

ESPACIOS POR PUNTOS DE CORTE

FÉLIX ANTONIO PÁEZ DÍAZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2005

# ESPACIOS POR PUNTOS DE CORTE

FÉLIX ANTONIO PÁEZ DÍAZ

Monografía presentada como  
requisito para optar al título  
de *Licenciado en Matemáticas*

Javier Enrique Camargo García.  
**Director**

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2005

*A la persona más importante en mi vida*

*CLAUDIA DÍAZ*

*el ser que más quiero y admiro.*

# Agradecimientos

Doy mis más sinceros agradecimientos:

- A Dios por darme la oportunidad y la fortaleza suficiente para afrontar y alcanzar mis metas.
- A mis padres Luis Alberto Páez y Claudia Díaz por brindarme todo su apoyo, su comprensión, su cariño y por su gran contribución en mi formación como persona.
- A mis hermanos Luis Alberto, Elkin Julian, Yina Paola y Erika Johana por su apoyo moral y afectivo, al igual que a mi tía Dioselina Díaz, mi abuela Angelica Gil y mi prima Alejandra Umaña por su colaboración durante el transcurso de mi carrera.
- A mi primo Carlos Díaz por ser un excelente compañero de estudios, por su colaboración y su amistad.
- A Verónica Carreño por brindarme su valiosa amistad, su cariño, su comprensión y su apoyo incondicional.
- A mis compañeros y amigos Francisco Niño, Isnardo Arenas y Arturo Castro por su amistad y su colaboración.
- Al profesor Gilberto Arenas por su colaboración y paciencia. Al igual que a los docentes que contribuyeron con mi formación académica.
- Al profesor Javier Enrique Camargo García quien además de ser un excelente director de monografía, es una gran persona.

**TITULO:** ESPACIOS POR PUNTOS DE CORTE.\*

**AUTOR:** PÁEZ DÍAZ Félix Antonio.\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Conexidad, puntos de corte, espacios por puntos de corte, la recta de Khalimsky .

## DESCRIPCIÓN

La noción de **espacio por puntos de corte** se introduce como un espacio topológico conexo con la propiedad que al “quitar” cualquiera de sus puntos se transforma en un espacio topológico desconexo. En este trabajo (el cual consta de cuatro capítulos), se revisan algunas propiedades de estos espacios.

En el primer capítulo se da una lista de conceptos básicos de topología que son de gran importancia para el entendimiento de esta monografía. En el segundo capítulo se da la definición de conexidad y se presentan algunas propiedades de los espacios topológicos conexos y conexos por caminos, al igual que varios ejemplos. Posteriormente, en el tercer capítulo se da la definición de espacio por puntos de corte, se muestra que dichos espacios en general, no son  $T_1$  y se presenta de manera formal algunos ejemplos, entre los cuales se destaca un espacio al cual por su importancia, se le dedica gran parte de este capítulo, pues (salvo homeomorfismos) es único en su clase; “*la recta de Khalimsky*”.

Por ultimo, en el cuarto capítulo se presenta en forma detallada algunas características de los espacios por puntos de corte entre las cuales se destaca que en dichos espacios la colección de “puntos cerrados” es infinita, y la no compacidad de los mismos. También, se define una noción de irreducibilidad y se muestra que un espacio por puntos de corte irreducible es necesariamente homeomorfo a la recta de Khalimsky. Esta caracterización se mostrara como una consecuencia de las propiedades topológicas de los espacios por puntos de corte.

---

\* Monografía

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de matemáticas. Director: Javier Enrique Camargo García.

**TITLE:** CUT-POINTS SPACE.\*

**AUTHOR:** PÁEZ DÍAZ Félix Antonio.\*\*

**KEY WORDS:** Connected, cut-points, cut-point space, the Khalimsky line.

## DESCRIPTION

The notion of a **cut-point space** is introduced as a connected topological space, along with the property that if in this space is “removed” any point it will be disconnected topological space. In this paper (which has four chapter), some properties of these space has been revised.

In the first chapter it is given a list of basic concepts about topology that are of great importance for understanding this monograph. In the second chapter it is given a definition of connected an pathwise connected topological space, and also several examples. Subsequently, in the third chapter it is introduced the concept of cut-point space, it is showed that generally these are not  $T_1$ -space and some examples are presented in a formal way, among which is outstanding a space and a great part of this chapter talks about it because of its great importance, since (except homomorphisms) is unique in its class; “the Khalimsky line”.

Finally, in the fourth chapter is presented in a detailed way some characteristics of the cut-points spaces among is outstanding that in these spaces the collection of closed points”is infinity, and the no compactness of them. Also, it is defined a notion of irreducibility and it is showed that a irreducible cut-point space is necessarily homomorphic to the Khalimsky line. This description is showed as a consequence of topological properties of cut-point space.

---

\*Monograph

\*\*Faculty of sciences. Mathematics school. Director: Javier Enrique Camargo García.

# CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>III</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>1</b>
<b>2. CONEXIDAD</b>	<b>10</b>
2.1. Conexidad: definición y ejemplos . . . . .	10
2.2. Construcción de espacios conexos . . . . .	16
2.3. Componentes conexas . . . . .	24
<b>3. ESPACIOS POR PUNTOS DE CORTE</b>	<b>27</b>
3.1. Definición y ejemplos . . . . .	27
3.2. La recta de Khalimsky . . . . .	32
<b>4. PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS POR PUNTOS DE CORTE Y CARACTERIZACIÓN DE LA RECTA DE KHALIMSKY</b>	<b>37</b>
4.1. Propiedades de los espacios por puntos de corte . . . . .	37
4.2. Espacios por puntos de corte irreducibles y caracterización de la recta de <i>Khalimsky</i> . . . . .	44
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>49</b>

# INTRODUCCIÓN

Al igual que en diversas áreas de las matemáticas, en topología, la recta real juega un papel muy importante, ya que en cierta forma  $\mathbb{R}$  es la fuente de intuición en el estudio de la topología pues muchas otras familias de espacios topológicos pueden ser obtenidos a partir de la recta real mediante construcciones topológicas manteniendo algunas de sus propiedades. Entre las propiedades más destacadas de  $\mathbb{R}$  podemos mencionar que: es un espacio metrizable; su topología puede ser generada por un orden lineal; es un espacio topológico conexo con la propiedad que al “quitar” cualquiera de sus puntos se transforma en un espacio topológico desconexo. Siendo esta última propiedad el motivo de desarrollo de esta monografía.

A los puntos que hacen que el espacio topológico se desconecte, se le conocen como puntos de corte y, suelen resultar de gran interés debido a que muchos teoremas importantes donde la conexidad es la principal propiedad, requieren de esta noción (noción que usualmente no se alcanza a estudiar en un primer curso de topología), un ejemplo preciso donde la noción de puntos de corte es imprescindible, lo proporcionan los siguientes enunciados los cuales, son teoremas bien conocidos de topología general que caracterizan al intervalo unitario  $[0, 1]$ , y a la circunferencia unitaria  $S^1$ .

“Todo continuo<sup>1</sup> metrizable con exactamente dos puntos que no son de corte, es homeomorfo a  $[0, 1]$ ”.

“ Todo continuo metrizable  $K$  tal que, para cada par de puntos distintos  $a, b \in K$  se tiene que  $K - \{a, b\}$  es desconexo, es homeomorfo a  $S^1$ ”.

---

<sup>1</sup>Un continuo es un espacio topológico conexo y compacto.

En este trabajo (basados en [2]), nos centramos, tal y como lo mencionamos anteriormente, en los espacios topológicos para los cuales todos sus puntos son de corte, estudiando algunas propiedades de dichos espacios los cuales se denominan *espacios por puntos de corte*.

En el capítulo 1 se da una lista de nociones básicas de topología tales como, los conceptos de base, subespacios topológicos, funciones continuas y homeomorfismos entre otros. En el capítulo 2 se da la definición de conexidad y se presentan algunas propiedades de los espacios topológicos conexos y conexos por caminos, además se muestran algunos ejemplos de como construir espacios conexos. Posteriormente, en el capítulo 3 se da la definición de espacio por puntos de corte, se muestra que dichos espacios en general, no son  $T_1$  y se presenta de manera formal algunos ejemplos, entre los cuales se destaca un espacio al cual, por su importancia, se le dedica gran parte de este capítulo, pues (salvo homeomorfismos) es único en su clase; *“la recta de Khalimsky”*.

Por ultimo, en el capítulo 4 se presenta en forma detallada algunas características de los espacios por puntos de corte entre las cuales se destaca que en dichos espacios la colección de “puntos cerrados” es infinita, y la no compacidad de los mismos. También, se define una noción de irreducibilidad y se muestra que un espacio por puntos de corte irreducible es necesariamente homeomorfo a la recta de Khalimsky. Esta caracterización se mostrara como una consecuencia de las propiedades topológicas de los espacios por puntos de corte.

El lector interesado en conocer más sobre este tema, puede remitirse al artículo *Cut points in general topological space*, de Whybur, Gordon. y al texto *The Khalimsky line in digital topology*, de Kopperman, R. Los cuales se encuentran referenciados en [2].

# CAPÍTULO 1

## PRELIMINARES

En este capítulo damos una lista de conceptos o nociones básicas que usaremos a lo largo de esta monografía. Aunque no entraremos en detalles, pues asumimos que el lector está familiarizado con estos conceptos, queremos recordar que una *topología* sobre un conjunto no vacío  $X$ , es una colección  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  ( $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ ) llamados *conjuntos abiertos*, donde la unión de cualquier colección de elementos de  $\tau$ , es nuevamente un elemento de  $\tau$  al igual que las intersecciones finitas, el conjunto vacío y el propio conjunto  $X$ . Al par  $(X, \tau)$  se le da el nombre de *espacio topológico*, y se acostumbra a decir simplemente “ $X$  es un espacio topológico” siempre que no hay lugar a confusión con respecto a la colección  $\tau$ . Además, recordemos que un subconjunto del espacio topológico  $X$  es un *conjunto cerrado* si su complemento es un conjunto abierto en  $X$ . Cabe recordar también, que si se tiene un subconjunto  $A$  de  $X$ , un punto  $x \in X$  es un *punto adherente* de  $A$ , si cada conjunto abierto que contiene a  $x$  interseca  $A$ , y es un *punto límite o punto de acumulación* de  $A$ , si cualquier conjunto abierto que contenga a  $x$  interseca a  $A$  en puntos distintos de  $x$ . Por otra parte,  $x$  es un *punto interior* de  $A$ , si existe un subconjunto abierto que contiene a  $x$  y está contenido en  $A$ . También, se dice que  $A$  es una *vecindad* del punto  $x$ , si  $x$  es un punto interior de  $A$ . Al conjunto de todos los puntos adherentes de  $A$  se le conoce como la *adherencia o clausura* de  $A$  y se denota por  $\bar{A}$ , al conjunto de todos los puntos de acumulación de  $A$  se le conoce como el *derivado* de  $A$  y se nota mediante  $A'$ , y al conjunto de todos los puntos interiores de  $A$  se le conoce como el *interior* de  $A$  y se nota mediante  $A^\circ$ .

En la siguiente proposición veremos algunas propiedades de la adherencia de un conjunto, las cuales usaremos ampliamente en los capítulos posteriores de este trabajo (La demostración se puede consultar en [5]).

**Proposición 1.1.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $A, B \subseteq X$ . Entonces:

1. Si  $A \subseteq B$  entonces  $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ .
2.  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .
3.  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ .
4.  $A$  es cerrado si, y sólo si  $A = \overline{A}$ .
5.  $\overline{A} = A \cup A'$ .

Ahora, empezaremos con nuestra lista de conceptos previos.

**Definición 1.1.** Si  $X$  es un conjunto no vacío, una **base** para alguna topología sobre  $X$  es una colección  $\beta$  de subconjuntos de  $X$  (llamados **elementos básicos**) tales que:

1. Para cada  $x \in X$ , existe al menos un elemento  $B \in \beta$  que lo contiene, o lo que es igual  $X = \bigcup \beta$ .
2. Si  $B_1$  y  $B_2$  son dos elementos de la colección  $\beta$  y  $x \in B_1 \cap B_2$  entonces existe un elemento  $B_3 \in \beta$  tal que  $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

**Definición 1.2.** Si  $X$  es un conjunto no vacío y  $\beta$  es base para alguna topología sobre  $X$ , se define el **generado por la base**  $\beta$  como la familia de subconjuntos de  $X$  que son uniones de elementos de  $\beta$  y se nota  $\langle \beta \rangle$ . Es decir;

$$\langle \beta \rangle = \{A \subseteq X \mid (\forall x \in A)(\exists B \in \beta)(x \in B \subseteq A)\}.$$

**Proposición 1.2.** Si  $X$  es un conjunto no vacío y  $\beta$  es base para alguna topología sobre  $X$ , entonces  $\langle \beta \rangle$  es una topología sobre  $X$  llamada la **topología generada** por la base  $\beta$ .

**Ejemplo 1.1.** Si  $X$  es un conjunto no vacío y  $\preceq$  es un orden total sobre  $X$  (es decir  $\preceq$  es una relación reflexiva, antisimétrica, transitiva y además para cada  $x, y \in X$  se tiene que  $x \preceq y$  ó  $y \preceq x$ ), la colección  $\beta$  de todos los intervalos de los siguientes tipos:

1. Todos los intervalos de la forma  $(a, b) (= \{x \in X \mid a \prec x \prec b\})$  en  $X$ .
2. Todos los intervalos de la forma  $[a_0, b) (= \{x \in X \mid a_0 \preceq x \prec b\},)$  donde  $a_0$  es el mínimo (si lo hay) de  $X$ .

3. Todos los intervalos de la forma  $(a, b_0](= \{x \in X \mid a \prec x \preceq b_0\})$  donde  $b_0$  es el máximo (si lo hay) de  $X$ .

es base para una topología sobre  $X$ . La topología generada por la base  $\beta$  se denomina **topología del orden**.

En particular, la colección  $\beta = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$  de todos los intervalos abiertos en la recta real  $\mathbb{R}$ , es base para una topología sobre  $\mathbb{R}$ . La topología generada por la base  $\beta$  se denomina **topología usual** debido a que, es la topología que se deriva del orden usual sobre la recta real. En adelante, siempre que estudiemos  $\mathbb{R}$  supondremos que viene con esta topología, a menos que digamos otra cosa.

La colección  $\beta' = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$  de todos los intervalos semiabiertos en la recta real es también base para una topología sobre  $\mathbb{R}$ . La topología generada por la base  $\beta'$  se denomina **topología de Sorgenfrey**.

Igualmente, la colección  $\mathcal{C} = \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$  de todos los rayos semiabiertos a la derecha en la recta real es una base para una topología sobre  $\mathbb{R}$ . La topología generada por la base  $\mathcal{C}$  se denomina **topología de colas a la derecha** o simplemente **topología de colas**.

La proposición (1.2) nos muestra como obtener una topología sobre un conjunto a partir de una base. Debido a que, es más sencillo trabajar con una colección más pequeña que la topología, también es útil tener un criterio para, a partir de una topología obtener una base.

**Lema 1.1.** Sea  $X$  un espacio topológico.  $\mathcal{C}$  es una base para la topología de  $X$ , si  $\mathcal{C}$  es una colección de conjuntos abiertos de  $X$  tal que, para cada conjunto abierto  $U$  de  $X$  y cada  $x \in U$ , existe un elemento  $C$  de  $\mathcal{C}$  tal que  $x \in C \subseteq U$ .

**Definición 1.3.** Sea  $X$  un espacio topológico con topología  $\tau$ . Si  $Y$  es un subconjunto de  $X$ , la colección

$$\tau_Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$$

es una topología sobre  $Y$ , denominada **topología de subespacio** o **topología relativa**. Con esta topología,  $Y$  se denomina **subespacio** de  $X$ ; sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de  $X$  con  $Y$ .

En adelante, siempre que nos refiramos a un subconjunto  $Y$  de un espacio topológico  $X$  como un espacio, lo haremos con la topología que hereda como subespacio de  $X$ .

**Teorema 1.1.** Sean  $X$  un espacio topológico,  $Y$  un subespacio de  $X$ , y  $A \subseteq Y$ , entonces:

1.  $A$  es cerrado en  $Y$  si, y sólo si  $A = F \cap Y$ , donde  $F$  es un cerrado en  $X$ .
2. La adherencia de  $A$  en  $Y$  es  $\bar{A} \cap Y$ . Donde  $\bar{A}$  denota la adherencia de  $A$  en  $X$ .
3. Si  $A$  es abierto en  $Y$  e  $Y$  es abierto en  $X$ , entonces  $A$  es abierto en  $X$ . Y si  $A$  es cerrado en  $Y$  e  $Y$  es cerrado en  $X$ , entonces  $A$  es cerrado en  $X$ .
4. Si  $\beta$  es una base para la topología de  $X$ , la colección  $\beta_Y = \{B \cap Y \mid B \in \beta\}$  es una base para la topología de subespacio sobre  $Y$ .

**Afirmación 1.1.** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  espacios topológicos. La colección  $\beta$  de todos los conjuntos de la forma  $\prod_{i=1}^n U_i$  donde  $U_i$  es abierto en  $X_i$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , es base para una topología sobre  $\prod_{i=1}^n X_i$ .

Las demostraciones de la proposición (1.2), el lema (1.1) y la afirmación (1.1) se encuentran en [5] la prueba del teorema (1.1) puede consultarse en [5] o [8]

**Definición 1.4.** La topología generada por la base  $\beta$  de la afirmación anterior se denomina *topología por cajas*.

Siempre que estudiemos el producto de un número finito de espacios topológicos, supondremos que esta dotado de la topología por cajas.

