiseren” significa “imaginar”. En otras palabras, el término “realista” se refiere más a la intención de ofrecer a los estudiantes situaciones problema que ellos puedan imaginar que a la “realidad” o autenticidad de los problemas. Sin embargo, esto último no significa que la relación con la vida real no sea importante. Sólo implica que los contextos no están necesariamente restringidos a situaciones de la vida real. El mundo de fantasía de los cuentos de hadas, e incluso el mundo formal de las matemáticas, son contextos idóneos para problemas, siempre y cuando sean “reales” en la mente de los estudiantes (p.10).

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Según Bressan, Zolkower, y Gallego (2006) la EMR como teoría global se basa en las siguientes ideas que Freudenthal, llama “herramientas conceptuales para una teoría de la educación matemática” (Freudenthal, 1991).

- Pensar en la matemática como una actividad humana (matematización), de modo tal que debe existir una matemática para todos.
- Aceptar que el aprendizaje es un proceso discontinuo de matematización progresiva que pasa por distintos niveles donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante para favorecer el paso de un nivel a otro.
- El desarrollo del proceso de aprendizaje se lleva a cabo por el proceso didáctico denominado reinención guiada, proceso en el cual los estudiantes reinventan las matemáticas a partir de la organización o estructuración de situaciones problemas en interacción con sus pares y bajo la guía del docente, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva.

Desde el punto de vista curricular, la reinención guiada de la matemática en tanto actividad de matematización requiere de la fenomenología didáctica como metodología de la investigación. Es decir, la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente tomando en consideración los fenómenos que estén presentes en el mundo en el que viven los estudiantes a los cuales se les pretende enseñar (Freudenthal, 1983), siendo las dos fuentes principales de esta búsqueda la historia de la matemática y las invenciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes.

A partir de lo anterior es importante definir cada uno de los conceptos que, usualmente, son denominados principios de la EMR:

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

**3.1.1 Matemización.** Freudenthal (1971) concibe la idea de las matemáticas como una actividad humana.

Para él, las matemáticas son la actividad de plantear y resolver problemas, más explícitamente, la actividad de organizar la matemática desde la realidad. Freudenthal explica que “no hay matemáticas sin matematización” (Freudenthal, 1973, p. 134). Según su punto de vista, la mejor forma de aprender matemáticas es haciendo, y la matematización es el sentido central de la educación matemática.

“Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible, el de matematizar las matemáticas” (Freudenthal, 1968, p.7). Matematizar será la actividad de los estudiantes que involucra (Freudenthal, 1991):

- Reconocer características esenciales en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos.
- Crear espontáneamente nuevos objetos mentales y operaciones.
- Descubrir características comunes, similitudes, analogías e isomorfismos.
- Ejemplificar ideas generales y generalizar paradigmas
- Buscar atajos, abreviar estrategias y simbolizaciones iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas.
- Reflexionar acerca de la actividad matematizadora, considerando los fenómenos en cuestión desde diferentes perspectivas.

Treffers (1987) formuló la idea de dos formas de matematización; i). La matematización horizontal como el proceso en la cual los estudiantes presentan herramientas que pueden ayudar a organizar y resolver un problema del mundo real, esto es, traducir al mundo matemático una situación del “mundo real”, comprendiendo así las relaciones entre el lenguaje cotidiano y el

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

matemático, ii). La matematización vertical como el proceso de reorganización dentro del propio sistema matemático, esto es, encontrar atajos, probar regularidades, descubrir conexiones y estrategias para luego usar dichos descubrimientos, acciones que llevan a procesos tales como argumentación y generalización, en términos de Freudenthal (1991) moverse dentro del mundo de los símbolos.

La actividad fundamental de los estudiantes es matematizar, y de forma análoga la de los profesores es didactizar (Freudenthal, 1991). Según Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower, (2016) es entendida como una actividad organizadora que se da tanto a nivel horizontal como a nivel vertical. Horizontalmente, los docentes trabajan en torno a fenómenos de enseñanza-aprendizaje que surgen en el aula, y verticalmente reflexionan y generalizan a partir de estas situaciones hasta reinventar su propia “caja de herramientas didácticas” para facilitar la matematización. El papel que debe desempeñar el docente es, por tanto, proveer de un ambiente de aprendizaje, el conjunto de problemas, actividades y contextos.

**3.1.2 Niveles de Matematización.** Otra característica propuesta por la EMR es que los estudiantes pasan por diferentes niveles en los cuales se puede llevar a cabo la matematización. Según Van den Heuvel-Panhuizen (2003) estos se dan, desde concebir situaciones informales conectadas con el contexto hasta alcanzar un nivel de esquematización, y finalmente tener una visión de los principios generales detrás de un problema.

Esto se refleja en la “matematización progresiva” en la que los modelos, interpretados ampliamente, son vistos como vehículo para obtener y apoyar dicho progreso. Así mismo, es un puente para el paso entre el conocimiento informal, conectado a la “realidad” e imaginado, y el conocimiento formal.

Una característica esencial de los niveles de matematización (Figura 1), es que la actividad matemática en un nivel inferior se convierte en un objeto de indagación en un nivel superior,

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

de tal manera que las acciones organizativas llevadas a cabo inicialmente de manera informal en un nivel inferior, se vuelven acciones más formales en un nivel superior, en términos de Freudenthal (1991, p. 98) “en el siguiente nivel esta actividad se hace consciente y puede convertirse en un tema de reflexión”.

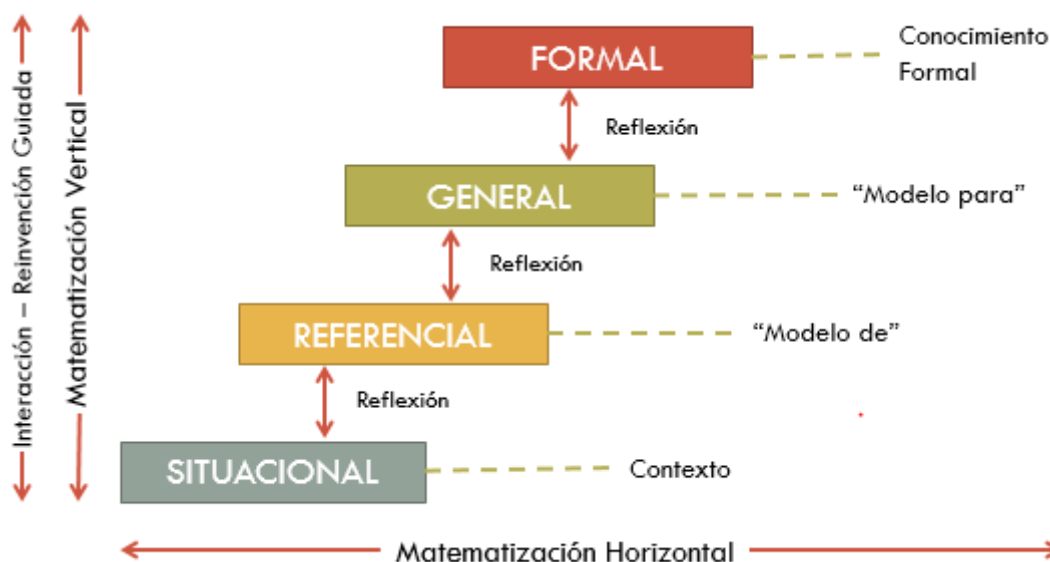


Figura 1. Niveles de Matematización. Adaptado de Bressan, Gallego, Pérez, y Zolkower (2016) La Corriente Realista de Didáctica de la Matemática. Experiencias de un Grupo de Docentes y Capacitadores. *Yupana* 3 (06), 11-33.

Streefland (1985) aclara cómo los modelos pueden cumplir la función de puente entre el nivel informal y el formal: pasando de un "modelo de" a un "modelo para".

Esto significa que, al comienzo de un proceso de aprendizaje, un modelo se constituye en una conexión muy cercana a la situación del problema en cuestión, y más adelante el modelo específico del contexto se generaliza sobre las situaciones y se convierte en un modelo que se puede utilizar para organizar situaciones relacionadas, problemas nuevos y razonar matemáticamente. En esa segunda etapa, las estrategias que se aplican para resolver un problema ya no están relacionadas con esa situación específica, sino que reflejan un punto de vista más general (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p. 14).

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

En particular, Gravemeijer (citado en Van den Heuvel-Panhuizen, 2003) muestra que el cambio en los modelos se puede conectar con el proceso de crecimiento matemático de forma general. El realiza una distinción entre "modelo de" y "modelo para", lo cual lo lleva a dividir el nivel intermedio entre el Nivel Situacional y el Nivel Formal, y la comprensión matemática en un Nivel Referencial y General. Los estudiantes pasan por los diferentes niveles realizando dos tipos de matematización: Horizontal y Vertical, y es en ese proceso que los estudiantes construyen nuevas matemáticas (Drijvers et. al, 2013).

Dichos niveles, según Bressan et al. (2016) representan el pasaje de conocimiento informal al formal, caracterizados por distintos tipos de actividades cognitivas y lingüísticas asociadas al uso de diferentes estrategias y modelos.

En el *Nivel Situacional*, los estudiantes se enfocan en el conocimiento de la situación. Está asociado a uso de estrategias ligadas totalmente al contexto de la situación misma y las estrategias que utilizan para dar respuesta a los problemas y/o descubrir la matemática existente en el contexto. Se apoyan en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia. A este proceso se le denomina matematización horizontal.

Los otros niveles están enmarcados dentro de la matematización vertical. Se caracterizan por la búsqueda de fórmulas, prueba de regularidades, formulación de un concepto nuevo, generalización, evolución y ajuste de modelos, entre otros.

En el *Nivel Referencial* aparecen las representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema; siempre referidos a la situación particular. De allí que los modelos se consideren como modelos de.

El *Nivel General* se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo que apareció en el nivel anterior. Da lugar al surgimiento de aspectos generalizables que son

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

utilizables en un conjunto de problemas, donde las estrategias encontradas superan la referencia al contexto, permitiendo que surjan modelos para la resolución.

El *Nivel Formal* comprende los conceptos, procedimientos, utilización de conceptos, y notaciones convencionales, propias de la rama de la matemática, que hacen parte de la matemática vinculada al contexto que se venía trabajando.

El ascenso de un nivel a otro nivel de matematización más avanzado se logra a través de la reflexión de lo obtenido en el nivel anterior, esta reflexión puede darse por la interacción entre estudiante-estudiante; estudiante-docente. En este sentido, los modelos son un recurso importante para cerrar la brecha entre el conocimiento informal, relacionado con los contextos, y el conocimiento formal, esto es, el paso de un nivel de comprensión a otro.

Los modelos son representaciones de situaciones problema que reflejan aspectos fundamentales de conceptos y estructuras matemáticas relevantes que pueden tener diversas manifestaciones (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Materiales de clase, bosquejos, situaciones, esquemas, diagramas y símbolos son modelos dentro de la teoría (Gravemeijer, 1994).

Freudenthal (1991) aclara “modelo es simplemente un intermedio a menudo indispensable, a través de la cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal” (p.34). Este término no se refiere a modelos preconstruidos e impuestos desde la matemática formal sino a modelos emergentes, son “inventados” por los estudiantes y nunca por los profesores y guardan relación con los niveles. Su función es salvar la brecha entre la comprensión informal conectada con la realidad “real” e imaginada, por una parte, y la comprensión de los sistemas formales por otra (Gravemeijer, 1994).

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Al principio de un determinado proceso de aprendizaje se constituye un modelo en estrecha relación con la situación problema en cuestión, más adelante el modelo específico del contexto se generaliza sobre las situaciones y se convierte en un modelo que puede utilizarse para organizar situaciones relacionadas, problemas nuevos y razonar matemáticamente (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Según Drijvers et al. (2013) los modelos emergentes pueden ser una heurística de diseño fructífero para el diseño digital. Similar a los diseños de papel y lápiz, dichos modelos deben prestarse para el desarrollo del aumento de la abstracción y la complejidad, pero en este caso deben ser respaldados por las herramientas digitales disponibles.

**3.1.3 Reinención guiada e interacción.** No se espera que los estudiantes reinventen todo por sí mismos, el énfasis está en el carácter del proceso de aprendizaje más que en la invención como tal. La idea es permitir que los estudiantes vean el conocimiento que adquieren como su propio conocimiento, del cual ellos mismos son responsables.

La reinención guiada es el papel que desempeña el docente en el aula, conjugando roles y responsabilidades, como guía del proceso de descubrimiento del estudiante, a través de una forma de interacción, donde se prioriza la iniciativa de los estudiantes para que los modelos y su evolución se logre del modo más natural posible. entendiéndose como “un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar” (Freudenthal, 1991).

En cuanto al uso de las tecnologías digitales, Drijvers et al. (2013) ven la reinención en el sentido de que las tecnologías digitales ofrecen oportunidades para la exploración e investigación, lo que da lugar a ella. Además, el presentar ejemplos inesperados puede verse como una forma de invitar a la reinención.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

La interacción entre los estudiantes, y entre el profesor y los estudiantes, provoca que cada miembro del proceso de aprendizaje reflexione a partir de las reinenciones de los demás, provocando el paso de un nivel inferior a un nivel superior (Alsina, 2009).

**3.1.4 Fenomenología Didáctica.** Freudenthal (1973) distingue entre varios tipos de fenomenologías: fenomenología pura, fenomenología didáctica, fenomenología genética y fenomenología histórica. No obstante, para un trabajo didáctico en el marco de la EMR es pertinente trabajar en fenomenología didáctica porque, a diferencia de las otras fenomenologías y como característica fundamental, trata los fenómenos que se proponen e intervienen en el ámbito escolar.

Según Bressan et al. (2016) la fenomenología didáctica es un método que consiste en investigar las diversas manifestaciones y usos de un determinado objeto matemático en la realidad, como fenómenos en la vida real. Por lo que se presupone la realización de un análisis fenomenológico, puesto que según Freudenthal (1983), es primordial buscar e investigar fenómenos que pueden ser organizados por conceptos matemáticos a través de un proceso de matematización. El objetivo del análisis fenomenológico didáctico es describir cuáles son los fenómenos en donde el concepto matemático o estructura matemática es el medio de organización a través de un proceso de matematización, y qué relación tiene el concepto o la estructura con dichos fenómenos, así mismo, Freudenthal (1986) señala que en este análisis intervienen los fenómenos presentes en el mundo de los estudiantes a los que se les pretende enseñar.

Gavemeijer y Terwuel (2000) señalan que “el objetivo de una investigación fenomenológica es, por lo tanto, encontrar situaciones problema a partir de las cuales se puedan generalizar enfoques específicos, y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización vertical” (p. 12).

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Dicho análisis busca establecer cuáles son los fenómenos que se organizan con el concepto o estructura matemática y cómo éstos organizan la matemática misma, motivo por el cual, la realización de dicho análisis permite aportar al diseño de situaciones problemáticas realistas que permitan la creación de modelos y la abstracción de estos, creando una posibilidad a los estudiantes de transitar por y hacia niveles más altos de matematización.

Así mismo, el análisis fenomenológico tiene como propósito mostrar la vinculación de conceptos y estructuras matemáticas con ciertos fenómenos que están en su origen, y que están vinculados con los mundos natural, cultural, social y científico. Esto con la finalidad de dotar de sentido el aprendizaje de dichos conceptos y estructuras.

Algo es considerado como un fenómeno, cuando se tiene experiencia de ello incluyendo los medios de organización matemática (estrategias, notaciones, conceptos, entre otros) considerándose como objetos de experiencia (Bressan citado por Henao y Vanegas, 2012).

Un contexto es un evento, una proposición o situación derivada de la realidad, la cual es significativa para los estudiantes o la pueden imaginar y conduce a usar métodos matemáticos desde su propia experiencia. Provee significado concreto y apoyo para las relaciones y operaciones relevantes de la matemática. Las situaciones podrían ser tomadas desde experiencias cotidianas. Además de los contextos derivados de la experiencia diaria, los contextos pueden encontrarse en la matemática misma – por ejemplo, el mundo de problemas con números y las relaciones numéricas, tales como el contexto de los números primos (Van den Heuvel- Panhuizen citado por Bressan et al., 2016).

Según Drijvers et al. (2013) la fenomenología didáctica también es valiosa para el diseño digital puesto que las tecnologías digitales ya forman un “mundo” significativo para el estudiante, además del mundo de las matemáticas.

## 4. Proceso Metodológico

En este capítulo describimos el proceso metodológico de la investigación, la cual es de corte didáctico y cognitivo. Para el análisis de los datos se empleó una metodología cualitativa que nos permitiera reconocer los niveles de matematización logrados por estudiantes de un curso de Cálculo Integral que estudian el Teorema Fundamental del Cálculo.

Se describen las fases realizadas durante la investigación, la cual inicia con el Análisis Fenomenológico Didáctico del TFC, continua con el diseño y análisis de la secuencia de tareas enmarcadas en cada situación matemática realista y finaliza con la selección de los casos de estudio y el análisis de datos. A continuación, se describen las siete fases en las que fue estructurado el proceso metodológico de la investigación, las cuales se resumen en el esquema presentado a continuación (Figura 2)

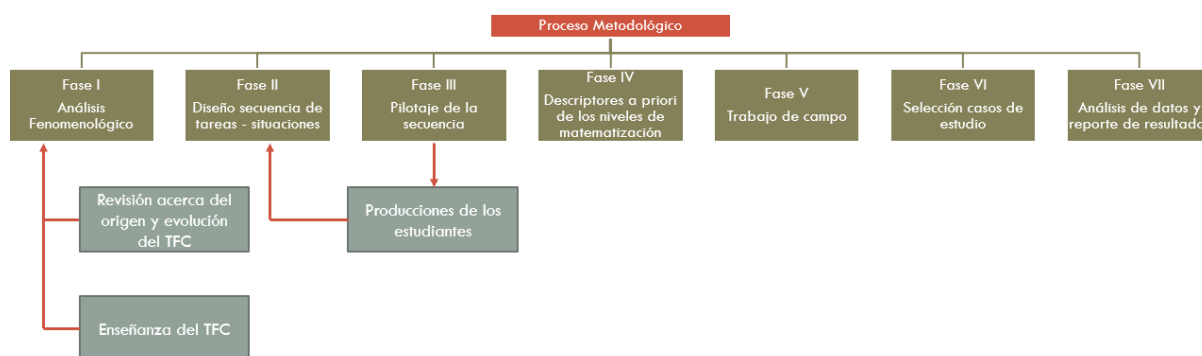


Figura 2. Esquema Proceso Metodológico

### 4.1 Fase I: Análisis Fenomenológico Didáctico

La exploración fenomenológica del Teorema Fundamental del Cálculo tiene como propósito reconocer los fenómenos que dieron origen al descubrimiento de la relación inversa entre los problemas de cuadraturas y tangentes, estos son, procesos de integración y derivación respectivamente, estudiar sus desarrollos y variación de significado, así como la forma en que dichos procesos se entrelazan para organizar fenómenos de naturaleza diversa.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

**4.1.1 Revisión acerca del origen y evolución del Teorema Fundamental del Cálculo.** Para la construcción de este apartado, se tienen en cuenta investigaciones, libros y artículos científicos en los cuales resaltamos autores como Boyer (1949), Edwards (1979), Artigue (1995), Villalba (2002), Ímaz y Moreno (2010), Fernández (2011), (Ponce, 2013), Guerrero, Rodríguez y Hernández (2014) entre otros.

Con una revisión previa acerca del desarrollo epistemológico del Cálculo pudimos observar que en los fenómenos físicos estudiados por Nicolás Oresme y Galileo Galilei y los fenómenos de área y volumen estudiados principalmente por Bonaventura Cavalieri se evidencia la relación inversa entre derivada e integral, donde científicos tales como Isaac Barrow, Isaac Newton y Gottfried Leibniz, a partir de la síntesis y aportes considerables a los trabajos realizados con respecto a los problemas de cuadraturas y tangentes, reconocen con claridad la reciprocidad que existe entre dichos problemas.

Sin embargo, no son los únicos ni los primeros en darse cuenta de dicha relación ni tampoco los que enuncian ni reconocen el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) como lo conocemos hoy día (Ponce, 2013).

Por lo anterior, nos centramos en la descripción de los fenómenos históricos que dan cuenta, en términos actuales, de la relación existente entre derivada e integral, así como la presentación sintética de las versiones del TFC dadas por Barrow, Newton y Leibniz.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

*4.1.1.1 Movimiento, áreas y volúmenes en la historia.* De acuerdo con Boyer (1949) para realizar demostraciones geométricas, Nicolás Oresme utiliza lo que hoy en día se conoce como el sistema de coordenadas, considerando una línea recta perpendicular a una segunda línea recta, donde la línea horizontal o longitud representa el tiempo o duración de una velocidad y la altura o latitud vertical, la intensidad de la velocidad, siendo esta consideración un avance notable en el análisis matemático puesto que asocia el estudio de la variación con el uso de un sistema de coordenadas.

Oresme es el primero en representar la velocidad instantánea mediante una línea recta, aclarando la idea de que a mayor velocidad mayor será la distancia recorrida si el movimiento continúa a esa velocidad.

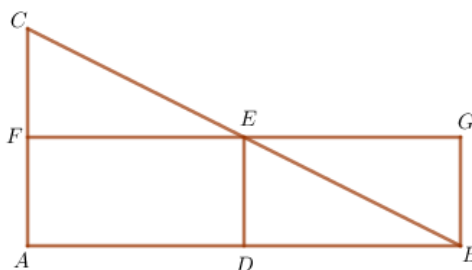
Galileo Galilei introduce una noción completamente nueva de aceleración considerando no solamente la aceleración en general sino la aceleración uniforme:

Si la aceleración es uniforme entonces la velocidad es uniformemente deforme; pero si la aceleración es deforme, entonces la velocidad es deformedemente deforme... Oresme fue más allá y aplicó la idea de razón de cambio uniforme y de representación gráfica a la proposición de que la distancia recorrida por un cuerpo empezando del reposo y moviéndose con una aceleración uniforme es la misma distancia que recorrerá el cuerpo si se moviera en el mismo intervalo de tiempo con velocidad uniforme igual a la mitad de la velocidad final (Boyer, 1949, p. 83).

Oresme realiza la demostración geométrica de la equivalencia anterior utilizando semejanza de triángulos (Figura 3), donde el movimiento con velocidad uniforme es representado por el rectángulo  $ABGF$  en la cual la magnitud de la velocidad es siempre la misma y el movimiento con aceleración uniforme donde el cambio entre la latitud (velocidad) y la longitud (tiempo) es constante, corresponde al triángulo  $ABC$ , concluyendo, por medio de la semejanza del triángulo

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

$CFE$  con el triángulo  $EBG$ , que las distancias recorridas son equivalentes, sin referirse explícitamente a que las áreas  $ABGF$  y  $ABC$  representan en cada caso la distancia recorrida. Sin embargo, se presupone que la distancia recorrida corresponde al área bajo la curva velocidad-tiempo por el uso de la congruencia de triángulos a pesar de que Oresme no explica esta equivalencia (Boyer, 1949).



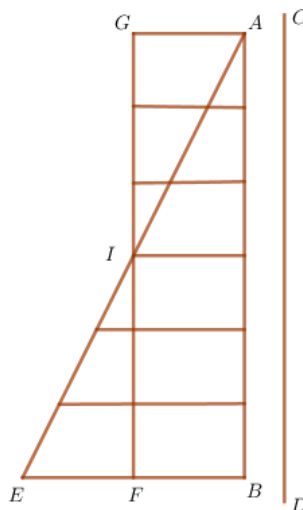
*Figura 3.* Velocidad y aceleración uniformes Oresme. Adaptado de Boyer (1949). Historia de la matemática. Madrid: Alianza Editorial.

Según Boyer (1949) esta es la primera vez que se considera que el área bajo una curva representa una cantidad física y de acuerdo las opiniones dadas acerca de las velocidades instantáneas, se presupone que Oresme hace referencia al área compuesta por un gran número de líneas verticales o indivisibles donde cada una representa una velocidad que continua durante un tiempo muy pequeño, ideas que son utilizadas varios siglos más tarde.

Galileo Galilei presenta un razonamiento similar al presentado por Oresme que relaciona el área bajo una curva tiempo-velocidad con la distancia (Figura 4). Considera  $AB$  el tiempo en el que un cuerpo atraviesa el espacio  $CD$  que inicia del reposo y acelera uniformemente, la velocidad final es representada por  $EB$  y las líneas paralelas a esta representan las velocidades del cuerpo, siendo interpretadas como los momentos o incrementos infinitesimales en la distancia recorrida por el cuerpo, por tanto, las líneas en el triángulo  $AEB$  corresponden al movimiento del cuerpo uniformemente acelerado y las líneas en el rectángulo  $ABFG$  corresponden al movimiento de cuerpo que se mueve uniformemente. La suma de los segmentos contenidos en el rectángulo  $ABFG$  es igual a la suma de los segmentos contenidos

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

en el triángulo  $AEB$ , esto es, el área del triángulo es igual al área del rectángulo, por lo tanto, las distancias recorridas por los dos cuerpos son iguales. Galileo, a diferencia de Oresme, considera los momentos o pequeños incrementos de la distancia como las líneas dentro del triángulo y el rectángulo (indivisibles) sin aclarar la transición de la interpretación de las líneas como velocidades a las líneas como momentos (Boyer, 1949).



*Figura 4.* Velocidad y aceleración uniformes Galileo. Adaptado de Boyer (1949). Historia de la matemática. Madrid: Alianza Editorial.

Bonaventura Cavalieri adopta las ideas de Galileo con respecto a los indivisibles, pero dándoles un sentido geométrico. Su obra “*Geometria Indivisibilibus Continuum*” publicada en 1635, no explicita con precisión lo que entiende por indivisible, sin embargo, se refiere a estas como líneas paralelas equidistantes dentro de una superficie y planos paralelos equidistantes dentro de un sólido, designándolos como indivisibles de la superficie y el volumen, respectivamente. Plantea varios teoremas referentes a las líneas de un paralelogramo y las de sus triángulos constituyentes (Figura 5) y demuestra, a través de la comparación de los indivisibles  $GH$  y  $FE$  y la suma de todas los indivisibles formados en cada triángulo, que si un paralelogramo  $ABCD$  se divide por la diagonal  $DB$  en dos triángulos  $ABD$  y  $BCD$  entonces el área del paralelogramo es el doble del área de cualquiera de los triángulos (Boyer, 1949).

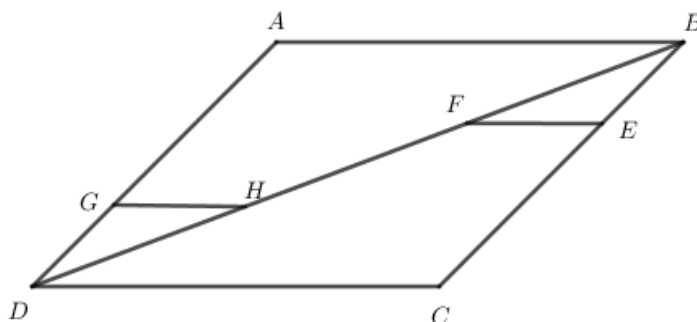


Figura 5. Indivisibles Cavalieri. Adaptado de Boyer (1949). Historia de la matemática. Madrid: Alianza Editorial.

4.1.1.2 *El Teorema Fundamental del Cálculo en Barrow, Leibniz y Newton.* Isaac Barrow fue uno de los primeros en dar una demostración geométrica acerca de la relación que existe entre los problemas de cuadraturas y tangentes, en la cual establece que, para trazar la recta tangente a una curva, esta recta tangente debe estar relacionada con la cuadratura de la curva original (Ponce, 2013).

En términos actuales (Figura 6), dado el segmento  $AC$  que representa el eje de abscisas donde toma valores  $x$ , un punto de abscisa  $C$  y las curvas  $f(x)$  y  $g(x)$ , donde  $g(x)$  representa el valor del área comprendida por la gráfica de  $f(x)$  entre  $A$  y  $x$ , Barrow prueba geoméricamente que la pendiente de la recta tangente a  $y = g(x)$  en el punto  $F = (C, g(C))$  es igual a  $f(C) = CD$ , equivalentemente, Barrow resuelve el problema de trazar una tangente a una curva cuando ésta es la cuadratura de otra curva. En términos modernos, lo que Barrow prueba es que

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_0^x f(t) dt \right] = f(x), \quad \text{con } x \in [0, a]$$

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

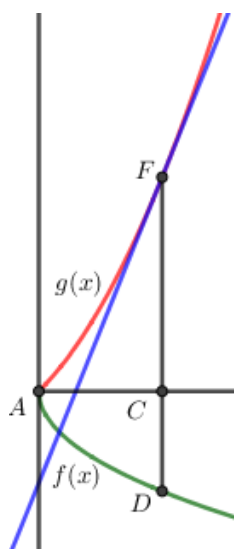


Figura 6. Diagrama Barrow. Adaptado de Ponce (2013). El Teorema Fundamental del Cálculo: un estudio sobre algunos conceptos, fórmulas y métodos relacionados con su aplicación. (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México D.C, México.

Gottfried Leibniz en su artículo publicado en 1693 en *Acta Eruditorum* menciona “demostraré ahora que el problema general de cuadraturas puede ser reducido al de encontrar una línea que tiene una ley de tangencia dada” (Leibniz, Citado por Ponce, 2013, p. 12). Esto es, Leibniz demuestra que si se tiene una función  $f(x)$  y una curva con una ley de tangencia dada, entonces la cuadratura de  $f(x)$  corresponderá a dicha curva.

En términos modernos (Figura 7) Leibniz demuestra (Ponce, 2013, p.14):

Si  $f$  es una función continua, creciente y positiva, definida en el intervalo  $[0, a]$  tal que  $f(0) = 0$  y  $F$  es una función que cumple con la propiedad de que la pendiente de la recta tangente en cada punto  $x \in [0, a]$  es igual a  $f(x)$ , es decir, la derivada  $F'(x) = f(x)$  para cada  $x \in [0, a]$ , entonces el área bajo la función  $f$  en el intervalo  $[0, a]$  está dada por la diferencia  $F(a) - F(0)$ , esto es,

$$\int_0^a f(x) dx = F(a) - F(0)$$

$$\text{donde } F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, a]$$

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

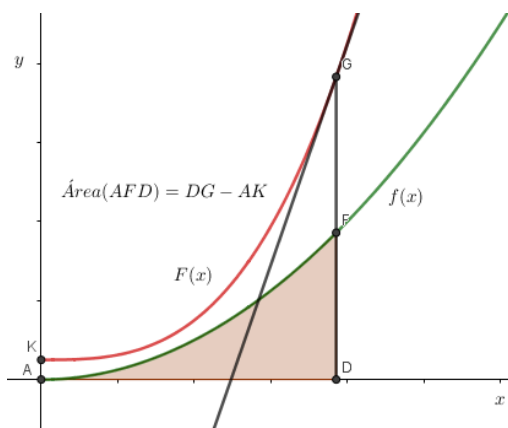


Figura 7. Diagrama sintético Leibniz. Adaptado de Ponce (2013). El Teorema Fundamental del Cálculo: un estudio sobre algunos conceptos, fórmulas y métodos relacionados con su aplicación. (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México D.C, México.

Isaac Newton aborda el problema de cuadraturas en su trabajo “De analysi per aequationes numero terminorum infinitas” calculando el área bajo curvas de la forma  $y = ax^{\frac{m}{n}}$  (Ponce, 2013).

De acuerdo con Ponce (2013) Newton considera una relación arbitraria entre el área  $ABD = z$  y  $AB = x$  con el objetivo de encontrar el valor de  $BD = y$  a través del uso de un incremento  $o = bB$  y un valor  $v = BK$  de tal forma que el área  $BbHK$  sea igual al área  $BbdD$  (Figura 8). Comparando el cambio del área  $z$  cuando  $x$  tiene un incremento  $x + o$ , deduce que la curva  $AD$  debe satisfacer la ecuación  $y = ax^{m/n}$ . En esencia, Newton deriva la función área (integral definida) y establece, de forma inversa:

$$\text{Si } y = ax^{\frac{m}{n}} \text{ entonces } z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$$

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

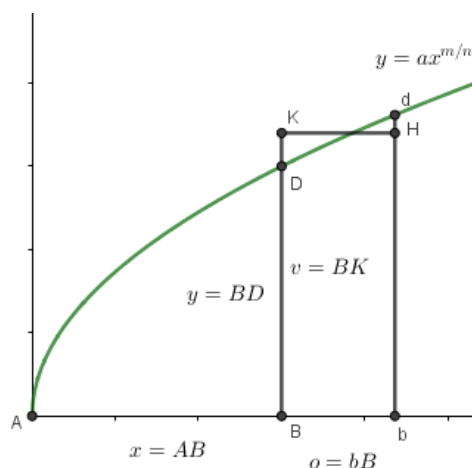


Figura 8. Diagrama sintético Newton. Adaptado de Ponce, (2013). El Teorema Fundamental del Cálculo: un estudio sobre algunos conceptos, fórmulas y métodos relacionados con su aplicación. (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México D.C, México.

En términos modernos Newton establece si  $y = ax^{m/n}$ , entonces el área de la región  $ABD$  es  $\frac{an}{m+n} x^{(m+n)/n}$ , esto es

$$\int_0^x at^{\frac{m}{n}} dt = \frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$$

**4.1.2 Acerca de la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo.** Ponce (2013), resalta la existencia de una problemática respecto de la comprensión del TFC por parte de los estudiantes, la cual ha sido ampliamente investigada, donde se reportan, entre otros factores, el conocimiento limitado de los conceptos de función (Carlson, 1998; Oehrtman, Carlson, & Thompson, 2008), la incomprensión de la idea de razón de cambio y razón de acumulación (Carlson, Person, & Smith, 2003); Thompson (1994); Thompson & Thompson (1994) y Thompson & Silverman (2008), la falta de habilidad con respecto al razonamiento covariacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002) y el orden en el cual son presentadas las dos partes que componen el TFC en los cursos elementales de Cálculo (Toumasis, 1993).

Así mismo, muestra que otro factor influyente en la comprensión del TFC depende de la organización misma de los conceptos de derivada, integral definida e indefinida. En ese

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

sentido, mencionan que la organización de los contenidos depende de al menos tres factores, los planes y programas de estudio, las preferencias de los profesores y el libro de texto que se adopte (si es que se adopta alguno).

Ponce (2013) considera conveniente enseñar primero la derivada, después la integral definida y posteriormente el TFC para finalmente desarrollar métodos de integración, puesto que así el cálculo de primitivas toma sentido. Sin embargo, nuestro objeto de estudio no se enfoca en el cálculo de primitivas, puesto que, precisamente, este es un uso práctico del TFC, sino en la esencia del mismo y la relación entre los procesos de diferenciación e integración dados en este.

En la Universidad Industrial de Santander, la enseñanza del Cálculo Diferencial sigue el orden sugerido por Ponce (2013), en el curso de Cálculo Diferencial se estudia las funciones, límites y derivadas, posteriormente, en el curso de Cálculo Integral se estudia las antiderivadas, áreas y distancias, seguidamente la integral definida y el Teorema Fundamental del Cálculo (Figura 9), al cual se le dedican 2 horas de las 70 horas que componen el curso de Cálculo Integral.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

**CÁLCULO II (20253):** Cálculo integral de funciones de una variable  
**PROGRAMA**

Coordinador: Arholdo R. Teherán H. (ateheran@uis.edu.co)

CLASE	SECCIÓN	TEMA	EJERCICIOS
1		PRESENTACIÓN GENERAL DEL CURSO	
2	4.9 y 5.1	Antiderivadas, Áreas y distancias	p. 345: 6,12,20,22,30,42,46,50,52,67; p. 364: 4,12,16,18,21,22,24
3	5.2	La integral definida	p. 377: 6,10,12,16,24,26,30,37,50,62
4	5.3	El Teorema Fundamental del Cálculo	p. 388: 10,14,28,29,38,42,46,50,60,74
5	5.4	Integrales indefinidas y el teorema del cambio total	p. 397: 12,18,26,34,38,48,50,52,61,66
6	5.5	La regla de la sustitución	p. 406: 18,22,38,42,50,63,68,74,76,80
7	6.1	Áreas entre curvas	p. 420: 4,19,24,31,34,36,42,45,48,52
8		PRIMER EXAMEN	PROGRAMADO POR CADA PROFESOR

Figura 9. Contenido Cálculo Integral primer corte - UIS

El libro guía sugerido para el curso de Cálculo Integral es “Cálculo de varias variables, trascendente tempranas, 6a Edición” (Stewart, 2008). En la sección correspondiente al TFC

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

(Figura 9) éste se presenta en dos partes, donde cada parte se enuncia, se demuestra y se realizan a los sumo tres ejercicios algorítmicos que muestran el uso práctico de las dos partes del TFC, finalizando la sección con la unión de las dos.

Con respecto a los ejercicios propuestos se evidencia que hacen énfasis en procesos algorítmicos, esto es, en el uso práctico de las dos partes del TFC en el cual se enfatiza en el cálculo algebraico de la derivada de funciones integrales y la integral de funciones derivadas. A pesar de que antes de estudiar el TFC se realiza un estudio de los problemas de áreas y distancia, éstos no se utilizan para la introducción intuitiva de la relación existente entre los problemas de cuadraturas y tangentes, puesto que la presentación del TFC se realiza de forma aislada a las situaciones problema de encontrar áreas y distancias.

En el libro de texto “El Cálculo, 7ª Edición” (Leithold, 1998) las secciones previas al TFC, ecuaciones diferenciales y movimiento rectilíneo y área, evidencian la relación inversa entre los procesos de integración y diferenciación, siendo situaciones valiosas para la introducción del TFC, sin embargo en la presentación del teorema no se mencionan las situaciones problemas y/o las generalidades encontradas en los mismos, así mismo, los ejercicios propuestos en la sección de estudio del TFC (sección 4.5), al igual que el libro de Stewart, enfatiza en el cálculo de derivadas de funciones integrales e integrales de funciones derivadas, con la salvedad de que agregan dos situaciones problema referidos al Fenómeno de Caída Libre y Lanzamiento vertical.

A diferencia del Leithold (1998), en Larson, Hostetler y Edwards (2010) no se presentan problemas de distancias previo al estudio del TFC (sección 4.4), sin embargo, en la sección 4.2 se plantean problemas del cálculo de áreas sin relación alguna con el TFC, puesto que hacen énfasis en el cálculo de áreas por medio de sumatorias y límites de sumatorias para dar paso a la sección de Sumas de Riemann e integrales definidas.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

En la sección de estudio del TFC, mencionan algunas estrategias para el uso práctico del mismo. En estas estrategias se evidencia el énfasis en los procesos algorítmicos dejando de lado la parte conceptual. Seguidamente, hacen uso del TFC para mostrar su utilidad en el cálculo de áreas sin mostrar en las mismas la relación entre los procesos de integración y derivación.

Con respecto a los ejercicios propuestos, destacamos el hecho de que presentan un problema de movimiento rectilíneo en el que se muestra explícitamente la relación entre las magnitudes variables velocidad y distancia con los procesos de integración y derivación, sin dejar al estudiante explorar las relaciones dadas en dicho fenómeno físico puesto que le dan, en la información del problema, la representación algebraica de la velocidad como la derivada de la posición y la distancia como la integral de la posición.

**4.1.3 Fenómenos, contextos y situaciones.** De acuerdo con la relación inversa entre los problemas de tangentes y cuadraturas, los primeros fenómenos donde se observa dicha relación son aquellos donde están involucradas las variables distancia y velocidad, donde la formulación incipiente del TFC es que la razón de cambio del área bajo una curva es igual a su ordenada (Edwards, 1979). Con respecto a los problemas de áreas a partir de las consideraciones de los indivisibles de Cavalieri, el cual expone la idea fundamental de que un área está formada por segmentos rectilíneos o “indivisibles”, se logra desarrollar procesos para el cálculo del área de figuras planas y el área bajo una curva.

La revisión de los libros de texto utilizados con frecuencia en la enseñanza del Cálculo Integral muestra que las secciones previas al estudio del TFC o en la sección misma se estudian los problemas de áreas y distancias, sin embargo, dichos problemas no son utilizados del todo en la introducción del TFC, puesto que se trabajan sin mostrar la relación entre los procesos de diferenciación e integración presentes en dichos contextos.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

A partir de lo anterior, consideramos pertinente referirnos a ciertos fenómenos, situaciones y contextos (Tabla 1) presentes en la historia y en el contenido de estudio del curso de Cálculo Integral, en los cuales el Teorema Fundamental del Cálculo es un organizador. A partir de dicho análisis, los fenómenos que tendremos en cuenta para el diseño de las situaciones matemáticas realistas son Caída Libre (velocidad y distancia) y Descripción de figuras planas (área y perímetro).

Tabla 1.

*Fenómenos, Contextos y Situaciones – Teorema Fundamental del Cálculo*

	Fenómenos	Situación	Contexto
RELACIÓN ENTRE DERIVADA E INTEGRAL	Descripción de figuras planas y sólidas delimitadas por curvas.	Recta tangente a una curva. Encontrar perímetros, áreas y volúmenes de figuras.	La derivada como pendiente de la recta tangente a una curva. Sumas de Riemann - Integral definida.
	Fenómenos Físicos – Caída libre, movimiento rectilíneo uniforme, movimiento uniformemente acelerado, lanzamiento vertical, entre otros.	Encontrar la velocidad de un objeto en movimiento - dirección del movimiento. A partir de la velocidad (dirección del movimiento) encontrar la distancia.	La derivada como razón de cambio. Integral definida.

Considerando problemas de movimiento con aceleración constante, se tienen fenómenos tales como caída libre, tiro parabólico, entre otros. Teniendo en cuenta que, para lograr la creación de modelos y la abstracción de éstos en la matematización de un concepto matemático es necesario el uso de situaciones problemáticas realistas, en el sentido de representables e imaginables para los estudiantes, decidimos crear situaciones y tareas enmarcadas en el Fenómeno de Caída Libre, puesto que este cumple con las características de los movimientos considerados por Oresme y Galileo, en los cuales de acuerdo con Edwards (1979) la relación entre las curvas velocidad – tiempo y distancia – tiempo muestra que cada una de las curvas proviene de la otra, así mismo “la aplicación del tiempo y los conceptos de movimiento al

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

estudio de curvas condujo a Torricelli y Barrow a una comprensión intuitiva de la relación inversa entre los problemas de tangentes y cuadraturas, esto es, entre las operaciones de diferenciación e integración” (Edwards, 1979, p.138).

Al comparar la velocidad y la distancia del movimiento de una pelota que se suelta desde una altura dada, se tiene que el área bajo la curva velocidad hasta un instante de tiempo corresponde a la distancia recorrida por la pelota desde el momento en que se suelta hasta ese instante de tiempo (Figura 10) y la velocidad instantánea está dada por la razón de cambio instantánea del área bajo la curva velocidad (distancia). De acuerdo con Edwards (1979), en los problemas de movimiento, la idea intuitiva del TFC se refleja en el análisis de la razón de cambio del área bajo la curva velocidad, razón por la cual, en las tareas diseñadas para cada situación matemática realista enmarcada en el fenómeno de caída libre empezamos con esta idea.

