

**SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES DE
EINSTEIN PARA COSMOLOGÍAS INHOMOGÉNEAS
CON FLUIDOS ISÓTROPOS Y ANISÓTROPAS**

FABIO DUVAN LORA CLAVIJO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA**

2008

**SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES DE
EINSTEIN PARA COSMOLOGÍAS INHOMOGÉNEAS
CON FLUIDOS ISÓTROPAS Y ANISÓTROPAS**

FABIO DUVAN LORA CLAVIJO

Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Física

Director:

GUILLERMO A. GONZÁLEZ V., Ph. D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2008

A mi Madre

Eugenia

a mi Hermana

Dunia Judith

y a mi tío

Orlando

Agradecimientos

Al profesor Guillermo González.

Al profesor José David Sanabria.

Al profesor Yeinzon Rodríguez.

A mis **AMIGOS** incondicionales Erickson, Gustavo, German, Henry, Pilar, Jorge, Ramiro (**Mi Parche**).

TITULO : SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN PARA COSMOLOGÍAS INHOMOGÉNEAS CON FLUIDOS ISÓTROPOS Y ANISÓTROPOS¹

AUTOR : LORA CLAVIJO, Fabio Duvan²

PALABRAS CLAVE : Relatividad General, Cosmología.

En el presente trabajo se obtienen soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein para cosmologías inhomogéneas. El contenido de materia del universo se describe mediante un fluido perfecto, con ecuación de estado $p = \rho$, o mediante un fluido anisótropo con ecuación de estado $\sigma = \rho$, donde σ es la presión en la dirección de la anisotropía. El tensor de momentum-energía del fluido anisótropo se construye utilizando el modelo de superposición de dos fluidos perfectos. El método general utilizado para la obtención de las soluciones consiste en la introducción de funciones auxiliares de tal forma que las ecuaciones de campo de Einstein sean explícitamente integrables. Se presentan tres familias de soluciones exactas. Las dos primeras familias corresponden al caso en que el fluido es isótropo y, en la clasificación algebraica del tensor de Riemann, las soluciones son Petrov tipo *I*. La primera solución es regular en toda parte, mientras que la segunda tiene una singularidad inicial correspondiente a un big-bang y, para un valor particular de los parámetros, se reduce a la solución de vacío de Kasner. La tercera familia corresponde al caso general en que la distribución de materia es un fluido anisótropo, construido a partir de la superposición de dos fluidos perfectos con velocidades diferentes. En este último caso, debido a la complejidad de la solución, solo se presenta la familia de soluciones y un ejemplo correspondiente al primer miembro de la familia.

¹Trabajo de Grado de Maestría

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Dr. Guillermo Alfonso González Villegas

TITULO : EXACT SOLUTIONS OF THE EINSTEIN EQUATIONS FOR INHOMOGENEOUS COSMOLIGIES WITH ISOTROPIC AND ANISOTROPIC FLUIDS¹

AUTOR : LORA CLAVIJO, Fabio Duvan²

PALABRAS CLAVE : General Relativity, Cosmology.

In this work, we obtain exact solutions of the Einstein's equations for inhomogeneous cosmologies. The matter content of the universe is described by a perfect fluid, with equation of state $p = \rho$, or by an anisotropic fluid with equation of state $\rho = \sigma$ in the direction of the anisotropy. The energy momentum tensor for the anisotropic fluid is constructed from the sum of two perfect fluids. The general method used to obtain solutions for this matter distributions is based on the introduction of auxiliary functions, in order to cast the Einstein equations in such a way that can be explicitly integrated. Now, in this manuscript we present three families of exact solutions. The first two families of solutions correspond to the case in which the fluid is isotropic and, in the Riemann tensor algebraic classification, the solutions are Petrov type I . In addition, the first solution is regular everywhere, whereas the second one presents a big bang singularity and, for a particular value of one of the parameters, it reduces to the Kasner vacuum solution. The third family of solutions correspond to the general case, in which the matter distribution is an anisotropic fluid constructed from the sum of two perfect fluids with different velocities. In this latter case, due to the complexity of the solution, we only present one family of solutions and an example corresponding to the first family member.

¹Degree Project of Magister

²Faculty of Sciences, Physics School , Dr. Guillermo Alfonso González Villegas

Tabla de Contenido

Introducción	1
1. El modelo de dos fluidos perfectos para fluidos anisótropos	6
1.1. Introducción	6
1.2. Tensor de momentum energía	7
1.3. Ecuaciones de evolución de la materia	10
2. Ecuaciones de campo de Einstein y evolución de la materia	13
2.1. Introducción	13
2.2. Solución general	14
3. Soluciones particulares del modelo	22
3.1. Introducción	22
3.2. Soluciones inhomogéneas con un solo fluido perfecto	23
3.2.1. Primera familia de soluciones	24
3.2.2. Segunda familia de soluciones	26
3.3. Soluciones para fluidos anisótropos	29
4. Discusión de resultados	35
Bibliografía	37

Introducción

Un problema importante en la teoría general de la relatividad es el de la obtención de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein que correspondan a configuraciones de materia físicamente realistas. Ahora bien, las soluciones exactas han jugado un papel crucial en el desarrollo de muchas áreas de la física y la astrofísica, y no solo en relatividad general. En realidad, al estudiar soluciones exactas particulares se adquiere cierta intuición la cual, a su vez, estimula nuevas preguntas pertinentes a situaciones más generales. En el caso particular de las teorías no lineales, las soluciones exactas juegan un papel aún más importante, dado que en este caso es mucho más complicado adquirir la intuición necesaria para analizar el comportamiento de los fenómenos correspondientes [1].

Por otro lado, incluso en teorías lineales, la obtención de soluciones exactas simples ha sido de fundamental importancia para adquirir intuición física y alcanzar un mayor entendimiento de la teoría. Un ejemplo claro de esto lo proporciona la electrodinámica, una teoría clásica lineal en la cual se cuenta con una buena colección de soluciones exactas, tales como el campo homogéneo, los campos de Coulomb y el campo dipolar, entre otras, las cuales han sido de gran utilidad en la comprensión conceptual de dicha teoría. De igual manera, en la mecánica cuántica estándar, de nuevo una teoría lineal, se ha adquirido una visión transparente de los fenómenos cuánticos estudiando problemas explícitamente solubles, tales como el oscilador armónico lineal o partículas en pozos de potencial de diversas formas.

Una situación similar se presenta con la teoría de la relatividad. Las soluciones exactas explícitas permiten discriminar con mayor facilidad entre una característica física y una patológica. Analizando soluciones exactas se puede determinar en dónde se encuentran las singularidades y cuál es su carácter. De igual manera, se puede analizar el comportamiento de las partículas de prueba y los campos en un espacio-tiempo de fondo. Con dichas soluciones se puede también estudiar su estructura global y determinar si la solución es estable y, en cierto sentido, general. Incluso, después de la formulación de conjeturas acerca de situaciones generales inspiradas en soluciones exactas particulares, el descubrimiento de nuevas soluciones exactas puede desempeñar un papel importante en la verificación, aclaración, modificación o descarte de dichas conjeturas. Así mismo, soluciones exactas ya conocidas pueden llegar a actuar como estados asintóticos de clases generales de modelos, llegando a ser así aún más significativas [1].

Ahora bien, debido a la naturaleza de las ecuaciones de Einstein, un sistema no-lineal de ecuaciones diferenciales parciales, la obtención de soluciones exactas es un problema enormemente complicado, el cual sólo ha sido resuelto en casos simples altamente simétricos [2]. Dentro de este contexto, en los últimos años el Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG) ha enfocado sus esfuerzos a la obtención e interpretación de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein para el caso de espacio-tiempos estacionarios axialmente simétricos. La ventaja de considerar esta clase de soluciones radica en que la simetría del tensor métrico garantiza que las ecuaciones de Einstein constituyen un sistema completamente integrable de ecuaciones diferenciales parciales [3].

Como consecuencia del trabajo realizado en el estudio de espacio-tiempos estacionarios axialmente simétricos, el GIRG ha adquirido una experiencia en el manejo de ciertos métodos necesarios para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente. Dichos métodos se basan en la introducción de algunas funciones auxiliares que permiten llevar el sistema de ecuaciones diferenciales a

una forma tal que es posible integrarlo explícitamente y encontrar soluciones que pueden expresarse en términos de funciones simples de las coordenadas utilizadas. De acuerdo con lo anterior, el GIRG pretende actualmente utilizar esta experiencia y aplicar dichos métodos a otra clase de espacio-tiempos con otra clase de simetrías que satisfagan un sistema de ecuaciones diferenciales soluble de una manera equivalente.

Un caso importante de espacio-tiempos a los cuales pueden aplicarse tales métodos son aquellos que admiten un grupo Abelian bi-paramétrico de isometrías, G_2 , y fueron inicialmente tratados por Gowdy en el estudio de modelos cosmológicos espacialmente compactos [25, 26]. Ahora bien, si la métrica admite un grupo ortogonal transitivo bi-paramétrico de isometrías, entonces ésta se puede escribir en una forma diagonal por bloques [2]. Este tipo de métricas admiten dos campos vectoriales espaciales de Killing que conmutan. Las correspondientes ecuaciones de Einstein en el vacío conducen a que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales sea completamente integrable [37].