**Definición 1.5.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Diremos que  $f$  es continua si para cada subconjunto abierto  $U$  de  $Y$ , el conjunto  $f^{-1}(U) (= \{x \in X \mid f(x) \in U\})$  es un subconjunto abierto de  $X$ .

Es de importancia notar que si la topología del espacio de llegada esta dada por una base, para probar la continuidad de  $f$  basta con probar que la imagen inversa de un *elemento básico* es abierta; si  $U$  es un conjunto abierto de  $Y$ ,  $U$  se puede expresar como la unión de elementos básicos

$$U = \bigcup_{\alpha \in \Delta} B_\alpha$$

entonces

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \Delta} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \Delta} f^{-1}(B_\alpha).$$

por lo que  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$  si cada conjunto  $f^{-1}(B_\alpha)$  es abierto en  $X$ .

**Definición 1.6.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos, se definen  $\Pi_1 : X \times Y \rightarrow X$  por  $\Pi_1((x, y)) =: x$  y  $\Pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$  por  $\Pi_2((x, y)) =: y$ .

Las aplicaciones  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  se denominan proyecciones de  $X \times Y$  sobre su primer y segundo factor respectivamente.

Es claro que las proyecciones son aplicaciones sobreyectivas. Además son continuas, ya que  $\Pi_1^{-1}(U) = U \times Y$  y  $\Pi_2^{-1}(V) = X \times V$ , y estos conjuntos son abiertos en  $X \times Y$  si  $U$  y  $V$  son abiertos en  $X$  e  $Y$  respectivamente.

A continuación se muestran algunas maneras alternativas de formular la definición de continuidad.

**Teorema 1.2.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos; sea  $f : X \longrightarrow Y$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1.  $f$  es continua.
2. Para cada  $A \subseteq X$  se tiene que  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .
3. Para todo subconjunto cerrado  $F$  de  $Y$  se tiene que  $f^{-1}(F)$  es un subconjunto cerrado en  $X$ .

En el siguiente teorema se muestran algunas reglas para construir funciones continuas.

**Teorema 1.3.** Sean  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  espacios topológicos.

1. (*Función constante.*) Si  $f : X \longrightarrow Y$  envía todo punto de  $X$  a un mismo punto  $y_0$  de  $Y$ , entonces  $f$  es continua.
2. (*Inclusión.*) Si  $A$  es un subespacio de  $X$ , la función inclusión  $j : A \longrightarrow X$  definida por  $j(a) = a$  para cada  $a \in A$ , es continua.
3. (*Composición.*) Si  $f : X \longrightarrow Y$  y  $g : Y \longrightarrow Z$  son continuas, entonces la aplicación  $g \circ f : X \longrightarrow Z$  es continua.
4. (*Restricción del dominio.*) Si  $f : X \longrightarrow Y$  es continua y  $A$  es un subespacio de  $X$ , entonces la función restringida  $f|_A : A \longrightarrow Y$  definida por  $f|_A(a) = f(a)$  para cada  $a \in A$ , es continua.
5. (*Restricción o extensión del recorrido.*) Sea  $f : X \longrightarrow Y$  continua. Si  $Z$  es un subespacio de  $Y$  que contiene al conjunto imagen  $f(X)$ , entonces la función  $g : X \longrightarrow Z$ , obtenida al restringir el recorrido de  $f$ , es continua. Si  $Z$  es un espacio con  $Y$  como subespacio, entonces la aplicación  $h : X \longrightarrow Z$ , obtenida al extender el recorrido de  $f$ , es continua.

6. (*Aplicaciones en productos.*) Sea  $f : Z \longrightarrow X \times Y$  dada por la ecuación  $f(z) = (f_1(z), f_2(z))$ . Entonces  $f$  es continua si, y sólo si, las funciones  $f_1 : Z \longrightarrow X$  y  $f_2 : Z \longrightarrow Y$  son continuas.

El siguiente teorema nos proporciona otra forma de construir funciones continuas.

**Teorema 1.4. (*Lema del pegamiento*).** Sea  $X = A \cup B$ , donde  $A$  y  $B$  son cerrados en  $X$ . Sean  $f : A \longrightarrow Y$  y  $g : B \longrightarrow Y$  continuas. Si  $f(x) = g(x)$  para cada  $x \in A \cap B$ , entonces  $f$  y  $g$  se combinan para dar una nueva función continua  $h : X \longrightarrow Y$  definida mediante

$$h(x) =: \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ g(x) & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Este teorema también se cumple si  $A$  y  $B$  son conjuntos abiertos en  $X$ .

Las demostraciones de los teoremas (1.2), (1.3) y (1.4) se encuentran en [5] y [8]

**Definición 1.7.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos; sea  $f : X \longrightarrow Y$  una aplicación biyectiva. Si la función  $f$  y la función inversa  $f^{-1} : Y \longrightarrow X$  son ambas continuas, entonces se dice que  $f$  es un **homeomorfismo**. En tal caso  $X$  e  $Y$  se dicen homeomorfos o topológicamente equivalentes y se nota  $X \cong Y$ .

Note que si  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son espacios topológicos, la aplicación identidad define un homeomorfismo de  $X$  en si mismo. Además si la aplicación  $f : X \longrightarrow Y$  define un homeomorfismo de  $X$  en  $Y$ , la aplicación  $f^{-1} : Y \longrightarrow X$  define un homeomorfismo de  $Y$  en  $X$ . Y si la aplicación  $g : Y \longrightarrow Z$  define un homeomorfismo de  $Y$  en  $Z$ , la aplicación  $g \circ f : X \longrightarrow Z$  define un homeomorfismo de  $X$  en  $Z$ . Así,  $\cong$  (ser “homeomorfo” a) es una relación de equivalencia en la familia de todos los espacios topológicos.

**Definición 1.8.** Un **invariante topológico** o propiedad topológica, es una propiedad que se preserva bajo homeomorfismos. Es decir; si un espacio topológico  $X$  cumple cierta propiedad  $P$ , entonces  $P$  es un invariante topológico si cualquier espacio  $Y$  que sea homeomorfo a  $X$  cumple la propiedad  $P$ .

**Proposición 1.3.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos. Si  $f : X \longrightarrow Y$  es un homeomorfismo, entonces para cada  $A \subseteq X$ ,  $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ .

*Demostración.*

Sea  $A \subseteq X$ , puesto que  $f$  es continua, por la parte (2) del teorema (1.2) se tiene que  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .

Ahora, como  $\overline{A}$  es cerrado en  $X$ ,  $X - \overline{A}$  es abierto en  $X$ , así  $(f^{-1})^{-1}(X - \overline{A})$  es un subconjunto abierto de  $Y$  (pues  $(f^{-1})$  es continua), pero por ser  $f$  biyectiva se tiene que

$$(f^{-1})^{-1}(X - \overline{A}) = f(X - \overline{A}) = f(X) - f(\overline{A}) = Y - f(\overline{A})$$

y por tanto  $f(\overline{A})$  es cerrado en  $Y$ , así  $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ .

Por otra parte,  $A \subseteq \overline{A}$  de donde se sigue que  $f(A) \subseteq f(\overline{A})$  y  $\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\overline{A})} = f(\overline{A})$  y por consiguiente  $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$ . ■

**Afirmación 1.2.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos,  $A \subseteq X$  y  $f : X \rightarrow Y$  un homeomorfismo. Entonces la aplicación  $f|_A : A \rightarrow Z = f(A)$  es un homeomorfismo.

La prueba de la afirmación anterior se sigue fácilmente de los numerales 4) y 5) del teorema (1.3)

**Ejemplo 1.2.** La aplicación  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$  (con  $a < b$ ) es una aplicación biyectiva y bicontinua (toda recta en  $\mathbb{R}$  con pendiente no nula es biyectiva y bicontinua.) Así, de la afirmación (1.2) se sigue que la aplicación  $f|_{[a,b]} : [a, b] \rightarrow [0, 1] = f([a, b])$  (la cual se ilustra en la figura 1) es un homeomorfismo.

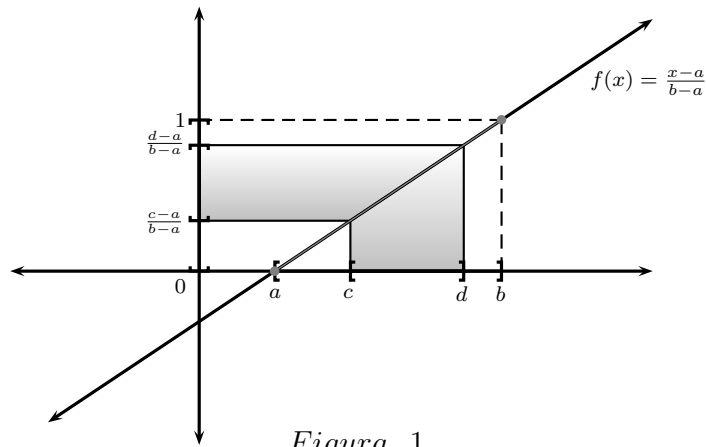


Figura 1

Del ejemplo (1.2) y del hecho que, “ser homeomorfo a” es una relación de equivalencia, se sigue que cualquier par de intervalos cerrados y acotados en  $\mathbb{R}$  son homeomorfos.

**Ejemplo 1.3.** Si  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos y  $y_0 \in Y$ , entonces la aplicación  $f : X \times \{y_0\} \rightarrow X$  definida por  $f((x, y_0)) =: x$  es claramente una aplicación biyectiva, además si  $U$  es un subconjunto abierto de  $X$ ,

$$f^{-1}(U) = \{(x, y_0) \in X \times \{y_0\} \mid x \in U\} = U \times \{y_0\}$$

el cual es un subconjunto abierto de  $X \times \{y_0\}$  y así  $f$  es continua.

Por otra parte, si  $V$  es un subconjunto abierto no vacío de  $X \times \{y_0\}$ , entonces  $V = U \times \{y_0\}$  donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $X$  y así

$$(f^{-1})^{-1}(V) = \{x \in X \mid (f^{-1})(x) \in V\} = \{x \in X \mid (x, y_0) \in U \times \{y_0\}\} = U$$

y por tanto  $f^{-1}$  también es continua. Luego  $X \cong X \times \{y_0\}$ .

**Ejemplo 1.4.** Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son  $n$  espacios topológicos entonces la aplicación

$$f : \prod_{i=1}^{n-1} X_i \times X_n \longrightarrow \prod_{i=1}^n X_i$$

definida por  $f((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$  es una aplicación biyectiva. Además si  $O$  es abierto básico en  $\prod_{i=1}^n X_i$ ,  $O = \prod_{i=1}^n O'_i$  donde  $O'_i$  es abierto en  $X_i$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Así

$$\begin{aligned} f^{-1}(O) &= \{((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n) \in \prod_{i=1}^{n-1} X_i \times X_n \mid (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in \prod_{i=1}^n O'_i\} \\ &= \{((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n) \in \prod_{i=1}^{n-1} X_i \times X_n \mid a_i \in O'_i, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \\ &= \{((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n) \in \prod_{i=1}^{n-1} X_i \times X_n \mid (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \prod_{i=1}^{n-1} O'_i, \text{ y } a_n \in O'_n\} \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} O'_i \times O'_n \end{aligned}$$

el cual es abierto en  $\prod_{i=1}^{n-1} X_i \times X_n$  y así  $f$  es continua.

Por otra parte si  $U$  es un subconjunto abierto básico de  $\prod_{i=1}^{n-1} X_i \times X_n$ ,  $U = \prod_{i=1}^{n-1} U'_i \times U'_n$  donde  $U'_i$  es abierto en  $X_i$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Así

$$\begin{aligned} (f^{-1})^{-1}(U) &= \{(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in \prod_{i=1}^n X_i \mid ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n) \in \prod_{i=1}^{n-1} U'_i \times U'_n\} \\ &= \{(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in \prod_{i=1}^n X_i \mid ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n) \in \prod_{i=1}^{n-1} U'_i, \text{ y } a_n \in U'_n\} \\ &= \{(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in \prod_{i=1}^n X_i \mid a_i \in U'_i, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \\ &= \prod_{i=1}^n U'_i \end{aligned}$$

el cual es abierto en  $\prod_{i=1}^n X_i$  y por ende  $f^{-1}$  también es continua. Luego  $\prod_{i=1}^{n-1} X_i \times X_n \cong \prod_{i=1}^n X_i$

**Definición 1.9.** Sea  $X$  un espacio topológico.

1. Diremos que  $X$  es  $T_0$  si para cada par de puntos distintos  $x, y \in X$ , existe un subconjunto  $U$  abiertos en  $X$  tal que  $(y \in U \text{ y } x \notin U)$  o  $(y \notin U \text{ y } x \in U)$ .
2. Diremos que  $X$  es  $T_1$  si para cada par de puntos distintos  $x, y \in X$ , existen dos subconjuntos  $U$  y  $V$  abiertos en  $X$  tales que  $(x \in U \text{ y } y \notin U)$  y  $(x \notin V \text{ y } y \in V)$ .

De la definición anterior se sigue que todo espacio topológico  $T_1$  es  $T_0$ . A continuación se muestra una útil caracterización de los espacios  $T_1$ .

**Proposición 1.4.** Un espacio topológico  $X$  es  $T_1$  si, y sólo si, los conjuntos unipuntuales son cerrados.

**Definición 1.10.** Sea  $X$  un espacio topológico. Una colección  $\mathfrak{A} = \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  de subconjuntos de  $X$  se dice que recubre a  $X$  o que es un **recubrimiento** de  $X$ , si la unión de los elementos de  $\mathfrak{A}$  coincide con  $X$ ; es decir, si  $X = \bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathcal{A}_\alpha$ . Se dice que  $\mathfrak{A}$  es un **recubrimiento abierto** de  $X$  si es un recubrimiento de  $X$  formado por subconjuntos abiertos de  $X$ .

**Definición 1.11.** Un espacio topológico  $X$  se dice que es **compacto** si de cada recubrimiento abierto  $\mathfrak{A}$  de  $X$  se puede extraer una subcolección finita

$$\mathfrak{A}' = \{\mathcal{A}_{\alpha_1}, \mathcal{A}_{\alpha_2}, \dots, \mathcal{A}_{\alpha_n}\}$$

que también recubre a  $X$ .

A continuación, enunciamos un teorema que nos sera de gran utilidad para probar (en el capítulo 4), que un espacio por puntos de corte es no compacto.

**Teorema 1.5. (Principio maximal de Hausdorff).** Si  $\mathfrak{L}$  es una colección de conjuntos, entonces cualquier cadena<sup>1</sup>  $\mathfrak{A}$  en  $\mathfrak{L}$  esta contenida en una cadena maximal  $\mathfrak{C}$  de  $\mathfrak{L}$ . ( La cadena  $\mathfrak{C}$  es maximal si no existe una cadena en  $\mathfrak{L}$  que contenga propiamente a  $\mathfrak{C}$ .)

En [6] se prueba que el principio maximal de Hausdorff, es una equivalencia del lema de Zorn para una colección de conjuntos. En [3] se da otra demostración de este teorema, la cual depende del axioma de elección.

---

<sup>1</sup>Una cadena es una colección de conjuntos  $\mathfrak{A}$  tal que para cada  $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ ,  $A_1 \subset A_2$  o  $A_2 \subset A_1$ .

# CAPÍTULO 2

## CONEXIDAD

Intuitivamente, un espacio topológico es conexo si esta formado por una sola “pieza”, si esta conectado, no separado. Ha habido varias definiciones matemáticas de este concepto (G. Cantor en 1883, C. Jordan en 1893, A. Schoenflies en 1904), pero el lenguaje introducido hasta ahora nos lleva a la universalmente aceptada en la actualidad (S. Mazurkiewicz en 1920).

En este capítulo definiremos de manera formal esta noción de conexidad, y analizaremos algunas propiedades de los espacios topológicos conexos. También, mostraremos como una aplicación en un contexto más general, uno de los teoremas básicos del análisis acerca de funciones continuas en donde la conexidad es imprescindible: “*El teorema del valor intermedio*”.

---

### 2.1. Conexidad: definición y ejemplos

---

Comenzaremos definiendo formalmente la noción de conexidad y probando algunas propiedades de los espacios topológicos conexos al igual que algunos ejemplos.

**Definición 2.1.1.** Sea  $X$  un espacio topológico. Una *separación* o disconexión de  $X$  es un par  $U, V$  de abiertos disyuntos no triviales de  $X$  cuya unión es  $X$ .

**Definición 2.1.2.** Diremos que un espacio topológico  $X$  es **conexo**, si no existe una separación o disconexión de  $X$ .

Enunciaremos una caracterización de los espacios topológicos conexos en el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.1.** *Un espacio topológico  $X$  es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos que son abiertos y cerrados en  $X$  son el conjunto vacío y el propio  $X$ .*

*Demostración.*

Supongamos que  $U$  es un subconjunto propio no vacío de  $X$  que es a la vez abierto y cerrado, entonces su complemento  $V = X - U$  es también un subconjunto propio no vacío y abierto de  $X$ , además  $U \cup V = X$  luego  $U$  y  $V$  constituyen una separación de  $X$ , contradiciendo el hecho de que  $X$  es conexo.

Recíprocamente si  $U$  y  $V$  forman una disconexión de  $X$ , entonces  $U$  y  $V = X - U$  son abiertos, luego  $X - V$  es cerrado, pero  $X - V = U$  y por tanto  $U$  es un subconjunto propio de  $X$  que es a la vez abierto y cerrado en  $X$ . ■

Para un subconjunto  $Y$  de  $X$  existe otra manera alternativa de formular la definición de conexidad, la enunciaremos en el siguiente lema.