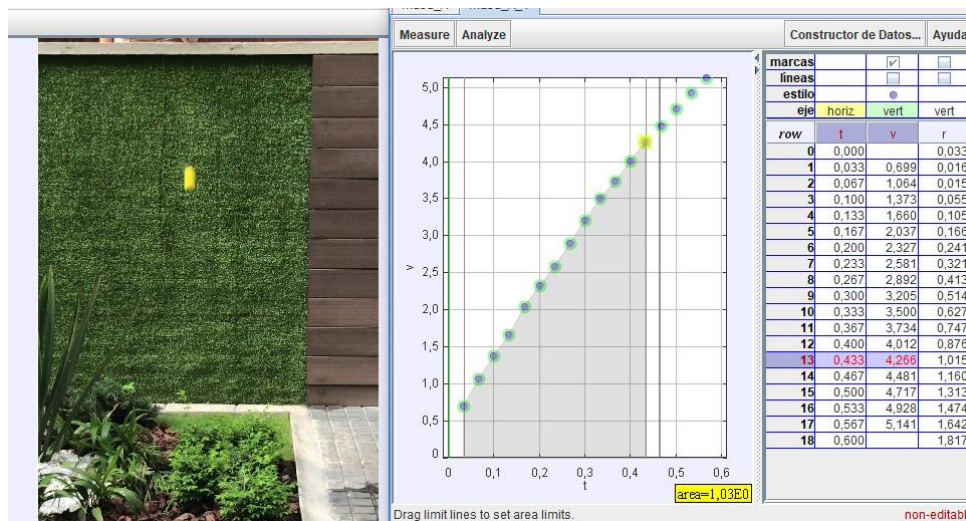


Figura 10. Relación velocidad distancia con integral

Utilizando la idea de Cavalieri, la cual interpretamos como equivalente a la idea de que la sumatoria de los indivisibles formados dentro de una superficie es igual al área de dicha superficie, considerando un círculo y una circunferencia del mismo radio, al comparar el área y perímetro respectivamente, se evidencia que dichas magnitudes están relacionadas con la

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

integral y la derivada. El perímetro de una circunferencia de radio  $x$  corresponde a la pendiente de la recta tangente a la función área de un círculo de radio  $x$  y con el segmento que representa la magnitud de la pendiente de la recta tangente en  $x$  ( $m$ ) se forma la circunferencia de radio  $x$  (Figura 11).

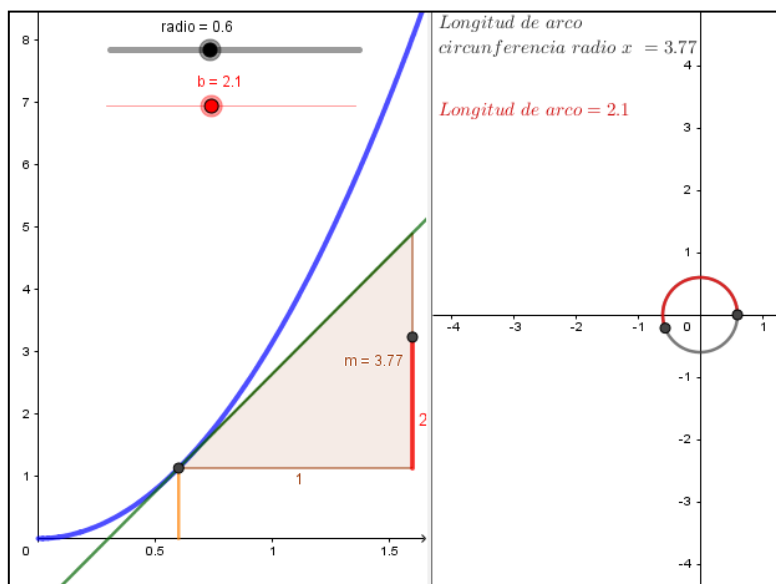


Figura 11. Relación Área perímetro con derivada

El área de un círculo de radio  $x$  corresponde al área bajo la función perímetro de una circunferencia de radio  $x$ . Considerando el área bajo la función perímetro como la sumatoria de los indivisibles, los cuales tienen por magnitud el perímetro de la circunferencia de radio  $x$  y forman una circunferencia del mismo radio, se tiene que la sumatoria de dichos indivisibles equivalen al área del círculo de radio  $x$  (Figura 12).

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

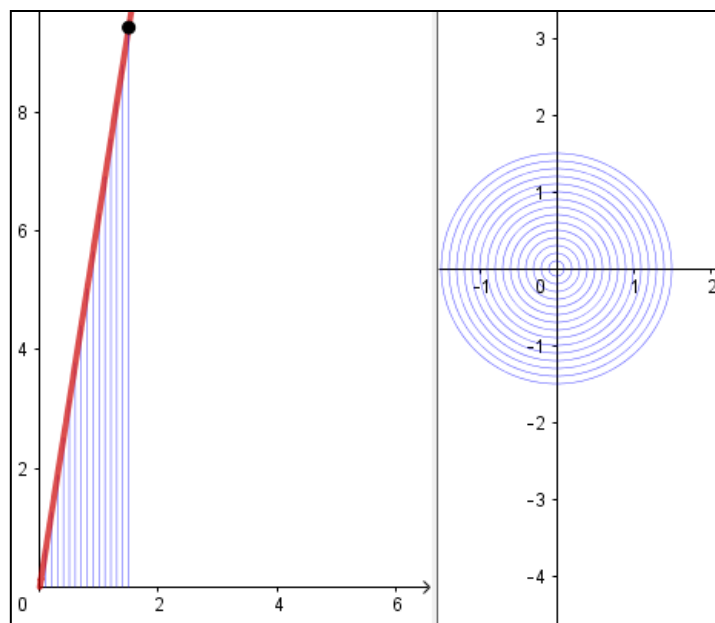


Figura 12. Relación perímetro y área con integral

#### 4.2 Fase II: Diseño de la secuencia de tareas enmarcadas en situaciones matemáticas realistas.

De acuerdo con el análisis fenomenológico, se diseñaron cuatro situaciones matemáticas realistas. Dos de ellas están enmarcadas en el fenómeno de Caída Libre y las otras dos en el Fenómeno de Área y Perímetro.

Para cada situación se diseñó una secuencia de tareas para cada nivel de matematización (Situacional, Referencial y General), donde los estudiantes resolvieron cada situación matemática realista hasta el Nivel General antes de seguir con la siguiente situación. Para que el proceso de interacción y reinención guiada se diera de forma natural, se diseñó una Entrevista Estructurada y Basada en Tareas (Goldin, 2000), la cual consistió en el establecimiento de contingencias y el diseño de tareas y/o preguntas heurísticas para cada contingencia que direccionaran al estudiante en su proceso de reinención. Esta entrevista se evidencia en la sección 4.2.2 Análisis a priori de las tareas diseñadas en cada situación matemática realista enmarcada en el Fenómeno Caída Libre (FCL) y 4.2.4 Análisis a priori de las tareas diseñadas en cada situación matemática realista enmarcada en el Fenómeno Área y Perímetro (FAP).

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Para el primer fenómeno, Caída Libre (FCL), teniendo en cuenta el video de la caída de una pelota de tenis, que se suelta desde 1,817 m de altura (primer piso del edificio Laboratorios Livianos de la UIS), planteamos dos situaciones matemáticas realistas, las cuales consisten en:

- A partir de la velocidad hallar la expresión algebraica que representa la distancia de la pelota desde el punto de lanzamiento para cualquier instante de tiempo  $t$  (Primera Situación).
- A partir de la distancia, hallar la expresión algebraica que representa la velocidad de la pelota para cualquier instante de tiempo  $t$  (Segunda Situación).

Para el segundo fenómeno, Área y Perímetro de una circunferencia (FAP), se diseñaron dos situaciones matemáticas realistas que consisten en:

- A partir del perímetro de una circunferencia de radio  $x$ , halle la expresión algebraica que representa el área del círculo en función del radio ( $x$ ) (Primera Situación)
- A partir del área de un círculo de radio  $x$ , halle la expresión algebraica que representa el perímetro de la circunferencia en función del radio ( $x$ ) (Segunda Situación)

A continuación, se muestra una descripción general de las tareas diseñadas en cada situación matemática realista enmarcada en cada fenómeno y el análisis a priori de las mismas.

### 4.2.1 Fenómeno Caída Libre (FCL)

*4.2.1.1 Nivel Situacional.* En este nivel se espera que los estudiantes identifiquen la relación entre las magnitudes variables velocidad y distancia con las ideas de acumulación de cambio y razón de cambio de la acumulación en intervalos de tiempo, cuál es esa relación y cómo encontrar una magnitud variable conociendo la otra.

Para ello, en la Primera Situación, se espera que los estudiantes identifiquen el comportamiento de la velocidad de acuerdo con la información suministrada por el video de la

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

caída de una pelota, el cual es representado en el software Tracker (Figura 13). Los estudiantes deben recurrir a sus conocimientos previos, intuición, experiencia y el análisis de información tabular del comportamiento de dicha magnitud variable.

A través de la discusión con sus pares y el profesor (investigador), los estudiantes reinventan la situación presentada, a partir de la estructuración y organización de las soluciones dadas por sus compañeros y las tareas diseñadas para cada nivel de matematización. Este momento (interacción y reinención guiada) estará presente a lo largo de las tareas propuestas en la Primera y Segunda Situación.

1. Abra el archivo **Situación\_1.1**, el cual muestra el video de la caída de una pelota de tenis, que se suelta desde 1,817 m de altura (primer piso del edificio Laboratorios Livianos de la universidad). A partir de la velocidad, halle la expresión algebraica que representa la distancia desde el punto de lanzamiento para cualquier instante de tiempo  $t$ .

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*



Figura 13. Primera Situación - FCL

Después de la discusión dada a partir de la solución de la Primera Situación (Figura 13), se plantea una serie de tareas (Figura 14) donde el principal objetivo es que los estudiantes, a partir de la información suministrada en la tabla, conozcan la velocidad de la pelota de acuerdo con el fenómeno de estudio y creen los primeros modelos que representen el comportamiento de la variable velocidad.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

En la hoja de trabajo:

- Describa el comportamiento de la velocidad de la pelota desde el punto de lanzamiento hasta que toca el piso. Explique su respuesta.
- ¿Cuál es la velocidad inicial? Explique su respuesta.
- ¿Cuál es la velocidad final? Explique su respuesta.
- Ubíquese en la parte superior de la pantalla y en la opción Ventana oprima “Vista Derecha”, describa el comportamiento de la velocidad de la pelota desde el punto de lanzamiento hasta que toca el piso. Explique su respuesta.
- Represente gráficamente el comportamiento de la velocidad del movimiento de la pelota a través del tiempo.

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

Figura 14. Tareas dirigidas al surgimiento de modelos gráficos que representen la magnitud velocidad

Posteriormente (Figura 15), las tareas están direccionadas a la creación, por parte de los estudiantes, de modelos algebraicos que representen el comportamiento de la variación de la magnitud velocidad para que sean contrastados con el modelo presentado por el software y los estudiantes noten los desaciertos y/o aciertos dados en la interpretación y predicción del comportamiento de la velocidad.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

1.1 Halle la velocidad de la pelota en los instantes de tiempo dados

Tiempo	Velocidad
0s	
0,031s	
0,05s	
0,145s	
0,28s	
0,34s	
0,48s	
0,6s	
t	

a. En Tracker, ubíquese en la parte superior de la pantalla y en la opción Ventana oprima "Herramienta de Datos... (Analizar...)" y maximice la nueva ventana, oprima el botón *Analyze*, seleccione *Ajustes*. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la velocidad de la pelota?

b. Verifique las velocidades encontradas en el ítem 1.1 ¿son iguales los resultados? ¿por qué?

***Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.***

Figura 15. Tareas dirigidas a la creación de modelos algebraicos que representen el comportamiento de la velocidad

El objetivo de las siguientes tareas (Figura 16), es que los estudiantes descubran la matemática existente en la situación problema por medio de la exploración de la idea de acumulación de cambio de la velocidad en intervalos de tiempo y la distancia recorrida en los mismos intervalos. Se espera que conjeturen que el área bajo la curva velocidad (acumulación del cambio de la velocidad) en intervalos de tiempo es equivalente a la distancia recorrida por la pelota en los mismos intervalos.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

1.2 Con ayuda del archivo anterior,

- En la gráfica de la velocidad contra el tiempo ¿dónde se evidencia el cambio de la variable velocidad con respecto al cambio de tiempo? ¿qué representa geoméricamente la acumulación del cambio de la velocidad con respecto al cambio de tiempo?
- En la ventana “Herramienta de Datos”, oprima el botón **Mesure** y seleccione **Area**. Halle la acumulación del cambio de la velocidad con respecto al cambio de tiempo dado.
 

Intervalo de tiempo	Área
[0,1 ; 0,133]	
[0,2 ; 0,233]	
[0,3 ; 0,333]	
[0,367 ; 0,4]	
[0,4 ; 0,433]	
- Abra el archivo Situación\_1.2, sabiendo que  $r$  representa la distancia recorrida por la pelota desde el punto de lanzamiento a través del tiempo. Halle la distancia recorrida por la pelota en los siguientes intervalos de tiempo.
 

Intervalo de tiempo	Distancia
[0,1 ; 0,133]	
[0,2 ; 0,233]	
[0,3 ; 0,333]	
[0,367 ; 0,4]	
[0,4 ; 0,433]	
- Compare la tabla del ítem *b* con la tabla del ítem *c*, ¿qué relación existe entre los datos contenidos en ellas? Plantee una conjetura y explique ampliamente.

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

Figura 16. Tareas dirigidas al descubrimiento de la relación entre velocidad y distancia con ideas de acumulación de cambio en intervalos de tiempo

En la Segunda Situación (Figura 17), los estudiantes tendrán a su disposición las expresiones algebraicas de la velocidad y distancia de la pelota con respecto al tiempo, dadas a partir de la solución de la Primera Situación hasta el Nivel General, razón por la cual, el objetivo principal, es que resuelvan la situación con ayuda de los presaberes, experiencia e intuición, dando lugar a la discusión de las soluciones dadas por sus compañeros, a la estructuración y organización de estas.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

2. A partir de la distancia, halle la expresión algebraica que representa la velocidad de la pelota para cualquier instante de tiempo  $t$ .

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*




Figura 17. Segunda Situación - FCL

Con estas tareas (Figura 18) se espera que los estudiantes identifiquen, a partir de la comparación de los datos obtenidos en el ítem  $a$  y  $c$ , que la rapidez del cambio promedio del área bajo la curva velocidad (distancia) corresponde a la razón de cambio promedio de la velocidad con respecto al tiempo.

En la ventana "Herramienta de Datos" del archivo anterior, oprima la Ctrl O y abra el archivo **Ventana 1.2**.

a. Cuál es la magnitud aproximada de la velocidad que lleva la pelota en los intervalos de tiempo:

[0,1 ; 0,133]  
 [0,2 ; 0,233]  
 [0,3 ; 0,333]  
 [0,367 ; 0,4]  
 [0,467 ; 0,5]

b. Cuantifique el cambio del área bajo la curva velocidad cuando el tiempo cambia de:

0,1 s a 0,133s  
 0,2s a 0,233s  
 0,3s a 0,333s  
 0,367s a 0,4s  
 0,467s a 0,5s

c. ¿Cuál es la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad en los cambios de tiempo anteriores?

d. Compare los resultados obtenidos en el ítem a con el ítem c ¿Qué puede concluir? Plantee una conjetura. Explique ampliamente sus respuestas.

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

Figura 18. Tareas dirigidas al descubrimiento de la relación entre distancia y velocidad con ideas de variación en intervalos de tiempo

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

*4.2.1.2 Nivel Referencial.* En este nivel, en las dos situaciones, se espera que los estudiantes identifiquen y representen la distancia recorrida como la acumulación del cambio de la velocidad; la velocidad instantánea como la razón de cambio instantánea de la acumulación del cambio de la velocidad (razón de cambio instantánea de la distancia) y la relación existente entre las magnitudes variables distancia y velocidad, con la acumulación del cambio de la velocidad (distancia) y la razón de cambio de la acumulación de la velocidad (velocidad), así como el planteamiento de cómo encontrar una magnitud variable conociendo la otra utilizando modelos algebraicos.

Uno de los objetivos de las tareas planteadas en la Primera Situación en este nivel (Figura 19), correspondientes a la continuación del ítem 1.2 (Figura 16), es que los estudiantes identifiquen que la distancia recorrida en un instante de tiempo  $t$  corresponde al área bajo la curva velocidad en el intervalo de tiempo de 0 a  $t$  segundos, y conjeturen la relación entre la distancia y la velocidad a partir de la exploración de las ideas de acumulación del cambio de la velocidad en cualquier instante de tiempo  $t$ .

Basados en los resultados obtenidos en las tareas planteadas en esta situación para el Nivel Situacional, se espera que los estudiantes representen lo observado gráfica y algebraicamente.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

- e. ¿Qué relación existe entre el área bajo la curva velocidad y la distancia recorrida en un instante de tiempo? Plantee una conjetura y explique ampliamente.
- f. De acuerdo con la conjetura planteada, halle la distancia de la pelota a partir de la velocidad en cualquier instante de tiempo  $t$ . Justifique ampliamente sus respuestas.
- g. Realice el análisis de regresión de los puntos que representan la distancia de la pelota con respecto al tiempo, para ello, des-seleccione la opción Mesure - Area, ubíquese en  $r$  y con clic sostenido trasládela al lado derecho de la columna  $t$  y des-seleccione la opción marcas en la columna  $v$ . Compare los resultados obtenidos en el ítem anterior con los dados por el software. ¿Qué puede concluir? Explique ampliamente sus respuestas y represente gráficamente los sucesos del ítem e y f.

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

Figura 19. Tareas dirigidas a la creación de modelos algebraicos y gráficos de la relación entre distancia y acumulación de cambio

En la Segunda Situación, las tareas diseñadas (Figura 20), correspondientes a la continuación de las tareas planteadas en la Figura 18, tienen como objetivo que los estudiantes identifiquen y representen algebraicamente que la razón de cambio instantánea de la acumulación del cambio de la velocidad en un instante de tiempo  $t$  corresponde a la velocidad en dicho instante de tiempo y conjeturen la relación entre la distancia y la velocidad a partir de la exploración de las ideas de variación de acumulación del cambio de la velocidad en cualquier instante de tiempo.

Se espera que los estudiantes representen gráficamente la relación entre la velocidad promedio y la razón de cambio promedio de la distancia; y la relación entre la velocidad instantánea y la razón de cambio instantánea de la distancia.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

- e. Si los intervalos de tiempo se hacen cada vez más pequeños, ¿qué sucede con la razón de cambio del área con respecto al tiempo (rapidez)? Explique ampliamente y plantee una conjetura.
- f. Halle la velocidad de la pelota a partir de la distancia en cualquier instante de tiempo  $t$ . Compare el resultado con la velocidad encontrada en la primera situación, ¿Qué puede concluir?
- g. En la gráfica del área bajo la curva velocidad con respecto al tiempo (distancia con respecto al tiempo) ¿qué representa geoméricamente la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea?
- h. Represente gráficamente los sucesos del ítem d y e.
- Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.**

Figura 20. Tareas dirigidas al surgimiento de modelos algebraicos y gráficos de la relación entre la velocidad y la razón de cambio instantánea de la distancia

4.2.1.3 Nivel General . En este nivel (Figura 21) se espera que los estudiantes generalicen lo encontrado en el Nivel Referencial, que planteen una conjetura acerca de la relación existente de forma general entre distancia-velocidad y velocidad-distancia con los objetos matemáticos pertinentes de acuerdo con la asociación de las ideas de variación - derivada y acumulación - integral y a partir de esto, encuentren y representen la relación entre cantidad variable, acumulación de cambio (integral) y razón de cambio instantánea de acumulación (derivada).

3. Plantee una conjetura acerca de la relación, en general, entre distancia-velocidad y velocidad-distancia. ¿cómo hallar una magnitud variable conociendo la otra? Plantee una conjetura.
- a. ¿La conjetura es válida para cualquier fenómeno que implique magnitudes variables con el mismo comportamiento? Argumente y justifique ampliamente sus respuestas.
- b. ¿Qué relación hay entre cantidad variable, acumulación de cambio (área bajo la curva) y razón de cambio de acumulación? Justifique sus respuestas.
- c. Represente algebraicamente la relación encontrada.
- Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.**

Figura 21. Conjeturar la relación entre cantidad variable, acumulación de cambio y razón de cambio de acumulación

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

**4.2.2 Análisis a priori de las tareas diseñadas en cada situación matemática realista enmarcada en el Fenómeno Caída Libre (FCL).** Primera Situación: Abra el archivo Situación\_1.1, el cual muestra el video de la caída de una pelota de tenis, que se suelta desde 1,817 m de altura (primer piso del edificio Laboratorios Livianos de la UIS). A partir de la velocidad, halle la expresión algebraica que representa la distancia desde el punto de lanzamiento para cualquier instante de tiempo  $t$ .

Tabla 2.

*Análisis a priori Nivel Situacional y Referencial Primera Situación FCL*

Tarea	Posibles Respuestas	Contra Preguntas
	<b>NIVEL SITUACIONAL (NS)</b>	
	<p><b>R1.</b> Usar la idea de que la velocidad es igual a la distancia sobre tiempo <math>v = \frac{d}{t}</math>, luego despejando se tiene que <math>d = v * t</math></p>	
	<p><b>R2.</b> Usar la fórmula física que representa la distancia de la pelota al punto de partida en el fenómeno de caída libre, esto es, <math>h(t) = \frac{1}{2}gt^2</math> donde, <math>t</math> es el tiempo y <math>g</math> es la aceleración de la gravedad.</p>	<p><b>CR1.</b> ¿En cualquier fenómeno físico se tiene que la velocidad es igual a la distancia sobre el tiempo? ¿en qué condiciones se cumple que <math>v = \frac{d}{t}</math>?</p>
1. A partir de la velocidad, halle la expresión algebraica que representa la distancia desde el punto de lanzamiento para cualquier instante de tiempo $t$ .	<p><b>R3.</b> No conozco la velocidad de la pelota para poder hallar la distancia a partir de la velocidad.</p>	<p><b>CR2.</b> ¿Esa expresión algebraica representa la distancia de la pelota a partir de la velocidad?</p>
	<p><b>R4.</b></p> $d(t) = \int_0^t v(t)dt = 4,178t^2$	<p><b>CR3.</b> Y si conociera la velocidad, ¿cómo lo haría?</p>
	<p><b>R5.</b></p> $d(t) = \int v(t)dt = 4,178t^2$	<p><b>CR4. CR5</b> ¿Por qué?</p>
<b>Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.</b>		
<b>INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA NS</b>		
	<p><b>R1.</b> Decreciente- Disminuye, porque la pelota va hacia abajo.</p>	
a. Describa el comportamiento de la velocidad de la pelota desde el punto de lanzamiento hasta que toca el piso. Explique su respuesta.	<p><b>R2.</b> Creciente - Aumenta, porque cuando va cayendo actúa la aceleración de la gravedad y esto hace que la velocidad aumente cada vez más.</p>	<p><b>CR.</b> ¿Qué es la velocidad?</p>
	<p><b>R3.</b> Constante, es siempre la misma, porque la pelota se suelta y no lleva una velocidad inicial.</p>	<p><b>CR.</b> ¿La velocidad está cambiando? ¿Cómo cambia?</p>
	<p><b>R4.</b> Se va haciendo más lenta.</p>	

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

**R5.** Se va haciendo mayor.

**R6.** No cambia.

**R7.** Cambia.

**R8.** Aumenta en forma constante porque es un fenómeno de caída libre, por lo tanto, la velocidad es  $v(t) = gt$

b. ¿Cuál es la velocidad inicial?  
Explique su respuesta

**R1.** Igual a cero (porque suelta la pelota y ahí no hay velocidad)

**CR1.** ¿Por qué igual a cero?

**R2.** Diferente de cero.

**CR2.** ¿Por qué diferente de cero?

c. ¿Cuál es la velocidad final?  
Explique su respuesta

**R1.** Igual a cero (porque cuando la pelota toca el suelo la velocidad es cero)

**CR1.** ¿Por qué igual a cero?

**R2.** Diferente de cero (porque la velocidad de la pelota aumenta cada vez más y cuando toca el suelo lleva velocidad y la pelota rebota)

**CR2.** ¿Por qué diferente de cero?

**R3.** Con la fórmula de la velocidad y conociendo el tiempo que ha transcurrido desde que se lanza la pelota y toca el suelo  $t_f$ .  $v_f = gt_f$

**CR4.** ¿Está seguro? ¿Por qué esa fórmula? (Porque me la enseñaron en física) ¿Por qué funciona?

d. Ubíquese en la parte superior de la pantalla y en la opción Ventana oprima “Vista Derecha”, describa el comportamiento de la velocidad de la pelota desde el punto de lanzamiento hasta que toca el piso. Explique su respuesta.

**R1.** Creciente porque al transcurrir el tiempo la magnitud de la velocidad es mayor a la anterior.

**CR2.** ¿Cómo es el cambio?

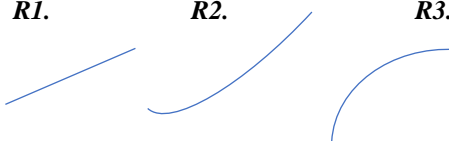
**R2.** Cambia porque la magnitud de la velocidad es diferente en cada instante de tiempo.

e. Represente gráficamente el comportamiento de la velocidad del movimiento de la pelota a través del tiempo.

**R1.**

**R2.**

**R3.**



**CR1.** ¿Cuántas representaciones gráficas hay?

**CR2.** ¿Cuál es la gráfica que mejor modela la situación?

**CR3.** ¿Por qué?

1.1 Halle la velocidad de la pelota en los instantes de tiempo dados

Tiempo	Velocidad
0s	
0.031s	
0,05s	
0,145s	
0,28s	
0,34s	
0,48s	
0,6s	
$t$	

**R1.** No puedo porque el software no me da esa información.

**R2.** Como la velocidad tiene un comportamiento lineal, porque la razón de cambio es constante, entonces podemos hallar la expresión algebraica de la velocidad y así reemplazar los tiempos de la tabla y encontrar la magnitud de la velocidad.

**R3.**  $v(t) = 8,29t + 0$  reemplazo los tiempos de la tabla y así puedo encontrar la magnitud de la velocidad.

**CR1.** ¿No puede trabajar con la información tabular dada por Tracker? ¿Qué puede encontrar en ellos?

De acuerdo con los siguientes intervalos, halle las diferencias de los intervalos de tiempo y las diferencias de la velocidad. ¿Cómo son las diferencias?

[0,1 ; 0,133]
[0,2 ; 0,233]
[0,3 ; 0,333]
[0,367 ; 0,4]
[0,4 ; 0,433]

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

¿Qué significa que las diferencias de la velocidad y el tiempo sean constantes?

¿Cómo puede interpretar esas diferencias?

**CR2.** ¿Razón de cambio? ¿Qué significa? ¿Cómo se interpreta en la gráfica de la magnitud cambiante? ¿Cómo hallar la expresión algebraica?

**CR3.** ¿Cómo encontró la expresión algebraica? ¿Qué significa el 8,29?

- a. En Tracker, ubíquese en la parte superior de la pantalla y en la opción Ventana oprima “Herramienta de Datos... (Analizar...)” y maximice la nueva ventana, oprima el botón *Analyze*, seleccione *Ajustes*. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la velocidad de la pelota?

$$R1. v(t) = 8,356t + 0,5885$$

$$R2. v(t) = 8,356t$$

Con la expresión algebraica obtenida en Tracker, ¿a qué es igual la velocidad en  $t = 0s$ ?

¿Es coherente que cuando el tiempo es igual a 0s la velocidad de la pelota sea 0.5885?

¿Cuál sería entonces la representación algebraica de la velocidad con respecto al tiempo?

¿Cómo es la velocidad inicial de acuerdo con la información dada por el software?

- b. Verifique las velocidades encontradas en el ítem 1.1 ¿son iguales los resultados? ¿por qué?

**RI.** No son iguales porque hay un margen de error debido a que en realidad no se pueden controlar todas las variables, en este caso. Aunque no son iguales si son muy parecidas.

¿Cómo se interpreta la cantidad 0,5885? ¿Cómo es la velocidad inicial de acuerdo con la expresión algebraica?

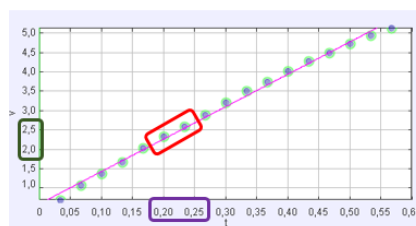
¿Cómo se interpreta la cantidad 8,356?

**Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.**

¿Qué es el cambio?

## 1.2 Con ayuda del archivo anterior

- a. En la gráfica de la velocidad contra el tiempo ¿dónde se evidencia el cambio de la variable velocidad con respecto al tiempo? ¿qué representa geoméricamente la acumulación del cambio de la velocidad con respecto al tiempo?



**RI.** En los valores del tiempo (cambio del tiempo franja morada)

**R2.** En los valores de la velocidad (cambio de la velocidad – franja verde)

**R3.** En los puntos de la velocidad contra el tiempo (cambio velocidad contra tiempo – franja roja)

Calcule el cambio de la magnitud variable velocidad cuando  $t$  cambia de:

$$0,1s \text{ a } 0,133s$$

$$0,2s \text{ a } 0,233s$$

$$0,3s \text{ a } 0,333s$$

$$0,367s \text{ a } 0,4s$$

$$0,467s \text{ a } 0,5s$$

En la gráfica de velocidad contra tiempo represente los cambios de tiempo y velocidad anteriores.

¿Qué representan los puntos mostrados en la vista gráfica? Al representar el cambio de la velocidad contra el tiempo ¿esos cambios se dan forma separada o de manera simultánea?

- b. En la ventana “Herramienta de Datos”, oprima el botón *Mesure* y seleccione *Area*. Halle la acumulación del cambio

Intervalo de tiempo	Área
[0,1 ; 0,133]	0,0506
[0,2 ; 0,233]	0,0818
[0,3 ; 0,333]	0,112

Note que los extremos de la región sombreada (el área bajo la curva) se pueden mover.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

de la velocidad con respecto al cambio de tiempo dado.

[0,367 ; 0,4]	0,129
[0,4 ; 0,433]	0,138

Intervalo de tiempo	Área
[0,1 ; 0,133]	
[0,2 ; 0,233]	
[0,3 ; 0,333]	
[0,367 ; 0,4]	
[0,4 ; 0,433]	

- c. Abra el archivo Situación\_1.2, sabiendo que  $r$  representa la distancia recorrida por la pelota desde el punto de lanzamiento a través del tiempo. Halle la distancia recorrida por la pelota en los siguientes intervalos de tiempo.

Intervalo de tiempo	Distancia
[0,1 ; 0,133]	
[0,2 ; 0,233]	
[0,3 ; 0,333]	
[0,367 ; 0,4]	
[0,4 ; 0,433]	

**R1.** No sé cómo se hallan porque el software solo da la distancia recorrida en un instante de tiempo.

**R2.**

Intervalo de tiempo	Distancia
[0,1 ; 0,133]	0,05
[0,2 ; 0,233]	0,08
[0,3 ; 0,333]	0,113
[0,367 ; 0,4]	0,129
[0,4 ; 0,433]	0,139

Si tiene la distancia recorrida en un instante  $t_1$  y en un instante  $t_2$  ¿cómo hallar la distancia que recorrió del instante  $t_1$  al instante  $t_2$ ?

- d. Compare la tabla del ítem **b** con la tabla del ítem **c**, ¿qué relación existe entre los datos contenidos en ellas? Plantee una conjetura y explique ampliamente.

**R1.** El área bajo la curva velocidad en intervalos de tiempos es igual a la distancia recorrida en los mismos intervalos.

**R2.** La distancia recorrida por la pelota es igual al área bajo la curva velocidad.

La distancia y el área halladas ¿corresponden a los mismos intervalos?

Comparando la información de la distancia y el área ¿qué puede concluir?

**CR2.** Si han transcurrido 0,133s desde el lanzamiento de la pelota, ¿Cuánta distancia ha recorrido la pelota?

**Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.**

#### NIVEL REFERENCIAL (NF)

#### INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA (NF)

- e. ¿Qué relación existe entre el área bajo la curva velocidad y la distancia recorrida en un instante de tiempo? Plantee una conjetura y explique ampliamente.

**R1.** La distancia recorrida por la pelota es igual al área bajo la curva velocidad.

**R2.** La distancia recorrida por la pelota en un instante de tiempo es igual al área bajo la curva velocidad desde el principio del movimiento hasta ese instante de tiempo.

¿Qué significa que dos cantidades estén relacionadas?

**CR1.** ¿El área bajo la curva velocidad de dónde a dónde? ¿en cualquier intervalo?

- f. De acuerdo con la conjetura planteada, halle la distancia de la pelota a partir de la velocidad en cualquier instante de tiempo  $t$ . Justifique ampliamente sus respuestas.

**R1.** Como la distancia es igual al área bajo la curva velocidad:

$$d(t) = \int_0^t v(t)dt = 4,178t^2$$

**R2.**

$$d(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v(t_i)\Delta t = 4,178t^2$$

**R3.**

**CR3.** ¿La integral indefinida representa el área bajo la curva velocidad?

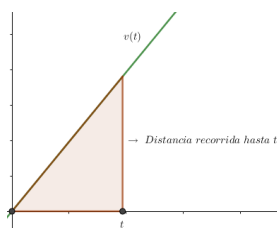
## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

$$\int v(t)dt = 4,178t^2$$

- g. Realice el análisis de regresión de los puntos que representan la distancia de la pelota con respecto al tiempo, para ello, des-seleccione la opción *Mesure - Area*, ubíquese en r y con click sostenido trasládela al lado derecho de la columna t y des-seleccione la opción *marcas* en la columna v. Compare los resultados obtenidos en el ítem anterior con los dados por el software. ¿Qué puede concluir? Explique ampliamente sus respuestas y represente gráficamente los sucesos del ítem e y f.

$$d(t) = 4,483t^2 + 0,03875t$$

La distancia hasta un instante de tiempo es igual al área bajo la curva velocidad desde cero hasta ese instante.



¿La distancia en cualquier instante de tiempo hallada por usted es igual a la regresión de los puntos que representan la distancia con respecto al tiempo?

Segunda Situación: A partir de la distancia, halle la expresión algebraica que representa la velocidad de la pelota para cualquier instante de tiempo  $t$ .

Tabla 3.

*Análisis a priori Nivel Situacional y Referencial Segunda Situación FCL*

Tarea	Posibles Respuestas	Contra Preguntas
	<b>NIVEL SITUACIONAL (NS)</b>	
	<b>R1.</b> Usar la idea de que la velocidad es igual a la distancia sobre tiempo $v = \frac{d}{t}$ .	<b>CR1.</b> ¿En cualquier fenómeno físico se tiene que la velocidad es igual a la distancia sobre el tiempo? ¿en qué condiciones se cumple que $v = \frac{d}{t}$ ?
2. A partir de la distancia, halle la expresión algebraica que representa la velocidad de la pelota para cualquier instante de tiempo $t$ .	<b>R2.</b> Usar la fórmula física que representa la velocidad de la pelota en el fenómeno de caída libre, esto es, $v(t) = gt$ donde, $t$ es el tiempo y $g$ es la aceleración de la gravedad.	<b>CR2.</b> ¿Esa expresión algebraica representa la velocidad de la pelota a partir de la distancia?
	<b>R3.</b> Conozco la distancia desde el punto de lanzamiento del ejercicio anterior, pero no sé cómo hallar la distancia a partir de la velocidad.	<b>CR3.</b> ¿Si será posible hallar la velocidad a partir de la distancia?
	<b>R4.</b> La derivada de la distancia es la velocidad.	<b>CR4.</b> ¿Por qué esa relación? ¿En cualquier fenómeno se cumple?

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

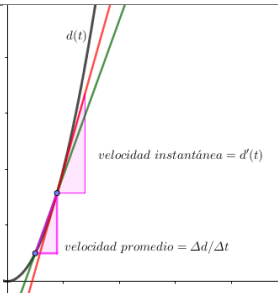
**INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA (NS)**

En la ventana "Herramienta de Datos" del archivo anterior, oprima Ctrl O y abra el archivo Ventana 1.2.	Intervalo de tiempo	Velocidad aproximada	¿Qué es el promedio?  Por ejemplo, cuando decimos, los estudiantes de ingeniería de primer semestre tienen en promedio 16 años
	[0,1 ; 0,133]	1,5165	
	[0,2 ; 0,233]	2,454	
	[0,3 ; 0,333]	3,3525	
	[0,367 ; 0,4]	3,873	
a. Cuál es la magnitud aproximada de la velocidad que lleva la	[0,467 ; 0,5]	4,599	

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

pelota en los intervalos de tiempo:	<p>[0,1 ; 0,133]  [0,2 ; 0,233]  [0,3 ; 0,333]  [0,367 ; 0,4]  [0,467 ; 0,5]</p>	¿cómo se puede interpretar dicha información?												
<p>b. Cuantifique el cambio del área bajo la curva velocidad cuando el tiempo cambia de:  0,1 s a 0,133s  0,2 s a 0,233s  0,3 s a 0,333s  0,367 s a 0,4s  0,467 s a 0,5s</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Intervalo de tiempo</th> <th><math>\Delta A</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>[0,1 ; 0,133]</td> <td>0,0506</td> </tr> <tr> <td>[0,2 ; 0,233]</td> <td>0,0818</td> </tr> <tr> <td>[0,3 ; 0,333]</td> <td>0,112</td> </tr> <tr> <td>[0,367 ; 0,4]</td> <td>0,129</td> </tr> <tr> <td>[0,467 ; 0,5]</td> <td>0,153</td> </tr> </tbody> </table>	Intervalo de tiempo	$\Delta A$	[0,1 ; 0,133]	0,0506	[0,2 ; 0,233]	0,0818	[0,3 ; 0,333]	0,112	[0,367 ; 0,4]	0,129	[0,467 ; 0,5]	0,153	<p>¿Qué es el cambio?</p> <p>Con ayuda del software:  Halle el área bajo la curva velocidad en <math>t = 0,1s</math> y en <math>t = 0,133s</math> ¿la magnitud del área cambió? ¿cómo calcular la magnitud de ese cambio?</p>
Intervalo de tiempo	$\Delta A$													
[0,1 ; 0,133]	0,0506													
[0,2 ; 0,233]	0,0818													
[0,3 ; 0,333]	0,112													
[0,367 ; 0,4]	0,129													
[0,467 ; 0,5]	0,153													
<p>c. ¿Cuál es la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad con respecto al tiempo en los cambios de tiempo anteriores?</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Intervalo de tiempo</th> <th><math>\Delta A/\Delta t</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>[0,1 ; 0,133]</td> <td>1,5333</td> </tr> <tr> <td>[0,2 ; 0,233]</td> <td>2,4787</td> </tr> <tr> <td>[0,3 ; 0,333]</td> <td>3,3939</td> </tr> <tr> <td>[0,367 ; 0,4]</td> <td>3,909</td> </tr> <tr> <td>[0,467 ; 0,5]</td> <td>0,153</td> </tr> </tbody> </table>	Intervalo de tiempo	$\Delta A/\Delta t$	[0,1 ; 0,133]	1,5333	[0,2 ; 0,233]	2,4787	[0,3 ; 0,333]	3,3939	[0,367 ; 0,4]	3,909	[0,467 ; 0,5]	0,153	¿Qué es la rapidez del cambio?
Intervalo de tiempo	$\Delta A/\Delta t$													
[0,1 ; 0,133]	1,5333													
[0,2 ; 0,233]	2,4787													
[0,3 ; 0,333]	3,3939													
[0,367 ; 0,4]	3,909													
[0,467 ; 0,5]	0,153													
<p>d. Compare los resultados obtenidos en el ítem a con el ítem c ¿Qué puede concluir? Plantee una conjetura. Explique ampliamente sus respuestas.</p>	<p><b>R1.</b> La velocidad promedio en intervalos de tiempo es aproximadamente igual a la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad con respecto al tiempo en los mismos intervalos de tiempo.</p> <p><b>R2.</b> La velocidad promedio en intervalos de tiempo es aproximadamente igual a la razón de cambio del área bajo la curva velocidad en los mismos intervalos.</p>	<p><b>CR2.</b> ¿La razón de cambio es igual a la rapidez del cambio?</p>												
<p><b>NIVEL REFERENCIAL (NR)</b>  <b>INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA (NF)</b></p>														
<p>e. Si los intervalos de tiempo se hacen cada vez más pequeños, ¿qué sucede con la rapidez del cambio del área en relación con la velocidad? Explique ampliamente y plantee una conjetura.</p>	<p><b>R1.</b> Como siguen siendo intervalos, se sigue cumpliendo que la velocidad promedio es aproximadamente igual a la razón de cambio.</p> <p><b>R2.</b> La rapidez de cambio instantánea es aproximadamente igual la velocidad instantánea.</p>	<p><b>CR1.</b> Si los intervalos de tiempo son muy, muy pequeños, ¿qué sucede con la velocidad promedio?</p> <p>¿Qué sucede con la razón de cambio del área con respecto al tiempo si los intervalos de tiempo se hacen cada vez más y más pequeños?</p> <p><b>CR2.</b> ¿Por qué?</p>												
<p>f. A partir de la conjetura anterior, halle la velocidad de la pelota a partir de la distancia en cualquier instante de tiempo <math>t</math>. Compare el resultado con la velocidad encontrada en la primera situación, ¿Qué puede concluir?</p>	<p><b>R1.</b> <math>\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}</math> La derivada del área bajo la curva velocidad es igual a la velocidad.</p> <p><b>R2.</b> <math>\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}</math> La derivada de la distancia es igual a la velocidad.</p>	<p>¿Cómo calcular la rapidez de cambio del área con respecto al tiempo en intervalos de tiempo infinitamente pequeños?</p>												

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

	<b>R3.</b> Derivando la distancia. La derivada de la distancia es igual a la velocidad.	
g. En la representación gráfica de la distancia con respecto al tiempo (área bajo la curva velocidad con respecto al tiempo) ¿qué representa geoméricamente la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea?	<b>R1.</b> En la gráfica de la función distancia con respecto al tiempo, la razón de cambio promedio representa geoméricamente la pendiente de la recta secante a la curva para un intervalo de tiempo y la razón de cambio instantánea representa la pendiente de la recta tangente a la curva para un instante de tiempo $t$ .	¿Cómo interpretar gráficamente la razón de cambio promedio? ¿Qué significado geométrico se le puede atribuir a una razón?
h. Represente gráficamente los sucesos del ítem d y e.	 <p>El gráfico muestra una curva <math>d(t)</math> en un sistema de coordenadas. Una línea roja tangente a la curva en un punto <math>t</math> está etiquetada como 'velocidad instantánea = <math>d'(t)</math>'. Una línea verde secante a la curva entre dos puntos <math>t_1</math> y <math>t_2</math> está etiquetada como 'velocidad promedio = <math>\Delta d / \Delta t</math>'. El área bajo la curva entre <math>t_1</math> y <math>t_2</math> está sombreada en verde.</p>	De acuerdo con lo encontrado en el ítem anterior, ¿qué relación geométrica pueden establecer?

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

Tabla 4.

## Análisis a priori Nivel General Primera y Segunda Situación FCL

Tarea	Posibles Respuestas	Contra Preguntas
<b>NIVEL GENERAL (NG)</b>		
<b>INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA</b>		
3. Plantee una conjetura acerca de la relación, en general, entre distancia-velocidad y velocidad-distancia. ¿cómo hallar una magnitud variable conociendo la otra? Plantee una conjetura.	<p><b>R1.</b> La derivada de la distancia es la velocidad. La integral de la velocidad desde el inicio del movimiento hasta un instante de tiempo es igual a la distancia recorrida por la pelota hasta ese instante de tiempo.</p> <p><b>R2.</b></p> $\frac{dr}{dt} = v(t)$ $\int_0^t v(t) dt = d(t)$	<p>¿Cómo hallo la distancia a partir de la velocidad? ¿Cómo hallo la velocidad a partir de la distancia?</p> <p>¿Están entonces relacionados la distancia y la velocidad? ¿Cómo es esa relación?</p>
a. ¿La conjetura es válida para cualquier fenómeno que implique magnitudes variables con el mismo comportamiento? Argumente y justifique ampliamente sus respuestas.	Si las magnitudes tienen comportamiento lineal y cuadrático se cumple que la derivada de la magnitud cuadrática es la magnitud lineal y la integral de la función lineal es igual a la magnitud cuadrática haciendo las constantes iguales.	¿Cuál es el comportamiento de la distancia y la velocidad en las situaciones anteriores?
b. ¿Qué relación hay entre cantidad variable, acumulación de cambio (área bajo la curva) y razón de cambio de acumulación? Justifique sus respuestas.	<p><b>R1.</b> la derivada de la integral es igual a la función que se integra</p> <p><b>R2.</b> Están relacionadas de forma inversa, esto es, la derivada de la integral es igual a la función que se integra y la integral de</p>	<p>¿Qué relación hay entre derivada e integral?</p> <p><b>CR1.</b> ¿Y, al contrario, la derivada de la integral?</p>

---

la derivada es igual a la función que se derivada. La una deshace lo que hace la otra.

