

DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE SUSPENSIÓN PARA UN
VEHÍCULO ELÉCTRICO DE CUATRO RUEDAS

DANIEL AUGUSTO DUARTE GUTIÉRREZ
JUAN PABLO GONZALEZ MANTILLA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
BUCARAMANGA

2022

DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE SUSPENSIÓN PARA UN
VEHÍCULO ELÉCTRICO DE CUATRO RUEDAS

DANIEL AUGUSTO DUARTE GUTIÉRREZ
JUAN PABLO GONZALEZ MANTILLA

Proyecto de grado para optar por el título de Ingeniero Mecánico

DIRECTOR:

WILLIAM PINTO HERNANDEZ
PhD. ingeniera mecánica

CODIRECTOR:

JORGE LUIS CHACÓN VELASCO
PhD. ingeniería mecánica

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECAÑICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
BUCARAMANGA

2022

DEDICATORIA

A Dios, padre amoroso y misericordioso, quien me ha acompañado y me ha guiado en este largo camino, llamado vida.

A mis padres, Sandra Lucero Gutierrez y Leonardo Augusto Duarte, que han sido los mejores padres que la vida me pudo haber dado.

Mi mami, que con su gran bondad y amor me ha permitido ser la persona que soy hoy en día. Agradezco su cariño, tiempo y su gran sonrisa, con los cuales me enseñó a amar el estudio. Gracias por cuidarme día a día y preocuparte por mí.

Mi papi, quien ha formado en mi la responsabilidad y las ganas de salir adelante. Es quien impartió en mi la visión de superarme y alcanzar mis sueños, y quien me ha mostrado que el mundo es mucho más grande que lo que yo pensaba.

A mi abuelita Luisa, que ha sido la persona que ha estado siempre para mí y que me ha aconsejado, consentido y amado a mas no poder. Gracias por tus dulces palabras todas las noches, con las cuales puedo dormir tranquilamente; por los momentos compartidos, por las risas, por las lágrimas, por las palabras de aliento.

A mi abuelita Martha, una mujer luchadora, que me ha enseñado que los sueños nunca deben dejarse ir, y que se debe dar todo de sí mismo para alcanzarlos. Agradezco el cariño y espero poder acompañarte a hacer tu sueño realidad.

Para mí, son un modelo a seguir y ejemplo de superación.

A Ñañas, Norha Ines, Claudia, Diego, Matilde y mi familia en general, que me han apoyado con sus palabras, cariño y me han mantenido presente en sus oraciones.

A mis amigos, por hacer mi vida más interesante y feliz de lo que ya es. Gracias por todos los momentos de alegría, por las risas, por los tiempos de diversión, por apoyarme en cada locura.

A mis profesores, no solamente por darme los conocimientos que hoy en día poseo, sino por desarrollar en mí una persona más competente y humana.

A mis compañeros de trabajo de Espartaco, por ser quienes me han ayudado a incursionar en este nuevo camino que comienzo en la vida laboral y por permitirme desarrollar habilidades que me servirán para ser un mejor profesional.

A Juan Pablo Gonzalez, mi compañero de tesis y el mejor amigo que pude encontrar en la universidad, gracias por apoyarme desde el primer día que nos conocimos, por los recuerdos forjados y por las risas que nunca faltaron.

Por nuestra dedicación, inteligencia y amor a la ciencia, logramos realizar este gran proyecto.

Daniel Augusto Duarte Gutierrez

DEDICATORIA

“El tiempo es la sustancia de que estoy hecho. El tiempo es un río que me arrebató, pero yo soy el río; es un tigre que me destroza, pero yo soy el tigre; es un fuego que me consume, pero yo soy el fuego.”

Jorge Luis Borges

A Dios por acompañarme en cada etapa de mi vida con su inmensa presencia y amor infinito.

A mis padres, Natalia y Henry, por apoyarme a lo largo de toda la carrera brindándome su amor incondicional y confiando siempre en mis capacidades. Con especial mención a mi madre, una mujer luchadora y trabajadora que desde siempre ha sacrificado su propio bienestar en favor de su único hijo, demostrándome que el amor de una madre no tiene comparación.

A mis abuelos maternos, María Eugenia y Gilberto, dos personas fundamentales en mi vida, por ellos es lo que soy hoy en día. Mi abuela, la tita, me inculcó la disciplina y el trabajo duro desde muy temprana edad y siempre me encaminó a ser un hombre recto con propósitos e ideales. Mi abuelo, el tito, ha sido una persona que me ha apoyado en absolutamente todo lo que he necesitado, sus consejos sobre la vida me han formado como un ser humano consiente de los retos que se deben afrontar a lo largo de la vida. Con ellos festejo y celebro todos mis triunfos.

A mi bisabuela materna, Ismenia Gómez, quien desde el cielo me ha acompañado y protegido con su presencia. El amor de la abuelita Ismenia siempre fue noble, dulce y sincero. A ella le dedico todos mis logros y triunfos.

A mi compañero de proyecto, Daniel Duarte, por su entrega y dedicación. Su apoyo fue esencial para la realización y culminación de este proyecto. El amor y pasión que compartimos por los temas de la ingeniería mecánica nos permitió realizar un proyecto de esta magnitud y con tal rigurosidad matemática y física.

Juan Pablo Gonzalez Mantilla

AGRADECIMIENTOS

A la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Industrial de Santander por formarnos como unos excelentes y excepcionales ingenieros, inculcándonos amor por la profesión y un sentido de pertenencia con la sociedad.

Al profesor William Pinto Hernández por convertirse en un pilar en la formación académica de nosotros, ofreciéndonos su amplio conocimiento en resistencia de materiales desde los momentos más prematuros de nuestra carrera. Sin lugar a duda, si hay algo que resaltar, aparte de su notable formación y aptitud para la docencia universitaria, es la calidad humana que lo caracteriza. Su apoyo y dedicación fueron esenciales para la realización de este proyecto.

Al profesor Abel Antonio Parada Corrales, maestro de la hidráulica industrial, quien, durante la ejecución del presente proyecto, nos designó como sus auxiliares principales y nos permitió hacer uso del laboratorio de potencia fluida para la realización del mismo. Sus historias, anécdotas, recomendaciones y notable exigencia nos permitieron crecer como ingenieros mecánicos dispuestos a afrontar los retos actuales de la industria.

Al profesor Isnardo Gonzalez Jaimes por apoyarnos con su conocimiento en análisis de mecanismos articulados y por instruirnos en la estructuración del plan de proyecto desde la materia de metodología de la investigación. Su vocación para la docencia no tiene comparación.

A Nicolas, Erwing, Juan diego, Cristhian, Diego, Jorge y a todos nuestros demás amigos que de alguna u otra forma aportaron en la realización del presente proyecto. Con especial mención a Valentina quien nos asesoró en la estructuración del trabajo bajo la norma ICONTEC.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	24
1. DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO DE GRADO	26
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	26
1.2 JUSTIFICACIÓN PARA SOLUCIONAR EL PROBLEMA	27
1.3 OBJETIVOS DEL TRABAJO DE GRADO	29
1.3.1 Objetivo general.....	29
1.3.2 Objetivos Específicos.....	29
1.4 JUSTIFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN.....	30
1.5 ESPECIFICACIÓN DE LA ALTERNATIVA GANADORA.....	31
2. ANÁLISIS GEOMÉTRICO, CINEMÁTICO Y CINÉTICO DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN FRONTAL – SUSPENSIÓN MCPHERSON	32
2.1 DEFINICIÓN DE LOS PARÁMETROS GEOMÉTRICOS Y ESPECIFICACIONES FUNCIONALES	32
2.2 DIMENSIONES DEL MECANISMO ARTICULADO PARA EL SISTEMA DE SUSPENSIÓN MCPHERSON	35
2.2.1 Dimensionamiento del mecanismo articulado.....	39
2.2.2 Análisis y síntesis del mecanismo articulado.	42
2.3 MODELO DINÁMICO DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN MCPHERSON	48
2.3.1. Construcción del lazo vectorial estructural.....	50

2.3.2 Lazo vectorial para la posición vertical del punto de contacto neumático-superficie.	51
2.3.3 Relación de suspensión.	52
2.3.4 Análisis de velocidades.	52
2.3.5 Análisis de aceleraciones.	53
2.3.6 Aceleraciones en los centros de gravedad de los miembros articulados.	54
2.3.7 Fuerzas que actúan en el sistema de suspensión.	54
2.3.6.1 Fuerza del resorte.	55
2.3.6.2 Fuerza del amortiguador.	56
2.3.6.3 Fuerza resorte-amortiguador.	57
2.3.8 Análisis cinético del mecanismo articulado.	57
2.3.7.1 Cuerpo 1 - Brazo de control.	58
2.3.7.1 Cuerpo 2 – Mangueta.	59
2.3.9 Matriz de solución.	61
2.4 DISEÑO Y SELECCIÓN DEL CONJUNTO RESORTE-AMORTIGUADOR	62
2.5 RESULTADOS MODELO DINÁMICO SISTEMA DE SUSPENSIÓN FRONTAL	66
2.5.1 Análisis de posiciones.	66
2.5.2 Angulo Camber.	68
2.5.3 Relación de suspensión.	69
2.5.4 Relación de posición: Posición angular del brazo de control respecto de la mangueta.	70
2.5.5 Relación de posición: Ángulo Camber respecto a la longitud del resorte-amortiguador.	71
2.5.6 Análisis de velocidades.	72

2.5.7 Análisis de aceleraciones.....	73
2.5.8 Modelo Estático.	77
2.5.9 Modelo Dinámico.	80
3. SIMULACIÓN VIBRATORIA DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN MCPHERSON	85
3.1 IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO EN SIMULINK	88
3.2 ENTRADAS	89
3.2.1 Parámetros Inerciales.	89
3.2.2 Constantes del sistema.....	90
3.2.3 Dimensiones.	91
3.2.4 Variables retroalimentadas.	91
3.3 VARIABLES DE EXCITACIÓN	91
3.3.1 Condiciones simétricas de ambas ruedas en resalto parabólico.	91
3.3.2 Condiciones simétricas de ambas ruedas en resalto portátil trapezoidal.....	92
3.3.3 Condiciones simétricas de ambas ruedas excitadas mediante dos funciones de pulso idénticas.	92
3.3.4 Condiciones asimétricas de ambas ruedas excitadas mediante dos funciones de pulso con amplitudes de signo contrario.	93
3.3.5 Condiciones asimétricas de ambas ruedas excitadas mediante dos funciones de pulso en condición crítica.....	94
3.4 RESULTADOS SIMULACIÓN	96
3.4.1 Condiciones simétricas de ambas ruedas en resalto parabólico.	96
3.4.2 Condiciones simétricas de ambas ruedas en resalto portátil trapezoidal.....	97
3.4.3 Condiciones simétricas de ambas ruedas excitadas mediante dos funciones de pulso idénticas.	98

3.4.4 Condiciones asimétricas de ambas ruedas excitadas mediante dos funciones de pulso con amplitudes de signo contrario.....	99
3.4.5 Condiciones asimétricas de ambas ruedas excitadas mediante dos funciones de pulso en condición crítica.....	101
3.5 DIAGRAMAS DE BODE	107
4. MODELADO Y ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS PARA LOS COMPONENTES PRINCIPALES DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN FRONTAL	114
5. ANÁLISIS GEOMÉTRICO, CINEMÁTICO Y CINÉTICO DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN TRASERO – EJE TORSIONAL.....	123
5.1 MODELO DINÁMICO DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN DE EJE TORSIONAL.....	123
5.2 DIMENSIONAMIENTO SISTEMA DE SUSPENSIÓN EJE TORSIONAL.....	127
5.2.1 Longitud brazo longitudinal L	128
5.2.2 Posición del eje a torsión respecto del pivote A	129
5.2.3 Longitud del eje a torsión C	132
5.2.4 Posicionamiento del resorte-amortiguador x_s, y_s	134
5.2.5 Comportamiento cinemático final del sistema de suspensión.....	137
5.3 ANÁLISIS ESTÁTICO DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN.....	139
5.3.1 Velocidad instantánea del punto S	141
6. DISEÑO DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL Y CÁLCULO DE LA CONSTANTE DE RIGIDEZ A TORSIÓN DEL EJE.....	146
6.1 FLUJO CORTANTE A LO LARGO DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL	147
6.2 CÁLCULO DE LA POSICIÓN DEL CENTRO DE CORTE.....	148
6.2.1 Primer momento de área Q_y	151
6.2.2 Segundo momento de área I_y	152

6.3 PROPUESTA SECCIÓN TRANSVERSAL PARA EL SISTEMA DE SUSPENSIÓN DE EJE A TORSIÓN	153
7. SIMULACIÓN VIBRATORIA DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN DE EJE TORSIONAL	157
7.1 IMPLEMENTACIÓN EN MATLAB SIMULINK:.....	158
7.2 MODOS DE EXCITACIÓN.....	160
7.2.1 Condiciones asimétricas de ambas ruedas excitadas mediante dos funciones de pulso con amplitudes de signo contrario.....	160
7.3 REDISEÑO DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL	161
7.4 GEOMETRÍA DE LA NUEVA SECCIÓN TRANSVERSAL	166
7.5 RESULTADOS FINALES DE LA SIMULACIÓN VIBRATORIA.....	168
7.6 DIAGRAMA DE BODE: ÁNGULO DE BALANCEO	172
8. MODELADO Y ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL SISTEMA DE SUSPENSIÓN TRASERO	174
9. PRESENTACIÓN FINAL DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN PARA UN VEHÍCULO ELÉCTRICO DE CUATRO RUEDAS CON TRACCIÓN DELANTERIA	181
10. CONCLUSIONES	182
BIBLIOGRAFÍA.....	187
ANEXOS.....	192

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Renault Twizy.	26
Figura 2. Izquierda, sistema de suspensión frontal – McPherson. Derecha, sistema de suspensión trasero – eje torsional.	31
Figura 3. Representación esquemática de las dimensiones principales del sistema de suspensión.	32
Figura 4. Geometría básica para modelo de vehículo.	33
Figura 5. Centro de gravedad y distancia entre ejes.	34
Figura 6. Pares cinemáticos.	36
Figura 7. Sistema McPherson genérico.	37
Figura 8. Modelo esquemático del sistema McPherson.	38
Figura 9. Vida útil de los neumáticos en función del ángulo Camber.	40
Figura 10. Pasos 1 y 2 del modelo de dimensionamiento geométrico.	42
Figura 11. Paso 3 del modelo de dimensionamiento gráfico.	43
Figura 12. Paso 4 del modelo de dimensionamiento gráfico.	44
Figura 13. Posición de hundimiento de rueda (irregularidad negativa).	45
Figura 14. Posición de sobresalto de rueda (irregularidad positiva).	45
Figura 15. Esquema final del análisis geométrico (dimensiones en mm).	46
Figura 16. Izquierda, nomenclatura técnica de llantas. Derecha, dimensiones de la rueda.	47
Figura 17. Modelo cinemático sistema McPherson.	48
Figura 18. Lazo vectorial estructural.	50
Figura 19. Lazo vectorial para la posición vertical del punto de contacto.	51
Figura 20. Convención de signos para la fuerza del resorte.	55
Figura 21. Convención de signos para la fuerza del amortiguador.	56

Figura 22. Modelo sistema McPherson.....	58
Figura 23. DCL del brazo de control del sistema de suspensión McPherson.	58
Figura 24. DCL de la mangueta del sistema de suspensión McPherson.....	59
Figura 25. Esquema brazos de las fuerzas aplicadas a la mangueta.	60
Figura 26. Reacciones en los trenes delantero y trasero del vehículo.....	63
Figura 27. Reacciones en el conjunto suspensión-neumático.	64
Figura 28. Parámetro de entrada: θ_1 respecto al tiempo.....	66
Figura 29. Parámetro de salida: θ_2 respecto al tiempo.....	67
Figura 30. Posición del resorte-amortiguador respecto el tiempo.	67
Figura 31. Ángulo Camber respecto al tiempo.....	68
Figura 32. Relación de suspensión respecto al tiempo.....	69
Figura 33. Posición del mecanismo articulado en el tiempo, $t = 10$ (s).....	70
Figura 34. Posición angular del cuerpo 1 (brazo de control) respecto a la posición angular del cuerpo 2 (mangueta).....	71
Figura 35. Cambio del ángulo Camber respecto a la posición del sistema resorte amortiguador.....	72
Figura 36. Velocidades angulares para el cuerpo 1 - brazo de control y cuerpo 2 - mangueta.....	73
Figura 37. Aceleraciones angulares para el cuerpo 1 y 2.	74
Figura 38. Aceleraciones en el centro de masa para el cuerpo 1 – brazo de control.	75
Figura 39. Aceleraciones en el centro de masa para el cuerpo 2 – mangueta.	76
Figura 40. Reacciones en la junta A para modelo estático.	78
Figura 41. Reacciones en la junta B para modelo estático.	78
Figura 42. Reacciones en la junta C para modelo estático.	79
Figura 43. Fuerza excitadora estática en la rueda y reacción del sistema resorte amortiguador.....	80
Figura 44. Fuerza excitadora dinámica en la rueda y reacción del sistema resorte amortiguador.....	81
Figura 45. Reacciones en la junta A para modelo dinámico.	82

Figura 46. Reacciones en la junta B para modelo dinámico.	82
Figura 47. Reacciones en la junta C para modelo dinámico.	83
Figura 48. Modelo sistema de suspensión McPherson eje delantero.	85
Figura 49. Implementación modelo Simulink.	88
Figura 50. Resalto parabólico.	91
Figura 51. Resalto Trapezoidal.	92
Figura 52. Funciones de pulso idénticas.	93
Figura 53. Funciones de pulso con amplitud de signo contrario.	94
Figura 54. Excitación Crítica.	95
Figura 55. Señales de salida-resalto parabólico.	96
Figura 56. Señales de salida-resalto trapezoidal.	97
Figura 57. Señales de salida-funciones de pulso idénticas.	98
Figura 58. Posición del sistema en el instante $t = 5.8$ [s].	99
Figura 59. Señales de salida-funciones de pulso con amplitudes contrarias.	100
Figura 60. Posición del sistema en el instante $t = 5.8$ [s].	101
Figura 61. Señales de salida-funciones de pulso en condición crítica.	102
Figura 62. Posición del sistema en el instante $t = 1.9$ [s].	103
Figura 63. Velocidad angular de la carrocería.	104
Figura 64. Aceleración angular de la carrocería.	104
Figura 65. Múltiples posiciones angulares de la carrocería en el intervalo de 4 [s].	105
Figura 66. Excitación crítica de forma constante.	106
Figura 67. Diagrama de Bode: Excitación del Neumático-Posición Carrocería. ...	108
Figura 68. Entrada y salidas del sistema.	109
Figura 69. Estabilidad del sistema carrocería lineal.	110
Figura 70. Diagrama de Bode: Excitación del Neumático-Posición Neumático. ...	111
Figura 71. Estabilidad del sistema Neumático lineal.	111
Figura 72. Diagrama de Bode: Excitación del Neumático-Posición Angular Carrocería.	112
Figura 73. Estabilidad angular de la carrocería.	113

Figura 74. Modelado Geométrico sistema de suspensión McPherson.	114
Figura 75. Vista lateral del sistema de suspensión McPherson.	115
Figura 76. Vista en corte del sistema de suspensión McPherson.	116
Figura 77. Análisis estático estructural aplicado al brazo de control.	118
Figura 78. Desplazamiento Vs Número de Elementos-Brazo de Control.	120
Figura 79. Desplazamiento Vs Número de Elementos-Mangueta.	120
Figura 80. Desplazamiento Vs Número de Elementos-Soporte Rueda.	121
Figura 81. Modelo sistema de eje torsional.	123
Figura 82. Vista frontal del sistema de suspensión.	124
Figura 83. Vista lateral del sistema de suspensión.	126
Figura 84. Dimensiones del sistema de suspensión eje a torsión.	128
Figura 85. Distribución de espacios en el vehículo.	129
Figura 86. Camber Vs Posicionamiento de la Viga.	130
Figura 87. Ratio Angulo Roll Vs Posicionamiento de la Viga.	131
Figura 88. Rigidez angular Vs Posicionamiento de la viga.	132
Figura 89. Distribución de espacios sistema eje a torsión.	133
Figura 90. Ventaja Mecánica Vs Posición Resorte-amortiguador.	134
Figura 91. Posición resorte-amortiguador.	135
Figura 92. Angulo Roll Vs Deflexión de la rueda.	137
Figura 93. Angulo Camber Vs Deflexión de la rueda.	138
Figura 94. Angulo Toe Vs Deflexión de la rueda.	138
Figura 95. DCL sistema eje a torsión.	139
Figura 96. Momento torsional	143
Figura 97. Torque en el apoyo P	144
Figura 98. Fuerza vertical en el apoyo P	145
Figura 99. Dimensiones sección transversal de la viga a torsión.	146
Figura 100. Elemento diferencial de la sección transversal.	147
Figura 101. Izquierda, Flujo cortante a lo largo de la viga. Derecha, descomposición de vectores de flujo cortante.	149
Figura 102. Cálculo de los momentos alrededor de o	150

Figura 103. Cálculo del primer momento de área.	151
Figura 104. Primera propuesta de sección transversal.	153
Figura 105. Modelo vibratorio sistema eje torsional.	157
Figura 106. Matlab-Simulink sistema eje a torsión.	159
Figura 107. Momento torsional y deformación angular.	160
Figura 108. Funciones de pulso con amplitud de signo contrario.	161
Figura 109. Variación del momento dinámico para $kr = 14879 N \cdot mrad$	163
Figura 110. Variación del ángulo de deformación para $kr = 14879 N \cdot mrad$	164
Figura 111. Momento dinámico máximo vs Deformación máxima.	166
Figura 112. Geometría sección transversal definitiva.	167
Figura 113. Variación del momento dinámico para la sección transversal definitiva.	169
Figura 114. Variación del ángulo de deformación para la sección transversal definitiva.	170
Figura 115. Resultados simulación vibratoria para el sistema eje torsional.	170
Figura 116. Comparación ángulo de balanceo entre ambos Sistemas.	171
Figura 117. Diagrama de Bode carrocería eje a torsión	172
Figura 118. Estabilidad angular de la carrocería.	173
Figura 119. Modelado geométrico sistema de suspensión eje torsional.	174
Figura 120. Vista en corte del sistema de suspensión eje torsional.	176
Figura 121. Análisis estático estructural del sistema de suspensión eje torsional para el caso 1.	178
Figura 122. Sensibilidad de la malla para el eje torsional.	179
Figura 123. Sistema de suspensión frontal y trasero.	181

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Características principales del sistema del vehículo para el diseño del sistema de suspensión.	34
Tabla 2. Elementos del mecanismo articulado.	40
Tabla 3. Parámetros de diseño del sistema de suspensión McPherson.	41
Tabla 4. Dimensiones finales de los componentes.	47
Tabla 5. Especificaciones del resorte-amortiguador para suspensión frontal.	65
Tabla 6. Reacciones obtenidas para el modelo dinámico y estático.	84
Tabla 7. Parámetros del modelo de estudio del artículo <i>Modelado Físico y Matemático del Sistema de Suspensión de un Cuarto de Vehículo</i>	90
Tabla 8. Materiales seleccionados.	117
Tabla 9. Propiedades mecánicas de los materiales seleccionados.	117
Tabla 10. Análisis Sensibilidad Brazo de Control.	119
Tabla 11. Análisis Sensibilidad Mangueta.	119
Tabla 12. Análisis Sensibilidad Soporte de Rueda.	119
Tabla 13. Resultados Críticos análisis elementos finitos.	121
Tabla 14. Dimensiones finales sistema de suspensión eje torsional.	136
Tabla 15. Parámetros para la solución del análisis estático.	143
Tabla 16. Parámetros geométricos de la primera propuesta de la sección transversal	154
Tabla 17. Proceso iterativo rediseño sección transversal.	165
Tabla 18. Parámetros y propiedades geométricos de la sección transversal final.	167
Tabla 19. Materiales seleccionados.	176
Tabla 20. Propiedades mecánicas de los materiales seleccionados.	177

Tabla 21. Análisis sensibilidad eje torsional.....	179
Tabla 22. Resultados Críticos análisis elementos finitos.	180

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
Anexo A. Lista de variables.....	192
Anexo B. Fundamentación teórica.....	209
Anexo C. Proceso de diseño conceptual	226
Anexo D. Factores de carga dinámica	230
Anexo E. Cálculos dinámicos en situación de aceleración, frenado y curva.....	233
Anexo F. Cálculo de la relación de suspensión.....	244
Anexo G. Variación del vector de dirección	247
Anexo H. Análisis de velocidades	248
Anexo I. Análisis de aceleraciones.....	250
Anexo J. Aceleraciones en los centros de gravedad de los miembros articulados	252
Anexo K. Cálculos del resorte helicoidal a compresión y coeficiente de amortiguamiento	255
Anexo L. Deducción del modelo vibratorio para medio vehículo sin barra estabilizadora.....	263
Anexo M. Parámetros de entrada para la simulación del sistema de suspensión frontal.....	266
Anexo N. Programación en Matlab de resaltos en vía	268
Anexo O. Disposición en Matlab del modelo vibratorio para el sistema de suspensión frontal.....	271
Anexo P. Resultados del análisis estructural por medio del método de elementos finitos para el sistema de suspensión frontal	274
Anexo Q. Parámetros de entrada para la simulación del sistema de suspensión trasero.....	282

Anexo R. Resultados del análisis estructural por medio del método de elementos finitos para el sistema de suspensión trasero284

Anexo S. Planos del conjunto del sistema de suspensión McPherson – Eje torsional293

RESUMEN

TITULO: DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE SUSPENSIÓN PARA UN VEHÍCULO ELÉCTRICO DE CUATRO RUEDA*

AUTORES: DUARTE GUTIERREZ DANIEL AUGUSTO
GONZALEZ MANTILLA JUAN PABLO**

PALBRAS CLAVE: Diseño, simulación, sistema de suspensión, McPherson, eje torsional, vehículo eléctrico.