Por otro lado, la principal motivación para la formulación de la Cosmología moderna, en la que el universo se describe como isótropo y homogéneo en toda su evolución [4, 5, 6, 7], ha sido el hecho de observar que el actual universo presenta dichas características. Sin embargo, como se muestra en una serie de recientes observaciones [8, 9, 10], el universo no es ni exactamente homogéneo ni exactamente isótropo; además no hay motivo suficiente para creer que el comportamiento de su expansión fue regular en sus orígenes. Por lo tanto, para entender la evolución y la estructura a gran escala del universo, es necesario considerar una clase más general de cosmologías obtenidas mediante la eliminación de la exigencia de que el universo es homogéneo e isótropo.

En consecuencia con las anteriores consideraciones, en las últimas dos décadas ha existido un creciente interés por el estudio de cosmologías anisótropas y no homogéneas, como se puede ver en las referencias [11, 12, 13, 14, 15, 16]. (Ver

también los artículos [17, 18, 19, 20, 21, 22] para un resumen de los principales trabajos). Ahora bien, entre los diferentes métodos que se usan para estudiar las cosmologías espacialmente no homogéneas, la búsqueda de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein desempeñan un papel importante.

De hecho, debido al carácter altamente no lineal de las ecuaciones de campo, el conocimiento de algunas soluciones exactas es crucial para la comprensión de determinados aspectos cualitativos que se pueden utilizar como guía para el estudio de modelos más generales. Ahora bien, las propiedades de las soluciones exactas deben ser relacionadas y comparadas con los resultados obtenidos por otros métodos diferentes, tales como los métodos de los sistemas dinámicos [23], los métodos de la teoría de perturbaciones [2] o el estudio de la estructura y formación de singularidades [24].

Sin embargo, debido a la complejidad matemática de los modelos no homogéneos generales, el estudio de cosmologías inhomogéneas exactas se ha limitado principalmente al caso de espacio-tiempos del tipo tratado por Gowdy en su estudio de modelos espacialmente compactos [25, 26]. Por otra parte, si tenemos en cuenta las ecuaciones de Einstein con una fuente de materia, la complejidad matemática hace que sea muy difícil encontrar soluciones con fluidos razonablemente realistas. Entonces, en casi todos los trabajos sobre cosmologías exactas inhomogéneas, las soluciones se obtienen tomando fluidos cuya ecuación de estado es de la forma $p = \gamma\rho$ y, en particular, con $\gamma = 1$. Este último caso, en el cual la ecuación de estado “rígida” (stiff fluid) permite que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales sea completamente integrable, fue considerado por Zeldovich [27] como un buen candidato con el fin de describir el contenido de materia del universo en su etapa más temprana.

De acuerdo con las anteriores consideraciones, en el presente trabajo se muestran tres familias de soluciones de las ecuaciones de Einstein para estudiar cosmologías inhomogéneas. Dos de las soluciones corresponden a materia inhomogénea

e isótropa [28] y la última corresponde a un caso más general en el cual el material contenido en el universo se supone como la superposición de dos fluidos perfectos con cuadrivelocidades diferentes $u^\alpha \neq v^\alpha$ y con ecuación de estado $p_1 + p_2 = \rho_1 + \rho_2$. Es bueno mencionar que en este último caso la materia es inhomogénea y anisótropa y las soluciones anteriores están contenidas en ésta.

El método que se usó para obtener las soluciones se basa en la introducción de funciones auxiliares, con el fin de llevar el sistema de ecuaciones de Einstein a una forma tal que pueda ser integrado de manera explícita y las soluciones puedan ser expresadas en términos de funciones simples de las coordenadas utilizadas. Ahora bien, vale la pena mencionar que las ecuaciones se escriben de tal manera que son matemáticamente equivalentes a las ecuaciones obtenidas cuando la fuente de la materia es un campo escalar. Sin embargo, a pesar de esta equivalencia matemática, las fuentes consideradas en este trabajo son fluidos con ecuación de estado rígidas y no son campos escalares.

El Presente trabajo está organizado de la siguiente forma. En el capítulo 1 se presenta el modelo de superposición de dos fluidos perfectos para la construcción de un fluido anisótropo. En el capítulo 2 se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein, las ecuaciones de evolución de la materia y se presenta el proceso de integración para obtener la solución general explícita. En el capítulo 3 se presentan tres familias de soluciones para cosmologías inhomogéneas exactas. En las dos primeras familias de soluciones, en las cuales la materia que llena el universo corresponde al caso particular de un solo fluido perfecto, se analizan algunas propiedades cinemáticas y geométricas de la solución. La tercera familia de soluciones corresponde al caso general en que el universo se supone como la superposición de dos fluidos perfectos. Por último, en el capítulo 4 se resumen los principales resultados.

Capítulo 1

El modelo de dos fluidos perfectos para fluidos anisótropos

1.1. Introducción

En este capítulo se estudian algunas propiedades algebraicas del tensor momento energía de un fluido anisótropo formado a partir de la superposición de dos fluidos perfectos. Las cuadvirvelocidades correspondientes a cada fluido perfecto son diferentes para garantizar la anisotropía del fluido resultante. Además, se considera una ecuación de estado rígida dada por la expresión $p_1 + p_2 = \rho_1 + \rho_2$. La escogencia de dicha ecuación de estado se hace con el fin de poder desacoplar, en las ecuaciones de campo correspondientes, el campo gravitacional de la presión. Por otra parte, se encuentran las ecuaciones de evolución de la materia correspondientes a la distribución de materia, considerando que los dos fluidos que se superponen son irrotacionales. En la sección 1.2 se muestra el formalismo para la obtención de un fluido anisótropo a partir de la superposición de dos fluidos perfectos. En la sección 1.3 se obtienen las ecuaciones de evolución de la materia.

1.2. Tensor de momentum energía

El contenido de materia del universo se describe a través de un fluido anisótropo, cuyo tensor momentum energía (*TME*) puede escribirse como la superposición de dos fluidos perfectos [29, 30, 31]

$$T^{ab}(u, v) = t^{ab}(u) + t^{ab}(v), \quad (1.1a)$$

$$t^{ab}(u) = (p_1 + \rho_1)u^a u^b + p_1 g^{ab}, \quad (1.1b)$$

$$t^{ab}(v) = (p_2 + \rho_2)v^a v^b + p_2 g^{ab}, \quad (1.1c)$$

donde, p_1, p_2 son las presiones de cada fluido, ρ_1, ρ_2 son las respectivas densidades de energía y u^a, v^a representan las cuadri-velocidades asociadas a los fluidos, las cuales son distintas ($u^a \neq v^a$) y su condición de normalización está dada por

$$u^a u_a = -1, \quad (1.2a)$$

$$v^a v_a = -1. \quad (1.2b)$$

Para entender el significado físico del contenido de materia (1.1a), se escoge la forma general del tensor momentum energía para un solo fluido [32],

$$T^{ab} = \rho U^a U^b + S^{ab}, \quad (1.3)$$

con

$$S^{ab} U_b = 0, \quad (1.4a)$$

$$U^c U_c = -1, \quad (1.4b)$$

$$\rho > 0, \quad (1.4c)$$

donde ρ representa la densidad de energía del fluido, $\rho U^a U^b$ la parte cinética de el tensor momentum energía y S^{ab} es el tensor de esfuerzos.

Entonces, observando la parte cuadrática de (1.1a) dada por

$$(p_1 + \rho_1)u^a u^b + (p_2 + \rho_2)v^a v^b, \quad (1.5)$$

se tiene que ésta es invariante bajo la transformación de rotación

$$u^a \rightarrow u^{*a} = u^a \cos \alpha + v^a \sqrt{\frac{p_2 + \rho_2}{p_1 + \rho_1}} \sin \alpha, \quad (1.6a)$$

$$v^a \rightarrow v^{*a} = -u^a \sqrt{\frac{p_1 + \rho_1}{p_2 + \rho_2}} \sin \alpha + v^a \cos \alpha, \quad (1.6b)$$

de manera que

$$T^{ab}(u, v) = T^{ab}(u^*, v^*). \quad (1.7)$$

La transformación de rotación de las cuadri-velocidades u^a y v^a se escoge de tal forma que una de éstas se convierte en un cuadri-vector tipo tiempo $u^{*c}u_c^* < 0$ y la otra en un cuadri-vector tipo espacio $v^{*c}v_c^* > 0$. Esta última condición se implementa imponiendo que

$$u^{*c}v_c^* = 0. \quad (1.8)$$

Tomando en cuenta esta última condición y la transformación de rotación arriba mencionada se encuentra la siguiente relación para el ángulo de rotación

$$\tan(2\alpha) = 2u^c v_c \frac{\sqrt{(p_1 + \rho_1)(p_2 + \rho_2)}}{(p_1 + \rho_1) - (p_2 + \rho_2)}. \quad (1.9)$$