---

c. Represente algebraicamente la relación encontrada.

$$\int f'(x) dx = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \int f(x) dx \right] = f(x)$$

---

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

---

### 4.2.3 Fenómeno Área y Perímetro (FAP)

4.2.3.1 *Nivel Situacional.* En este nivel se espera que los estudiantes identifiquen la relación entre las magnitudes variables área y perímetro con las ideas de la región barrida por el rastro de los segmentos que se forman bajo la función perímetro y la magnitud de la pendiente de la recta tangente en cualquier punto a la función área, cuál es dicha relación y cómo encontrar una magnitud variable conociendo la otra.

Para lograr esto, se propone una secuencia de tareas enmarcadas en la Primera Situación del FAP (Figura 22). A través de la discusión con sus pares y el profesor (investigador), los estudiantes reinventan la situación presentada, a partir de la estructuración y organización de las soluciones dadas por sus compañeros y las tareas diseñadas para cada nivel de matematización. Este momento (interacción y reinención guiada) estará presente a lo largo de las tareas propuestas en la primera y segunda situación.

1. A partir del perímetro de una circunferencia de radio  $x$ , halle la expresión algebraica que representa el área del círculo en función del radio ( $x$ ).

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

Figura 22. Primera Situación - FAP

Después de la discusión dada en la Primera Situación, se plantean dos tareas (Figura 23) con el objetivo principal de que los estudiantes identifiquen el perímetro de una circunferencia de radio  $x$  como una magnitud variable, esto es, una función cuya variable independiente es el

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

radio  $x$  y variable dependiente el perímetro, con el fin de representarlo gráfica y algebraicamente, identificando a su vez el comportamiento del mismo.

En la hoja de trabajo:

- a. Describa el comportamiento del perímetro de una circunferencia cuando varía el radio  $x$ . Explique ampliamente.
- b. Represente gráfica y algebraicamente el perímetro de una circunferencia en función del radio  $x$ . Justifique su respuesta.




***Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.***

Figura 23. Tareas dirigidas al surgimiento de modelos gráficos y algebraicos que representen el comportamiento de la magnitud variable perímetro

Posteriormente (Figura 24), las tareas se diseñan con el fin de que los estudiantes relacionen la magnitud del segmento azul que se forma bajo la función perímetro con la magnitud del segmento que forma la circunferencia en la *Vista Gráfica 2*, así como el significado de la región barrida por el rastro de los segmentos que se forman bajo la función perímetro y región barrida por el rastro de las circunferencias que se forman en la *Vista Gráfica 2*. Se espera que los estudiantes conjeturen, por medio de la interacción con el software y el cambio en los incrementos (Figura 25), que las regiones barridas por el rastro corresponden al área bajo la curva y el área del círculo respectivamente, y como se “llenan” con los mismos segmentos, dichas áreas son iguales.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

1.1 Abra el archivo **Situación\_2.1**, en él se muestra la interdependencia entre el perímetro de una circunferencia y su radio ( $x$ ). En la barra de entrada escriba la representación algebraica hallada anteriormente. ¿Coinciden las dos gráficas? Explique su respuesta.

- Mueva el deslizador  $x$ , ¿qué representa la magnitud del segmento azul?
- En el menú *Vista* seleccione la opción *Vista Gráfica 2*, oprima los botones  (inicio),  (activar rastro) y  (animar) ¿qué relación hay entre la medida del segmento azul y la circunferencia que se forma? Plantee una conjetura y explique ampliamente su respuesta.
- Cambie el incremento a 0,1 y oprima los botones inicio y animar nuevamente, verifique si se sigue cumpliendo la conjetura planteada.
- Cambie el incremento a 0,05 y realice el proceso anterior.
- Si cambia el incremento a 0,01 ¿Qué representa la región barrida por el rastro de los segmentos que se forman bajo la función perímetro? ¿Qué representa la región barrida por el rastro de las circunferencias que se forma en la Vista Gráfica 2? ¿Qué relación hay entre las dos regiones? Justifique sus respuestas.

**Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.**

Figura 24. Tareas direccionadas al descubrimiento de la relación entre el perímetro de una circunferencia de radio  $x$  y el área del círculo del mismo radio con las ideas de la región barrida por el rastro de segmentos

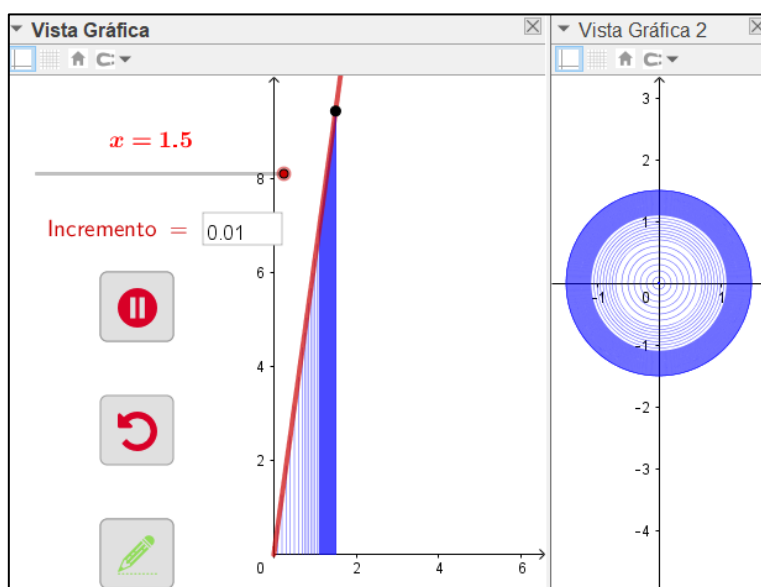


Figura 25. Cambio de los incrementos

En la Segunda Situación (Figura 26) los estudiantes tendrán a su disposición las expresiones algebraicas del perímetro de una circunferencia de radio  $x$  y el área de un círculo de radio  $x$  dadas a partir de la solución de la Primera Situación matemática realista hasta el Nivel General.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Por tal razón, el objetivo principal de la Segunda Situación es que los estudiantes con ayuda de sus presaberes, intuición y experiencia resuelvan la situación, dando lugar a la discusión de las soluciones dadas por sus compañeros, a la estructuración y organización de estas.



2. A partir del área de un círculo de radio  $x$ , halle la expresión algebraica que representa el perímetro de la circunferencia en función del radio ( $x$ ).

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

Figura 26. Segunda Situación FAP

Posteriormente, las tareas diseñadas para el proceso de reinención guiada en la Segunda Situación (Figura 27) tienen por objetivo que el estudiante encuentre la relación entre la pendiente de la recta tangente a la función área del círculo con respecto al radio y el perímetro de una circunferencia del mismo radio por medio de la interacción con el software (Figura 28).

2.1 Abra el archivo **Situación\_2.2**, en él se muestra la interdependencia entre el área de una circunferencia y su radio ( $x$ ). En la barra de entrada escriba la representación algebraica hallada en el ítem  $f$  ¿Coinciden las dos gráficas? Explique su respuesta.

- Oprima los botones  (inicio) y  (animar) ¿qué representa la magnitud del segmento color naranja?
- Oprima el botón *Mostrar 1* y repita el proceso anterior, ¿qué presenta la recta mostrada? Explique ampliamente sus respuestas.
- Halle la pendiente de la recta mostrada.
- En el menú *Vista* seleccione la opción *Vista Gráfica 2*, oprima el botón *Mostrar 2* y ubíquese en un valor específico en el deslizador  $x$ , ahora mueva el deslizador  $b$ , ¿qué observa? Cambie los valores del radio  $x$  y mueva el deslizador  $b$  ¿existe alguna relación? Plantee una conjetura y explique ampliamente sus respuestas.
- ¿La conjetura anterior se cumple para cualquier valor del radio ( $x$ )?

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

Figura 27. Tareas dirigidas al descubrimiento de la relación entre la magnitud de la pendiente de la recta tangente a la función área y el perímetro de la circunferencia del mismo radio

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

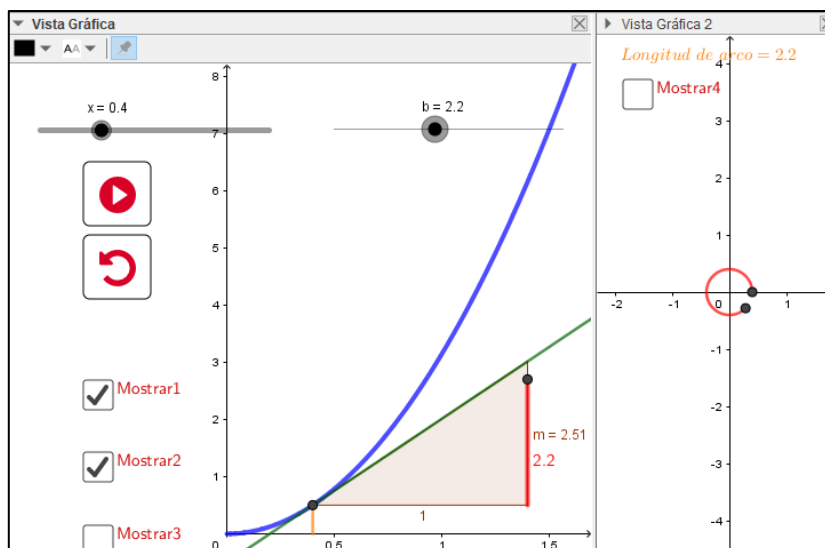


Figura 28. Relación entre la pendiente de la recta tangente a la función área y el perímetro de una circunferencia de radio  $x$

4.2.3.2 *Nivel Referencial*. En este nivel se espera que los estudiantes identifiquen y representen el área de un círculo de radio  $x$  como la acumulación de los segmentos que se forman bajo la función perímetro; el perímetro de una circunferencia de radio  $x$  como la pendiente de la recta tangente a la función área en cualquier punto y la relación existente entre las magnitudes variables área y perímetro con la acumulación de segmentos formados bajo la curva que representa el perímetro y la pendiente de la recta tangente a la función área, así como el planteamiento de supuestos enriquecidos con objetos matemáticos acerca de cómo encontrar una magnitud variable conociendo la otra.

En la tarea diseñada para la Primera Situación en el Nivel Referencial (Figura 29), la cual corresponde a la continuación de las tareas planteadas en el ítem 1.1 (Figura 24), se espera que los estudiantes creen el modelo algebraico de la relación entre la región barrida por el rastro de los segmentos formados bajo la función perímetro y la región barrida por el rastro de las circunferencias a partir de la reflexión de lo aparecido en el Nivel Situacional, puesto que allí se espera que conjeturen que dichas regiones corresponden a las áreas bajo la función perímetro y el área del círculo del mismo radio respectivamente. El objetivo es que logren representar

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

algebraicamente que el área bajo la curva corresponde a la integral de 0 a  $x$  de la función perímetro y esta es equivalente al área del círculo del mismo radio.

f. De acuerdo con la relación encontrada, halle la expresión algebraica que representa el área de la circunferencia en función del radio ( $x$ ) a partir del perímetro.

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

*Figura 29.* Tarea dirigida a la creación de modelos algebraicos acerca de la relación entre la función perímetro de una circunferencia de radio  $x$  y el área de un círculo del mismo radio

Las tareas diseñadas para la Segunda Situación en el Nivel Referencial (Figura 30), las cuales corresponden a la continuación de las tareas diseñadas en el ítem 2.1 (Figura 27) tienen como objetivo que los estudiantes identifiquen y representen la pendiente de la recta tangente a la función área del círculo como la derivada del área y que ésta es equivalente al perímetro de la circunferencia del mismo radio, a través de la interacción con el software (Figura 31) y el análisis de lo obtenido en el Nivel Situacional.

f. Desactive el botón *Mostrar 2* y oprima el botón *Mostrar 3*, ¿qué representa la magnitud del segmento AG? ¿por qué?

g. Ubíquese en el punto G (dar clic derecho y seleccionar la opción *Rastro*) y oprima el botón *Mostrar 4* ¿qué representa el rastro del punto rojo?

h. ¿Qué relación hay entre la magnitud del segmento AG, la pendiente de la recta y la circunferencia mostrada en la *Vista Gráfica 2*? Plantee una conjetura y explique sus respuestas.

i. De acuerdo con la conjetura anterior, halle la expresión algebraica que representa la interdependencia del perímetro en función del radio  $x$  a partir del área de la circunferencia.

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

*Figura 30.* Tareas dirigidas a la creación de modelos algebraicos acerca de la relación entre la pendiente de la recta tangente a la función área y el perímetro de la circunferencia

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

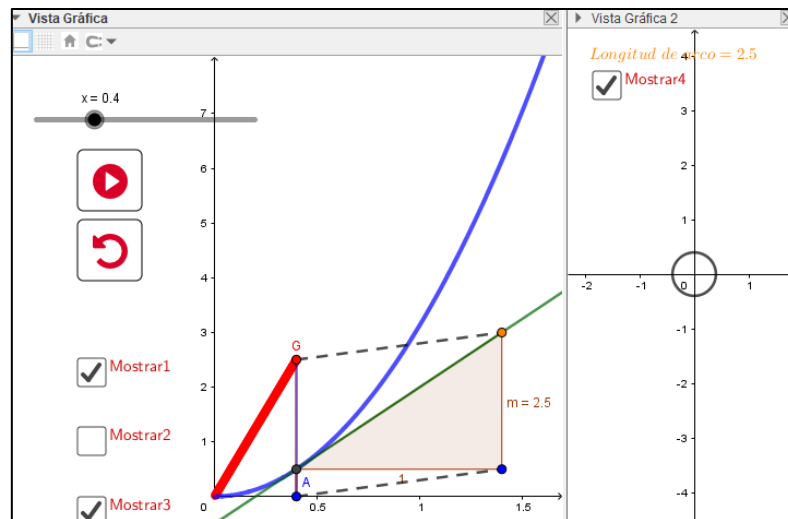


Figura 31. Relación entre la pendiente de la recta tangente al área y el perímetro

4.2.3.3 Nivel General. En este nivel (Figura 32) se espera que los estudiantes generalicen lo encontrado en el Nivel Referencial, que planteen una conjetura acerca de la existencia de forma general entre el área y el perímetro de un círculo y una circunferencia del mismo radio con los objetos matemáticos pertinentes de acuerdo con las ideas de pendiente de la recta tangente – derivada e integral, que encuentren y representen la relación entre cantidad variable, pendiente de la recta tangente y acumulación bajo la curva, esto es, la relación entre derivada e integral.

3. Plantee una conjetura acerca de la relación, en general, entre área-perímetro y perímetro-área. ¿cómo hallar una magnitud variable conociendo la otra? Plantee una conjetura.

- Si se consideran los valores negativos de la variable independiente ¿se sigue cumpliendo la conjetura anterior? ¿por qué? Explique ampliamente sus respuestas.
- Si se tienen magnitudes variables que tengan el mismo comportamiento, pero en otros fenómenos, ¿la conjetura se sigue cumpliendo? ¿por qué?
- ¿Qué relación hay entre el área bajo la curva y la pendiente de la recta tangente al área bajo la curva? Justifique sus respuestas.
- Represente algebraicamente la relación encontrada.
- ¿Dicha relación se cumple siempre? Si no es así, ¿en qué condiciones se cumple?

**Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.**

Figura 32. Conjeturar la relación entre derivada e integral

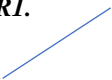
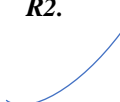
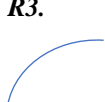
## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

## 4.2.4 Análisis a priori de las tareas diseñadas en cada situación matemática realista

**enmarcada en el Fenómeno Área y Perímetro (FAP).** Primera Situación: A partir del perímetro de una circunferencia de radio  $x$ , halle la expresión algebraica que representa el área del círculo en función del radio ( $x$ ).

Tabla 5.

*Análisis a priori Nivel Situacional y Referencial Primera Situación FAP*

Tarea	Posibles Respuestas	Contra Preguntas
<b>NIVEL SITUACIONAL (NS)</b>		
1. A partir del perímetro de una circunferencia de radio $x$ , halle la expresión algebraica que representa el área del círculo en función del radio ( $x$ ).	<p><b>R1.</b> Usar la fórmula que representa el área de un círculo de radio <math>r</math>, esto es, <math>A(r) = \pi r^2</math></p> <p><b>R2.</b> No conozco el perímetro de la circunferencia de radio <math>r</math> para poder hallar el área del círculo a partir del perímetro.</p> <p><b>R3.</b> El perímetro de una circunferencia es <math>p(r) = 2\pi r</math>, y para hallar el área, integro el perímetro.</p> $\int 2\pi r \, dr = \pi r^2$	<p><b>CR1.</b> ¿Esa expresión algebraica representa el área de un círculo de radio <math>r</math> a partir del perímetro de una circunferencia del mismo radio?</p> <p><b>CR2.</b> Y si conociera el perímetro, ¿cómo lo haría?</p> <p><b>CR3.</b> ¿Por qué integrar el perímetro para obtener el área? Es una integral indefinida ¿y la constante de integración?</p>
<i>Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.</i>		
<b>PRINCIPIO DE INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA (NS)</b>		
a. Describa el comportamiento del perímetro de una circunferencia cuando varía el radio $x$ . Explique ampliamente	<p><b>R1.</b> El perímetro decrece- disminuye</p> <p><b>R2.</b> El perímetro crece - aumenta, porque cuando aumenta el radio la circunferencia crece, por lo tanto, el perímetro también lo hace.</p> <p><b>R3.</b> Cambia.</p>	<p><b>CR1.</b> ¿Por qué? si el radio de la circunferencia aumenta ¿qué sucede con el perímetro?</p> <p><b>CR2.</b> ¿Por qué?</p> <p><b>CR3.</b> ¿El radio está cambiando? ¿Cómo cambia? ¿Si cambia el radio cambia el perímetro? ¿Cómo influye el cambio del radio en el cambio del perímetro?</p>
b. Represente gráfica y algebraicamente el perímetro de una circunferencia en función del radio $x$ . Justifique su respuesta.	<p><b>R1.</b> </p> <p><b>R2.</b> </p> <p><b>R3.</b> </p> <p style="text-align: center;"><math>p(r) = 2\pi r</math></p>	<p><b>CR.</b> ¿Cuántas representaciones gráficas hay?</p> <p><b>CR.</b> ¿Cuál es la gráfica que mejor modela la situación? ¿Por qué?</p> <p><b>CR.</b> ¿La Representación gráfica corresponde a la representación algebraica?</p>
<i>Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.</i>		
1.1 Abra el archivo Situación_2.1, en él se muestra la	<p><b>R1.</b> Si, son iguales.</p> <p><b>R2.</b> No son iguales.</p>	<p><b>CR1.</b> ¿Son exactamente iguales? ¿por qué?</p>

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

interdependencia entre el perímetro de una circunferencia y su radio ( $x$ ). En la barra de entrada escriba la representación algebraica hallada anteriormente. ¿Coinciden las dos gráficas? Explique su respuesta.

**CR2.** ¿Cuál es la diferencia? ¿por qué?

- a. Mueva el deslizador  $x$ , ¿qué representa la magnitud del segmento azul?




**R1.** El perímetro de una circunferencia de radio  $r$ .

**CR2.** ¿El perímetro de quién? ¿de cualquier circunferencia?

**R2.** El perímetro.

**CR3.** ¿Qué representa la gráfica? ¿cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente?

**R3.** Nada, porque no sé cuál es la magnitud.

- b. En el menú Vista seleccione la opción Vista Gráfica 2, oprima los botones  (inicio),  (activar rastro) y  (animar) ¿qué relación hay entre la medida del segmento azul y la circunferencia que se forma? Plantee una conjetura y explique ampliamente su respuesta.

**R1.** La magnitud del segmento azul corresponde al perímetro de la circunferencia que se va formando porque yo medí el segmento azul y con esa misma medida se formaba la circunferencia.

**CR1-2.** ¿Por qué?

**R2.** La magnitud del segmento azul corresponde al perímetro de la circunferencia que se va formando porque yo medí la magnitud del segmento y el perímetro de la circunferencia y son iguales los resultados.

**CR3.** ¿la circunferencia que se forma es igual a la magnitud del segmento azul? ¿En qué son iguales?

**CR4.** Cuando activa la opción animar, ¿qué sucede con el segmento azul y la circunferencia correspondiente?

**R3.** Son iguales.

**R4.** Ninguna relación.

- c. Cambie el incremento a **0,1** y oprima los botones inicio y animar nuevamente, verifique si se sigue cumpliendo la conjetura planteada.

- d. Cambie el incremento a **0,05** y realice el proceso anterior.

- e. Si cambia el incremento a **0,01** ¿Qué representa la región barrida por el rastro de los segmentos que se forman bajo la función perímetro? ¿Qué representa la región barrida por el rastro de las circunferencias que se forma en la Vista Gráfica 2? ¿Qué relación hay entre las dos regiones? Justifique sus respuestas.

**R1.** El rastro de los segmentos que se forman bajo la función perímetro representa el área bajo la curva, la región barrida por el rastro de las circunferencias que se forma en la Vista Gráfica 2 representa el área del círculo y esas dos regiones son iguales.

**CR1.** ¿Por qué?

**CR2.** Cuando activa la opción animar, ¿qué sucede con el segmento azul y la circunferencia correspondiente? ¿Qué sucede con la región barrida por el segmento y la circunferencia cuando disminuye el incremento?

**R2.** Ninguna relación

**Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.**

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

---

**NIVEL REFERENCIAL (NF)**  
**PRINCIPIO INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA**


---

**R1.** El área bajo la curva perímetro de una circunferencia de radio  $r$  es igual al área del círculo del mismo radio.

**R2.**

$$A(r) = \int_0^r 2\pi r \, dr = \pi r^2$$

- f. De acuerdo con la relación encontrada, halle la expresión algebraica que representa el área de la circunferencia en función del radio ( $x$ ) a partir del perímetro.

**R3.**

$$A(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n p(r_i) \Delta r = \pi r^2$$

**CR4.** ¿La integral indefinida representa el área bajo la curva perímetro?

**R4.**

$$\int 2\pi r \, dr = \pi r^2$$

---

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

---

Segunda Situación: A partir del área de una circunferencia de radio  $x$ , halle la expresión algebraica que representa el perímetro de la circunferencia en función del radio ( $x$ ).

Tabla 6.

*Análisis a priori Nivel Situacional y Referencial Segunda Situación FAP*

Tarea	Posibles Respuestas	Contra Preguntas
<b>NIVEL SITUACIONAL (NS)</b>		
2. A partir del área de una circunferencia de radio $x$ , halle la expresión algebraica que representa el perímetro de la circunferencia en función del radio ( $x$ ).	<p><b>R1.</b> Usar la fórmula que representa el perímetro de una circunferencia de radio <math>r</math>, esto es, <math>p(r) = 2\pi r</math></p> <p><b>R2.</b> No conozco el área del círculo de radio <math>r</math> para poder hallar el perímetro de la circunferencia a partir del área.</p> <p><b>R3.</b> El área de una circunferencia es <math>A(r) = \pi r^2</math>, y para hallar el perímetro, derivó el área.</p> $\frac{d}{dr} \pi r^2 = 2\pi r$	<p><b>CR1.</b> ¿Está hallando el perímetro a partir del área?</p> <p><b>CR2.</b> Y si conociera el área del círculo ¿cómo lo haría?</p> <p><b>CR3.</b> ¿Por qué derivar el área para hallar el perímetro? ¿Si no conociera la fórmula del perímetro cómo verificar efectivamente que la derivada del área corresponde al perímetro?</p>

---

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

---

**PRINCIPIO DE INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA (NS)**

---

- 2.1 Abra el archivo Situación\_2.2, en él se muestra la interdependencia entre el área de una circunferencia y su radio ( $x$ ). En la barra de entrada escriba la representación algebraica hallada en el ítem **f** ¿Coinciden las dos gráficas? Explique su respuesta.

**R1.** Si, son iguales.



**R2.** No son iguales.

**CR1.** ¿Son exactamente iguales? ¿por qué?

**CR2.** ¿Cuál es la diferencia? ¿por qué?

---

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

<p>a. Oprima los botones  (inicio) y  (animar) ¿qué representa la magnitud del segmento color naranja?</p>	<p><b>R1.</b> El área de un círculo de radio <math>r</math>.</p> <p><b>R2.</b> El área.</p> <p><b>R3.</b> Nada, porque no sé cuál es la magnitud.</p>	<p><b>CR2.</b> ¿El perímetro de quién? ¿de cualquier circunferencia?</p> <p><b>CR3.</b> ¿Qué representa la gráfica? ¿cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente?</p>
<p>b. Oprima el botón <b>Mostrar 1</b> y repita el proceso anterior, ¿qué presenta la recta mostrada? Explique ampliamente sus respuestas.</p>	<p><b>R1.</b> Parece que es tangente a la curva.</p>	<p><b>CR1.</b> ¿Cómo verificar si es tangente?</p>
<p>c. Halle la pendiente de la recta mostrada.</p>	<p><b>R1.</b> Usando la fórmula general de pendiente</p> $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ <p><b>R2.</b> Con la opción pendiente que tiene GeoGebra.</p>	<p><b>CR1.</b> Para usar la fórmula general de la pendiente necesito dos puntos, sobre la recta y la recta que tenemos es tangente, y será siempre una recta diferente. ¿cómo podemos hallar la pendiente de la recta tangente a cualquier punto de la curva? ¿con el uso del software podemos hallarla?</p>
<p>d. En el menú Vista seleccione la opción Vista Gráfica 2, oprima el botón <b>Mostrar 2</b> y ubíquese en un valor específico en el deslizador <math>x</math>, ahora mueva el deslizador <math>b</math>, ¿qué observa? Cambie los valores del radio <math>x</math> y mueva el deslizador <math>b</math> ¿existe alguna relación? Plantee una conjetura y explique ampliamente sus respuestas.</p>	<p><b>R1.</b> Con el segmento que se forma en la pendiente de la recta tangente, el cual tiene la magnitud de la pendiente de la recta tangente, se forma una circunferencia.</p> <p><b>R2.</b> El segmento rojo con el que se forma la circunferencia tiene la magnitud de la pendiente de la recta tangente.</p> <p><b>R3.</b> El perímetro de la circunferencia es igual a la pendiente de la recta tangente a la función área.</p> <p><b>R4.</b> No observo ninguna relación.</p>	<p><b>CR4.</b> ¿Qué particularidad tiene el segmento rojo que se está formando en la Vista Gráfica 1?</p> <p>¿Qué particularidad tiene el segmento rojo que se está formando en la Vista Gráfica 2?</p> <p>¿Esos dos segmentos están relacionados?</p>
<p>e. ¿La conjetura anterior se cumple para cualquier valor del radio (<math>x</math>)?</p>		
<p><b>Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.</b></p>		
<p><b>NIVEL REFERENCIAL (NR)</b> <b>PRINCIPIO DE INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA (NR)</b></p>		
<p>f. Desactive el botón <b>Mostrar 2</b> y oprima el botón <b>Mostrar 3</b>, ¿qué representa la magnitud del segmento AG? ¿por qué?</p>	<p><b>R1.</b> Representa la pendiente de la recta tangente porque es como si trasladáramos el segmento que representa la pendiente.</p> <p><b>R2.</b> Representa la pendiente de la recta tangente porque AG es paralelo al segmento de la pendiente.</p> <p><b>R3.</b> El perímetro de la circunferencia.</p>	<p><b>CR1.</b> ¿solo a la pendiente de la recta tangente?</p> <p><b>CR2.</b> ¿Por el hecho de ser paralelos se tiene que son iguales?</p> <p><b>CR3.</b> ¿Por qué?</p>
<p>g. Ubíquese en el punto G (dar clic derecho y seleccionar la opción</p>	<p><b>R1.</b> Como el segmento representa la magnitud de la pendiente de la recta</p>	<p><b>CR2.</b> ¿Y la pendiente de la recta tangente a la función área con respecto al radio es equivalente a...?</p>

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

<b>Rastro</b> ) y oprima el botón <b>Mostrar 4</b> ¿qué representa el rastro del punto rojo?	tangente y ésta es igual al perímetro de la circunferencia entonces el rastro representa la función perímetro.	<b>R2.</b> La función de la pendiente de la recta tangente a la curva área de un círculo de radio $x$ .
h. ¿Qué relación hay entre la magnitud del segmento AG, la pendiente de la recta y la circunferencia mostrada en la Vista Gráfica 2? Plantee una conjetura y explique sus respuestas.	<b>R1.</b> Son iguales. <b>R2.</b> La pendiente de la recta tangente a la función área de un círculo de radio $x$ es igual AG e igual al perímetro de la circunferencia del mismo radio.	
i. De acuerdo con la conjetura anterior, halle la expresión algebraica que representa la interdependencia del perímetro en función del radio $x$ a partir del área de la circunferencia.	<b>R1.</b> Lo hallo derivando la función área con respecto al radio del círculo para obtener el perímetro de la circunferencia del mismo radio. <b>R2.</b> Derivando el área. <b>R3.</b> $\frac{d(\pi r^2)}{dr} = 2\pi r$	<b>CR1.</b> Represente dicho suceso de forma algebraica. <b>CR2.</b> ¿Cuál área? Representélo algebraicamente.

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

Tabla 7.

## Análisis a priori Nivel General Primera y Segunda Situación FAP

Tarea	Posibles Respuestas	Contra Preguntas
<b>NIVEL GENERAL (NG)</b> <b>PRINCIPIO DE INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA (NG)</b>		
3. Plantee una conjetura acerca de la relación, en general, entre área-perímetro y perímetro-área. ¿cómo hallar una magnitud variable conociendo la otra? Plantee una conjetura.	<b>R1.</b> La derivada del área es igual al perímetro. La integral del perímetro es igual al área, teniendo en cuenta que el perímetro es siempre positivo. <b>R2.</b> $\frac{dp}{dr} = A(r)$ $\int A(r) dr = p(r)$	<b>CR1, CR2.</b> ¿Cualquier perímetro y cualquier área? ¿Cómo hallo el perímetro a partir de la circunferencia a partir del área del círculo? ¿Cómo hallo el área del círculo a partir del perímetro de la circunferencia? ¿Están entonces relacionados el perímetro y el área de una circunferencia y un círculo del mismo radio respectivamente? ¿Cómo es esa relación?
a. Si se consideran los valores negativos de la variable independiente ¿se sigue cumpliendo la conjetura	<b>R1.</b> Si se sigue cumpliendo porque la derivada de la integral es la función que se deriva. <b>R2.</b> No se cumple	<b>CR1.</b> ¿y al contrario? <b>CR2.</b> ¿Por qué no se cumple? ¿Cuál es la conjetura anterior?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

---

<p>anterior? ¿por qué? Explique ampliamente sus respuestas.</p>	
<p>b. Si se tienen magnitudes variables que tengan el mismo comportamiento, pero en otros fenómenos, ¿la conjetura se sigue cumpliendo? ¿por qué?</p>	<p>Si las magnitudes tienen comportamiento lineal y cuadrático se cumple que la derivada de la magnitud cuadrática es la magnitud lineal y la integral de la función lineal es igual a la magnitud cuadrática haciendo las constantes iguales.</p> <p>¿Cuál es el comportamiento del perímetro y el área de la circunferencia y el círculo respectivamente?</p>
<p>c. ¿Qué relación hay entre el área bajo la curva y la pendiente de la recta tangente al área bajo la curva? Justifique sus respuestas.</p>	<p><b>R1.</b> la derivada de la integral es igual a la función que se integra.</p> <p><b>R2.</b> Están relacionadas de forma inversa, esto es, la derivada de la integral es igual a la función que se integra y la integral de la derivada es igual a la función que se derivada. La una deshace lo que hace la otra.</p> <p>¿Qué relación hay entre derivada e integral?</p> <p><b>CRI.</b> ¿Y, al contrario, la derivada de la integral?</p>
<p>d. Represente algebraicamente la relación encontrada.</p>	$\int f'(x) dx = f(x)$ $\frac{d}{dx} \left[ \int f(x) dx \right] = f(x)$
<p>e. ¿Dicha relación se cumple siempre? Si no es así, ¿en qué condiciones se cumple?</p>	<p><b>RI.</b> Para que la integral de la derivada exista, la función debe ser derivable. Para que la derivada de la función integral exista la función debe ser integrable.</p> <p>¿Qué se necesita para que la primera y segunda relación existan?</p> <p><b>CRI.</b> ¿Cuál función? ¿Cuándo una función es derivable? ¿Cuándo una función es integrable?</p>

---

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

### 4.3 Fase III: Pilotaje de la secuencia

El pilotaje de la secuencia se realizó con tres estudiantes de ingeniería, los cuales estaban viendo por primera vez el curso de Cálculo Integral. La prueba piloto se llevó a cabo a principios del primer periodo académico del año 2018 (2018-I). En ese momento, la secuencia estaba conformada por dos situaciones matemáticas realistas enmarcadas en dos fenómenos, Caída Libre y Área y Perímetro. La aplicación se realizó en horario extra-clase durante 8 horas con una duración de 4 horas por cada fenómeno.

Con el fin de enriquecer el diseño de las tareas enmarcadas en cada situación, se tuvieron en cuenta las producciones libres de los estudiantes y a partir de estas se rediseñaron algunas tareas con el fin de ser claros y no tan repetitivos.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

### 4.4 Fase IV: Descriptores a priori de los Niveles de Matemización

En esta fase tuvimos en cuenta el diseño de las tareas enmarcadas en cada situación matemática realista, el análisis a priori de la secuencia (Fase II), el análisis fenomenológico (Fase I) y los descriptores para cada nivel de matemización planteados por Henao y Vanegas (2012) y Gonzales (2015). Estos elementos nos permitieron realizar la caracterización a priori de los niveles de matemización logrados por estudiantes de un curso de Cálculo Integral que estudian el Teorema Fundamental del Cálculo con el uso de tecnologías digitales (Situacional, Referencial y General), con la finalidad de que estos descriptores sean los lentes teóricos para analizar la matemización del TFC asociada a la secuencia de tareas en cada situación matemática realista que aquí se plantea.

La caracterización a priori de los niveles de matemización que se presentan a continuación, se ajustan al diseño de la secuencia de tareas con el uso de tecnologías digitales diseñada para efectos de esta investigación (Fase II). Motivo por el cual, es necesario resaltar que, para futuras investigaciones, se debe revisar si lo esbozado en esta caracterización tiene en cuenta todos los elementos teóricos asociados a la matemización del objeto matemático de estudio de nuestra investigación en los tres primeros niveles.

A continuación, mostramos la caracterización a priori de los niveles Situacional, Referencial y General en cada uno de los fenómenos, Caída Libre; Área y Perímetro.

#### 4.4.1 Nivel Situacional FCL y FAP

Tabla 8.

*Descriptores a priori Nivel Situacional FCL y FAP*

Descriptores generales (Henao y Vanegas, 2012; Gonzales, 2015)	Caída Libre	Perímetro y Área
Identificar los elementos matemáticos pertinentes al problema situado en la realidad.	Identificar y conocer el comportamiento de la distancia y velocidad con respecto al tiempo en la situación problema, de acuerdo con la información suministrada por el video, el uso de	Identificar y conocer el comportamiento del área del círculo y el perímetro de una circunferencia de radio $x$ de acuerdo con el uso de estrategias intuitivas y conocimientos

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Esquematizar, formular y visualizar un problema de varias maneras.	estrategias intuitivas y/o conocimientos previos.	
Realizar las primeras representaciones ligadas al contexto.	Interpretar información tabular y predecir el comportamiento de las magnitudes variables (distancia, velocidad) implicadas en la situación problema.	Plantear supuestos acerca de la relación entre las magnitudes variables (área círculo-perímetro circunferencia) con las ideas de la región barrida por el rastro de los segmentos que se forman bajo la función perímetro de la circunferencia de radio $x$ y la magnitud de la pendiente de la recta tangente en cualquier punto a la función área del círculo del mismo radio.
Representar el problema de acuerdo con los conceptos matemáticos pertinentes y plantear supuestos, donde dichas representaciones están ligadas al contexto.	Plantear supuestos acerca de la relación entre las magnitudes variables (distancia-velocidad) con las ideas de acumulación del cambio y la razón de cambio de la acumulación en intervalos de tiempo.	

## 4.4.2 Nivel Referencial FCL y FAP

Tabla 9.

*Descriptorios a priori Nivel Referencial FCL y FAP*

<b>Descriptorios generales (Henao y Vanegas, 2012; Gonzales, 2015)</b>	<b>Caída Libre</b>	<b>Perímetro y Área</b>
Comprender las relaciones existentes entre el lenguaje del problema y el lenguaje formal y simbólico que se necesita para comprenderlo en términos matemáticos.	Identificar y representar la distancia recorrida como la acumulación del cambio de la velocidad.	Identificar y representar el área de un círculo de radio $x$ como la región barrida por el rastro de los segmentos que se forman bajo la función perímetro.
Encontrar regularidades, relaciones y patrones.	Identificar y representar la velocidad de la pelota como la razón de cambio de la acumulación de la velocidad.	Identificar y representar el perímetro de una circunferencia de radio $x$ como la pendiente de la recta tangente a la curva área en cualquier punto.
Crear diferentes modelos matemáticos particulares de la situación-problema, aunque se visualiza un vínculo con el contexto.	Plantear supuestos enriquecidos con objetos matemáticos acerca de cómo encontrar una magnitud variable (distancia, velocidad) conociendo la otra.	Plantear supuestos enriquecidos con objetos matemáticos acerca de cómo encontrar una magnitud variable (área del círculo, perímetro de la circunferencia) conociendo la otra.
Enriquecer las representaciones con objetos matemáticos.	Identificar y representar la relación existente entre las magnitudes variables (distancia-velocidad), acumulación del cambio de la velocidad (distancia) y razón de cambio de la acumulación de la velocidad (velocidad).	Identificar y representar la relación existente entre las magnitudes variables (área círculo, perímetro circunferencia), acumulación de segmentos formados bajo la curva perímetro (área círculo) y pendiente de la recta tangente a la curva área en función del radio en cualquier punto (perímetro circunferencia).
Traducir el problema a términos matemáticos.		

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

**4.4.3 Nivel General FCL y FAP**

Tabla 10.

*Descriptorios a priori Nivel General FCL y FAP*

<b>Descriptorios generales (Henao y Vanegas, 2012; Gonzales, 2015)</b>	<b>Caída Libre; Perímetro y Área</b>
Construir de expresiones algebraicas.	Representar algebraicamente la relación existente entre derivada e integral.
Trabajar con notaciones y símbolos de la matemática para la obtención de modelos generales.	
Utilizar operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico.	Explicar gráficamente la relación encontrada.
Refinar y ajustar los modelos matemáticos mediante un proceso de combinación e integración de modelos.	Verificar si dicha relación se cumple para cualquier fenómeno que implique magnitudes variables que tengan el mismo comportamiento.
Generalizar lo encontrado en el Nivel Referencial, lo cual implica para Freudenthal conectar varias situaciones reconociendo características similares que permiten que se clasifiquen dentro de un determinado tipo (Gravemeijer, 1994, p.104).	
Desprendimiento total del contexto.	En qué condiciones se cumple la relación entre derivada e integral.
Verificación del modelo encontrado.	

**4.5 Fase V: Trabajo de campo**

La secuencia de tareas diseñadas en cada situación matemática realista enmarcada en cada fenómeno se implementó a principios del segundo periodo académico del año 2018 (2018 - II).

La aplicación de la secuencia se llevó a cabo aproximadamente durante 8 horas equivalentes a 4 horas semanales, en las cuales se aplicaron las dos situaciones enmarcadas en un fenómeno, es decir, 4 horas para la secuencia diseñada en cada fenómeno (FCA y FAP).

Para la recolección de datos se tuvieron en cuenta las hojas de trabajo de los estudiantes y la videograbación de las sesiones de la aplicación simultánea de las situaciones matemáticas realistas (trabajo individual e interacción grupal).

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

### **4.6 Fase VI: Selección Casos de Estudio**

Para la selección de los casos de estudio se realizó la observación previa del curso, escogiendo los estudiantes que estuvieran matriculados por primera vez, que participaran activamente del mismo y no les diera temor expresar sus ideas ante los demás compañeros, siendo seleccionados Juliana, Harold y Arturo (seudónimos).

Al momento de la intervención los estudiantes no habían estudiado el TFC. Para el desarrollo de la primera secuencia (Fenómeno Caída Libre) los estudiantes usaron el software Tracker, el cual les permitió estudiar el fenómeno de caída libre a través del seguimiento manual y automatizado de objetos, obteniendo de forma inmediata información tabular y gráfica acerca de la posición y velocidad, así como la exploración de ideas de variación y acumulación, donde primero se enfrentaron a la situación de “hallar la distancia recorrida por la pelota a partir de la velocidad de movimiento de la misma” y luego a la situación de “hallar la velocidad de movimiento de la pelota a partir de la distancia”.

Para el desarrollo de la segunda secuencia (Fenómeno Área y Perímetro) los estudiantes usaron el software GeoGebra, el cual les permitió la exploración de las ideas de la región barrida por el rastro de segmentos, a los cuales Cavalieri llama Indivisibles, así como la idea de la pendiente de la recta tangente a una curva, donde primero se enfrentaron a la situación de “hallar el área de un círculo de radio  $x$  a partir del perímetro de la circunferencia del mismo radio” y luego a la situación de “hallar el perímetro de una circunferencia de radio  $x$  a partir del área de un círculo del mismo radio”

### **4.7 Fase VII: Análisis de los datos y reporte de resultados**

Los datos recolectados se analizaron a la luz de la Teoría de la Educación Matemática Realista con el análisis a priori de la secuencia de tareas en cada situación y la caracterización a priori de los tres primeros niveles de matematización, Situacional, Referencial y General, con el fin

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

de describir la matematización del Teorema Fundamental del Cálculo durante la implementación de la secuencia.

### **5. Análisis de datos: el caso de Juliana, Harold y Arturo**

Juliana, Harold y Arturo son estudiantes de ingeniería de la Universidad Industrial de Santander. Harold y Arturo tienen 18 y 17 años respectivamente y cursan segundo semestre de ingeniería Mecánica. Juliana tiene 17 años y cursa segundo semestre de Geología. Los tres estudiantes, dentro de su programa académico, ven simultáneamente los cursos de Cálculo Integral y Física Mecánica.

El análisis de datos se realizó de forma individual y grupal, basados en el principio de interacción y reinención guiada. A continuación, se muestra el análisis de los resultados por cada nivel de matematización destacando lo sucedido en los principios de reinención guiada e interacción en los cuales se exhiben transcripciones de episodios de interacción entre estudiantes-estudiantes, estudiante-investigador, fotografías de las hojas de trabajo que evidencian el trabajo individual e influencia de las interacciones y fotografías de los videos de clase. Al principio del análisis de cada nivel de matematización se muestra una imagen que resume lo sucedido en cada nivel.

#### **5.1 Fenómeno Caída Libre Primera Situación**

A partir de la velocidad, halle la expresión algebraica que representa la distancia desde el punto de lanzamiento para cualquier instante de tiempo  $t$ .