DESCRIPCIÓN:

El presente proyecto tiene como propósito principal el diseño y la simulación del sistema de suspensión frontal y trasero, enfocados en las características propias de los vehículos eléctricos de cuatro ruedas. Para tal efecto, se hace un análisis de alternativas para elegir el conjunto de suspensión frontal-trasero que más se adecua a tales características, siendo ganador el conjunto McPherson para la suspensión delantera y el sistema eje torsional para la trasera.

Así pues, para ambos sistemas, se realizan análisis geométricos, cinemáticos y cinéticos que buscan establecer las dimensiones principales de los miembros que conforman los sistemas y las fuerzas presentes en estos. En ese orden de ideas, el diseño cobra forma mediante el modelado geométrico en el software CAD Solidworks, para luego ser llevado al software ANSYS con el objetivo de validar su resistencia y rigidez mecánica mediante un análisis estructural estático por medio del método de elementos finitos.

Por otra parte, se realiza la simulación vibratoria, por medio del software Matlab-Simulink, en el que se llevan el conjunto de ecuaciones diferenciales determinadas analíticamente y se analizan distintos escenarios concernientes a los ciclos de conducción a los que se ve sometido el vehículo cuando pasa por un bache o un resalto.

Finalmente, los estudios geométricos permitieron establecer las dimensiones de los sistemas a partir del criterio del desgaste mínimo del neumático del vehículo, en el que el ángulo Camber presentó una variación en un rango de $[-4^\circ, 4^\circ]$. Por su parte, la simulación vibratoria fue concluyente en que el sistema posee propiedades de rigidez y amortiguamiento necesarias para hacerlo estable ante las perturbaciones en estudio. Por último, el análisis estructural validó el diseño propuesto arrojando factores de seguridad mayores a 2, indicando que resiste correctamente las cargas impuestas.

*Trabajo de Grado

**Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director: William Pinto Hernández.

ABSTRACT

TITLE: DESIGN AND SIMULATION OF A SUSPENSION SYSTEM FOR A FOUR-WHEEL ELECTRIC VEHICLE

AUTHORS: DUARTE GUTIERREZ DANIEL AUGUSTO
GONZALEZ MANTILLA JUAN PABLO**

INDEX TERMS: Design, simulation, suspension system, McPherson, torsion axis, electric vehicle.

DESCRIPTION:

The main purpose of this project is the design and simulation of the front and rear suspension system, focused on the characteristics of four-wheel electric vehicles. For this purpose, an analysis of alternatives is made to choose the front-rear suspension set that best suits such characteristics, with the McPherson set being the winner for the front suspension and the torsion axis system for the rear.

Thus, for both systems, geometric, kinematic, and kinetic analyzes are carried out that seek to establish the main dimensions of the members that make up the systems and the forces present in them. In that order of ideas, the design takes shape through geometric modeling in the Solidworks CAD software, to then be taken to the ANSYS software to validate its strength and mechanical stiffness through a static structural analysis using the finite element method.

On the other hand, the vibrational simulation is carried out, employing the Matlab-Simulink software, in which the set of determined analytical equations are carried out and different scenarios are analyzed concerning the driving cycles to which the vehicle is subjected when passing a pothole or bump.

Finally, the geometric studies allowed to the establishment of the dimensions of the systems based on the criterion of the minimum wear of the vehicle tire, in which the Camber angle presented a variation in a range of $[-4^\circ, 4^\circ]$. For its part, the vibrational simulation was conclusive in that the system possesses rigidity and damping properties necessary to make it stable in the face of the disturbances under study. Finally, the structural analysis validated the proposed design, showing safety factors greater than 2, indicating that it correctly resists the imposed loads.

*Degree project

**Faculty of Physic-Mechanical Engineering. School of Mechanical Engineering. Director: William Pinto Hernández.

INTRODUCCIÓN

La transición energética es un reto que, en la actualidad, deben afrontar todas las naciones para poder frenar las emisiones de gases de efecto invernadero y así mitigar el calentamiento global. Sin embargo, muchas naciones, como Colombia, no han definido una estrategia clara para afrontar este cambio energético, por lo que, desde la academia, se deben impulsar proyectos que aporten a esta transformación.

En ese orden de ideas, la iniciativa de la movilidad sostenible busca implementar vehículos eléctricos que replacen a los impulsados por motores de combustión interna. No obstante, en Colombia, se carece de una organización que se dedique al diseño, producción y ensamble de este tipo de vehículos.

Así pues, el presente proyecto establece el diseño y la simulación del sistema de suspensión delantero y trasero para un vehículo eléctrico de cuatro ruedas, con el propósito de contribuir a la iniciativa de la movilidad sostenible. Por tanto, este documento describe a detalle el dimensionamiento de los elementos que conforman los sistemas de suspensión, el modelamiento cinemático y cinético, la simulación vibratoria y el análisis por medio de elementos finitos para cada una de las piezas de ambos sistemas.

En definitiva, tal contenido consolida los estudios, análisis, cálculos, procedimientos y gráficos que contribuyen al propósito global del diseño mecánico del conjunto del sistema de suspensión frontal y trasero del vehículo. Así, por ejemplo, el dimensionamiento de los sistemas contiene un enfoque gráfico que permite analizar las distintas posiciones de la suspensión y la variación de los ángulos de interés.

Sin embargo, tal análisis es también validado por un modelo matemático que contiene un conjunto de ecuaciones cinemáticas que proveen todos los valores de posición, velocidad y aceleración para cada uno de los miembros del sistema de suspensión. Finalmente, el diseño cobra forma mediante el modelado geométrico del sistema de suspensión en un software CAD, permitiendo así visualizar a detalle las características, dimensiones y materiales finales de este.

Por su parte, la simulación vibratoria resulta en un apartado esencial del presente proyecto, pues posibilita el análisis del sistema de suspensión en los diferentes ciclos de conducción, para garantizar así la estabilidad de la masa suspendida y no suspendida. De este modo, este documento se consolida como el primer paso para la construcción de vehículos eléctricos netamente colombianos, que contribuyan a un futuro energéticamente sostenible a lo largo de este territorio.

1. DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO DE GRADO

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la actualidad, los medios de transporte terrestre han desarrollado una dependencia al consumo de combustibles fósiles en los que se encuentran los derivados del petróleo y el gas. Sin embargo, este panorama energético ha sido cuestionado por las emisiones producidas en los vehículos impulsados por un motor de combustión interna, pues tan solo un estudio de la Asociación colombiana de vehículos automotores demuestra que, en promedio, se emiten cerca de 3,3 millones de toneladas de CO y 556 mil toneladas de NOx al año (Asociación colombiana de vehículos automotores [ANDEMOS], 2017), dos sustancias que pueden representar un peligro para la integridad humana.

De esta forma, en los últimos años, la energía eléctrica se ha posicionado como una alternativa de energía sostenible que permite ser incorporada en los vehículos para su correcto funcionamiento. Por tal motivo, la movilidad eléctrica se ha expandido en todo el mundo con un ritmo apresurado, con China, la Unión Europea y Estados Unidos como líderes de la transición hacia vehículos más sostenibles.

Figura 1. Renault Twizy.



Fuente: <https://www.renault.com.co/electricos/twizy.html>

Por el contrario, en Colombia, no existe una iniciativa que impulse este cambio, pues se carece de una organización que se dedique al diseño, producción y ensamble de este tipo de vehículos, por lo que el semillero de Movilidad sostenible tiene como propósito el desarrollo inicial de un prototipo de vehículo eléctrico totalmente diseñado y manufacturado en Colombia. De esta forma, se busca implementar una metodología de diseño modular, en la que se subdivida los sistemas que componen al vehículo en su totalidad.

En ese orden de ideas, uno de los subsistemas que cobra mayor relevancia dentro del diseño global del automóvil eléctrico es el sistema de suspensión, que tiene como función mantener el contacto continuo de las ruedas con el terreno proporcionando: control, seguridad y estabilidad al cuerpo del vehículo, mitigando las cargas de impacto. Sin embargo, dado que su morfología, diseño y estructura son diferentes al de los automóviles de combustión interna actualmente usados, y que la mayoría de las suspensiones son diseñados para este tipo de vehículos, se hace necesario realizar el diseño del sistema de suspensión enfocado en las características propias de los vehículos eléctricos.

1.2 JUSTIFICACIÓN PARA SOLUCIONAR EL PROBLEMA

Basados en el propósito de desarrollar un prototipo de un automóvil eléctrico de cuatro ruedas completamente diseñado, manufacturado y ensamblado en Colombia, se concluye, por parte del semillero de Movilidad sostenible, que la mejor estrategia a implementar es la de establecer el diseño global del automóvil eléctrico bajo una concepción modular, siendo el sistema de suspensión uno de los módulos del vehículo eléctrico que requiere un análisis y diseño de manera enfática y particular.

Por tal motivo, el correcto diseño y simulación del sistema de suspensión permitirá que este se incorpore correctamente junto con los demás módulos, generando

entonces un trabajo de ingeniería conjunta en la que todos los esfuerzos individuales se direccionen para proveer un prototipo de automóvil eléctrico completamente funcional, cumpliendo con las especificaciones de diseño previamente definidas.

Así pues, el impacto de este proyecto, en conjunto, tendrá repercusiones positivas para la sociedad colombiana, la cual se ha caracterizado por ser dependiente de los combustibles fósiles para su movilidad, debido a que, dentro del país, no se ha desarrollado una iniciativa que al menos establezca la posibilidad del uso de energías alternativas y sostenibles para el transporte humano. Por lo tanto, el semillero de movilidad sostenible se da en la tarea de desarrollar prototipos de vehículos eléctricos con el objetivo de cambiar el paradigma de movilización en bienestar del medio ambiente y la sociedad.

A su vez, la iniciativa del semillero de movilidad sostenible permitirá, a largo plazo y en el contexto nacional, el traspaso del uso de combustibles fósiles a una movilidad híbrida o totalmente eléctrica, favoreciendo la disminución de los GEI. De esta forma, se aportará al cumplimiento de las normativas internacionales que tienen como propósito la disminución de emisiones de efecto invernadero, en las que se destacan el protocolo de Kioto y el acuerdo de París, los cuales han sido firmados por Colombia. Así mismo, la implementación de este tipo de vehículos permitirá la aplicación de una normativa nacional tal como la EURO 6d, usada en la Unión Europea para el control de la contaminación ambiental en el sector transporte.

En definitiva, el desarrollo de este proyecto no sólo tendrá implicaciones en el marco de la movilidad sostenible, sino que constituirá en un ejercicio completo de ingeniería en el que se aplicarán los conocimientos teórico-prácticos obtenidos a lo largo de la formación profesional como ingenieros mecánicos en pro de la industria y la sociedad.

1.3 OBJETIVOS DEL TRABAJO DE GRADO

1.3.1 Objetivo general

Desarrollar un modelo de un sistema de suspensión enfocado en las características propias de un vehículo eléctrico de cuatro ruedas, promoviendo la misión institucional de proporcionar apoyo y generar conocimiento a la industria automotriz colombiana.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Diseñar un sistema de suspensión para un vehículo eléctrico de cuatro ruedas que cumpla las siguientes especificaciones funcionales:
 - I. Peso total del vehículo (incluyendo carga muerta y dos pasajeros) de 700 [kg].
 - II. Distribución de carga en los ejes delantero y trasero de 60% y 40% respectivamente.
 - III. Tracción delantera y distancia entre ejes de 1800 [mm].

- Desarrollar un modelo dinámico que permita simular el comportamiento del sistema de suspensión por medio de MATLAB-SIMULINK.

- Modelar en un software tipo CAD los componentes del sistema de suspensión para visualizar a detalle las dimensiones y características finales del sistema.

1.4 JUSTIFICACIÓN DE LA SOLUCIÓN

El proyecto global del desarrollo de un prototipo de automóvil eléctrico establece la necesidad de abordar cada sistema por individual, para el caso del sistema de suspensión se dividirá en dos partes: el diseño y la simulación. El diseño mecánico se entiende como todo el proceso de dar forma, dimensiones y seleccionar materiales para posteriormente establecer una tecnología de fabricación que permita su respectiva construcción. La simulación, por su parte, busca predecir ciertos comportamientos del sistema ante determinadas condiciones para proveer una aproximación de lo que sucedería en la realidad.

Así pues, la herramienta de la simulación constituye un gran aporte al proceso de diseño, pues no solo permitirá observar el comportamiento dinámico del sistema, sino que, ante la complejidad geométrica que exige el diseño de la suspensión para un vehículo de cuatro ruedas, se hace necesario e indispensable establecer las implicaciones cinemáticas y cinéticas que generan ciertas configuraciones dimensionales del sistema de suspensión.

Siendo un ejemplo, a lo anterior mencionado, el reto que conlleva el correcto dimensionamiento de los brazos del sistema suspensión. Por lo que, ante una simulación, se podrá establecer la configuración geométrica idónea que garanticen las fuerzas de adherencia necesarias al momento de tomar una curva durante la conducción.

Por su parte, el establecer un modelo vibratorio robusto, en el que se incluyan la mayoría de las masas de interés, permite analizar los efectos de las frecuencias de oscilación en los pasajeros durante los ciclos de conducción. De este modo, se conduce a una etapa de análisis que da la posibilidad de comparar los valores, proporcionados por la literatura, sobre las frecuencias de oscilación máximas

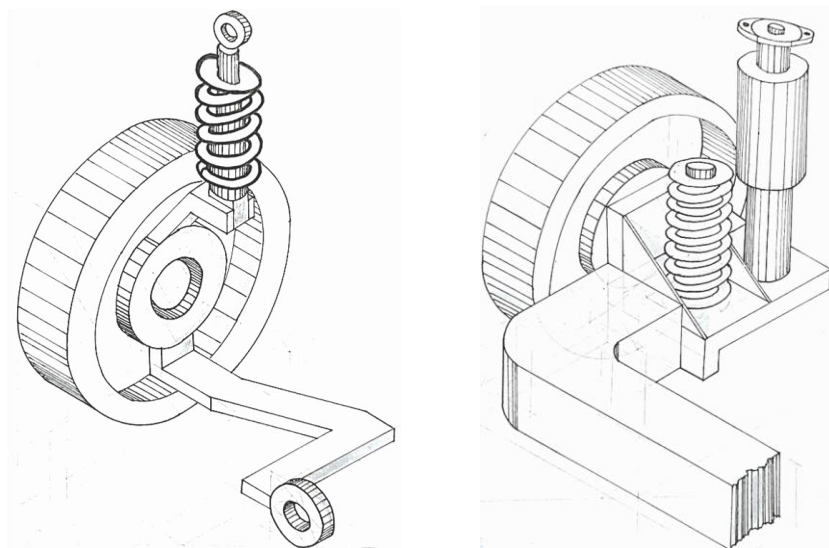
soportadas por los ocupantes para que su nivel de tolerancia física se encuentre siempre en el margen del confort.

1.5 ESPECIFICACIÓN DE LA ALTERNATIVA GANADORA

La fundamentación teórica necesaria para establecer las distintas alternativas de conjunto de suspensión delantero y trasero es presentada en el **Anexo B. Fundamentación teórica**. Así mismo, el análisis de viabilidad de las alternativas propuestas se encuentra consignadas en el **Anexo C. Proceso de diseño conceptual**

En este orden de ideas, la alternativa que obtuvo el mayor puntaje en la evaluación anterior fue la configuración de sistema McPherson y eje torsional, por lo que se decide realizar el proceso de diseño y simulación a dicha propuesta. A continuación, se presenta una vista preliminar y conceptual de cada sistema de suspensión para una rueda del tren delantero y trasero.

Figura 2. Izquierda, sistema de suspensión frontal – McPherson. Derecha, sistema de suspensión trasero – eje torsional.



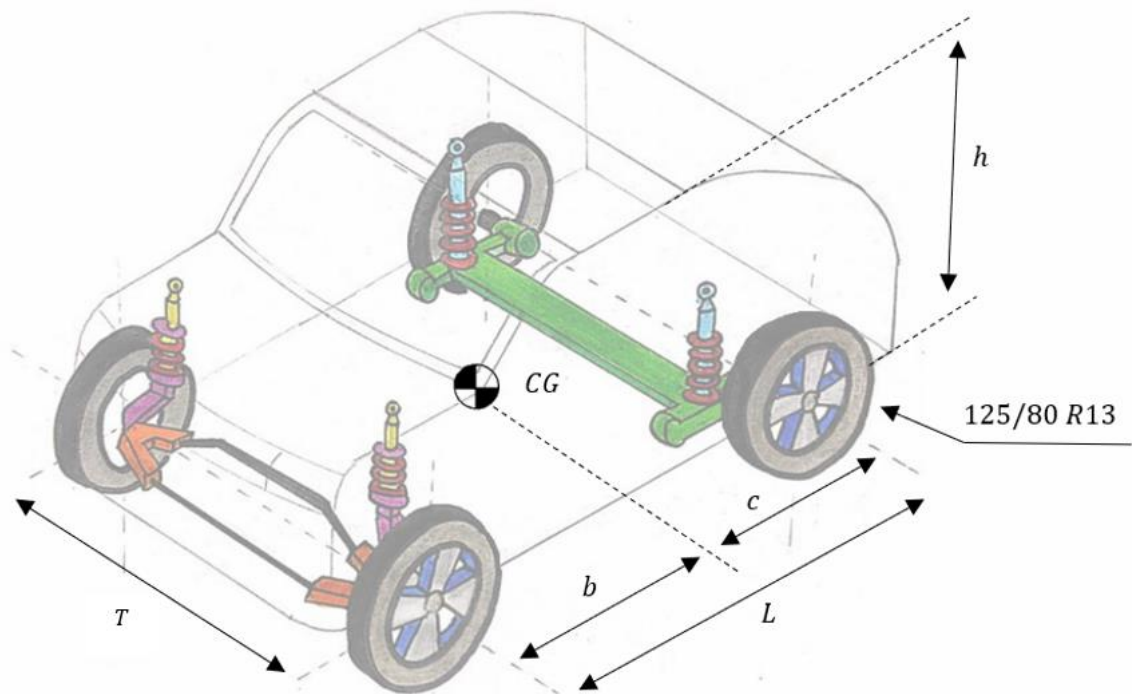
Fuente: Autores

2. ANÁLISIS GEOMÉTRICO, CINEMÁTICO Y CINÉTICO DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN FRONTAL – SUSPENSIÓN MCPHERSON

2.1 DEFINICIÓN DE LOS PARÁMETROS GEOMÉTRICOS Y ESPECIFICACIONES FUNCIONALES

El diseño del sistema de suspensión parte de la especificación de las dimensiones geométricas básicas y los datos de funcionamiento del vehículo para proveer seguridad, confort y maniobrabilidad en los ciclos de conducción a los que se someterá el conjunto de elementos del sistema. De esta forma, se establece un esquema general del vehículo, donde se acotarán las dimensiones necesarias para el inicio del diseño del sistema de suspensión.

Figura 3. Representación esquemática de las dimensiones principales del sistema de suspensión.

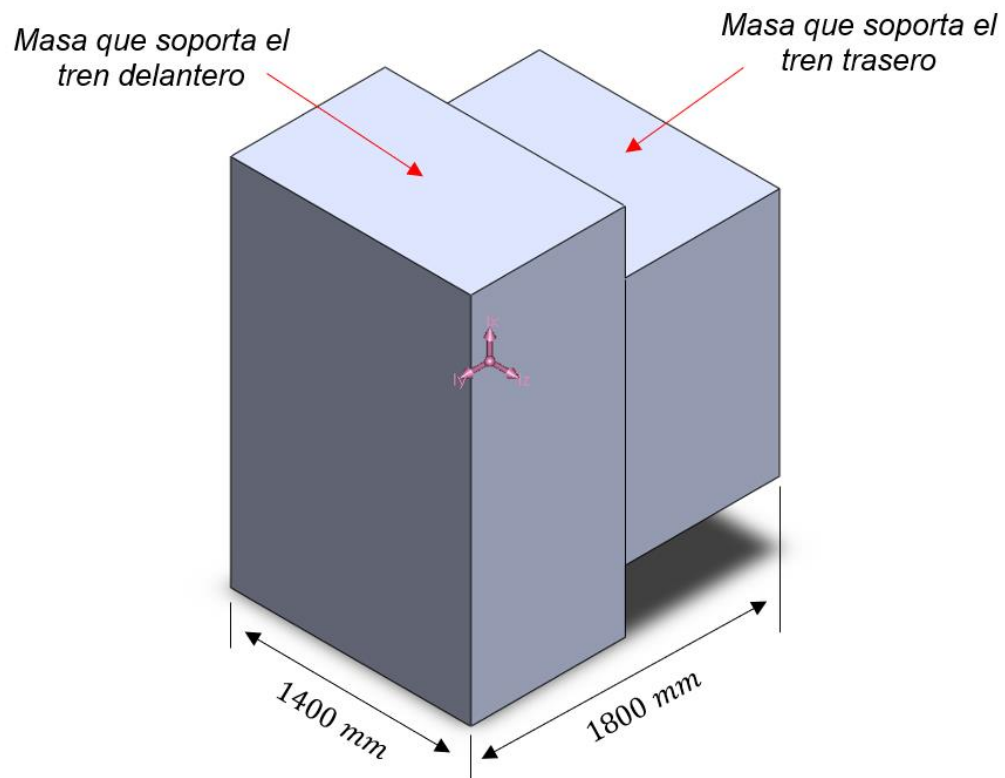


Fuente: autores

La masa total del vehículo estará distribuida entre el eje delantero y trasero en proporciones de 60% y 40%, respectivamente. En el tren delantero se ubicará el sistema de transmisión de potencia, motor del vehículo y la masa de los pasajeros, mientras que en el tren trasero se dispondrá el embalaje.

Dicho esto, se hace necesario modelar el vehículo con una geometría básica que permita hallar el centro de gravedad, con la distribución de masas requerida, para lo que se propone el siguiente cuerpo construido en Solidworks:

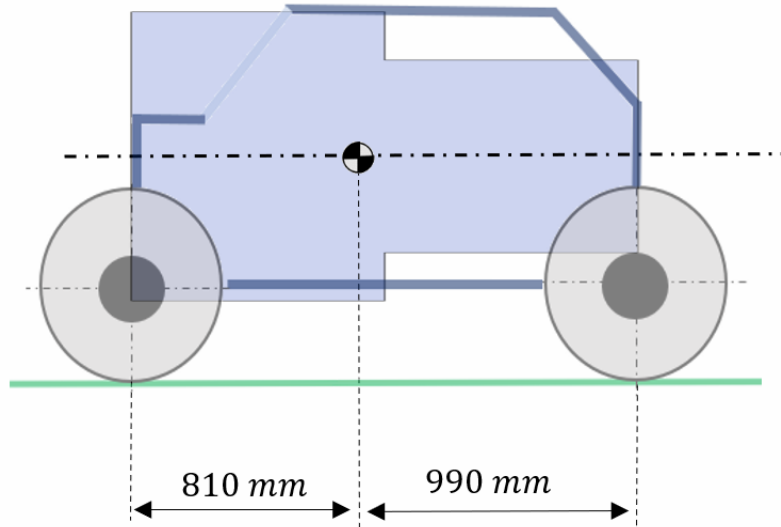
Figura 4. Geometría básica para modelo de vehículo.