Ahora bien, definiendo

$$U^a = \frac{u^{*a}}{\sqrt{-u^{*c}u_c^*}}, \quad (1.10a)$$

$$\chi^a = \frac{v^{*a}}{\sqrt{v^{*c}v_c^*}}, \quad (1.10b)$$

$$\rho = T^{ab}U_aU_b = -(p_1 + \rho_1)u^{*c}u_c^* - (p_1 + p_2), \quad (1.11a)$$

$$\sigma = T^{ab}\chi_a\chi_b = (p_2 + \rho_2)v^{*c}v_c^* + (p_1 + p_2), \quad (1.11b)$$

$$\pi = T^{ab}Y_aY_b = T^{ab}Z_aZ_b = p_1 + p_2, \quad (1.11c)$$

donde las cantidades U^a , χ^a , ρ , σ y π son respectivamente la velocidad del fluido anisótropo, la dirección de la anisotropía, la densidad del energía, la presión a lo largo de la dirección de la anisotropía y la presión en las direcciones perpendiculares a χ , se obtiene que el tensor momentum energía (1.3) toma la siguiente forma

$$T^{ab} = (\rho + \pi)U^aU^b + (\sigma - \pi)\chi^a\chi^b + \pi g^{ab}, \quad (1.12a)$$

$$T^{ab} = \rho U^aU^b + S^{ab}, \quad (1.12b)$$

con

$$S^{ab} = (\sigma - \pi)\chi^a\chi^b + \pi(g^{ab} + U^aU^b). \quad (1.13)$$

Realizando un cálculo directo se obtiene que la densidad de energía ρ y las presiones del fluido σ , π , están relacionadas con las componentes de los fluidos perfectos p_1, p_2, ρ_1, ρ_2 por

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2 - p_1 - p_2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + p_1 + p_2)^2 + 4(p_1 + \rho_1)(p_2 + \rho_2)[(u^c v_c)^2 - 1]}, \quad (1.14a)$$

$$\sigma = -\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2 - p_1 - p_2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\rho_1 - \rho_2 + p_1 - p_2)^2 + 4(p_1 + \rho_1)(p_2 + \rho_2)(u_c v^c)^2}, \quad (1.14b)$$

$$\pi = p_1 + p_2. \quad (1.14c)$$

Como se puede ver de las ecuaciones (1.14a, 1.14b), cuando se toma la ecuación de estado $p_1 + p_2 = \rho_1 + \rho_2$ se tiene que $\rho = \sigma$. Entonces, esta condición muestra que el fluido tiene una ecuación de estado “rígida” (stiff fluid) en la dirección de la anisotropía

1.3. Ecuaciones de evolución de la materia

Las ecuaciones de evolución de la materia se obtienen de la ley de conservación de la energía

$$T^{ab};_b = 0, \quad (1.15)$$

proyectando ésta a lo largo de las direcciones de u^a , v^a y de las direcciones ortogonales a dichas cuadrivelocidades. Para el cálculo de la última proyección se introduce el tensor proyección espacial [30]

$$H_a^b = \delta_a^b + [1 - (u^c v_c)^2]^{-1} [u^b u_a + v^b v_a - u^c v_c (u^b v_a + u_a v^b)], \quad (1.16)$$

el cual satisface las siguientes propiedades:

$$u_b H_a^b = v_b H_a^b = 0, \quad (1.17a)$$

$$H_c^b H_a^c = H_a^b, \quad (1.17b)$$

$$H_a^b = H_b^a, \quad (1.17c)$$

$$H_c^c = 2. \quad (1.17d)$$

Proyectando (1.15) con u^a , v^a y H_a^b , se obtienen las ecuaciones de evolución de la materia

$$\begin{aligned} & -(p_1 + \rho_1)_{,b} u^b - (p_1 + \rho_1) u_{;b}^b + (p_2 + \rho_2)_{,b} v^b u_a v^a + \\ & (p_2 + \rho_2) v_{;b}^a v^b u_a + (p_2 + \rho_2) u_a v^a v_{;b}^b + (p_1 + p_2)_{,b} u^b = 0, \end{aligned} \quad (1.18a)$$

$$\begin{aligned}
& -(p_2 + \rho_2)_{,b}v^b - (p_2 + \rho_2)v_{;b}^b + (p_1 + \rho_1)_{,b}u^b v_a u^a + \\
& (p_1 + \rho_1)u_{;b}^a u^b v_a + (p_1 + \rho_1)v_a u^a u_{;b}^b + (p_2 + p_1)_{,b}v^b = 0, \quad (1.18b)
\end{aligned}$$

$$(p_1 + \rho_1)u_{;b}^a u^b H_a^c + (p_2 + \rho_2)v_{;b}^a v^b H_a^c + (p_1 + p_2)_{,b}g^{ab}H_a^c = 0. \quad (1.18c)$$

Para el estudio de dichas ecuaciones de evolución se supone que el fluido es irrotacional, lo cual quiere decir que cada componente de los cuadri-vectores u^a, v^a se pueden escribir en términos de unos potenciales escalares ϕ, ψ [33, 34]

$$u_a = \frac{\phi_{,a}}{(-\phi_{,c}\phi^{,c})^{1/2}}, \quad (1.19a)$$

$$v_a = \frac{\psi_{,a}}{(-\psi_{,c}\psi^{,c})^{1/2}}. \quad (1.19b)$$

De (1.17a-1.17d), (1.18c) y (1.19a-1.19b) se obtiene que

$$\left[\frac{p_1 + \rho_1}{(\phi_{,c}\phi^{,c})} (\phi_{,a}\phi^{,a})_{,b} + \frac{p_2 + \rho_2}{(\psi_{,c}\psi^{,c})} (\psi_{,a}\psi^{,a})_{,b} \right] H_c^b = 2(p_1 + p_2)_{,b}H_c^b. \quad (1.20)$$

Esta última ecuación se satisface idénticamente si se escoge [30]:

$$p_1 + \rho_1 = -F\phi_{,c}\phi^{,c}, \quad (1.21a)$$

$$p_2 + \rho_2 = -H\psi_{,c}\psi^{,c}, \quad (1.21b)$$

$$p_1 + p_2 = -\frac{1}{2}(F\phi_{,c}\phi^{,c} + H\psi_{,c}\psi^{,c} - G), \quad (1.21c)$$

donde F, H y G son funciones arbitrarias de los potenciales auxiliares ϕ y ψ .

Ahora bien, suponiendo que la ecuación de estado que relaciona los dos fluidos es $p_1 + p_2 = \rho_1 + \rho_2$, se puede ver que la función $G = 0$. En este caso especial en el que $G = 0$ se tiene una ecuación rígida de estado ($\rho = \sigma$) a lo largo de la dirección de la anisotropía como se puede ver de las ecuaciones (1.14a) y (1.14b);

además, se observa que las ondas sonoras viajan a una velocidad igual a la de la luz en dirección de la anisotropía.

De otro lado se tiene que las ecuaciones de evolución para ϕ y ψ se obtienen en forma directa de las ecuaciones (1.18a) y (1.18b)

$$F\phi_{,c}^{:c} = \frac{1}{2}H_{\phi}\psi_{,c}\psi^{,c} - \frac{1}{2}F_{\phi}\phi_{,c}\phi^{,c} - F_{\psi}\phi^{,c}\psi_{,c}, \quad (1.22a)$$

$$H\psi_{,c}^{:c} = \frac{1}{2}F_{\psi}\phi_{,c}\phi^{,c} - \frac{1}{2}H_{\psi}\psi_{,c}\psi^{,c} - H_{\phi}\phi^{,c}\psi_{,c}, \quad (1.22b)$$

donde $H_{\phi} = \frac{\partial H}{\partial \phi}$ y $F_{\psi} = \frac{\partial H}{\partial \psi}$. Usando el sistema de ecuaciones (1.21a-1.21c) se escribe el tensor momentum energía de la siguiente forma

$$T_{ab} = F\phi_{,a}\phi_b + H\psi_{,a}\psi_b - \frac{1}{2}(F\phi_{,a}\phi^a + H\psi_{,a}\psi^a)g_{ab}. \quad (1.23)$$

De igual manera, el sistema de ecuaciones de campo de Einstein está dado por

$$R_{ab} = F\phi_{,a}\phi_{,b} + H\psi_{,a}\psi_{,b}. \quad (1.24)$$

Capítulo 2

Ecuaciones de campo de Einstein y evolución de la materia

2.1. Introducción

En el presente capítulo se estudian las ecuaciones de campo de Einstein y evolución de la materia para obtener soluciones exactas en cosmologías inhomogéneas. El método utilizado se basa en la introducción de funciones auxiliares que permiten llevar el sistema de ecuaciones a una forma que sea fácilmente integrado. Las soluciones obtenidas en estos casos están expresadas en términos de funciones simples de las coordenadas utilizadas. Es bueno aclarar que las ecuaciones obtenidas matemáticamente son equivalentes a las ecuaciones cuando uno supone que la fuente de materia es un campo escalar. Sin embargo, teniendo en cuenta esta equivalencia, la fuente que se considera para este caso no son campos escalares. En la Sección 2.2 se presenta el método y la solución general del modelo.

2.2. Solución general

En esta sección se estudian las ecuaciones de Einstein acopladas con el tensor energía momento (1.1a). El elemento de línea más apropiado para el estudio de cosmologías espacialmente no homogéneas en coordenadas $x^a = (t, r, x, y)$ está dado por [2]

$$ds^2 = e^{2(\gamma-U)}(-dt^2 + dr^2) + \omega^2 e^{-2U} dx^2 + e^{2U} dy^2, \quad (2.1)$$

donde las funciones métricas γ , U y ω dependen de t y r solamente. Calculando las componentes no nulas del tensor de Ricci, se tiene que el sistema de ecuaciones de Einstein toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \gamma_{,t}\omega_{,t} + \gamma_{,r}\omega_{,r} &= \omega(U_{,t}^2 + U_{,r}^2) + \\ &\frac{1}{2} [\omega (F(\phi_{,t}^2 + \phi_{,r}^2) + H(\psi_{,t}^2 + \psi_{,r}^2)) + (\omega_{,tt} + \omega_{,rr})], \end{aligned} \quad (2.2a)$$

$$\gamma_{,t}\omega_{,r} + \gamma_{,r}\omega_{,t} = 2\omega U_{,t}U_{,r} + \omega [F(\phi_{,t}\phi_{,r}) + H(\psi_{,t}\psi_{,r})] + \omega_{,tr}, \quad (2.2b)$$

$$(\omega U_{,r})_{,r} - (\omega U_{,t})_{,t} = 0, \quad (2.2c)$$

$$\omega_{,rr} - \omega_{,tt} = 0, \quad (2.2d)$$

donde se observa que la ecuación (2.2d) es la ecuación de onda clásica en una dimensión.