**Lema 2.1.1.** *Si  $Y$  es un subespacio de  $X$ , una separación de  $Y$  es un par  $A, B$  de conjuntos no vacíos y disyuntos cuya unión es  $Y$  de modo que ninguno de ellos contiene puntos límite del otro. El espacio  $Y$  es conexo si no existe una separación de  $Y$ .*

*Demostración.*

Supongamos primero que,  $A, B$  es una separación de  $Y$ . Entonces  $A$  es abierto y cerrado en  $Y$ . La adherencia de  $A$  en  $Y$  es el conjunto  $\bar{A} \cap Y$  (donde  $\bar{A}$  denota la adherencia de  $A$  en  $X$ ). Como  $A$  es cerrado en  $Y$ ,  $A = \bar{A} \cap Y$ , o lo que es igual,  $\bar{A} \cap B = \emptyset$ . Como  $\bar{A}$  es la unión de  $A$  con sus puntos límite,  $B$  no contiene puntos límite de  $A$ . Un argumento análogo demuestra que  $A$  no contiene puntos límite de  $B$ .

Recíprocamente, supongamos que  $A$  y  $B$  son conjuntos disyuntos no vacíos cuya unión es  $Y$ , ninguno de los cuales contiene puntos límite del otro. Entonces se satisface que  $\bar{A} \cap B = \emptyset$  y  $A \cap \bar{B} = \emptyset$ ; de esta forma, concluimos que  $\bar{A} \cap Y = A$  y  $\bar{B} \cap Y = B$ . Así,  $A$  y  $B$  son cerrados en  $Y$  y, como  $A = Y - B$  y  $B = Y - A$ , también son abiertos en  $Y$ . ■

**Ejemplo 2.1.1.**  $\mathbb{R}$  con la topología de Sorgenfrey no es conexo, basta escribir la separación  $\mathbb{R} = U \cup V$  con  $U = (-\infty, 0)$  y  $V = [0, \infty)$ .

**Ejemplo 2.1.2.** Sea  $Y$  el subespacio  $[0, 1) \cup (1, 2]$  de la recta real  $\mathbb{R}$ , los conjuntos  $[0, 1)$  y  $(1, 2]$  son no vacíos y abiertos en  $Y$  (aunque no en  $\mathbb{R}$ ) y, además ninguno de estos dos

conjuntos contiene puntos límite del otro, de esta forma constituyen una separación de  $Y$  y por tanto  $Y$  no es conexo.

**Ejemplo 2.1.3.** El conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$  no es conexo. Es más los únicos subespacios conexos de  $\mathbb{Q}$  son los conjuntos unipuntuales: si  $Y$  es un subespacio de  $\mathbb{Q}$  conteniendo dos puntos  $p$  y  $q$ , es posible elegir un número irracional  $a$  entre  $p$  y  $q$  y escribir a  $Y$  como la unión de los conjuntos abiertos  $Y \cap (-\infty, a)$  y  $Y \cap (a, \infty)$  los cuales forman una separación de  $Y$ .

**Ejemplo 2.1.4.** Sea  $X$  el siguiente subconjunto del plano  $\mathbb{R}^2$ .

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = 1/x\}$$

entonces  $X$  no es conexo. De hecho, los dos conjuntos forman una separación de  $X$  pues ninguno contiene puntos límite del otro (ver la figura 2).

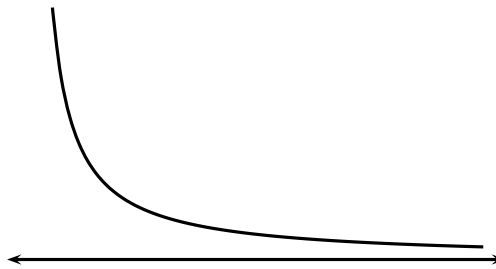


Figura 2

**Ejemplo 2.1.5.** En cualquier espacio topológico los conjuntos unipuntuales son conexos.

**Ejemplo 2.1.6.**  $\mathbb{R}$  con la topología de los complementos finitos<sup>1</sup> es conexo. Esto es una sencilla consecuencia de que en esta topología no existen abiertos disyuntos no vacíos.

Hemos mostrado varios ejemplos de espacios que no son conexos, pues por la propia definición, es más fácil proporcionar dichos ejemplos que construir ejemplos de espacios topológicos conexos. Por esta razón los últimos dos ejemplos son un poco triviales. Pero ¿Cómo podemos construir espacios que sean conexos? Demostraremos algunos resultados que nos serán de gran utilidad para construir espacios conexos a partir de espacios conexos que están fijados de antemano. En la próxima sección aplicaremos estos teoremas para probar que algunos espacios son conexos. Para empezar, veamos el siguiente lema.

<sup>1</sup>recordemos que la topología de los complementos finitos sobre  $\mathbb{R}$  es la topología generada por  $\{A \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - A \text{ es finito ó todo } \mathbb{R}\}$ .

**Lema 2.1.2.** *Si los conjuntos  $U$  y  $V$  forman una separación de  $X$  y además  $Y$  es un subespacio conexo de  $X$ , entonces  $Y$  está contenido bien en  $U$  ó bien en  $V$ .*

*Demostración.*

Como  $U$  y  $V$  son abiertos en  $X$ , los conjuntos  $U \cap Y$  y  $V \cap Y$  son abiertos en  $Y$ . Estos dos conjuntos son disyuntos y su unión es  $Y$ ; si fueran ambos no vacíos formarían una separación de  $Y$ , contradiciendo el hecho de que  $Y$  es conexo. De esta forma alguno de ellos es vacío y por tanto  $Y$  está contenido en  $U$  ó bien en  $V$ . ■

**Teorema 2.1.2.** *La unión de una colección de subespacios conexos de un espacio  $X$  que tiene un punto en común es conexa.*

*Demostración.*

Sea  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  una colección de subespacios conexos de un espacio  $X$  y sea  $p$  un punto de  $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ . Veamos que el espacio  $Y = \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$  es conexo. Supongamos que  $Y = C \cup D$  es una separación de  $Y$ . El punto  $p$  está, bien en  $C$  ó bien en  $D$ ; supongamos que  $p \in C$ . Como  $A_\alpha$  es conexo para cada  $\alpha \in \Delta$ , entonces por el lema (2.1.2) se tiene que para cada  $\alpha \in \Delta$ ,  $A_\alpha \subset C$  ó  $A_\alpha \subset D$ , aunque esta última posibilidad se descarta pues  $p \in A_\alpha$  para cada  $\alpha$ , y  $p \in C$  por tanto  $A_\alpha \subset C$  para cada  $\alpha \in \Delta$ , y así  $\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha \subset C$  contradiciendo el hecho de que  $D$  era no vacío. ■

**Corolario 2.1.1.** *Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de subespacios conexos de un espacio  $X$ , tales que  $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces la unión  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  es conexo.*

*Demostración.*

Sea  $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Por inducción, aplicando el teorema (2.1.2), se demuestra que  $B_n$  es conexo. Como  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = A_1 \neq \emptyset$ , entonces  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$  es conexo. Como  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  se deduce que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  es conexo. ■

**Corolario 2.1.2.** *Sea  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  una colección de subespacios conexos de un espacio topológico  $X$  y sea  $U$  un subespacio conexo de  $X$ , tal que  $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$  para cada  $\alpha \in \Delta$ , entonces  $U \cup (\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha)$  es conexo.*

*Demostración.*

Dado que  $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ , entonces por el teorema (2.1.2) se sigue que  $U \cup A_\alpha$  es conexo para cada  $\alpha \in \Delta$ . Sea  $B_\alpha = U \cup A_\alpha$  para cada  $\alpha \in \Delta$ . Entonces  $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  es una colección de subespacios conexos de  $X$ , además  $\bigcap_{\alpha \in \Delta} B_\alpha \neq \emptyset$  (pues  $U \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Delta} B_\alpha$ ). Así, por el teorema (2.1.2)  $\bigcup_{\alpha \in \Delta} B_\alpha = U \cup (\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha)$  es conexo. ■

Es natural preguntarse ¿qué ocurre con la intersección de espacios conexos? ¿Es conexa? En la figura 3 mostramos un ejemplo un poco intuitivo en el cual podemos ver que la intersección de conexos no es necesariamente conexa.

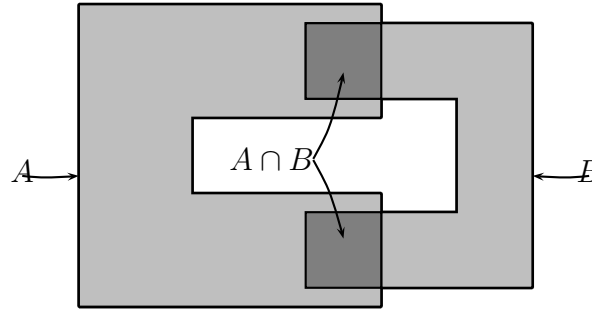


Figura 3

En la siguiente sección mostraremos un ejemplo más formal sobre este hecho. Por ahora sigamos con el siguiente teorema.

**Teorema 2.1.3.** *Sea  $A$  un subespacio conexo de  $X$ . Si  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ , entonces  $B$  es conexo. En particular  $\bar{A}$  es conexo.*

*Demostración.*

Sea  $A$  conexo y sea  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ , y supongamos que  $B = C \cup D$  es una separación de  $B$ . Por el lema(2.1.2) se tiene que  $A \subset C$  ó  $A \subset D$ ; supongamos que  $A \subset C$ , entonces  $\bar{A} \subset \bar{C}$ . Como  $\bar{C}$  y  $D$  son disyuntos (lema (2.1.1)),  $B$  no puede intersecar a  $D$ , contradiciendo así el hecho de que  $D$  es un subconjunto no vacío de  $B$ . ■

En el siguiente teorema probaremos que la conexidad es una propiedad topológica (o invariante topológico).

**Teorema 2.1.4.** *La imagen de un espacio conexo bajo una aplicación continua es un espacio conexo.*

*Demostración.*

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua y supongamos que  $X$  es conexo. Queremos probar que el espacio imagen  $Z = f(X)$  es conexo. Como la aplicación  $f$  es continua, la aplicación obtenida de  $f$  al restringir su rango al espacio  $Z$  también es continua. Es suficiente considerar el caso de una aplicación continua y sobreyectiva  $g : X \rightarrow Z$ .

Supongamos que  $Z = A \cup B$  es una separación de  $Z$  en dos conjuntos disyuntos no vacíos y abiertos en  $Z$ . Entonces  $g^{-1}(A)$  y  $g^{-1}(B)$  son conjuntos abiertos en  $X$  pues  $g$  es continua, y por ser  $g$  sobreyectiva, son no vacíos. Además  $g^{-1}(A) \cup g^{-1}(B) = g^{-1}(A \cup B) = g^{-1}(Z) = X$  y  $g^{-1}(A) \cap g^{-1}(B) = g^{-1}(A \cap B) = g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ . De esta forma constituyen una separación de  $X$ , contradiciendo así la conexidad de  $X$ . ■

**Teorema 2.1.5.**  *$X$  y  $Y$  son conexos si, y sólo si,  $X \times Y$  es conexo.*

*Demostración.*

Supongamos que  $X$  y  $Y$  son conexos y veamos que el producto  $X \times Y$  es conexo. Elijamos un “punto base”  $(x_0, y_0)$  en el producto  $X \times Y$ . Obsérvese que la “rebanada horizontal”  $X \times \{y_0\}$  es conexa, ya que es homeomorfa a  $X$  (ejemplo 1.3) y que también lo es cada “rebanada vertical” ya que estas son homeomorfas a  $Y$ . Como consecuencia, cada espacio

$$T_x = (X \times \{y_0\}) \cup (\{x\} \times Y)$$

es conexo ya que es la unión de dos espacios conexos que tienen el punto  $(x, y_0)$  en común (véase la Figura 4). Ahora, consideremos la unión  $\bigcup_{x \in X} T_x$  de todos estos espacios. Como todos tienen al punto  $(x_0, y_0)$  en común, esta unión es conexa (teorema 2.1.2). Finalmente, al coincidir esta unión con el propio espacio  $X \times Y$ , se concluye que  $X \times Y$  es conexo.

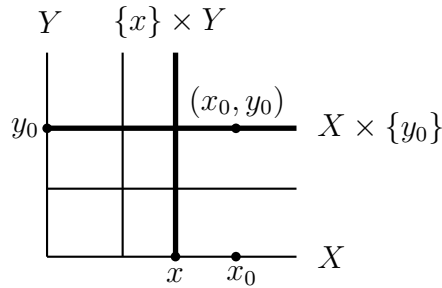


Figura 4

Recíprocamente, si  $X \times Y$  es conexo sean  $\prod_1 : X \times Y \rightarrow X$  y  $\prod_2 : X \times Y \rightarrow Y$ , la primera y segunda proyección sobre  $X$  y  $Y$  respectivamente.  $\prod_1$  y  $\prod_2$  son aplicaciones continuas y sobreyectiva. Luego por el teorema (2.1.4) concluimos que  $X$  e  $Y$  son conexos. ■

Como una consecuencia del teorema anterior, utilizando inducción matemática y el hecho que  $\prod_{i=1}^{n-1} X_i \times X_n$  es homeomorfo a  $\prod_{i=1}^n X_i$  (ejemplo 1.4) se tiene el siguiente corolario.

**Corolario 2.1.3.** *El producto de cualquier colección finita de espacios topológicos conexos, es conexo.*

En particular  $\mathbb{R}^n$  es conexo.

---

## 2.2. Construcción de espacios conexos

---

En esta sección, utilizando los teoremas de la sección precedente, presentaremos algunos ejemplos de espacios topológicos conexos que serán de utilidad en el siguiente capítulo. Además, en adelante asumiremos, por encontrarse en cualquier texto de análisis o topología, que la recta real  $\mathbb{R}$  es conexa y también lo son los intervalos y los rayos en  $\mathbb{R}$ . Para empezar veamos los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 2.2.1.** Sean

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y, |y| = 1\}$$

y

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y, y = \text{sen}(1/x)\}$$

Entonces la unión  $X = X_1 \cup X_2$  la cual se muestra en la figura 5, es un espacio topológico conexo.

El conjunto  $X_2$  es conexo pues es la imagen bajo una aplicación continua ( $g(t) = (t, \text{sen}(1/t))$ ) del subespacio conexo  $(0, \infty)$  de  $\mathbb{R}$ . Ahora por el teorema (2.1.3), el conjunto  $Z = X_2 \cup \{(0, 1), (0, -1)\}$  es conexo pues  $X_2 \subset Z \subset \overline{X_2}$ . Además  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y, y = 1\}$  también lo es, pues es la imagen del subespacio conexo  $(-\infty, 0]$  de  $\mathbb{R}$  bajo una aplicación continua ( $f(t) = (t, 1)$ ). De manera análoga  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y, y = -1\}$  es conexo.

Luego  $Z \cup U$  es la unión de conexos con un punto en común (el punto  $(0, 1)$ ), por tanto es conexo. Análogamente  $Z \cup V$  es conexo. Como  $(Z \cup U) \cap (Z \cup V) \neq \emptyset$ , entonces  $(Z \cup U) \cup (Z \cup V)$  también es conexo (teorema 2.1.2). Pero  $(Z \cup U) \cup (Z \cup V) = X_1 \cup X_2 = X$  y por tanto  $X$  es conexo.

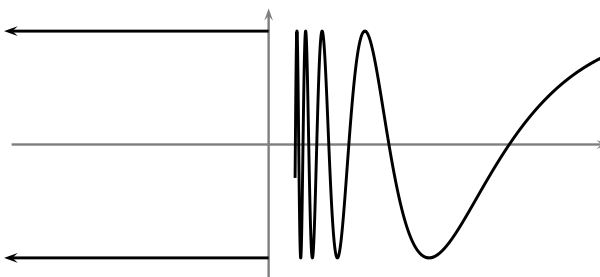


Figura 5

**Ejemplo 2.2.2.** Sean

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \text{ y } y = x \operatorname{sen}(1/x)\}$$

y

$$X_2 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}.$$

Entonces la unión  $X = X_1 \cup X_2$  (la cual se ilustra en la figura 6) es un espacio topológico conexo.

La prueba es un argumento similar al realizado en el ejemplo (2.2.1).

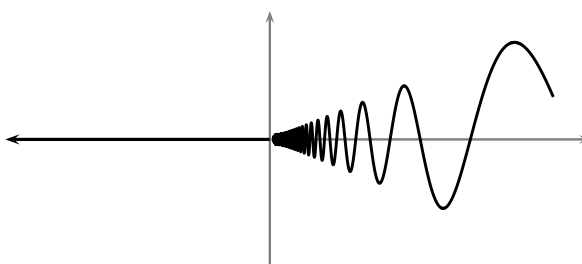


Figura 6

**Ejemplo 2.2.3.** Sea

$$X_0 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\} \cup \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$$

y dejando para cada entero positivo  $n$ .

$$Y_n = \{(1/n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq 1\}.$$

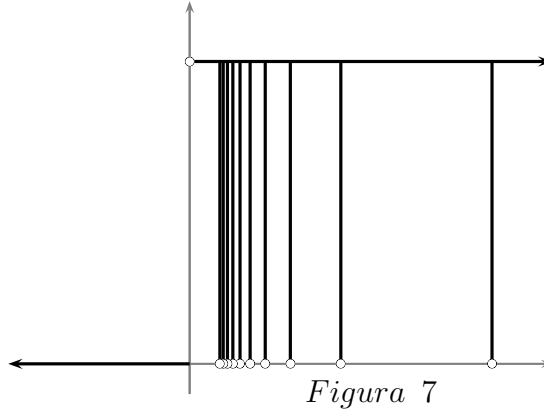
Entonces la unión  $X = X_0 \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n)$  es un espacio topológico conexo (véase la figura 7). Para cada  $n \in \mathbb{Z}^+$  el conjunto  $Y_n$  es conexo (pues es homeomorfo a  $(0, 1]$ ). El conjunto

$U = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$  es conexo pues es la imagen bajo una aplicación continua del subconjunto conexo  $(0, \infty)$  de  $\mathbb{R}$ . Análogamente  $V = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$  es conexo. Además para cada  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $U \cap Y_n \neq \emptyset$ , luego si se hace  $A_n = U \cup Y_n$  entonces  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  es una sucesión de subespacios conexos de  $\mathbb{R}^2$  con  $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ , por consiguiente por el corolario (2.1.1), su unión

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} A_n = (U \cup Y_1) \cup (U \cup Y_2) \cup \dots \cup (U \cup Y_n) \cup (U \cup Y_{n+1}) \cup \dots = U \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right)$$

es conexa. Ahora, por el teorema (2.1.3), el conjunto  $Z = U \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right) \cup \{(0, 0)\}$  es conexo, pues  $U \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right) \subseteq Z \subseteq \overline{U \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right)}$ .