Fuente: Autores

A partir de la herramienta de propiedades físicas es posible ubicar el centro de gravedad, permitiendo de esta forma hallar las distancias entre el tren frontal y trasero a dicho punto.

Figura 5. Centro de gravedad y distancia entre ejes.



Fuente: Autores

Tabla 1. Características principales del sistema del vehículo para el diseño del sistema de suspensión.

No.	característica	símbolo	valor	unidad
1	<i>Potencia del motor eléctrico</i>	P	~ 17	HP
2	<i>Velocidad máxima del vehículo</i>	v_{max}	80	km/h
3	<i>Dimensiones geométricas</i>			
	3.1	<i>Distancia entre ejes (Wheelbase)</i>	L	1800 mm
	3.2	<i>Distancia del eje frontal al centro de gravedad</i>	b	810 mm
	3.3	<i>Distancia del eje trasero al centro de gravedad</i>	c	990 mm
	3.4	<i>Distancia entre ruedas (Track)</i>	T	1400 mm
	3.5	<i>Altura del vehículo</i>	h	1450 mm
4	<i>Masa total del vehículo</i>	m	700	kg

5	<i>Neumáticos del vehículo → 125/80 R13</i>				
	5.1	<i>Diámetro del neumático</i>	D_{neu}	13	<i>in</i>
	5.2	<i>Ancho del neumático</i>	a_{neu}	125	<i>mm</i>
	5.3	<i>Altura o perfil del neumático</i>	p_{neu}	100	<i>mm</i>
6	<i>Número de asientos o plazas</i>		n_{plazas}	2	<i>plazas</i>
7	<i>Diseño de la suspensión</i>				
	7.1	<i>Sistema de suspensión frontal</i>	<i>McPherson</i>		
	7.2	<i>Sistema de suspensión trasera</i>	<i>Eje torsional</i>		

Fuente: Autores

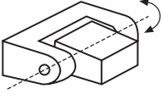
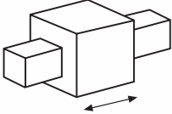
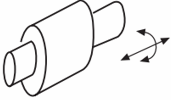
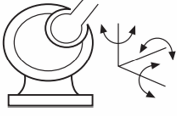
Por otra parte, dado que los sistemas de suspensión frontal y trasero poseen características geométricas, cinemáticas y cinéticas propios de cada uno, se realizará el diseño y simulación con estas distribuciones de masa para obtener resultados más cercanos a las condiciones reales del vehículo.

2.2 DIMENSIONES DEL MECANISMO ARTICULADO PARA EL SISTEMA DE SUSPENSIÓN MCPHERSON

El análisis y síntesis del mecanismo del sistema de suspensión Mcpherson se puede realizar partiendo de un estudio sobre la cinemática bidimensional de este, considerando el movimiento en un plano trasversal vertical a través del centro de la rueda.

Así mismo, este análisis está estrechamente ligado a la obtención de los grados de libertad del mecanismo, el cual está relacionado con el número de eslabones y los tipos de restricciones cinemáticas de las juntas que unen los miembros del sistema de suspensión, como se muestra en la figura 6.

Figura 6. Pares cinemáticos.

<i>nombre del par</i>	<i>forma geométrica</i>	<i>grados de libertad</i>
<i>Revoluta R</i>		1
<i>Prisma P</i>		1
<i>Cilindro C</i>		2
<i>Esfera S</i>		3

Fuente: HAPIAN-SMITH, Julian. An introduction to modern vehicle design. Oxford: Butterworth-Heinemann. 2002.

Cada junta se asocia a un número de grados de libertad y se pueden clasificar en dos grupos: Pares inferiores (conexiones que tienen un solo grado de libertad) y pares superiores (dos o más grados de libertad).

De esta forma, se ha comprobado que un mecanismo de movilidad M , formado por un lazo cinemático cerrado, está relacionado con el número de eslabones y la cantidad de pares superiores e inferiores de las juntas del mecanismo articulado. Dicho esto, según el criterio de Kutzbach, la cantidad de grados de libertad de un mecanismo se puede definir como:

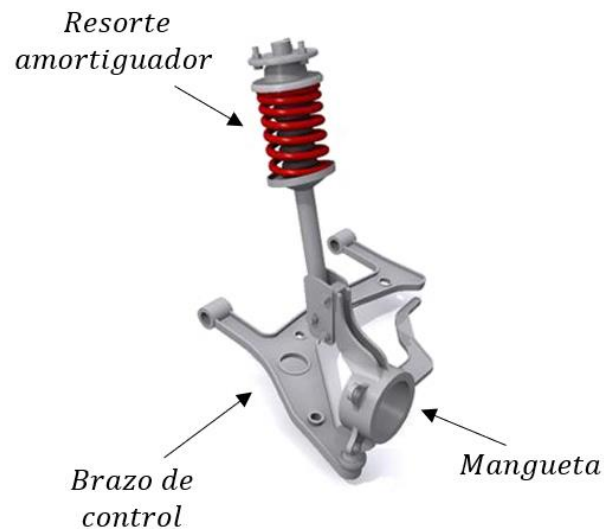
$$M = 3(n - 1) - j_s - 2j_i$$

Donde: n es el número total de eslabones; j_s , el numero de pares superiores; j_i , la cantidad de pares inferiores.

No obstante, para poder definir la movilidad del sistema de suspensión McPherson, primero se debe identificar los elementos que lo constituyen, los cuales se pueden agrupar en tres componentes principales: mangueta, brazo de control y resorte-amortiguador.

A continuación, se presenta un sistema de suspensión McPherson genérico, donde se observa cada uno de los componentes nombrados:

Figura 7. Sistema McPherson genérico.

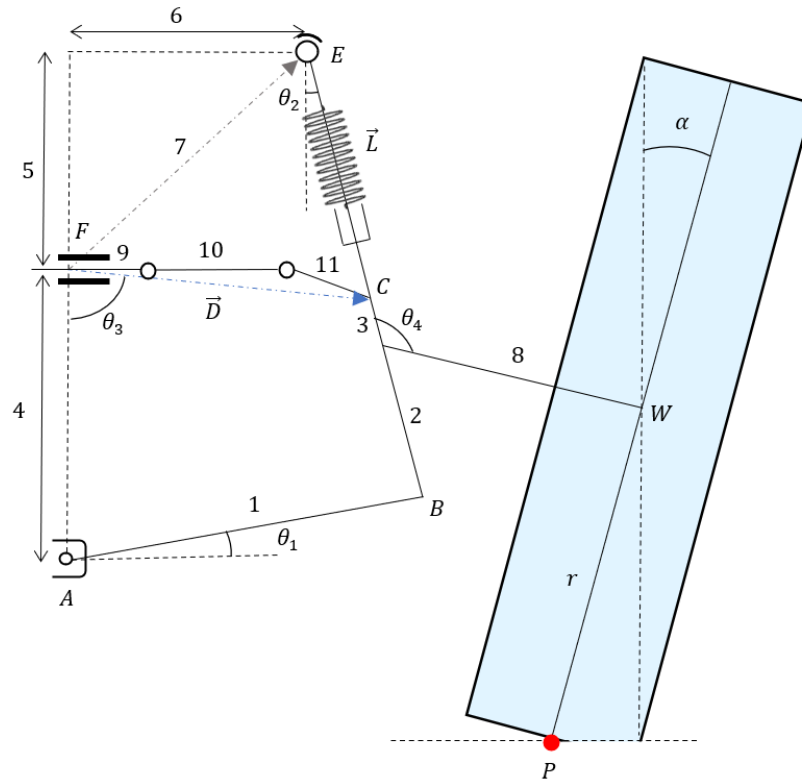


Fuente: <https://www.mitsubishi-motors.com.pe/blog/como-funciona-sistema-suspension/>

Dentro del modelo esquemático también es posible identificar cada uno de los componentes, donde:

- r_1 : Brazo de control
- r_2, r_3, r_8 : Mangueta
- L : sistema resorte amortiguador

Figura 8. Modelo esquemático del sistema McPherson.



Fuente: Autores

Ahora bien, los pares cinemáticos que presenta el modelo de sistema McPherson propuesto son:

- A : Junta de revoluta (1 GDL)
- B : Junta de revoluta (1 GDL)
- C : Junta fija (0 GDL)
- E : Junta esférica (3 GDL)
- F : Junta cilíndrica (2 GDL)

Cabe notar que el par F no se tendrá en cuenta para el cálculo de los grados de libertad del sistema de suspensión, ya que no pertenece al mecanismo articulado en estudio.

Definidos los pares cinemáticos del sistema y sabiendo que la cantidad de eslabones del sistema es $n = 3$, la movilidad del mecanismo está dada por:

$$M = 3(3 - 1) - 1 - 2(2) \quad \rightarrow \quad M = 1 \text{ GDL}$$

El anterior resultado de la ecuación de Kutzbach indica que para poder definir completamente la cinemática del sistema de suspensión McPherson es necesario conocer únicamente una posición de un elemento para definir el de los demás, que para este caso será la posición angular del brazo de control o θ_1 .

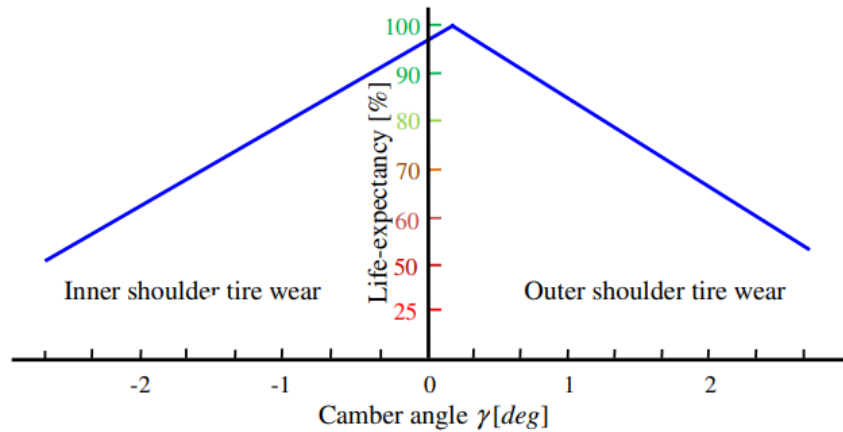
No obstante, el anterior resultado solo es aplicable para el análisis bidimensional del mecanismo articulado, pues, para el estudio tridimensional del sistema, además de conocer la posición angular del brazo de control, entra en juego la posición de la dirección, que permitirá una rotación de la rueda del vehículo respecto al eje vertical.

2.2.1 Dimensionamiento del mecanismo articulado. Obtenidos los grados de libertad del sistema de suspensión, se debe dimensionar el mecanismo articulado, donde a cada eslabón se le proporcionará una medida que permita que el ángulo Camber no exceda $\pm 4^\circ$, incluso en condiciones de excitación máxima, que para este caso será el desplazamiento máximo de los neumáticos.¹

Así mismo, se debe mantener el ángulo Camber lo más neutro posible ($\approx 0^\circ$), debido a que un aumento del ángulo Camber, ya sea positivo o negativo, generara un desgaste progresivo de los neumáticos, disminuyendo su vida útil, como se muestra en la siguiente figura.

¹ REIMPELL, Jorsen; STOLL, Helmut; JURGEN, Betzler. The automotive Chassis: Engineering Principles. Butterworth-Heinemann, London, 2001.

Figura 9. Vida útil de los neumáticos en función del ángulo Camber.



Fuente: LAJQI, Shpetim. Suspension and steering system development of a four wheel drive and four wheel steered terrain Vehicle

Dicho esto, a continuación, se presenta una tabla donde se listan los elementos que componen el mecanismo articulado y lo que representa cada uno de ellos:

Tabla 2. Elementos del mecanismo articulado.

<i>Elemento</i>	<i>Descripción</i>
r_1	<i>Longitud brazo de control</i>
r_2	<i>Longitud mangueta desde punto B a eje de la rueda</i>
r_3	<i>Longitud mangueta desde el eje de la rueda al resorte – amortiguador</i>
$r_4 + r_5$	<i>Longitud vertical del pivote del brazo de control a la rotula del resorte – amortiguador</i>
r_6	<i>Longitud horizontal del pivote del brazo de control a la rotula del resorte – amortiguador</i>
r_8	<i>Longitud del eje de la rueda</i>
R	<i>Radio de la rueda</i>
θ_4	<i>Angulo entre el eje de la rueda y la mangueta</i>

Fuente: Autores

En este orden de ideas, surge la necesidad de establecer una estrategia o método para definir las dimensiones enunciadas en la tabla anterior. De esta forma, se decide realizar inicialmente un análisis gráfico con el que se obtendrán las medidas de los miembros principales del mecanismo articulado que componen el sistema de suspensión frontal, donde el parámetro principal, sobre el que se realizará el dimensionamiento de los elementos, será el ángulo Camber, debido a que, como se mencionó, este influye considerablemente en el rendimiento y la vida útil de los neumáticos durante los ciclos de conducción.

De esta forma, el diseño del sistema de suspensión partirá suponiendo que el vehículo se encuentra inicialmente cargado. En este estado, el ángulo Camber de las ruedas tiende a hacerse nulo, lo que se traduce en un desgaste regular y mínimo de los neumáticos.

Por tanto, para poder dimensionar el sistema de suspensión frontal, se parten de los siguientes requerimientos de diseño:

Tabla 3. Parámetros de diseño del sistema de suspensión McPherson.

<i>Parámetro</i>	<i>Valor</i>
<i>Excitación máxima vertical del neumático</i>	$\pm 100 \text{ mm}$
<i>Dimensión típica de irregularidades del terreno</i>	$\pm 20 \text{ mm}$
<i>Ángulo Camber límite</i>	$\pm 4^\circ$
<i>Ángulo Camber típico</i>	$\pm 1^\circ 20'$

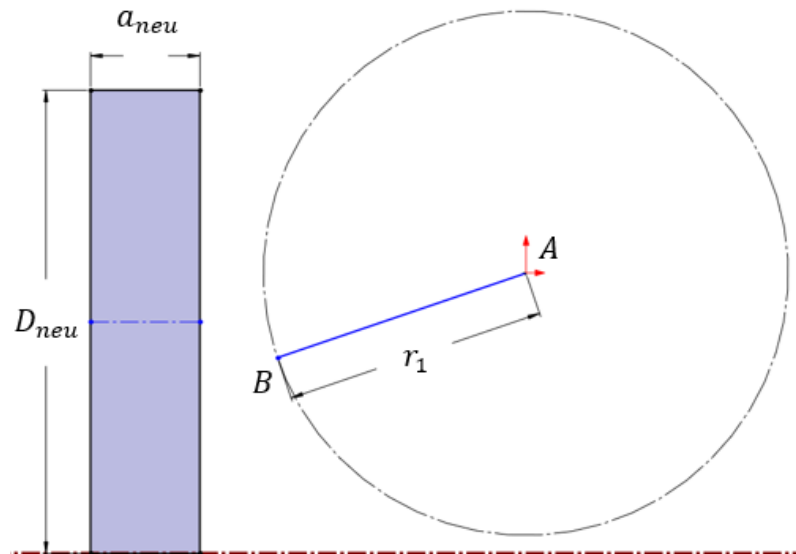
Fuente: Autores

2.2.2 Análisis y síntesis del mecanismo articulado. Para el dimensionamiento de los miembros articulados del sistema Mcpherson se utilizó el siguiente procedimiento de dimensionamiento gráfico:

Paso 1: Se ubica el punto A sobre el cual rotará el brazo de control (r_1) y determinando la longitud de este, se traza una circunferencia sobre la cual se desplazará el punto B.

Paso 2: Posterior a la ubicación del brazo de control, se procede a proyectar la línea del terreno sobre el cual estará apoyada la rueda.

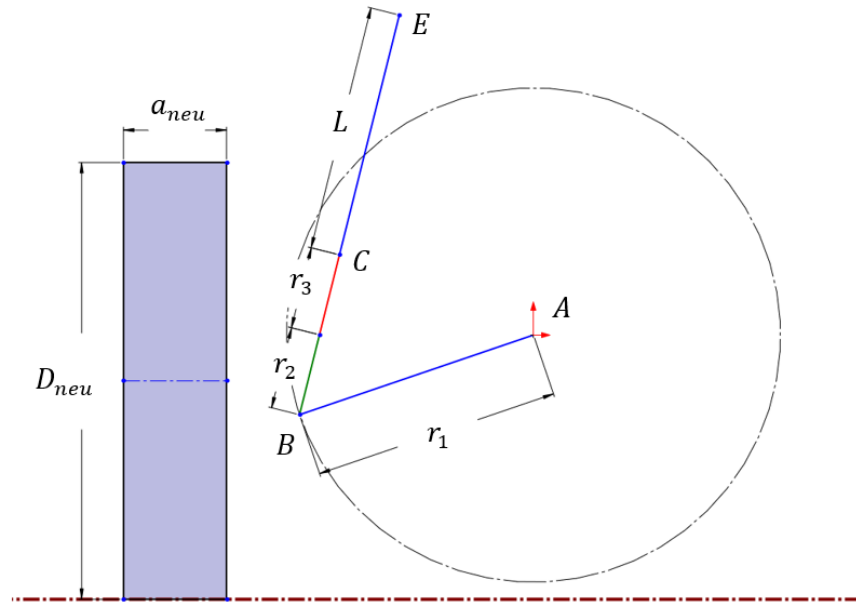
Figura 10. Pasos 1 y 2 del modelo de dimensionamiento geométrico.



Fuente: Autores

Paso 3: Se dibujan tres rectas paralelas y coincidentes, conectadas al brazo de control, que corresponderán a los miembros r_2, r_3 y L . Este último hace referencia al vector del sistema resorte-amortiguador.

Figura 11. Paso 3 del modelo de dimensionamiento gráfico.



Fuente: Autores

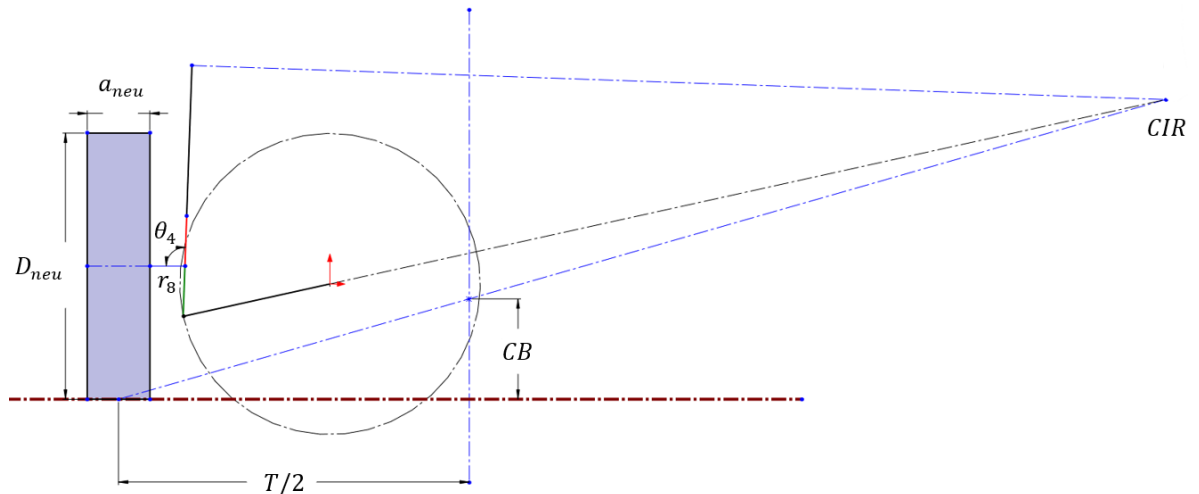
Paso 4: Graficando la recta r_8 de forma perpendicular al perfil de la rueda y coincidente con el punto de conexión de r_2 y r_3 , se especifica el ángulo θ_4 , que corresponderá a la inclinación del sistema resorte – amortiguador respecto a la vertical en la posición neutra del vehículo.

Ahora bien, se hace necesario determinar el CIR del mecanismo articulado, para lo cual se realiza una proyección paralela al brazo de control y otra perpendicular al eje del sistema resorte- amortiguador.

Seguido a esto, se construye una recta que corte el punto medio de contacto de la rueda y el CIR. Así mismo, se traza la recta que define la línea media del vehículo y que se encuentra a la mitad de la distancia entre ruedas, $T/2$. Se localiza entonces el punto de corte entre estas dos rectas, para así hallar el centro de balanceo del vehículo CB .

Este, a su vez, se configurará de tal forma que se encuentre lo más alejado posible del terreno, garantizando una tasa de cambio de Camber positivo y disminuyendo la transmisión de las fuerzas centrífugas generadas en la suspensión al centro de gravedad del vehículo.

Figura 12. Paso 4 del modelo de dimensionamiento gráfico.

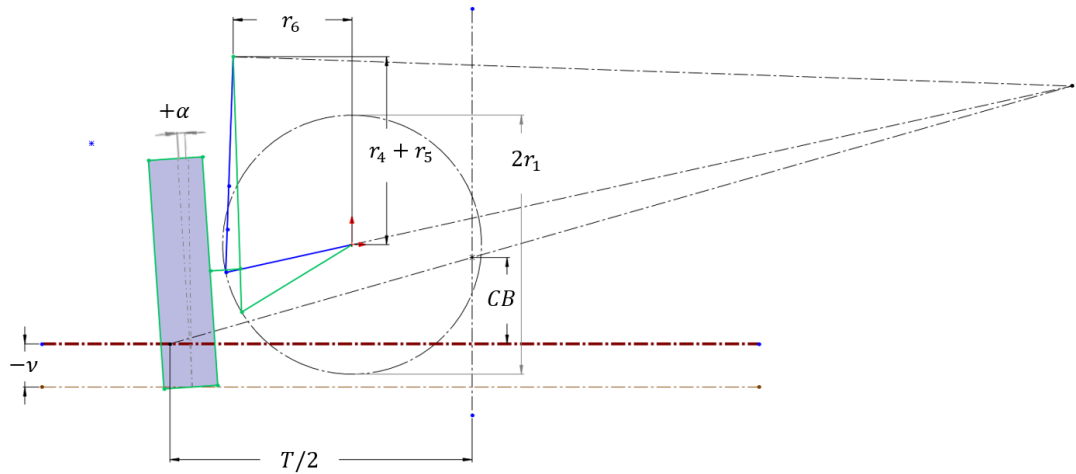


Fuente: Autores

Paso 5: Se trazan las posiciones extremas del mecanismo con base en los valores de excitación máxima del neumático. Luego, se configura el neumático del sistema de suspensión de tal forma que el punto medio de la rueda sea coincidente con la línea del terreno en las posiciones extremas predefinidas.

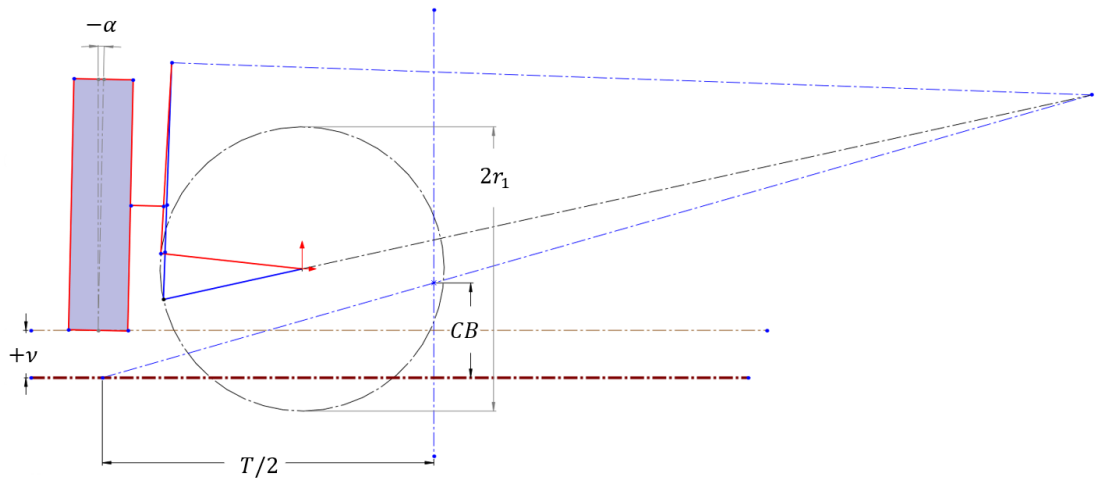
Nótese que el único miembro que cambiará de longitud será el sistema resorte-amortiguador. Finalmente, trazando una recta vertical y otra que una los puntos medios de la rueda, se obtienen los ángulos Camber en las posiciones extremas del mecanismo ($\pm\nu$), manteniendo siempre dicho ángulo entre los límites establecidos en los parámetros de diseño.