Entonces, considerando dos soluciones linealmente independientes de dicha ecuación de la forma

$$\omega(r, t) = \Phi(r + t) + \Omega(r - t), \quad (2.3a)$$

$$V(r, t) = \Phi(r + t) - \Omega(r - t), \quad (2.3b)$$

y realizando la siguiente transformación de coordenadas

$$(t, r, x, y) \leftrightarrow (V, \omega, x, y), \quad (2.4)$$

se obtiene que el elemento de línea (2.1) y las ecuaciones de Einstein se reducen a

$$ds^2 = e^{2(\Lambda-U)}(-dV^2 + d\omega^2) + \omega^2 e^{-2U} dx^2 + e^{2U} dy^2, \quad (2.5)$$

$$\Lambda_{,\omega} = \omega(U_{,V}^2 + U_{,\omega}^2) + \frac{1}{2}\omega [F(\phi_{,V}^2 + \phi_{,\omega}^2) + H(\psi_{,V}^2 + \psi_{,\omega}^2)], \quad (2.6a)$$

$$\Lambda_{,V} = 2\omega U_{,V} U_{,\omega} + \omega [F(\phi_{,V}\phi_{,\omega}) + H(\psi_{,V}\psi_{,\omega})], \quad (2.6b)$$

$$(\omega U_{,V})_{,V} - (\omega U_{,\omega})_{,\omega} = 0, \quad (2.6c)$$

donde Λ es

$$\Lambda = \gamma - \frac{1}{2} \ln(\omega_{,r}^2 - \omega_{,t}^2). \quad (2.7)$$

De otro lado las ecuaciones de evolución de la materia se reescriben suponiendo que las funciones F y H sólo dependen de los potenciales ϕ y ψ respectivamente. Entonces, separando de esta forma dicho sistema acoplado de ecuaciones se obtiene que

$$F\phi_{,c}^{;c} = -\frac{1}{2}F_{\phi}\phi_{,c}\phi^{;c}, \quad (2.8a)$$

$$H\psi_{,c}^{;c} = -\frac{1}{2}H_{\psi}\psi_{,c}\psi^{;c}. \quad (2.8b)$$

Ahora bien, para la obtención de la solución de las ecuaciones de evolución de la materia se considera que los potenciales ϕ y ψ dependen funcionalmente de dos nuevos potenciales, ζ y ϑ , respectivamente $\phi = \phi(\zeta)$, $\psi = \psi(\vartheta)$, de tal forma que (2.8a) y (2.8b) toman la siguiente forma

$$\zeta_{,rr} - \zeta_{,tt} + \omega^{-1}(\omega_{,r}\zeta_{,r} - \omega_{,t}\zeta_{,t}) + \left[\frac{\phi''}{\phi'} + \frac{F'\phi'}{2F} \right] (\zeta_{,r}^2 - \zeta_{,t}^2) = 0, \quad (2.9a)$$

$$\vartheta_{,rr} - \vartheta_{,tt} + \omega^{-1}(\omega_{,r}\vartheta_{,r} - \omega_{,t}\vartheta_{,t}) + \left[\frac{\psi''}{\psi'} + \frac{H'\psi'}{2H} \right] (\vartheta_{,r}^2 - \vartheta_{,t}^2) = 0. \quad (2.9b)$$

Dicha escogencia funcional se hace con el fin de linealizar las ecuaciones de evolución. Para esto se toman, de éstas últimas ecuaciones, las expresiones adentro de los corchetes iguales a cero

$$\frac{\phi''}{\phi'} + \frac{F'\phi'}{2F} = 0, \quad (2.10a)$$

$$\frac{\psi''}{\psi'} + \frac{H'\psi'}{2H} = 0, \quad (2.10b)$$

de tal forma que

$$a_1\zeta = \int \sqrt{F}d\phi, \quad (2.11a)$$

$$a_2\vartheta = \int \sqrt{H}d\psi, \quad (2.11b)$$

donde a_1 y a_2 son constantes arbitrarias.

Teniendo en cuenta la transformación de coordenadas (2.4) y las condiciones de linealización anteriormente mencionadas, las ecuaciones correspondientes para ζ y ϑ respectivamente toman la siguiente forma

$$(\omega\zeta, V), V - (\omega\zeta, \omega), \omega = 0, \quad (2.12a)$$

$$(\omega\vartheta, V), V - (\omega\vartheta, \omega), \omega = 0, \quad (2.12b)$$

donde, F y H son funciones arbitrarias de sus argumentos. Además, es fácil ver que para cualquier escogencia de las funciones $F(\phi)$ y $H(\psi)$, las ecuaciones (1.21a, 1.21b) y las cuadrivelocidades u_α, v_α se expresan de la siguiente manera

$$p_1 + \rho_1 = -a_1^2 \zeta, c \zeta^c, \quad (2.13a)$$

$$p_2 + \rho_2 = -a_2^2 \vartheta, c \vartheta^c, \quad (2.13b)$$

$$u_a = \frac{\zeta_{,a}}{(-\zeta_{,c}\zeta^{,c})^{1/2}}, \quad (2.13c)$$

$$v_a = \frac{\vartheta_{,a}}{(-\vartheta_{,c}\vartheta^{,c})^{1/2}}. \quad (2.13d)$$

Usando las componentes no nulas del tensor de Ricci para la métrica (2.5), el sistema de ecuaciones de Einstein y evolución de la materia se reducen al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\Lambda_{,\omega} = \omega(U_{,V}^2 + U_{,\omega}^2) + \frac{1}{2}\omega [a_1^2(\zeta_{,V}^2 + \zeta_{,\omega}^2) + a_2^2(\vartheta_{,V}^2 + \vartheta_{,\omega}^2)], \quad (2.14a)$$

$$\Lambda_{,V} = 2\omega U_{,V}U_{,\omega} + \omega [a_1^2\zeta_{,V}\zeta_{,\omega} + a_2^2\vartheta_{,V}\vartheta_{,\omega}], \quad (2.14b)$$

$$(\omega U_{,V})_{,V} - (\omega U_{,\omega})_{,\omega} = 0, \quad (2.14c)$$

$$(\omega \zeta_{,V})_{,V} - (\omega \zeta_{,\omega})_{,\omega} = 0, \quad (2.14d)$$

$$(\omega \vartheta_{,V})_{,V} - (\omega \vartheta_{,\omega})_{,\omega} = 0, \quad (2.14e)$$

donde las ecuaciones (2.14c, 2.14d, 2.14e) tienen la forma de la ecuación de onda unidimensional en coordenadas cilíndricas, considerando a ω como una coordenada radial y V como coordenada temporal.

Ahora bien, como es bien conocido, las soluciones de la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas se pueden expresar en términos de las funciones de Bessel; sin embargo, ésta clase de soluciones no es muy apropiada para resolver el sistema de ecuaciones de Einstein, pues no permiten una integración explícita de la función Λ en términos de funciones simples. De acuerdo con esto se introduce una transformación de coordenadas que permita obtener soluciones, expresables mediante funciones relativamente simples, apropiadas para integrar explícitamente el sistema de ecuaciones (2.14a, 2.14b).

Considerando la transformación de coordenadas $(V, \omega, x, y) \rightarrow (X, Y, x, y)$, con

$$X = \sqrt{\omega^2 - V^2}, \quad (2.15a)$$

$$Y = \frac{iV}{\sqrt{\omega^2 - V^2}}. \quad (2.15b)$$

las ecuaciones de onda (2.14c, 2.14d, 2.14e), toman la forma

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[X^2 \frac{\partial \xi}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[(1 - Y^2) \frac{\partial \xi}{\partial Y} \right] = 0. \quad (2.16)$$

donde ξ puede ser U , ζ y ϑ . Esta ecuación es matemáticamente equivalente a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas para una función ξ . Para ver dicha equivalencia explícitamente, basta con hacer la identificación $X = r$, $Y = \cos \theta$. Dicha equivalencia garantiza entonces que las soluciones para ξ puedan escribirse apropiadamente en términos de potencias de X y funciones de Legendre de la variable Y .

La solución para la ecuación (2.16) queda escrita de la siguiente forma

$$\xi(X, Y) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{a_l}{X^{l+1}} + b_l X^l \right] [c_l P_l(Y) + d_l Q_l(Y)], \quad (2.17)$$

donde a_l , b_l y c_l son constantes arbitrarias. Esta última expresión tiene dos términos, cuyo comportamiento es apropiado para diferentes regiones del rango de valores de la variable X . En la primera región la solución está dada por el siguiente término

$$\xi_I(X, Y) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l X^l Q_l(Y), \quad (2.18)$$

donde X es acotado e incluye el valor cero, y en la segunda región la solución toma la forma

$$\xi_{II}(X, Y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l Q_l(Y)}{X^{l+1}}, \quad (2.19)$$

donde X no es acotado.