##### **5.1.1 Matematización Horizontal – Nivel Situacional**

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

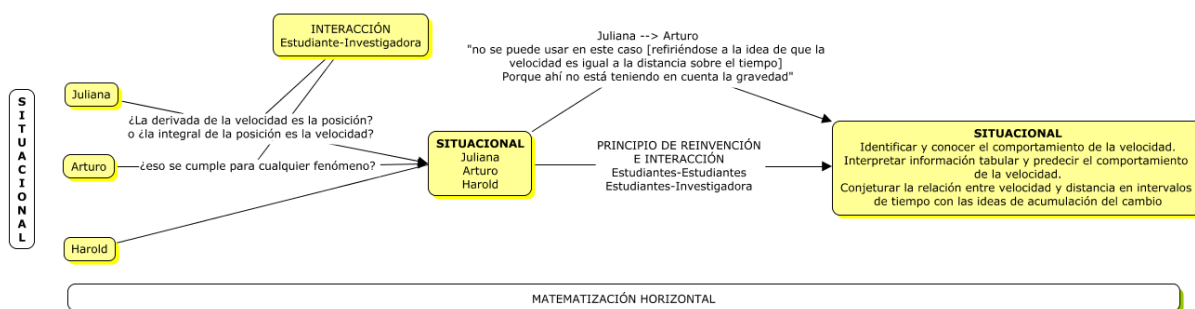


Figura 33. Resumen Matemización Horizontal - Primera Situación

5.1.1.1 El caso de Juliana (J). Usando las ideas y conocimientos previos acerca del fenómeno de caída libre, Juliana (J) recurre a las fórmulas usadas en dicho caso para hallar la distancia y la velocidad de la pelota en cualquier instante de tiempo  $t$ , trayendo la idea de que usando derivada o integral puede encontrar una magnitud conociendo la otra (Figura 34).

La imagen muestra una hoja de trabajo con los siguientes elementos:

- En la parte superior izquierda:  $h = 1,817m$  y  $v \rightarrow x \rightarrow t$ .
- Un punto de lista: 'si la pelota se suelta sería caída libre y la gravedad se tendría en cuenta.'
- Una fórmula derivada:  $v_f = v_i + at$  (con  $v_i = 0$  y  $v_f = gt$  anotados).
- Una fórmula derivada:  $x_f = \frac{1}{2}at^2$ .
- Una conclusión en un recuadro rojo: '→ uso la integral de la posición y obtengo la velocidad'.

Figura 34. Solución Juliana SIT1

I: ¿cómo lo hiciste?

J: estaba buscando hallar la velocidad y ahí si luego hallar la posición, o sea estaba buscando la fórmula de la velocidad, pero con la de caída libre y ahí sí cuando tuviera ese, **derivaba eso [refiriéndose a la velocidad] para obtener la de la posición.**

I: ¿o sea que la derivada de la velocidad es la posición?

J: ¡sí!

I: pero acá [refiriéndose a la hoja de trabajo de J] tú tienes que si integras la posición obtienes la velocidad.

J: es algo así, es que no me acuerdo si es la derivada o la integral.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

I: ¿por qué?

J: jaja porque en física nos lo dijeron.

Sus argumentaciones evidencian que no tiene claridad acerca de dicha relación y lo utiliza porque “el profesor de física les dijo”, puesto que a pesar de haber encontrado la expresión algebraica de la velocidad y la distancia utilizando las fórmulas de caída libre, al momento de argumentar “uso la integral de la posición y obtengo la velocidad” (Figura 34) no las utiliza para validarlo, es decir, no halla la integral de la posición para verificar si dicho resultado corresponde precisamente a la velocidad de la pelota encontrada con la fórmula de caída libre.

Al momento de la interacción con el investigador, J manifiesta implícitamente la relación inversa entre derivada e integral, como se observa en la Línea 2 y en el cuadro resaltado en la Figura 34, pero, en ambos casos, la forma de usarla resulta errada dado el contexto de la situación problema. Al momento de preguntarle el por qué, no manifiesta conciencia de dicha relación, puesto que solo resalta que usando derivada o integral puede resolver el problema, pero no precisamente por la relación que hay entre ellas.

Esto muestra un primer acercamiento a un modelo asociado con un nivel de matematización horizontal (Nivel Situacional), puesto que identifica el comportamiento de la velocidad y plantea el supuesto, con el uso de sus conocimientos previos, de que con derivada o integral puede resolver la situación, a pesar de que la relación entre velocidad y distancia no es del todo clara para ella, puesto que sabe que la velocidad y la distancia están relacionadas con la derivada e integral pero no sabe el porqué de esa relación y cuál es exactamente.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

5.1.1.2 *El caso de Arturo (A)*. Arturo no tiene en cuenta que la situación problema está enmarcada en el fenómeno de caída libre (Figura 35), él usa la idea de que la velocidad es igual a la distancia sobre el tiempo y que la aceleración es igual a la velocidad sobre el tiempo, sin cerciorarse de si la situación problema cumple las condiciones necesarias para usar dichas ideas, puesto que resultan contradictorias, dado que la primera es válida para fenómenos con aceleración nula y la segunda para fenómenos con aceleración constante.

En primera instancia, en su representación algebraica iguala a cero la aceleración de manera inconsciente, puesto que en sus posteriores acciones ignora dicho suceso, lo que evidencia dificultades en el proceso de comunicación.

Posteriormente, considera la aceleración constante (9.81) y recurre a sus conocimientos previos para resolver la situación tratando de ajustarlos sin validar las condiciones necesarias para poder usarlos, justificando sus procedimientos con el uso de métodos algebraicos. Arturo tiene presente que la gravedad está actuando, pero no tiene más justificaciones que el uso de las ideas del movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado. Lo que refleja el abuso y la inconciencia de los conceptos en las representaciones algebraicas realizadas.

$$\begin{array}{ll}
 3. \quad h = 1,817 \text{ m} & h = T^2 \cdot a \\
 v = \frac{h}{t} & h = 9,81 T^2 \\
 a = \frac{v}{t} = \frac{h}{t^2} = 0 &
 \end{array}$$

Figura 35. Solución Arturo SIT1

Así mismo, para él “a partir” (a partir de la velocidad halle la distancia) significa reemplazar la velocidad en otra fórmula (aceleración) y luego con ello despejar la distancia sin tener conciencia del fenómeno presentado, lo que muestra su interés por la búsqueda de fórmulas

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

para justificar sus procesos sin tener en cuenta el comportamiento de las magnitudes variables dentro del contexto presentado.

Al momento de la interacción con el investigador, a pesar de la pregunta de éste acerca de la validez de su procedimiento, el estudiante tiene claridad acerca de que la  $v = \frac{h}{t}$  se cumple para fenómenos en los cuales la velocidad sea constante, y en este caso, el estudiante argumenta que por el hecho de que la pelota caiga en línea recta se tiene que la velocidad es constante, pero no tiene conciencia de que esto implica que no haya aceleración contradiciendo su conocimiento de que la aceleración es igual a 9.81, según lo reemplazado en la fórmula, suceso que evidencia la confusión de la trayectoria del objeto con la gráfica de la función velocidad, asumiendo la velocidad lineal, hecho que implica que sea constante.

I: ¿en cualquier fenómeno físico se tiene que la velocidad es igual a la distancia sobre el tiempo?

A: mm, cuando la velocidad es constante se cumple.

I: ¿y en este caso la velocidad es constante?

A: creería que sí

I: ¿por qué?

A: porque la pelota va en línea recta.

La situación requiere el surgimiento de un modelo que identifique las leyes fundamentales que rigen el fenómeno de estudio. El estudiante no tiene claridad, acerca de la situación como tal, no reconoce las variables enmarcadas en el fenómeno de caída libre ni su comportamiento, pero trata de justificar el comportamiento de la magnitud variable velocidad con ideas de otros fenómenos (movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado); tampoco trae a colación las ideas de integral o derivada como posibles herramientas útiles para la solución de

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

la situación, pero a pesar de ello, podemos decir que Arturo se encuentra en el nivel Situacional realizando matematización horizontal, donde los principios de reinención e interacción guiada juegan un papel importante para ayudarlo a pasar de un nivel a otro y traer las ideas de que con la integral y la derivada puede resolver la situación.

5.1.1.3 *El caso de Harold (H)*. Harold tiene en cuenta que se trata de un fenómeno de caída libre y que para resolver la situación debe conocer la expresión algebraica de la velocidad en cualquier instante de tiempo, manifestando:

“esa línea sería la distancia y es como hacer una partición, una sumatoria de Riemann porque nos piden la distancia en instantes de tiempo y nos dice que debemos hacerla a partir de la velocidad y en este caso la velocidad inicial sería 0, y la velocidad final sería  $gt$ ”

1.  $h = 1,817\text{m}$   
 $v_i = 0$   
 $v_f = at = gt$

$\frac{d}{dt} = \frac{1,817\text{m}}{0,2\text{s}}$

$\int_{0,2}^{0} = \int_{0,2}^{0} f(x) dx$

$f(x) = 5t$

$g = 10\text{m/s}^2 \Rightarrow y = 5t \Rightarrow \int_0^{1,817} 5t dt \Rightarrow \int 5t = \frac{5t^2}{2}$

función - relación  $x/t$

$y = \text{posición} \Rightarrow y = 10gt + \frac{1}{2}gt^2$

$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow g = 10 \Rightarrow y = 5t^2$

$\Delta x = \frac{1,817}{n} \cdot z_k = \frac{1,817}{n} k + 0$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1,817k}{n} \right) \cdot 1,817$

Posición respecto al tiempo

Figura 36. Solución Harold SIT1

Pero, a pesar de recordar la fórmula de la velocidad de la pelota en dicho fenómeno ( $v = gt$ ), al momento de resolver la situación no la usa, por el contrario, asume la línea vertical que representa la trayectoria de la pelota como la función distancia y con la idea de particiones de dicha función, argumentado su idea por el hecho de que debe hallar la distancia en cualquier instante de tiempo, por lo que trata de ajustar la representación algebraica de la distancia, la cual representa por  $y$  y  $f(t)$  (Figura 36), de tal forma que al integrarla le dé una función

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

cuadrática para poder contar con la representación algebraica de la distancia para cualquier instante de tiempo.

Analizando las acciones ejecutadas por Harold, notamos que él tiene la idea de que con la integral puede solucionar la situación, pero no tiene claridad de su significado y uso en este contexto, trata de ajustar las ideas de integral sin tener conciencia de que la variable  $y$  ya representa la distancia recorrida en cualquier instante de tiempo y que está integrando la distancia para obtener la distancia (Figura 36). Así mismo, se evidencia la falta de la constante de integración en la integral indefinida.

En el proceso de hallar la distancia en cualquier instante de tiempo dado, Harold representa la integral anteponiendo un signo negativo que ignora al calcular la integral. Al cuestionarlo sobre esto argumenta que: “ $y$  es la distancia desde el punto de lanzamiento, y entonces ahí sí sería positiva porque va en la misma dirección de la aceleración de la gravedad”, lo que evidencia la claridad que posee acerca de la acción de la gravedad en el movimiento de la pelota y el uso de la fórmula de la distancia de la pelota en el fenómeno de caída libre, el cual hace referencia a  $y = \pm \frac{1}{2}gt^2$ , donde el signo lo define como la dirección del movimiento con respecto a la dirección de la gravedad.

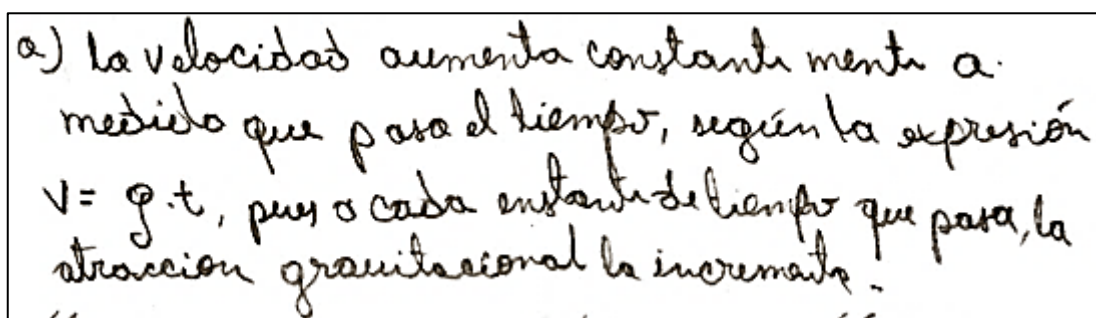
A diferencia de Juliana, él valida sus procedimientos comparando el resultado de la integral con la fórmula de caída libre. Con esto cae en la cuenta de que no son iguales, motivo por el cual abandona la situación problema manifestando que él sabe que con la integral puede hacerlo porque el profesor de física les dijo, pero no recuerda muy bien cómo hacerlo.

De acuerdo con los conocimientos previos acerca del fenómeno de caída libre, Harold identifica el comportamiento de la velocidad y con las ideas de integral trata de relacionar la distancia recorrida, pero sin tener en cuenta la velocidad.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

5.1.1.4 Principio de Interacción y Reinención Guiada. En el momento de interacción, todos llegan a la conclusión que para resolver la situación problema es necesario conocer la expresión algebraica de la velocidad.

Debido a las preguntas diseñadas para el nivel situacional y al comentario de Juliana respecto a la solución de Arturo, “no se puede usar en este caso porque ahí no está teniendo en cuenta la gravedad [refiriéndose a la idea de que la velocidad es igual a la distancia sobre el tiempo]”, Arturo cae en la cuenta de que la velocidad de la pelota depende de la gravedad y lo que él consideraba no se puede usar en este fenómeno porque no cumple las condiciones necesarias (Figura 37).



a) la velocidad aumenta constantemente a medida que pasa el tiempo, según la expresión  $v = g \cdot t$ , pues a cada instante de tiempo que pasa, la atracción gravitacional la incrementa.

Figura 37. Comportamiento de la velocidad - Arturo

Bajo la exploración de dicha situación, con ayuda de los conocimientos previos, la representación tabular y gráfica de los puntos que representan la velocidad (Figura 38) e interacción entre pares, estudiante software y estudiante-investigador, los estudiantes concluyen que dicha velocidad es afectada por la gravedad ( $g$ ), esto es, a medida que pasa el tiempo, la velocidad aumenta por la acción de la gravedad, por tanto, la expresión que representa la velocidad de la pelota en cualquier instante de tiempo está dada por  $v = gt$ .

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

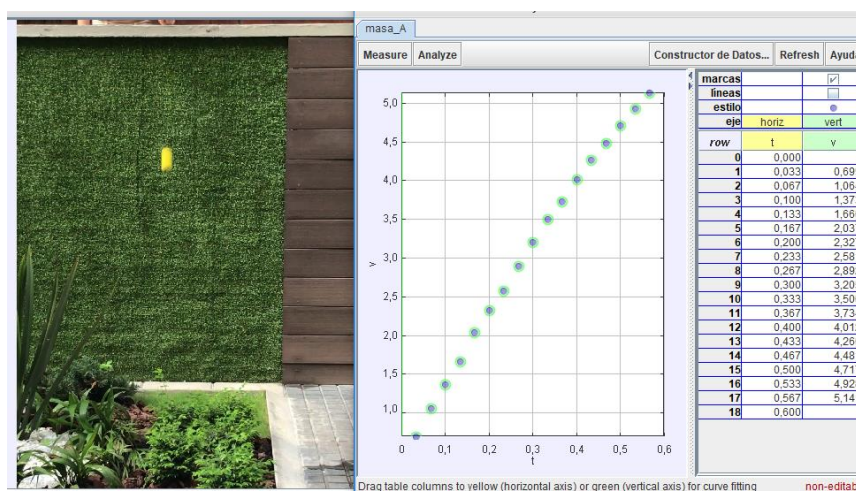


Figura 38. Representación tabular y gráfica de la velocidad de la pelota en Tracker

Las representaciones gráficas (Figura 39) dadas por cada uno de los estudiantes corresponden a la gráfica de una recta. Juliana y Harold tienen en cuenta las unidades de medida tanto de la velocidad como del tiempo, y Harold tiene presente que el comportamiento de la velocidad de forma teórica, dadas las condiciones ideales, es lineal y en el real se distorsiona dicho comportamiento justificando que hay variables que no se pueden controlar, hecho que muestra la conciencia que posee acerca de la presencia del margen de error en los fenómenos reales puesto que las condiciones no son ideales como en lo teórico. Por el contrario, Arturo realiza la gráfica del comportamiento de la velocidad sin tener en cuenta las unidades de medida y al igual que sus compañeros tiene en cuenta la influencia de la situación contexto al considerar solo el dado positivo de la variable independiente, que, en este caso, es la variable tiempo.

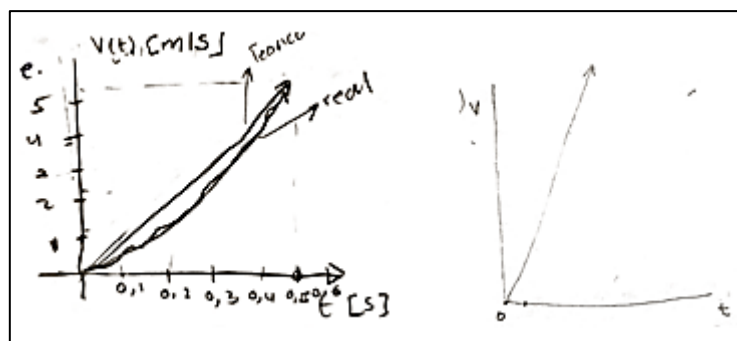


Figura 39. Gráficas Harold y Arturo

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Al hacer la regresión de los puntos que representan la velocidad de la pelota en cualquier instante de tiempo, seleccionan expresiones cuadráticas, cúbicas y sinusoidales como las funciones que representan el comportamiento de la velocidad (Figura 40) justificándolo por el hecho de que dichas curvas tocan más puntos, sin tener en cuenta que en la interacción anterior habían concluido que la velocidad aumentaba de forma constante y tenía un comportamiento lineal.

$$V = 6,33 \text{ m} (1,58 t + 0,6177)$$

$$V = A \cdot t^3 + B \cdot t^2 + C \cdot t + D$$

$$a. \underbrace{V = A t^2 + B t + C}_{\text{Parábola}}$$

Figura 40. Regresión en Tracker

Dado este hecho, la investigadora les sugiere cambiar la escala en el software para observar qué sucede con la velocidad de la pelota en tiempos posteriores, con ello, los estudiantes mencionan:

A, J, H: uy ¿qué pasó?

A: es que las que hemos dicho se ajustan solamente a ese grupo de puntos, solo ahí en ese momento.

I: ¿entonces cuál es la expresión algebraica que representa la velocidad de la pelota contra el tiempo?

H: lineal.

I: ¿una expresión lineal? ¿Por qué lineal?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

H: porque es solamente un parámetro por el tiempo, como la gravedad por el tiempo.

A: porque la velocidad aumenta de forma constante.

I: ¿la velocidad puede ser cuadrática en este fenómeno?

A: no, no puede ser cuadrática.

I: ¿por qué?

A: porque la velocidad es lineal y siempre va a ser una línea recta, cuando llega el momento del rebote, la velocidad baja abruptamente hasta llegar a cero y vuelve haber una velocidad lineal, porque siempre está actuando la gravedad.

J: ¡ah! claro, y en la cuadrática empieza a disminuir la velocidad y ni siquiera ha tocado el piso la primera vez.

Esto muestra que la situación contexto es un aspecto bastante importante a la hora de tomar decisiones en cuanto al comportamiento de la velocidad de la pelota, puesto que hay diferentes curvas que no tienen comportamiento lineal que se ajustan localmente a la situación, pero no son curvas que sirven para la predicción del comportamiento de la velocidad en tiempos posteriores.

Las justificaciones de los estudiantes, al observar de forma global la curva que mejor se ajusta, están enmarcadas en el fenómeno de caída libre y la actuación de la gravedad sobre el comportamiento de la velocidad de la pelota (Figura 41)

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

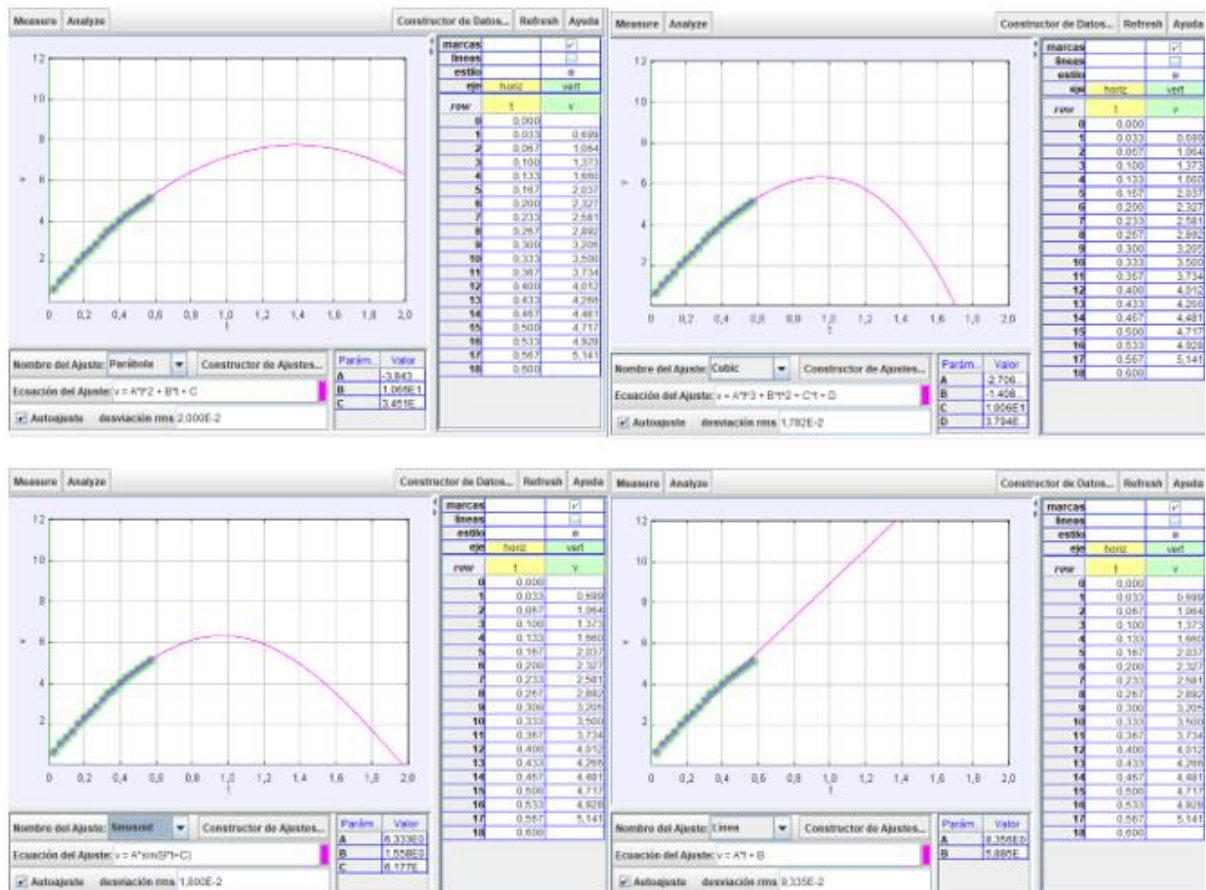


Figura 41. Curva de mejor ajuste forma global

En este punto, las justificaciones no son traídas de la memoria en cuanto a las fórmulas que representan la velocidad en el fenómeno de caída libre sino en el conocimiento de la situación misma, el análisis de las variables que actúan al momento de soltar la pelota y las que influyen en la velocidad de esta.

Después de la verificación de la expresión algebraica de la velocidad de la pelota con la regresión lineal, los estudiantes llegan a la conclusión de que ésta es aproximadamente igual a la predicha inicialmente dado que las condiciones de la situación no son ideales, pero los datos suministrados por el software se ajustan a la realidad.

Al momento de interpretar la representación geométrica de la acumulación del cambio de la velocidad con respecto al cambio de tiempo, fue un poco difícil para ellos llegar a deducir dicha interpretación, por lo que el principio de interacción fue importante puesto que para ellos era

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

claro el significado del cambio, pero gracias a la interacción entre pares y con el investigador, construyeron el significado geométrico de la acumulación del cambio.

I: ¿qué es el cambio?

H: el cambio es lo que no era antes.

I: en este caso, ¿el cambio de la velocidad con respecto al tiempo cual sería?

H: ah, de la velocidad entonces es en el eje  $y$ , el segmento de  $v_1$  a  $v_2$  (refiriéndose al segmento que se forma en el eje  $y$  desde el valor  $v_1$  hasta  $v_2$ ) sería el cambio de la velocidad con respecto al intervalo de tiempo.

J: no, el cambio se vería en el punto.

I: ¿cómo así en el punto?

J: yo digo que es del origen a un punto para que quede con respecto al tiempo, porque como dice Harold solo sería el cambio de la velocidad.

A: si, es como dice Juliana un punto tiene velocidad en un tiempo, otro punto tiene otra velocidad en otro tiempo.

I: ahora bien, ¿cuál sería geoméricamente la acumulación de ese cambio?

H: la línea que une los dos puntos [M].

J: la línea que dice M ese es el cambio de la velocidad con respecto al tiempo.

I: ¿esa es la acumulación del cambio de la  $v$  vs  $t$ ?

A: en definitiva, la recta.

I: ¿entonces la línea recta que representa la velocidad contra el tiempo sería la acumulación del cambio de la velocidad? ¿Qué es acumulación?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

H: la suma, es como tener plata y le sumo más plata estoy acumulando plata.

J: la acumulación de ese cambio sería como lo debajo de la línea. Ósea lo que queda entre la línea y la recta del tiempo.

H: ósea el área (bajo la curva)

Con esas ideas, Harold reconoce la necesidad de generar un modelo algebraico que represente la acumulación del cambio de la velocidad respecto al cambio de tiempo, dándose lo siguiente:

H: ¿cómo puedo representar la acumulación del cambio de la velocidad con respecto al cambio de tiempo en una notación matemática?

I: ¿cuál es la acumulación del cambio de la velocidad con respecto al cambio de tiempo?

H: todo lo que está debajo de la línea [refiriéndose al segmento que une dos puntos que representan la velocidad contra el tiempo]

I: ¿cómo puedes hallar cuál es la magnitud de la acumulación de ese cambio?

H: toda esa acumulación es un área, si yo integro la función me da toda el área, toda la acumulación [señalando la parte inferior de la curva que representa la velocidad contra el tiempo] pero yo no quiero hallarla toda.

I: ¿cuál quieres hallar?

H: la acumulación en ese punto.

I: ¿en ese punto?

H: en ese punto no, en ese intervalo perdón.

I: ¿puedes integrar solo una parte de la función?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

H: eso si no sé.

En la transcripción anterior (resaltado con rojo) se evidencia la falta de conceptualización del significado de la integral definida y la indefinida, puesto que tiene la idea de que con la integral puede calcular áreas, pero no siempre es así.

En el momento de la interacción, él se refiere a la integral de la función velocidad definida en los valores positivos de la variable independiente, pero menciona que al integrar la función velocidad, obtendrá solo el área bajo la curva, pero no está teniendo en cuenta que al mencionar “integro la función” se está refiriendo a una integral indefinida puesto que no ha dado los límites de integración para obtener así el área bajo la curva de la función velocidad en un intervalo de tiempo.

El software no es un limitante para el cálculo del área bajo la curva velocidad en intervalos de tiempo, al contrario, hace que este proceso sea más rápido y sencillo. Teniendo en cuenta que el dominio de la función velocidad son los reales positivos, las áreas bajo la curva velocidad son siempre positivas. Al momento de comparar la tabla área con la tabla distancia recorrida por la pelota en los mismos intervalos de tiempo, los estudiantes logran conjeturar la relación entre la distancia recorrida por la pelota y la velocidad utilizando la idea del área bajo la curva velocidad.

En el caso de Harold, la conjetura (Figura 42) está dada a partir de la casi igualdad de los datos presentados en las dos tablas. En el momento de la comparación de ellas, se evidencia la claridad que posee acerca de la interpretación de la acumulación del cambio, no de cualquier curva sino de la que representa la velocidad de la pelota con respecto al tiempo.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Las relaciones entre ellas son extremadamente iguales, el valor de la distancia recorrida ( $\Delta r$ ) a la acumulación del cambio de la velocidad.

$\Delta r$  es el área bajo la curva en un determinado intervalo

Figura 42. Conjetura Harold

Al momento de conjeturar, aparecen nociones de un modelo algebraico. La distancia recorrida por la pelota la representa por  $\Delta r$ , puesto que manifiesta que es la diferencia de las distancias recorridas en los extremos del intervalo. La conjetura, a partir de lo escrito en su hoja de trabajo, se puede transcribir como “la distancia recorrida en un intervalo equivale al área bajo la curva en un determinado intervalo”

En la interacción dada, se cuestiona acerca de si el área bajo cualquier curva en un intervalo de tiempo es igual a la distancia recorrida teniendo en cuenta la conjetura de Harold. En este momento, el papel del investigador como guía juega un papel importante, puesto que con preguntas y acciones los estudiantes caen en la cuenta de que no puede ser cualquier curva, ser una curva que represente la velocidad a través del tiempo cuyo dominio sea los reales positivos dado el contexto de la situación.

I: ¿qué observaron al momento de comparar las tablas?

A: son exactas.

H: exactas no, muy muy similares.

A: pues sí, y por eso mi conjetura es que el área bajo la curva en un intervalo de tiempo se puede interpretar como la distancia recorrida por un cuerpo en ese intervalo de tiempo.

I: ¿el área bajo cualquier curva se puede interpretar como la distancia recorrida?

J, A: sí, yo digo que sí.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

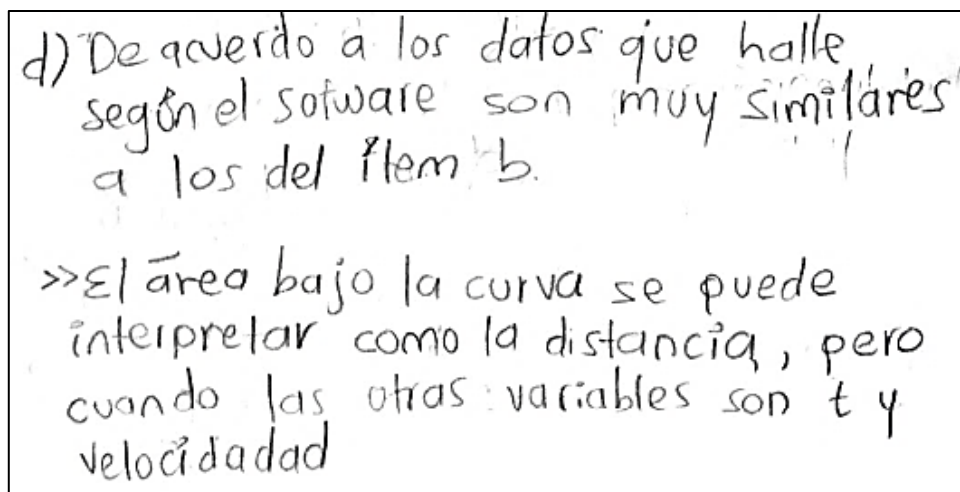
I: [en el tablero hizo la gráfica de una curva que representaba el costo total de una llamada con respecto al tiempo] En este intervalo de tiempo, ¿el área bajo la curva representa la distancia de...?

J: ah, no, el área bajo la curva velocidad contra tiempo.

H: representaría la distancia, pero si estuviéramos hablando de velocidad, pero estamos hablando de costo total de una llamada esa área debe representar algo relacionado con valor que se paga en dinero o algo así.

Arturo muestra su conjetura en el proceso de interacción (resaltada con rojo en la transcripción anterior) a pesar de no haberla escrito en su hoja de trabajo, es muy similar a la conjetura dada por Harold, excepto que Arturo tiene en cuenta que dicha curva está definida en el tiempo, considerando así la parte positiva de la función, hecho que Harold no aclara. Por otro lado, los dos hacen referencia al área bajo la curva, pero no aclaran cuál curva, hecho que se aclara con el proceso de interacción anterior.

En el caso de Juliana, a pesar de que las tablas representan el área y la distancia en intervalos de tiempo, ella asume la relación de forma general (Figura 43), aclarando que el área debe ser bajo la curva velocidad contra el tiempo, puesto que si se tiene otra curva su significado no se justaría al contexto presentado en esta situación. Suceso que muestra la importancia de la presencia del contexto e interpretación del área bajo la curva en el mismo.



d) De acuerdo a los datos que halle según el software son muy similares a los del ítem b.

>> El área bajo la curva se puede interpretar como la distancia, pero cuando las otras variables son  $t$  y velocidad

Figura 43. Conjetura Juliana

Con las conjeturas realizadas por los estudiantes se muestra que el proceso de reinención guiada e interacción juega un papel importante en el conocimiento de la situación y la búsqueda de relaciones entre las magnitudes variables velocidad y distancia con las ideas del área bajo la curva velocidad contra el tiempo, esto es, la acumulación del cambio de la velocidad contra el tiempo, entendiendo que el tiempo está definido para los números reales positivos. Por lo que, podemos decir que las preguntas diseñadas para el proceso de reinención guiada en el nivel situacional ayudan a aclarar las dudas presentes al momento de enfrentarse a la situación sin ninguna interacción.

**5.1.2 Matemización Vertical – Nivel Referencial.** A partir de la conjetura y el modelo realizado en el nivel situacional, se esperaba que los estudiantes generalizaran la conjetura para instantes de tiempo, pero la pregunta ¿qué relación existe entre el área bajo la curva velocidad y la distancia recorrida en un instante de tiempo? les generó confusión puesto que argumentaron que en un instante de tiempo no se recorre distancia.

Por ello, la interacción entre investigador estudiante fue indispensable, al generar preguntas como ¿en el instante  $t = 0.267s$  la pelota no ha recorrido nada? ¿la distancia recorrida es cero? logró que los estudiantes comprendieran mejor la pregunta, por lo tanto, consideramos que esta

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

pregunta debe replantearse así: **¿qué relación existe entre el área bajo la curva velocidad y la distancia recorrida por la pelota hasta un instante de tiempo?**

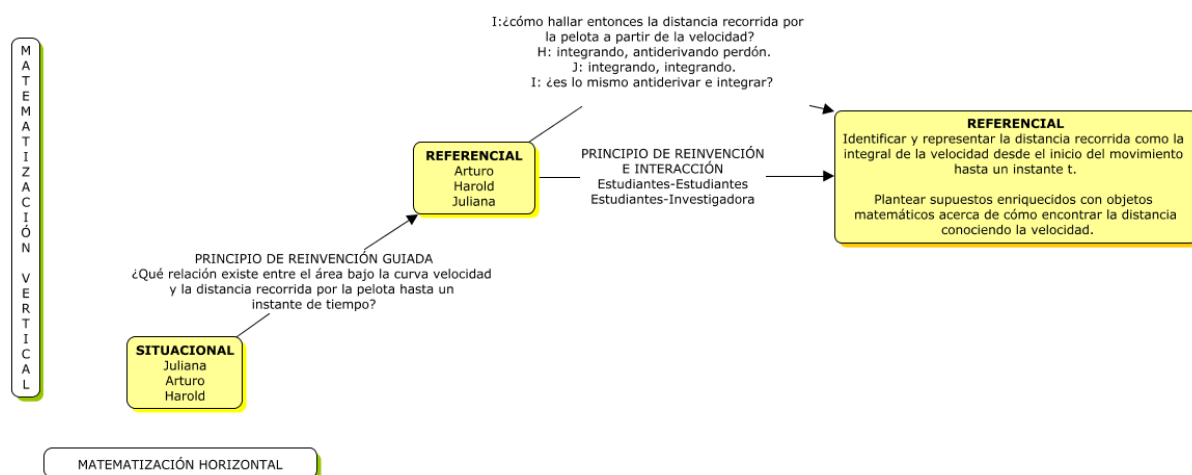


Figura 44. Resumen Nivel Referencial Primera Situación

5.1.2.1 *El caso de Arturo (A)*. A pesar de que Arturo tiene la confusión anterior, antes de darse el principio de interacción, él relaciona la pregunta con la conjetura creada en el nivel anterior, planteando un modelo retórico a partir de la reflexión de esta (Figura 45).

Al cuestionarlo acerca de su conjetura, sus argumentos están soportados por el uso del software a través de la comparación entre el área bajo la curva velocidad, desde el inicio del movimiento hasta el instante de tiempo, con la distancia recorrida por la pelota hasta el mismo instante. La respuesta que se presenta como evidencia es una transcripción de lo que el estudiante respondió en su hoja de trabajo.

“Se sabe que el área bajo la curva de la gráfica velocidad con respecto al tiempo representa la distancia recorrida en ese intervalo, entonces, si solo estamos tomando en cuenta un instante de tiempo, debajo del punto que representa la velocidad con respecto al tiempo solo hay una línea, por tanto, no hay área, lo que se puede interpretar como que en un intervalo infinitamente pequeño no existe desplazamiento. Si, por el contrario, consideramos el área bajo la curva desde que el tiempo es 0 hasta un instante determinado del tiempo, el área bajo esa curva representará la distancia que se ha recorrido hasta el instante previamente seleccionado” (Arturo)

Figura 45. "Modelo de" A

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

5.1.2.2 *El caso de Harold (H)*. Harold crea un modelo algebraico y gráfico (Figura 46) de la relación entre el área bajo la curva velocidad y la distancia recorrida por la pelota hasta cualquier instante de tiempo, siendo este un “modelo de” que muestra el significado del área bajo la curva velocidad en el contexto de la situación.

Sin duda alguna, el modelo gráfico es bastante claro, “el área bajo la curva velocidad desde cero hasta un instante de tiempo es igual a la distancia recorrida” y es precisamente lo que representa de forma algebraica. En los modelos de Harold no se evidencia claridad acerca de si es la distancia recorrida hasta ese instante o la función distancia, puesto que la distancia recorrida hasta ese instante sería  $r(I_1)$  y la función distancia  $r(t)$ . Lo anterior da evidencia de la dificultad que tiene Harold para realizar una representación algebraica clara de la relación encontrada, puesto que en el momento de la interacción aclara que representa la distancia recorrida hasta ese instante, pero en su modelo algebraico no logra manifestar esa idea con claridad.

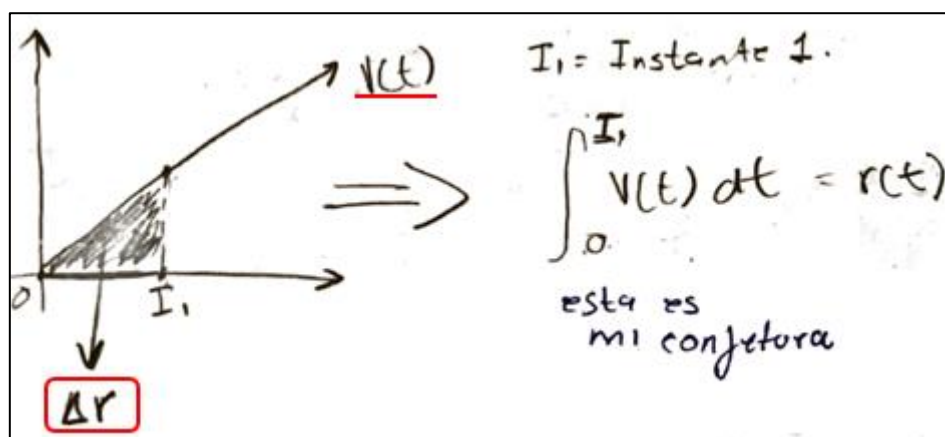
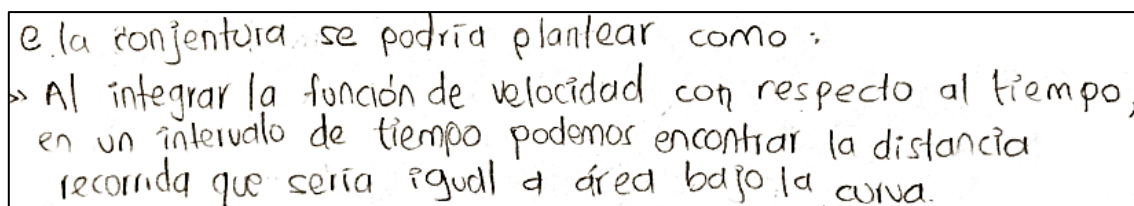


Figura 46. "Modelo de" H

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

5.1.2.3 *El caso de Juliana (J)*. Juliana al igual que Arturo realiza un modelo retórico (Figura 47). Al escribir la relación encontrada, menciona que hay una equivalencia con la integral de la función velocidad contra el tiempo en un intervalo de tiempo, el área bajo la curva y la distancia recorrida; pero no explicita que son equivalentes siempre y cuando se den en los mismos intervalos de tiempo, hecho que aclara al momento de la interacción entre pares que se dio de forma posterior.



e la conjetura se podría plantear como :  
 > Al integrar la función de velocidad con respecto al tiempo, en un intervalo de tiempo podemos encontrar la distancia recorrida que sería igual a área bajo la curva.

Figura 47. "Modelo de" J

5.1.2.4 *Principio de Interacción y Reinención Guiada*. Al momento de pedirles hallar la expresión algebraica que representa la distancia recorrida por la pelota a partir de la velocidad, el modelo creado por Juliana y Arturo hace referencia a:

$$x(t) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Donde  $x(t)$  es la distancia recorrida,  $t_1$  y  $t_2$  son instantes de tiempo cualquiera y  $t_2 > t_1$ , motivo por el cual se da la siguiente intervención con el fin de aclarar el significado de la representación algebraica dada.

I: supongamos que  $t_1 = 0.133$  y  $t_2 = 0.247$  ¿esa integral cuánto da?

A: con en el software da 0.307

I: entonces  $x(t) = 0.307$ , ¿verdad?

J: no porque  $x(t)$  es una función y ahí no está en función del tiempo, eso es solo para ese intervalo. O sea, ahí será  $x = 0.307$

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

I: entonces como hallamos la expresión  $x(t)$  que representa la distancia recorrida por la pelota en cualquier instante de tiempo

J: con una integral indefinida

H: no, porque ahí estaríamos diciendo que es posible que el tiempo sea negativo

A: pero el tiempo si pudiera ser negativo, dependiendo del eje de referencia, pues en este caso vemos que no es negativo

H: a mí me parece que con la que yo hice [refiriéndose a la integral de 0 a  $t$  de  $v(t)dt$ ]

I: ¿por qué?

H: porque ya vimos que la distancia recorrida hasta un instante de tiempo es igual al área bajo la curva velocidad desde cero hasta ese instante, y ahí sería de 0 hasta  $t$ , donde  $t$  es el instante que varía, en la de Arturo hay dos instantes variando

J: sí, estoy de acuerdo con Harold, ese si nos sirve

Con el proceso de interacción, los estudiantes caen en la cuenta de la importancia de la interpretación de las representaciones algebraicas dadas y el significado de la integral definida e indefinida, mostrando a su vez la importancia de la situación contexto en la toma de decisiones al momento de desistir de la integral indefinida, puesto que estarían teniendo en cuenta tiempos negativos, suceso que resulta bastante significativo en la visión de la integral definida de forma global y no local, como lo es la definida. Así mismo, se evidencia que este proceso de interacción juega un papel importante puesto que lleva a los tres estudiantes a argumentar sus procedimientos y conceptualizar las representaciones algebraicas de la integral definida e indefinida.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Por ejemplo, Arturo en su modelo algebraico después de la interacción (Figura 48), llama al tiempo inicial  $t_0$  refiriéndose al tiempo inicial del movimiento a pesar de que en su modelo retórico (Figura 45) menciona que debe ser desde cero. Además, él tiene en cuenta el margen de error presente en los fenómenos reales, generando así el "modelo de" para hallar la distancia recorrida por la pelota hasta un instante de tiempo, modificando su modelo a partir de la interacción dada.

$$Y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n \text{no medido de la expresión} = \int_{t_0}^t V(t) dt$$

Figura 48. "Modelo de" algebraico A

Juliana al momento de la interacción plantea un modelo algebraico que representa la distancia recorrida por la pelota hasta cualquier instante de tiempo (Figura 49) como la integral de la velocidad con respecto al tiempo desde 0 hasta un instante de tiempo  $t$ .