Por último  $Z \cap V \neq \emptyset$ , luego  $Z \cup V$  es conexo (teorema 2.1.2). Pero  $Z \cup V = X$  y por tanto  $X = X_0 \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \right)$  es conexo.



En el siguiente ejemplo mostramos que la intersección de espacios conexos no es necesariamente conexa, aun cuando los conjuntos son anidados.

**Ejemplo 2.2.4.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea

$$X_n = [-1, 1] \times \left[ \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right] - \left\{ \left( \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right) \times \{0\} \right\}.$$

Con un argumento similar al de los ejemplos anteriores, es inmediato probar que  $X_n$  es conexo, para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Ahora observe que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = H \quad \text{es no conexo, con} \quad H = \left( [-1, \frac{-1}{2}] \times \{0\} \right) \cup \left( [\frac{1}{2}, 1] \times \{0\} \right).$$

De hecho los conjuntos  $[-1, \frac{-1}{2}] \times \{0\}$  y  $[\frac{1}{2}, 1] \times \{0\}$  forman una desconexión de  $H$ , tal y como podemos observar en la figura 8.

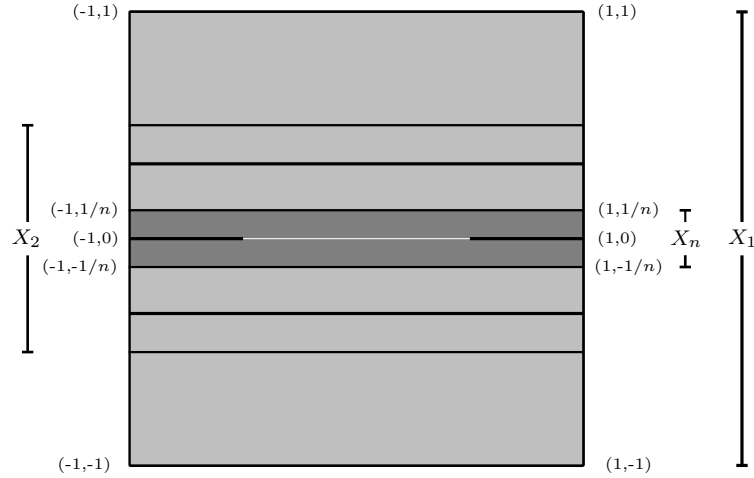


Figura 8

Ahora, tal y como lo mencionamos anteriormente, como una aplicación, probamos el teorema del valor intermedio del análisis en un contexto más general.

**Teorema 2.2.1. (Teorema del valor intermedio).** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua, donde  $X$  es un espacio conexo e  $Y$  es un conjunto totalmente ordenado con la topología del orden. Si  $a$  y  $b$  son dos puntos de  $X$  y  $r$  es un punto de  $Y$  que se encuentra entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces existe un punto  $c$  en  $X$  tal que  $f(c) = r$ .*

El teorema del valor intermedio del análisis es un caso particular de este teorema cuando  $X$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$  y el espacio  $Y$  es la propia recta real  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.*

Supongamos las hipótesis del teorema.

Los conjuntos

$$A = f(X) \cap (-\infty, r) \text{ y } B = f(X) \cap (r, \infty)$$

son disyuntos, y además son no vacíos pues  $A$  contiene a  $f(a)$  y  $B$  contiene a  $f(b)$  ya que  $f(a) < r < f(b)$ , cada uno es abierto en  $f(X)$  ya que son la intersección de un rayo abierto en  $Y$  con  $f(X)$ . Si no existiera un punto  $c$  de  $X$  tal que  $f(c) = r$  entonces  $f(X)$  sería la unión de  $A$  y  $B$ . Entonces  $A$  y  $B$  constituirían una separación de  $f(X)$  lo cual contradice el hecho de que la imagen de un conjunto conexo bajo una aplicación continua sigue siendo conexo. ■

La conexión de los intervalos en  $\mathbb{R}$  nos llevan a enunciar un criterio muy útil para demostrar que un espacio  $X$  es conexo; precisamente, nos referimos a la condición de que cualquier

par de puntos de  $X$  puedan unirse mediante un *camino* en  $X$ .

**Definición 2.2.1.** Dados dos puntos  $x$  e  $y$  del espacio  $X$ , un *camino* en  $X$  que une a  $x$  con  $y$  es una aplicación continua  $f : [a, b] \longrightarrow X$  de algún intervalo cerrado  $[a, b]$  de la recta real  $\mathbb{R}$  en  $X$ , de modo que  $f(a) = x$  y  $f(b) = y$ .

**Definición 2.2.2.** Un espacio topológico  $X$  se dice que es **conexo por caminos** si cada par de puntos de  $X$  se pueden unir mediante un camino en  $X$ .

Dado que dos intervalos cerrados y acotados cualesquiera en  $\mathbb{R}$  son homeomorfos, en adelante para facilitar un poco las cosas tomaremos caminos definidos del intervalo  $[0, 1]$  o de cualquier intervalo cerrado y acotado según sea conveniente.

A continuación probaremos algunas propiedades de los espacios conexos por caminos, que al igual que las de los espacios conexos nos serán de gran utilidad para seguir construyendo espacios de una sola “pieza”.

**Proposición 2.2.1.** *Si  $X$  es un espacio topológico conexo por caminos, entonces  $X$  es conexo.*

*Demostración.*

Supongamos que  $X = A \cup B$  es una separación de  $X$ . Sea  $f : [a, b] \longrightarrow X$  un camino en  $X$ . Como  $[a, b]$  es conexo, entonces  $f([a, b])$  es un subespacio conexo de  $X$  luego por el lema (2.1.2)  $f([a, b])$  debe estar contenido ya en  $A$ , ó en  $B$ . Por tanto no existen caminos en  $X$  que unan puntos de  $A$  con puntos de  $B$  lo cual es contrario al hecho de que  $X$  sea conexo por caminos. ■

El recíproco de la proposición anterior no es cierto; un espacio conexo no es necesariamente conexo por caminos. Más adelante en el ejemplo 2.2.8 se ilustra esta situación. Por ahora continuemos con la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.2.** *La imagen bajo una aplicación continua de un espacio conexo por caminos, es conexo por caminos.*

*Demostración.*

Sea  $k : X \longrightarrow Y$  una aplicación continua y supongamos que  $X$  es un espacio conexo por caminos. Queremos probar que el espacio imagen  $Z = k(X)$  es conexo por caminos. Al

igual que en la prueba del teorema (2.1.4), es suficiente considerar una aplicación continua y sobreyectiva  $g : X \rightarrow Z$ .

Sean  $p$  y  $q$  dos puntos de  $Z$ , entonces como  $g$  es sobreyectiva existen  $x, y \in X$  tal que  $g(x) = q$  y  $g(y) = p$ . Como  $X$  es conexo por caminos existe una aplicación continua  $f : [a, b] \rightarrow X$  tal que  $f(a) = x$  y  $f(b) = y$ , entonces la aplicación  $h =: g \circ f : [a, b] \rightarrow Z$  es una aplicación continua (pues  $f$  y  $g$  lo son) de un intervalo cerrado de la recta real  $\mathbb{R}$  en  $Z$  tal que  $h(a) = g(f(a)) = q$  y  $h(b) = g(f(b)) = p$  y por tanto  $Z = k(X)$  es conexo por caminos. ■

**Proposición 2.2.3.** *La unión de una colección de subespacios conexos por caminos de un espacio  $X$  que tienen por lo menos un punto en común, es conexa por caminos.*

*Demostración.*

Sea  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  una colección de subespacios conexos por caminos de  $X$  y sea  $p$  un punto de  $\bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ . Veamos que  $\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$  es conexo por caminos.

Sean  $x, y \in \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ , entonces existen  $\alpha_i$  y  $\alpha_j$  en  $\Delta$  tal que  $x \in A_{\alpha_i}$  y  $y \in A_{\alpha_j}$  entonces:

**Caso 1.** Si  $i = j$  la conclusión es inmediata pues cada  $A_\alpha$  con  $\alpha$  en  $\Delta$  es un subespacio conexo por caminos.

**Caso 2.** Si  $i \neq j$ , para cada  $\alpha \in \Delta$ ,  $A_\alpha$  es conexo por caminos y  $p \in A_\alpha$ , luego existen  $s : [0, 1] \rightarrow A_{\alpha_i}$ , y  $k : [1, 2] \rightarrow A_{\alpha_j}$  aplicaciones continuas con  $s(0) = x$ ,  $s(1) = p$  y  $k(1) = p$ ,  $k(2) = y$ . Como  $A_{\alpha_i}$  y  $A_{\alpha_j}$  están contenidos en la unión  $\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ , las funciones  $s$  y  $k$  se pueden extender mediante aplicaciones continuas  $f : [0, 1] \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ , con  $f(0) = x$ ,  $f(1) = p$  y  $g : [1, 2] \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ , con  $g(1) = p$ ,  $g(2) = y$ . Ahora, podemos “pegar” los caminos  $f$  y  $g$  para obtener un nuevo camino  $h : [0, 2] \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$  que une a  $x$  con  $y$ ; el camino  $h$  sera una aplicación continua por el “lema del pegamiento”. (teorema 1.4), luego  $\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$  es un espacio conexo por caminos. ■

**Corolario 2.2.1.**

**1).** *Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de subespacios conexos por caminos de un espacio  $X$ , tales que  $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces la unión  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  es conexo por caminos.*

**2).** *Sea  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$  una colección de subespacios conexos por caminos de un espacio topológico  $X$  y sea  $U$  un subespacio conexo por caminos de  $X$ . Si  $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$  para cada  $\alpha \in \Delta$ , entonces  $U \cup (\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha)$  es conexo por caminos.*

La prueba de **1)** y **2)** es el mismo argumento hecho en los corolarios (2.1.1), y (2.1.2) respectivamente.

**Note** que si  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  es una colección de subespacios conexos por caminos de un espacio  $X$ , con  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$  si  $|i - j| = 1$ , entonces la unión  $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} A_i$  es conexo por caminos. Pues si  $i \in \mathbb{Z}^-$ , podemos tomar  $A_i = B_j$  con  $j = -i$  y así por la parte **1)** del corolario anterior,  $C_1 = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^-} A_i = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^+} B_j$ , y  $C_2 = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} A_i$  son conexos por caminos. Finalmente como  $A_0$  interseca tanto a  $C_1$  como a  $C_2$ , de la parte **2)** se sigue que  $(A_0) \cup (C_1) \cup (C_2) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} A_i$  es conexo por caminos. En el siguiente capítulo usaremos este hecho para probar que la recta de Khalimsky (que definiremos más adelante), es un espacio conexo por caminos.

Ahora veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 2.2.5.** Se define la *bola unidad*  $B^n$  en  $\mathbb{R}^n$  como

$$B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq 1\}.$$

donde

$$\|\mathbf{x}\| = \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

La bola unidad es conexa por caminos; dados dos puntos cualesquiera  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  de  $B^n$ , el segmento de línea recta  $f : [0, 1] \longrightarrow B^n$  definido por

$$f(t) = (1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$$

esta totalmente contenido en  $B^n$  ya que  $\|f(t)\| \leq (1 - t)\|\mathbf{x}\| + t\|\mathbf{y}\| \leq 1$ .

**Ejemplo 2.2.6.** Se define el espacio euclídeo agujereado como el espacio  $\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$  donde  $\mathbf{0}$  es el origen en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $n > 1$  este espacio es conexo por caminos: dados  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  en  $\mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ , podemos unir a  $\mathbf{x}$  con  $\mathbf{y}$  por el segmento de línea recta que ambos determinan si este no pasa por el origen. En caso de que así ocurriera, podemos elegir otro punto  $\mathbf{z}$  que no este contenido en la recta que determinan  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  y a continuación considerar la línea recta quebrada que determinan  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{z}$  y finalmente  $\mathbf{y}$ .

**Ejemplo 2.2.7.** Se define la esfera unidad  $S^{n-1}$  en  $\mathbb{R}^n$  como el conjunto

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

si  $n > 1$ ,  $S^{n-1}$  es conexo por caminos ya que la aplicación  $g : \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\} \longrightarrow S^{n-1}$  definida por

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$$

es continua y sobreyectiva. Luego la conclusión se sigue de la proposición (2.2.2).

**Ejemplo 2.2.8.** Sea  $S$  el siguiente subconjunto del plano.

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, y, y = \text{sen}(1/x)\}$$

Como  $S$  es la imagen del conjunto conexo  $(0, 1]$  bajo una aplicación continua,  $S$  es conexo. De esta forma, su adherencia  $\bar{S}$  en  $\mathbb{R}^2$  también es conexo. El conjunto  $\bar{S}$  es un ejemplo clásico en topología que se conoce como **curva seno del topólogo**. Está ilustrada en la figura 9 y es simplemente la unión del conjunto inicial  $S$  con el intervalo vertical  $\{0\} \times [-1, 1]$ . Vamos a demostrar que  $\bar{S}$  no es conexo por caminos. Supongamos que existiera un camino  $f : [a, b] \rightarrow \bar{S}$  empezando en el origen y terminando en un punto cualquiera de  $S$ . El conjunto de los números  $t$  para los cuales  $f(t) \in \{0\} \times [-1, 1]$  es cerrado y, por tanto, tiene un máximo que denotaremos por  $b$ . Entonces  $f : [b, c] \rightarrow \bar{S}$  es un camino que aplica  $b$  en el intervalo vertical  $\{0\} \times [-1, 1]$  mientras que el resto de puntos de  $[b, c]$  se aplican en puntos de  $S$ .

Sustituyamos  $[b, c]$  por  $[0, 1]$  para simplificar la prueba; sea  $f(t) = (x(t), y(t))$ . Entonces  $x(0) = 0$ , mientras que  $x(t) > 0$  y  $y(t) = \text{sen}(1/x(t))$  para  $t > 0$ . Vamos a demostrar que existe una sucesión de puntos  $t_n \rightarrow 0$  tales que  $y(t_n) = (-1)^n$ . Entonces tendremos que la sucesión  $y(t_n)$  no es convergente, contradiciendo la continuidad<sup>2</sup> de  $f$ . Para encontrar los números  $t_n$  procedemos del siguiente modo: dado  $n$ , elegimos  $u$  con  $0 < u < x(1/n)$  tal que  $\text{sen}(1/u) = (-1)^n$ . Usando entonces el teorema del valor intermedio podemos encontrar  $t_n$  con  $0 < t_n < 1/n$  tal que  $x(t_n) = u$ . Así, existe una sucesión  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $[0, 1]$  que converge a cero pero la sucesión de las imágenes  $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  no converge. Por tanto  $f$  no puede ser continua.

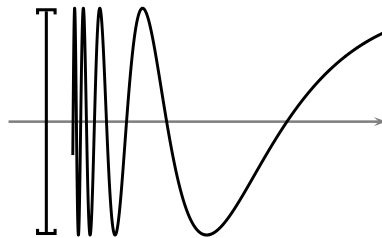


Figura 9

<sup>2</sup>Véase criterio de sucesiones para continuidad en [1].

---

## 2.3. Componentes conexas

---

La conexión, tal y como hemos visto, es una propiedad de gran interés en un espacio topológico. Si bien es cierto que, no todo espacio  $X$  es conexo, existe una manera natural de dividirlo en varios “trozos” que son conexos (o conexos por caminos). Vamos a considerar este proceso a continuación.

**Definición 2.3.1.** Dado un espacio topológico  $X$ , se define en  $X$  la siguiente relación que notaremos “ $\sim$ ”:  $x \sim y$  si existe un subespacio conexo de  $X$  que contiene a ambos puntos.

**Afirmación 2.3.1.** *La relación “ $\sim$ ” definida anteriormente en (2.3.1) es de equivalencia.*

*Demostración.*

Las propiedades Reflexiva y Simétrica son inmediatas de la definición de “ $\sim$ ”. La propiedad transitiva se sigue del siguiente hecho: si  $A$  es un subespacio conexo de  $X$  que contiene a  $x$  y a  $y$ , y  $B$  es un subespacio conexo de  $X$  que contiene a  $y$  y a  $z$ , entonces  $A \cup B$  es un subespacio de  $X$  que contiene a  $x$  y a  $z$ , además  $A$  y  $B$  tienen el punto  $y$  en común y por el teorema (2.1.2),  $A \cup B$  es conexo. ■

**Definición 2.3.2.** Las clases de equivalencia según la relación “ $\sim$ ” se denominan **Componentes** o **Componentes Conexas** de  $X$ .

Las componentes de  $X$  también se pueden describir como sigue:

**Teorema 2.3.1.** *Las componentes de  $X$  son subespacios disyuntos y conexos de  $X$  cuya unión es  $X$  de forma que cada subespacio conexo de  $X$  no trivial interseca sólo a una de ellas.*

*Demostración.*

Por tratarse de una relación de equivalencia y ser cada componente una clase, es claro que son disyuntas y que su unión es el espacio  $X$ . Además, cada subespacio conexo no trivial  $A$  de  $X$  interseca sólo a una de ellas. Pues si  $A$  interseca a las componentes  $C_1$  y  $C_2$  de  $X$  con  $C_1 \neq C_2$ , se tiene que si  $x_1 \in A \cap C_1$  y  $x_2 \in A \cap C_2$ , entonces  $x_1 \in A$  y  $x_2 \in A$ . Luego por definición  $x_1 \sim x_2$  lo cual contradice el hecho de que  $C_1$  y  $C_2$  son disyuntas.