Dado a que ξ puede ser U , ζ o ϑ , las expresiones correspondientes a éstas últimas toman la siguiente forma

$$U_I(X, Y) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l X^l Q_l(Y), \quad (2.20a)$$

$$U_{II}(X, Y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l Q_l(Y)}{X^{l+1}}, \quad (2.20b)$$

$$\zeta_I(X, Y) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m} X^{2m} Q_{2m}(Y), \quad (2.20c)$$

$$\zeta_{II}(X, Y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{2m} Q_{2m}(Y)}{X^{2m+1}}, \quad (2.20d)$$

$$\vartheta_I(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} X^{2n+1} Q_{2n+1}(Y), \quad (2.20e)$$

$$\vartheta_{II}(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n+1} Q_{2n+1}(Y)}{X^{2n+2}}, \quad (2.20f)$$

donde se ha escogido las funciones pares de Legendre para la función ζ y las funciones impares de Legendre para la función ϑ , dado a que estas dos funciones deben ser linealmente independientes a fin de que las cuadrivelocidades no sean paralelas, $u^a \neq v^a$.

Para determinar la función Λ se integra el sistema de ecuaciones (2.14a, 2.14b), cuya solución puede expresarse como

$$\Lambda = \Lambda_U + \frac{a_1^2}{2} \Lambda_\zeta + \frac{a_2^2}{2} \Lambda_\vartheta, \quad (2.21)$$

donde, Λ_U , Λ_ζ y Λ_ϑ son solución de los sistemas de ecuaciones

$$\Lambda_{U,\omega} = \omega(U_{,V}^2 + U_{,\omega}^2), \quad (2.22a)$$

$$\Lambda_{U,V} = 2\omega U_{,V}U_{,\omega}, \quad (2.22b)$$

$$\Lambda_{\zeta,\omega} = \omega(\zeta_{,V}^2 + \zeta_{,\omega}^2), \quad (2.22c)$$

$$\Lambda_{\zeta,V} = 2\omega\zeta_{,V}\zeta_{,\omega}, \quad (2.22d)$$

$$\Lambda_{\vartheta,\omega} = \omega(\vartheta_{,V}^2 + \vartheta_{,\omega}^2), \quad (2.22e)$$

$$\Lambda_{\vartheta,V} = 2\omega\vartheta_{,V}\vartheta_{,\omega}. \quad (2.22f)$$

Como la ecuaciones anteriores tienen matemáticamente la misma forma, entonces, realizando la transformación de coordenadas (2.15a, 2.15b), tenemos que la solución general para cada una de las dos regiones, en forma genérica, toma la siguiente forma

$$\tilde{\Lambda}_I(X, Y) = (1 - Y^2) \sum_{l+k \neq 0}^{\infty} \frac{C_k C_l \tilde{M}_{kl}(Y) X^{k+l}}{k+l} - C_0^2 \ln X + c_I, \quad (2.23)$$

donde

$$\tilde{M}_{kl}(Y) = klQ_k(Y)Q_l(Y) - 2ykQ_k(Y)Q'_l(Y) - (1 - Y^2)Q'_k(Y)Q'_l(Y), \quad (2.24)$$

y

$$\tilde{\Lambda}_{II}(X, Y) = -(1 - Y^2) \sum_{l+k \neq 0}^{\infty} \frac{C_k C_l \tilde{N}_{kl}(Y)}{(k+l+2)X^{k+l+2}} + c_{II}, \quad (2.25)$$

donde

$$\tilde{N}_{kl}(Y) = (k+1)(l+1)Q_k(Y)Q_l(Y) + 2y(k+1)Q_k(Y)Q'_l(Y) - (1 - Y^2)Q'_k(Y)Q'_l(Y). \quad (2.26)$$

Para nuestro caso tenemos que $\tilde{\Lambda} = \Lambda_U$ para cualquier valor de l y k , $\tilde{\Lambda} = \Lambda_\zeta$ para valores pares de l y k , o sea $l = 2m, k = 2m'$ y $\tilde{\Lambda} = \Lambda_\theta$ para valores impares de l y k , o sea $l = 2n + 1, k = 2n' + 1$.

Capítulo 3

Soluciones particulares del modelo

3.1. Introducción

En el presente capítulo se muestran tres soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein que son interpretadas como cosmologías inhomogéneas. Las dos primeras soluciones obtenidas corresponden al caso de un solo fluido con ecuación de estado $p = \rho$. Estas dos soluciones son Petrov tipo I . La primera de estas soluciones es regular en toda parte mientras que la segunda presenta una singularidad inicial correspondiente a un big-bang. Además ésta última se reduce a la solución de vacío de Kasner para un valor especial de uno de los parámetros. La tercera solución corresponde al caso más general en el cual intervienen los dos fluidos que dan origen al fluido anisótropo. Para este caso sólo se presenta la familia de soluciones y no se hace ninguna interpretación física debido a la complejidad de dicha solución. En la sección (3.2) se presentan dos soluciones con un fluido perfecto. En la sección (3.3) se muestra una familia de soluciones para fluidos anisótropos.

3.2. Soluciones inhomogéneas con un solo fluido perfecto

Como un primer modelo, se presenta un caso muy sencillo en el cual el contenido de materia que llena el Universo se supone como un solo fluido perfecto. En dicho caso la distribución de materia que se tiene es inhomogénea e isotrópica. Además la ecuación de estado que relaciona las variables físicas de dicha distribución de materia es una ecuación de estado rígida, dada por la siguiente expresión $p = \rho$. Esta última escogencia de la ecuación de estado se hace con el fin de poder integrar de manera sencilla el sistema de ecuaciones de Einstein y evolución de la materia, debido a que la densidad ρ se desacopla de la presión p [36]. De otro lado en este tipo de ecuaciones de estado, la velocidad de las ondas sonoras corresponde a la velocidad de la luz.

Las Ecuaciones de Einstein y evolución de la materia para un solo fluido quedan escritas del sistema de ecuaciones (2.14a - 2.14e) de la siguiente forma

$$\Lambda_{,\omega} = q\omega(\zeta_{,V}^2 + \zeta_{,\omega}^2), \quad (3.1a)$$

$$\Lambda_{,V} = 2q\omega\zeta_{,V}\zeta_{,\omega}, \quad (3.1b)$$

$$(\omega\zeta_{,V})_{,V} - (\omega\zeta_{,\omega})_{,\omega} = 0, \quad (3.1c)$$

donde se ha escogido la función métrica U igual al potencial escalar ζ de tal forma que la constante q toma el valor $q = 1 + a_1^2/2$. Además se observa que la ecuación (3.1c) es la condición de integrabilidad del sistema sobredeterminado (3.1a)-(3.1b).

Para la obtención de soluciones simples a las ecuaciones arriba presentadas, se consideran soluciones de la ecuación (3.1c) utilizando el método de separación de variables de la forma $\zeta(\omega, V) = A(\omega) + B(V)$, de tal manera que el potencial

escalar ζ está dado de la siguiente forma

$$\zeta = \frac{b_1}{4} (\omega^2 + 2V^2) + b_2 \ln \omega + b_3 V, \quad (3.2)$$

donde b_1 , b_2 y b_3 son constantes reales imaginarias arbitrarias. De acuerdo con esto, la solución del sistema sobredeterminado (3.1a)-(3.1b) está dada por

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{q}{2} (b_1^2 V^2 + b_3^2 + 2b_1 b_3 V + b_1 b_2) \omega^2 \\ & + \frac{q b_1^2}{16} \omega^4 + q b_2^2 \ln \omega + q b_1 b_2 V^2 + 2q b_2 b_3 V. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ahora, se observa que escogiendo diferentes soluciones de las ecuaciones (2.3a) y (2.3b), se pueden obtener diferentes familias de soluciones del sistema de ecuaciones de Einstein y evolución de la materia.