- en un instante de tiempo, de acuerdo a la conjetura podemos usar  $\int$  siendo el  $t_1=0$

$$\int_0^t v(t) \cdot dt = \text{Distancia} \rightarrow \text{siendo } t_1=0 \text{ y } t \text{ cualquier tiempo}$$

Figura 49. "Modelo de" algebraico J

Al momento de verificar la conjetura encontrada anteriormente, es decir, comparar la expresión algebraica obtenida en la regresión de los puntos que representan la distancia, la encontrada de acuerdo con las fórmulas del fenómeno de caída libre y la integral de la velocidad con respecto al tiempo de 0 a  $t$ , surgen argumentos referidos totalmente a la situación ubicada en el contexto real:

I: ¿qué expresión obtuvieron al realizar la regresión de los puntos que representan la distancia con respecto al tiempo?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

H: muy parecida,  $4.48t^2$ , más cercano al teórico y también cercano al que hallamos con integral, entonces si es verdad

J: si son muy parecidas, pero hay unos valores para B y C [la regresión es de la forma  $At^2 + Bt + C$ ]

A: esos valores hacen parte del error, porque en la realidad no todo es perfecto

J: yo creo que si los despreciamos entonces podemos decir que si es verdad, que la conjetura se cumple porque todos son muy parecidos

H: si hubiéramos contralado todas las variables ahí si debería dar igual al teórico

A pesar de las interacciones anteriores, donde se establece el uso de la integral definida para resolver la situación, surgieron confusiones acerca de la diferencia entre derivar e integrar. Para aclarar dichas dudas, el proceso de interacción entre pares juega un rol importante puesto que lleva a los estudiantes a argumentar sus ideas y definir el significado de integración y antiderivación.

I: ¿cómo hallar la distancia recorrida por la pelota a partir de la velocidad?

H: integrando, anti derivando perdón

J: integrando, integrando

I: ¿es lo mismo antiderivar e integrar?

A: no, no es lo mismo

H: no es lo mismo, antiderivar es encontrar una función tal que al derivarla de la función que estoy anti derivando

I: ¿entonces que es integrar?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

A: hallar el área debajo una curva

I: ¿siempre debajo de una curva?

H: no, puede ser encima de una curva

A: el área entre una curva y el eje  $x$

I: ¿cómo hallar entonces la distancia recorrida por la pelota a partir de la velocidad?

J: integrando

I: ¿integrando qué?

J: integrando la función velocidad contra tiempo

A: hallar el área bajo la curva velocidad desde 0 hasta  $t$

De acuerdo con los modelos creados por Arturo, Harold y Juliana, los cuales están basados en ideas matemáticas y el uso de vocabulario adecuado, podemos concluir que es un “modelo de” la situación puesto que, a partir de la reflexión y organización del modelo creado en el nivel anterior, identifican la distancia recorrida por la pelota en un instante de tiempo como el área bajo la curva velocidad desde el inicio del movimiento hasta ese instante.

**5.2 Fenómeno Caída Libre Segunda Situación.** A partir de la distancia, halle la expresión algebraica que representa la velocidad de la pelota para cualquier instante de tiempo  $t$ .

**5.2.1 Matematización Horizontal – Nivel Situacional**

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

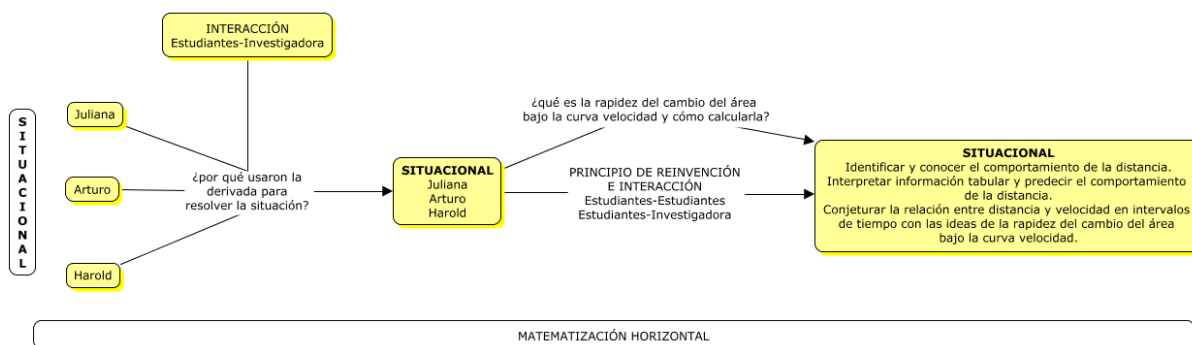


Figura 50. Resumen Matemización Horizontal Segunda Situación

5.2.1.1 El caso de Juliana, Harold y Arturo. Al enfrentarse a la segunda situación sin interacción ni reinvencción guiada, Juliana y Arturo representan de forma algebraica la relación entre distancia y velocidad con la derivada (Figura 51, Figura 52).

Dado que en la situación anterior se habían enfrentado a las ideas de integral de la función velocidad contra el tiempo y traían de sus presaberes la idea de que para resolver este tipo de situaciones se puede utilizar la derivada o la integral, se esperaba que esta situación la resolvieran con la derivada.

$$\begin{array}{l}
 2 \quad \frac{dr}{dt} = v(t). \rightarrow \text{Derivo la función distancia con respecto} \\
 \text{al tiempo y obtengo la función velocidad} \\
 r(t) = 4,178t^2 \rightarrow \text{Derivo.} \quad r(t) = 4,178t^2 \rightarrow \text{Derivo} \\
 v(t) = 9,8t \quad (\text{parte teórica}) \quad v(t) = 8,356t \quad (\text{parte experimental})
 \end{array}$$

Figura 51. Solución Juliana SIT2

$$\begin{array}{l}
 2. \text{ La expresión de la distancia con respecto al tiempo obtenida integrando la velocidad} \\
 \text{con respecto al tiempo sería:} \\
 \boxed{r(t) = 4,178t^2} \\
 \text{entonces, para hallarla velocidad con respecto al tiempo, se debe derivar la distancia} \\
 \text{con respecto al tiempo.} \\
 v(t) = 2(4,178t)
 \end{array}$$

Figura 52. Solución Arturo SIT2

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Los estudiantes recurren a la expresión teórica (fórmula de distancia recorrida en el fenómeno de caída libre) y expresión algebraica experimental (regresión de los puntos que representan la distancia) de la distancia recorrida por la pelota en cualquier instante de tiempo y las derivaron. Al cuestionarles el por qué el uso de la derivada, justifican su procedimiento por el hecho de que al derivar la expresión algebraica de la distancia obtienen la representación algebraica de la velocidad hallada anteriormente, por lo tanto, catalogan su procedimiento como correcto, y concluyen que al derivar la función distancia con respecto al tiempo obtienen la función velocidad contra tiempo.

Harold, al igual que sus compañeros, deriva la función velocidad para hallar la expresión algebraica que representa la distancia con respecto al tiempo y en el modelo gráfico señala que la pendiente de la recta es igual a la velocidad, esto es, interpreta la derivada como la pendiente (Figura 53). Aunque no es explícito, podemos deducir que al señalar la pendiente hace referencia a la pendiente de la recta tangente a la curva distancia y que ésta es igual a la velocidad recorrida por la pelota. Acciones en las cuales trata de justificar la relación de su procedimiento con el significado de la derivada, sin conciencia del por qué se cumple dicha relación.

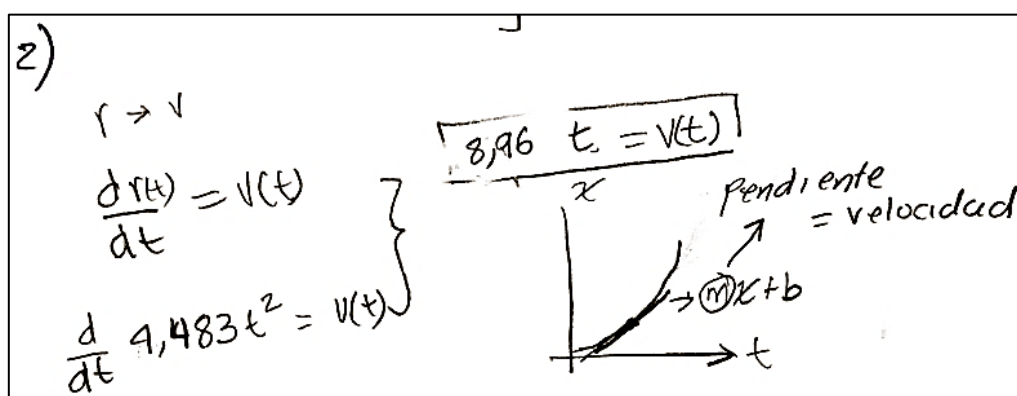


Figura 53. Solución Harold SIT2

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

5.2.1.2 *Principio de Interacción y Reinención Guiada*. Dado que los tres estudiantes, Juliana, Arturo y Harold derivaron la distancia para obtener la velocidad porque al derivar la expresión de la velocidad obtenían la expresión de la distancia hallada en la primera situación, Harold argumenta dicho procedimiento relacionándolo con el significado de la derivada y de nuevo aparece la justificación de que lo utilizado es porque lo han visto en la clase de física.

A: nosotros ya tenemos la expresión algebraica para hallar la distancia con respecto al tiempo, entonces esa tocaba derivarla para hallar la velocidad con respecto al tiempo.

I: ¿y por qué derivarla?

A: no sé.

H: porque al derivarla obtenemos la pendiente en el punto.

I: ¿la pendiente de qué?

A: la pendiente de la recta tangente a la curva

H: en ese instante de tiempo

J: y la velocidad es tangencial a la distancia.

I: ¿por qué?

H: porque lo vimos en física

H: o sea no, porque si derivamos algo, usualmente obtenemos la tasa de cambio y esa tasa de cambio es como lo de la recta tangente.

J: y hallando  $\frac{dr}{dt} = v(t)$ , lo hice con las dos y me da las que hallamos antes.

En las preguntas diseñadas para el proceso de reinención guiada en el nivel situacional, los estudiantes, con la información tabular dada en el software, hallan la velocidad aproximada

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

que lleva la pelota en un intervalo de tiempo determinado relacionándolo con la velocidad promedio que lleva la pelota en dichos intervalos, como en el caso de Harold, por ejemplo:

I: ¿cómo hallar la velocidad aproximada que llevaba la pelota en cada intervalo?

H: ¿podría tomar las velocidades del tiempo final... mm o el inicial?

I: ¿qué significa aproximado?

H: mm como más o menos.

I: por ejemplo, si yo te digo, los estudiantes de cálculo tienen aproximadamente 16 años.

H: mm como decir en promedio tiene 16 años, ah, entonces es una media, suman y dividen.

H: entonces cojo las velocidades en cada intervalo, final e inicial y hallo el promedio, sumo y divido en dos.

Al preguntarles por la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad en los cambios de tiempo correspondientes a los extremos de los intervalos anteriores, la interacción del investigador juega un rol importante en el proceso de reinención guiada puesto que orienta a los estudiantes a interpretar la razón de cambio promedio en la situación contexto. En los tres estudiantes se da una interacción similar entre investigador estudiante, la cuales se muestran a continuación:

Arturo

I: ¿qué es la rapidez del cambio? ¿Qué significan esos valores que tu hallaste [delta área]?

A: Son la cantidad de área que cambió de un instante de tiempo a otro.

I: ¿qué tan rápido cambió?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

A: eso se puede interpretar como una velocidad.

I: ¿Cómo hallas qué tan rápido cambia algo? Por ejemplo, pinté una región de esta mesa, ¿qué tan rápido lo hice?

A: eh, el tiempo que te demoraste pintando debajo de la distancia que recorriste pintando, ósea lo que pintaste sobre el tiempo que te demoraste en hacerlo.

I: ¿entonces como hallas que tan rápido cambió el área bajo la curva velocidad?

A: el tiempo serían los intervalos.

I: ¿los intervalos?

A: la distancia de los intervalos, ósea aquí sería 0.033

I: ¿qué tanto me demoré pintando esa área bajo la curva?

A: ah, pues el valor de esa área sobre el tiempo, ósea, el área que hay entre este y este [instantes de tiempo] entre el cambio del tiempo.

Juliana

I: ¿qué es rapidez?

J: ¿la magnitud de la velocidad?

I: ¿qué sería entonces rapidez del cambio de área?

J: ah, con qué velocidad está cambiando, ósea que tan rápido se mueve el área.

I: listo, el área cambió, ¿cómo calcular que tan rápido está cambiando?

J: lo que cambió sobre el tiempo.

I: ¿sobre el tiempo?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

J: sobre el delta de tiempo, ósea lo que se demoró. Entonces sería delta v sobre delta t.

Harold

I: ¿cuál sería la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad?

H: sería que tan rápido cambia esa área, ósea cual es la velocidad a la que cambia esa área.

I: ha bueno, ¿y entonces cómo la hallas?

H: necesito conocer el delta de área y el delta de tiempo.

I: ¿Por qué?

H: porque si divido el área entre el tiempo obtengo que tan rápido está llenándose esa área.

El darles ejemplos cotidianos a los estudiantes y cuestionarlos acerca del significado de la rapidez del cambio dio lugar a que hallaran de forma más sencilla y comprensible la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad, donde, a través de la comparación de la tabla que representa la velocidad aproximada y la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad, Arturo plantea su conjetura de forma retórica (Figura 54) aclarando que dichas tablas son equivalentes siempre y cuando dichos sucesos se den en los mismos intervalos de tiempo, hecho que no considera Juliana (Figura 55).

d) La rapidez con que cambian las áreas debajo de la curva de la gráfica  $v(t)$  en segmentos determinados de tiempo se puede interpretar como la magnitud de la velocidad aproximada en dichos segmentos de tiempo.

La rapidez con que cambian las áreas debajo de la curva de la gráfica  $v(t)$  en segmentos determinados de tiempo se puede interpretar como la magnitud de la velocidad aproximada en dichos segmentos de tiempo.

Figura 54. Conjetura retórica Arturo

la velocidad aproximada es igual a la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad en el cambio de tiempo.

Figura 55. Conjetura retórica Juliana

Harold plantea una conjetura retórica y algebraica, mostrando dificultades en el proceso de comunicación puesto que lo escrito de forma verbal no corresponde con lo escrito de forma algebraica (Figura 56). En la verbal menciona que la magnitud de la velocidad corresponde a la rapidez del cambio del área bajo la curva y en el algebraico hace referencia que dicha rapidez corresponde a la velocidad aproximada, siendo este último representado por la expresión encerrada en rojo, así mismo, a pesar de que allí escribe explícitamente  $\frac{A}{\Delta t}$  se está refiriendo al  $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ , esto es, la rapidez del cambio del área bajo la curva, entendiendo esta como “qué tan rápido está cambiando dicha área”.

d) La magnitud de la velocidad es muy similar a la rapidez del cambio del área bajo la curva

$$\Rightarrow \frac{f(t_2) + f(t_1)}{2} \approx \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

$$\overline{V}_{\text{aprox}} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Figura 56. Conjetura retórica y algebraica Harold

Al interactuar y discutir las conjeturas planteadas por cada uno de los estudiantes, se llega a que la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad corresponde a la rapidez del cambio de la distancia con respecto al tiempo, puesto que en la primera situación se llegó a que el área bajo la curva velocidad contra el tiempo, teniendo en cuenta que el tiempo está definido en los reales positivos, corresponde a la distancia recorrida por la pelota.

J: yo llegué a que la velocidad aproximada es igual a la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad.

I: ¿esa área bajo la curva velocidad que representa?

J: la distancia recorrida por la pelota.

I: entonces esa conjetura la puedo reescribir como...

A: la velocidad aproximada es igual a la rapidez del cambio de la distancia.

### 5.2.2 Matematización Vertical– Nivel Referencial

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

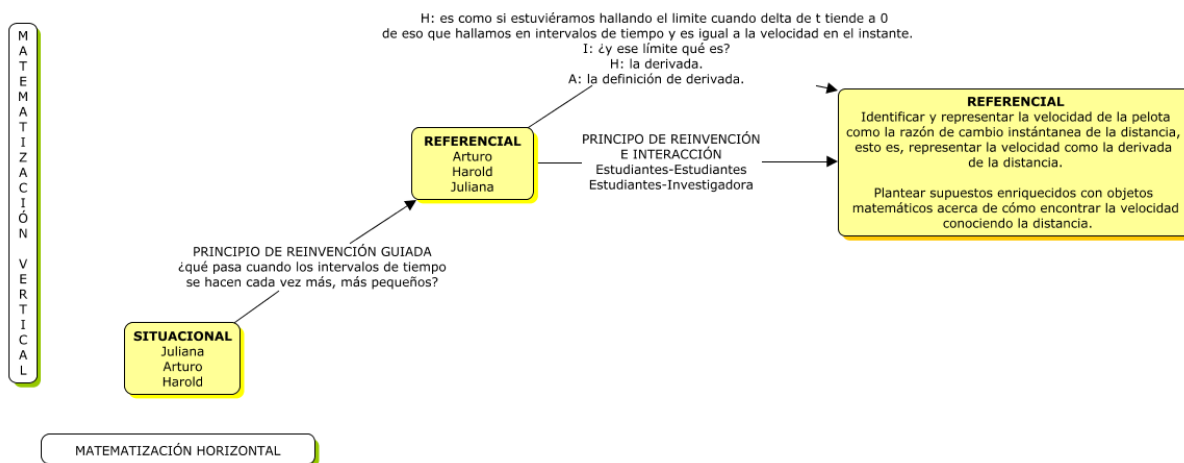


Figura 57. Resumen Nivel Referencial Segunda Situación

5.2.2.1 *El caso de Juliana, Harold y Arturo.* Después de haber encontrado la relación entre rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad en intervalos de tiempo y la velocidad promedio que lleva la pelota en los mismos intervalos de tiempo, se les pregunta acerca de qué sucede con dicha rapidez si los intervalos de tiempo se hicieran cada vez más pequeños. Los tres estudiantes, de acuerdo con la reflexión del modelo creado en el Nivel Situacional, logran identificar que si los intervalos de tiempo se hacen cada vez más pequeños se acercan a la velocidad instantánea.

Arturo menciona que dicha rapidez pasaría a ser la velocidad instantánea (Figura 58), denotando la rapidez como  $\frac{dr}{dt}$  y la velocidad instantánea como  $v$ , argumentando de la siguiente forma:

I: ¿qué pasa cuando los intervalos de tiempo se hacen cada vez más, más pequeños?

A: se llega a la velocidad instantánea

I: ¿por qué?

A: porque en la velocidad media o promedio sería la velocidad que lleva la pelota en ese pedacito de tiempo, entonces si el pedacito de tiempo se hace cada vez más, más pequeño se puede decir que es la velocidad en ese pedacito, o sea en el instante

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

“Si los intervalos se hacen cada vez más pequeños, podremos acercarnos a la velocidad instantánea”

$$\frac{dr}{dt} = V$$

Figura 58. Conjetura Arturo

Nótese que en sus argumentos Arturo no hace mención alguna acerca de lo que sucede con la rapidez de cambio como tal, es decir, pasaría de ser una rapidez de cambio en un intervalo de tiempo a una rapidez de cambio en un instante de tiempo, suceso que sí tiene en cuenta Harold (Figura 59), puesto que en su conjetura denota algebraicamente el significado del hecho de que los intervalos de tiempo se hagan cada vez más y más pequeños, relacionándolo con el límite cuando la magnitud de dicho intervalo tiende a cero, expresando dicho suceso como el diferencial de la distancia con respecto al diferencial del tiempo, mostrando así la claridad de la diferencia entre el delta y el diferencial.

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = V(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = V(t)$$

Figura 59. Conjetura Harold

Juliana, al igual que sus compañeros relaciona el suceso de la disminución de la magnitud de los intervalos con el límite cuando el delta del tiempo tiende a cero, expresando dicho suceso de forma retórica y algebraica (Figura 60).

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{velocidad en un instante}$$

Figura 60. Conjetura Juliana

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Para los estudiantes el hecho de que los intervalos de tiempo se hicieran cada vez más pequeños afecta de forma directa a la velocidad promedio, asumiendo que dicho suceso permite acercarse a la velocidad instantánea, donde también afecta la rapidez del cambio denotándolo como un límite, pero no explicitando el significado de dicha rapidez.

5.2.2.2 *Principio Interacción Guiada y Reinención.* Al discutir el significado del límite expresado en las conjeturas anteriores, llegan a que dicho límite es la definición de derivada de acuerdo con lo expresado por Arturo.

I: ¿qué pasa cuando los intervalos de tiempo se hacen cada vez más pequeños?

H: es como si estuviéramos hallando el límite cuando delta de  $t$  tiende a 0 de eso que hallamos en intervalos de tiempo y es igual a la velocidad en el instante

I: ¿y ese límite qué es?

H: la derivada

A: la definición de derivada

Por lo que no hubo duda en usar la derivada de la distancia para obtener la velocidad (Figura 61), puesto que al momento de comparar la expresión algebraica obtenida al derivar la distancia con la expresión de la velocidad hallada en la primera situación cayeron en la cuenta de que eran aproximadamente iguales, justificando la existencia de un margen de error por el hecho de que en la realidad no se controlan todas las variables, ni tampoco se tienen las condiciones ideales para que lo teórico se ajuste perfectamente.

“Sea  $r(t) = 4,178t^2$  la función que representa la posición de la pelota con respecto al tiempo,  $\frac{dr}{dt} = v$  entonces  $v = 2(4,178t)$  de esa ecuación se puede concluir que la velocidad aumenta linealmente a medida que pasa el tiempo” (Arturo)

Figura 61. Justificación Arturo

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

### 5.3 Fenómeno Caída Libre Primera y Segunda Situación

#### 5.3.1 Nivel General

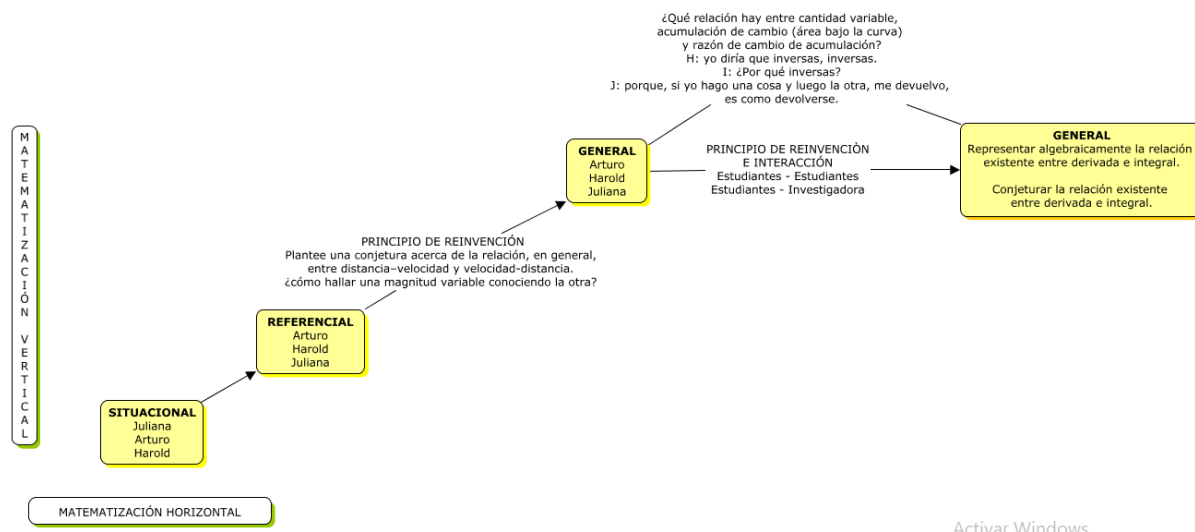


Figura 62. Resumen Nivel General Primera y Segunda Situación

5.3.1.1 El caso de Juliana, Harold y Arturo. Al momento de pedirles conjeturar la relación general entre distancia-velocidad y velocidad-distancia manifiestan las relaciones encontradas en las dos situaciones anteriores (Figura 63), mencionando que dicha relación se cumple siempre por el hecho de ser magnitudes que dependen del tiempo, puesto que como nada alterará dicha variable, la velocidad y la distancia no cambiarán abruptamente su comportamiento lineal y parabólico respectivamente.

H, J: todas dependen del tiempo.

J: y entonces si tengo la distancia la derivo y obtengo la velocidad, y si tengo la velocidad la integro y encuentro la distancia.

H: y como el tiempo no depende de nada, y es creciente siempre, eso siempre se cumple.

A: yo también hice esa conjetura.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Para hallar la distancia cuando tenemos la velocidad integramos de esta manera

$$\int_0^t v(t) \cdot dt = z(t)$$

cuando tenemos la distancia para encontrar la velocidad derivamos de esta manera

$$\frac{dx}{dt} = v(t), \text{ que también se podría plantear así:}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta d}{\Delta t} = v(t)$$

Figura 63. Relación magnitudes Juliana

Las justificaciones anteriores, muestran la influencia del contexto en la toma de decisiones y justificaciones de acuerdo con las conjeturas realizadas en las dos situaciones. En este momento no son conscientes de la relación entre derivada e integral puesto que están ligados totalmente a la situación de cómo encontrar una magnitud variable conociendo la otra sin tener en cuenta el comportamiento de estas.

Teniendo claras las relaciones entre las magnitudes variables involucradas en el fenómeno de caída libre, al momento de preguntarles si dichas relaciones se cumplen en otros fenómenos con magnitudes variables con el mismo comportamiento, Harold afirma que en otros fenómenos en los cuales estuviesen involucradas la velocidad y distancia contra el tiempo, la relación entre ellas con la derivada y la integral se seguía cumpliendo justificando dicho suceso por la presencia de la magnitud variable tiempo (Figura 64), ratificando las argumentaciones dadas anteriormente y sin tener en cuenta si en dichos fenómenos la distancia y la velocidad tienen comportamientos distintos al cuadrático y lineal respectivamente.

H, J, A: que implique velocidad, distancia y tiempo, sí.

I: ¿por qué?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

H: porque el tiempo al ser una magnitud que nada la va a alterar, teniendo la velocidad o la distancia podemos calcular la otra.

a) es valida debido a que en cualquier fenomeno en el que se relacione la distancia respecto a la velocidad o viceversa, el tiempo estara presente

Figura 64. Respuesta Harold

Juliana también afirma que la conjetura es válida en cualquier otro fenómeno, pero siempre y cuando se refiera a las magnitudes velocidad y distancia (Figura 65), justificándolo por el hecho de que si deriva la posición obtiene la velocidad despreciando el comportamiento de las mismas, esto es, sin importar cuál sea el comportamiento de la distancia, al derivarla, siempre obtendrá la velocidad. A pesar de que en justificaciones verbales manifiesta que la derivada se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a una curva en cualquier punto, en su afirmación retórica afirma que al derivar obtiene una recta tangente y esta corresponde a la velocidad, suceso que evidencia dificultades en el proceso de comunicación puesto que confunde el significado de la derivada con la recta tangente al momento de escribir sus conjeturas.

a si la conjetura seria valida en cualquier fenomeno ya que si derivamos la función posición obtendremos una recta tangente que seria la velocidad

Figura 65. Respuesta Juliana

A pesar de que en la pregunta se hace referencia a otras magnitudes con comportamiento lineal y cuadrático en fenómenos no necesariamente físicos, los estudiantes lo asocian con el significado ubicado en el mismo contexto, es decir, tienen en cuenta solo fenómenos que involucren las magnitudes velocidad y distancia. Las argumentaciones de Arturo (Figura 66),

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

a diferencia de sus compañeros, están ligadas al comportamiento cuadrático y lineal de las magnitudes, afirmando que si la distancia tiene un comportamiento cuadrático, la derivada es siempre una función lineal, lo cual significa que la velocidad está creciendo uniformemente, esto es, asocia la relación entre distancia y velocidad solo con comportamientos cuadráticos y lineales.

Si, ya que, por conocimiento teórico, sabemos que la velocidad es tangencial a la gráfica  $r(t)$ , lo que significa que la velocidad es la derivada de la función con respecto al tiempo y si  $r(t)$  es una función cuadrática, que describe una curva parabólica, su derivada será una función lineal y la velocidad crecerá uniformemente.

*Figura 66. Explicación Arturo*

5.3.1.2 *Principio de Interacción Guiada y Reinvención.* Al momento de preguntarles explícitamente acerca de la relación entre cantidad variable, acumulación del cambio y razón de cambio de la acumulación, les fue sencillo relacionar dichas ideas con la integral y derivada. A partir de las relaciones encontradas en las situaciones matemáticas realistas presentadas, concluyen que la derivada y la integral están relacionadas de forma inversa, en el sentido de que lo hecho por una la otra lo deshace.

A pesar de que Harold (Figura 67) realiza la representación algebraica de dichas relaciones refiriéndose a la distancia y la velocidad y hace operaciones con ellas, concluye de forma general que la integral es opuesta a la derivada sin verificar de forma algebraica si se cumple lo mismo al relacionar la derivada con la integral, es decir, si, utilizando su lenguaje, la derivada es opuesta a la integral, caso contrario a lo sucedido en la interacción, puesto que allí manifiesta que las dos están relacionadas de forma inversa tanto la integral con la derivada, como la derivada con la integral, dando el significado de inversa a la idea de que por ejemplo, al integrar una derivada obtiene la función original, argumentado siempre sus conjeturas por el proceso algebraico realizado, donde se evidencia la falta de conceptualización de la integral indefinida,

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

ya que no tiene en cuenta la constante de integración y parece no diferenciar el significado de la integral definida con el de la integral indefinida.

Handwritten mathematical notes showing the relationship between integration and differentiation. The notes include the following equations and text:

$$\int v(t) dt = r(t)$$

$$\frac{dr}{dt} = v(t)$$

$$\int \frac{dr}{dt} dt = r(t)$$

$$\int dr = r(t)$$

=> la integral es opuesta a la derivada

Figura 67. Relación derivada e integral Harold

En la argumentación dada por Arturo se evidencia la influencia del contexto al momento de realizar su conjetura, puesto que, a partir de lo observado en el comportamiento de las magnitudes variables velocidad y distancia con las ideas de integral y derivada, concluye que están relacionadas de forma opuesta, momento en el cual, Juliana le aclara que ella no las llamaría opuestas porque eso está relacionado con el signo de una magnitud positiva o negativa, para ella son inversas porque “si hace una cosa y luego la otra, se devuelve”.

H: la acumulación del cambio es lo opuesto de la razón o tasa de cambio, ósea el inverso.

Porque yo lo hice con las fórmulas y me dio que una contrarrestaba la otra. O sea, la integral de la velocidad es la distancia, y la derivada de la distancia es la velocidad y de ahí reemplacé la velocidad en la integral y ahí se cancela todo.

I: ¿se cancela, como así que se cancela?

H: la derivada se está cancelando con la integral... o sea, al integrar una derivada me da la función original.

I: ¿y lo contrario, si se deriva una función integral?

H, A, J: si claro, también.

I: ¿por qué?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

H: porque podemos utilizar las mismas fórmulas y reemplazamos diferente. O sea, la derivada de la distancia es la velocidad, y la distancia es la integral de la velocidad y ahí nos da.

A: yo la hice parecida, porque sabemos que el área bajo la curva de la función de la velocidad con respecto al tiempo, es decir, su acumulación es igual al espacio recorrido y sabemos también que la pendiente de la recta tangente en un punto en la gráfica de la distancia con respecto al tiempo es la velocidad, entonces, por esa razón yo puedo concluir que la derivada y la integral son funciones opuestas, operaciones opuestas.

J: es que opuestas no porque es como de signo contrario.

A: como decir negativo con positivo.

H: yo diría que inversas, inversas.

I: ¿por qué inversas?

J: porque, si yo hago una cosa y luego la otra, me devuelvo, es como devolverse.

A: porque, si yo hago esto y luego lo otro, entonces borro lo que hice.

Juliana (Figura 68) realiza una conjetura retórica de acuerdo con las relaciones establecidas en las situaciones presentadas anteriormente. A pesar de que dichas relaciones hacen referencia a las funciones velocidad y distancia con respecto al tiempo, su conjetura en general está asociada a la idea de que la derivada y la integral son inversas, refiriéndose a que si deriva una función integral o si integra una función derivada llega a la función que estaba integrando y derivando respectivamente.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

La relación está en que cuando derivó una función obtengo un resultado cualquiera y al integrar ese resultado voy a obtener la misma cantidad que yo había derivado

Lo mismo ocurre cuando yo integro cualquier función obtengo un resultado y al derivar ese resultado voy a obtener la misma cantidad que yo integré

>> por lo anterior yo consideraría que son inversas

Figura 68. Relación derivada e integral Juliana

### 5.4 Fenómeno Área y Perímetro Primera Situación

A partir del perímetro de una circunferencia de radio  $x$ , halle la expresión algebraica que representa el área del círculo en función del radio ( $x$ ).

#### 5.4.1 Matematización Horizontal – Nivel Situacional

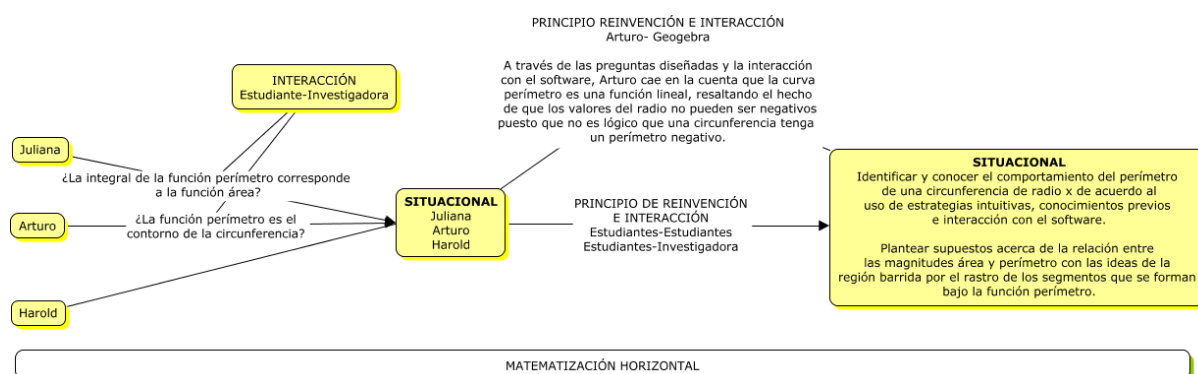


Figura 69. Resumen Matematización Horizontal - Primera Situación

5.4.1.1 El caso de Juliana (J). Usando las ideas y conocimientos previos acerca de las representaciones algebraicas del perímetro de una circunferencia de radio  $r$  y el área de un círculo del mismo radio, Juliana halla el área despejando el radio de la fórmula perímetro (Figura 70), cayendo en la cuenta de que con estas acciones está encontrando el área en función del perímetro utilizando las dos expresiones algebraicas y no está hallando el área a partir del perímetro en función del radio.

Motivo por el cual, decide utilizar otra estrategia integrando el perímetro, obteniendo así la expresión del área del círculo en función del radio más una constante, mostrando claridad en

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

el significado de la integral indefinida, suceso que no ocurría en el primer fenómeno trabajado, Caída Libre.

Al momento de justificar si la integral del perímetro corresponde a la función área, menciona que difieren en una constante, pero no interpreta el significado de la misma en la situación contexto, por tal razón no realiza una conclusión acerca del modelo creado para la solución de la situación problemática realista.

Handwritten work by Juliana:

$$\begin{array}{l}
 P = 2\pi r \\
 r = \frac{P}{2\pi}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 A = \pi r^2 \\
 A = \pi \left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 \rightarrow \text{Pero queda en función} \\
 \text{del perímetro}
 \end{array}
 \quad
 \int 2\pi r \cdot dr = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2 + C$$

Figura 70. Solución Juliana

5.4.1.2 *El caso de Arturo (A)*. Arturo se apoya en los conocimientos previos que posee acerca de las fórmulas del perímetro y el área de un círculo de radio  $x$  (Figura 71), trayendo la idea que con el uso de la integral puede calcular el área bajo una curva. En este caso, para Arturo, la curva es el contorno de la circunferencia, donde el área bajo dicha curva es la parte interna del círculo, que, según él correspondería a la integral de la función perímetro.

El perímetro en función del radio es  $P(x) = 2\pi x$ , por teoría, yo sé que el área de la circunferencia en función del radio es  $A(x) = \pi x^2$ , pero sólo ahora, conociendo la definición de integral, entiendo que el área dentro de un círculo es la integral de la función de ese perímetro.

Handwritten text by Arturo:

③ El perímetro en función del radio es  $P(x) = 2\pi x$ , por teoría, yo sé que el área de la circunferencia es en función del radio es  $A(x) = \pi x^2$ , pero sólo ahora, conociendo la definición de integral, entiendo que el área dentro de un círculo es la integral de la función de ese perímetro.

Figura 71. Solución Arturo

A: pues por teoría nosotros sabemos que la fórmula del perímetro en función del radio es  $p(x) = 2\pi x$  donde  $x$  es el radio. Y por teoría también sabemos que la fórmula para hallar el área de una circunferencia en función del radio es  $A(x) = \pi x^2$ .

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

A: esto que está aquí [haciendo referencia a la representación algebraica del perímetro en su hoja de trabajo], se puede interpretar como la integral de la función porque si la escribimos se ve que una es la antiderivada de la otra.

I: ¿por qué tú dices que es la integral?, ¿la integral de quién?

A: la función del área es la integral de la función del perímetro.

I: ¿por qué?

A: sabemos que la definición de integral dice que es el área que está debajo de una curva y el perímetro de una circunferencia es una curva y lo que está debajo de eso es lo que está debajo de ahí [haciendo referencia a la parte interna de la circunferencia] valga la redundancia.

Esto muestra la confusión que Arturo posee en cuanto al significado de la función perímetro con respecto al radio, puesto que, si bien es cierto, dicha función tiene relación con el contorno de la circunferencia, ésta hace referencia a la variación de la magnitud del contorno de la circunferencia con respecto a la variación del radio. Así mismo, para él, todo lo que se encuentra dentro de ese contorno es el área del círculo, y como, en el fenómeno anterior, cayeron en la cuenta de que con la integral definida pueden calcular el área bajo una función, justifica que la integral le sirve para solucionar la situación puesto que le están preguntado por la parte interna del círculo, que, según él, correspondería a la integral del perímetro.

Si bien es cierto, con el uso de la integral definida se puede calcular el área bajo una función o sobre una función y el eje horizontal de la variable independiente, él está asumiendo el contorno de la circunferencia como la función perímetro sin ser consciente de que dicho contorno tiene una magnitud que representa el perímetro de una circunferencia de radio  $x_1$  y no representa la función del perímetro de una circunferencia cuyo radio está variando.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

5.4.1.3 *El caso de Harold (H)*. Harold, al igual que sus compañeros, tiene claridad acerca de la expresión algebraica de la función perímetro y área de un círculo con respecto al radio. En su estrategia de solución (Figura 72), Harold deriva la función área e integra la función perímetro, ratificando el hecho de que al derivar la función área obtiene la expresión algebraica del perímetro y al integrar el perímetro obtiene la función área pero no cae en la cuenta de que al ser una integral indefinida está olvidando la constante. De su procedimiento algebraico, podemos deducir la influencia de lo trabajado en el primer fenómeno de Caída Libre, puesto que en su primera estrategia de solución utiliza la derivada y la integral, donde implícitamente está utilizando la relación inversa entre los procesos de integración y derivación, sin utilizar dicho suceso para argumentar su estrategia de solución.

$$\begin{array}{l}
 P = 2\pi r \qquad P(r) = 2\pi r \quad A(r) = \pi r^2 \\
 \frac{dA}{dr} = 2\pi r \Rightarrow \int 2\pi r = A(r) \rightarrow A(r) = \pi r^2 \\
 \text{Por lo tanto} \quad \int P = A \quad \& \quad \frac{d}{dr}(A(r)) = P
 \end{array}$$

Figura 72. Solución Harold

5.4.1.4 *Principio de Interacción y Reinención Guiada*. En el momento de interacción, todos llegan a la conclusión de que la integral del perímetro con respecto al radio es igual al área del círculo del mismo radio justificando ese hecho con los procedimientos algebraicos del cálculo de la integral indefinida de la función perímetro.

A pesar de que Harold y Arturo no tuvieron en cuenta la importancia de la constante  $C$ , puesto que la integral indefinida representa el conjunto de todas las primitivas de la función, Juliana, a diferencia de sus compañeros, sí la tiene en cuenta y resalta su importancia.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Cabe resaltar que, aunque en el fenómeno de Caída Libre se aclaró la importancia de tener en cuenta el dominio de la función y el significado de la integral definida, se evidencia la poca claridad de las diferencias entre integral definida e integral indefinida.

Al momento de pedirles el porqué de sus procedimientos los justifican por el hecho de que al resolver algebraicamente la “integral” obtienen la expresión algebraica del área en función del radio y que al preguntarles por el área de la circunferencia lo asocian con el uso de la integral, así mismo, ante la confusión de Arturo al referirse de que el contorno de la circunferencia es la función perímetro y por ese motivo el área bajo la curva perímetro corresponde al área de la círculo, sus compañeros no están de acuerdo puesto que la medida del contorno de la circunferencia representa el perímetro de la misma para un valor del radio específico.

I: ¿Arturo, tu como lo hiciste?

A: sabemos que la definición de integral dice que es el área que esta debajo de una curva y el perímetro de una circunferencia es una curva y lo que está debajo de eso es lo que está debajo de ahí (refiriéndose a la parte interna de la circunferencia) valga la redundancia.

I: tú me dices que tenemos una circunferencia [dibuja una circunferencia en el tablero] y esta es la función perímetro [señalando el contorno de la circunferencia], tú dices que la integral de la función del perímetro con respecto al radio...

A: yo digo que la integral de la fórmula perímetro sería la fórmula del área.

I: ¿entonces el contorno de la circunferencia es la función perímetro?

J: no, la función perímetro es otra curva, una función, no el contorno, ese contorno nos da la medida del perímetro de una circunferencia de radio 2 Por ejemplo.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

I: ¿qué opinas tu Harold?

H: si es verdad, y a mí me da que la integral del perímetro es el área.

De acuerdo con las tareas diseñadas para el Nivel Situacional, al preguntarles por el comportamiento de la función con respecto al perímetro, todos están de acuerdo en que si el radio aumenta el perímetro también lo hace. Harold, Arturo y Juliana realizan la representación gráfica de la función perímetro con respecto al radio haciendo referencia a un comportamiento lineal, donde Harold y Arturo (Figura 73) reconocen la influencia de la constante  $2\pi$  en el comportamiento gráfico de la función perímetro. Cabe resaltar que los tres estudiantes identifican la variable independiente como el radio de la circunferencia y la variable dependiente como el perímetro de esta.

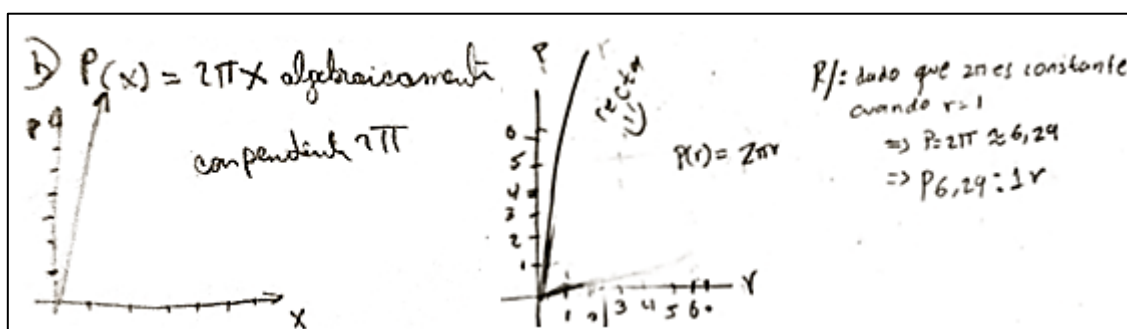


Figura 73. Representación Arturo y Harold

Juliana, a diferencia de sus compañeros, es consciente de la constante  $2\pi$  pero al momento de graficar el comportamiento de la función, dándole valores al radio, no tiene en cuenta la constante, es decir, para  $r = 2$  el perímetro es igual a  $4\pi$  pero en la representación gráfica se evidencia que para  $r = 2$ , el perímetro es igual a 4 (Figura 74).