Para demostrar que cada componente  $C$  de  $X$  es conexa, elijamos un punto  $x_0$  de  $C$ . Para cada  $x \in C$ , se tiene que  $x \sim x_0$  luego existe un subespacio conexo  $A_x$  de  $X$  que contiene a ambos puntos. Tal y como acabamos de probar,  $A_x \subset C$  y así

$$C = \bigcup_{x \in C} A_x.$$

Como los subespacios  $A_x$  son conexos y tienen el punto  $x_0$  en común, por el teorema (2.1.2) se sigue que  $\bigcup_{x \in C} A_x$  es conexo, es decir  $C$  es conexo. ■

**Ejemplo 2.3.1.**  $X = (2, 3) \cup [5, 6)$  tiene dos componentes conexas:  $C_1 = (2, 3)$  y  $C_2 = [5, 6)$  por que cada par de puntos  $x, y \in C_1$  o  $x, y \in C_2$  están dentro del conexo  $C_1$  o  $C_2$ , y si  $x \in C_1, y \in C_2$  no existe  $A \subset X$  conexo, conteniendo a ambos.

**Notación 1.** A la componente conexas  $C$  de  $X$  que contiene a  $x \in X$ , la notaremos  $C(x)$

**Proposición 2.3.1.**

$$C(x) = \bigcup \{A \subseteq X \mid A \text{ es conexo, } x \in A\}$$

Es decir: la componente conexas de  $X$  a la que pertenece  $x \in X$  es el mayor (en el sentido de la inclusión) subconjunto conexo  $A$  de  $X$  que contiene a  $x$ .

*Demostración.*

Es claro que  $C(x) \subseteq \bigcup \{A \subseteq X \mid A \text{ es conexo, } x \in A\}$  (pues  $C(x)$  es un subconjunto conexo de  $X$  que contiene a  $x$ ).

Ahora si  $y \in \bigcup \{A \subseteq X \mid A \text{ es conexo, } x \in A\}$ , entonces  $y \in A_0$  para algún  $A_0 \in \{A \subseteq X \mid A \text{ es conexo, } x \in A\}$ . Luego  $A_0$  es un subconjunto conexo de  $X$  que contiene a  $x$  e  $y$ , y por tanto  $y \sim x$ . Luego  $y \in C(x)$ . Así,

$$\bigcup \{A \subseteq X \mid A \text{ es conexo, } x \in A\} \subseteq C(x).$$

■

Si uno se inventa muchos ejemplos, parece que las componentes conexas son siempre abiertas, pero esto no es cierto.

**Ejemplo 2.3.2.** En  $X = \mathbb{Q}$  (con la topología usual) las componentes conexas son los conjuntos unipuntuales (los cuales son cerrados). La razón es simplemente que los únicos subconjuntos conexos no vacíos de  $\mathbb{Q}$  son los conjuntos unipuntuales. Tal y como se probó en el ejemplo (2.1.3).

**Proposición 2.3.2.** Las componentes conexas de un espacio topológico  $X$  son conjuntos cerrados.

*Demostración.*

Si  $C$  es una componente conexas de  $X$ , por el teorema (2.3.1) se sigue que  $C$  es conexas y, por el teorema (2.1.3),  $\overline{C}$  también es conexas. Pero esto implica que  $\overline{C} \subseteq C$  (ya que  $x \sim y$  para todo  $x, y \in \overline{C}$ ) y en consecuencia  $\overline{C} = C$ . ■

Un espacio topológico conexo  $X$  también se puede caracterizarse en términos de sus componentes como sigue:

**Proposición 2.3.3.** *Un espacio topológico  $X$  es conexo, si y sólo si, tiene una sola componente.*

*Demostración.*

Como  $X$  es conexo, por la proposición (2.3.1)  $X \subseteq C(x)$  para cada  $x \in X$ . Luego  $X = C(x)$  para cada  $x \in X$ .

Recíprocamente, si  $X$  tiene una sola componente, entonces por el teorema (2.3.1)  $X = C(x)$  es conexo, para cada  $x \in X$ . ■

# CAPÍTULO 3

## ESPACIOS POR PUNTOS DE CORTE

La noción de espacio por puntos de corte se introduce como un espacio topológico conexo (no necesariamente  $T_1$ ) con la propiedad que al “quitar” cualquiera de sus puntos se transforma en un espacio topológico desconexo. En este capítulo daremos una definición formal de espacio por puntos de corte y mostraremos algunos ejemplos, entre ellos destacamos un espacio al cual, por su importancia le dedicaremos una sección completa; “*La recta de Khalimsky*”.

---

### 3.1. Definición y ejemplos

---

En esta sección, definimos un espacio por puntos de corte y mostramos de manera formal algunos ejemplos.

**Definición 3.1.1.** Sean  $X$  un espacio topológico conexo no vacío y  $x$  un punto de  $X$ . Diremos que  $x$  es punto de corte de  $X$ , si  $X - \{x\}$  es un subconjunto desconexo de  $X$ .

**Ejemplo 3.1.1.** En  $\mathbb{R}$  con la topología usual, cada punto es un punto de corte; si  $x \in \mathbb{R}$  los rayos  $(-\infty, x)$  y  $(x, \infty)$  forman una separación de  $\mathbb{R} - \{x\}$ .

**Ejemplo 3.1.2.** En  $\mathbb{R}$  con la topología de colas ningún punto es punto de corte.

**Definición 3.1.2.** Un espacio topológico conexo no vacío  $X$  es un espacio por puntos de corte, si cada punto  $x$  en  $X$  es un punto de corte de  $X$ .

Ahora veamos algunos ejemplos

**Ejemplo 3.1.3.**  $\mathbb{R}$  con la topología usual es un espacio por puntos de corte y también lo son los intervalos y rayos abiertos de  $\mathbb{R}$  mientras que, con la topología de colas ningún subespacio es espacio por puntos de corte.

**Ejemplo 3.1.4.** El espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  no es un espacio por puntos de corte si  $n > 1$ . En el ejemplo (2.2.6) del capítulo anterior vimos que  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  es conexo por caminos.

Los ejemplos (3.1.3) y (3.1.4) muestran que el producto de espacios por puntos de corte, no es necesariamente un espacio por puntos de corte.

**Ejemplo 3.1.5.** El espacio del ejemplo (2.2.2)  $X = X_1 \cup X_2$  con

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = x \operatorname{sen}(1/x)\}$$

y

$$X_2 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$$

es un espacio por puntos de corte.

Ya vimos que  $X$  es conexo. Veamos que, para cada  $z$  en  $X$ ,  $X - \{z\}$  es no conexo.

**1).** Si  $z = (t, t \operatorname{sen}(1/t))$ . Se definen

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < t\} \text{ y } V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > t\}.$$

$U$  y  $V$  son conjuntos abiertos disyuntos no vacíos de  $\mathbb{R}^2$  y por tanto  $U \cap (X - \{z\})$  y  $V \cap (X - \{z\})$  son conjuntos abiertos disyuntos de  $X - \{z\}$ . Además es claro que son no vacíos y que

$$(U \cap (X - \{z\})) \cup (V \cap (X - \{z\})) = (U \cup V) \cap (X - \{z\}) = (\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \mid x = t\}) \cap (X - \{z\}).$$

Dado que  $X - \{z\} \subset \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = t\}$  se sigue que

$$(U \cap (X - \{z\})) \cup (V \cap (X - \{z\})) = X - \{z\}.$$

Así,  $U \cap (X - \{z\})$  y  $V \cap (X - \{z\})$  forman una desconexión de  $X - \{z\}$ .

**2).** Si  $z = (x', 0)$  con  $x' \leq 0$ . Se definen

$$U = (-\infty, x') \times \mathbb{R} \text{ y } V = (x', \infty) \times \mathbb{R}$$

$U$  y  $V$  son conjuntos abiertos, disyuntos no vacíos de  $\mathbb{R}^2$ , y es claro que

$$(U \cap (X - \{z\})) \cup (V \cap (X - \{z\})) = X - \{z\}.$$

De esta forma  $U \cap (X - \{z\})$  y  $V \cap (X - \{z\})$  constituyen una separación de  $X - \{z\}$ .

**Ejemplo 3.1.6.** El espacio del ejemplo (2.2.1)  $X = X_1 \cup X_2$  con

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, \ y, \ |y| = 1\}$$

y

$$X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \ y, \ y = \text{sen}(1/x)\}$$

es un espacio por puntos de corte.

En el capítulo anterior vimos que  $X$  es conexo. Veamos que, para cada  $z$  en  $X$ ,  $X - \{z\}$  es no conexo.

**1).** Si  $z = (t, \text{sen}(1/t))$ . Exactamente el mismo argumento realizado en el caso **1)** del ejemplo anterior, prueba que  $X - \{z\}$  es no conexo.

**2).** Si  $z = (x', 1)$  con  $x' \leq 0$ . Se definen

$$U = (-\infty, x') \times (0, \infty) \quad \text{y} \quad V = ((x', \infty) \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times (-\infty, 0))$$

$U$  y  $V$  son conjuntos abiertos, disyuntos no vacíos de  $\mathbb{R}^2$  (ver figura 10), y es inmediato verificar que

$$(U \cap (X - \{z\})) \cup (V \cap (X - \{z\})) = X - \{z\}.$$

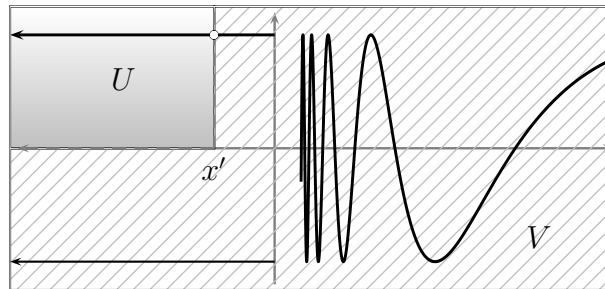


Figura 10

De esta forma  $U \cap (X - \{z\})$  y  $V \cap (X - \{z\})$  constituyen una separación de  $X - \{z\}$ .

**3).** Si  $z = (x', -1)$  con  $x' \leq 0$ . Se definen

$$U = (-\infty, x') \times (-\infty, 0) \quad \text{y} \quad V = ((x', \infty) \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times (0, \infty)).$$

De manera análoga a **2)**  $U \cap (X - \{z\})$  y  $V \cap (X - \{z\})$  forman una separación de  $X - \{z\}$ .

**Ejemplo 3.1.7.** Sea  $S$  el siguiente subconjunto del plano.

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \text{sen}(1/x)\}.$$

Entonces  $\bar{S} = S \cup (\{0\} \times [-1, 1])$  no es un espacio por puntos de corte, es más ningún punto de  $\{0\} \times [-1, 1]$  es un punto de corte; si  $(x, y) \in \{0\} \times [-1, 1]$  entonces  $S \subseteq S - \{(x, y)\} \subseteq \bar{S}$ , así  $S - \{(x, y)\}$  es conexo.  $\bar{S}$  es una pequeña variación de la curva seno del topólogo (ejemplo (2.2.8)). Por otra parte  $W = S \cup \mathbb{R}^+$  tampoco es un espacio por puntos de corte, más aun, los únicos puntos de corte de  $W$  son los puntos que pertenecen a  $S \cap \mathbb{R}^+$ .

La parte **1)** del ejemplo (3.1.6) y el ejemplo (3.1.7) muestran que ni la adherencia, ni la unión de espacio por puntos de corte, es un espacio por puntos de corte.

**Ejemplo 3.1.8.** Sea

$$X_0 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\} \cup \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$$

y dejando para cada entero positivo  $n$ .

$$Y_n = \{(1/n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq 1\}$$

Entonces la unión  $X = X_0 \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n)$  es un espacio por puntos de corte. En el ejemplo (2.2.3) vimos que  $X$  es conexo. Veamos que todo punto  $z$  en  $X$  es un punto de corte.

**1).** Si  $z = (x', y') \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ . Definimos

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < x'\} \text{ y } V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > x'\}.$$

Exactamente el mismo argumento realizado en el caso **1)** del ejemplo (3.1.5), muestra que  $X - \{z\}$  es no conexo.

**2).** Si  $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ . Existe una única  $n_0 \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $z \in Y_{n_0}$  (pues  $Y_i \cap Y_j = \emptyset$  para todo  $i, j \in \mathbb{Z}^+$ ,  $i \neq j$ ). Luego,  $z = (1/n_0, y')$  con  $0 < y' \leq 1$ .

Definimos  $F = \{(1/n_0, y) \in Y_{n_0} \mid y < y'\}$ .

Afirmamos que  $F$  es un subconjunto propio no vacío de  $X - \{z\}$  que es a la vez abierto y cerrado en  $X - \{z\}$ .

**2.1).** Para ver que  $F$  es abierto, basta tomar el subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  (el cual se ilustra en la figura 11)

$$U = ((2n_0 + 1)/2n_0(n_0 + 1), (2n_0 - 1)/2n_0(n_0 - 1)) \times (0, y'), \text{ si } n_0 \neq 1.$$

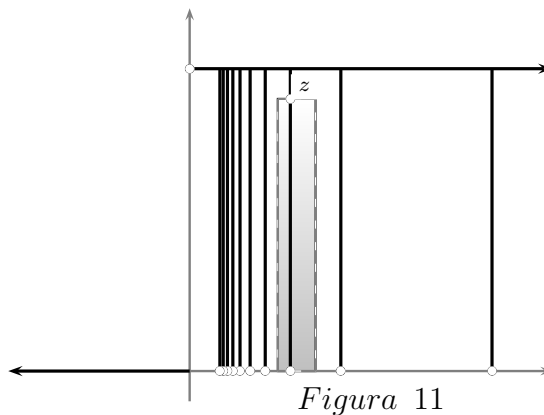


Figura 11

Y si  $n_0 = 1$  tomamos

$$U = (1/(n_0 + 1), \infty) \times (0, y').$$

De cualquier forma, podemos escribir a  $F$  como la intersección entre  $U$  y  $X - \{z\}$ . Así,  $F$  es abierto en  $X - \{z\}$ .

2.2). Para ver que  $F$  es cerrado, probaremos que su complemento  $F^c = (X - \{z\}) - F$  es abierto. Para esto, basta tomar

$$U = ((-\infty, 1/n_0) \times \mathbb{R}) \cup ((1/n_0, \infty) \times \mathbb{R}) \text{ si } y' = 1,$$

y escribir a  $F^c$  como la intersección entre  $U$  y  $X - \{z\}$ .

Y si  $y' < 1$ , tomamos  $V = U \cup (\mathbb{R} \times (y', \infty))$  y escribimos a  $F^c$  como la intersección entre  $V$  y  $X - \{z\}$ .

De cualquier forma podemos escribir a  $F^c$  como la intersección entre un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $X - \{z\}$ , por tanto  $F^c$  es abierto en  $X - \{z\}$ , o lo que es igual;  $F$  es cerrado en  $X - \{z\}$ .

Por consiguiente, de 2.1), 2.2) y el teorema (2.1.1), concluimos que  $X - \{z\}$  es no conexo.

Generalmente, siempre que estudiamos alguna característica de un espacio topológico, lo primero que nos preguntamos es si dicha propiedad es, o no, un invariante topológico. Pues bien, ser espacio por puntos de corte, es una propiedad que se preserva bajo homeomorfismos tal y como veremos en la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.1.** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Si  $X$  es un espacio por puntos de corte y  $Y$  es homeomorfo a  $X$ , entonces  $Y$  es un espacio por puntos de corte.*

*Demostración.*

Sea  $f : X \longrightarrow Y$  un homeomorfismo, y supongamos que  $X$  es un espacio por puntos de corte. Es claro que  $Y$  es conexo, pues  $X$  lo es, y  $f$  es un homeomorfismo. Veamos que para

cada  $y \in Y$ ,  $Y - \{y\}$  es un subconjunto desconexo de  $Y$ . Sea  $y$  un punto arbitrario en  $Y$ . Por ser  $f$  biyectiva, existe un único punto  $x_0 \in X$  tal que  $f(x_0) = y$ . Además por ser  $X$  un espacio por puntos de corte,  $X - \{x_0\}$  es no conexo. Sea  $X - \{x_0\} = A \cup B$  donde  $A \neq \emptyset$ ,  $B \neq \emptyset$ ,  $\overline{A} \cap B = \overline{B} \cap A = \emptyset$ . Luego se tiene que  $f(X - \{x_0\}) = f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ . Dado que  $f$  es biyectiva se sigue que  $f(X - \{x_0\}) = f(X) - \{f(x_0)\} = Y - \{y\}$ . Luego  $Y - \{y\} = f(A) \cup f(B)$ .

Es claro que  $f(A) \neq \emptyset$  y  $f(B) \neq \emptyset$ , pues  $A \neq \emptyset$  y  $B \neq \emptyset$ . Además por ser  $f$  homeomorfismo se tiene que  $\overline{f(A)} \cap f(B) = f(\overline{A}) \cap f(B) = f(\overline{A} \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$  y  $f(A) \cap \overline{f(B)} = f(A) \cap f(\overline{B}) = f(A \cap \overline{B}) = f(\emptyset) = \emptyset$ .

Así,  $f(A)$  y  $f(B)$  constituyen una separación de  $Y - \{y\}$ , y por tanto  $Y - \{y\}$  es no conexo.