3.2.1. Primera familia de soluciones

La primera familia de soluciones que se considera en el modelo de un solo fluido se obtiene escogiendo una solución explícita de las ecuaciones (2.3a - 2.3b) de la forma $\Phi(r+t) = (r+t)/2$, $\Omega(r-t) = (r-t)/2$, de modo que $\omega(t,r) = r$ y $V(t,r) = t$. Para dicho caso la funciones métricas ζ y γ , están dadas por las expresiones

$$\zeta = \frac{b_1}{4} (r^2 + 2t^2) + b_2 \ln r + b_3 t, \quad (3.4a)$$

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{q}{2} (b_1^2 t^2 + b_3^2 + 2b_1 b_3 t + b_1 b_2) r^2 \\ & + q \frac{b_1^2}{16} r^4 + q b_2^2 \ln r + q b_1 b_2 t^2 + 2q b_2 b_3 t, \end{aligned} \quad (3.4b)$$

mientras que la densidad y las componentes de la cuatrivelocidad toman la forma

$$\rho = \frac{a_1^2}{2} \left[b_1 (b_1 t^2 + 2b_3 t) + b_3^2 - \frac{b_1^2 r^2}{4} - \frac{b_2^2}{r^2} - b_1 b_2 \right] e^{2(U-\gamma)}, \quad (3.5)$$

$$u_t = \frac{a_1}{\sqrt{2\rho}} (b_1 t + b_3), \quad (3.6a)$$

$$u_r = \frac{a_1}{\sqrt{2\rho}} \left(\frac{b_1 r}{2} + \frac{b_2}{r} \right). \quad (3.6b)$$

Ahora bien, para obtener distribuciones de materia físicamente aceptables, se necesita que $\rho \geq 0$ para cualquier valor de r y t . Entonces, de la expresión (3.5), se puede ver que la densidad de materia ρ es positiva en cualquier parte solamente cuando se toma $b_1 = b_2 = 0$. De otra parte, también se requiere que el vector velocidad esté orientado hacia el futuro para cualquier valor de r y t , lo cual implica que $b_3 < 0$. Con estas últimas condiciones el elemento de línea (2.1) toma la siguiente forma

$$ds^2 = e^{-2b_3 t} [e^{qb_3^2 r^2} (-dt^2 + dr^2) + r^2 dx^2] + e^{2b_3 t} dy^2. \quad (3.7)$$

De igual manera la densidad viene dada por la expresión

$$\rho = \frac{a_1^2 b_3^2}{2} e^{b_3(2t - b_3 q r^2)}, \quad (3.8)$$

mientras que la cuadrivelocidad toma la forma

$$u^\alpha = e^{b_3(2t - b_3 q r^2)/2} (1, 0, 0, 0), \quad (3.9)$$

garantizando así la naturaleza comovil del marco de referencia.

Ahora bien, para ver si la solución tiene alguna singularidad en la curvatura, se calculan las componentes de el tensor de Weyl en la tétrada nula natural de la métrica [38, 37]. Entonces, dichas componentes están dadas por

$$\Psi_0(t, r) = \frac{1}{2} b_3^2 (2b_3 q r - q - 2) e^{b_3(2t - b_3 q r^2)}, \quad (3.10a)$$

$$\Psi_2(t, r) = -\frac{1}{2} b_3^2 e^{b_3(2t - b_3 q r^2)}, \quad (3.10b)$$

$$\Psi_4(t, r) = -\frac{1}{2} b_3^2 (2b_3 q r + q + 2) e^{b_3(2t - b_3 q r^2)}, \quad (3.10c)$$

los cuales son regulares en todo lugar. Además, según la clasificación algebraica del tensor de Riemman, la métrica es Petrov tipo I.

De otra parte, las cantidades cinemáticas correspondientes a la aceleración, expansión y el tensor de deformación del fluido, tienen la siguiente forma

$$a_\alpha = b_3^2 q r (0, 1, 0, 0), \quad (3.11)$$

$$\theta = |b_3| e^{-(|b_3|t + b_3^2 q r / 2)}, \quad (3.12)$$

$$\sigma_{11} = \frac{2|b_3|}{3} e^{\frac{b_3}{2}(b_3 q r^2 - 2t)}, \quad (3.13a)$$

$$\sigma_{22} = \frac{2|b_3|}{3} r^2 e^{-\frac{b_3}{2}(b_3 q r^2 + 2t)}, \quad (3.13b)$$

$$\sigma_{33} = -\frac{4|b_3|}{3} r^2 e^{-\frac{b_3}{2}(b_3 q r^2 - 6t)}, \quad (3.13c)$$

donde todas las componentes se calcularon en la tétrada ortonormal natural de la métrica. Como se observa las cantidades cinemáticas son regulares en todo lugar. Además, como $b_3 < 0$, las componentes σ_{11} y σ_{22} son positivas, mientras que σ_{33} es negativa.

3.2.2. Segunda familia de soluciones

La segunda familia de soluciones que se considera en el modelo de un solo fluido se obtiene escogiendo una solución explícita de las ecuaciones (2.3a - 2.3b) de la forma $\Phi(r + t) = (r + t)/2$, $\Omega(r - t) = (t - r)/2$, de modo que $\omega(t, r) = t$ y $V(t, r) = r$. Para dicho caso la funciones métricas ζ y γ , están dadas por las

expresiones

$$\zeta = \frac{b_1}{4} (t^2 + 2r^2) + b_2 \ln t + b_3 r, \quad (3.14a)$$

$$\begin{aligned} \gamma = q (b_1^2 r^2 + b_3^2 + 2b_1 b_3 r + b_1 b_2) \frac{t^2}{2} \\ + q \frac{b_1^2}{16} t^4 + q b_2^2 \ln t + q b_1 a_2 r^2 + 2q b_2 a_3, \end{aligned} \quad (3.14b)$$

mientras que la densidad y las componentes de la cuadrivelocidad toman la forma

$$\rho = \frac{a_1^2}{2} \left[\frac{b_1^2 t^2}{4} + \frac{b_2^2}{t^2} + b_1 b_2 - b_1 (b_1 r^2 + 2b_3 r) - b_3^2 \right] e^{2(U-\gamma)}, \quad (3.15)$$

$$u_r = \frac{a_1}{\sqrt{2\rho}} (b_1 r + b_3), \quad (3.16a)$$

$$u_t = \frac{a_1}{\sqrt{2\rho}} \left(\frac{b_1 t}{2} + \frac{b_2}{t} \right). \quad (3.16b)$$

Ahora bien, para obtener distribuciones de materia físicamente aceptables, se necesita que $\rho \geq 0$ para cualquier valor de r y t . Entonces, de la expresión (3.15), se puede ver que la densidad de materia ρ es positiva en cualquier parte solamente cuando se toma $b_1 = b_3 = 0$. Con estas últimas condiciones la densidad reduce a

$$\rho = \frac{a_1^2 b_2^2}{2} t^{-2(qb_2^2 - b_2 + 1)}. \quad (3.17)$$

Además, como $(b_2 - 1)/(b_2^2) < 1 < q$, se observa que la densidad tiene una singularidad inicial y entonces ésta tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. De otra parte, el vector velocidad está dado por

$$u^\alpha = t^{b_2(1-qb_2)} (1, 0, 0, 0), \quad (3.18)$$

donde se ha tomado $b_2 < 0$ para garantizar que dicho vector esté orientado hacia el futuro. También, como se observa la velocidad espacial es cero y de esta forma se obtiene de nuevo un marco de referencia comovil al fluido.

El elemento de línea correspondiente al campo gravitacional generado por esta distribución de materia está dado por

$$ds^2 = t^{-2b_2} [t^{2qb_2} (-dt^2 + dr^2) + t^2 dx^2] + t^{2b_2} dy^2. \quad (3.19)$$

Cuando la constante $q = 1$ ($a_1 = 0$) se obtiene una solución de vacío tipo Bianchi I que se reduce a la solución de Kasner [39, 40], dada por [41, 2]

$$ds^2 = t^{(d^2-1)/2} (-dt^2 + dr^2) + t^{1+d} dx^2 + t^{1-d} dy^2, \quad (3.20)$$

donde el parámetro de Kasner toma la forma $d = 1 - 2b_2$. Vale la pena mencionar que otra clase de cosmologías inhomogéneas rígidas obtenidas por Patel y Dadich [42], también se reducen a la solución de Kasner. Sin embargo, a diferencia de la solución aquí encontrada, la solución de Patel y Dadich es libre de singularidades.

Ahora bien, con el fin de mirar si la solución tiene una singularidad real, se calcula el tensor de Weyl en la tétrada nula natural de la métrica [38, 37]

$$\Psi_0(t, r) = \frac{1}{2} b_2 (2b_2 - 1) (b_2 q - 1) t^{-2qb_2 + 2b_2 - 2}, \quad (3.21a)$$

$$\Psi_2(t, r) = -\frac{1}{2} (b_2 - 1) b_2 t^{-2qb_2 + 2b_2 - 2}, \quad (3.21b)$$

$$\Psi_4(t, r) = \frac{1}{2} b_2 (2b_2 - 1) (b_2 q - 1) t^{-2qb_2 + 2b_2 - 2}. \quad (3.21c)$$

Los escalares construidos a partir de el tensor de Ricci y el tensor de Weyl divergen cuando $t \rightarrow 0$, esto último corresponde a una singularidad inicial (big-bang). También, se ve que en la clasificación algebraica del tensor de Riemann, la métrica es de clase Petrov I.

Las cantidades cinemáticas para este modelo se calculan tomando $b_2 < 0$. Entonces, las componentes no nulas de la aceleración, expansión y tensor de de-

formación del fluido toman la siguientes expresiones

$$a_\alpha = (0, 0, 0, 0), \quad (3.22)$$

$$\theta = \frac{(b_2^2 q - b_2 + 1)}{t^{(b_2^2 q - a_2 + 1)}}, \quad (3.23)$$

$$\sigma_{11} = \frac{(2b_2^2 q - 2b_2 - 1)t^{(b_2^2 q - b_2 - 1)}}{3}, \quad (3.24a)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{(b_2^2 q + 2b_2 - 2)t^{-(b_2^2 q + b_2 - 1)}}{3}, \quad (3.24b)$$

$$\sigma_{33} = -\frac{(b_2^2 q - 4b_2 + 1)t^{-(b_2^2 q - 3b_2 + 1)}}{3}, \quad (3.24c)$$

donde todas las componentes se calculan en la tétrada natural ortonormal de la métrica. Es interesante ver que como el gradiente de presión es cero, la aceleración es igual cero y de esta forma el fluido es geodésico. De otra parte, como $b_2 < 0$, todas las componentes no nulas del tensor de deformación son negativas.