Figura 13. Posición de hundimiento de rueda (irregularidad negativa).



Fuente: Autores

Figura 14. Posición de sobresalto de rueda (irregularidad positiva).



Fuente: Autores

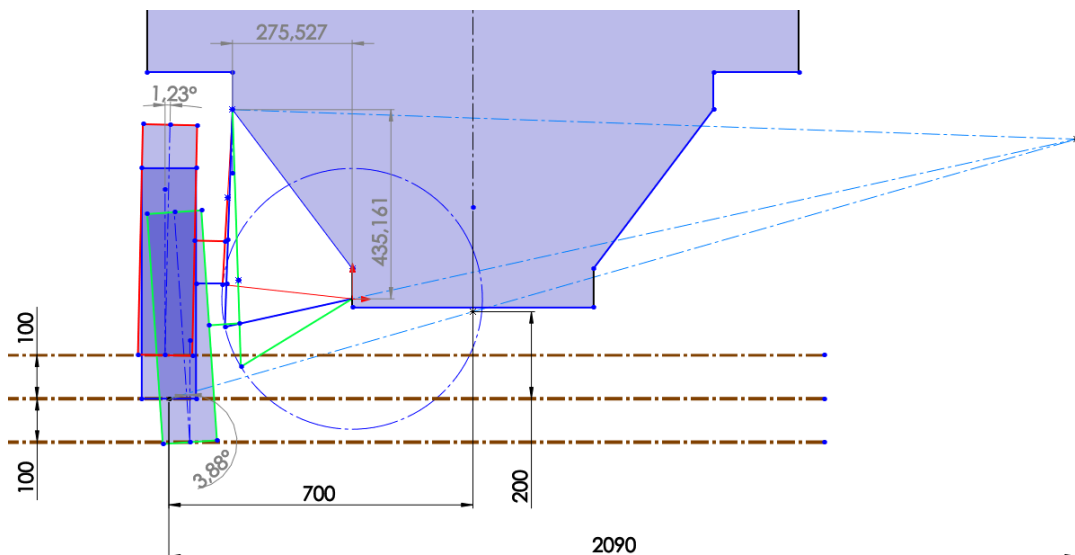
El modelo de dimensionamiento presentado se basa en la adecuación de las medidas en función del ángulo Camber y el centro de balanceo. No obstante, la obtención de las medidas se realizó a través de un proceso iterativo, donde se buscó así mismo una proporcionalidad entre los miembros del mecanismo articulado y las dimensiones geométricas del vehículo en general. De esta forma, se escogió que la

mangueta, el brazo de control y el sistema resorte-amortiguador tuvieran medidas similares. Así mismo, se encontró que la dimensión que no afectaba de forma significativa la variación del ángulo Camber fue la longitud del eje de la rueda.

Esta última característica es de gran importancia e impacta de forma significativa al diseño del sistema de frenado regenerativo, dado que se podrá dar mayor flexibilidad a las dimensiones de estos componentes por el espacio disponible.

A continuación, se presenta un esquema general del sistema de suspensión McPherson, en sus tres posiciones principales: estado de reposo, sobresalto y hundimiento. Así mismo, se presentan los valores de los ángulos Camber en sus posiciones extremas y la dimensión establecida del centro de balanceo.

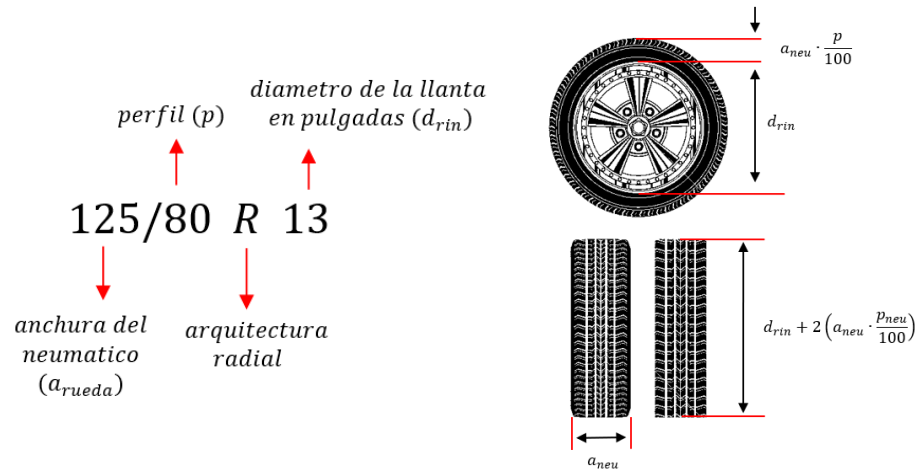
Figura 15. Esquema final del análisis geométrico (dimensiones en mm).



Fuente: Autores

Cabe notar que el radio de la rueda se determina a partir de la nomenclatura para la llanta seleccionada, que para este caso es 125/80 R13, misma llanta que usa el Renault TWIZY. A continuación, se explica la nomenclatura técnica de llantas en vehículos:

Figura 16. Izquierda, nomenclatura técnica de llantas. Derecha, dimensiones de la rueda.



Fuente: autores

De esta forma, el radio de la llanta se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$r = \frac{13 \cdot 25,4 + 2(125 \cdot 0,8)}{2} = 265,1 \text{ mm}$. Finalmente, a partir del análisis geométrico se obtuvo que:

Tabla 4. Dimensiones finales de los componentes.

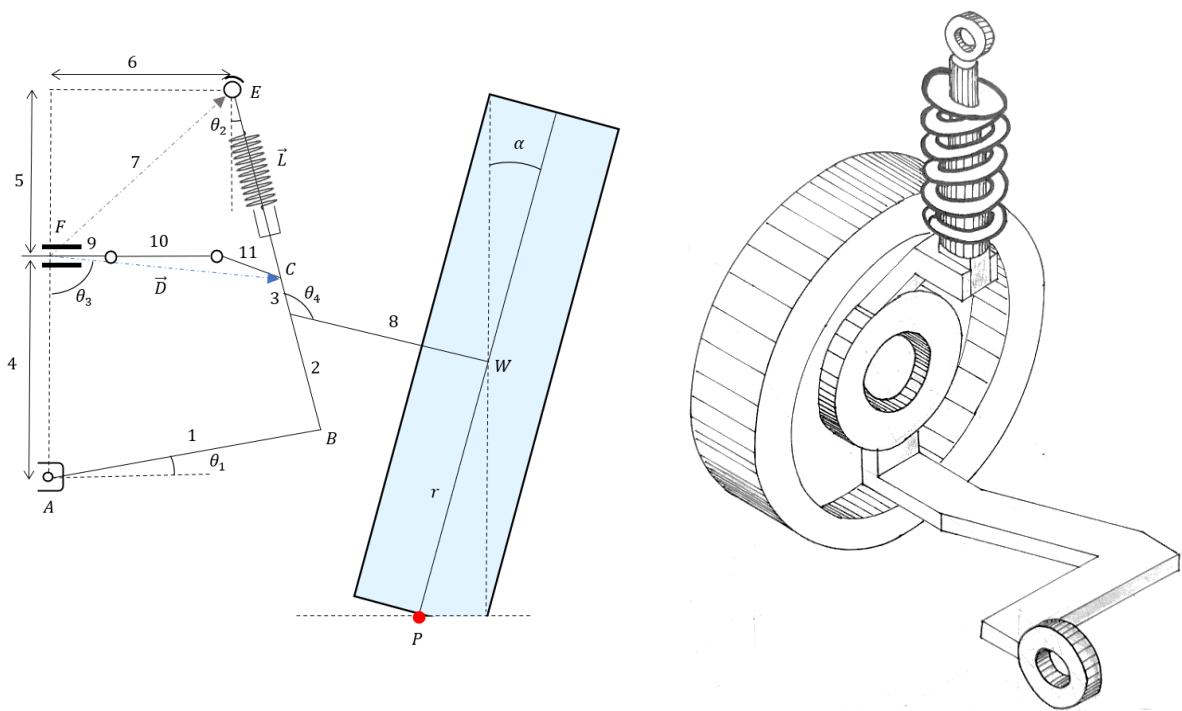
<i>Elemento del miembro articulado</i>	<i>Dimensión final</i>
r_1	300 mm
r_2	100 mm
r_3	100 mm
$r_4 + r_5$	435,16 mm
r_6	275,53 mm
r_8	132,5 mm
r	265,1 mm
θ_4	92 °

Fuente: autores

2.3 MODELO DINÁMICO DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN MCPHERSON

El estudio cinemático del sistema McPherson tiene como principal objetivo establecer un modelo analítico que permita conocer la variación de las dimensiones y posiciones con respecto al tiempo de los miembros que componen el mecanismo. Para ello se realiza el modelo cinemático simplificado del mecanismo, tal como se muestra a continuación.

Figura 17. Modelo cinemático sistema McPherson.



Fuente: autores

\vec{r}_1 : Vector de posición del brazo de control.

\vec{r}_2 : Vector de posición del punto de conexión mangueta-brazo de control al eje de la rueda.

\vec{r}_3 : Vector de posición de la dirección respecto al eje de la rueda.

\vec{r}_4 : Distancia vertical del apoyo de la dirección respecto al apoyo del brazo de control.

\vec{r}_5 : Distancia vertical de la rótula del amortiguador-resorte respecto al apoyo de la dirección.

\vec{r}_6 : Distancia horizontal de la rótula del amortiguador-resorte respecto al apoyo de la dirección.

\vec{r}_7 : Vector imaginario desde el apoyo de la dirección hasta la rótula del resorte amortiguador.

\vec{r}_8 : Vector de posición del eje de la rueda.

\vec{r} : Vector de posición del punto de contacto de la rueda con el terreno al centro de esta.

\vec{L} : Vector longitud del sistema resorte-amortiguador.

\vec{D} : Vector resultante de los miembros articulados de la dirección.

α : Ángulo Camber.

En primera instancia, se procede a definir los vectores anteriormente mencionados en términos de los vectores unitarios, $\vec{v} = x\hat{i} + y\hat{j}$. De esta forma, se obtiene que:

$$\vec{r}_1 = r_1 \cos(\theta_1) \hat{i} + r_1 \sin(\theta_1) \hat{j}$$

$$\vec{r}_2 = -r_2 \sin(\theta_2) \hat{i} + r_2 \cos(\theta_2) \hat{j}$$

$$\vec{r}_a = -r_a \sin(\theta_2) \hat{i} + r_a \cos(\theta_2) \hat{j}$$

$$\vec{r}_4 = -r_4 \hat{j} \quad ; \quad \vec{r}_5 = r_5 \hat{j} \quad ; \quad \vec{r}_6 = r_6 \hat{i}$$

$$\vec{r}_8 = r_8 \cos(\alpha) \hat{i} - r_8 \sin(\alpha) \hat{j}$$

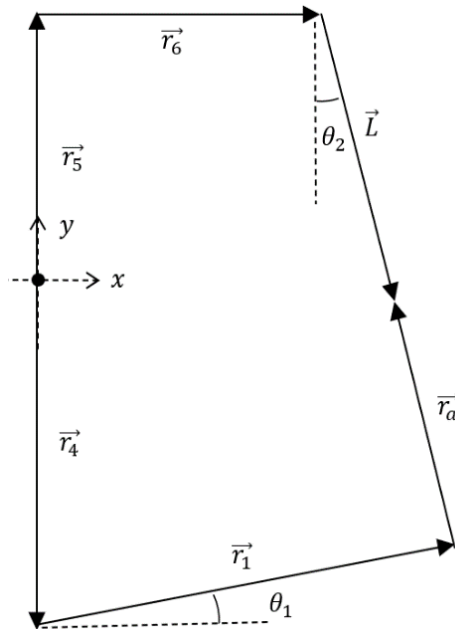
$$\vec{r} = -r \sin(\alpha) \hat{i} - r \cos(\alpha) \hat{j}$$

$$\vec{L} = L \sin(\theta_2) \hat{i} - L \cos(\theta_2) \hat{j}$$

$$\vec{D} = D \sin(\theta_3) \hat{i} - D \cos(\theta_3) \hat{j}$$

2.3.1. Construcción del lazo vectorial estructural. A partir del lazo cinemático de posición se plantea la siguiente ecuación vectorial.

Figura 18. Lazo vectorial estructural.



Fuente: Autores

$$\vec{r}_a = \vec{r}_2 + \vec{r}_3$$

$$\vec{r}_5 + \vec{r}_6 + \vec{L} = \vec{r}_4 + \vec{r}_1 + \vec{r}_a$$

$$\text{En } x: r_6 + L \text{sen}(\theta_2) = r_1 \cos(\theta_1) - r_a \text{sen}(\theta_2)$$

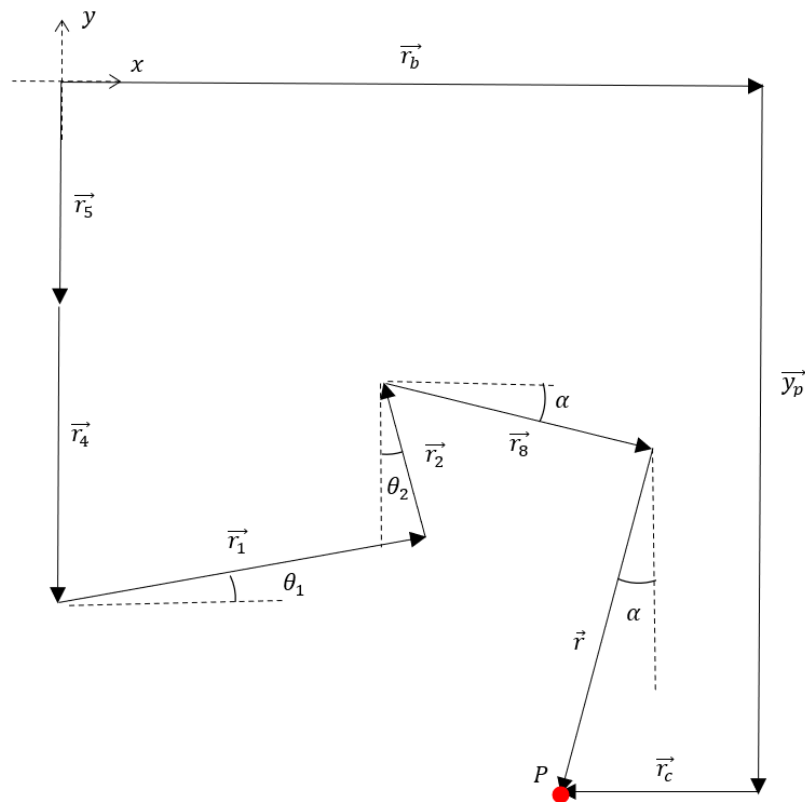
$$\text{En } y: r_5 - L \cos(\theta_2) = -r_4 + r_1 \text{sen}(\theta_1) + r_a \cos(\theta_2)$$

De la ecuación vectorial planteada se origina un sistema de dos ecuaciones, en el que las incógnitas son θ_1 , θ_2 , L , por lo que se hace necesario parametrizar alguna de estas.

$$\begin{cases} r_6 + L \text{sen}(\theta_2) - r_1 \cos(\theta_1) + r_a \text{sen}(\theta_2) = 0 \\ r_5 - L \cos(\theta_2) + r_4 - r_1 \text{sen}(\theta_1) - r_a \cos(\theta_2) = 0 \end{cases}$$

2.3.2 Lazo vectorial para la posición vertical del punto de contacto neumático-superficie. Ahora bien, se requiere determinar la posición vertical del punto de contacto para obtener información del comportamiento de los miembros del mecanismo ante irregularidades del terreno. Para ello, se propone el siguiente lazo cinemático de posición donde se extraerá únicamente la ecuación que se origina al igualar las componentes en \hat{j} de los vectores del lazo.

Figura 19. Lazo vectorial para la posición vertical del punto de contacto.



Fuente: Autores

$$\vec{r}_5 + \vec{r}_4 + \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_8 + \vec{r} = \vec{r}_b + \vec{y}_p + \vec{r}_c$$

$$\vec{y}_p = -y_p \hat{j} \quad ; \quad \alpha = \theta_4 - \theta_2 - 90$$

$$\text{En } y: \quad y_p = r_5 + r_4 - r_1 \text{sen}(\theta_1) - r_2 \text{cos}(\theta_2) + r_8 \text{sen}(\alpha) + r \text{cos}(\alpha)$$

2.3.3 Relación de suspensión. En el estudio cinemático de los mecanismos surge interés por conocer como varía una dimensión respecto a otra. Para el caso de sistema de suspensión McPherson esta se denota como R_s , el cual hace referencia a la variación de la posición vertical del punto de contacto con respecto de la longitud del resorte-amortiguador. La relación de suspensión, R_s , se define como:

$$R_s = \frac{K_{yp}}{K_L}$$

Donde, K_{yp} hace referencia a la variación de la posición vertical del punto de contacto y K_L a la variación de la longitud del resorte-amortiguador, ambos con respecto a θ_1 .

$$K_{yp} = \frac{dy_p}{d\theta_1} \quad ; \quad K_L = \frac{dL}{d\theta_1}$$

Realizando las respectivas derivadas, que pueden ser visualizadas en el **Anexo F**. Cálculo de la relación de suspensión., se obtiene la siguiente expresión para la relación de suspensión:

$$R_s = \frac{\frac{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{L + r_a} [r_2 \text{sen}(\theta_2) - r_8 \cos(\alpha) + r \text{sen}(\alpha)] - \cos(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1) \text{sen}(\theta_2) - \cos(\theta_1)} \cos(\theta_2)$$

2.3.4 Análisis de velocidades. Para obtener las velocidades angulares de los eslabones y la velocidad lineal del resorte-amortiguador se parte de las ecuaciones obtenidas en el primer lazo vectorial y se derivan con respecto al tiempo. Al final resulta que la velocidad angular de la mangueta (miembro r_2) y la velocidad lineal del resorte-amortiguador son función de los parámetros cinemáticos del brazo de control (miembro r_1). Para que el sistema tenga solución se asume que la posición, velocidad y aceleración angular de dicho elemento son conocidas.

El procedimiento matemático para obtener la velocidad angular de la mangueta en función de la velocidad angular del brazo de control puede ser consultado en el **Anexo H. Análisis de velocidades**. Dicho esto, la velocidad angular de la mangueta se define a partir de la siguiente expresión:

$$\omega_2 = \frac{r_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)} \omega_1$$

Así mismo, la velocidad instantánea del resorte amortiguador puede ser escrita como:

$$v_L = \frac{r_1 [\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) - \operatorname{cos}(\theta_1)]}{\operatorname{cos}(\theta_2)} \omega_1$$

2.3.5 Análisis de aceleraciones. Para obtener la aceleración angular de la mangueta y la aceleración lineal del resorte amortiguador se parte de las expresiones de velocidades ya calculadas en el **Anexo H. Análisis de velocidades**. y se vuelve a derivar con respecto al tiempo, de manera que:

$$\frac{d^2L}{dt^2} = a_L \quad ; \quad \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \varepsilon_1 \quad ; \quad \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \varepsilon_2$$

Desarrollando las respectivas derivadas en el **Anexo I. Análisis de aceleraciones**, se obtienen las expresiones para la aceleración angular de la mangueta y la aceleración instantánea del resorte amortiguador, respectivamente:

$$\varepsilon_2 = r_1 \left[\varepsilon_1 \frac{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)} + \omega_1 \frac{\operatorname{cos}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)} (\omega_2 - \omega_1) - v_L \omega_1 \frac{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)^2} \right]$$

$$a_L = r_1 \{ \varepsilon_1 [\tan(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) - \sec(\theta_2) \operatorname{cos}(\theta_1)] \\ + \omega_1 [\sec^2(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) \omega_2 + \operatorname{cos}(\theta_2 - \theta_1) (\omega_2 - \omega_1) \tan(\theta_2) \\ - \sec(\theta_2) \tan(\theta_2) \operatorname{cos}(\theta_1) \omega_2 + \operatorname{sen}(\theta_1) \sec(\theta_2) \omega_1] \}$$

2.3.6 Aceleraciones en los centros de gravedad de los miembros articulados.

En el análisis cinético se hace necesario conocer las aceleraciones del centro de gravedad de cada uno de los miembros que componen el mecanismo, por lo que se construye, desde un punto fijo, un vector que determine la posición instantánea del centro de gravedad, de manera que, al derivarlo por segunda vez, se obtenga las aceleraciones que experimenta dicho punto.

Finalmente, desarrollando dicho procedimiento, que puede ser consultado en el **Anexo J**. Aceleraciones en los centros de gravedad de los miembros articulados, las aceleraciones para cada cuerpo quedan descritas de la siguiente forma:

$$a_{1x} = -\frac{r_1}{2} [\cos(\theta_1) \omega_1^2 + \varepsilon_1 \sin(\theta_1)] \quad ; \quad a_{1y} = \frac{r_1}{2} [\sin(\theta_1) \omega_1^2 + \varepsilon_1 \cos(\theta_1)]$$

$$a_{2x} = -r_1 [\cos(\theta_1) \omega_1^2 + \varepsilon_1 \sin(\theta_1)] + \varepsilon_2 \left[\frac{r_8}{4} \sin(\alpha) - r_2 \cos(\theta_2) \right] \\ + \omega_2^2 \left[r_2 \sin(\theta_2) - \frac{r_8}{4} \cos(\alpha) \right]$$

$$a_{2y} = r_1 [\varepsilon_1 \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) \omega_1^2] + \varepsilon_2 \left[\frac{r_8}{4} \cos(\alpha) - r_2 \sin(\theta_2) \right] \\ + \omega_2^2 \left[\frac{r_8}{4} \sin(\alpha) - r_2 \cos(\theta_2) \right]$$

Las posiciones, velocidades y aceleraciones angulares de cada cuerpo fueron definidas en el anterior inciso, por lo que se conocen a totalidad el valor de estas expresiones.

2.3.7 Fuerzas que actúan en el sistema de suspensión.

Adicional a las fuerzas internas que se generan en los elementos de unión de cada uno de los miembros, existe también fuerzas generadas por la presencia de componentes mecánicos tales como resortes y amortiguadores. En el caso de la suspensión McPherson se dispone de un sistema acoplado resorte-amortiguador. La función del resorte es generar un vínculo entre los elementos de la suspensión, conectando las masas

suspendidas y no suspendidas en el vehículo, mientras que el amortiguador reduce las vibraciones de los resortes transformando la energía cinética en energía térmica a través de la fricción del fluido que contiene.

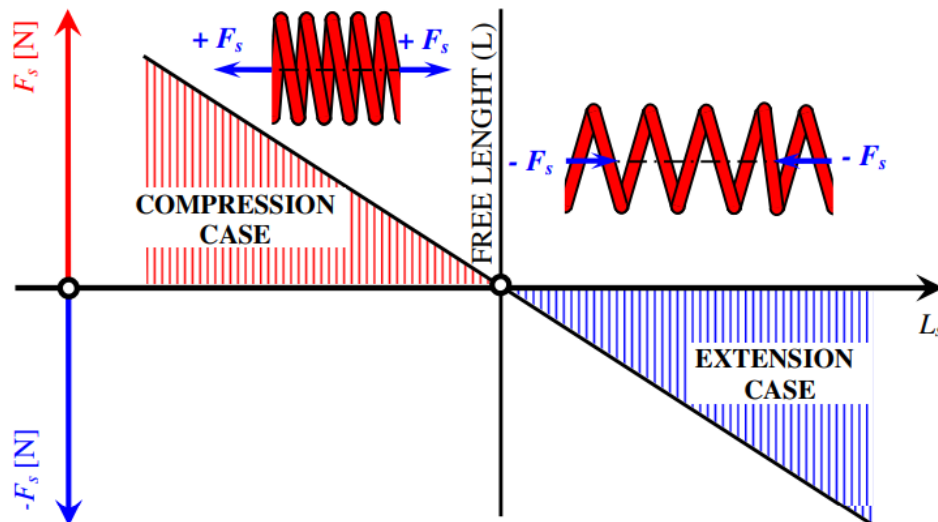
2.3.6.1 Fuerza del resorte. La fuerza del resorte actúa sobre el eje de este y se asume como un comportamiento lineal por lo que, de acuerdo con la ley de Hooke, la expresión queda como:

$$F_s = k_s \cdot [L_f - L_{resorte}]$$

Donde k_s y L_f es la constante de rigidez y la longitud natural del resorte, respectivamente.