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

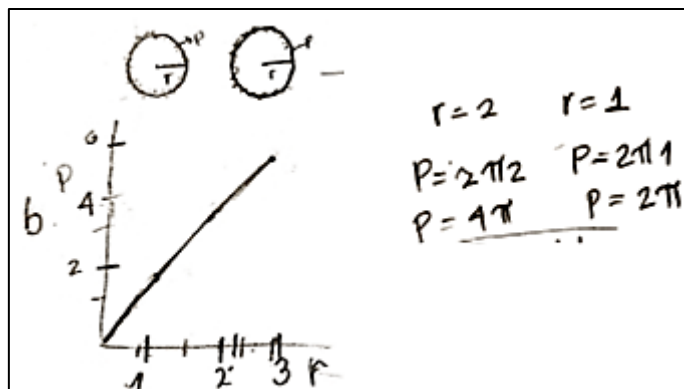


Figura 74. Representación Juliana

Al momento de pedirles abrir el archivo **Situación\_2.1** y escribir la expresión algebraica en la barra de entrada, los tres estudiantes afirman que tanto la gráfica presentada en el archivo ( $p = 2\pi r, r \geq 0$ , Figura 75) como la encontrada por ellos ( $p = 2\pi r$ ) coinciden, donde Arturo (Figura 76) resalta que no coinciden para los valores del radio negativo puesto que no es lógico que una circunferencia tenga un perímetro negativo, haciendo caer en la cuenta a sus compañeros de la restricción del dominio de la función perímetro para que se ajuste a la situación contexto, así mismo, Arturo aclara la confusión presentada anteriormente, donde manifiesta que la función perímetro correspondía al contorno de la circunferencia.

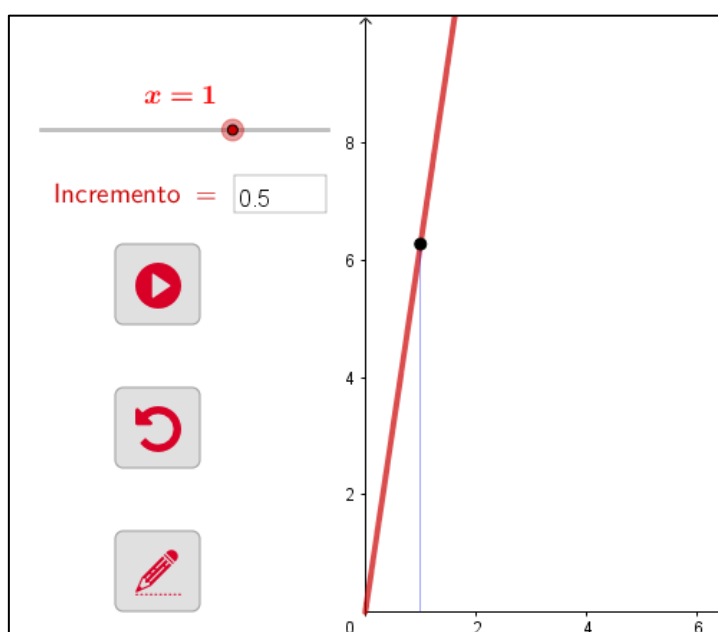


Figura 75. Situación 2.1 Representación gráfica de la función perímetro - GeoGebra

1, 1) Ambas gráficas coinciden, pero la original no está definida para  $r$  negativo, ya que no es lógico pensar en un perímetro negativo.

Ambas gráficas coinciden, para la original no está definida para  $r$  negativa, ya que no es lógico pensar en un perímetro negativo.

Figura 76. Coincidencia de las gráficas Arturo

Después de aclarado el significado contextual de la representación gráfica de la función presentada en GeoGebra, es importante discutir el significado de la magnitud del segmento azul para posteriormente establecer la relación que tiene con la circunferencia que se va formando (Figura 77), donde los estudiantes mencionan que la magnitud del segmento azul corresponde a la magnitud del perímetro de la circunferencia que se forma.

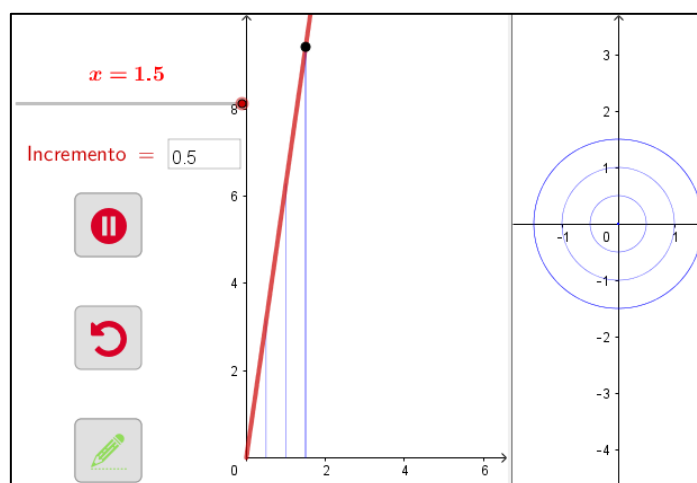
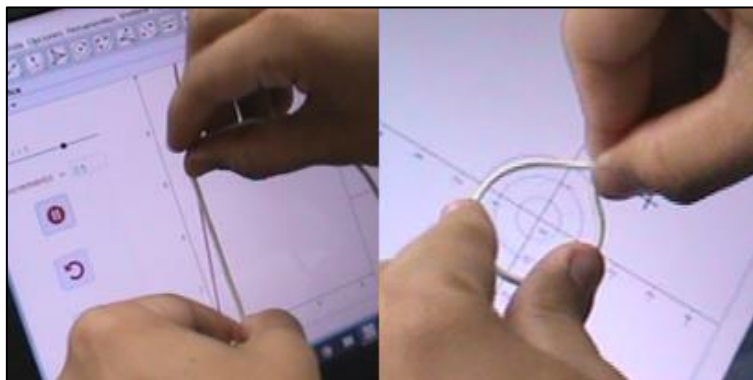


Figura 77. Representación gráfica función perímetro y circunferencia

Juliana verifica dicha relación con el uso de la herramienta medir, puesto que siente la necesidad de conocer las magnitudes para encontrar una relación o descartarla, con ello concluye “con el programa mido el segmento azul y la circunferencia y si son iguales, el perímetro de la circunferencia es igual a la longitud del segmento azul, porque si aumenta la longitud del segmento, el perímetro aumenta la misma cantidad y se hacen iguales”

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Harold y Arturo, también sienten la necesidad de conocer la magnitud del segmento y el contorno de la circunferencia que se forma, pero, al no conocer la herramienta medir en el software, deciden comparar dichas magnitudes con el cable de los audífonos (Figura 78), concluyendo “entonces la magnitud de este [segmento] representa la longitud de la circunferencia”



*Figura 78. Comparación Harold y Arturo*

En ese momento, la intervención del investigador juega un rol importante a la hora de aclarar las variables que intervienen en dicha relación, puesto que, aunque mencionan que la magnitud del segmento corresponde a la magnitud del contorno de la circunferencia que se forma, no están teniendo en cuenta si la magnitud de dicho segmento para un radio  $x$  corresponde al perímetro de una circunferencia del mismo radio.

I: ¿qué representa la función mostrada en el software?

A: es el perímetro con respecto al radio entonces la medida del segmento azul va a representar lo que mide el perímetro de una circunferencia.

I: ¿de cualquier circunferencia?

A: si, de cualquier circunferencia

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

I: [en el tablero dibuja la función perímetro y el segmento correspondiente al perímetro de una circunferencia de radio  $x_1$ , en otro plano dibuja una circunferencia sin especificar el radio y les pregunta si el perímetro de esa circunferencia es igual al segmento]

J, A, H: si, son iguales.

I: [dibuja una circunferencia más grande en el mismo plano] ¿Por qué no igual a esta? La magnitud del mismo segmento ¿por qué no igual al perímetro de la circunferencia más grande?

H: porque ese de ahí [segmento] representa la magnitud de un perímetro.

J: de un perímetro de un radio específico.

H: esa magnitud del perímetro de un radio  $x_1$  solo puede ser igual a la longitud de la circunferencia de un círculo que tenga un radio  $x_1$ .

I: entonces serán iguales siempre y cuando el radio de la circunferencia sea

A:  $x_1$

Al solicitarles que disminuyan el incremento e identifiquen el significado de la región barrida por el rastro de los segmentos que se forman bajo la función perímetro y la región barrida por el rastro de las circunferencias que se forma en la *Vista Gráfica 2* (Figura 79), los tres estudiantes indican que las regiones barridas por el rastro de los segmentos que se forman bajo la función perímetro y las circunferencias, corresponden al área bajo la función perímetro y el área del círculo del mismo radio respectivamente.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

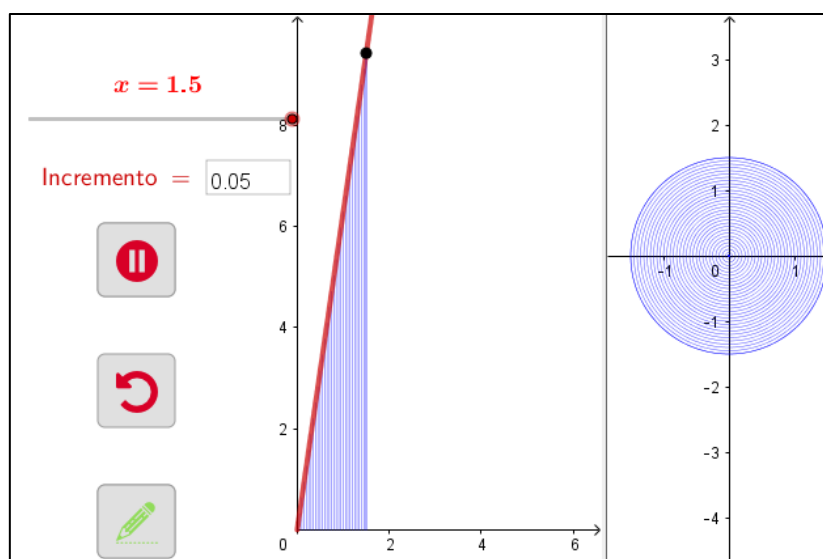


Figura 79. Región barrida por el rastro del segmento y la circunferencia

### 5.4.2 Matematización Vertical – Nivel Referencial

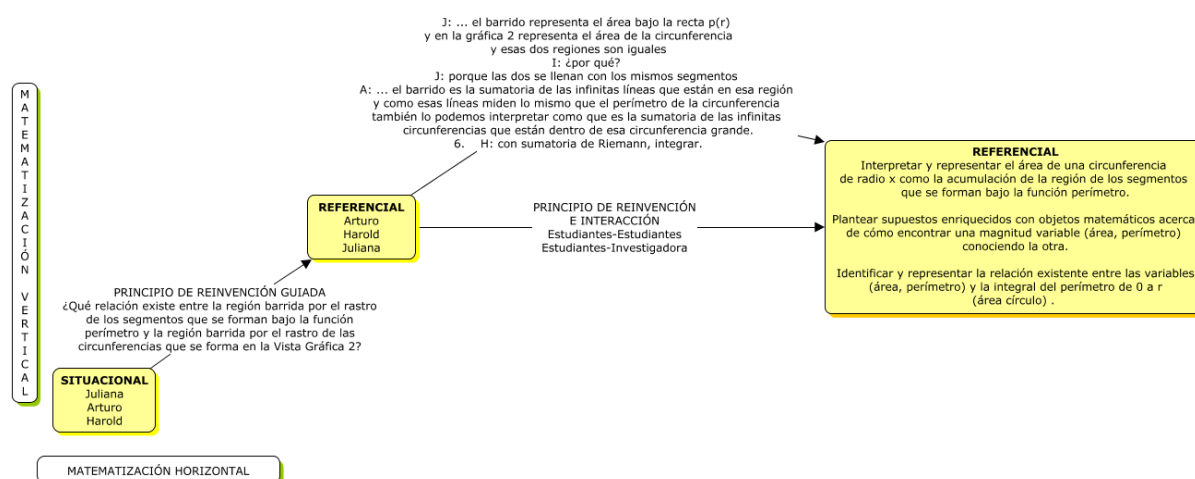


Figura 80. Resumen Nivel Referencial Primera Situación

#### 5.4.2.1 El caso de Juliana, Harold, Arturo. Principio de Interacción y Reinvencción Guiada.

Harold realiza una representación algebraica de la relación entre las dos regiones mencionadas anteriormente (Figura 81) donde deja de lado el dominio de la función, puesto que, a pesar de haber mencionado que dicha función está definida para los números reales positivos incluyendo el cero, en su representación no deja clara dicha restricción. Así mismo, al momento de explicar su conjetura, asocia el significado de la integral con el área bajo la función perímetro, mostrando dificultades en la representación algebraica y el significado de la integral definida,

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

puesto que para representar el área bajo la función perímetro desde 0 hasta  $r$  utiliza la integral indefinida, mostrando implícitamente que una familia de funciones de la forma  $\pi r^2 + c$  representan el área de una circunferencia de radio  $r$ .

$$\int 2\pi r dr = \pi r^2 + C \Rightarrow A(r)$$

Figura 81. Conjetura Harold

Al preguntarle a Harold el porqué de su conjetura, sus argumentaciones están ligadas a lo observado en el software, pero, Juliana interviene justificando que el área bajo la curva perímetro es igual al área de la circunferencia mostrada en la *Vista Gráfica 2* por el hecho de que las dos regiones se llenan con los mismos segmentos y Arturo, apoyando a Juliana, menciona que por ese hecho, calcular el área bajo la función perímetro se reduce a realizar una sumatoria de las infinitas circunferencias que se forman dentro del círculo que corresponden a los segmentos formados bajo la función perímetro.

H: cuando hablamos de región barrida por el rastro de los segmentos que se forman bajo la función perímetro, entonces todo esto (Figura 82) sería el área bajo la curva y esto sería el área de la circunferencia. Entonces el área bajo la curva de la función perímetro es igual al área de la circunferencia por lo tanto la integral del perímetro es igual al área de la circunferencia.

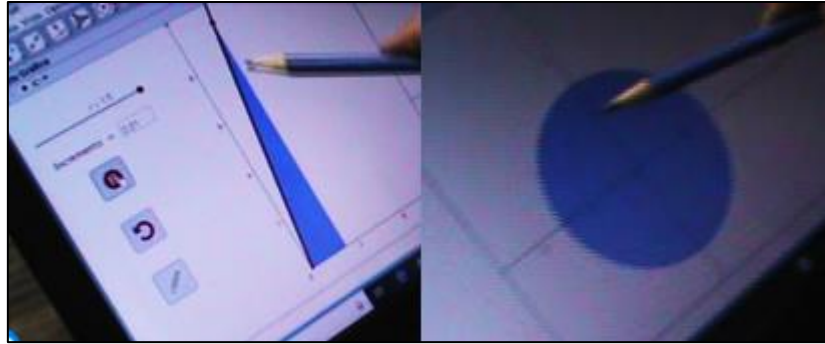


Figura 82. Región barrida por el rastro

J: en la vista gráfica ese barrido representa el área bajo la recta  $p(r)$  y en la gráfica 2 representa el área de la circunferencia y esas dos regiones son iguales.

I: ¿por qué?

J: porque las dos se llenan con los mismos segmentos.

A: porque toda esa región, la región barrida debajo del perímetro, como ya nos habíamos dado cuenta que la magnitud de ese segmento es igual al perímetro de esa circunferencia entonces cuando se hace el barrido lo podemos interpretar como que es la sumatoria de las infinitas líneas que están en esa región y como esas líneas miden lo mismo que el perímetro de la circunferencia también lo podemos interpretar como que es la sumatoria de las infinitas circunferencias que están dentro de esa circunferencia grande.

H: con sumatoria de Riemann, integrar.

Así mismo, en las representaciones realizadas por Arturo (Figura 83) y Juliana (Figura 84), se evidencia la idea del uso de la integral para hallar el área bajo una curva, en este caso, la función perímetro, donde manifiestan implícitamente la relación entre las sumatorias de Riemann y la definición de integral, de igual forma, los tres estudiantes muestran dificultades entre la representación algebraica y el significado de la integral definida, puesto que, como se ha evidenciado anteriormente, presentan confusiones entre la integral definida y la indefinida.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Trabando que  $P(x) = 2\pi r$ , al hallar el área del círculo de esa función, integrando todo que  $A(x) = \pi r^2$

Figura 83. Conjetura Arturo

$f = \int p(r) \cdot dt = \text{Área de circunferencia}$   $x = r$   $\int p(x) \cdot dx = A$

Figura 84. Conjetura Juliana

### 5.5 Fenómeno Área y Perímetro Segunda Situación

A partir del área de una circunferencia de radio  $x$ , halle la expresión algebraica que representa el perímetro de la circunferencia en función del radio ( $x$ ).

#### 5.5.1 Matemización Horizontal – Nivel Situacional

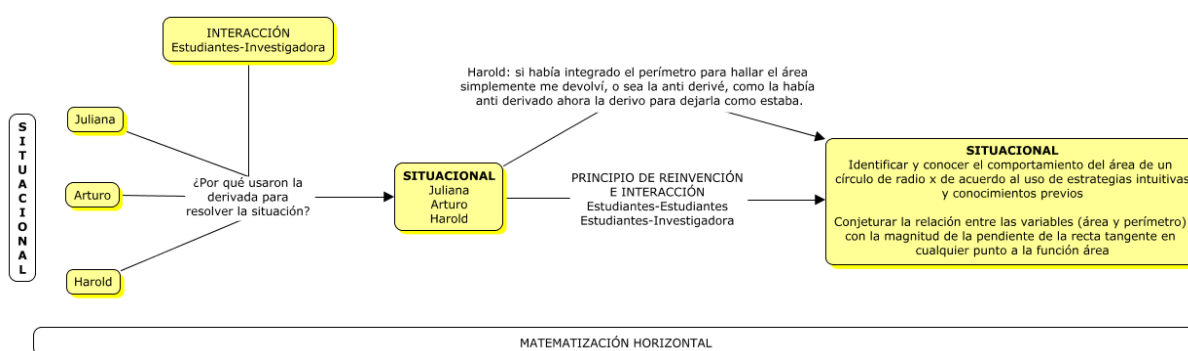


Figura 85. Resumen Nivel Situacional Segunda Situación

5.5.1.1 El caso de Juliana, Harold y Arturo. En este punto, después de haberse enfrentado a las dos situaciones matemáticas realistas enmarcadas en el fenómeno de Caída Libre y las tareas diseñadas en cada situación, se evidencia la influencia de las ideas de integración y derivación para la solución de las situaciones presentadas en este fenómeno, Área y Perímetro.

Al pedirles hallar la expresión algebraica que representa el perímetro de la circunferencia en función del radio ( $x$ ) a partir del área de un círculo del mismo radio, derivan la función del área (Figura 86), obteniendo así la función perímetro.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

$$\frac{dA}{dx} = P \Rightarrow 2\pi r = P$$

$$\frac{dA}{dr} = P \quad \frac{d(\pi r^2)}{dr} = 2\pi r \quad \text{Perimetro}$$

$$A = \pi r^2 \rightarrow \frac{dA}{dr} = 2\pi r \rightarrow P(r) = 2\pi r$$

Figura 86. Solución segunda situación Harold, Juliana y Arturo respectivamente

Al cuestionarlos acerca de sus procedimientos, exponen ideas acerca de la relación entre derivada e integral, mostrando esto la influencia positiva de las discusiones generadas en el nivel General de las situaciones realistas enmarcadas en el fenómeno de Caída Libre diseñadas para la matematización del Teorema Fundamental del Cálculo.

Así mismo, Arturo intenta justificar su procedimiento manifestando que la sumatoria de rectas tangentes al contorno de la circunferencia corresponden al perímetro de la misma. No cae en cuenta de que en esta situación, se le solicita hallar la función perímetro a partir del área del círculo, y en su representación geométrica no menciona ni tiene en cuenta el comportamiento del área del mismo, así mismo, se evidencia la necesidad de ajustar el significado de la derivada a la situación problema, puesto que no tiene en cuenta que al hallar la derivada del área de un círculo de radio variable, está hallando la razón de cambio de la función área o la pendiente de la recta tangente a la función área para cualquier valor del radio, pero gracias a la intervención de Harold, Arturo cae en la cuenta de su confusión.

H: pues, si había integrado el perímetro para hallar el área simplemente me devolví, ósea la anti derivé, como la había anti derivando ahora la derivo para dejarla como estaba.

A: yo lo hice derivando, pero geoméricamente me lo imagino [dibuja una circunferencia en el tablero], teniendo esta circunferencia sabemos que la función derivada es la pendiente de la recta tangente a cada uno de esos puntos, entonces podemos imaginarnos

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

que es algo más o menos así, o sea que las rectas tangentes a los infinitos puntos de la circunferencia son el perímetro.



Figura 87. Argumentos Arturo

H: no, porque la pendiente de la función área es el perímetro, ahí tiene es la pendiente de la recta tangente a los puntos que forman una circunferencia.

A: mm sí, tienen razón.

5.5.1.2 *Principio de Reinención e Interacción Guiada.* Al momento de pedirles comparar la función área de un círculo de radio  $x$  para  $x \geq 0$  presentada gráficamente en el archivo de GeoGebra con la expresión algebraica referenciada por ellos, en la cual, olvidan restringir el dominio de esta, dada la situación contexto, manifiestan lo siguiente:

I: ¿coinciden las dos gráficas?

J: si coinciden, pero la diferencia es que en la del software no salían los radios negativos

H: si coinciden porque se sobrepone una sobre la otra

A: no totalmente, solo en la parte positiva porque no hay áreas negativas.

H: pues si

I: ¿en qué condiciones se tiene que el área de un círculo sea negativa?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

A: cuando el radio sea negativo

I: ¿sí? ¿qué sucede con el área del círculo cuando el radio es negativo?

A: el radio es negativo y el área es positiva, entonces lo que no puede ser negativo es el radio.

Lo anterior da cuenta de la influencia de la situación contexto puesto que, para ellos, no puede existir un círculo de área negativa, mostrando confusión acerca de la influencia de la variable independiente y la variable dependiente de la función trabajada, por lo que, en ese momento, gracias a la interacción dada, caen en la cuenta de que el área de un círculo no puede ser negativa así su radio lo sea, aunque en el contexto real no es posible hablar de radio negativo.

Al momento de preguntarles el significado de la recta mostrada en la gráfica de la función área (Figura 88), todos manifiestan que corresponde a la recta tangente a la curva, porque solo la toca en un punto, validando dicho suceso con las herramientas de GeoGebra tales como el zoom.

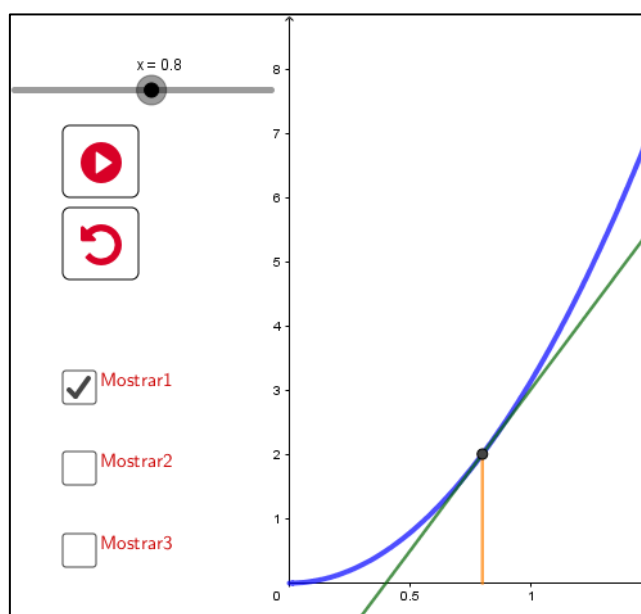


Figura 88. Situación 2.2 Recta Tangente a la función Área

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

H: la recta tangente en un punto de la gráfica

I: ¿por qué?

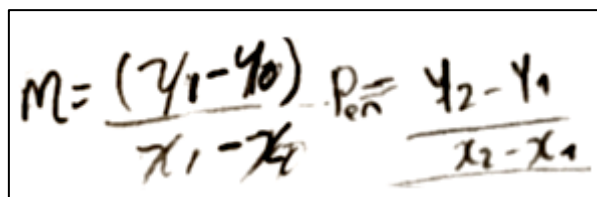
H: porque es una recta que solo toca un punto.

J: la recta tangente a la gráfica del área con respecto al radio en el punto que se le dé al radio en esa función.

I: ¿por qué?

J: porque vi que tocaba en un punto, le di zum varias veces y si tocaba en un punto, entonces es tangente.

Teniendo claro el significado de la recta mostrada, se les pidió hallar la pendiente. Para ello los estudiantes utilizan la expresión  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  (Figura 89), se ubican en un punto específico y hallan el valor de la pendiente de la recta tangente en ese punto. Al preguntarles si en el software pueden hallar la pendiente de la recta tangente en cualquier punto a la función área, mencionan el uso de la herramienta *Pendiente*, donde relacionan la representación gráfica de la pendiente con la representación algebraica de la misma, cayendo en la cuenta de que en el software, la diferencia de abscisas es siempre uno, motivo por el cual, el cociente  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  será igual a  $y_2 - y_1$ , lo que significa que la pendiente de la recta tangente a la función área en cualquier punto corresponde a la magnitud del segmento que representa la diferencia entre  $y_2$  y  $y_1$ .



$$m = \frac{(y_1 - y_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Figura 89. Pendiente de la recta tangente

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Al dejar claro el significado de la representación gráfica de la pendiente de la recta tangente a la función del área de un círculo de radio  $x$ , se les pide seleccionar la opción *Vista Gráfica 2*, oprimir el botón *Mostrar 2*, ubicarse en un valor específico en el deslizador  $x$  y mover el deslizador  $b$  (Figura 90).

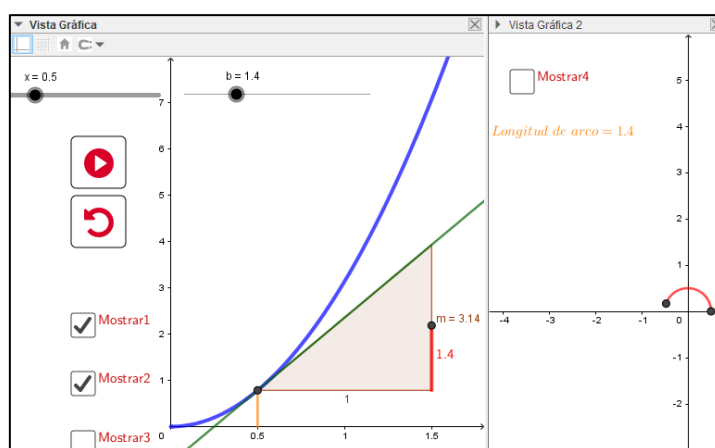


Figura 90. Relación entre pendiente de la recta tangente a la función área y el perímetro

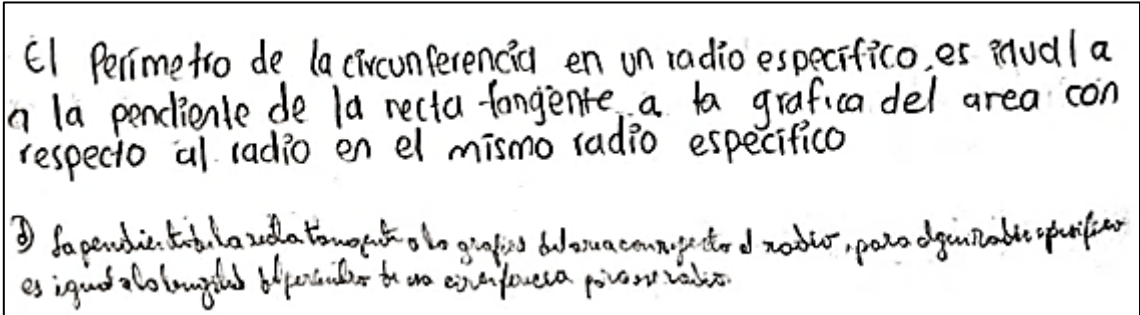
Al realizar estas acciones, los estudiantes analizaron el comportamiento de cada uno de los objetos variables a partir de la variación del deslizador  $b$ , con esto, Arturo menciona “el radio depende de lo que pongamos en  $x$  y la longitud que tiene el deslizador  $b$  es la longitud de esa parte del perímetro de la circunferencia que se está formando acá [refiriéndose a la circunferencia *Vista Gráfica 2*], momento en el cual Harold interviene aclarando que el valor máximo del deslizador  $b$  corresponde al valor de la pendiente de la recta tangente en ese punto y que por esta razón la pendiente tiene la misma longitud de la parte del perímetro de la circunferencia mostrada en la *Vista Gráfica 2*, creando la conjetura “el perímetro de la circunferencia en un radio específico es igual a la pendiente de la recta tangente en el mismo radio” (Juliana).

Esto da cuenta de que las tareas planteadas en el principio de reinención guiada y el proceso de interacción, en el cual se ponen de manifiesto las relaciones encontradas por cada uno de los estudiantes, permiten la creación de modelos planeando conjeturas acerca de la relación

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

entre la pendiente de la recta tangente a la función del área de un círculo de radio  $x$  y el perímetro de una circunferencia del mismo radio.

De acuerdo con lo manifestado en la interacción entre estudiantes – estudiantes, fue necesario aclarar que la conjetura se tiene siempre y cuando se refiera a la pendiente de la recta tangente a la función área. Motivo por el cual, Juliana y Arturo, en sus modelos retóricos (Figura 91), lograron manifestar con claridad la relación entre la pendiente de la recta tangente y el perímetro.



El perímetro de la circunferencia en un radio específico, es igual a la pendiente de la recta tangente a la gráfica del área con respecto al radio en el mismo radio específico

La pendiente de la recta tangente a la gráfica del área con respecto al radio, para algún radio específico es igual al perímetro de una circunferencia por su radio.

Figura 91. Modelo retórico Juliana y Arturo

Harold crea un modelo retórico y algebraico (Figura 92), donde, a pesar de que no es explícito,  $m$  representa la pendiente de la recta tangente a la función área del círculo y  $P$  el perímetro de la circunferencia formada, mostrando algebraicamente la definición de la pendiente de la recta tangente como el límite del delta del área sobre el delta del radio cuando éste tiende a cero, siendo ese límite igual al diferencial del área con respecto al radio, suceso que evidencia la claridad que posee acerca de la definición de la pendiente de la recta tangente y la diferencia entre el delta de una cantidad y el diferencial de la misma.

H: me di cuenta de que si esa magnitud de la pendiente de la recta tangente a la curva área radio es igual al perímetro entonces esa pendiente la puedo representar como  $m$  bueno la fórmula de la pendiente, delta de área sobre el delta de radio, entonces eso sería en dos puntos. Entonces debo hallarla en el instante que me están pidiendo en un solo radio, entonces es el límite cuando delta de  $r$  tiende a cero, o sea la pongo en un instante,

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

de delta de  $A$  sobre delta  $r$  y esa es la derivada, entonces la derivada del área con respecto al radio es igual al perímetro.

d) que la magnitud de  $M$  tiene la misma longitud que el perímetro de la circunferencia  
 $\Rightarrow$  Si  $m = P \Rightarrow \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta r} = P \Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dr} = P}$

Figura 92. Modelo retórico y algebraico Harold

### 5.5.2 Matemización Vertical– Nivel Referencial

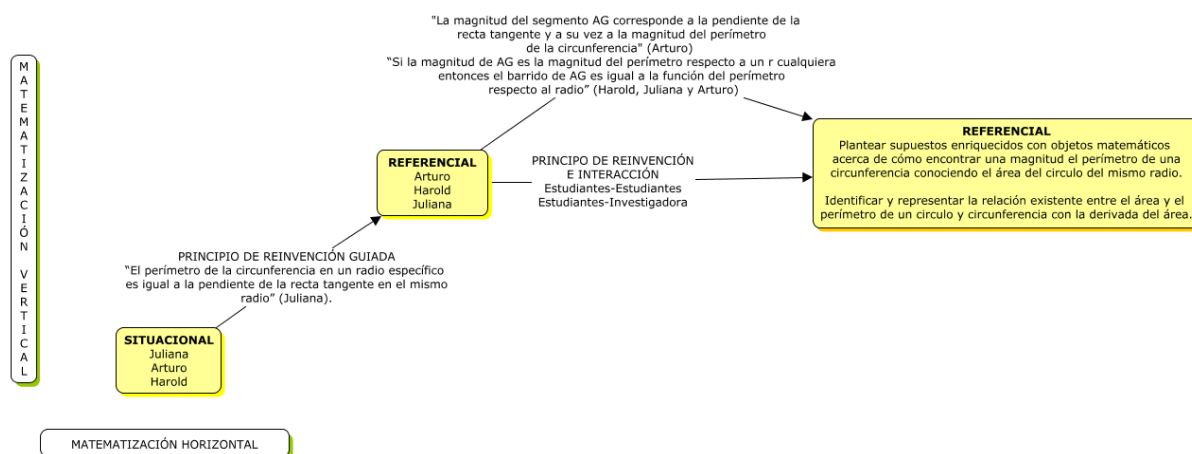


Figura 93. Resumen Nivel Referencial Segunda Situación

5.5.2.1 *El caso de Juliana, Harold y Arturo.* En las tareas diseñadas para el nivel referencial, por medio de la interacción con el software, se les pide encontrar la magnitud del segmento AG (Figura 94), la cual corresponde al valor de la pendiente de la recta tangente a la función área.

Para los estudiantes no resultó difícil encontrar dicha magnitud, manifiestan que la magnitud del segmento AG corresponde a la magnitud de la pendiente de la recta tangente y la relacionan con el perímetro de la circunferencia mostrada en la Vista Gráfica 2 dado que en el modelo

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

creado en el nivel anterior (Nivel Situacional) notan que la pendiente de la recta tangente a la función área corresponde al perímetro de una circunferencia del mismo radio.

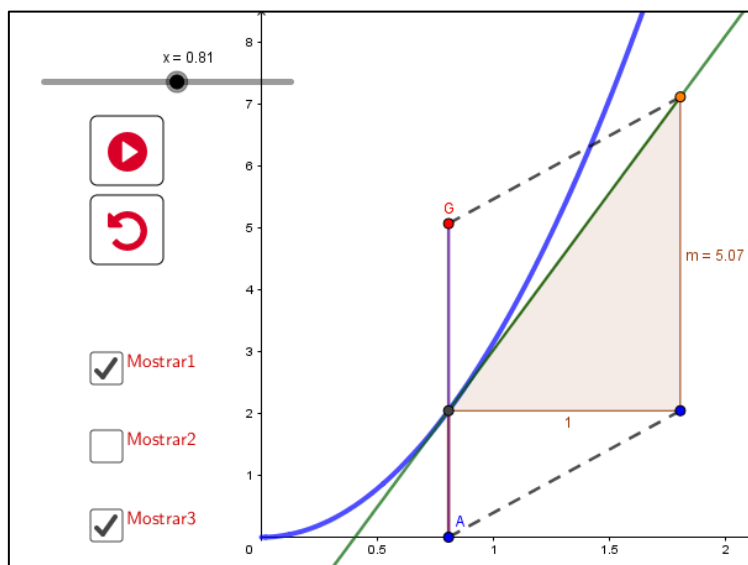


Figura 94. Magnitud Segmento AG

Juliana (Figura 95) menciona el segmento AG es paralelo a la pendiente de la recta tangente, siendo necesario aclarar que es paralelo al segmento que representa la magnitud de la pendiente de la recta tangente, puesto que, aunque ella hace referencia a dicho segmento, es importante que los estudiantes interpreten los objetos matemáticos e identifiquen sus propiedades para así fomentar el desarrollo del proceso de comunicación, ya sea verbal, algebraico, gráfico, entre otras.

El segmento AG es una recta paralela a la pendiente de la recta tangente a la función área con respecto al radio y ambas tienen la misma longitud.  
 $AG = m = \text{Perímetro}$

Figura 95. Magnitud AG Juliana

Arturo manifiesta que la magnitud del segmento AG corresponde a la pendiente de la recta tangente y a su vez a la magnitud del perímetro de la circunferencia a partir de lo observado en la interacción con el software y el modelo creado en el Nivel Situacional, en el que hace

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

referencia la relación entre la pendiente de la recta tangente y el perímetro de la circunferencia visto como número y no como función.

la magnitud del segmento AG es igual a la pendiente de la recta tangente por tanto, al perímetro de la circunferencia

“La magnitud del segmento  $AG$  es igual a la pendiente de la recta tangente por tanto al perímetro de la circunferencia”

Figura 96. Magnitud  $AG$  Arturo

Harold representa de forma retórica la relación entre la longitud del perímetro y la pendiente de la recta tangente a la función área (Figura 97), relacionando directamente la medida del segmento  $AG$  con la pendiente de la recta tangente y el perímetro, omitiendo en su representación detalles específicos de los objetos matemáticos involucrados.

$AG =$  Longitud del perímetro  
 $m =$  Longitud del perímetro

Figura 97. Magnitud  $AG$  Harold

5.5.2.2 Principio de Interacción y Reinención Guiada . Al solicitarles activar el rastro del punto  $G$  y preguntarles acerca de su significado manifiestan con seguridad que corresponde a la función perímetro con respecto al radio.

“Si la magnitud de  $AG$  es la magnitud del perímetro respecto a un  $r$  cualquiera entonces el barrido de  $AG$  es igual a la función del perímetro respecto al radio” (Harold, Juliana y Arturo).

Suceso que da cuenta de la importancia de la observación del rastro del punto  $G$  y el significado de la magnitud del segmento  $AG$  puesto que permite la interpretación del perímetro de una circunferencia de radio variable como una función.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

La importancia de la influencia del rastro se evidencia en el modelo creado por Harold, puesto que al interpretar el significado de la magnitud del segmento AG (Figura 97) su modelo hace referencia al valor del perímetro, mientras que cuando interpreta el significado del rastro menciona que este corresponde a la función perímetro con respecto al radio (Figura 98).

el barrido de e  
 $AG = P(r)$

Figura 98. Visión del perímetro como función Harold

Después de interpretar el perímetro como una función a partir del rastro del punto G, se les solicita hallar la expresión algebraica que representa la interdependencia del perímetro en función del radio  $x$  a partir del área de la circunferencia. Juliana reconoce la interdependencia entre el perímetro de la circunferencia y el área del círculo a través de la pendiente de la recta tangente (Figura 99), esto es, el perímetro de la circunferencia es igual a la derivada de la función área, la cual representa algebraicamente como el diferencial del área sobre el diferencial de radio, misma representación que realiza Arturo. Así mismo, asocia el significado de la pendiente de la recta tangente a la función área con el significado de derivada.

Como la pendiente  $m_1$ , depende de la recta tangente a la función  $A(x)$ , el perímetro tiene una interdependencia con el Area

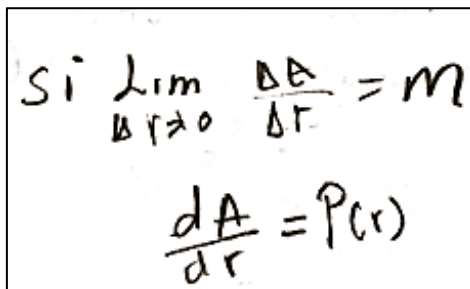
$$\frac{dA}{dr} = P$$

Figura 99. "Modelo de" Juliana

Harold (Figura 100) crea un modelo algebraico en el que se evidencia la relación entre la función perímetro y la pendiente de la recta tangente, la cual interpreta como el límite de la diferencia del área con respecto a la diferencia del radio cuando esta tiende a cero, mostrando

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

nuevamente claridad acerca de la diferencia entre el delta y el diferencial, puesto que es claro que el límite de la diferencia es igual al diferencial que corresponde precisamente a la diferencia instantánea, esto es, la derivada.



$$\text{Si } \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta r} = m$$

$$\frac{dA}{dr} = P(r)$$

Figura 100. "Modelo de" Harold

Los estudiantes, al momento de interactuar y poner de manifiesto los modelos creados manifiestan que para hallar la expresión algebraica que representa la interdependencia del perímetro en función del radio  $x$ , basta con derivar la función área de la circunferencia de radio  $x$ .

I: ¿cómo hallar la función perímetro de una circunferencia a partir de la función área?

H, A: derivando

H: o sea la derivada del área con respecto al radio

J: si derivo el área obtengo el perímetro

I: ¿por qué?

J: porque estoy usando la recta tangente en ese punto y si derivo el área obtengo la pendiente de la recta tangente

# MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

## 5.6 Fenómeno Área y Perímetro Primera y Segunda Situación

### 5.6.1 Nivel General

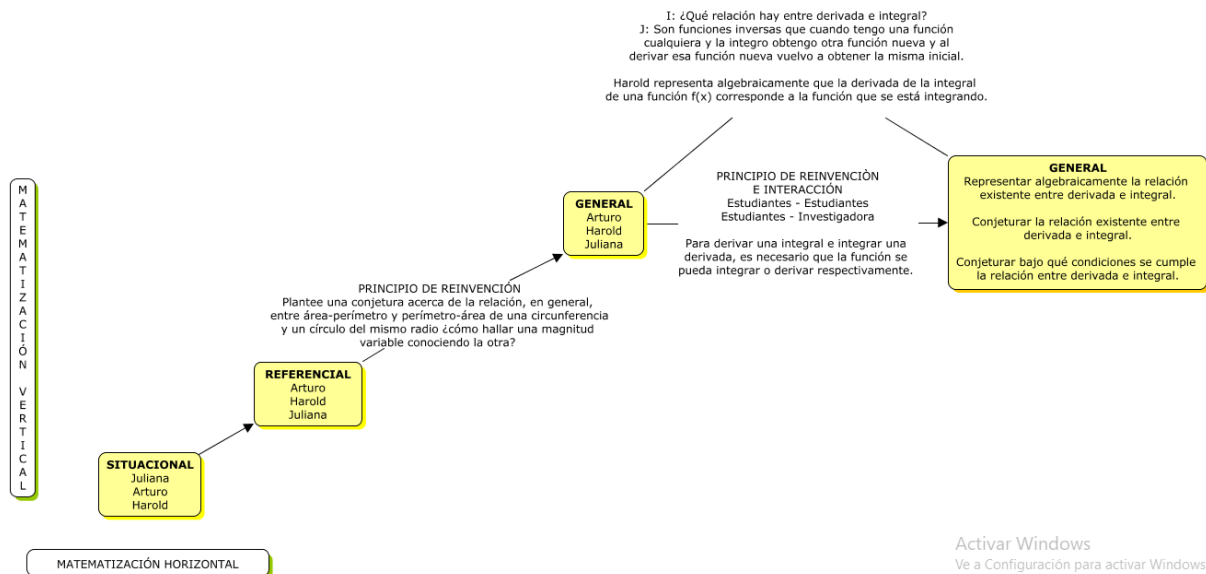


Figura 101. Resumen Nivel General Primera y Segunda Situación

#### 5.6.1.1 El caso de Juliana, Harold y Arturo. Principio de Interacción y Reinención Guiada.

Al momento de pedirles conjeturar la relación, en general, entre área-perímetro y perímetro-área, los estudiantes manifiestan las relaciones encontradas en las dos situaciones anteriores. Arturo (Figura 102) crea un modelo retórico en el que menciona las relaciones entre las magnitudes variables, área y perímetro, con los procesos de integración y diferenciación respectivamente.