■

---

## 3.2. La recta de Khalimsky

---

En esta sección mostraremos otro ejemplo de espacios por puntos de corte “la recta de *Khalimsky*”, y analizaremos algunas características de dicho espacio. En el siguiente capítulo mostramos una caracterización bastante interesante de este espacio. Para comenzar, veamos la siguiente afirmación.

**Afirmación 3.2.1.** *Sea  $\mathbb{Z}$  el conjunto de los números enteros y sea*

$$\beta = \{\{2i - 1, 2i, 2i + 1\} \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{2i + 1\} \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

*entonces la colección  $\beta$  (la cual se ilustra en la figura 12) es base para alguna topología sobre  $\mathbb{Z}$ .*

*Demostración.*

La primera condición para una base es inmediata de la definición de  $\beta$ . Pues es claro que  $\bigcup \beta = \mathbb{Z}$ .

La segunda condición se sigue del siguiente hecho; si  $B_1$  y  $B_2$  son elementos de la colección  $\beta$  con  $B_1 \neq B_2$ , es claro que  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  ó  $B_1 \cap B_2 = \{2i_0 + 1\}$  para algún  $i_0 \in \mathbb{Z}$ .

Así, si  $B_1$  y  $B_2$  son elementos de la colección  $\beta$  y  $x \in B_1 \cap B_2$ , se tiene que  $x = 2i_0 + 1$  para algún  $i_0 \in \mathbb{Z}$ . Como los conjuntos  $\{2i + 1\}$  pertenecen a la colección  $\beta$  para cada  $i \in \mathbb{Z}$ , entonces se tiene que existe un elemento  $B_3 = \{2i_0 + 1\}$  que pertenece a  $\beta$  tal que  $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

■

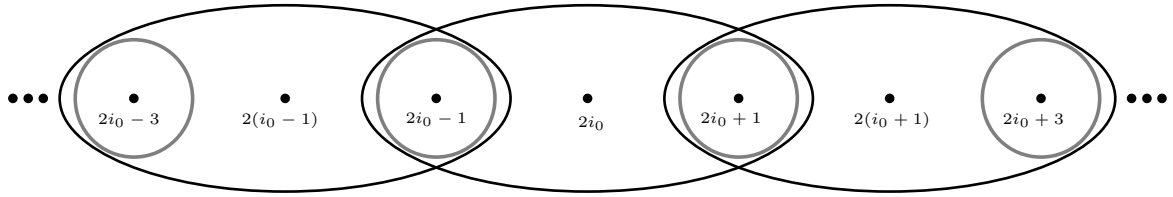


Figura 12

**Definición 3.2.1.** El conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z}$ , con la topología generada por la base  $\beta$  anterior se denomina la **recta de Khalimsky** y la notaremos  $\mathbb{Z}_k$ .

Note que cada punto en  $\mathbb{Z}$  con esta topología tiene una vecindad abierta más pequeña (o vecindad mínima) y la base  $\beta$  es la colección de todas estas vecindades.

**Afirmación 3.2.2.** La recta de Khalimsky ( $\mathbb{Z}_k$ ) es un espacio conexo por caminos.

*Demostración.*

Definimos para cada  $i \in \mathbb{Z}$   $A_i = \{2i - 1, 2i, 2i + 1\}$ . Veamos que cada  $A_i$  es conexo por caminos.

Es claro que la aplicación  $f : [0, 1] \rightarrow A_i$  (la cual se ilustra en la figura 13) definida por:

$$f(t) =: \begin{cases} 2i - 1 & \text{si } t \in [0, 1/2). \\ 2i & \text{si } t = 1/2. \\ 2i + 1 & \text{si } t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

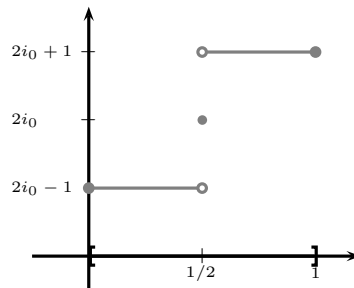


Figura 13

es un camino en  $A_i$  uniendo a  $2i - 1$  y  $2i + 1$ .

Para unir a  $2i - 1$  y  $2i$ , podemos redefinir  $f$  mediante

$$f(t) =: \begin{cases} 2i - 1 & \text{si } t \in [0, 1/2). \\ 2i & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

y ver que nuevamente  $f$  es un camino en  $A_i$  uniendo a  $2i - 1$  y  $2i$ .

Por ultimo, para unir a  $2i$  y  $2i + 1$ , redefinimos  $f$  así:

$$f(t) =: \begin{cases} 2i & \text{si } t \in [0, 1/2]. \\ 2i + 1 & \text{si } t \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Luego cada conjunto  $A_i$ , con  $i \in \mathbb{Z}$ , es conexo por caminos, y además  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$  si  $|i - j| = 1$ . Así, por el corolario (2.2.1(1)), la unión  $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} A_i$  es conexo por caminos. Finalmente al coincidir esta unión con el propio espacio  $\mathbb{Z}_k$ , podemos concluir que  $\mathbb{Z}_k$  es conexo por caminos. ■

**Afirmación 3.2.3.** *La recta de Khalimsky ( $\mathbb{Z}_k$ ) es un espacio por puntos de corte.*

*Demostración.*

En la afirmación anterior probamos que  $\mathbb{Z}_k$  es un espacio topológico conexo por caminos y por tanto es conexo.

Veamos que para cada  $x \in \mathbb{Z}_k$ ,  $\mathbb{Z}_k - \{x\}$  es no conexo. Consideremos los siguientes casos:

1). Si  $x = 2i_0 + 1$  para algún  $i_0 \in \mathbb{Z}$ . Definimos

$$W = \{2(i_0 + 1), 2(i_0 + 1) + 1\} \text{ y } F = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}, i \geq i_0 + 2} \{2i - 1, 2i, 2i + 1\}$$

Es claro que  $W$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{Z}_k - \{x\}$  pues  $W = (\{2i_0 + 1, 2(i_0 + 1), 2(i_0 + 1) + 1\}) \cap \mathbb{Z}_k - \{x\}$ , igualmente  $F$  es abierto en  $\mathbb{Z}_k - \{x\}$  pues  $F$  es unión de abiertos en  $\mathbb{Z}_k - \{x\}$ . Luego  $U = W \cup F$  es abierto en  $\mathbb{Z}_k - \{x\}$ .

De la misma forma

$$P = \{2i_0 - 1, 2i_0\} \text{ y } Q = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}, i \leq i_0 - 1} \{2i - 1, 2i, 2i + 1\}$$

son abiertos en  $\mathbb{Z}_k - \{x\}$ , y por tanto  $V = P \cup Q$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{Z}_k - \{x\}$ .

Ahora, es claro que  $U$  y  $V$  son disyuntos y que

$$U \cup V = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \geq 2i_0 + 2\} \cup \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq 2i_0\} = \mathbb{Z}_k - \{x\}.$$

Por tanto  $U$  y  $V$  forma una separación de  $\mathbb{Z}_k - \{x\}$ .

2). Si  $x = 2i_0$  para algún  $i_0 \in \mathbb{Z}$ . Definimos

$$U = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}, i \geq i_0+1} \{2i-1, 2i, 2i+1\}$$

y

$$V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}, i \leq i_0-1} \{2i-1, 2i, 2i+1\}.$$

Nuevamente  $U$  y  $V$  forma una separación de  $\mathbb{Z}_k - \{x\}$ . ■

Note que la recta de Khalimsky no es  $T_1$ , pues los conjuntos unipuntuales formados por los puntos impares son abiertos y  $\mathbb{Z}_k$  es conexo. Así, un espacio por puntos de corte no es necesariamente  $T_1$ .

**Afirmación 3.2.4.** *Si  $A$  es un subconjunto propio no vacío y conexo de la recta de Khalimsky  $\mathbb{Z}_k$ , entonces  $A$  está acotado superior o inferiormente.*

*Demostración.*

Dado que  $A$  es un subconjunto propio de  $\mathbb{Z}_k$ , existe  $z \in \mathbb{Z}_k$  tal que  $z \notin A$ . Entonces  $A \subseteq \mathbb{Z}_k - \{z\}$  y puesto que  $\mathbb{Z}_k$  es un espacio por puntos de corte, existen los subconjuntos  $U$  y  $V$  abiertos disyuntos de  $\mathbb{Z}_k - \{z\}$  tal que  $\mathbb{Z}_k - \{z\} = U \cup V$ . Ahora, por ser  $\mathbb{Z}$  un conjunto totalmente ordenado y  $A$ ,  $U$ , y  $V$  ser subconjuntos de  $\mathbb{Z}$ , es claro que  $A$ ,  $U$ , y  $V$  lo son. Además  $z$  es cota superior de  $U$  e inferior de  $V$  o viceversa, pues si no, como  $\mathbb{Z}_k - \{z\} = U \cup V$  entonces se tendría que  $U \cap V \neq \emptyset$ .

Por otra parte, como  $A$  es conexo y  $A \subseteq \mathbb{Z}_k - \{z\} = U \cup V$ , se sigue que  $A \subseteq U$  ó  $A \subseteq V$ . En cualquiera de los dos casos se tiene que  $z$  es una cota superior o inferior de  $A$ . ■

**Afirmación 3.2.5.** *Si  $A$  es un subconjunto propio no vacío de  $\mathbb{Z}_k$  con más de un punto, entonces  $A$  no es un espacio por puntos de corte.*

*Demostración.*

Sea  $A$  un subconjunto propio no vacío y conexo de  $\mathbb{Z}_k$ , con  $|A| > 1$ . Entonces por la afirmación (3.2.4),  $A$  está acotado superior o inferiormente.

1). Si  $A$  está acotado superiormente, existe  $z_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $z_0 = \sup(A)$  y  $z_0 \in A$ , pues de no ser así,  $z_0 - 1$  sería cota superior de  $A$ , lo cual contradice que  $z_0 = \sup(A)$ . Por otra parte,  $z_0 - 1 \in A$  pues si no, como  $\mathbb{Z}_k - \{z_0\} = U \cup V$  con  $U$  y  $V$  abiertos en  $\mathbb{Z}_k - \{z_0\}$  y  $U \cap V = \emptyset$ , donde

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x < z_0 - 1\} \subset U \quad \text{y} \quad \{x \in \mathbb{Z} \mid x > z_0 - 1\} \subset V$$

entonces  $A \cap U \neq \emptyset$  y  $A \cap V \neq \emptyset$ , además  $(A \cap U) \cap (A \cap V) = A \cap (U \cap V) = \emptyset$ , y  $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ , Luego  $A$  no sería conexo. Así,  $z_0 - 1 \in A$ .

Ahora, afirmamos que  $A - \{z_0\}$  es conexo.

Supongamos que  $A - \{z_0\} = U \cup V$  donde  $U$  y  $V$  son subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{Z}_k$  tales que  $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ .

Puesto que  $z_0 - 1 \in A$  y  $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$ , se debe tener que  $z_0 - 1 \in U$  ó  $z_0 - 1 \in V$ . Asumamos sin pérdida de generalidad que  $z_0 - 1 \in V$ . Ahora por la definición de  $\mathbb{Z}_k$  se tiene que  $\{z_0\} \in \beta$  ó  $\{z_0 - 1, z_0, z_0 + 1\} \in \beta$ .

**1.1).** Si  $\{z_0\} \in \beta$ , entonces

$$\overline{V \cup \{z_0\}} = \overline{V} \cup \overline{\{z_0\}} = \overline{V} \cup \{z_0 - 1, z_0, z_0 + 1\}.$$

Como  $z_0 = \sup(A)$ ,  $z_0 + 1 \notin A$  y como  $z_0 \in V$  y  $\overline{V} \cap U = \emptyset$  tenemos que  $U \cap (\overline{V \cup \{z_0\}}) = \emptyset$ . Por otro lado  $\overline{U} \cap (V \cup \{z_0\}) = \emptyset$  (pues  $z_0 - 1 \in V$ , y  $z_0 - 1 < z_0$ ), además  $U \cup (V \cup \{z_0\}) = A$ . Por tanto  $U$  y  $V \cup \{z_0\}$  constituyen una separación de  $A$ , contradiciendo así el hecho de que  $A$  es conexo.

**1.2).** Si  $\{z_0 - 1, z_0, z_0 + 1\} \in \beta$ , entonces  $\overline{V \cup \{z_0\}} = \overline{V} \cup \overline{\{z_0\}} = \overline{V} \cup \{z_0\}$  luego  $U \cap (\overline{V \cup \{z_0\}}) = \emptyset$ , y como  $z_0 - 1 \in V$ ,  $z_0 \notin \overline{U}$  pues si  $z_0 \in \overline{U}$  entonces  $\{z_0 - 1, z_0, z_0 + 1\} \cap U \neq \emptyset$  luego  $z_0 - 1 \in U$  y por consiguiente  $\overline{U} \cap V \neq \emptyset$ . Así,  $\overline{U} \cap (V \cup \{z_0\}) = \emptyset$  y  $U \cup (V \cup \{z_0\}) = A$ , lo cual es nuevamente una contradicción.

**2).** Un resultado análogo al anterior muestra que si  $A$  está acotado inferiormente, entonces  $z' = \inf(A)$  no es un punto de corte de  $A$ . ■

# CAPÍTULO 4

## PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS POR PUNTOS DE CORTE Y CARACTERIZACIÓN DE LA RECTA DE KHALIMSKY

En este capítulo analizaremos algunas características de los espacios por puntos de corte entre las cuales destacamos que la colección de puntos cerrados en dichos espacios es infinita, y la no compacidad de los mismos. También, definiremos una noción de irreducibilidad, y veremos que un espacio por puntos de corte irreducible es necesariamente homeomorfo a la recta de Khalimsky. Esto último se mostrará como una caracterización de la recta de Khalimsky.

---

### 4.1. Propiedades de los espacios por puntos de corte

---

En esta sección veremos algunos resultados bastante interesantes que nos serán de gran utilidad para probar que un espacio topológico finito no puede ser un espacio por puntos de corte, y la no compacidad de estos espacios. Para comenzar introducimos la siguiente notación, la cual es adoptada de [7].

**Notación 2.** Sea  $Y$  un espacio topológico. Escribimos  $Y = A \mid B$  si  $A$  y  $B$  son dos subconjuntos no vacíos de  $Y$  tales que  $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$  y  $Y = A \cup B$ .

Además diremos que un punto  $y \in Y$  es abierto (resp. cerrado), si  $\{y\}$  es un subconjunto

*abierto (resp. cerrado) de  $Y$ .*

Existe muchos espacio topológicos en los cuales los puntos no son ni abiertos ni cerrados, un ejemplo sencillo donde ocurre esta situación lo proporciona la recta real  $\mathbb{R}$  con la topología de colas. En los espacios por puntos de corte no ocurre esta situación, pues en estos espacios los puntos son o abiertos ó cerrados tal y como lo muestra el siguiente teorema.

**Teorema 4.1.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico conexo, y sea  $x$  un punto de corte de  $X$  tales que  $X - \{x\} = A \mid B$ . Entonces  $x$  es abierto ó cerrado en  $X$ . Si  $x$  es abierto, entonces  $A$  y  $B$  son cerrados; si  $x$  es cerrado, entonces  $A$  y  $B$  son abiertos.*

*Demostración.*

Como  $A$  es abierto y cerrado en  $X - \{x\}$ , existe un subconjunto  $V$  abierto en  $X$  tal que  $A = V \cap (X - \{x\}) = V - \{x\}$  y también existe un subconjunto cerrado  $F$  en  $X$  tal que  $A = F \cap (X - \{x\}) = F - \{x\}$ , entonces  $V - \{x\} = F - \{x\}$ . Si suponemos que  $V = F$ , entonces se contradice el hecho de que  $X$  es conexo. Luego se debe tener que  $V - \{x\} = F$  ó  $F - \{x\} = V$ , o lo que es igual  $\{x\} = V - F$  ó  $\{x\} = F - V$ . Si  $\{x\} = V - F$  entonces  $\{x\}$  es abierto (pues  $V - F = V \cap (X - F)$  los cuales son abiertos), además  $A = F$  pues  $\{x\} \subseteq V$  y  $x \notin A$ . Luego  $A$  es cerrado. Si  $\{x\} = F - V$  entonces  $\{x\}$  es cerrado y  $A = V$  es abierto.

Análogamente para  $B$ . ■

**Corolario 4.1.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico conexo, y sea  $Y$  el subconjunto de todos los puntos de corte de  $X$ . Entonces:*

1. *Cada subconjunto conexo no vacío de  $Y$  no degenerado, contiene por lo menos un punto cerrado.*
2. *Si  $x \in Y$  es abierto, entonces cada punto límite de  $\{x\}$  en  $Y$  es un punto cerrado.*

*Demostración.*

1. Sea  $A$  un subconjunto conexo no vacío de  $Y$ , con  $|A| > 1$ .

Por el teorema (4.1.1) cada punto  $x \in A$  es abierto ó cerrado. Supongamos que para cada  $x \in A$ ,  $x$  es abierto. Sea  $x_0 \in A$  entonces

$$A - \{x_0\} = \bigcup_{x \in A, x \neq x_0} \{x\}$$

luego  $\{x_0\} \cup (A - \{x_0\}) = A$  constituyen una separación de  $A$ . Lo cual contradice el hecho de que  $A$  es conexo.