En la siguiente figura se puede apreciar que la fuerza del resorte es positiva cuando el resorte se encuentra en compresión $L_f > L_{resorte}$, es cero cuando está en su posición natural $L_f = L_{resorte}$ y es negativa cuando se encuentra en extensión $L_f < L_{resorte}$. Esta convención es la que será usada para el análisis cinético del sistema.

Figura 20. Convención de signos para la fuerza del resorte.



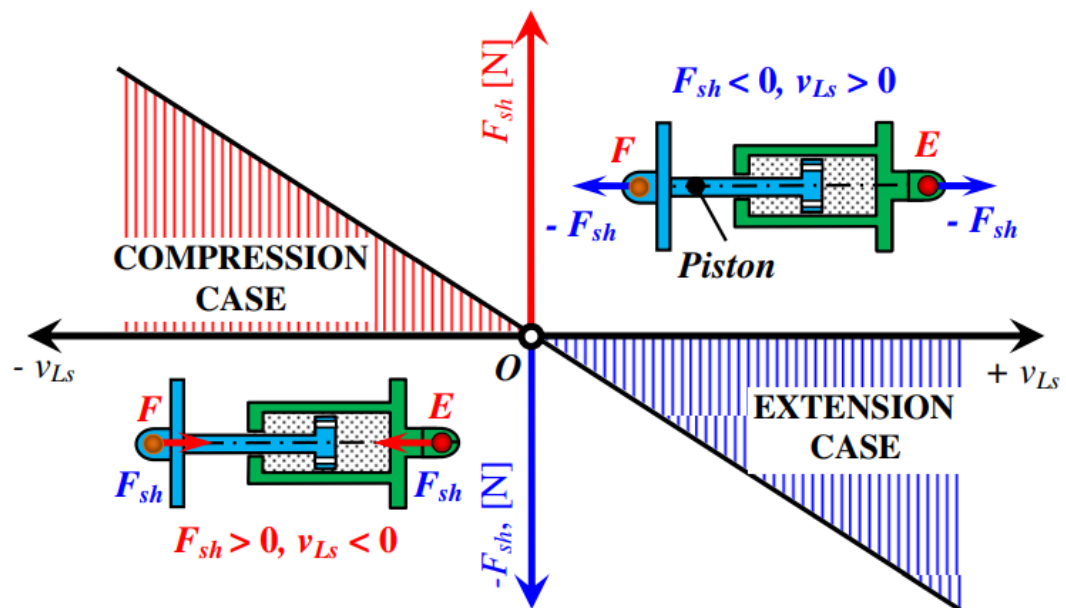
Fuente: LAJQI, Shpetim. Suspension and steering system development of a four wheel drive and four wheel steered terrain vehicle

2.3.6.2 Fuerza del amortiguador. La fuerza del amortiguador puede escribirse como función de la velocidad relativa del pistón v_L y del coeficiente de amortiguamiento C_d .

$$F_d = -C_d \cdot v_L$$

Por simplicidad del modelo se asume que el comportamiento de la fuerza del amortiguador es lineal con respecto a la velocidad, sin embargo, la experiencia demuestra que estos comportamientos varían dependiendo del tipo de movimiento que experimenta el neumático.

Figura 21. Convención de signos para la fuerza del amortiguador.



Fuente: LAJQI, Shpetim. Suspension and steering system development of a four-wheel drive and four-wheel steered terrain vehicle

La fuerza del amortiguador toma valores positivos cuando se está comprimiendo el cilindro, en este caso $v_l < 0$ por lo que $F_d > 0$. Por otra parte, la fuerza es negativa cuando el cilindro se encuentra en extensión, en este caso $v_l > 0$ conduciendo a

$F_d < 0$. En otras palabras, la fuerza del amortiguador se opone a la dirección de la velocidad.

2.3.6.3 Fuerza resorte-amortiguador. El resorte se encuentra acoplado junto con el amortiguador a lo largo del mismo eje, por lo que la fuerza resultante de este sistema puede escribirse como:

$$F_{sd} = F_s + F_d \rightarrow F_{sd} = k_s[L_f - L_{resorte}] - C_d \cdot v_L$$

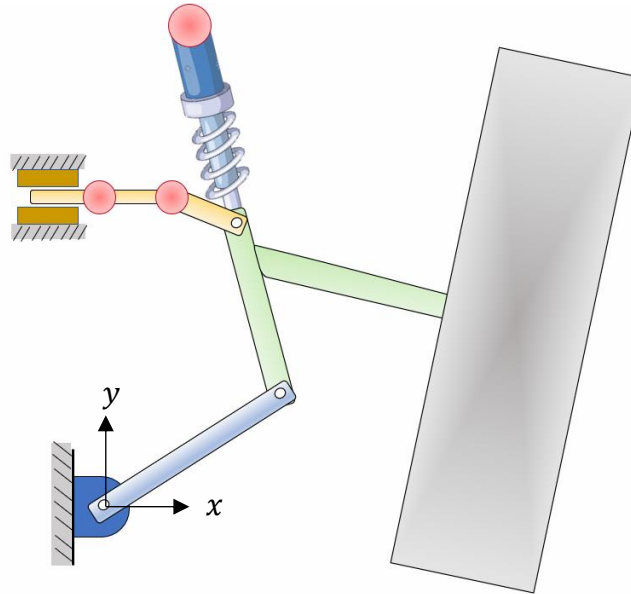
Todos los parámetros que componen dicha expresión son conocidos, pues k_s y C_d son constantes propias del resorte y el amortiguador, respectivamente. L_f que corresponde a la longitud natural del resorte, puede ser calculada cuando $\alpha = 0 \rightarrow \theta_2 = 6^\circ$, lo que conduce a que el sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas obtenidas en el primer lazo vectorial quede reducido a un sistema 2x2 que arrojará como resultado el valor numérico de L_f y θ_1 para dicha situación.

Finalmente, la velocidad relativa del pistón corresponde a la rata de cambio de compresión y extensión de la longitud del resorte que fue calculada en el análisis de velocidades. En ese orden de ideas es posible conocer a totalidad la magnitud de la fuerza del resorte-amortiguador que está actuando sobre la mangueta del sistema McPherson.

2.3.8 Análisis cinético del mecanismo articulado. Posterior al análisis de posiciones, velocidades y aceleraciones de los miembros articulados, se procede a realizar el estudio cinético de los miembros estructurales que componen el sistema McPherson, los cuales son: el brazo de control y la mangueta.

De esta forma se propone un modelo simplificado del sistema de suspensión McPherson en el plano XY, como se muestra a continuación:

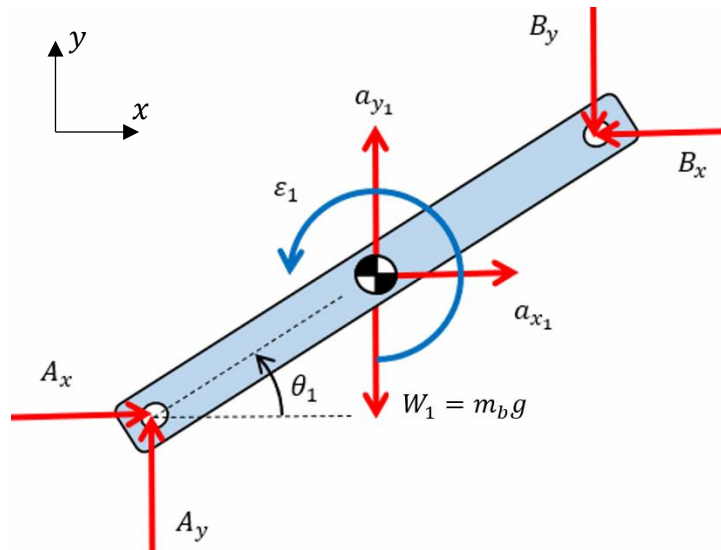
Figura 22. Modelo sistema McPherson.



Fuente: autores

2.3.7.1 Cuerpo 1 - Brazo de control. Se aísla el brazo de control para determinar las fuerzas que actúan sobre los elementos de unión, teniendo en cuenta la masa del miembro y las aceleraciones que experimenta a través de un ciclo de conducción.

Figura 23. DCL del brazo de control del sistema de suspensión McPherson.



Fuente: Autores

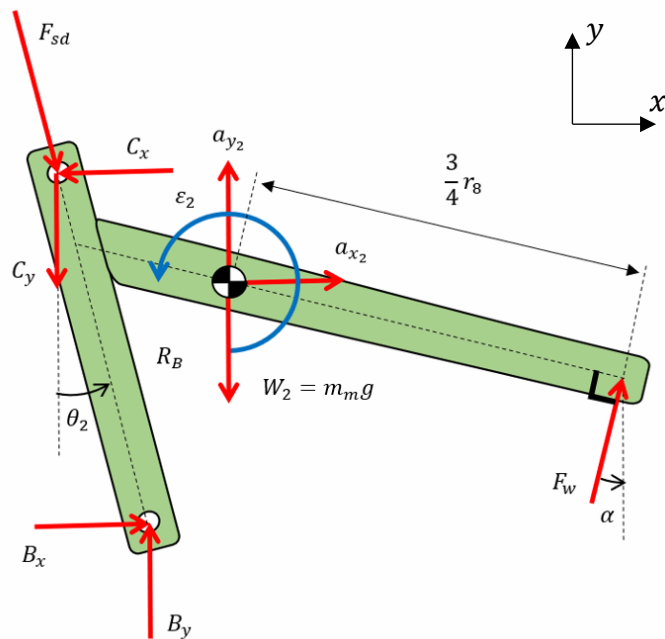
$$\sum F_{x_1} = m_b a_{x_1} \quad \rightarrow \quad A_x - B_x = m_b a_{x_1}$$

$$\sum F_{y_1} = m_b a_{y_1} \quad \rightarrow \quad A_y - B_y - W_1 = m_b a_{y_1}$$

$$\sum M_{CG_1} = J_1 \varepsilon_1 \quad \rightarrow \quad \frac{r_1}{2} [(A_x + B_x) \text{sen}(\theta_1) - (A_y + B_y) \text{cos}(\theta_1)] = J_1 \varepsilon_1$$

2.3.7.1 Cuerpo 2 – Mangueta. Ahora bien, se procede a realizar el mismo procedimiento con el miembro BCW para poder obtener las reacciones que se generan en los puntos de unión.

Figura 24. DCL de la mangueta del sistema de suspensión McPherson.



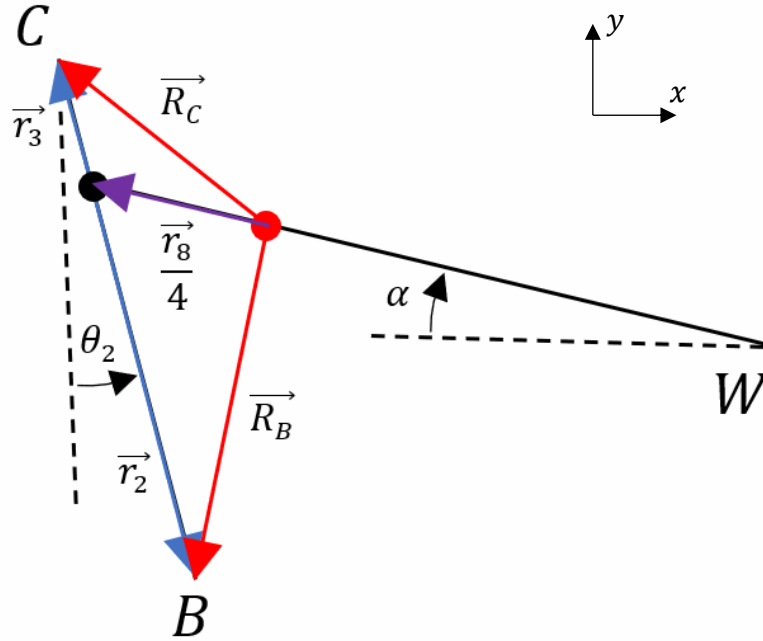
Fuente: Autores

$$\sum F_{x_2} = m_m a_{x_2} \quad \rightarrow \quad B_x - C_x + F_w \text{sen}(\alpha) + F_{sd} \text{sen}(\theta_2) = m_m a_{x_2}$$

$$\sum F_{y_2} = m_m a_{y_2} \quad \rightarrow \quad B_y - C_y - W_2 + F_w \text{cos}(\alpha) - F_{sd} \text{cos}(\theta_2) = m_m a_{y_2}$$

$$\sum M_{CG_2} = J_2 \varepsilon_2 \quad \rightarrow \quad \vec{R}_B \times \vec{B} + \vec{R}_C \times (\vec{C} + \vec{F}_{sd}) + \frac{3}{4} r_8 F_w = J_2 \varepsilon_2$$

Figura 25. Esquema brazos de las fuerzas aplicadas a la mangueta.



Fuente: autores

$$\vec{R}_B = \vec{r}_2 + \frac{\vec{r}_8}{4} = r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) \hat{i} - r_2 \cos(\theta_2) \hat{j} - \frac{r_8}{4} \cos(\alpha) \hat{i} + \frac{r_8}{4} \operatorname{sen}(\alpha) \hat{j}$$

$$\vec{R}_B = \left[r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) - \frac{r_8}{4} \cos(\alpha) \right] \hat{i} + \left[\frac{r_8}{4} \operatorname{sen}(\alpha) - r_2 \cos(\theta_2) \right] \hat{j}$$

$$\vec{R}_C = \vec{r}_3 + \frac{\vec{r}_8}{4} = -r_3 \operatorname{sen}(\theta_2) \hat{i} + r_3 \cos(\theta_2) \hat{j} - \frac{r_8}{4} \cos(\alpha) \hat{i} + \frac{r_8}{4} \operatorname{sen}(\alpha) \hat{j}$$

$$\vec{R}_C = -\left[r_3 \operatorname{sen}(\theta_2) + \frac{r_8}{4} \cos(\alpha) \right] \hat{i} + \left[r_3 \cos(\theta_2) + \frac{r_8}{4} \operatorname{sen}(\alpha) \right] \hat{j}$$

$$\vec{R}_B \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) - \frac{r_8}{4} \cos(\alpha) & \frac{r_8}{4} \operatorname{sen}(\alpha) - r_2 \cos(\theta_2) & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{R}_B \times \vec{B} = \left\{ \left[r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) - \frac{r_8}{4} \cos(\alpha) \right] B_y - \left[\frac{r_8}{4} \operatorname{sen}(\alpha) - r_2 \cos(\theta_2) \right] B_x \right\} \hat{k}$$

$$\vec{R}_C \times (\vec{C} + \vec{F}_{sd}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\left[r_3 \text{sen}(\theta_2) + \frac{r_8}{4} \cos(\alpha)\right] & r_3 \cos(\theta_2) + \frac{r_8}{4} \text{sen}(\alpha) & 0 \\ F_{sd} \text{sen}(\theta_2) - C_x & -[C_y + F_{sd} \cos(\theta_2)] & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{R}_C \times (\vec{C} + \vec{F}_{sd}) &= \{[C_y + F_{sd} \cos(\theta_2)] [r_3 \text{sen}(\theta_2) + \frac{r_8}{4} \cos(\alpha)] \\ &\quad - [r_3 \cos(\theta_2) + \frac{r_8}{4} \text{sen}(\alpha)] [F_{sd} \text{sen}(\theta_2) - C_x]\} \hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left[r_2 \text{sen}(\theta_2) - \frac{r_8}{4} \cos(\alpha)\right] B_y - \left[\frac{r_8}{4} \text{sen}(\alpha) - r_2 \cos(\theta_2)\right] B_x \\ &\quad + [C_y + F_{sd} \cos(\theta_2)] \left[r_3 \text{sen}(\theta_2) + \frac{r_8}{4} \cos(\alpha)\right] \\ &\quad + \left[r_3 \cos(\theta_2) + \frac{r_8}{4} \text{sen}(\alpha)\right] [C_x - F_{sd} \text{sen}(\theta_2)] + \frac{3}{4} r_8 F_w = J_2 \varepsilon_2 \end{aligned}$$

2.3.9 Matriz de solución. Finalmente, Al obtener las ecuaciones cinemáticas y cinéticas que describen el comportamiento dinámico a totalidad de los miembros del sistema de suspensión McPherson, es posible establecer un sistema de ecuaciones 6x6 que se resuelve de la siguiente manera:

$$[A] \mathbf{X} = B \quad \rightarrow \quad \mathbf{X} = [A]^{-1} B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & b & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -c & d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ B_x \\ B_y \\ C_x \\ C_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_b a_{x1} \\ m_b a_{y1} + m_b g \\ J_1 \varepsilon_1 \\ m_m a_{x2} - (F_w \text{sen}(\alpha) + F_{sd} \text{sen}(\theta_2)) \\ m_m a_{y2} + m_m g + F_{sd} \cos(\theta_2) - F_w \cos(\alpha) \\ J_2 \varepsilon_2 + F_{sd} \text{sen}(\theta_2) \cdot e - F_{sd} \cos(\theta_2) \cdot f \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{r_1}{2} \text{sen}(\theta_1) \quad ; \quad b = -\frac{r_1}{2} \cos(\theta_1)$$

$$c = \frac{r_8}{4} \text{sen}(\alpha) - r_2 \cos(\theta_2)$$

$$d = r_2 \text{sen}(\theta_2) - \frac{r_8}{4} \cos(\alpha)$$

$$e = r_3 \cos(\theta_2) + \frac{r_8}{4} \text{sen}(\alpha)$$

$$f = r_3 \text{sen}(\theta_2) + \frac{r_8}{4} \cos(\alpha)$$

Se calculan las fuerzas resultantes en cada punto de unión para realizar los análisis de esfuerzos en los miembros que permitan el diseño de estos.

$$\vec{A} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

$$\vec{B} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{B_y}{B_x}\right) = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$$

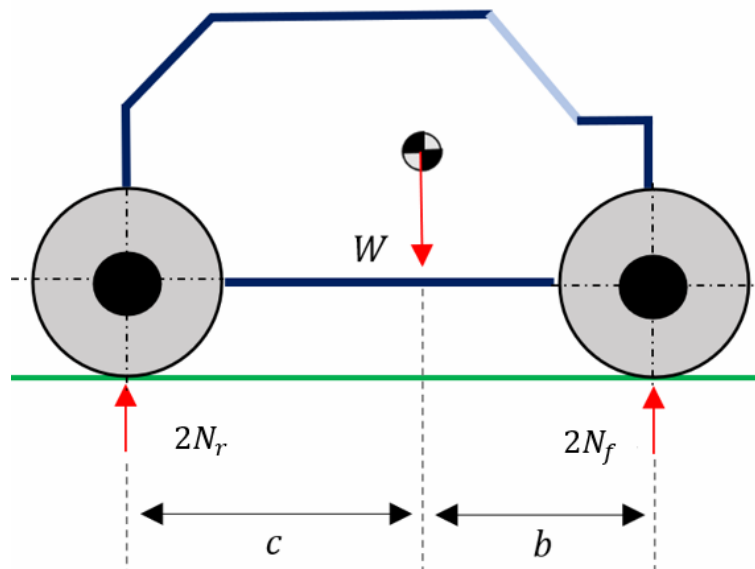
$$\vec{C} = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \angle \tan^{-1}\left(\frac{C_y}{C_x}\right) = C_x \hat{i} + C_y \hat{j}$$

Al haber establecido las ecuaciones del modelo cinemático y cinético del mecanismo articulado es posible calcular todos los parámetros de posición, velocidad, aceleración y fuerza que experimenta cada miembro del sistema de suspensión. Sin embargo, únicamente con las expresiones anteriormente expuestas, el análisis no está totalmente definido, por lo que se hace necesario determinar las constantes de rigidez y amortiguamiento del sistema resorte-amortiguador a partir del procedimiento de cálculo expuesto a continuación.

2.4 DISEÑO Y SELECCIÓN DEL CONJUNTO RESORTE-AMORTIGUADOR

El cálculo de los parámetros del sistema resorte-amortiguador parten de la obtención de las cargas en el tren delantero y trasero, de tal forma que se considere la distribución de pesos establecida en los parámetros iniciales de diseño. Dicho esto, se procede a realizar un análisis bidimensional en plano lateral de los trenes, para poder así hallar las reacciones debidas al peso concentrado en el centro de masa, tal como se muestra en la figura presentada a continuación.

Figura 26. Reacciones en los trenes delantero y trasero del vehículo.



Fuente: autores

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad 2N_r + 2N_f = W$$

$$\sum M_{CG} = 0 \quad \rightarrow \quad N_r \cdot c = N_f \cdot b$$

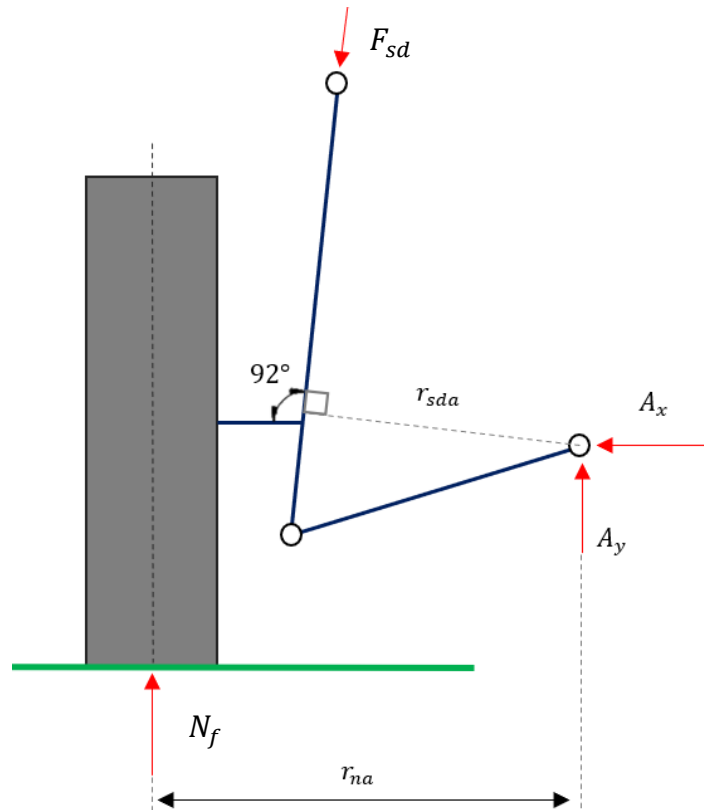
$$2N_f = \frac{W}{1 + \frac{b}{c}} = \frac{m \cdot g}{1 + \frac{b}{c}} \quad \rightarrow \quad 2N_f = \frac{(700 \text{ kg}) \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{1 + \frac{810}{990}} = 3776,85 \text{ N}$$

El valor de hallado corresponde a la fuerza total que soporta todo el tren delantero, es decir, ambas ruedas de dicho tren, por lo que la reacción para una sola rueda corresponde a:

$$N_f = 1888,425 \text{ N}$$

Ahora bien, se procede a realizar un análisis estático en plano frontal de la suspensión McPherson, de forma que el mecanismo se observe como un cuerpo compuesto de miembros articulados, tal como se muestra en la siguiente imagen.

Figura 27. Reacciones en el conjunto suspensión-neumático.



Fuente: Autores

La figura muestra la reacción del sistema resorte-amortiguador (F_{sd}), las reacciones en el par cinemático A (A_x, A_y) y la fuerza de excitación del neumático hallada en el apartado anterior, la cual se encuentra ubicada a lo largo de la mediatriz de la rueda.