La derivada de la función área con respecto al radio es la función perímetro con respecto al radio. La integral de la función perímetro con respecto al radio es la función área con respecto al radio.

La derivada de la función área con respecto al radio es la función perímetro con respecto al radio. La integral de la función perímetro con respecto al radio es la función área con respecto al radio.

Figura 102. Modelo retórico Arturo

Juliana (Figura 103) y Harold (Figura 104), a diferencia de Arturo, crean un modelo algebraico en el que, al representar la relación entre la integral con las magnitudes variables área y perímetro, dejan de lado la constante de integración, aclarando, en el proceso de

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

interacción, que dicha constante en este caso es igual a cero, puesto que cuando el radio es igual a cero el área también lo es.

Harold, al reconocer en forma simultánea las relaciones encontradas en las dos situaciones matemáticas realistas, representa de forma algebraica la relación entre derivada e integral manifestando que la integral de la derivada de la función área con respecto al radio es igual a la función que se está derivando.

Por su parte, Juliana, menciona que una consecuencia de la relación inversa entre la derivada y la integral es que la derivada de la función área del círculo con respecto al radio corresponde a la función perímetro de la circunferencia del mismo radio, interpretando la derivada como la pendiente de la recta tangente a partir de la reflexión de los modelos creados en el nivel anterior y al proceso de reinención guiada e interacción, en el que manifiestan la necesidad de conocer alguna magnitud variable área o perímetro para encontrar la otra con el uso de la derivada o la integral.

Como se considera la integral y la derivada operaciones inversas entonces si yo tengo el área la derivó así

$$\frac{d(A(x))}{dx} = P(x) \rightarrow \text{Ya que al derivar encuentro la recta tangente y obteniendo su pendiente encuentro la longitud del Perímetro.}$$

Y si tengo el perímetro lo integro y obtengo el área

$$\int P(x) dx = A(x)$$

Figura 103. Modelo algebraico Juliana

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

$\Rightarrow P=2\pi r \quad A=\pi r^2 \Rightarrow$  Solo necesito conocer alguna de estas, puesto que  
 $\rightarrow \int P(r) dr = A(r)$   
 $\rightarrow \frac{d}{dr} (A(r)) = P(r)$

$\int \left[ \frac{d}{dr} (A(r)) \right] dr = (A(r))$

Figura 104. Modelo algebraico Harold

J: integrando, derivando, dependiendo la que tenga, la integral del perímetro es el área y la derivada del área es el perímetro.

H, A: si, estamos de acuerdo.

Al cuestionarlos acerca de si la relación entre las magnitudes variables y la derivada e integral se sigue cumpliendo para valores negativos de la variable independiente, manifiestan que se cumple a pesar de que no se cumpliría en el contexto real puesto que al considerar valores negativos de  $x$ , el perímetro y el área serían negativos, y la integral del perímetro sería negativa.

A: si se sigue cumpliendo solo que se sale del contexto real, porque en la realidad nunca vamos a tener perímetros o áreas negativas, pero si se sigue cumpliendo para cualquier caso.

I: ¿que se sigue cumpliendo?

A: o sea  $2\pi x$  es una recta, cuando los valores de  $x$  sean negativos entonces darán los valores de la recta debajo del eje y y la integral será el área negativa.

Por otra parte, al preguntarles acerca de la validez de la relación entre magnitudes enmarcadas en otros fenómenos con funciones que tengan el mismo comportamiento y la

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

derivada e integral, los estudiantes lograron desprenderse del contexto, identificando que el comportamiento de la función perímetro y área de un círculo es lineal y cuadrática respectivamente, refiriéndose ahora a funciones lineales y cuadráticas y no al perímetro y área del círculo.

Al verificar la relación, Harold (Figura 105) representa algebraicamente que la integral de la recta  $y = x$  es una función cuadrática  $\frac{x^2}{2}$  y la derivada de la función cuadrática es la función lineal omitiendo el diferencial y la constante de integración.

Juliana aclara que deben verificar la conjetura para cualquier función lineal, puesto que Harold solo la verifica para la recta  $y = x$ , poniendo de manifiesto su modelo (Figura 106), en el cual, al igual que Harold, omite la constante de integración. Con los modelos de Harold y Juliana, concluyen que la conjetura es válida puesto “se sigue cumpliendo que el uno sea la derivada del otro y el otro la integral del otro” (Arturo).

I: si se tienen magnitudes variables que tengan el mismo comportamiento, pero en otros fenómenos, ¿la conjetura se sigue cumpliendo?

H, A, J: si, se sigue cumpliendo.

I: ¿por qué?

H: porque la integral de una ecuación lineal va a ser una parábola y la derivada de una parábola va a ser una ecuación lineal.

A: porque se sigue cumpliendo que el uno sea la derivada del otro y el otro la integral del otro.

J: si, tienen razón, yo opino lo mismo.

I: de acuerdo con la conjetura de Harold, ¿la integral de  $x$  es entonces  $\frac{x^2}{2}$ ?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

A: mm no, falta la constante de integración, o sea, siempre que uno integra debe poner la constante.

Si se sigue cumpliendo puesto que

$$\int x = \frac{x^2}{2} \quad \text{y} \quad \frac{dx^2}{2} = \textcircled{x}$$

Figura 105. Relación fuera del contexto Harold

d)  $f(x) = ax + c$        $\int ax + c \cdot dx = \frac{ax^2}{2} + cx$

$$\frac{d\left(\frac{ax^2}{2} + cx\right)}{dx} = ax + c$$

Figura 106. Relación fuera del contexto Juliana

Arturo pone de manifiesto su conjetura, en la cual tiene en cuenta la constante de integración y recalca la relación entre derivada e integral (Figura 107). Menciona que la integral y la derivada son operaciones opuestas teniendo en cuenta el significado de la integral indefinida, puesto que menciona que al integrar una función derivada obtiene la función que se deriva **más una constante**. Así mismo, no menciona condición alguna para la función que se deriva.

Son operaciones opuestas, al integrar una derivada, da como resultado la función que se derivó más una constante, lo mismo al contrario, pero sin la constante

Son operaciones opuestas, al integrar una derivada da como resultado la función que se derivó más una constante, lo mismo, al contrario, pero sin la constante.

Figura 107. Relación fuera del contexto Arturo

De acuerdo con el modelo retórico creado por Arturo, es necesario representar algebraicamente dicha relación. Sea  $f(x)$  una función continua, al integrar la derivada de  $f$  se tiene que

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)]dx = f(x) + c$$

Con la representación algebraica, los estudiantes caen en la cuenta de que, al integrar indefinidamente la función derivada, no obtienen la función que se está derivando puesto que se diferencian en la constante de integración.

I: ¿ $f(x)$  es igual a  $f(x) + c$ ?

H: no, no son iguales

A: no son iguales porque una tiene una constante y la otra no.

I: ¿y entonces, la relación no se cumple?

A: pues debe ser una integral definida porque en la definida no hay constante de integración.

I: ¿qué representa la integral definida?

J: el área bajo una curva

I: ¿el área bajo una curva?

H: bueno, con la integral definida se puede calcular el área bajo una curva o el área negativa sobre una curva.

I: ¿y a qué conclusión llegaron acerca de la relación entre las magnitudes variables y la derivada e integral para valores negativos de la variable independiente?

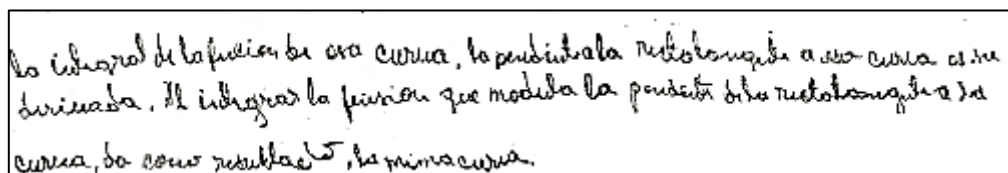
A: como tener un perímetro negativo, o sea  $2\pi x$  una recta, cuando los valores de  $x$  sean negativos entonces darán los valores de la recta debajo del eje y será el área negativa sobre la curva, o sea el área negativa del círculo de mismo radio. Entonces debe ser la integral de un valor a otro cualquiera  $x$

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

H: y ahí ya no hay constante de integración porque es una integral definida.

Al aclarar el significado de la influencia de la constante en la integral indefinida, y solicitarles enunciar y representar de forma algebraica la relación entre derivada e integral, manifiestan que son operaciones inversas o contrarias, puesto que al derivar una función integral se obtiene la función que se está integrando y al integrar definitivamente una función derivada se obtiene la función que se está derivando. Arturo expresa claramente su conjetura de forma retórica (

Figura 108) resaltando la relación entre la integral de una derivada en la cual no especifica si debe integrar definida o indefinidamente la curva inicial o la curva que modela la pendiente de la recta tangente a la curva inicial, a pesar de que él cayó en la cuenta de la diferencia e influencia en la relación con el uso de la integral definida o indefinida de acuerdo con lo expuesto en el proceso de interacción.

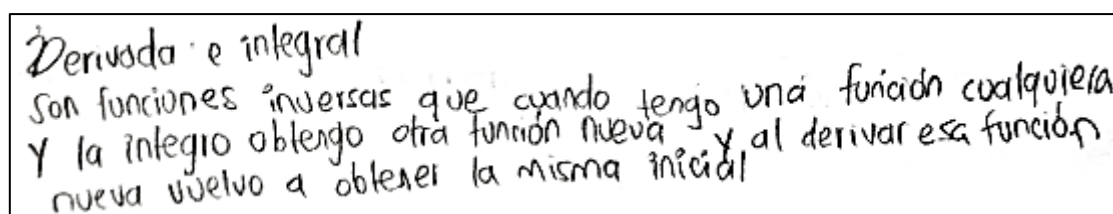


La integral de la función da una curva, la pendiente de la recta tangente a esa curva es su derivada, al integrar la función que modela la pendiente de la recta tangente a la curva, da como resultado la misma curva.

La integral de la función da una curva, la pendiente de la recta tangente a esa curva es su derivada, al integrar la función que modela la pendiente de la recta tangente a la curva, da como resultado la misma curva.

Figura 108. Conjetura Arturo

Juliana, por su parte, menciona la relación entre derivada e integral en un sentido (Figura 109), esto es, resalta la idea de que al derivar una función integral obtiene la función que está integrando, y, al igual que Arturo, no explicita si dicha integración es indefinida o definida.

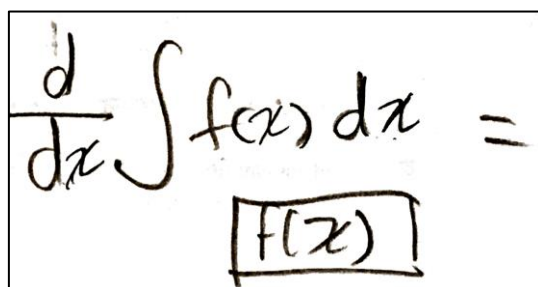


Derivada e integral  
Son funciones inversas que cuando tengo una función cualquiera y la integro obtengo otra función nueva y al derivar esa función nueva vuelvo a obtener la misma inicial.

Figura 109. Conjetura Juliana

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

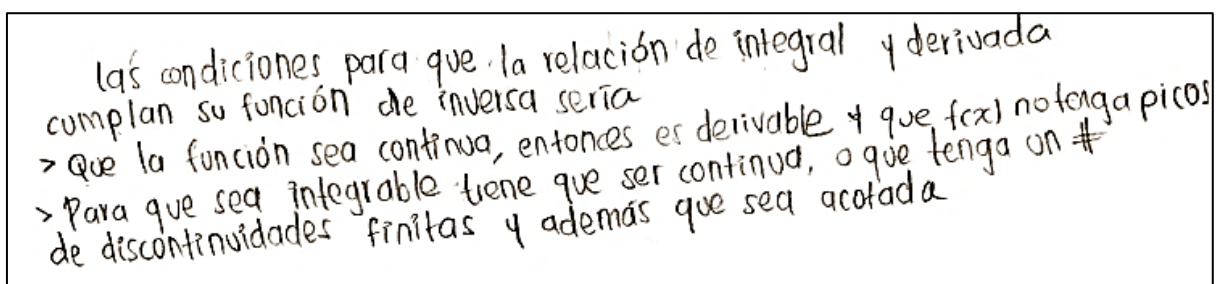
Harold representa algebraicamente la relación entre derivada de integral (Figura 110), en la cual menciona que la derivada de la integral de una función  $f(x)$  corresponde a la función que se está integrando, mostrando de forma explícita la relación entre la derivada de una integral evidenciando dificultades en la interpretación de la integral indefinida, donde Arturo complementa la conjetura de Harold y Juliana mostrando la relación entre la integral de una derivada.



$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = \boxed{f(x)}$$

Figura 110. Conjetura Harold

Al cuestionarlos acerca de la validez de la relación encontrada entre derivada e integral manifiestan que no siempre se cumple, puesto que como la relación es: derivar una integral e integrar una derivada, necesitan que la función se pueda integrar o derivar respectivamente, atribuyéndole condiciones a la función que se derive o se integre.



las condiciones para que la relación de integral y derivada cumplan su función de inversa sería  
 > que la función sea continua, entonces es derivable y que  $f(x)$  no tenga picos  
 > Para que sea integrable tiene que ser continua, o que tenga un # de discontinuidades finitas y además que sea acotada

Figura 111. Cuestionamiento del modelo Juliana

H, A, J: se cumple siempre, siempre.

A: la cosa es que pocas funciones pueden ser integrables, pero prácticamente todas pueden ser derivables.

I: ¿entonces?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

H: hay funciones que se pueden derivar, pero no integrar, y hay funciones que se pueden integrar, pero no derivar.

I: ¿en qué condiciones se cumpliría la conjetura?

J: pues la función debe ser derivable o integrable.

I: ¿cuál función?

H: pues si es la derivada de la integral, la función que se integra debe ser integrable, si no, no va a existir la integral.

A: y si es la integral de la derivada, la función que se deriva debe ser derivable.

I: ¿y cuando una función es derivable o integrable?

J: para que sea integrable la función puede tener un número finito de discontinuidades y debe ser acotada y para que sea derivable debe ser continua.

I: (dibuja la función valor absoluto) esta función es continua ¿es derivable en todos los puntos?

J: ah no, debe ser continua y no tener picos.

## 6. Conclusiones

De acuerdo con Gravemeijer (citado en Van den Heuvel-Panhuizen, 2003), el cual destaca la conexión entre el uso de modelos y el principio de reinención guiada, hemos notado que, para lograr el paso de un nivel inferior a un nivel superior, los modelos, la reinención guiada y la interacción entre estudiantes - estudiantes, profesor - estudiantes y software - estudiante, juegan un rol importante, puesto que uno de los objetivos de la educación matemática realista es que el estudiante reinvente las matemáticas por sí mismo, pero que no lo haga de forma individual.

El papel del docente debe ser de mediador y guía en el proceso de interacción, por lo que el diseño de tareas debe ser planificado y controlado por el docente de forma tal que permita que el proceso de reinención sea de forma natural y no forzada, permitiéndole al estudiante la construcción del conocimiento.

Se pudo observar que gracias al proceso de interacción (estudiante-estudiante, estudiante-investigador, estudiante-software) y a las tareas diseñadas para el principio de reinención guiada, los estudiantes identifican y representan la distancia recorrida como la acumulación del cambio de la velocidad (integral definida de la velocidad) y la velocidad como la razón de cambio de la acumulación de la velocidad (razón de cambio de la distancia), así como el área de un círculo como el área bajo la función perímetro, y el perímetro como la pendiente de la recta tangente a la función área, planteando implícitamente supuestos acerca de cómo encontrar una magnitud variable conociendo la otra con el uso de integral y derivada.

Las tecnologías digitales fueron fundamentales en el trabajo y el logro de los objetivos de aprendizaje, porque ofrecieron la posibilidad de poder grabar fenómenos, haciéndolos más accesibles e imaginables para el estudiante y ofreciéndole la posibilidad de visualizar, manipular, explorar, conjeturar, crear y comparar diferentes representaciones de los modelos “de” y “para” la solución de la situación.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Así mismo, notamos que la tecnología no fue un limitante para el paso de un nivel a otro, al contrario, el diseño planificado y el uso de esta, les permitió a los estudiantes encontrar regularidades, patrones y/o características propias del concepto en cuestión que no se encontrarían fácilmente a lápiz y papel, conduciendo así a la creación de conjeturas y justificaciones de los modelos creados, promoviendo el proceso de reinención.

Por otra parte, pudimos observar que se presentan dificultades en la conceptualización de la integral definida y la integral indefinida, puesto que los estudiantes no tienen claridad entre las diferencias y el significado de cada una de ellas.

A continuación, presentamos dos secciones: i) caracterización a posterior de los niveles de matematización Situacional, Referencial y General; ii) Caracterización a posteriori y algunas modificaciones de la secuencia de tareas diseñadas en cada una de las situaciones matemáticas realistas enmarcadas en el fenómeno de Caída Libre y Área y Perímetro.

### **6.1 Caracterización a posteriori de los niveles de matematización del Teorema Fundamental del Cálculo**

La caracterización de los niveles de matematización se hizo mediante la comparación de la caracterización a priori realizada en la Fase III (apartado 4.4 Fase IV: Descriptores a priori de los Niveles de Matematización) con los modelos emergentes y producciones libres de los estudiantes al momento de realizar la secuencia de tareas enmarcadas en las situaciones matemáticas realistas para la matematización del TFC.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

**6.1.1 Nivel Situacional FCL y FAP.** De acuerdo con las hojas de trabajo, las evidencias obtenidas a partir de las videograbaciones de la aplicación de cada secuencia y el análisis realizado a cada una de ellas, se pudieron ratificar los modelos emergentes previstos en el análisis a priori del Nivel Situacional (apartado 4.2.2 Análisis a priori de las tareas diseñadas en cada situación matemática realista enmarcada en el Fenómeno Caída Libre (FCL)), salvo que, a pesar de introducir los términos como acumulación del cambio, razón de cambio de acumulación y región barrida por el rastro de segmentos, en los modelos creados no utilizaron dichas expresiones pero si las asociaron de forma inmediata con las nociones de área bajo curvas y razón de cambio, del significado dado en el contexto, al área bajo la curva. Sin embargo, aunque no usaron dichos términos en la creación de las conjeturas, fue la exploración de estas ideas las que los llevaron a utilizar explícitamente la derivada y la integral para la solución de las situaciones matemáticas realistas.

Se pudo evidenciar que al momento de enfrentarse a la Primera y Segunda Situación del FCL sin ningún proceso de interacción y reinención guiada, los estudiantes trabajaron con los conocimientos previos acerca del uso de la derivada o la integral para resolver dichas situaciones, pero no tenían claro el por qué su uso y como usarlas adecuadamente. Sin embargo, de acuerdo con los modelos creados en este nivel a partir de las tareas diseñadas para el proceso de interacción y reinención guiada se pudo constatar que dichas tareas permitieron el descubrimiento de la relación, en intervalos de tiempo, de las variables distancia y velocidad con las ideas del área bajo la curva y la razón de cambio promedio del área bajo la curva.

En el FAP, en la Primera y Segunda Situación los estudiantes utilizaron la derivada y la integral con un poco más de seguridad puesto que al enfrentarse a dichas situaciones ya habían realizado las tareas del FCL, sin embargo, al momento de justificar sus estrategias de solución, las argumentaciones estuvieron ligadas al procedimiento algebraico realizado sin mencionar en el hecho de que la integral y la derivada están relacionadas de forma inversa.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

De acuerdo con los modelos creados en este nivel para el FAP a partir de la solución de las tareas diseñadas para el proceso de interacción y reinención guiada se pudo evidenciar que éstas permitieron a los estudiantes aclarar el comportamiento de las funciones perímetro de una circunferencia y área de un círculo del mismo radio, así como el porqué del uso de la integral y la derivada para la solución de las situaciones, puesto que estas permitieron el descubrimiento de la relación entre las variables área y perímetro con el área bajo la función perímetro y la pendiente de la recta tangente a la función área.

Tabla 11.

*Descriptores a posteriori Nivel Situacional FCL y FAP*

Descriptores generales (Henao y Vanegas, 2012; Gonzales, 2015)	Caída Libre	Perímetro y Área
Identificar los elementos matemáticos pertinentes al problema situado en la realidad.	Identificar y conocer el comportamiento de la distancia y velocidad con respecto al tiempo en la situación problema, de acuerdo con la información suministrada por el video, el uso de estrategias intuitivas y/o conocimientos previos.	Identificar y conocer el comportamiento del área del círculo y el perímetro de una circunferencia de radio $x$ de acuerdo con el uso de estrategias intuitivas y conocimientos previos.
Esquematizar, formular y visualizar un problema de varias maneras.	Interpretar información tabular y predecir el comportamiento de las magnitudes variables (distancia, velocidad) implicadas en la situación problema.	Plantear supuestos acerca de la relación entre las magnitudes variables (área círculo-perímetro circunferencia) con las ideas de la región barrida por el rastro de los segmentos que se forman bajo la función perímetro de la circunferencia de radio (área bajo la función perímetro) y la magnitud de la pendiente de la recta tangente en cualquier punto a la función área del círculo del mismo radio.
Realizar las primeras representaciones ligadas al contexto.	Plantear supuestos acerca de la relación entre las magnitudes variables (distancia-velocidad) con las ideas de acumulación del cambio (área bajo la curva velocidad) y la razón de cambio de la acumulación (razón de cambio de la distancia) en intervalos de tiempo.	
Representar el problema de acuerdo con los conceptos matemáticos pertinentes y plantear supuestos, donde dichas representaciones están ligadas al contexto.		

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

**6.1.2 Nivel Referencial FCL y FAP.** Se pudo observar en la Primera Situación del FCL que el proceso de interacción, la reflexión de los modelos creados en el Nivel Situacional y las tareas diseñadas para el principio de reinención guiada en el Nivel Referencial, lograron que los estudiantes identificaran y representaran retóricamente y algebraicamente la distancia recorrida por la pelota hasta un instante de tiempo  $t$ , como la integral de la velocidad desde el inicio del movimiento hasta ese instante, presentando en un principio confusiones acerca del significado y las diferencias entre la integral definida e indefinida, las cuales se aclararon debido a la influencia del contexto físico y el análisis del efecto de la integral definida e indefinida en la situación matemática realista. Aunque en las tareas se les pedía graficar la relación entre la distancia recorrida por la pelota y el área bajo la curva velocidad, solamente un estudiante logró hacerlo.

En la Segunda Situación del FCL, los estudiantes lograron identificar y representar algebraicamente la velocidad instantánea como la razón de cambio instantánea de la acumulación de la velocidad, teniendo en cuenta que dicha acumulación representa la distancia recorrida por la pelota, plantearon implícitamente supuestos acerca de cómo encontrar una magnitud variable conociendo la otra, mostraron claridad acerca del significado de la razón de cambio instantánea, interpretándola como el límite de la razón de cambio promedio de la velocidad cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, y soportaron sus argumentos en la representación algebraica de la relación entre la razón de cambio y la velocidad. Así mismo crearon modelos algebraicos y retóricos para representar la relación de la distancia recorrida en un intervalo de tiempo como la razón de cambio promedio, y la distancia recorrida en un instante de tiempo como la razón de cambio instantánea.

En el FAP, en la Primera y Segunda Situación, a partir de la reflexión de los modelos creados en el Nivel Situacional, los estudiantes lograron crear modelos retóricos y algebraicos acerca de la relación entre las magnitudes variables área y perímetro con los procesos de derivación e

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

integración, asociando la región barrida por el rastro de los segmentos formados bajo la función perímetro con la integral del perímetro, teniendo en cuenta que este solo es válido para valores positivos del radio y la pendiente de la recta tangente a la función área con la derivada de esta.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, consideramos conveniente ajustar los descriptores planteados para el Nivel Referencial (Tabla 12) en los dos fenómenos, puesto que aquí los estudiantes utilizan explícitamente la integral y la derivada para representar las relaciones entre las variables a partir de la reflexión de las ideas acumulación del cambio, razón de cambio de acumulación, región barrida por el rastro de segmentos y pendiente de la recta tangente dadas en el Nivel Situacional.

Tabla 12.

### *Caracterización a posteriori Nivel Referencial FCL y FAP*

<b>Descriptores generales (Henao y Vanegas, 2012; Gonzales, 2015)</b>	<b>Caída Libre</b>	<b>Perímetro y Área</b>
Comprender las relaciones existentes entre el lenguaje del problema y el lenguaje formal y simbólico que se necesita para comprenderlo en términos matemáticos.	Identificar y representar la distancia recorrida como la integral de la velocidad desde el inicio del movimiento hasta un instante $t$ .	Identificar y representar el área de un círculo de radio $x$ como la integral de la función perímetro teniendo en cuenta que este es válido solo para radios positivos.
Encontrar regularidades, relaciones y patrones.	Identificar y representar la velocidad de la pelota como la razón de cambio de la distancia, esto es, representar la velocidad como la derivada de la distancia.	Identificar y representar el perímetro de una circunferencia de radio $x$ como la pendiente de la recta tangente a la curva área en cualquier punto, esto es, como la derivada de la función área.
Crear diferentes modelos matemáticos particulares de la situación-problema, aunque se visualiza un vínculo con el contexto.	Plantear supuestos enriquecidos con objetos matemáticos acerca de cómo encontrar una magnitud variable (distancia, velocidad) conociendo la otra.	Plantear supuestos enriquecidos con objetos matemáticos acerca de cómo encontrar una magnitud variable (área del círculo, perímetro de la circunferencia) conociendo la otra.
Enriquecer las representaciones con objetos matemáticos.	Identificar y representar la relación existente entre las magnitudes variables (distancia-velocidad), la integral de la velocidad (distancia) y la derivada de la distancia (velocidad).	Identificar y representar la relación existente entre las variables (área círculo, perímetro circunferencia), la integral del perímetro de $0$ a $r$ (área círculo) y la derivada del área (perímetro circunferencia).

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

**6.1.3 Nivel General FCL y FAP.** A partir de la reflexión de los modelos retóricos y algebraicos creados en el Nivel Referencial en los dos fenómenos, los estudiantes lograron identificar y representar la relación existente entre las magnitudes distancia y velocidad, área y perímetro con la integral y la derivada. En el Nivel General identificaron la relación entre la integral de una función derivada y la derivada de una función integral, manifestando que se obtiene siempre la función que deriva y la que se integra respetivamente, razón por la cual la derivada y la integral están relacionadas de forma inversa, puesto que cada una deshace lo que hace la otra, relación que se evidencia en el TFC, sin referirse a las situaciones contexto de los fenómenos trabajados.

Así mismo, manifestaron el hecho de que estas relaciones se cumplen siempre y cuando la función que se integre sea integrable y la que se derive sea derivable.

Sin embargo, a pesar de representar retórica y algebraicamente de forma intuitiva la relación existente entre derivada e integral, consideramos que, para el **Nivel Formal**, debe hacerse énfasis en si la relación se da tanto para integrales definidas como para integrales indefinidas puesto que durante el proceso de matematización se presentaron varias confusiones con respecto al significado de cada una de ellas y en el Nivel General solo manifestaron la relación refiriéndose a la integral sin especificar a cual se hace referencia.

Tabla 13.

*Caracterización a posteriori Nivel General FCL y FAP*

Descriptorios generales (Henao y Vanegas, 2012; Gonzales, 2015)	Caída Libre; Perímetro y Área
Construir de expresiones algebraicas.	Representar algebraicamente la relación existente entre derivada e integral.
Trabajar con notaciones y símbolos de la matemática para la obtención de modelos generales.	Conjeturar la relación existente entre derivada e integral.
Utilizar operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico.	

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Refinar y ajustar los modelos matemáticos mediante un proceso de combinación e integración de modelos.	Explicar gráficamente la relación encontrada.
Generalizar implica para Freudenthal conectar varias situaciones reconociendo características similares que permiten que se clasifiquen dentro de un determinado tipo (Gravemeijer, 1994, p.104).	Verificar si dicha relación se cumple para cualquier fenómeno que implique magnitudes variables que tengan el mismo comportamiento.
Desprendimiento total del contexto.	En qué condiciones se cumple la relación entre derivada e integral.
Verificación del modelo encontrado.	

## 6.2 Caracterización a posteriori y algunas modificaciones de la secuencia de tareas diseñadas en el FCL

De acuerdo con las producciones libres de los estudiantes y los modelos creados en cada tarea, realizamos en análisis a posteriori de la secuencia y realizamos algunas modificaciones del diseño de las mismas.

Primera Situación: Abra el archivo Situación\_1.1, el cual muestra el video de la caída de una pelota de tenis, que se suelta desde 1,817 m de altura (primer piso del edificio Laboratorios Livianos de la UIS). A partir de la velocidad, halle la expresión algebraica que representa la distancia desde el punto de lanzamiento para cualquier instante de tiempo  $t$ .

Tabla 14.

*Análisis a posteriori Nivel Situacional y Referencial Primera Situación FCL*

Tarea	Posibles Respuestas	Contra Preguntas
	<b>NIVEL SITUACIONAL (NS)</b>	
1. A partir de la velocidad, halle la expresión algebraica que representa la distancia desde el punto de lanzamiento para cualquier instante de tiempo $t$ .	<b>R1.</b> Usar la idea de que la velocidad es igual a la distancia sobre tiempo $v = \frac{d}{t}$ , luego despejando se tiene que $d = v * t$	<b>CR1.</b> ¿En cualquier fenómeno físico se tiene que la velocidad es igual a la distancia sobre el tiempo? ¿en qué condiciones se cumple que $v = \frac{d}{t}$ ?
	<b>R2.</b> Usar la fórmula física que representa la distancia de la pelota al punto de partida en el fenómeno de caída libre, esto es, $h(t) = \frac{1}{2}gt^2$ donde, $t$ es el tiempo y $g$ es la aceleración de la gravedad.	<b>CR2.</b> ¿Esa expresión algebraica representa la distancia de la pelota a partir de la velocidad?
	<b>R3.</b> No conozco la velocidad de la pelota para poder hallar la distancia a partir de la velocidad.	<b>CR3.</b> Y si conociera la velocidad, ¿cómo lo haría?
	<b>R4.</b>	<b>CR4. CR5. CR6.</b> ¿Por qué?
	$d(t) = \int_0^t v(t)dt = 4,178t^2$	<b>CR7.</b> ¿Qué le está pidiendo el problema?

**R5.**

$$d(t) = \int v(t)dt = 4,178t^2$$

**R6.** Integro la velocidad y obtengo la distancia.**R7.** Integro la distancia y obtengo la velocidad.

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

### INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA NS

a. Describa el comportamiento de la velocidad de la pelota desde el punto de lanzamiento hasta que toca el piso. Explique su respuesta.	<p><b>R1.</b> Decreciente- Disminuye, porque la pelota va hacia abajo.</p> <p><b>R2.</b> Creciente - Aumenta, porque cuando va cayendo actúa la aceleración de la gravedad y esto hace que la velocidad aumente cada vez más.</p> <p><b>R3.</b> Constante, es siempre la misma, porque la pelota se suelta y no lleva una velocidad inicial.</p> <p><b>R4.</b> Se va haciendo más lenta.</p> <p><b>R5.</b> Se va haciendo mayor.</p> <p><b>R6.</b> No cambia.</p> <p><b>R7.</b> Cambia.</p> <p><b>R8.</b> Aumenta en forma constante porque es un fenómeno de caída libre, por lo tanto, la velocidad es <math>v(t) = gt</math></p>	<p><b>CR.</b> ¿Qué es la velocidad?</p> <p><b>CR.</b> ¿La velocidad está cambiando? ¿Cómo cambia?</p>
b. ¿Cuál es la velocidad inicial? Explique su respuesta	<p><b>R1.</b> Igual a cero (porque suelta la pelota y ahí no hay velocidad)</p> <p><b>R2.</b> Diferente de cero.</p> <p><b>R3.</b> La velocidad inicial sería cero, ya que en el problema dice que se deja caer, se suelta sin ninguna aceleración.</p>	<p><b>CR1-3.</b> ¿Por qué igual a cero?</p> <p><b>CR2.</b> ¿Por qué diferente de cero?</p>
c. ¿Cuál es la velocidad final? Explique su respuesta	<p><b>R1.</b> Igual a cero (porque cuando la pelota toca el suelo la velocidad es cero)</p> <p><b>R2.</b> Diferente de cero (porque la velocidad de la pelota aumenta cada vez más y cuando toca el suelo lleva velocidad y la pelota rebota)</p> <p><b>R3.</b> Con la fórmula de la velocidad y conociendo el tiempo que ha transcurrido desde que se lanza la pelota y toca el suelo <math>t_f</math>. <math>v_f = gt_f</math></p>	<p><b>CR1.</b> ¿Por qué igual a cero?</p> <p><b>CR2.</b> ¿Por qué diferente de cero?</p> <p><b>CR4.</b> ¿Está seguro? ¿Por qué esa fórmula? (Porque me la enseñaron en física) ¿Por qué funciona?</p>

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

- d. Ubíquese en la parte superior de la pantalla y en la opción Ventana oprima “Vista Derecha”, describa el comportamiento de la velocidad de la pelota desde el punto de lanzamiento hasta que toca el piso. Explique su respuesta.

**R1.** Creciente porque al transcurrir el tiempo la magnitud de la velocidad es mayor a la anterior.

**R2.** Cambia porque la magnitud de la velocidad es diferente en cada instante de tiempo.

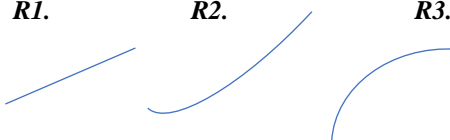
**CR2.** ¿Cómo es el cambio?

- e. Represente gráficamente el comportamiento de la velocidad del movimiento de la pelota a través del tiempo.

**R1.**

**R2.**

**R3.**



**CR1.** ¿Cuántas representaciones gráficas hay?

**CR2.** ¿Cuál es la gráfica que mejor modela la situación?

**CR3.** ¿Por qué?

- 1.1 Halle la velocidad de la pelota en los instantes de tiempo dados

Tiempo	Velocidad
0s	
0,031s	
0,05s	
0,145s	
0,28s	
0,34s	
0,48s	
0,6s	
$t$	

**R1.** No puedo porque el software no me da esa información.

**R2.** Como la velocidad tiene un comportamiento lineal, porque la razón de cambio es constante, entonces podemos hallar la expresión algebraica de la velocidad y así reemplazar los tiempos de la tabla y encontrar la magnitud de la velocidad.

**R3.**  $v(t) = 8,29t + 0$  reemplazo los tiempos de la tabla y así puedo encontrar la magnitud de la velocidad.

**CR1.** ¿No puede trabajar con la información tabular dada por Tracker? ¿Qué puede encontrar en ellos?

De acuerdo con los siguientes intervalos, halle las diferencias de los intervalos de tiempo y las diferencias de la velocidad. ¿Cómo son las diferencias?

[0,1 ; 0,133]
[0,2 ; 0,233]
[0,3 ; 0,333]
[0,367 ; 0,4]
[0,4 ; 0,433]

¿Qué significa que las diferencias de la velocidad y el tiempo sean constantes?

¿Cómo puede interpretar esas diferencias?

**CR2.** ¿Razón de cambio? ¿Qué significa? ¿Cómo se interpreta en la gráfica de la magnitud cambiante? ¿Cómo hallar expresión algebraica?

**CR3.** ¿Cómo encontró la expresión algebraica? ¿Qué significa el 8,29?

Con la expresión algebraica obtenida en Tracker, ¿a qué es igual la velocidad en  $t = 0s$ ?

¿Es coherente que cuando el tiempo es igual a 0s la velocidad de la pelota sea 0.5885?

¿Cuál sería entonces la representación algebraica de la velocidad con respecto al tiempo?

- c. En Tracker, ubíquese en la parte superior de la pantalla y en la opción Ventana oprima “Herramienta de Datos... (Analizar...)” y maximice la nueva ventana, oprima el botón *Analyze*, seleccione Ajustes. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la velocidad de la pelota?

**R1.**  $v(t) = 8,356t + 0,5885$

**R2.**  $v(t) = 8,356t$

- d. Verifique las velocidades encontradas en el ítem 1.1 ¿son iguales los resultados? ¿por qué?

**R1.** No son iguales porque hay un margen de error debido a que en realidad no se pueden controlar todas las variables, en este caso. Aunque no son iguales si son muy parecidas.

¿Cómo es la velocidad inicial de acuerdo con la información dada por el software?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

**R2.** Son similares, pero con margen de error.

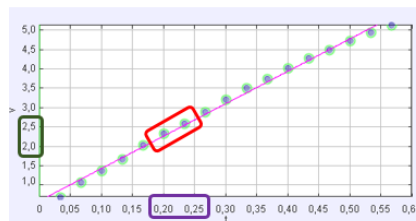
¿Cómo se interpreta la cantidad 0,5885? ¿Cómo es la velocidad inicial de acuerdo con la expresión algebraica?

¿Cómo se interpreta la cantidad 8,356?

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

1.2 Con ayuda del archivo anterior

- a. En la gráfica de la velocidad contra el tiempo ¿dónde se evidencia el cambio de la variable velocidad con respecto al tiempo? ¿qué representa geoméricamente la acumulación del cambio de la velocidad con respecto al tiempo?



**R1.** En los valores del tiempo (cambio del tiempo franja morada)

**R2.** En los valores de la velocidad (cambio de la velocidad – franja verde)

**R3.** En los puntos de la velocidad contra el tiempo (cambio velocidad contra tiempo – franja roja)

**R4.** El cambio es que a mayor tiempo la velocidad se hace mayor, la acumulación del cambio de velocidad con el tiempo geoméricamente representa el área que queda bajo la recta.

¿Qué es el cambio?

Calcule el cambio de la magnitud variable velocidad cuando  $t$  cambia de:

0,1 s a 0,133s

0,2s a 0,233s

0,3s a 0,333s

0,367s a 0,4s

0,467s a 0,5s

En la gráfica de velocidad contra tiempo represente los cambios de tiempo y velocidad anteriores.

¿Qué representan los puntos en la mostrados en la vista gráfica? Al representar el cambio de la velocidad contra el tiempo ¿esos cambios se dan forma separada o de manera simultánea?

- b. En la ventana “Herramienta de Datos”, oprima el botón *Mesure* y seleccione *Area*. Halle la acumulación del cambio de la velocidad con respecto al cambio de tiempo dado.

Intervalo de tiempo	Área
[0,1 ; 0,133]	
[0,2 ; 0,233]	
[0,3 ; 0,333]	
[0,367 ; 0,4]	
[0,4 ; 0,433]	

Intervalo de tiempo	Área
[0,1 ; 0,133]	0,0506
[0,2 ; 0,233]	0,0818
[0,3 ; 0,333]	0,112
[0,367 ; 0,4]	0,129
[0,4 ; 0,433]	0,138

Note que los extremos de la región sombreada (el área bajo la curva) se pueden mover.

- c. Abra el archivo Situación\_1.2, sabiendo que  $r$  representa la distancia recorrida por la pelota desde el punto de lanzamiento a través del tiempo. Halle la distancia recorrida por la pelota en los siguientes intervalos de tiempo.

Intervalo de tiempo	Distancia
[0,1 ; 0,133]	
[0,2 ; 0,233]	
[0,3 ; 0,333]	
[0,367 ; 0,4]	
[0,4 ; 0,433]	

**R1.** No sé cómo se hallan porque el software solo da la distancia recorrida en un instante de tiempo.

**R2.**

Intervalo de tiempo	Distancia
[0,1 ; 0,133]	0,05
[0,2 ; 0,233]	0,08
[0,3 ; 0,333]	0,113
[0,367 ; 0,4]	0,129
[0,4 ; 0,433]	0,139

Si tiene la distancia recorrida en un instante  $t_1$  y en un instante  $t_2$  ¿cómo hallar la distancia que recorrió del instante  $t_1$  al instante  $t_2$ ?

- d. Compare la tabla del ítem **b** con la tabla del ítem **c**, ¿qué relación existe entre los datos contenidos

**R1.** El área bajo la curva velocidad en intervalos de tiempos es igual a la distancia recorrida en los mismos intervalos.

La distancia y el área halladas ¿corresponden a los mismos intervalos?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

en ellas? Plantee una conjetura y explique ampliamente.

**R2.** La distancia recorrida por la pelota es igual al área bajo la curva velocidad.

Comparando la información de la distancia y el área ¿qué puede concluir?

**R3.** El área bajo la curva se puede interpretar como la distancia, pero cuando las otras variables son tiempo y velocidad.

**CR2.** Si han transcurrido 0,133s desde el lanzamiento de la pelota, ¿Cuánta distancia ha recorrido la pelota?

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

## NIVEL REFERENCIAL (NF)

## INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA (NF)

e. ¿Qué relación existe entre el área bajo la curva velocidad y la distancia recorrida hasta un instante de tiempo? Plantee una conjetura y explique ampliamente.

**R1.** La distancia recorrida por la pelota es igual al área bajo la curva velocidad.

¿Qué significa que dos cantidades estén relacionadas?

**R2.** La distancia recorrida por la pelota hasta un instante de tiempo es igual al área bajo la curva velocidad desde el principio del movimiento hasta ese instante de tiempo.

**CR1.** ¿El área bajo la curva velocidad de dónde a dónde? ¿en cualquier intervalo?

f. De acuerdo con la conjetura planteada, halle la distancia de la pelota a partir de la velocidad en cualquier instante de tiempo  $t$ . Justifique ampliamente sus respuestas.

**R1.** Como la distancia es igual al área bajo la curva velocidad:

$$d(t) = \int_0^t v(t)dt = 4,178t^2$$

**R2.**

$$d(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v(t_i)\Delta t = 4,178t^2$$

**CR3.** ¿La integral indefinida representa el área bajo la curva velocidad?

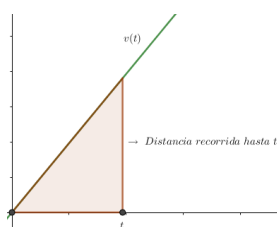
**R3.**

$$\int v(t)dt = 4,178t^2$$

g. Realice el análisis de regresión de los puntos que representan la distancia de la pelota con respecto al tiempo, para ello, des-seleccione la opción *Mesure - Area*, ubíquese en  $r$  y con click sostenido trásdela al lado derecho de la columna  $t$  y des-seleccione la opción *marcas* en la columna  $v$ . Compare los resultados obtenidos en el ítem anterior con los dados por el software. ¿Qué puede concluir? Explique ampliamente sus respuestas y represente gráficamente los sucesos del ítem  $e$  y  $f$ .

$$d(t) = 4,483t^2 + 0,03875t$$

La distancia hasta un instante de tiempo es igual al área bajo la curva velocidad desde cero hasta ese instante.



¿La distancia en cualquier instante de tiempo hallada por usted es igual a la regresión de los puntos que representan la distancia con respecto al tiempo?

Segunda Situación: A partir de la distancia, halle la expresión algebraica que representa la velocidad de la pelota para cualquier instante de tiempo  $t$ .

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Tabla 15.