3.3. Soluciones para fluidos anisótropos

La primera familia de soluciones para fluidos anisótropos que se considera en este trabajo se obtiene escogiendo una solución explícita de las ecuaciones (2.3a - 2.3b) de la forma

$$\Phi(r + t) = \frac{r + t}{2}, \quad (3.25a)$$

$$\Omega(r - t) = \frac{r - t}{2}, \quad (3.25b)$$

de modo que $\omega(t, r) = r$ y $V(t, r) = t$. La transformación de coordenadas (2.15a - 2.15b) para este caso particular viene dada por

$$X = \sqrt{r^2 - t^2}, \quad (3.26a)$$

$$Y = \frac{it}{\sqrt{r^2 - t^2}}, \quad (3.26b)$$

de tal manera que para determinar la forma explícita de la solución, se consideran las regiones $r^2 - t^2 > 0$ y $r^2 - t^2 < 0$ correspondientes respectivamente al exterior e interior del cono $r^2 - t^2 = 0$. El rango de valores que pueden tomar las variables X, Y para la región exterior del cono son: $0 < X < \infty$, mientras que $Y = i\bar{Y}$, con intervalo para \bar{Y} , $-\infty < \bar{Y} < \infty$. Por otro lado, para el caso correspondiente al interior del cono, el rango de valores es el siguiente: $1 < Y < \infty$, mientras que $X = i\bar{X}$, con intervalo para \bar{X} , $0 < \bar{X} < \infty$. De acuerdo con lo anterior, se puede ver que la solución que representa un comportamiento no singular en regiones distintas al cono viene dada por:

1. **Solución en el exterior del cono, $r^2 - t^2 > 0$**

$$U(t, r) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l q_l(\bar{Y})}{X^{l+1}}, \quad (3.27a)$$

$$\zeta(t, r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{2m} q_{2m}(\bar{Y})}{X^{2m+1}}, \quad (3.27b)$$

$$\vartheta(t, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n+1} q_{2n+1}(\bar{Y})}{X^{2n+2}}, \quad (3.27c)$$

$$\Lambda(t, r) = \Lambda_u + \frac{a_1^2}{2} \Lambda_\zeta + \frac{a_2^2}{2} \Lambda_\vartheta, \text{ con}$$

$$\tilde{\Lambda}(t, r) = -(1 + \bar{Y}^2) \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{C_k C_l \tilde{N}_{kl}(\bar{Y})}{(k+l+2) X^{k+l+2}} + c, \quad (3.28a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{kl}(\bar{Y}) &= (k+1)(l+1)q_k(\bar{Y})q_l(\bar{Y}) + \\ &2\bar{y}(k+1)q_k(\bar{Y})q'_l(\bar{Y}) + (1 + \bar{Y}^2)q'_k(\bar{Y})q'_l(\bar{Y}), \end{aligned} \quad (3.28b)$$

donde $\Lambda_U = \tilde{\Lambda}$ para cualquier valor de l y k , $\Lambda_\zeta = \tilde{\Lambda}$ para valores pares de l y k , ($l = 2m, k = 2m'$) y $\Lambda_\vartheta = \tilde{\Lambda}$ para valores impares de l y k , ($l = 2n + 1, k = 2n' + 1$). La expresión $q_l(\bar{Y}) = i^{l+1}Q_l(i\bar{Y})$ son las funciones de Legendre de argumento imaginario [35].

2. Solución en el interior del cono, $r^2 - t^2 < 0$

$$U(t, r) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l Q_l(Y)}{\bar{X}^{l+1}}, \quad (3.29a)$$

$$\zeta(t, r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{2m} Q_{2m}(Y)}{\bar{X}^{2m+1}}, \quad (3.29b)$$

$$\vartheta(t, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n+1} Q_{2n+1}(Y)}{\bar{X}^{2n+2}}, \quad (3.29c)$$

$\Lambda(t, r) = \Lambda_u + \frac{a_1^2}{2}\Lambda_\zeta + \frac{a_2^2}{2}\Lambda_\vartheta$, con

$$\tilde{\Lambda}(t, r) = -(1 - Y^2) \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{C_k C_l \tilde{N}_{kl}(Y)}{(k + l + 2)\bar{X}^{k+l+2}} + c, \quad (3.30a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{kl}(Y) &= (k + 1)(l + 1)Q_k(Y)Q_l(Y) + \\ &2y(k + 1)Q_k(Y)Q'_l(Y) - (1 - Y^2)Q'_k(Y)Q'_l(Y), \end{aligned} \quad (3.30b)$$

donde $\Lambda_U = \tilde{\Lambda}$ para cualquier valor de l y k , $\Lambda_\zeta = \tilde{\Lambda}$ para valores pares de l y k , ($l = 2m, k = 2m'$) y $\Lambda_\vartheta = \tilde{\Lambda}$ para valores impares de l y k , ($l = 2n + 1, k = 2n' + 1$).

Como un ejemplo sencillo de la anterior solución, se considera el caso correspondiente al primer término de cada una de las sumatorias, de tal manera que la forma explícita de la solución viene dada por:

1. Solución en el exterior del cono, $r^2 - t^2 > 0$

$$U(t, r) = \frac{\tilde{C}_0 q_0(\bar{Y})}{X}, \quad (3.31a)$$

$$\zeta(t, r) = \frac{C_0 q_0(\bar{Y})}{X}, \quad (3.31b)$$

$$\vartheta(t, r) = \frac{C_1 q_1(\bar{Y})}{X^2}, \quad (3.31c)$$

$$\Lambda(t, r) = -\frac{(1 + \bar{Y}^2) \tilde{C}_0^2 \tilde{N}_{00}(\bar{Y})}{2X^2} - \left(\frac{a_1^2}{2}\right) \frac{(1 + \bar{Y}^2) C_0^2 \tilde{N}_{00}(\bar{Y})}{2X^2} - \left(\frac{a_2^2}{2}\right) \frac{(1 + \bar{Y}^2) C_1^2 \tilde{N}_{11}(\bar{Y})}{4X^4}, \quad (3.31d)$$

donde

$$\tilde{N}_{00}(\bar{Y}) = q_0^2(\bar{Y}) + 2\bar{Y} q_0(\bar{Y}) q_0'(\bar{Y}) + (1 + \bar{Y}^2) q_0'^2(\bar{Y}),$$

$$\tilde{N}_{11}(\bar{Y}) = 4q_1^2(\bar{Y}) + 4\bar{Y} q_1(\bar{Y}) q_1'(\bar{Y}) + (1 + \bar{Y}^2) q_1'^2(\bar{Y}),$$

$$q_0(\bar{Y}) = \cot^{-1} \bar{Y},$$

$$q_1(\bar{Y}) = 1 - \bar{Y} \cot^{-1} \bar{Y},$$

$$\bar{Y} = t/\sqrt{r^2 - t^2}$$

$$X = \sqrt{r^2 - t^2}.$$

2. Solución en el interior del cono, $r^2 - t^2 < 0$

$$U(t, r) = \frac{\tilde{C}_0 Q_0(Y)}{\bar{X}}, \quad (3.32)$$

$$\zeta(t, r) = \frac{C_0 Q_0(Y)}{\bar{X}}, \quad (3.33)$$

$$\vartheta(t, r) = \frac{C_1 Q_1(Y)}{\bar{X}^2}, \quad (3.34)$$

$$\Lambda(t, r) = -\frac{(1-Y^2)\tilde{C}_0^2 \tilde{N}_{00}(Y)}{2\bar{X}^2} - \left(\frac{a_1^2}{2}\right) \frac{(1-Y^2)C_0^2 \tilde{N}_{00}(Y)}{2\bar{X}^2} - \left(\frac{a_2^2}{2}\right) \frac{(1-Y^2)C_1^2 \tilde{N}_{11}(Y)}{4\bar{X}^4}, \quad (3.35)$$

donde

$$\tilde{N}_{00}(\bar{Y}) = Q_0^2(Y) + 2YQ_0(Y)Q_0'(Y) - (1-Y^2)Q_0'^2(Y),$$

$$\tilde{N}_{11}(Y) = 4Q_1^2(Y) + 4YQ_1(Y)Q_1'(Y) - (1-Y^2)Q_1'^2(Y),$$

$$Q_0(Y) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{Y+1}{1-Y} \right],$$

$$Q_1(Y) = \frac{1}{2} Y \ln \left[\frac{Y+1}{1-Y} \right] - 1,$$

$$Y = t/\sqrt{t^2 - r^2}$$

$$\bar{X} = \sqrt{t^2 - r^2}.$$

La anterior solución es un ejemplo de soluciones al sistema de ecuaciones de Einstein acopladas a fluidos anisotropos. Sin embargo, el método presentado permite encontrar infinitas familias de soluciones, cada una de éstas con infinitos

miembros. Las diferentes familias de soluciones pueden ser obtenidas tomando diferentes soluciones de la ecuación de onda clásica. Además, dichas familias de soluciones pueden ser interpretadas como cosmologías inhomogéneas con distribuciones de materia anisótropa; sin embargo, debido a la compleja forma de éstas, hacer una interpretación física detallada y luego compararla con los resultados observacionales es altamente complicado.