Con base en el anterior esquema, se realiza un análisis de momentos en la junta A, para lo cual se definen las distancias r_{sda} y r_{na} , perpendiculares a las reacciones del neumático y el resorte amortiguador, cuyos valores se obtendrán a partir del análisis geométrico anteriormente presentado. De esta forma, se tiene que:

$$\sum M_A = 0 \quad \rightarrow \quad N_f \cdot r_{na} = F_{sd} \cdot r_{sda}$$

$$\therefore F_{sd} = \frac{r_{na}}{r_{sda}} \cdot N_f \quad \rightarrow \quad F_{sd} = \frac{421,99}{290,55} (1888,425 \text{ N}) = 2742,714 \text{ N}$$

Se hace la salvedad que para este modelo no se consideraron las reacciones del brazo de dirección que está conectado directamente a la mangueta de la suspensión, con el objetivo de establecer un proceso iterativo que permita calcular de forma preliminar la constante de rigidez y amortiguamiento.

Los cálculos para el diseño mecánico del resorte helicoidal a compresión y el coeficiente de amortiguamiento del cilindro amortiguador, para el sistema de suspensión frontal, podrán ser observados con mayor detalle en el **Anexo K. Cálculos del resorte helicoidal a compresión y coeficiente de amortiguamiento**

En este orden de ideas, de acuerdo con estos cálculos, se establecen las características para el resorte-amortiguador del sistema de suspensión delantero:

Tabla 5. Especificaciones del resorte-amortiguador para suspensión frontal.

Concepto	Notación	Especificación
<i>Material</i>	-	<i>Acero al cromo vanadio (A232)</i>
<i>Diámetro de hilo</i>	d	11 mm
<i>Diámetro medio de la espira</i>	D	100 mm
<i>Numero de espiras activas</i>	N_a	10 espiras
<i>Numero de espiras totales</i>	N_t	11 espiras
<i>Constante de rigidez</i>	k_{sf}	14,641 N/mm
<i>Longitud libre</i>	L_f	391,8 mm
<i>Deformación maxima</i>	Δ_{max}	188,5 mm
<i>coeficiente de amort. critico</i>	C_{cf}	3507 Ns/m
<i>relación de amortigamiento</i>	ξ	0,5911
<i>coeficiente de amortiguamiento</i>	C_{df}	2073 Ns/m

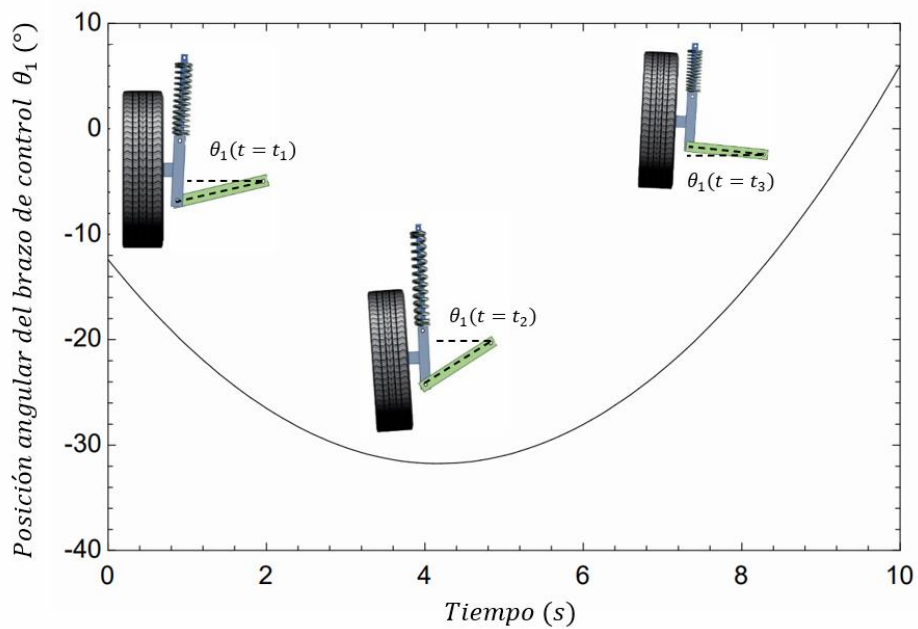
Fuente: Autores

2.5 RESULTADOS MODELO DINÁMICO SISTEMA DE SUSPENSIÓN FRONTAL

2.5.1 Análisis de posiciones. Tal como se explicó en la parte anterior, para poder resolver el sistema de ecuaciones cinemáticas planteadas, desde los lazos vectoriales, se hace necesario parametrizar alguna de estas variables: θ_1 , θ_2 , $L_{resorte}$. Para este caso, el parámetro de entrada será el ángulo θ_1 , que corresponde a la posición angular del brazo de control, medido desde el eje x positivo. Sin embargo, dicho ángulo será una función cuadrática en el dominio del tiempo, de manera que el sistema de suspensión pase por todas las posiciones de interés en un intervalo de diez segundos. Esta es expresada analíticamente de la siguiente manera, donde θ_1 se da en grados sexagesimal y t en segundos:

$$\theta_1 = 1.11156 \cdot t^2 - 9.2734 \cdot t - 12.422 \text{ [}^\circ\text{]}$$

Figura 28. Parámetro de entrada: θ_1 respecto al tiempo.



Fuente: Autores

Teniendo entonces definido el parámetro θ_1 , y usando el sistema de ecuaciones cinemáticas obtenidas en la anterior parte, es posible conocer la variación de θ_2 y

L con respecto al tiempo, los cuales corresponden a la posición angular del resorte-amortiguador y la longitud del resorte para cualquier tiempo, respectivamente.

Figura 29. Parámetro de salida: θ_2 respecto al tiempo.

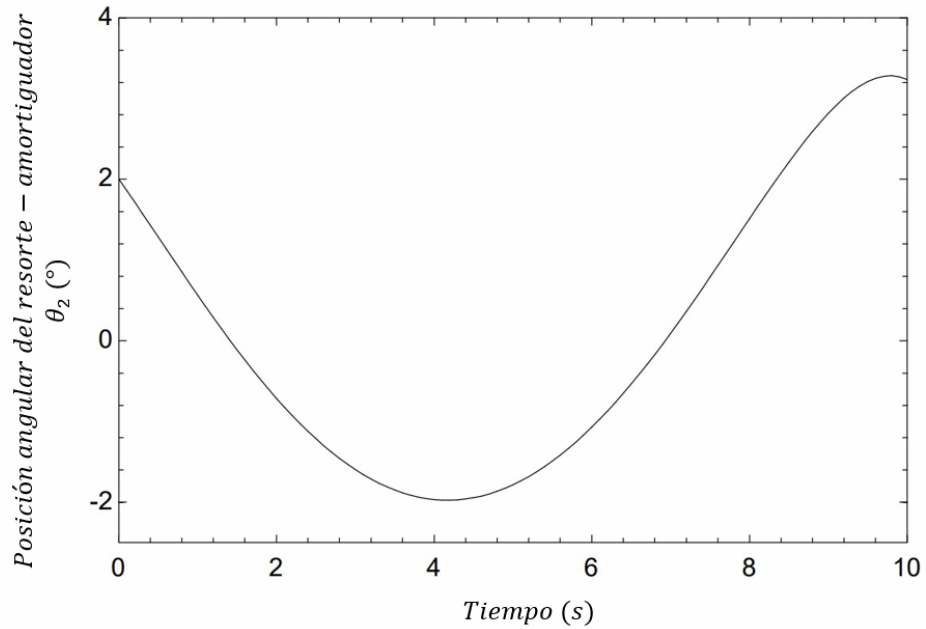
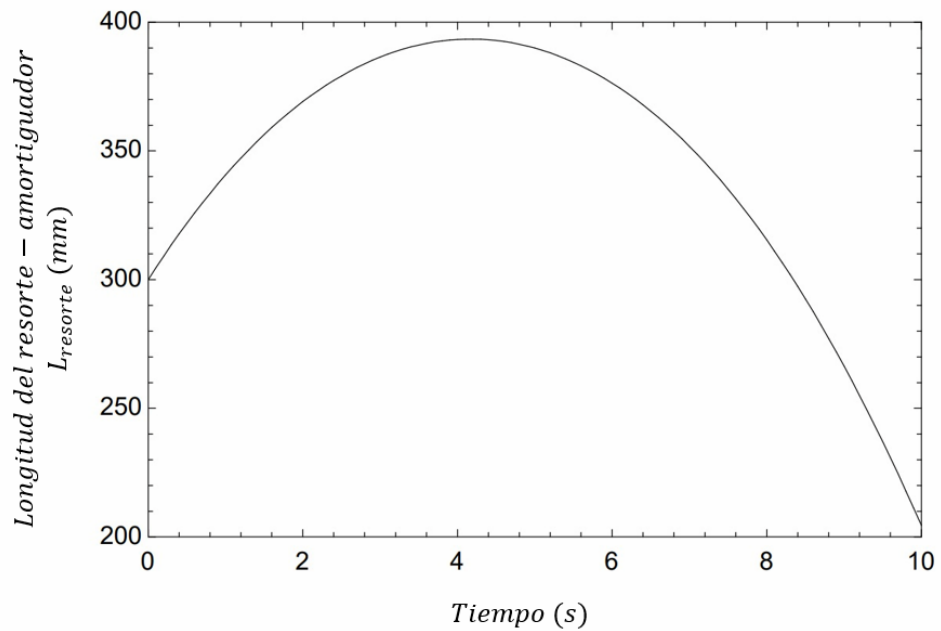


Figura 30. Posición del resorte-amortiguador respecto el tiempo.



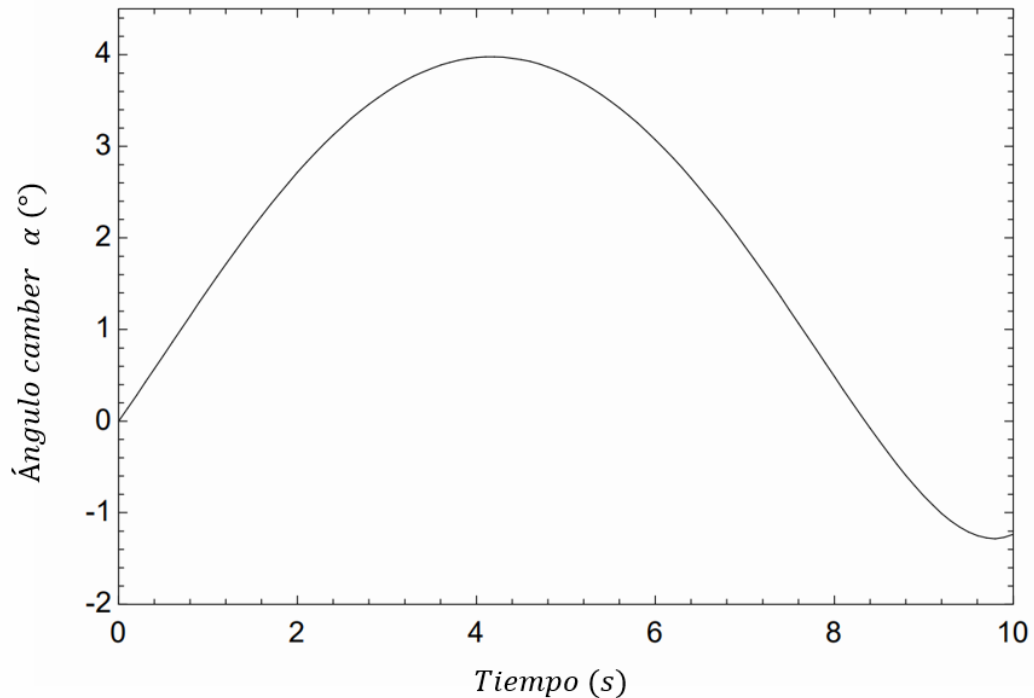
Fuente: Autores

2.5.2 Angulo Camber. Habiendo conocido el ángulo θ_2 , es posible determinar la variación del ángulo Camber, denotado como α , mediante la siguiente expresión:

$$\alpha = \theta_4 - \theta_2 - 90 [^\circ]$$

Siendo θ_4 un parámetro constante definido desde la geometría preliminar de la suspensión como $\theta_4 = 92^\circ$. Por tanto, el ángulo Camber presenta el siguiente comportamiento:

Figura 31. Ángulo Camber respecto al tiempo.



Fuente: Autores

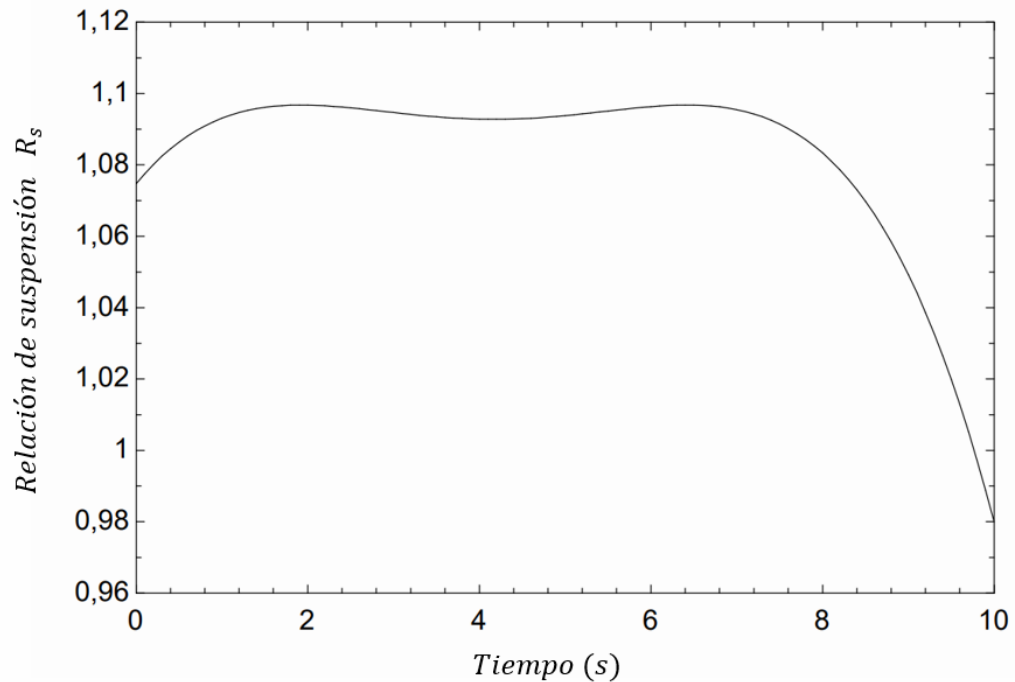
El ángulo Camber tiene un rango de $[-1.284, 3.976]$ reflejando un comportamiento adecuado de acuerdo con el criterio de Reimpell que establece que el ángulo Camber no debe exceder $\pm 4^\circ$, incluso en condiciones de excitación máxima.

2.5.3 Relación de suspensión. Por otra parte, otra variable de gran interés es la relación de suspensión, conocida también como “Motion Ratio”, el cual establece la deflexión de la rueda por unidad de longitud de resorte deformado. Dicha relación se expresa de la siguiente manera:

$$R_s = \frac{K_{yp}}{K_L} = \frac{dy_p}{dL}$$

El comportamiento presentado para el caso de la geometría propuesta es el siguiente:

Figura 32. Relación de suspensión respecto al tiempo.

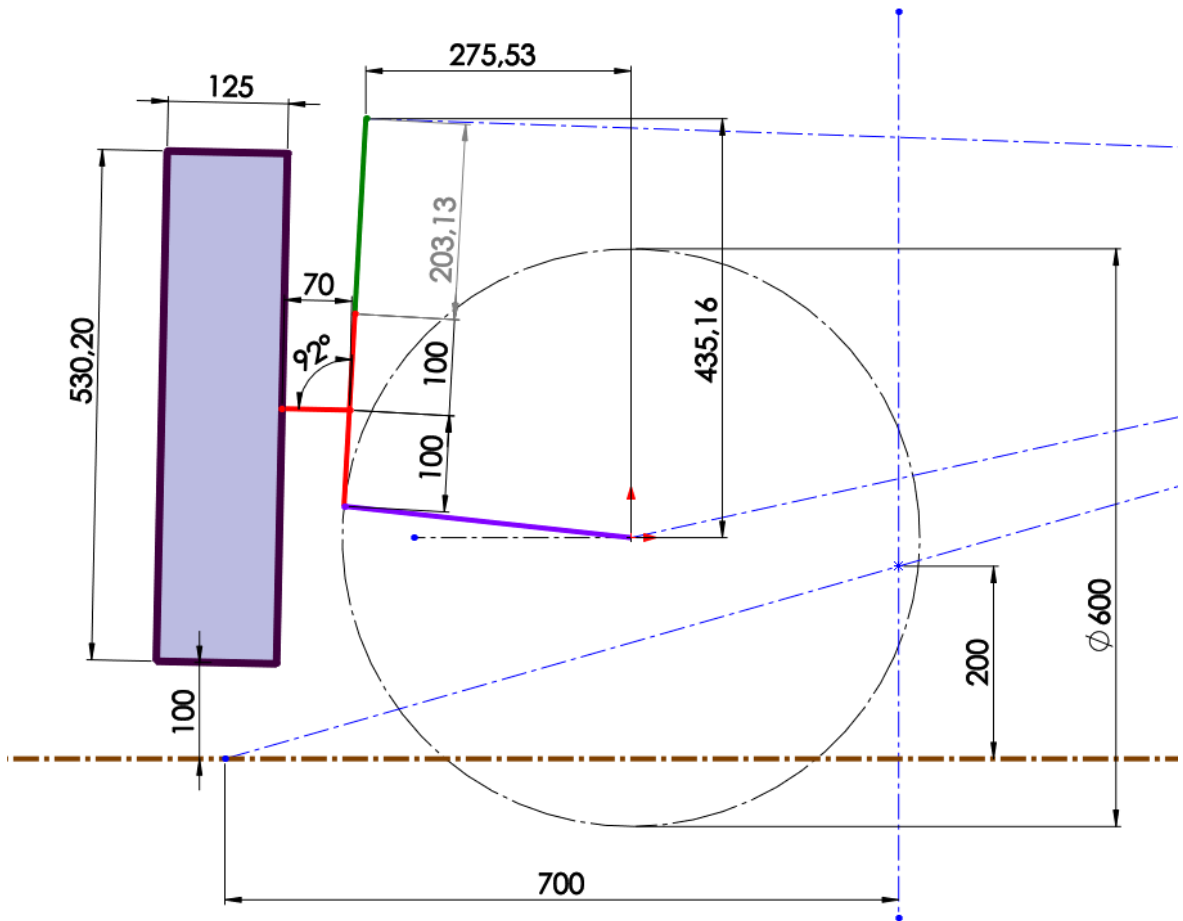


Fuente: Autores

La gráfica presentada evidencia que hasta el instante $t = 9.7 s$ se mantiene, de forma aproximada, una relación de suspensión 1 a 1 que se traduce en que, por cada milímetro de deflexión de la rueda, el resorte se comprime un milímetro. Solo

es hasta los últimos 3 décimas de segundo que la suspensión adquiere valores menores a uno, pues en este estado se ha comprimido más el resorte de lo que se deflecta la rueda, tal como se evidencia en la siguiente imagen:

Figura 33. Posición del mecanismo articulado en el tiempo, $t = 10$ (s).

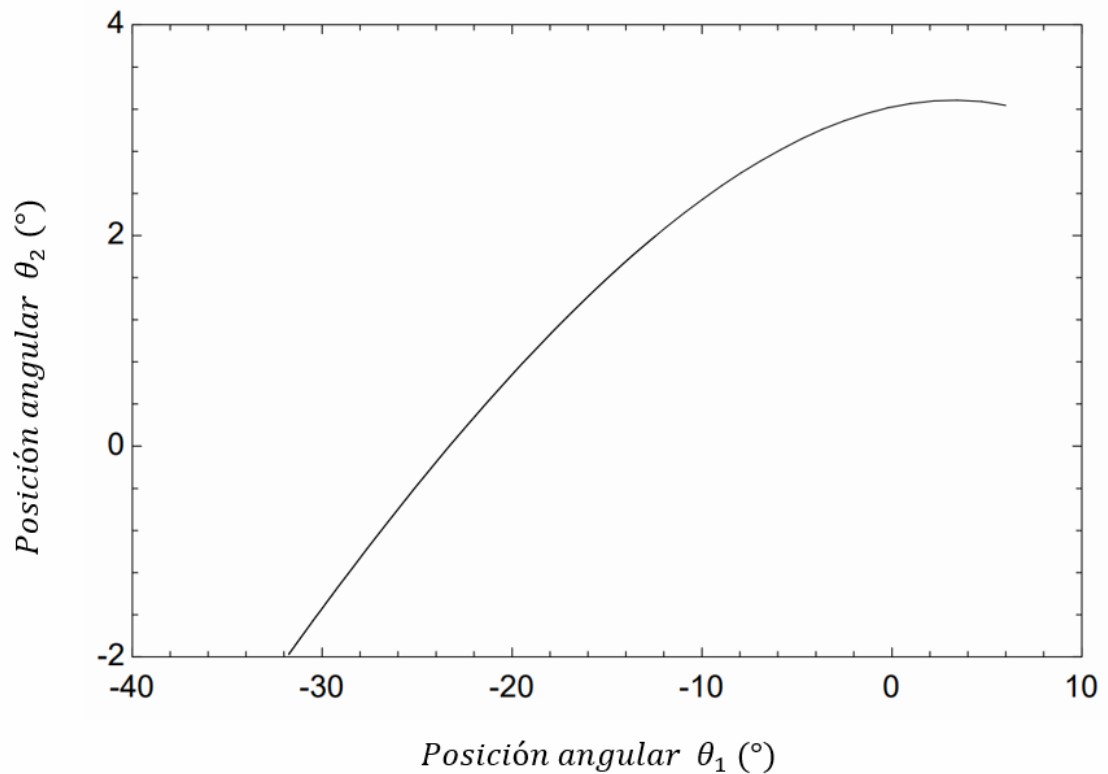


Fuente: Autores

2.5.4 Relación de posición: Posición angular del brazo de control respecto de la mangueta. En esta gráfica es posible apreciar la relación que existe entre la posición del brazo de control y la mangueta, pues en la medida que el brazo de control va aumentando su posición angular (medida desde el eje horizontal) la mangueta también lo va haciendo (medido desde el eje vertical) manteniéndose una

relación prácticamente lineal. Esta tendencia se mantiene hasta que el brazo de control comienza a tomar valores positivos en la que, por limitaciones propias del sistema, la mangueta comienza a mantener una posición constante.

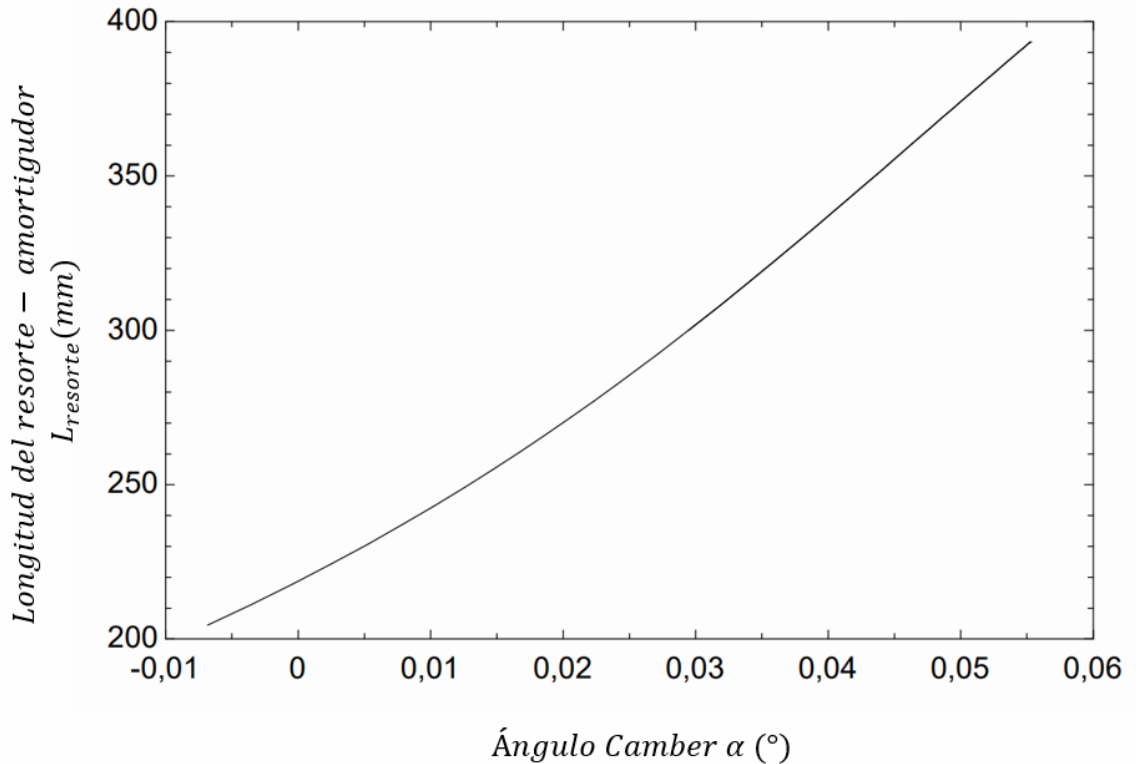
Figura 34. Posición angular del cuerpo 1 (brazo de control) respecto a la posición angular del cuerpo 2 (mangueta).