2. Sea  $\{x\}$  un subconjunto abierto de  $Y$ , es claro que  $\{x\}' \neq \emptyset$  (pues si no  $\{x\}$  sería abierto y cerrado en  $X$ ). Sea  $y$  un punto límite de  $\{x\}$  en  $Y$ , si  $y$  no es cerrado, entonces por el teorema (4.1.1) se tiene que  $y$  es abierto. Luego se sigue que

$$\{x\} \cap (\{y\} - \{y\}) = \emptyset$$

lo cual es una contradicción, pues  $y$  es un punto límite de  $\{x\}$ . ■

Como otra consecuencia del teorema (4.1.1) se sigue que un espacio por puntos de corte  $X$  es  $T_0$ ; dados dos puntos distintos  $x, y \in X$  se tiene que  $x$  es abierto ó cerrado en  $X$ , si  $x$  es abierto la conclusión es inmediata pues  $x \in \{x\}$  y  $y \notin \{x\}$ , y si  $x$  es cerrado, entonces  $X - \{x\} = A \mid B$  donde  $A$  y  $B$  son abiertos en  $X$ , además  $y \in A$  ó  $y \in B$ . Asumiendo sin pérdida de generalidad que  $y \in A$ , se tiene que existe un abierto  $A$  que contiene a  $y$  y no contiene a  $x$ .

**Lema 4.1.1.** *Sea  $X$  un espacio topológico conexo, y sea  $x$  un punto de corte de  $X$ . Si  $X - \{x\} = A \mid B$ ,  $A \cup \{x\}$  es conexo.*

*Demostración.*

Supongamos que  $A \cup \{x\}$  es no conexo, entonces existen los subconjuntos  $C$  y  $D$  de  $A \cup \{x\}$  tales que  $A \cup \{x\} = C \mid D$ . Podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $x \in C$ . Como  $\overline{C} \cap D = C \cap \overline{D} = \emptyset$ , se tiene que  $D \subseteq A$ .

Luego  $\overline{(B \cup C)} \cap D = (\overline{B \cup C}) \cap D = (\overline{B} \cap D) \cup (\overline{C} \cap D)$ . Como  $\overline{C} \cap D = \emptyset$  entonces  $\overline{(B \cup C)} \cap D = \overline{B} \cap D$ . Dado que  $D \subseteq A$ , se tiene que  $\overline{B} \cap D \subseteq \overline{B} \cap A$ , pero por hipótesis  $\overline{B} \cap A = \emptyset$ , luego  $\overline{(B \cup C)} \cap D = \emptyset$ .

De la misma forma

$$(B \cup C) \cap \overline{D} = (B \cap \overline{D}) \cup (C \cap \overline{D}) = B \cap \overline{D} \subseteq B \cap \overline{A} = \emptyset$$

Luego  $(B \cup C) \cap \overline{D} = \emptyset$ . Además  $(B \cup C) \cup D = B \cup (C \cup D) = B \cup (A \cup \{x\}) = X$ .

Por lo tanto  $X = (B \cup C) \mid D$ . Lo cual contradice la conexidad de  $X$ . ■

**Lema 4.1.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico conexo, y sea  $x$  un punto de corte de  $X$ . Si  $X - \{x\} = A \mid B$  y si cada punto de  $A$  es un punto de corte de  $X$ , entonces  $A$  contiene por lo menos un punto cerrado.*

*Demostración.*

Si cada punto de  $A$  es un punto de corte de  $X$ , entonces por el teorema (4.1.1), cada punto de  $A$  es abierto ó cerrado en  $X$ .

Supongamos que  $A$  consiste exclusivamente en puntos abiertos. Puesto que por el lema (4.1.1)  $A \cup \{x\}$  es conexo, entonces  $x$  debe ser cerrado, pues si no  $A$  y  $\{x\}$  formarían una desconexión de  $A \cup \{x\}$ . Como  $x$  es cerrado, por el teorema (4.1.1) se sigue que  $B$  es abierto en  $X$ , luego

$X - B = A \cup \{x\}$  es cerrado. Así, para cada  $y \in A$ ,  $\overline{\{y\}} \subset \overline{A \cup \{x\}} = A \cup \{x\}$ , y por lo tanto por el corolario (4.1.1 (2)),  $x$  es el único posible punto límite de  $\{y\}$ . Como  $\overline{\{y\}} = \{y\} \cup \{y\}'$ , entonces  $\{y\}' \neq \emptyset$ , pues si no,  $\{y\}$  sería un subconjunto abierto y cerrado de  $X$  y así, contradeciría la conexidad de  $X$ . Luego  $x$  es el único punto límite de  $\{y\}$ . Ahora como  $\{y\}$  es conexo, se tiene que  $\overline{\{y\}} = \{x, y\}$  es conexo para cualquier  $y \in A$ .

Sea  $y_0 \in A$ . Puesto que  $B \cup \{x\}$  es conexo (lema (4.1.1)), y  $\bigcup_{y \in A} \{x, y\}$  también lo es (pues es la unión de conexos con el punto  $x$  en común), y además  $\{x, y\} \cap (B \cup \{x\}) = \{x\}$  para cualquier  $y \in A$ , entonces

$$X - \{y_0\} = \bigcup_{y \in A, y \neq y_0} \{x, y\} \cup (B \cup \{x\})$$

también es conexo. Esto contradice el hecho de que  $y_0$  es un punto de corte de  $X$ . ■

Si se tienen dos puntos de corte distintos en un espacio topológico conexo, existe una relación natural entre los conjuntos de las separaciones que determinan cada uno de dichos puntos. Veremos esta relación en el siguiente lema.

**Lema 4.1.3.** Sean  $X$  un espacio topológico conexo, y  $x$  e  $y$  con  $x \neq y$  dos puntos de corte de  $X$  tales que

$$X - \{x\} = A \mid B \quad y \quad X - \{y\} = C \mid D.$$

Si  $x \in C$  e  $y \in A$ , entonces  $D \subset A$  y  $B \subset C$ .

*Demostración.*

Puesto que por el lema (4.1.1)  $D \cup \{y\}$  es conexo, y como  $D \cup \{y\} \subset X - \{x\}$ , entonces por el lema (2.1.2) se tiene que  $D \cup \{y\} \subset A$  ó  $D \cup \{y\} \subset B$ . Puesto que  $y \in A$  y  $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ , entonces la segunda inclusión se descarta. Luego  $D \cup \{y\} \subset A$  y por tanto  $D \subset A$ .

Una discusión similar demuestra que  $B \subset C$ . ■

En el siguiente teorema se demuestra que un espacio topológico finito no puede ser un espacio por puntos de corte.

**Teorema 4.1.2.** *Si  $X$  es un espacio por puntos de corte. Entonces la colección  $\mathfrak{S}$  de todos los puntos cerrados de  $X$  es infinita.*

*Demostración.*

Utilizando el principio de inducción matemática, construimos una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} =: (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  de puntos cerrados distintos en  $X$ .

Definimos  $C_0 = X$ . Como  $C_0$  es un subconjunto conexo de  $X$  formado por todos los puntos de corte de  $X$ , entonces por el corolario (4.1.1(1)) existe un punto cerrado  $x_1$  en  $C_0$ . Puesto que  $x_1$  es un punto de corte de  $X$ , existen los subconjuntos  $C_1$  y  $D_1$  abiertos en  $X$  tales que  $X - \{x_1\} = C_1 \mid D_1$ . Luego se tiene que  $x_1 \notin C_1$  y  $C_0 \supseteq C_1$ . Además puesto que  $X$  es un espacio por puntos de corte, cada punto de  $C_1$  es un punto de corte de  $X$ , y por el lema (4.1.2) existe un punto cerrado  $x_2$  de  $X$  tal que  $x_2 \in C_1$ , además  $x_2 \neq x_1$  pues  $x_1 \notin C_1$ . Puesto que  $x_2$  también es un punto de corte de  $X$ , existen los subconjuntos  $C_2$  y  $D_2$  abiertos en  $X$  tales que  $X - \{x_2\} = C_2 \mid D_2$ . Luego  $x_2 \notin C_2$ . Dado que  $x_1$  y  $x_2$  son dos puntos distintos de corte en  $X$  y  $X - \{x_1\} = C_1 \mid D_1$  y  $X - \{x_2\} = C_2 \mid D_2$ , se debe tener que  $x_1 \in C_2$  ó  $x_1 \in D_2$ . Intercambiando  $C_2$  y  $D_2$  en caso de ser necesario, podemos asumir que  $x_1 \in D_2$  y aplicar el lema (4.1.3) para concluir que  $C_1 \supseteq C_2$ .

Repitiendo este proceso  $n$ -veces, tenemos que existen  $n$ -puntos distintos cerrados en  $X$ .

Ahora supongamos que los  $n$ -puntos cerrados distintos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en  $X$  y los subconjuntos abiertos  $C_1, C_2, \dots, C_n$  y  $D_1, D_2, \dots, D_n$  están escogidos como anteriormente, es decir; están escogidos de tal forma que  $X - \{x_i\} = C_i \mid D_i$ ,  $x_i \in C_{i-1}$  y  $C_{i-1} \supseteq C_i$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Según el lema (4.1.2), existe un punto cerrado  $x_{n+1}$  en  $X$  tal que  $x_{n+1} \in C_n$ . Luego existen los subconjuntos  $C_{n+1}$  y  $D_{n+1}$  abiertos en  $X$  tales que  $X - \{x_{n+1}\} = C_{n+1} \mid D_{n+1}$ . Nuevamente intercambiando  $C_{n+1}$  y  $D_{n+1}$  en caso de ser necesario, podemos asumir que  $x_n \in D_{n+1}$ . Así, por el lema (4.1.3),  $C_n \supseteq C_{n+1}$ .

Puesto que para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  se tiene que

$$x_i \notin C_i \text{ y } C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \cdots \supseteq C_{i-1} \supseteq C_i \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq C_{n+1}$$

entonces se tiene que para cualquier  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $x_i \notin C_n$ . Por tanto el hecho de que  $x_{n+1} \in C_n$  implica que  $x_{n+1} \neq x_i$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Luego la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} =: (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  construida continuando este proceso indefinidamente, es una sucesión de puntos cerrados distintos en  $X$ , y por tanto la colección  $\mathfrak{S}$  de todos los puntos cerrados de  $X$  es infinita.

En otras palabras hemos construido una función inyectiva  $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathfrak{S}$ , del conjunto de los números naturales en la colección  $\mathfrak{S}$  y por cardinalidad esto implica que

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| \leq |\mathfrak{S}|.$$

■

**Corolario 4.1.2.** *Si  $X$  es un espacio por puntos de corte, entonces  $|X| \geq \aleph_0$*

Por supuesto, el teorema 4.1.2 es una generalización del corolario 4.1.2. A continuación, usando el principio maximal de Hausdorff, probamos otra generalización del corolario 4.1.2 en el siguiente teorema.

**Teorema 4.1.3.** *Sea  $X$  un espacio topológico conexo, compacto con más de un punto. Entonces  $X$  tiene por lo menos dos puntos que no son puntos de corte.*

*Demostración.*

Supongamos que  $X$  tiene a lo más un punto ( $z$ ) que no es de corte.

Sea  $x_0$  un punto de corte de  $X$  y sea  $X - \{x_0\} = A_0 \cup B_0$ . Dado que  $X$  tiene a lo sumo un punto  $z$  que no es de corte, entonces  $A_0$  ó  $B_0$  (asumamos sin pérdida de generalidad que es  $A_0$ ) consiste exclusivamente en puntos de corte de  $X$ . Luego por el lema (4.1.2)  $A_0$  contiene por lo menos un punto cerrado y de corte en  $X$ . Sea  $x$  dicho punto y sea  $X - \{x\} = A \cup B$  y sin pérdida de generalidad asumamos que  $x_0 \in B$ . Entonces por el lema (4.1.3)  $A \subset A_0$  y  $B_0 \subset B$ .

Definimos

$$S = \{U \subset X \mid U \text{ es abierto en } X, U \supseteq B, |\bar{U} - U| = 1, \text{ y } \bar{U} \neq X\}.$$

Dado que, por el teorema (4.1.1)  $B$  es un subconjunto abierto no vacío de  $X$ , y  $\bar{B} = B \cup \{x\}$  (pues si  $y \in X - (B \cup \{x\})$ ,  $y \in A$ , y como  $A \cap \bar{B} = \emptyset$ , entonces  $y \notin \bar{B}$ ), entonces  $B \in S$ , y así  $S \neq \emptyset$ .

Ahora definimos la siguiente relación en  $S$ :

$$U_\alpha \leq U_\beta \quad \text{si} \quad U_\alpha = U_\beta \quad \text{ó} \quad \bar{U}_\alpha \subseteq U_\beta.$$

Entonces  $(S, \leq)$  es claramente un conjunto parcialmente ordenado, y por el *principio maximal de Hausdorff* existe una cadena maximal  $\mathfrak{C}$  en  $S$ . Sea  $U_\alpha \in S$  y sea  $\{x_\alpha\} = \bar{U}_\alpha - U_\alpha$ . Para cada  $\alpha$ ,  $x_\alpha$  es un punto de corte de  $X$ , pues  $B$  es el menor conjunto

en  $S$  (en el sentido de la inclusión) y el único punto  $z$  (si es que existe) que no es de corte está en  $B_0 \subseteq B$ , y  $\overline{B} - B \neq \{z\}$ .

Sea  $X - \{x_\alpha\} = U_\alpha \mid (X - \overline{U}_\alpha)$ . Para cada  $\alpha$ ,  $x_\alpha \in A$  y  $x \in U_\alpha$  pues  $x_\alpha \notin U_\alpha$  y  $B \subseteq U_\alpha$ , además  $B \cup \{x\}$  es conexo, luego  $x \in U_\alpha$ . Entonces por el lema (4.1.3),  $X - \overline{U}_\alpha \subset A$ , luego por el lema (4.1.2), existe un punto cerrado  $y \in X - \overline{U}_\alpha$ , sea  $X - \{y\} = C \mid D$ . Puesto que  $\overline{U}_\alpha = U_\alpha \cup \{x_\alpha\}$  es conexo, entonces  $\overline{U}_\alpha \subseteq C$  ó  $\overline{U}_\alpha \subseteq D$ . Es decir  $U_\alpha < C$  ó  $U_\alpha < D$ .

Dado que  $U_\alpha$  es arbitrario en  $S$ ,  $S$  (y en consecuencia  $\mathfrak{C}$ ) no tiene un elemento maximal, luego si  $p \in \bigcup_{U \in \mathfrak{C}} \overline{U}$ ,  $p \in \overline{U}_{\alpha_0}$  para algún  $\alpha_0$ , y como  $\mathfrak{C}$  no tiene un elemento maximal, existe un  $U_{\alpha_i} \in \mathfrak{C}$  para algún  $\alpha_i$ , tal que  $\overline{U}_{\alpha_0} \subset U_{\alpha_i}$ . Entonces  $p \in U_{\alpha_i}$ , y por tanto  $p \in \bigcup_{U \in \mathfrak{C}} U$ . Así

$$\bigcup_{U \in \mathfrak{C}} U = \bigcup_{U \in \mathfrak{C}} \overline{U}.$$

Sea  $V = \bigcup_{U \in \mathfrak{C}} U$ . Puesto que  $\overline{U}_\alpha$  es conexo para cualquier  $U_\alpha \in \mathfrak{C}$ , y  $B \subset \overline{U}_\alpha$  entonces la unión  $\bigcup_{U \in \mathfrak{C}} \overline{U}$  es conexa, pero  $V = \bigcup_{U \in \mathfrak{C}} U = \bigcup_{U \in \mathfrak{C}} \overline{U}$ , luego  $V$  es conexo. Afirmamos que  $X = V$ . Supongamos que  $X \neq V$ , entonces  $X - V \neq \emptyset$ , además  $X - V$  es un subconjunto cerrado de  $X$  (pues  $V$  es unión de abiertos de  $X$ ). Puesto que  $X - \overline{U} \subseteq A$  para cada  $U \in \mathfrak{C}$ , entonces  $\bigcap_{U \in \mathfrak{C}} (X - \overline{U}) \subseteq A$ . Es decir

$$X - \bigcup_{U \in \mathfrak{C}} \overline{U} = \left( X - \bigcup_{U \in \mathfrak{C}} U \right) \subseteq A$$

luego  $X - V \subseteq A$ , y por tanto todo punto de  $X - V$  es un punto de corte de  $X$ , y por el teorema (4.1.1) todo punto de  $X - V$  es abierto ó cerrado en  $X$ . Puesto que  $X - V$  no es abierto, los puntos de  $X - V$  no pueden ser todos abiertos, luego  $X - V$  debe contener un punto cerrado y de corte  $x'$  en  $X$ .

Sea  $X - \{x'\} = G \mid H$ . Como  $V$  es conexo,  $V \subseteq G$  ó  $V \subseteq H$ . Asumamos sin perdida de generalidad que  $V \subseteq G$ .

Puesto que por el teorema (4.1.1)  $G$  es abierto en  $X$ , y además  $H \neq \emptyset$  y  $\overline{G} \cap H = \emptyset$ , entonces  $\overline{G} = G \cup \{x'\} \neq X$ , y  $B \subseteq V \subseteq G$ , así  $G \in S$  y  $U \leq G$  para todo  $U \in \mathfrak{C}$ . Puesto que  $\mathfrak{C}$  no tiene un elemento maximal,  $G \notin \mathfrak{C}$ , lo cual contradice la maximalidad de la cadena  $\mathfrak{C}$  (pues  $\mathfrak{C} \cup G$  es una cadena en  $S$  que contiene propiamente a  $\mathfrak{C}$ ). Luego  $\bigcup_{U \in \mathfrak{C}} U = V = X$ , y por tanto  $\mathfrak{C}$  es un recubrimiento abierto infinito de  $X$ . Puesto que  $\mathfrak{C}$  es una cadena sin un elemento maximal,  $\mathfrak{C}$  no admite un subrecubrimiento finito para  $X$  (pues si  $\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} = X$ , con  $U_{\alpha_i} \in \mathfrak{C}$  entonces como  $\mathfrak{C}$  es una cadena, se tiene que  $X = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} = U_{\alpha_k}$  para algún  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Luego  $\overline{U}_{\alpha_k} = \overline{X} = X$  y así  $U_{\alpha_k} \notin S$ , lo cual es una contradicción). Así,  $X$  no puede ser compacto. ■

En [4] y [7] se prueba el teorema anterior para el caso particular en el que el espacio es  $T_1$ .