Capítulo 4

Discusión de resultados

En el presente trabajo de investigación se desarrolló un método para la obtención de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein acopladas a fluidos perfectos y a fluidos anisótropos. La construcción de los fluidos anisótropos se realizó haciendo la superposición de dos fluido perfectos con velocidades diferentes, $u_\alpha \neq v_\alpha$. El método que se utilizó para la construcción de dichas soluciones se basó en la introducción de funciones auxiliares, de tal forma que las ecuaciones de campo de Einstein y la ecuaciones de evolución de la materia se pudieron integrar explícitamente. Se presentaron tres familias de soluciones para dicho sistema. Las dos primeras familias de soluciones corresponden al caso en que el contenido de materia del universo es un fluido perfecto con ecuación de estado $p = \rho$, mientras que la tercera familia de soluciones corresponde al caso de un fluido anisótropo con ecuación de estado $\sigma = \rho$ en la dirección de la anisotropía.

Para las dos primeras familias de soluciones se calcularon algunas propiedades geométricas y cinemáticas restringiendo el valor de los parámetros, de tal manera que éstas tuvieran un comportamiento físicamente aceptable. Las dos soluciones son Petrov tipo I, la primera solución es regular en todo lugar mientras que la segunda presenta un singularidad inicial tipo “big-bang”. Ahora bien, para una valor particular de uno de los parámetros, la segunda solución se reduce a la solu-

ción de Kasner. En la tercera familias de soluciones el contenido de materia es un fluido anisótropo. Para este último caso, solo se presentó la familia de soluciones y un ejemplo correspondiente al primer miembro de la familia. Ahora bien, en el presente trabajo de investigación también quedan algunas tareas pendientes por realizar, tales como hacer un análisis físico detallado para las soluciones anisótropas y calcular parámetros físicos en las soluciones que puedan ser comparados con los arrojados con los datos observacionales, entre otras.

Con parte de los resultados del presente trabajo de investigación se elaboró un artículo, el cual fue publicado en la revista *Brazilian Journal of Physics*, [28]. De igual manera, algunos resultados fueron presentados en diferentes eventos Internacionales: se presentó una ponencia en el I Encuentro Bi-Nacional Colombo-Venezolano de Relatividad y Gravitación, realizado en Cartagena en octubre de 2005 [43], una ponencia en el III Encuentro Venezolano de Gravitación y Astrofísica Relativista: Homenaje al “Gaúcho” Herrera en su 60 aniversario, realizado en Isla de Coche, Venezuela, en noviembre de 2006 [44] y una ponencia en el II Encuentro Bi-Nacional Colombo-Venezolano de Relatividad y Gravitación, realizado en Armenia en Octubre de 2007 [45].

Finalmente, cabe mencionar que los métodos utilizados en este trabajo sirven también para encontrar soluciones de las ecuaciones de Einstein para ondas gravitacionales cilíndricas, en cuyo caso la forma de la métrica permite que las ecuaciones de Einstein puedan escribirse de una manera equivalente a las ecuaciones obtenidas en el presente trabajo de investigación. En esta dirección se realizó un trabajo, en el cual se obtuvieron dos familias de soluciones exactas para ondas gravitacionales cilíndricas, el cual fue presentado como una ponencia en el XI Marcel Grossman Meeting, realizado en berlin en julio de 2006 [46], y se está elaborando un artículo, el cual esperamos someter lo mas pronto posible a la revista *Classical and Quantum Gravity* [47].

Bibliografía

- [1] Jiri Bicak, *Selected Solutions of Einstein's Field Equations: their role in General Relativity and Astrophysics*, *arxiv: gr-qr/0004016v1* 5 abril, (2000).
- [2] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers and E. Herlt, *Exact solutions of Einstein's field equations* (Cambridge University Press, 2003).
- [3] V. A. Belinsky and V. E. Zakharov, *Zh. Eksp. Teor. Fis.* **77**, 3 – 19, (1979) [*Sov. Phys. JETP* **50**, 1 – 9, (1979)].
- [4] P. J. E. Peebles, *Physical Cosmology* (Princeton University Press, 1971).
- [5] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, 1993).
- [6] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley, 1972).
- [7] Y. B. Zeldovich and I. D. Novikov, *Relativistic Astrophysics: The structure and evolution of the Universe* (University of Chicago Press, 1983).
- [8] G. F. Smoot *et al.*, *Astrophys. J.* **396**, L1 (1992).
- [9] C. L. Bennet *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **148**, 1 (2003).
- [10] D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **148**, 175 (2003).
- [11] J. Wainwright and B. J. Marshman, *Phys. Lett.* **72A**, 275 (1979).

- [12] J. Wainwright, *Phys. Rev.* **D20**, 3031 (1979).
- [13] J. Wainwright, *J. Phys.* **A12**, 2015 (1979).
- [14] M. Carmeli and Ch. Charac, *Phys. Lett.* **75A**, 333 (1980).
- [15] J. Wainwright, *J. Phys.* **A14**, 1131 (1981)
- [16] A. D. Adams, R. W. Hellings, R. L. Zimmerman, H. Farhoosh, D. I. Levine and Z. Zeldich, *Astrophys. J.* **253**, 1 (1982).
- [17] M. Carmeli, Ch. Charac and S. Malin, *Phys. Rep.* **76**, 79 (1981).
- [18] W. B. Bonnor, J. B. Griffiths and M. A. H. McCallum, *Gen. Rel. Grav.* **26**, 687 (1994).
- [19] M. A. McCallum, in *Lecture Notes in Physics: Retzbach Seminar on Exact Solutions of Einstein's field Equations*, eds. W. Dietz and C- Hoenselaers (Springer Verlag, 1984).
- [20] M. A. MacCallum, in *The origin of structure in the universe*, eds. E. Gunzig and P. Nardone (Kluwer Academic, 1993).
- [21] M. A. MacCallum, in *The renaissance of general relativity and cosmology*, eds. G. F. R. Ellis, A. Lanza and J. C. Miller (Cambridge University Press, 1993).
- [22] E. Verdaguer, *Phys. Rep.* **229**, 1 (1993).
- [23] J. Wainwright and G. F. R. Ellis, Eds. *Dynamical Systems in Cosmology*, (Cambridge University Press, 1977).
- [24] J. M. M. Senovilla, *Gen. Rel. Gravit.* **30**, 701 (1998).
- [25] R. H. Gowdy, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 826 (1971).

- [26] R. H. Gowdy, *Ann. Phys.* **83**, 203 (1974).
- [27] Y. B. Zeldovich, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **160**, 1P, (1972).
- [28] G. A. Gonzalez, F. D. Lora and J. A. Jaimes *Brazilian Journal of Physics* **98** 38, (2008)
- [29] P.S. Letelier, *Phys. Rev. D.* 22, 807 (1980)
- [30] P.S. Letelier, *Phys. Rev. D.* 26, 2623 (1982)
- [31] S.R. Oliveira, *Phys. Rev. D.* 40, 3976 (1989)
- [32] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory* (North Holland, Amsterdam, 1966), pp. 173-175.
- [33] R. Tabensky and A.H Taub, *Commun. Math. Phys.* 29, 61-77 (1973)
- [34] A.H Taub, *Commun. Math. Phys.* 29, 61-79-88 (1973)
- [35] H. Bateman, *Partial differential equations of mathematical physics* (Dover, 1944).
- [36] L. Fernández-Jambria, L.M. González-Romero *J. Math. Phys* 45, 2113 (2004)
- [37] V. Belinski and E. Verdaguer, *Gravitational Solitons* (Cambridge University Press, 2001).
- [38] A. Feinstein and J. M. M. Senovilla, *Class. Quantum Grav.* **6**, L89 (1989).
- [39] E. Kasner, *Am. J. Math.* **43**, 217 (1921).
- [40] L. D. Landau and E. M . Lifshitz, *Théorie des Champs* (Éditions MIR, Moscou, 1970).

- [41] V. A. Belinski, I. M. Khalatnikov and E. M. Lifshitz, *Adv. Phys.* **19**, 525 (1970).
- [42] L. K. Patel and N. Dadich, *Singularity Free Inhomogeneous Cosmological Stiff Fluid Models*, gr-qc/9302001 (1993).
- [43] *Reducción del sistema de ecuaciones de Einstein para modelos cosmológicos no homogéneos utilizando ecuación de estado $p = \rho$* , G. A. González, F. D. Lora and J. A. Jaimes, *I Encuentro Bi-Nacional Colombo-Venezolano de Relatividad y Gravitación, Cartagena, Colombia, Octubre 31 a Noviembre 2, 2005*.
- [44] *Solución exacta para cosmologías no homogéneas y anisótropas con ecuación de estado $p_1 + p_2 = \rho_1 + \rho_2$* , F. D. Lora and G. A. González, *3er Taller de Gravitación y Astrofísica Relativista: Homenaje al “Gaucha” Herrera en su 60 aniversario, Isla de Coche, Venezuela, Noviembre 8-11, 2006*.
- [45] *An exact homogeneous stiff cosmology that reduces to the kasner solution*, F. D. Lora and G. A. González, *II Encuentro Bi-Nacional Colombo-Venezolano de Relatividad y Gravitación, Armenia, Colombia, Octubre 28-31, 2007*.
- [46] *A new family of solutions for cylindrical gravitational waves*, G. A. González, F. D. Lora and D. E. Cristancho, *XI Marcel Grossmann Meeting, Berlin, Alemania, Julio 23-29, 2006*.
- [47] F. D. Lora and G. A. González, “ *En preparación, para ser sometido a la revista Classical and Quantum Gravity* ”