Fuente: Autores

2.5.5 Relación de posición: Ángulo Camber respecto a la longitud del resorte-amortiguador. En esta gráfica es posible apreciar cómo va cambiando la longitud del resorte a medida que se va variando el ángulo Camber, siendo también una tendencia lineal pues en la medida en la que la rueda tiende a salir más hacia afuera, es decir valor de Camber positivos, el resorte tiende a aumentar su longitud.

Figura 35. Cambio del ángulo Camber respecto a la posición del sistema resorte amortiguador.



Fuente: Autores

2.5.6 Análisis de velocidades. De acuerdo con la formulación anterior se había llegado a la siguiente ecuación que relaciona las velocidades angulares de los cuerpos 1 y 2 del sistema de suspensión.

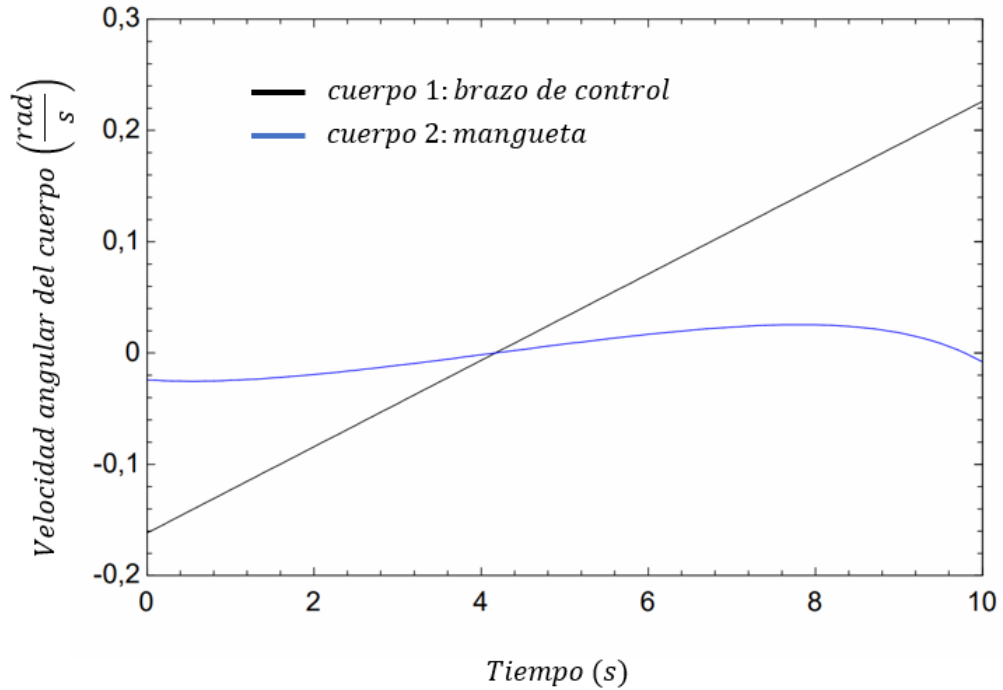
$$\omega_2 = \frac{r_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)} \omega_1$$

Para conocer la función de la velocidad angular del cuerpo 2, es necesario conocer la función de la velocidad angular del cuerpo uno, siendo esta posible de obtener mediante el siguiente procedimiento.

$$\omega_1 = \frac{d\theta_1}{dt} \quad \omega_1 = \frac{d[1.11156 \cdot t^2 - 9.2734 \cdot t - 12.422]}{dt}$$

$$\omega_1 = 2.22312 \cdot t - 9.2734 \text{ [°/s]}$$

Figura 36. Velocidades angulares para el cuerpo 1 - brazo de control y cuerpo 2 - mangueta.



Fuente: Autores

2.5.7 Análisis de aceleraciones. De igual forma, para conocer la aceleración angular del cuerpo dos se hace uso de la siguiente expresión:

$$\varepsilon_2 = r_1 \left[\varepsilon_1 \frac{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)} + \omega_1 \frac{\text{cos}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)} (\omega_2 - \omega_1) - v_L \omega_1 \frac{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)^2} \right]$$

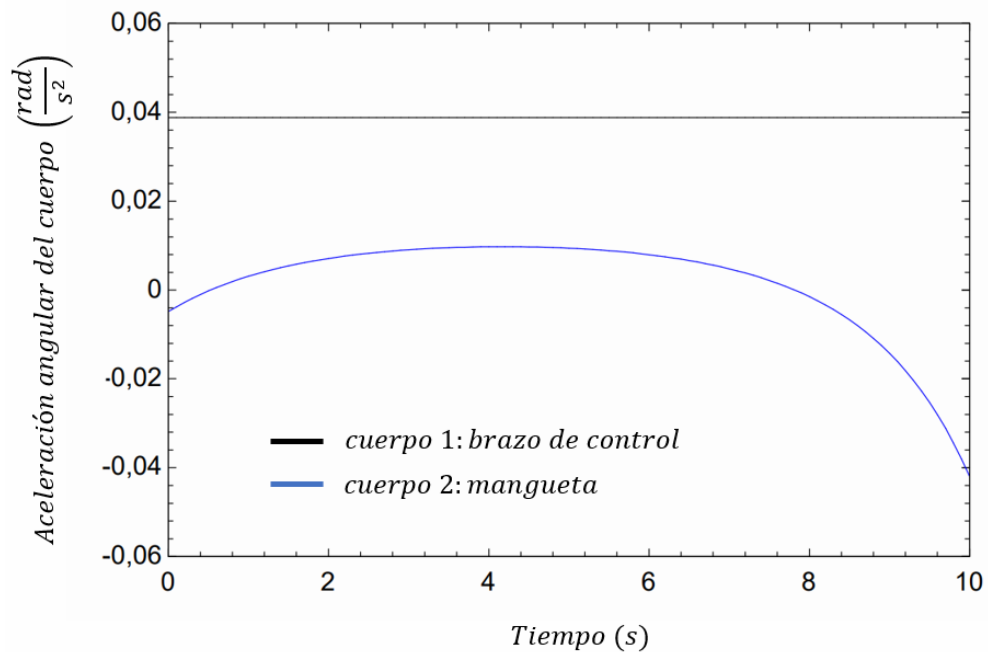
De dicha ecuación se conocen todos los parámetros a excepción de la aceleración angular ε_1 , siendo esta posible de obtener mediante el siguiente procedimiento:

$$\varepsilon_1 = \frac{d^2\theta_1}{dt^2} \quad \varepsilon_1 = \frac{d^2[1.11156 \cdot t^2 - 9.2734 \cdot t - 12.422]}{dt^2}$$

$$\varepsilon_1 = 2.22312 \left(\frac{\pi}{180} \right) = 0,038 \left[\frac{rad}{s^2} \right]$$

De esta forma se presentan las gráficas de ambas aceleraciones angulares.

Figura 37. Aceleraciones angulares para el cuerpo 1 y 2.



Fuente: Autores

Conocido entonces los parámetros cinemáticos angulares del sistema de suspensión (Posición, velocidad y aceleración) se procede a determinar las aceleraciones lineales en el centro de masa de los miembros articulados (Brazo de control y Mangueta) con el objetivo de poder aplicar la dinámica del cuerpo rígido y así determinar las reacciones en cada uno de los apoyos que conforman el sistema McPherson.

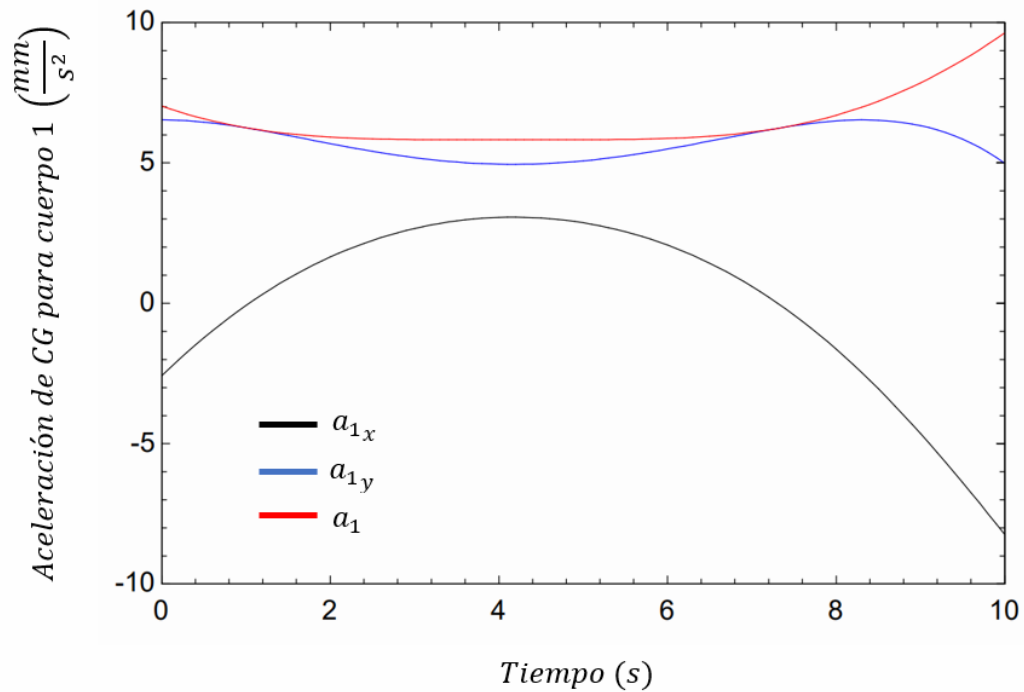
En ese orden de ideas, se extrae de la sección anterior las expresiones deducidas para las aceleraciones en el centro de masa del cuerpo 1 (Brazo de control), tanto en el eje horizontal como en el vertical y su respectivo módulo.

$$a_{1x} = -\frac{r_1}{2} [\cos(\theta_1) \omega_1^2 + \varepsilon_1 \sin(\theta_1)]$$

$$a_{1y} = \frac{r_1}{2} [\sin(\theta_1) \omega_1^2 + \varepsilon_1 \cos(\theta_1)]$$

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2}$$

Figura 38. Aceleraciones en el centro de masa para el cuerpo 1 – brazo de control.



Fuente: Autores

Del mismo modo, se presentan las expresiones de las aceleraciones del centro de masa para el cuerpo 2 (Mangueta) haciendo énfasis en que este elemento mecánico presenta un movimiento plano general, por lo que la expresión de su aceleración es mucho más compleja, tanto en el eje vertical como en el horizontal. Por su parte, el brazo de control presenta un movimiento mucho más simple, pues rota alrededor de un eje, correspondiente al eje del apoyo A.

$$a_{2x} = -r_1 [\cos(\theta_1) \omega_1^2 + \varepsilon_1 \sin(\theta_1)] + \varepsilon_2 \left[\frac{r_8}{4} \sin(\alpha) - r_2 \cos(\theta_2) \right]$$

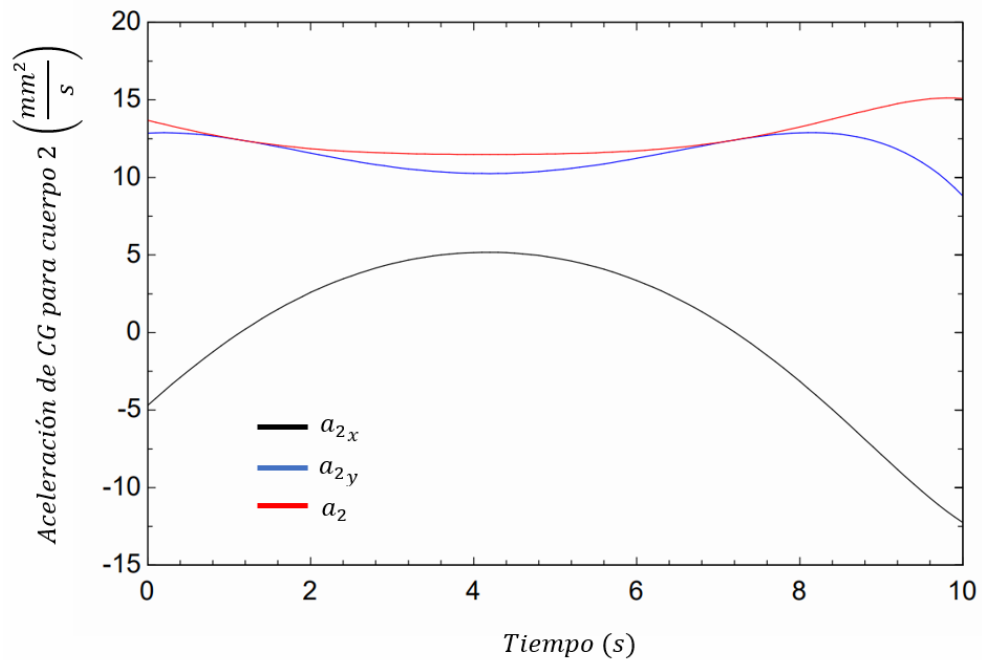
$$+ \omega_2^2 \left[r_2 \sin(\theta_2) - \frac{r_8}{4} \cos(\alpha) \right]$$

$$a_{2y} = r_1 [\varepsilon_1 \cos(\theta_1) - \sin(\theta_1) \omega_1^2] + \varepsilon_2 \left[\frac{r_8}{4} \cos(\alpha) - r_2 \sin(\theta_2) \right]$$

$$+ \omega_2^2 \left[\frac{r_8}{4} \sin(\alpha) - r_2 \cos(\theta_2) \right]$$

$$a_2 = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2}$$

Figura 39. Aceleraciones en el centro de masa para el cuerpo 2 – mangueta.



Fuente: Autores

Ahora bien, luego de conocer a totalidad el comportamiento cinemático del sistema de suspensión, el paso lógico a seguir es la solución de la matriz propuesta en el apartado anterior, en la cual resume la serie de ecuaciones obtenidas por medio de la aplicación de la segunda ley de Newton a cada uno de los miembros articulados del sistema de suspensión, tanto para el movimiento traslacional como para el movimiento rotacional.

Por otro lado, uno de los objetivos fundamentales de este estudio es poder analizar la influencia de las fuerzas dinámicas y de aceleración en todo el sistema de suspensión, por lo que dicho análisis se dividirá en dos momentos: El primero no tendrá en cuenta las aceleraciones de los cuerpos ni una fuerza de excitación variable en el tiempo, siendo esta de un valor constante. El segundo tendrá en cuenta las aceleraciones obtenidas en el análisis cinemático anterior y el sistema será excitado a través de una fuerza como función del tiempo con un comportamiento sinusoidal en el rango de movimiento del mecanismo McPherson.

No obstante, el cálculo de las reacciones en los apoyos se hará para todas las posiciones con el propósito de verificar la posición crítica para la cual se obtienen los valores de fuerza mayor y así usarlas en el proceso de diseño mecánico.

2.5.8 Modelo Estático. Para el modelo estático, la matriz de solución queda reducida de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & b & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -c & d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ B_x \\ B_y \\ C_x \\ C_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ m_b g \\ 0 \\ (F_w \operatorname{sen}(\alpha) + F_{sd} \operatorname{sen}(\theta_2)) \\ m_m g + F_{sd} \cos(\theta_2) - F_w \cos(\alpha) \\ F_{sd} \operatorname{sen}(\theta_2) \cdot e - F_{sd} \cos(\theta_2) \cdot f \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_1}{2} \operatorname{sen}(\theta_1) & d &= r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) - \frac{r_8}{4} \cos(\alpha) \\ b &= -\frac{r_1}{2} \cos(\theta_1) & e &= r_3 \cos(\theta_2) + \frac{r_8}{4} \operatorname{sen}(\alpha) \\ c &= \frac{r_8}{4} \operatorname{sen}(\alpha) - r_2 \cos(\theta_2) & f &= r_3 \operatorname{sen}(\theta_2) + \frac{r_8}{4} \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Para poder resolver el sistema de 6 ecuaciones y 6 incógnitas se debe establecer el valor de la fuerza de excitación, para este caso dicha fuerza será un valor constante y se definirá con base a la estimación realizada en el apartado del diseño

y selección del resorte-amortiguador, siendo esta de una magnitud de $F_w = 2000$ [N].

Figura 40. Reacciones en la junta A para modelo estático.

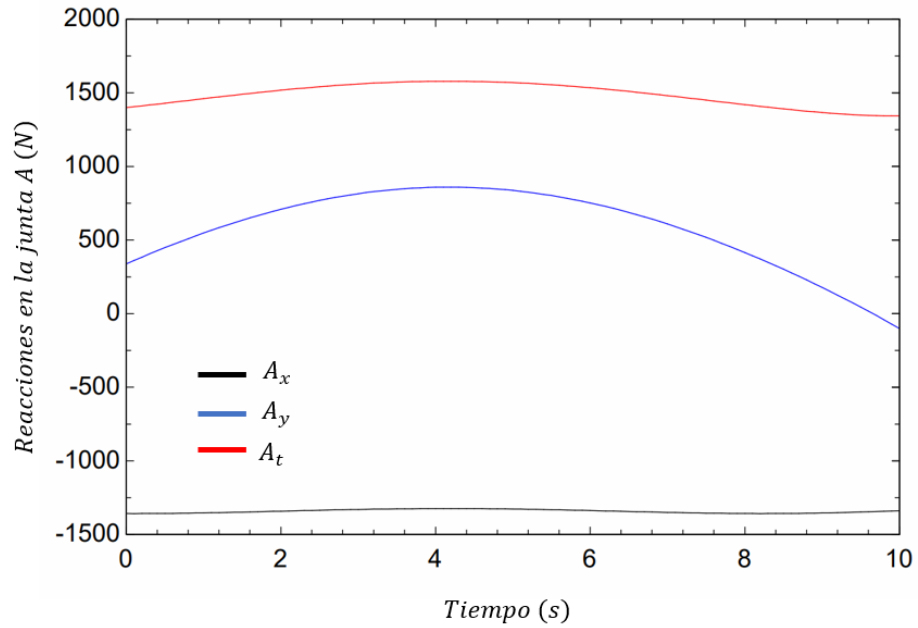
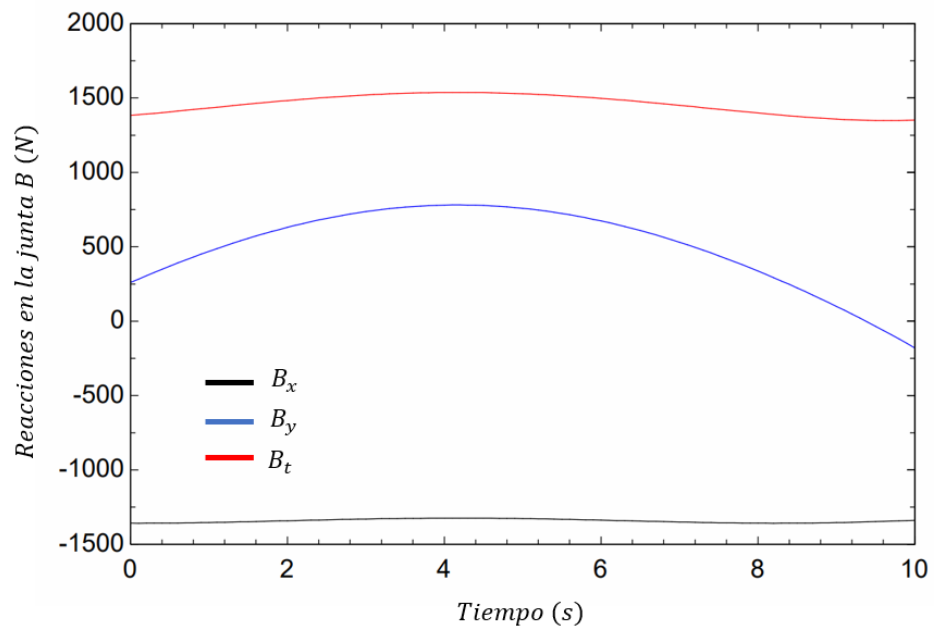


Figura 41. Reacciones en la junta B para modelo estático.

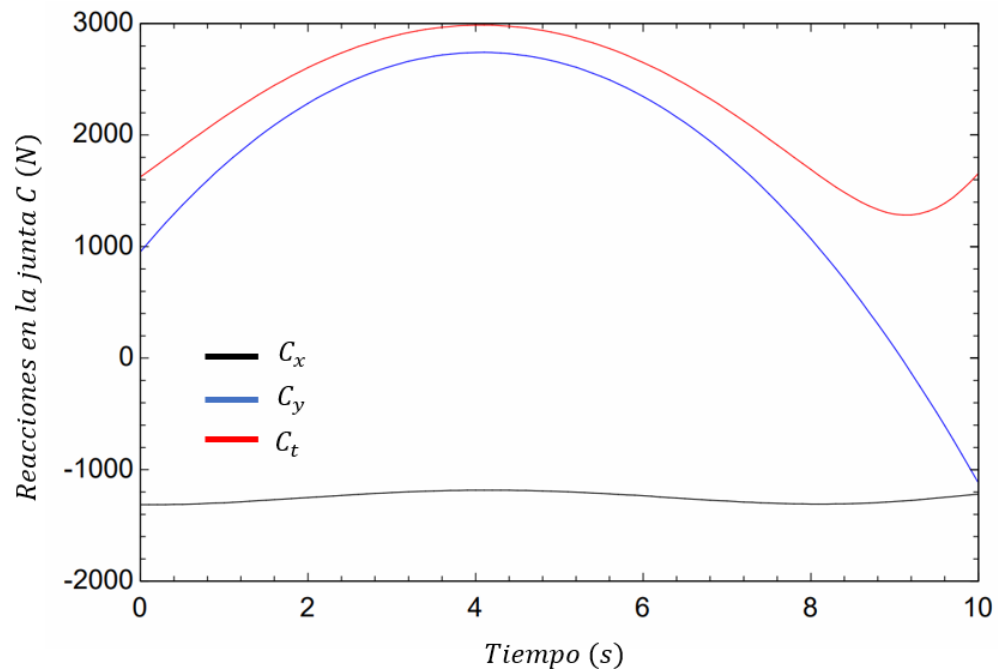


Fuente: Autores

Las fuerzas presentes en el miembro del brazo de control son tres: las reacciones en la junta A y B y el peso de la barra. De este modo, por la naturaleza del miembro articulado, este podría considerarse como un miembro de dos fuerzas siendo esto validado por medio de las gráficas en las que ambas reacciones son muy similares, haciéndose prácticamente nula la influencia del peso.

Por su parte, las reacciones verticales y horizontales no tienen una variación considerable para las distintas posiciones de estudio por lo que la influencia de la posición del mecanismo no afecta en gran medida los valores de las reacciones de los apoyos.

Figura 42. Reacciones en la junta C para modelo estático.