En algunos textos (por ejemplo [7]) se enuncia el teorema (4.1.3) como el *teorema de existencia de puntos que no son de corte*.

Ahora, como una consecuencia del teorema anterior, probamos en el siguiente corolario la no compacidad de los espacios por puntos de corte.

**Corolario 4.1.3.** *Si  $X$  es un espacio por puntos de corte, entonces  $X$  es no compacto.*

*Demostración.*

Por hipótesis,  $X$  es conexo con infinitos puntos, y no es cierto que  $X$  tenga por lo menos dos puntos que no son de corte, luego por el contrarrecíproco del teorema (4.1.3), se tiene que  $X$  es no compacto. ■

---

## 4.2. Espacios por puntos de corte irreducibles y caracterización de la recta de Khalimsky

---

En esta sección, definimos una noción de irreducibilidad de los espacios por puntos de corte y mostramos que un espacio con esta característica es esencialmente único, salvo homeomorfismos.

**Definición 4.2.1.** Sea  $X$  un espacio por puntos de corte. Diremos que  $X$  es un espacio por puntos de corte irreducible, si ningún subconjunto propio de  $X$  (con la topología de subespacio) es un espacio por puntos de corte.

**Ejemplo 4.2.1.** La recta de Khalimsky es un espacio por puntos de corte irreducible. En la afirmación (3.2.5) del capítulo anterior vimos que ningún subconjunto propio de la recta de Khalimsky es un espacio por puntos de corte.

No es sencillo proporcionar ejemplos de espacios por puntos de corte irreducibles, la razón es que en realidad, tal y como veremos más adelante, la recta de Khalimsky (salvo homeomorfismos), es el único espacio por puntos de corte que es irreducible. Por ahora veamos algunos lemas que nos serán de gran utilidad para probar esta última afirmación.

**Lema 4.2.1.** *Sea  $X$  un espacio por puntos de corte,  $x \in X$  y sea  $X - \{x\} = A \mid B$ . Si  $A$  es no conexo, entonces  $A \cup \{x\}$  es un espacio por puntos de corte.*

*Demostración.*

Sea  $Y = A \cup \{x\}$ , por el lema (4.1.1)  $Y = A \cup \{x\}$  es conexo. Además  $Y - \{x\} = A$ , y por hipótesis  $A$  es no conexo. Así  $x$  es un punto de corte de  $Y$ .

Veamos que para cada  $y \in A$ ,  $Y - \{y\}$  es no conexo. Sea  $y$  un punto arbitrario en  $A$ , puesto que  $X - \{y\} = (Y - \{y\}) \cup (B \cup \{x\})$  es no conexo (pues  $X$  es espacio por puntos de corte), y además  $x \in (Y - \{y\}) \cap (B \cup \{x\})$ , entonces  $Y - \{y\}$  o  $B \cup \{x\}$  es no conexo. Puesto que por el lema (4.1.1)  $B \cup \{x\}$  es conexo, se tiene que  $Y - \{y\}$  es desconexo. ■

**Corolario 4.2.1.** *Si  $X$  es un espacio por puntos de corte irreducible, entonces para cada  $x \in X$ ,  $X - \{x\}$  tiene exactamente dos componentes.*

*Demostración.*

Sean  $x \in X$ , y  $X - \{x\} = A \mid B$ . Puesto que por hipótesis  $X$  es un espacio por puntos de corte irreducible,  $A \cup \{x\}$  y  $B \cup \{x\}$  no son espacios por puntos de corte. Así, por el lema (4.2.1)  $A$  y  $B$  son conexos. Además  $A \cup B = X - \{x\}$ , y si  $C$  es un subconjunto conexo de  $X - \{x\}$  no trivial, entonces  $C \subseteq A$  ó  $C \subseteq B$ , de esta forma  $C \cap B = \emptyset$  ó  $C \cap A = \emptyset$ . Así, por el teorema (2.3.1)  $A$  y  $B$  son las únicas componentes de  $X - \{x\}$ . ■

El recíproco del corolario (4.2.1) no es cierto, basta considerar el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 4.2.2.** Para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} - \{x\}$  tiene exactamente dos componentes, y cualquier intervalo o rayo abierto de  $\mathbb{R}$  es un espacio por puntos de corte.

**Lema 4.2.2.** *Sea  $X$  un espacio por puntos de corte irreducible, sea  $x \in X$  y sea  $X - \{x\} = A \mid B$ . Entonces existen exactamente dos puntos  $y$  y  $z$  con  $y \in A$ ,  $y, z \in B$  tales que  $\{x, y\}$  y  $\{x, z\}$  son conexos. Además si  $x$  es cerrado entonces  $y$  y  $z$  son abiertos, y si  $x$  es abierto, entonces  $y$  y  $z$  son cerrados.*

*Demostración.*

Dado que, por el corolario (4.2.1),  $A$  es conexo y puesto que  $X$  es un espacio por puntos de corte irreducible,  $A$  tiene un punto  $y$  que no es de corte; es decir existe un punto  $y \in A$  tales que  $A - \{y\}$  es conexo.

Afirmamos que  $y$  es el único punto en  $A$  tales que  $\{x, y\}$  es conexo. Primero probaremos que si  $\{x, y'\}$  es conexo para algún  $y' \in A$ , entonces  $y' = y$ .

Sea  $y' \in A$  tales que  $\{x, y'\}$  es conexo. Supongamos que  $y' \neq y$ . Puesto que por el lema (4.1.1)  $B \cup \{x\}$  es conexo, y como  $(A - \{y\}) \cap \{x, y'\} \neq \emptyset$  y  $(B \cup \{x\}) \cap \{x, y'\} \neq \emptyset$  entonces, por el corolario (2.1.2),  $(A - \{y\}) \cup (\{x, y'\}) \cup (B \cup \{x\}) = (A - \{y\}) \cup (B \cup \{x\})$  es conexo.

Pero  $X - \{y\} = (A - \{y\}) \cup (B \cup \{x\})$ , lo cual es una contradicción pues  $X$  es un espacio por puntos de corte. Así,  $y' = y$ .

Para probar que  $\{x, y\}$  es conexo consideramos dos casos:

**Caso 1.** Si  $x$  es cerrado. En este caso  $A$  es (abierto y) no cerrado pero  $A \cup \{x\}$  es cerrado (ambos del teorema (4.1.1)). Así,  $x$  es un punto límite de  $A$ . Por otra parte,  $x$  no es un punto límite de  $A - \{y\}$ , pues de serlo,  $(A - \{y\}) \cup \{x\}$  sería conexo, y  $((A - \{y\}) \cup \{x\}) \cup (B \cup \{x\}) = (A - \{y\}) \cup (B \cup \{x\})$  también lo sería. Pero  $(A - \{y\}) \cup (B \cup \{x\}) = X - \{y\}$  lo cual es una contradicción. Así,  $x$  es un punto límite de  $y$ , y por tanto  $\{x, y\}$  es conexo. Además  $y$  es abierto, pues si no  $\overline{\{y\}} = \{y\}$ , lo cual contradice que  $x$  es un punto límite de  $y$ .

**Caso 2.** Si  $x$  es abierto. En este caso  $A$  es (cerrado y) no abierto, pero  $A \cup \{x\}$  es abierto (ambos del teorema (4.1.1)). Así, hay un punto  $y'$  en  $A$  que no es punto interior de  $A$ . Puesto que  $y'$  es un punto interior de  $A \cup \{x\}$  y no es punto interior de  $A$ , se tiene que todo abierto que contenga a  $y'$  interseca a  $\{x\}$ , además lo hace en puntos distintos de  $y'$  pues  $y' \neq x$ . Así,  $y'$  es un punto límite de  $\{x\}$  y por tanto  $\{x, y'\}$  es conexo. Puesto que, como probamos anteriormente  $y' = y$ , se sigue que  $\{x, y\}$  es conexo. Además  $y$  es cerrado, pues si no  $\{x\}$  y  $\{y\}$  serían abiertos disyuntos no vacíos en  $\{x, y\}$  cuya unión es  $\{x, y\}$ , contradiciendo así la conexidad de  $\{x, y\}$ .

Una discusión similar muestra que existe un único punto  $z \in B$  tal que  $\{x, z\}$  es conexo, y que además si  $x$  es abierto,  $z$  es cerrado, y si  $x$  es cerrado,  $z$  es abierto. ■

En el lema anterior probamos primero (aunque parece ser un poco inusual), la unicidad del punto  $y$ . En realidad, lo que probamos fue que el único posible punto en  $A$  para el cual  $\{y', x\}$  es conexo es el punto  $y$ . Note que para esto no utilizamos en ningún momento la conexidad de  $\{y, x\}$ . Lo cual hace que la prueba sea válida.

Para concluir, caracterizaremos la recta de Khalimsky en el siguiente teorema.

**Teorema 4.2.1.** *Un espacio topológico  $X$  es un espacio por puntos de corte irreducible si, y sólo si, es homeomorfo a la recta de Khalimsky.*

*Demostración.*

Es claro que la recta de Khalimsky es un espacio por puntos de corte irreducible. Supongamos que  $X$  es un espacio por puntos de corte irreducible. Utilizando el principio de inducción matemática, encontraremos un subconjunto  $Y$  de  $X$  que es homeomorfo a la recta de Khalimsky, y por la irreducibilidad de  $X$ , concluimos que  $X = Y$ . Por ser  $X$  un espacio por puntos de corte, la colección de puntos cerrados en  $X$  es infinita.

Sea  $x_0$  un punto cerrado en  $X$ , y sea  $X - \{x_0\} = A_0 \mid B_0$ . Por el lema (4.2.2), existen los puntos  $x_{-1}$  en  $A_0$  y  $x_1$  en  $B_0$  tales que  $\{x_{-1}, x_0\}$  y  $\{x_0, x_1\}$  son conexos. Definimos  $Y_1 = \{x_{-1}, x_0, x_1\}$ . Como  $X$  es un espacio por puntos de corte irreducible para cada  $x \in X$ ,  $X - \{x\}$  tiene exactamente dos componentes. Supongamos que  $A_1$  es la componente de  $X - \{x_1\}$  que contiene a  $x_0$ , y que  $B_1$  es la otra componente de  $X - \{x_1\}$ . Supongamos además, que  $B_{-1}$  es la componente de  $X - \{x_{-1}\}$  que contiene a  $x_0$ , y que  $A_{-1}$  es la otra componente de  $X - \{x_{-1}\}$ .

Asumamos que para un entero positivo  $n$  arbitrario, el subconjunto

$$Y_n = \{x_i \mid i \in \mathbb{Z}, \text{ y } -n \leq i \leq n\}$$

de  $X$  (con  $2n + 1$  puntos) es escogido de tal forma que para cada  $i, j \in \mathbb{Z}$  que satisfacen  $-n \leq i, j \leq n$  y  $|i - j| = 1$ ,  $\{x_i, x_j\}$  es conexo. Además asumamos que para cada entero  $i$  no nulo, con  $-n \leq i \leq n$ , las componentes  $A_i$  y  $B_i$  de  $X - \{x_i\}$  están escogidas de tal forma que  $x_0 \in A_i$ , si  $i$  es positiva, y  $x_0 \in B_i$ , si  $i$  es negativa. Puesto que por el corolario (2.1.1)

$$Y_n - \{x_{-n}\} = \bigcup_{-n < i < j \leq n, j=i+1} \{x_i, x_j\}$$

es conexo, entonces  $Y_n - \{x_{-n}\} \subseteq A_{-n}$  ó  $Y_n - \{x_{-n}\} \subseteq B_{-n}$ , y puesto que  $x_0 \notin A_{-n}$ , se tiene que  $Y_n - \{x_{-n}\} \subseteq B_{-n}$ . Por el lema (4.2.2), hay un único punto  $x_{-n-1}$  en  $A_{-n}$  tal que  $\{x_{-n-1}, x_{-n}\}$  es conexo. Puesto que

$$(Y_n \cup \{x_{-n-1}\}) - \{x_n\} = \bigcup_{-n-1 \leq i < j < n, j=i+1} \{x_i, x_j\}$$

es conexo (nuevamente por el corolario (2.1.1)), entonces  $(Y_n \cup \{x_{-n-1}\}) - \{x_n\} \subseteq A_n$  ó  $(Y_n \cup \{x_{-n-1}\}) - \{x_n\} \subseteq B_n$ , y como  $x_0 \notin B_n$ , se tiene que  $(Y_n \cup \{x_{-n-1}\}) - \{x_n\} \subseteq A_n$ . Nuevamente, por el lema (4.2.2) existe un único punto  $x_{n+1} \in B_n$  tal que  $\{x_n, x_{n+1}\}$  es conexo. Así, obtenemos el subconjunto

$$Y_{n+1} = \{x_i \mid i \in \mathbb{Z}, \text{ y } -(n+1) \leq i \leq (n+1)\}$$

de  $X$  (con  $2n + 3$  puntos) tal que para cada  $i, j \in \mathbb{Z}$  que satisfacen  $-(n+1) \leq i, j \leq (n+1)$  y  $|i - j| = 1$ ,  $\{x_i, x_j\}$  es conexo.

Para completar el paso de la inducción, definimos los subconjuntos  $A_{-n-1}$ ,  $B_{-n-1}$ ,  $A_{n+1}$ ,  $B_{n+1}$  de  $X$  tales que  $X - \{x_{-n-1}\} = A_{-n-1} \mid B_{-n-1}$ ,  $X - \{x_{n+1}\} = A_{n+1} \mid B_{n+1}$ ,  $x_0 \in B_{-n-1}$  y  $x_0 \in A_{n+1}$ .

Sea

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = \{x_i \mid i \in \mathbb{Z}\}.$$

Luego para cada entero  $i$ ,

$$Y \cap A_i = \{x_j \mid j \in \mathbb{Z}, \text{ y } j < i\} \quad \text{y} \quad Y \cap B_i = \{x_j \mid j \in \mathbb{Z}, \text{ y } j > i\}.$$

Puesto que  $x_0$  es cerrado (por aplicaciones iteradas del lema (4.2.2)),  $x_n$  es cerrado si  $n$  es par, y  $x_n$  es abierto si  $n$  es impar. Luego para cada  $i \in \mathbb{Z}$ , la vecindad abierta más pequeña de  $x_{2i+1}$  en  $Y$  es  $\{x_{2i+1}\}$ . Dado que para cada  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $x_{2i}$  es punto límite de  $\{x_{2i-1}\}$  y de  $\{x_{2i+1}\}$  (pues de no serlo, como  $x_{2i-1}$  y  $x_{2i+1}$  son abiertos, se tendría que  $\{x_{2i-1}, x_{2i}\}$  y  $\{x_{2i}, x_{2i+1}\}$  no son conexos), toda vecindad abierta de  $x_{2i}$  en  $X$  (y por consiguiente en  $Y$ ) contiene a los puntos  $x_{2i-1}$  y  $x_{2i+1}$ . Por otra parte, puesto que  $x_{2i-2}$  y  $x_{2i+2}$  son cerrados, por el teorema (4.1.1) se sigue que  $B_{2i-2}$  y  $A_{2i+2}$  son abiertos en  $X$ .

De esta forma  $\{x_{2i-1}, x_{2i}, x_{2i+1}\} = (Y \cap B_{2i-2}) \cap (Y \cap A_{2i+2})$  es la vecindad abierta más pequeña de  $x_{2i}$  en  $Y$ . Así

$$\beta' = \{\{x_{2i-1}, x_{2i}, x_{2i+1}\} \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{x_{2i+1}\} \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

es una base para la topología de  $Y$ . Comparando esta base con la base de la recta de Khalimsky, vemos que  $Y$  es homeomorfo a la recta de Khalimsky, y por tanto (proposición (3.1.1))  $Y$  es un espacio por puntos de corte. Así,  $Y = X$  pues  $X$  es irreducible. Recíprocamente. Si existe una aplicación  $f$  biyectiva y bicontinua de  $X$  en la recta de Khalimsky, entonces por la proposición (3.1.1),  $X$  es un espacio por puntos de corte. Supongamos que  $X$  no es irreducible, es decir; supongamos que existe un subconjunto propio  $Y$  de  $X$ , tal que  $Y$  es un espacio por puntos de corte.

Como  $f$  es biyección,  $f(Y) = A$  es un subconjunto propio de la recta de Khalimsky. Además la aplicación  $f|_Y : Y \longrightarrow A$  es un homeomorfismo (afirmación 1.2). Luego, de la proposición (3.1.1) se sigue que  $A$  es un espacio por puntos de corte, contradiciendo así la irreducibilidad de la recta de Khalimsky. ■

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] APOSTOL, Tom. *Análisis Matemático*. Barcelona: Reverté. 1979.
- [2] HONARI, B y BAHRAMPOUR, Y. *Cut-point Spaces*. En: Proceedings of the American Mathematical Society. Vol.127, número 9. (1999). p.2797-2803.
- [3] KELLEY, John. *General Topology*. New York: Springer-Verlang. 1955.
- [4] MARGALEF, J. Et al. *Topología*. Volumen 5. Madrid: Alhambra. 1982.
- [5] MUNKRES, James. *Topología*. Madrid: Prentice hall. 2002.
- [6] MUÑOZ, José. *Introducción a la Teoría de Conjuntos*. Cuarta Edición. Bogota: Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia. 2002.
- [7] NADLER, San. *Continuum Theory: An Introduction*. New York: Marcel Dekker. 1992.
- [8] WILLARD, Stephen. *General Topology*. New York: Addison Wesley. Publishing Company. 1968.