## Análisis a posteriori Nivel Situacional y General Segunda Situación FCL

Tarea	Posibles Respuestas	Contra Preguntas
	<b>NIVEL SITUACIONAL (NS)</b>	
	<b>R1.</b> Usar la idea de que la velocidad es igual a la distancia sobre tiempo $v = \frac{d}{t}$ .	
	<b>R2.</b> Usar la fórmula física que representa la velocidad de la pelota en el fenómeno de caída libre, esto es, $v(t) = gt$ donde, $t$ es el tiempo y $g$ es la aceleración de la gravedad.	<b>CR1.</b> ¿En cualquier fenómeno físico se tiene que la velocidad es igual a la distancia sobre el tiempo? ¿en qué condiciones se cumple que $v = \frac{d}{t}$ ?
2. A partir de la distancia, halle la expresión algebraica que representa la velocidad de la pelota para cualquier instante de tiempo $t$ .	<b>R3.</b> Conozco la distancia desde el punto de lanzamiento del ejercicio anterior, pero no sé cómo hallar la distancia a partir de la velocidad.	<b>CR2.</b> ¿Esa expresión algebraica representa la velocidad de la pelota a partir de la distancia?
	<b>R4.</b> La derivada de la distancia es la velocidad.	<b>CR3.</b> ¿Si será posible hallar la velocidad a partir de la distancia?
	<b>R5.</b>	<b>CR4.</b> ¿Por qué esa relación? ¿En cualquier fenómeno se cumple?
	$\frac{dr}{dt} = v(t)$	

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

**INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA (NS)**

En la ventana "Herramienta de Datos" del archivo anterior, oprima Ctrl O y abra el archivo Ventana 1.2.

- a. Cuál es la magnitud aproximada de la velocidad que lleva la pelota en los intervalos de tiempo:

[0,1 ; 0,133]  
[0,2 ; 0,233]  
[0,3 ; 0,333]  
[0,367 ; 0,4]  
[0,467 ; 0,5]

Intervalo de tiempo	Velocidad aproximada
[0,1 ; 0,133]	1,5165
[0,2 ; 0,233]	2,454
[0,3 ; 0,333]	3,3525
[0,367 ; 0,4]	3,873
[0,467 ; 0,5]	4,599

¿Qué es el promedio?

Por ejemplo, cuando decimos, los estudiantes de ingeniería de primer semestre tienen en promedio 16 años ¿cómo se puede interpretar dicha información?

- b. Cuantifique el cambio del área bajo la curva velocidad cuando el tiempo cambia de:

0,1 s a 0,133s  
0,2 s a 0,233s  
0,3 s a 0,333s  
0,367s a 0,4s  
0,467s a 0,5s

Intervalo de tiempo	$\Delta A$
[0,1 ; 0,133]	0,0506
[0,2 ; 0,233]	0,0818
[0,3 ; 0,333]	0,112
[0,367 ; 0,4]	0,129
[0,467 ; 0,5]	0,153

¿Qué es el cambio?

Con ayuda del software: Halle el área bajo la curva velocidad en  $t = 0,1s$  y en  $t = 0,133s$  ¿la magnitud del área cambió? ¿cómo calcular la magnitud de ese cambio?

- c. ¿Cuál es la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad con respecto al tiempo en los cambios de tiempo anteriores?

Intervalo de tiempo	$\Delta A/\Delta t$
[0,1 ; 0,133]	1,5333
[0,2 ; 0,233]	2,4787
[0,3 ; 0,333]	3,3939
[0,367 ; 0,4]	3,909
[0,467 ; 0,5]	0,153

¿Qué es la rapidez del cambio?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

- d. Compare los resultados obtenidos en el ítem a con el ítem c ¿Qué puede concluir? Plantee una conjetura. Explique ampliamente sus respuestas.
- R1.** La velocidad promedio en intervalos de tiempo es aproximadamente igual a la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad con respecto al tiempo en los mismos intervalos de tiempo.
- R2.** La velocidad promedio en intervalos de tiempo es aproximadamente igual a la razón de cambio del área bajo la curva velocidad en los mismos intervalos.
- CR2.** ¿La razón de cambio es igual a la rapidez del cambio?

## NIVEL REFERENCIAL (NR)

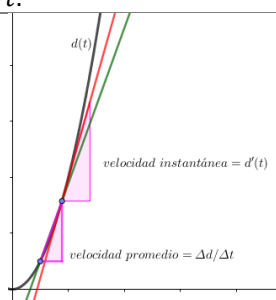
## INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA (NF)

- e. Si los intervalos de tiempo se hacen cada vez más pequeños, ¿qué sucede con la rapidez del cambio del área en relación con la velocidad? Explique ampliamente y plantee una conjetura.
- R1.** Como siguen siendo intervalos, se sigue cumpliendo que la velocidad promedio es aproximadamente igual a la razón de cambio.
- R2.** La rapidez de cambio instantánea es aproximadamente igual la velocidad instantánea.
- CR1.** Si los intervalos de tiempo son muy, muy pequeños, ¿qué sucede con la velocidad promedio?
- ¿Qué sucede con la razón de cambio del área con respecto al tiempo si los intervalos de tiempo se hacen cada vez más y más pequeños?
- CR2.** ¿Por qué?

- f. A partir de la conjetura anterior, halle la velocidad de la pelota a partir de la distancia en cualquier instante de tiempo  $t$ . Compare el resultado con la velocidad encontrada en la primera situación, ¿Qué puede concluir?
- R1.**  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}$  La derivada de del área bajo la curva velocidad es igual a la velocidad.
- R2.**  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}$  La derivada de la distancia es igual a la velocidad.
- R3.** Derivando la distancia. La derivada de la distancia es igual a la velocidad.
- ¿Cómo calcular la rapidez de cambio del área con respecto al tiempo en intervalos de tiempo infinitamente pequeños?

- g. En la representación gráfica de la distancia con respecto al tiempo (área bajo la curva velocidad con respecto al tiempo) ¿qué representa geoméricamente la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea?
- R1.** En la gráfica de la función distancia con respecto al tiempo, la razón de cambio promedio representa geoméricamente la pendiente de la recta secante a la curva para un intervalo de tiempo y la razón de cambio instantánea representa la pendiente de la recta tangente a la curva para un instante de tiempo  $t$ .
- ¿Cómo interpretar gráficamente la razón de cambio promedio? ¿Qué significado geométrico se le puede atribuir a una razón?

- h. Represente gráficamente los sucesos del ítem d y e.



De acuerdo con la encontrado en el ítem anterior, ¿qué relación geométrica pueden establecer?

**Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.**

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Tabla 16.

Análisis a priori Nivel General Primera y Segunda Situación FCL

Tarea	Posibles Respuestas	Contra Preguntas
<b>NIVEL GENERAL (NG) INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA</b>		
3. Plantee una conjetura acerca de la relación, en general, entre distancia-velocidad y velocidad-distancia. ¿cómo hallar una magnitud variable conociendo la otra? Plantee una conjetura.	<p><b>R1.</b> La derivada de la distancia es la velocidad. La integral de la velocidad desde el inicio del movimiento hasta un instante de tiempo es igual a la distancia recorrida por la pelota hasta ese instante de tiempo.</p> <p><b>R2.</b></p> $\frac{dr}{dt} = v(t)$ $\int_0^t v(t)dt = d(t)$	<p>¿Cómo hallo la distancia a partir de la velocidad? ¿Cómo hallo la velocidad a partir de la distancia?</p> <p>¿Están entonces relacionados la distancia y la velocidad? ¿Cómo es esa relación?</p>
d. ¿La conjetura es válida para cualquier fenómeno que implique magnitudes variables con el mismo comportamiento? Argumente y justifique ampliamente sus respuestas.	Si las magnitudes tienen comportamiento lineal y cuadrático se cumple que la derivada de la magnitud cuadrática es la magnitud lineal y la integral de la función lineal es igual a la magnitud cuadrática haciendo las constantes iguales.	¿Cuál es el comportamiento de la distancia y la velocidad en las situaciones anteriores?
e. ¿Qué relación hay entre cantidad variable, acumulación de cambio (área bajo la curva) y razón de cambio de acumulación? Justifique sus respuestas.	<p><b>R1.</b> la derivada de la integral es igual a la función que se integra</p> <p><b>R2.</b> Están relacionadas de forma inversa, esto es, la derivada de la integral es igual a la función que se integra y la integral de la derivada es igual a la función que se derivada. La una deshace lo que hace la otra.</p>	<p>¿Qué relación hay entre derivada e integral?</p> <p><b>CR1.</b> ¿Y, al contrario, la derivada de la integral?</p>
f. Represente algebraicamente la relación encontrada.	$\int f'(x) dx = f(x)$ $\frac{d}{dx} \left[ \int f(x) dx \right] = f(x)$	

**6.3 Caracterización a posteriori y algunas modificaciones de la secuencia de tareas diseñadas en el FAP**

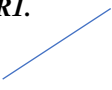
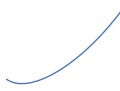

De acuerdo con las producciones libres de los estudiantes y los modelos creados en cada tarea, realizamos en análisis a posteriori de la secuencia y realizamos algunas modificaciones del diseño de las mismas.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO




Primera Situación: A partir del perímetro de una circunferencia de radio  $x$ , halle la expresión algebraica que representa el área del círculo en función del radio ( $x$ ).

Tabla 17.

*Análisis a posteriori Nivel Situacional y Referencial Primera Situación FAP*

Tarea	Posibles Respuestas	Contra Preguntas
<b>NIVEL SITUACIONAL (NS)</b>		
1. A partir del perímetro de una circunferencia de radio $x$ , halle la expresión algebraica que representa el área del círculo en función del radio ( $x$ ).	<p><b>R1.</b> Usar la fórmula que representa el área de un círculo de radio <math>r</math>, esto es, <math>A(r) = \pi r^2</math></p> <p><b>R2.</b> No conozco el perímetro de la circunferencia de radio <math>r</math> para poder hallar el área del círculo a partir del perímetro.</p> <p><b>R3.</b> El perímetro de una circunferencia es <math>p(r) = 2\pi r</math>, y para hallar el área, integro el perímetro.</p> $\int 2\pi r \, dr = \pi r^2 + c$ <p><b>R4.</b></p> $\int 2\pi r \, dr = \pi r^2$	<p><b>CR1.</b> ¿Esa expresión algebraica representa el área de un círculo de radio <math>r</math> a partir del perímetro de una circunferencia del mismo radio?</p> <p><b>CR2.</b> Y si conociera el perímetro, ¿cómo lo haría?</p> <p><b>CR3.</b> ¿Por qué integrar el perímetro para obtener el área? ¿y la constante de integración?</p> <p><b>CR4.</b> Es una integral indefinida ¿y la constante de integración?</p>
<b>Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.</b>		
<b>PRINCIPIO DE INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA (NS)</b>		
a. Describa el comportamiento del perímetro de una circunferencia cuando varía el radio $x$ . Explique ampliamente	<p><b>R1.</b> El perímetro decrece- disminuye</p> <p><b>R2.</b> El perímetro crece - aumenta, porque cuando aumenta el radio la circunferencia crece, por lo tanto, el perímetro también lo hace.</p> <p><b>R3.</b> Cambia.</p> <p><b>R4.</b> A mayor radio mayor perímetro</p>	<p><b>CR1.</b> ¿Por qué? si el radio de la circunferencia aumenta ¿qué sucede con el perímetro?</p> <p><b>CR2.</b> ¿Por qué?</p> <p><b>CR3.</b> ¿El radio está cambiando? ¿Cómo cambia? ¿Si cambia el radio cambia el perímetro? ¿Cómo influye el cambio del radio en el cambio del perímetro?</p>
b. Represente gráfica y algebraicamente el perímetro de una circunferencia en función del radio $x$ . Justifique su respuesta.	<p><b>R1.</b> </p> <p><b>R2.</b> </p> <p><b>R3.</b> </p> <p><math>p(r) = 2\pi r</math></p>	<p><b>CR.</b> ¿Cuántas representaciones gráficas hay?</p> <p><b>CR.</b> ¿Cuál es la gráfica que mejor modela la situación? ¿Por qué?</p> <p><b>CR.</b> ¿La Representación gráfica corresponde a la representación algebraica?</p>
<b>Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.</b>		
1.1 Abra el archivo Situación_2.1, en él se muestra la interdependencia entre el perímetro de una circunferencia	<p><b>R1.</b> Si, son iguales, porque si el radio aumenta el perímetro también</p> <p><b>R2.</b> No son iguales.</p>	<p><b>CR1.</b> ¿Son exactamente iguales? ¿por qué?</p> <p><b>CR2.</b> ¿Cuál es la diferencia? ¿por qué?</p>

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

<p>y su radio (<math>x</math>). En la barra de entrada escriba la representación algebraica hallada anteriormente. ¿Coinciden las dos gráficas? Explique su respuesta.</p>	<p><b>R3.</b> Ambas gráficas coinciden, pero la del software no está definida para <math>r</math> negativo, ya que no es lógico pensar en un perímetro negativo.</p>
<p>a. Mueva el deslizador <math>x</math>, ¿qué representa la magnitud del segmento azul?</p>	<p><b>R1.</b> El perímetro de una circunferencia de radio <math>r</math>.</p> <p><b>R2.</b> La magnitud del perímetro.</p> <p><b>R3.</b> Nada, porque no sé cuál es la magnitud.</p> <p><b>CR2.</b> ¿El perímetro de quién? ¿de cualquier circunferencia?</p> <p><b>CR3.</b> ¿Qué representa la gráfica? ¿cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente?</p>
<p>b. En el menú Vista seleccione la opción Vista Gráfica 2, oprima los botones  (inicio),  (activar rastro) y  (animar) ¿qué relación hay entre la medida del segmento azul y la circunferencia que se forma? Plantee una conjetura y explique ampliamente su respuesta.</p>	<p><b>R1.</b> La magnitud del segmento azul corresponde al perímetro de la circunferencia que se va formando porque yo lo medí el segmento azul y con esa misma medida se formaba la circunferencia.</p> <p><b>R2.</b> La magnitud del segmento azul corresponde al perímetro de la circunferencia que se va formando porque yo medí la magnitud del segmento y el perímetro de la circunferencia y son iguales los resultados.</p> <p><b>R3.</b> Son iguales.</p> <p><b>R4.</b> Ninguna relación.</p> <p><b>R5.</b> El perímetro de la circunferencia es igual a la longitud del segmento azul porque con el segmento azul formo una circunferencia que tiene por perímetro la magnitud de dicho segmento.</p> <p><b>CR1-2.</b> ¿Por qué?</p> <p><b>CR3.</b> ¿la circunferencia que se forma es igual a la magnitud del segmento azul? ¿En qué son iguales?</p> <p><b>CR4.</b> Cuando activa la opción animar, ¿qué sucede con el segmento azul y la circunferencia correspondiente?</p>
<p>c. Cambie el incremento a <b>0,1</b> y oprima los botones inicio y animar nuevamente, verifique si se sigue cumpliendo la conjetura planteada.</p> <p>d. Cambie el incremento a <b>0,05</b> y realice el proceso anterior.</p> <p>e. Si cambia el incremento a <b>0,01</b> ¿Qué representa la región barrida por el rastro de los segmentos que se forman bajo la función perímetro? ¿Qué representa la región barrida por el rastro de las circunferencias que se forma en la Vista Gráfica</p>	<p><b>R1.</b> El rastro de los segmentos que se forman bajo la función perímetro representa el área bajo la curva, la región barrida por el rastro de las circunferencias que se forma en la Vista Gráfica 2 representa el área del círculo y esas dos regiones son iguales.</p> <p><b>R2.</b> Ninguna relación</p> <p><b>R3.</b> El área barrida bajo la función perímetro es el área de la circunferencia, la región barrida por la circunferencia también es su área, porque sabiendo que la longitud del segmento azul es igual a la longitud del perímetro de la circunferencia, el barrido se puede interpretar como la sumatoria de las infinitas líneas debajo de la función</p> <p><b>CR1.</b> ¿Por qué?</p> <p><b>CR2.</b> Cuando activa la opción animar, ¿qué sucede con el segmento azul y la circunferencia correspondiente? ¿Qué sucede con la región barrida por el segmento y la circunferencia cuando disminuye el incremento?</p>

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

2? ¿Qué relación hay entre las dos regiones? Justifique sus respuestas.

perímetro que, por medir lo mismo, sería la sumatoria de las infinitas circunferencias dentro del círculo.

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

## NIVEL REFERENCIAL (NF)

## PRINCIPIO INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA

**R1.** El área bajo la curva perímetro de una circunferencia de radio  $r$  es igual al área del círculo del mismo radio.

**R2.**

$$A(r) = \int_0^r 2\pi r \, dr = \pi r^2$$

f. De acuerdo con la relación encontrada, halle la expresión algebraica que representa el área de la circunferencia en función del radio ( $x$ ) a partir del perímetro.

**R3.**

$$A(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n p(r_i) \Delta r = \pi r^2$$

**CR4.** ¿La integral indefinida representa el área bajo la curva perímetro?

**R4.**

$$\int 2\pi r \, dr = \pi r^2$$

**R5.** Integrando el perímetro obtengo el área.

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

Segunda Situación: A partir del área de una circunferencia de radio  $x$ , halle la expresión algebraica que representa el perímetro de la circunferencia en función del radio ( $x$ ).

Tabla 18.

*Análisis a posteriori Nivel Situacional y Referencial Segunda Situación FAP*

Tarea	Posibles Respuestas	Contra Preguntas
<b>NIVEL SITUACIONAL (NS)</b>		
2. A partir del área de una circunferencia de radio $x$ , halle la expresión algebraica que representa el perímetro de la circunferencia en función del radio ( $x$ ).	<b>R1.</b> Usar la fórmula que representa el perímetro de una circunferencia de radio $r$ , esto es, $p(r) = 2\pi r$	<b>CR1.</b> ¿Está hallando el perímetro a partir del área?
	<b>R2.</b> No conozco el área del círculo de radio $r$ para poder hallar el perímetro de la circunferencia a partir del área.	<b>CR2.</b> Y si conociera el área del círculo ¿cómo lo haría?
	<b>R3.</b> El área de una circunferencia es $A(r) = \pi r^2$ , y para hallar el perímetro, derivó el área.	<b>CR3.</b> ¿Por qué derivar el área para hallar el perímetro? ¿Si no conociera la fórmula del perímetro cómo verificar efectivamente que la derivada del área corresponde al perímetro?
	$\frac{d}{dr} \pi r^2 = 2\pi r$	



*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

## PRINCIPIO DE INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA (NS)

**R1.** Si, son iguales porque se sobreponen.

**CR1.** ¿Son exactamente iguales? ¿por qué?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

<p>2.1 Abra el archivo Situación_2.2, en él se muestra la interdependencia entre el área de una circunferencia y su radio (<math>x</math>). En la barra de entrada escriba la representación algebraica hallada en el ítem <math>f</math> ¿Coinciden las dos gráficas? Explique su respuesta.</p>	<p><b>R2.</b> No son iguales.</p> <p><b>R3.</b> Si coinciden en la parte positiva porque no hay áreas negativas.</p> <p><b>R4.</b> Coinciden en la parte positiva porque no hay radios negativos.</p>	<p><b>CR2.</b> ¿Cuál es la diferencia? ¿por qué?</p> <p><b>CR3.</b> ¿Es posible tener un valor de área negativa? ¿Cómo es la expresión algebraica del área? ¿en algún momento puede ser negativa? Supongamos un radio negativo ¿el área es negativa?</p>
<p>a. Oprima los botones  (inicio) y  (animar) ¿qué representa la magnitud del segmento color naranja?</p>	<p><b>R1.</b> El área de un círculo de radio <math>r</math>.</p> <p><b>R2.</b> El área.</p> <p><b>R3.</b> Nada, porque no sé cuál es la magnitud.</p> <p><b>R4.</b> Representa el área de una circunferencia.</p>	<p><b>CR2.</b> ¿El perímetro de quién? ¿de cualquier circunferencia?</p> <p><b>CR3.</b> ¿Qué representa la gráfica? ¿cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente?</p> <p><b>CR4.</b> ¿una circunferencia tiene área?</p>
<p>b. Oprima el botón <b>Mostrar 1</b> y repita el proceso anterior, ¿qué presenta la recta mostrada? Explique ampliamente sus respuestas.</p>	<p><b>R1.</b> Parece que es tangente a la curva.</p> <p><b>R2.</b> Representa una recta tangente a un punto de la gráfica.</p> <p><b>R3.</b> Representa la recta tangente a la curva área en cualquier punto.</p>	<p><b>CR1.</b> ¿Cómo verificar si es tangente?</p>
<p>c. Halle la pendiente de la recta mostrada.</p>	<p><b>R1.</b> Usando la fórmula general de pendiente</p> $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ <p><b>R2.</b> Con la opción pendiente que tiene GeoGebra.</p> <p><b>R3.</b></p> $m = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta r}$	<p><b>CR1.</b> Para usar la fórmula general de la pendiente necesito dos puntos, sobre la recta y la curva que tenemos es tangente, y será siempre una recta diferente. ¿cómo podemos hallar la pendiente de la recta tangente a cualquier punto de la curva? ¿con el uso del software podemos hallarla?</p>
<p>d. En el menú Vista seleccione la opción Vista Gráfica 2, oprima el botón <b>Mostrar 2</b> y ubíquese en un valor específico en el deslizador <math>x</math>, ahora mueva el deslizador <math>b</math>, ¿qué observa? Cambie los valores del radio <math>x</math> y mueva el deslizador <math>b</math> ¿existe alguna relación? Plantee una conjetura y explique ampliamente sus respuestas.</p>	<p><b>R1.</b> Con el segmento que se forma en la pendiente de la recta tangente, el cual tiene la magnitud de la pendiente de la recta tangente, se forma una circunferencia.</p> <p><b>R2.</b> El segmento rojo con el que se forma la circunferencia tiene la magnitud de la pendiente de la recta tangente.</p> <p><b>R3.</b> El perímetro de la circunferencia es igual a la pendiente de la recta tangente a la función área.</p> <p><b>R4.</b> No observo ninguna relación.</p>	<p><b>CR4.</b> ¿Qué particularidad tiene el segmento rojo que se está formando en la Vista Gráfica 1?</p> <p>¿Qué particularidad tiene el segmento rojo que se está formando en la Vista Gráfica 2?</p> <p>¿Esos dos segmentos están relacionados?</p>
<p>e. ¿La conjetura anterior se cumple para cualquier valor del radio (<math>x</math>)?</p>	<p><b>R4.</b> No observo ninguna relación.</p>	

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

NIVEL REFERENCIAL (NR)

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

## PRINCIPIO DE INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA (NR)

f. Desactive el botón <b>Mostrar 2</b> y oprima el botón <b>Mostrar 3</b> , ¿qué representa la magnitud del segmento AG? ¿por qué?	<p><b>R1.</b> Representa la pendiente de la recta tangente porque es como si trasladáramos el segmento que representa la pendiente.</p> <p><b>R2.</b> Representa la pendiente de la recta tangente porque AG es paralelo al segmento de la pendiente.</p> <p><b>R3.</b> El perímetro de la circunferencia.</p>	<p><b>CR1.</b> ¿solo a la pendiente de la recta tangente?</p> <p><b>CR2.</b> ¿Por el hecho de ser paralelos se tiene que son iguales?</p> <p><b>CR3.</b> ¿Por qué?</p>
g. Ubíquese en el punto G (dar clic derecho y seleccionar la opción <b>Rastro</b> ) y oprima el botón <b>Mostrar 4</b> ¿qué representa el rastro del punto rojo?	<p><b>R1.</b> Como el segmento representa la magnitud de la pendiente de la recta tangente y ésta es igual al perímetro de la circunferencia entonces el rastro representa la función perímetro.</p> <p><b>R2.</b> La función de la pendiente de la recta tangente a la curva área de un círculo de radio <math>x</math>.</p>	<p><b>CR2.</b> ¿Y la pendiente de la recta tangente a la función área con respecto al radio es equivalente a...?</p>
h. ¿Qué relación hay entre la magnitud del segmento AG, la pendiente de la recta y la circunferencia mostrada en la Vista Gráfica 2? Plantee una conjetura y explique sus respuestas.	<p><b>R1.</b> Son iguales.</p> <p><b>R2.</b> La pendiente de la recta tangente a la función área de un círculo de radio <math>x</math> es igual AG e igual al perímetro de la circunferencia del mismo radio.</p>	<p><b>CR1.</b> ¿Son todas iguales? ¿todas representan lo mismo?</p>
i. De acuerdo con la conjetura anterior, halle la expresión algebraica que representa la interdependencia del perímetro en función del radio $x$ a partir del área de la circunferencia.	<p><b>R1.</b> Lo hallo derivando la función área con respecto al radio del círculo para obtener el perímetro de la circunferencia del mismo radio.</p> <p><b>R2.</b> Derivando el área.</p> <p><b>R3.</b></p>	<p><b>CR1.</b> Represente dicho suceso de forma algebraica.</p> <p><b>CR2.</b> ¿Cuál área? Representelo algebraicamente.</p>

$$\frac{d(\pi r^2)}{dr} = 2\pi r$$

*Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.*

Tabla 19.

## Análisis a posteriori Nivel General Primera y Segunda Situación FAP

Tarea	Posibles Respuestas	Contra Preguntas
<b>NIVEL GENERAL (NG)</b> <b>PRINCIPIO DE INTERACCIÓN Y REINVENCIÓN GUIADA (NG)</b>		
3. Plantee una conjetura acerca de la relación, en general, entre	<p><b>R1.</b> La derivada del área es igual al perímetro.</p>	<p><b>CR1, CR2.</b> ¿Cualquier perímetro y cualquier área?</p> <p>¿Cómo hallo el perímetro a partir de la circunferencia a partir del área del círculo? ¿Cómo hallo el área del</p>

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

<p>área-perímetro y perímetro-área. ¿cómo hallar una magnitud variable conociendo la otra? Plantee una conjetura.</p>	<p>La integral del perímetro es igual al área, teniendo en cuenta que el perímetro es siempre positivo.</p>	<p>círculo a partir del perímetro de la circunferencia?</p>
	<p><b>R2.</b></p>	
	$\frac{dp}{dr} = A(r)$	<p>¿Están entonces relacionados el perímetro y el área de una circunferencia y un círculo del mismo radio respectivamente?</p>
	$\int A(r) dr = p(r)$	<p>¿Cómo es esa relación?</p>
<p>f. Si se consideran los valores negativos de la variable independiente ¿se sigue cumpliendo la conjetura anterior? ¿por qué? Explique ampliamente sus respuestas.</p>	<p><b>R1.</b> Si se sigue cumpliendo porque la derivada de la integral es la función que se deriva.</p>	<p><b>CRI.</b> ¿y al contrario?</p>
	<p><b>R2.</b> No se cumple</p>	<p><b>CR2.</b> ¿Por qué no se cumple? ¿Cuál es la conjetura anterior?</p>
<p>g. Si se tienen magnitudes variables que tengan el mismo comportamiento, pero en otros fenómenos, ¿la conjetura se sigue cumpliendo? ¿por qué?</p>	<p>Si las magnitudes tienen comportamiento lineal y cuadrático se cumple que la derivada de la magnitud cuadrática es la magnitud lineal y la integral de la función lineal es igual a la magnitud cuadrática haciendo las constantes iguales.</p>	<p>¿Cuál es el comportamiento del perímetro y el área de la circunferencia y el círculo respectivamente?</p>
<p>h. ¿Qué relación hay entre el área bajo la curva y la pendiente de la recta tangente al área bajo la curva? Justifique sus respuestas.</p>	<p><b>R1.</b> la derivada de la integral es igual a la función que se integra.</p>	<p>¿Qué relación hay entre derivada e integral?</p>
	<p><b>R2.</b> Están relacionadas de forma inversa, esto es, la derivada de la integral es igual a la función que se integra y la integral de la derivada es igual a la función que se deriva. La una deshace lo que hace la otra.</p>	<p><b>CRI.</b> ¿Y, al contrario, la derivada de la integral?</p>
<p>i. Represente algebraicamente la relación encontrada.</p>	$\int f'(x) dx = f(x)$	
	$\frac{d}{dx} \left[ \int f(x) dx \right] = f(x)$	
<p>j. ¿Dicha relación se cumple siempre? Si no es así, ¿en qué condiciones se cumple?</p>	<p><b>R1.</b> Para que la integral de la derivada exista, la función debe ser derivable. Para que la derivada de la función integral exista la función debe ser integrable.</p>	<p>¿Qué se necesita para que la primera y segunda relación existan?</p>
		<p><b>CRI.</b> ¿Cuál función? ¿Cuándo una función es derivable? ¿Cuándo una función es integrable?</p>

**Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.**

### Referencias Bibliográficas

- Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado. En M. J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds). *Investigación en Educación Matemática XIII*, (pp. 119-127) Santander: SEIEM.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*, (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego. F. (2006). La Corriente Realista de Didáctica de la Matemática. Experiencias de un Grupo de Docentes y Capacitadores. *Yupana 3 (06)*, 11-33.
- Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). Educación Matemática Realista. Bases Teóricas. GPDM, Argentina.
- Boyer, C. (1999). Historia de la matemática. Madrid: Alianza Editorial.
- Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. III. Issues in Mathematics Education*. 7. pp. 115-162.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378.
- Carlson, M. P., Person, J. y Smith, N. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: The Fundamental Theorem of Calculus. In

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

- N. A. Pateman, B.J. Dougherty, J. T. Zilliox (ed.) *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA*. Honolulu, HI, Jul 13-18, vol. 2. p165-172.
- Courant, R. (1937). *Differential and Integral Calculus*. Interscience: New York.
- Delgado, P. (2009) Matemática visual: Simulaciones relativas al Teorema Fundamental del Cálculo. *El Cálculo y su Enseñanza*, 61-74.
- Drijvers, P., Boon, P., Doorman, M., Bokhove, C. y Tacoma, S. (2013). Digital design: RME principles for designing online tasks. En Margolinas, C. (Ed). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22 (1)*, (pp. 56-62). Oxford, Inglaterra.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (M. Restrepo) Cali: Universidad del Valle. (Trabajo original publicado en 1995).
- Edwards, C. (1979) *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.
- Fernández, L (2011) *La historia como herramienta didáctica: el concepto de integral* (Tesis de maestría). Universidad de Cantabria, Santander: España.
- Freudenthal, H (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics 1*, 3 - 8.
- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics 3*, 413 – 435.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. N.J: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., capítulo 19, 517 – 544.

González, O. (2015). *Caracterización de la actividad argumentativa de estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de matematización de situaciones* (Tesis de maestría) Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education* 25(5), 443-471.

Gravemeijer y Doorman (1999). Context problems in realistic education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics* 39, 111-129.

Gravemeijer, K. y Terwuel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *J. Curriculum Studies*, 32(6), 777- 796.

Guerrero, C., Rodríguez, A. y Hernández, J. (2014) Aspectos Históricos del Cálculo de Leibniz: Incidencia y Aplicación en la Didáctica de las Matemáticas. *Números*, 8, 55-68.

Henao, S. y Vanegas, J. (2012). *La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos* (Tesis de pregrado) Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum.

*Revista de Educación Matemática*, 10 (2), 23-45.

Hiit, F. y Passaro, V. (2007) De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes : le rôle de représentations spontanées. En Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM-59), (pp. 117-123). Hongrie

Ímaz, C. y Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del Cálculo: las trampas del Rigor*.

México D.F, México: Trillas.

Kirsch, A. (2014). The fundamental theorem of calculus: visually? *Mathematics Education* 46, 691-695.

Larson, R., y Edwards, B. (2010). *Calculus*. Novena Edición. Belmont: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Leithold, L. (1999). *EL CÁLCULO*. Séptima Edición. Oxford University Press. Harla México.

Londoño, R. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Piere y Kieren*. (Tesis Doctoral). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Colombia: M.E.N

Moreno, C. y Ríos, P. (2006). Concepciones de la enseñanza del cálculo. *Sapiens* 7 (2), 25-34.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3 (2), 131-170.

Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In M. P. Carlson & C.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

- Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 150-171). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Ponce, J. (2006). La argumentación y enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo en Profesores de Matemáticas. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa* (20), 79-83.
- Ponce, J. (2013). *El Teorema Fundamental del Cálculo: un estudio sobre algunos conceptos, fórmulas y métodos relacionados con su aplicación*. (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México D.C, México.
- Robles, M., Tellechea, E. y Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*, 26 (2), 69-109.
- Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas*. Sexta Edición. México D.F: Cengage Learning Editores, S.A.
- Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron, *Nieuwe Wiskrant* 5(1), 60-67.
- Tall, D. y Sheath, G. (1983). Visualizing Higher Level Mathematical Concepts Using Computer Graphics. En *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 357-362). Israel
- Tall, D. (1986). A graphical approach to integration and the Fundamental Theorem. *Mathematics Teaching*, 113, 48-51.
- Tall, D. (1997). Functions and calculus. En A. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

- Toumasis, C. (1993). What is the fundamental theorem of integral calculus? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 24 (5), 685-687.
- Thompson, P. W. (1994). Images of Rate and Operational Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics* 26, 229-274.
- Thompson, P. W., y Thompson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually, Part I: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(3), 279-303.
- Thompson, P. W. y Silverman, J. (2008). The Concept of Accumulation in Calculus. En M. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43-52). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Treffers, A. (1987) *Three Dimensions. A model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction*. Netherlands, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Villalba, M. (2002) El nacimiento del Cálculo. *Apuntes de Historia de las Matemáticas*, 1 (1), 46-53.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics* 54, 9-35
- Zuñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: Un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (1), 145-175.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

## Apéndice A. Secuencia de Tareas: Fenómeno de Caída Libre

## PRIMER FENÓMENO

1. Abra el archivo **Situación\_1.1**, el cual muestra el video de la caída de una pelota de tenis, que se suelta desde  $1,817\text{ m}$  de altura (primer piso del edificio Laboratorios Livianos de la UIS). A partir de la velocidad, halle la expresión algebraica que representa la distancia desde el punto de lanzamiento para cualquier instante de tiempo  $t$ .

**Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.**

En la hoja de trabajo:

- Describa el comportamiento de la velocidad de la pelota desde el punto de lanzamiento hasta que toca el piso. Explique su respuesta.
- ¿Cuál es la velocidad inicial? Explique su respuesta.
- ¿Cuál es la velocidad final? Explique su respuesta.
- Ubíquese en la parte superior de la pantalla y en la opción Ventana oprima “Vista Derecha”, describa el comportamiento de la velocidad de la pelota desde el punto de lanzamiento hasta que toca el piso. Explique su respuesta.
- Represente gráficamente el comportamiento de la velocidad del movimiento de la pelota a través del tiempo.

**Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.**

1.1 Halle la velocidad de la pelota en los instantes de tiempo dados

Tiempo	Velocidad
$0s$	
$0,031s$	
$0,05s$	
$0,145s$	
$0,28s$	
$0,34s$	
$0,48s$	
$0,6s$	
$t$	

- En Tracker, ubíquese en la parte superior de la pantalla y en la opción Ventana oprima “Herramienta de Datos... (Analizar...)” y maximice la nueva ventana, oprima el botón **Analyze**, seleccione **Ajustes**. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la velocidad de la pelota?

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

- b. Verifique las velocidades encontradas en el ítem 1.1 ¿son iguales los resultados? ¿por qué?

**Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.**

1.2 Con ayuda del archivo anterior,

- a. En la gráfica de la velocidad contra el tiempo ¿dónde se evidencia el cambio de la variable velocidad con respecto al tiempo? ¿qué representa geoméricamente la acumulación del cambio de la velocidad con respecto al cambio de tiempo?
- b. En la ventana “Herramienta de Datos”, oprima el botón **Mesasure** y seleccione **Area**. Halle la acumulación del cambio de la velocidad con respecto al cambio de tiempo dado.

Intervalo de tiempo	Área
[0,1 ; 0,133]	
[0,2 ; 0,233]	
[0,3 ; 0,333]	
[0,367 ; 0,4]	
[0,4 ; 0,433]	

- c. Abra el archivo **Situación\_1.2**, sabiendo que **r** representa la distancia recorrida por la pelota desde el punto de lanzamiento a través del tiempo. Halle la distancia recorrida por la pelota en los siguientes intervalos de tiempo.

Intervalo de tiempo	Distancia
[0,1 ; 0,133]	
[0,2 ; 0,233]	
[0,3 ; 0,333]	
[0,367 ; 0,4]	
[0,4 ; 0,433]	

- d. Compare la tabla del ítem *b* con la tabla del ítem *c*, ¿qué relación existe entre los datos contenidos en ellas? Plantee una conjetura y explique ampliamente.

**Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.**

- e. ¿Qué relación existe entre el área bajo la curva velocidad y la distancia recorrida hasta un instante de tiempo? Plantee una conjetura y explique ampliamente.
- f. De acuerdo con la conjetura planteada, halle la distancia de la pelota a partir de la velocidad en cualquier instante de tiempo  $t$ . Justifique ampliamente sus respuestas.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

g. Realice el análisis de regresión de los puntos que representan la distancia de la pelota con respecto al tiempo, para ello, des-seleccione la opción *Mesasure - Area*, ubíquese en **r** y con click sostenido trasládelo al lado derecho de la columna **t** y des-seleccione la opción *marcas* en la columna **v**. Compare los resultados obtenidos en el ítem anterior con los dados por el software. ¿Qué puede concluir? Explique ampliamente sus respuestas y represente gráficamente los sucesos del ítem *e* y *f*.

***Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.***

2. A partir de la distancia, halle la expresión algebraica que representa la velocidad de la pelota para cualquier instante de tiempo *t*.

***Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.***

En la ventana “Herramienta de Datos” del archivo anterior, oprima Ctrl O y abra el archivo **Ventana 1.2**.

a. Cuál es la magnitud aproximada de la velocidad que lleva la pelota en los intervalos de tiempo:

[0,1 ; 0,133]

[0,2 ; 0,233]

[0,3 ; 0,333]

[0,367 ; 0,4]

[0,467 ; 0,5]

b. Cuantifique el cambio del área bajo la curva velocidad cuando el tiempo cambia de:

0,1 s a 0,133s

0,2s a 0,233s

0,3s a 0,333s

0,367s a 0,4s

0,467s a 0,5s

c. ¿Cuál es la rapidez del cambio del área bajo la curva velocidad en los cambios de tiempo anteriores?

d. Compare los resultados obtenidos en el ítem a con el ítem c ¿Qué puede concluir? Plantee una conjetura. Explique ampliamente sus respuestas.

***Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.***

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

- e. Si los intervalos de tiempo se hacen cada vez más pequeños, ¿qué sucede con la rapidez del cambio del área en relación con la velocidad? Explique ampliamente y plantee una conjetura.
- f. A partir de la conjetura anterior, halle la velocidad de la pelota a partir de la distancia en cualquier instante de tiempo  $t$ . Compare el resultado con la velocidad encontrada en la primera situación, ¿Qué puede concluir?
- g. En la representación gráfica de la distancia con respecto al tiempo (área bajo la curva velocidad con respecto al tiempo) ¿qué representa geoméricamente la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea?
- h. Represente gráficamente los sucesos del ítem  $d$  y  $e$ .

***Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.***

- 3. Plantee una conjetura acerca de la relación, en general, entre distancia-velocidad y velocidad-distancia. ¿cómo hallar una magnitud variable conociendo la otra? Plantee una conjetura.
  - a. ¿La conjetura es válida para cualquier fenómeno que implique magnitudes variables con el mismo comportamiento? Argumente y justifique ampliamente sus respuestas.
  - b. ¿Qué relación hay entre cantidad variable, acumulación de cambio (área bajo la curva) y razón de cambio de acumulación? Justifique sus respuestas.
  - c. Represente algebraicamente la relación encontrada.

***Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.***

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

## Apéndice B. Secuencia de Tareas: fenómeno de Área y Perímetro

## SEGUNDO FENÓMENO

1. A partir del perímetro de una circunferencia de radio  $x$ , halle la expresión algebraica que representa el área del círculo en función del radio ( $x$ ).

***Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.***




En la hoja de trabajo:

- f. Describa el comportamiento del perímetro de una circunferencia cuando varía el radio  $x$ . Explique ampliamente.
- g. Represente gráfica y algebraicamente el perímetro de una circunferencia en función del radio  $x$ . Justifique su respuesta.

***Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.***

- 1.1 Abra el archivo **Situación\_2.1**, en él se muestra la interdependencia entre el perímetro de una circunferencia y su radio ( $x$ ). En la barra de entrada escriba la representación algebraica hallada anteriormente. ¿Coinciden las dos gráficas? Explique su respuesta.

- a. Mueva el deslizador  $x$ , ¿qué representa la magnitud del segmento azul?

- b. En el menú *Vista* seleccione la opción *Vista Gráfica 2*, oprima los botones  (inicio),  (activar rastro) y  (animar) ¿qué relación hay entre la medida del segmento azul y la circunferencia que se forma? Plantee una conjetura y explique ampliamente su respuesta.

- c. Cambie el incremento a 0,1 y oprima los botones inicio y animar nuevamente, verifique si se sigue cumpliendo la conjetura planteada.

- d. Cambie el incremento a 0,05 y realice el proceso anterior.

- e. Si cambia el incremento a 0,01 ¿Qué representa la región barrida por el rastro de los segmentos que se forman bajo la función perímetro? ¿Qué representa la región barrida por el rastro de las circunferencias que se forma en la Vista Gráfica 2? ¿Qué relación hay entre las dos regiones? Justifique sus respuestas.

***Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.***

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

f. De acuerdo con la relación encontrada, halle la expresión algebraica que representa el área de la circunferencia en función del radio ( $x$ ) a partir del perímetro.

***Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.***

2. A partir del área de una circunferencia de radio  $x$ , halle la expresión algebraica que representa el perímetro de la circunferencia en función del radio ( $x$ ).

***Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.***

2.1 Abra el archivo **Situación 2.2**, en él se muestra la interdependencia entre el área de una circunferencia y su radio ( $x$ ). En la barra de entrada escriba la representación algebraica hallada en el ítem  $f$  ¿Coinciden las dos gráficas? Explique su respuesta.

a. Oprima los botones  (inicio) y  (animar) ¿qué representa la magnitud del segmento color naranja?

b. Oprima el botón *Mostrar 1* y repita el proceso anterior, ¿qué presenta la recta mostrada? Explique ampliamente sus respuestas.

c. Halle la pendiente de la recta mostrada.

d. En el menú *Vista* seleccione la opción *Vista Gráfica 2*, oprima el botón *Mostrar 2* y ubíquese en un valor específico en el deslizador  $x$ , ahora mueva el deslizador  $b$ , ¿qué observa? Cambie los valores del radio  $x$  y mueva el deslizador  $b$  ¿existe alguna relación? Plantee una conjetura y explique ampliamente sus respuestas.

e. ¿La conjetura anterior se cumple para cualquier valor del radio ( $x$ )?

***Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.***

f. Desactive el botón *Mostrar 2* y oprima el botón *Mostrar 3*, ¿qué representa la magnitud del segmento AG? ¿por qué?

g. Ubíquese en el punto G (dar clic derecho y seleccionar la opción *Rastro*) y oprima el botón *Mostrar 4* ¿qué representa el rastro del punto rojo?

h. ¿Qué relación hay entre la magnitud del segmento AG, la pendiente de la recta y la circunferencia mostrada en la *Vista Gráfica 2*? Plantee una conjetura y explique sus respuestas.

## MATEMATIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

i. De acuerdo con la conjetura anterior, halle la expresión algebraica que representa la interdependencia del perímetro en función del radio  $x$  a partir del área de la circunferencia.

***Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.***

3. Plantee una conjetura acerca de la relación, en general, entre área-perímetro y perímetro-área. ¿cómo hallar una magnitud variable conociendo la otra? Plantee una conjetura.

a. Si se consideran los valores negativos de la variable independiente ¿se sigue cumpliendo la conjetura anterior? ¿por qué? Explique ampliamente sus respuestas.

b. Si se tienen magnitudes variables que tengan el mismo comportamiento, pero en otros fenómenos, ¿la conjetura se sigue cumpliendo? ¿por qué?

c. ¿Qué relación hay entre el área bajo la curva y la pendiente de la recta tangente al área bajo la curva? Justifique sus respuestas.

d. Represente algebraicamente la relación encontrada.

e. ¿Dicha relación se cumple siempre? Si no es así, ¿en qué condiciones se cumple?

***Discuta los resultados obtenidos con sus compañeros y el profesor. Escriba sus conclusiones en la hoja de trabajo.***