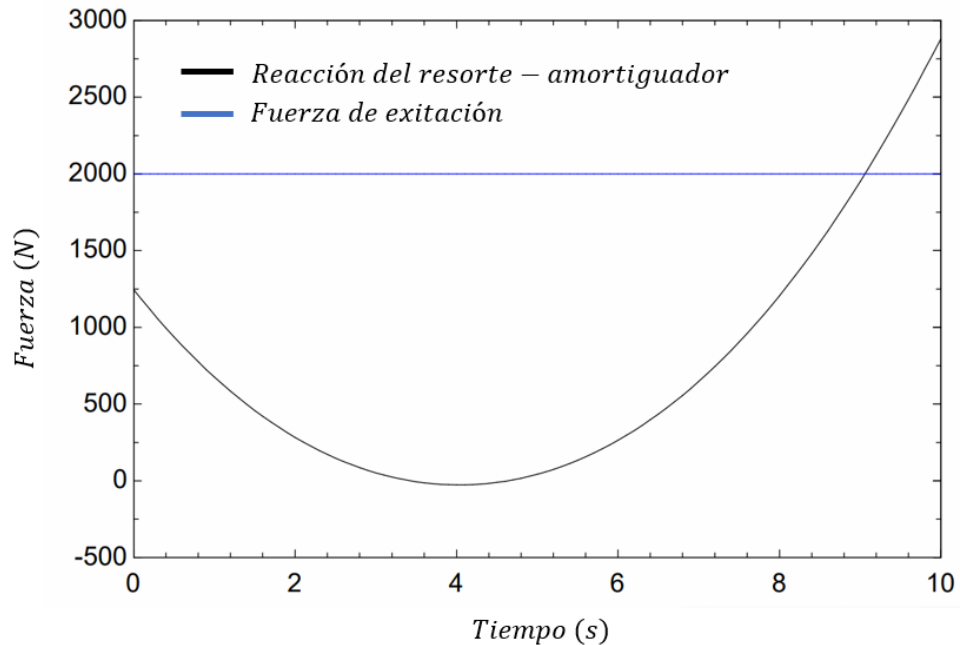


Fuente: Autores

En la gráfica anterior se presenta las reacciones correspondientes a las fuerzas producidas por la sujeción del miembro de la dirección, siendo la reacción vertical la que tiene mayor variación, notándose que alcanza un valor máximo para la

posición correspondiente al instante de los 4 segundos, que es donde aproximadamente se alcanza el máximo valor del ángulo θ_1 (Posición angular del brazo de control).

Figura 43. Fuerza excitadora estática en la rueda y reacción del sistema resorte amortiguador.



Fuente: Autores

En esta gráfica se presentan a detalles las fuerzas conocidas del sistema de suspensión que corresponden a la fuerza de excitación (Definida previamente como constante) y a la fuerza del resorte-amortiguador, la cual se conoce completamente. Pues desde la cinemática se determinó la deformación del resorte y la velocidad instantánea del amortiguador, que, junto con las constantes calculadas en el apartado anterior, definen completamente el valor de la fuerza.

2.5.9 Modelo Dinámico. Para el modelo dinámico, la matriz de solución, contemplando aceleraciones angulares y traslacionales, resulta de la siguiente manera:

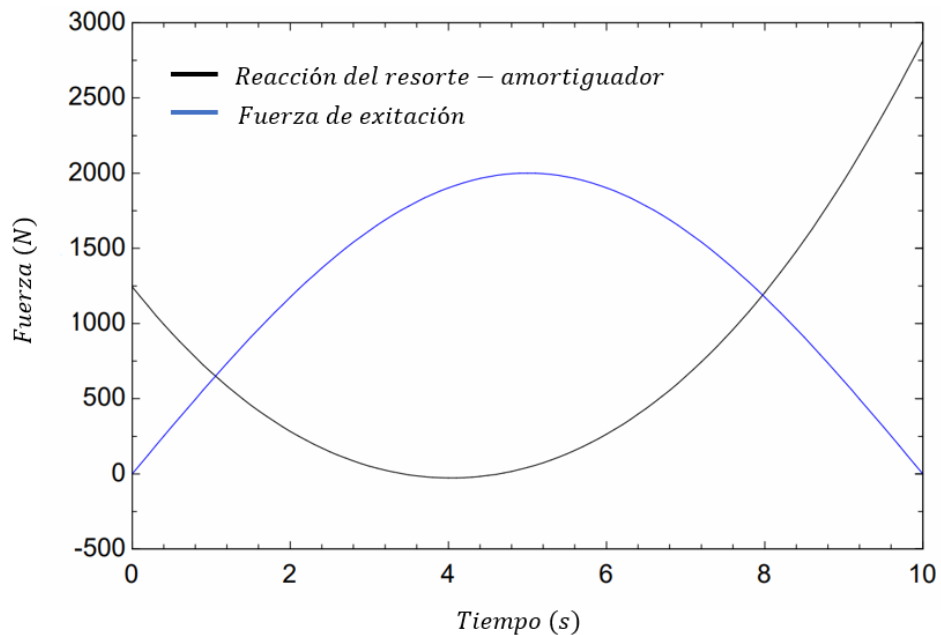
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & b & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -c & d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ B_x \\ B_y \\ C_x \\ C_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_b a_{x_1} \\ m_b a_{y_1} + m_b g \\ J_1 \varepsilon_1 \\ m_m a_{x_2} - (F_w \operatorname{sen}(\alpha) + F_{sd} \operatorname{sen}(\theta_2)) \\ m_m a_{y_2} + m_m g + F_{sd} \cos(\theta_2) - F_w \cos(\alpha) \\ J_2 \varepsilon_2 + F_{sd} \operatorname{sen}(\theta_2) \cdot e - F_{sd} \cos(\theta_2) \cdot f \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_1}{2} \operatorname{sen}(\theta_1) & d &= r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) - \frac{r_8}{4} \cos(\alpha) \\ b &= -\frac{r_1}{2} \cos(\theta_1) & e &= r_3 \cos(\theta_2) + \frac{r_8}{4} \operatorname{sen}(\alpha) \\ c &= \frac{r_8}{4} \operatorname{sen}(\alpha) - r_2 \cos(\theta_2) & f &= r_3 \operatorname{sen}(\theta_2) + \frac{r_8}{4} \cos(\alpha) \end{aligned}$$

para este caso dicha fuerza será una función en el dominio del tiempo con un comportamiento sinusoidal y de una amplitud máxima de 2000 [N].

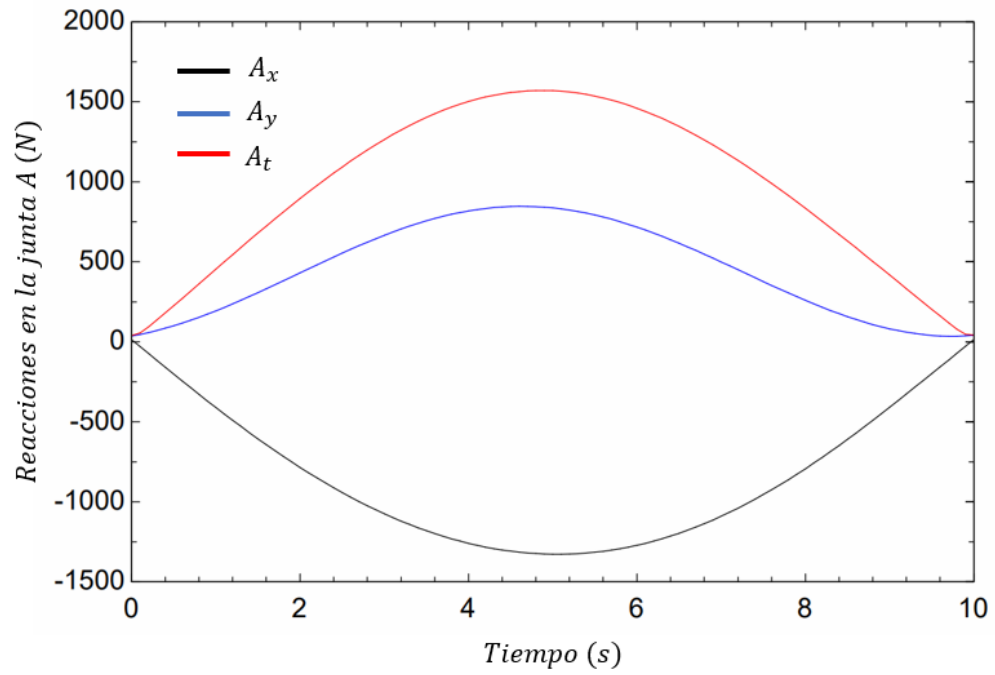
$$F_w = 2000 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot t\right) \text{ [N]}$$

Figura 44. Fuerza excitadora dinámica en la rueda y reacción del sistema resorte amortiguador.



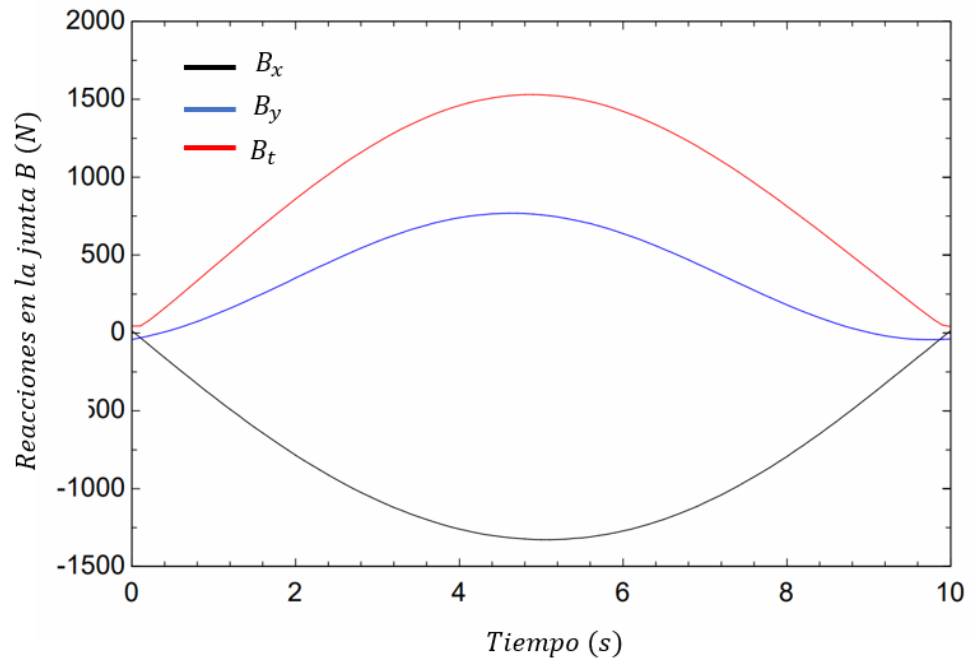
Fuente: Autores

Figura 45. Reacciones en la junta A para modelo dinámico.



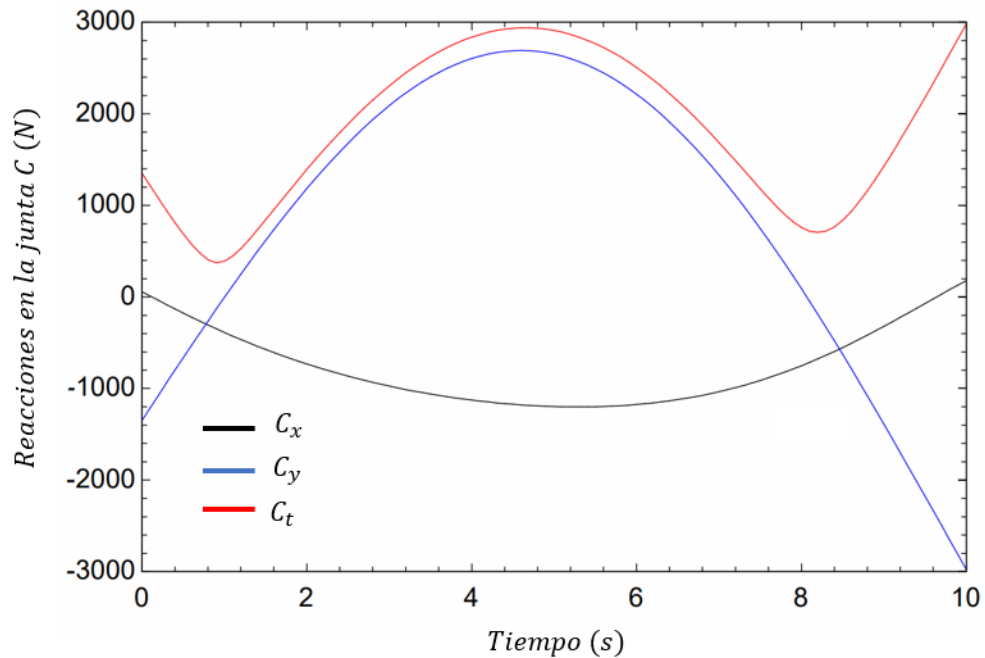
Fuente: Autores

Figura 46. Reacciones en la junta B para modelo dinámico.



Fuente: Autores

Figura 47. Reacciones en la junta C para modelo dinámico.



Fuente: Autores

En este caso, los resultados arrojados, en relación con las reacciones obtenidas considerando fuerzas dinámicas y aceleraciones del sistema de suspensión, demuestran que la solución del sistema de ecuaciones planteadas tiene el mismo comportamiento que la fuerza ejercida por la carretera sobre la rueda, en este caso dicha fuerza tenía un comportamiento sinusoidal, siendo en el instante $t = 5$ [s] donde se alcanza el valor máximo coincidiendo con el valor de fuerza estática asumida en el análisis anterior

$$F_w = 2000 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot t\right) \rightarrow F_w = 2000 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot 5\right)$$

$$F_w = 2000 \text{ [N]}$$

Por tanto, se hará una comparativa con los resultados obtenidos entre el análisis estático y el dinámico en el instante $t = 5$ [s].

Tabla 6. Reacciones obtenidas para el modelo dinámico y estático.

	A_x [N]	A_y [N]	A_t [N]	B_x [N]	B_y [N]	B_t [N]	C_x [N]	C_y [N]	C_t [N]	F_{sd} [N]	F_w [N]
Modelo Dinámico	-1328	837	1570	-1328	758,5	1529	-1197	2650	2908	42,95	2000
Modelo estático	-1328	837	1570	-1328	758,6	1529	-1197	2651	2908	42,49	2000
Variación	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0,038%	0%	1%	0%

Fuente: autores

Tal como se puede apreciar, en la tabla adjunta, los resultados obtenidos en ambos modelos presentan una variación muy insignificante, en gran medida, por las aceleraciones tan pequeñas que maneja el sistema de suspensión haciéndolas prácticamente despreciables en el análisis.

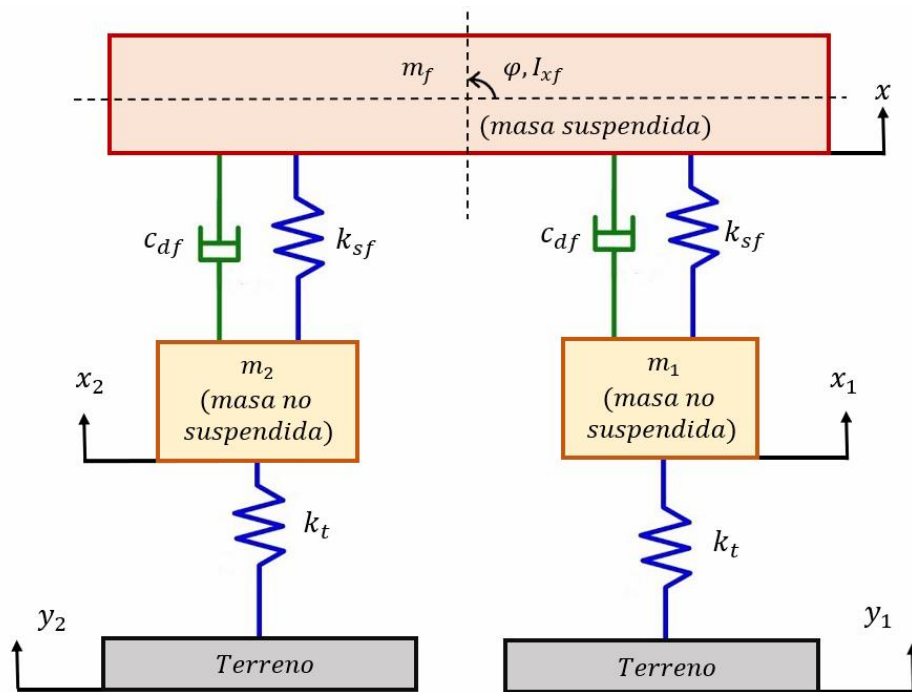
En ese orden de ideas, estas serán las fuerzas que serán llevadas al estudio estático por medio de un análisis de elementos finitos, en el que se podrá visualizar los esfuerzos producidos en todos los miembros del sistema de suspensión junto con las deformaciones presentadas y el factor de seguridad.

3. SIMULACIÓN VIBRATORIA DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN MCPHERSON

La simulación en ingeniería se consolida como una herramienta fundamental para reproducir y analizar los fenómenos físicos, de manera que se pueda establecer el impacto de cada una de las variables en el rendimiento de un diseño propuesto.

En ese orden de ideas, se propone un modelo para la suspensión delantera McPherson el cual consta de cuatro grados de libertad: Desplazamiento de las dos ruedas y desplazamiento angular y lineal de la carrocería. Así pues, el objetivo principal de este modelo es poder analizar el comportamiento de la carrocería variando los parámetros de entrada (Excitación del terreno, constantes de rigidez y amortiguamiento) dejando fijo los requerimientos de diseño (Distribución del peso del vehículo y valor de las masas suspendidas y no suspendidas)

Figura 48. Modelo sistema de suspensión McPherson eje delantero.



Fuente: autores

El modelo propuesto contempla la rigidez y amortiguamiento del sistema de suspensión. Sin embargo, para el caso de la masa no suspendida, solo se tiene en cuenta la rigidez del neumático, pues el amortiguamiento de la rueda es insignificante en comparación con el valor del coeficiente de amortiguamiento de los cilindros amortiguadores. Adicional a lo anterior, el terreno de cada rueda es excitado de forma independiente para detallar las situaciones en la que las llantas son sometidas a condiciones no simétricas.

Sin embargo, vale la pena recalcar que este modelo constituye la mitad delantera del vehículo y la masa de la carrocería corresponde al 60% de la masa suspendida total, de igual forma sucede con la distribución de inercias del sistema. No obstante, para el caso de la masa no suspendida, es necesario asumir los valores de las partes que conforman el sistema de suspensión y el neumático.

Por otro lado, para poder establecer las ED que rigen el movimiento de este sistema, se procede a realizar los diagramas de cuerpo libre correspondientes a las masas de interés del vehículo. Dichas ED pueden ser encontradas en el **Anexo L**.
Deducción del modelo vibratorio

Así pues, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales con cuatro funciones como incógnitas $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x(t)$ y $\varphi(t)$. Dicho sistema es llevado a la siguiente forma matricial:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}$$

Por tal motivo, se reorganizan las ecuaciones diferenciales de la siguiente manera:

1. De la ecuación de cinética lineal de la carrocería (Balance de fuerzas):

$$m_f \ddot{x} + 2c_{df} \dot{x} - c_{df} \dot{x}_2 + c_{df}(b_1 - b_2)\dot{\varphi} - c_{df} \dot{x}_1 + 2k_{sf}x - k_{sf}x_2 - k_{sf}x_1 + k_{sf}(b_1 - b_2)\varphi = 0$$

2. De la ecuación de cinética rotacional de la carrocería (Balance de momentos):

$$I_{xf}\ddot{\varphi} + c_{df}(b_1 - b_2)\dot{x} - c_{df}b_1\dot{x}_1 + c_{df}b_2\dot{x}_2 + c_{df}(b_1^2 + b_2^2)\dot{\varphi} + k_{sf}(b_1 - b_2)x - k_{sf}b_1x_1 + k_{sf}b_2x_2 + k_{sf}(b_1^2 + b_2^2)\varphi = 0$$

3. De la ecuación del balance de fuerzas para la masa 1 (m_1):

$$m_1\ddot{x}_1 - c_{df}\dot{x} + c_{df}\dot{x}_1 - c_{df}b_1\dot{\varphi} - k_{sf}x + (k_{sf} + k_t)x_1 - k_{sf}b_1\varphi - k_t y_1 = 0$$

4. De la ecuación del balance de fuerzas para la masa 2 (m_2):

$$m_2\ddot{x}_2 - c_{df}\dot{x} + c_{df}\dot{x}_2 - b_2c_{df}\dot{\varphi} - k_{sf}x + (k_{sf} + k_t)x_2 - k_{sf}b_2\varphi - k_t y_2 = 0$$

Finalmente, se obtiene: la matriz de inercias del sistema, matriz de coeficientes de amortiguamiento y matriz de rigideces, como también los vectores de posiciones, velocidades y aceleraciones de medio vehículo.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} ; \quad \{\ddot{x}\} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 2c_{df} & c_{df}(b_1 - b_2) & -c_{df} & -c_{df} \\ c_{df}(b_1 - b_2) & c_{df}(b_1^2 + b_2^2) & -c_{df}b_1 & c_{df}b_2 \\ -c_{df} & -c_{df}b_1 & c_{df} & 0 \\ -c_{df} & c_{df}b_2 & 0 & c_{df} \end{bmatrix} ; \quad \{\dot{x}\} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 2k_{sf} & k_{sf}(b_1 - b_2) & -k_{sf} & -k_{sf} \\ k_{sf}(b_1 - b_2) & k_{sf}(b_1^2 + b_2^2) & -k_{sf}b_1 & k_{sf}b_2 \\ -k_{sf} & -k_{sf}b_1 & k_{sf} + k_t & 0 \\ -k_{sf} & k_{sf}b_2 & 0 & k_{sf} + k_t \end{bmatrix} ; \quad \{x\} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

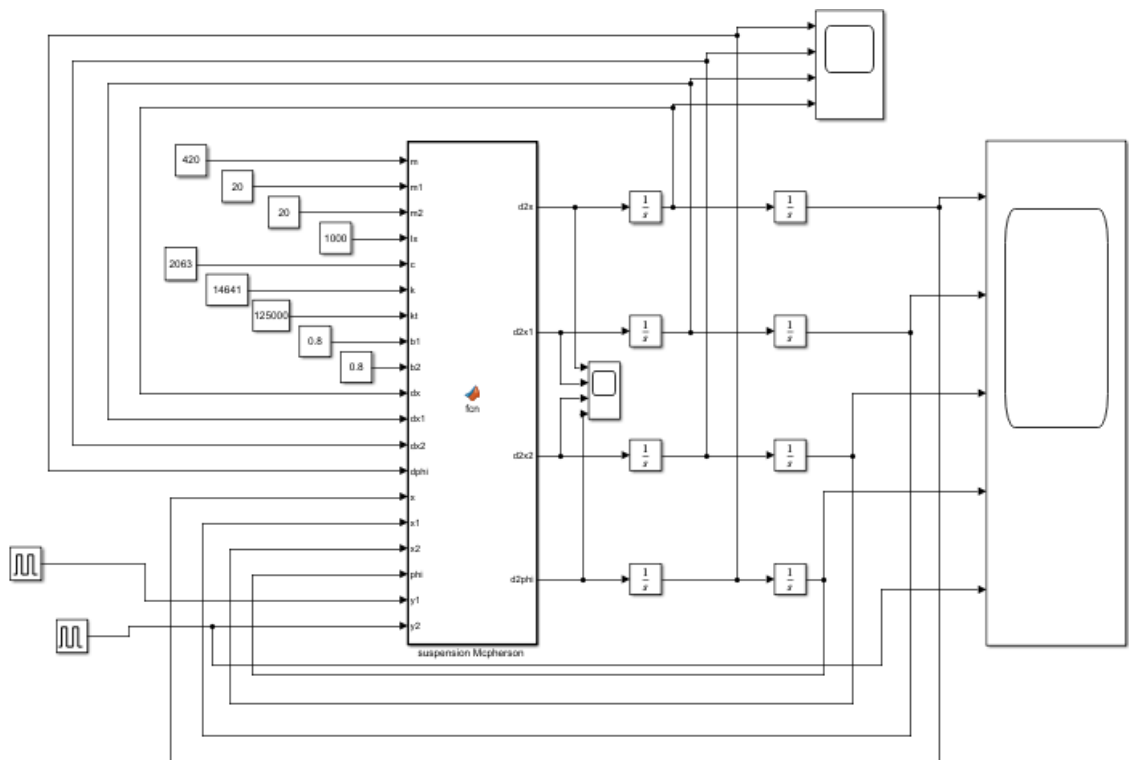
$$[F] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_t y_1 \\ k_t y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xf} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c_{df} & c_{df}(b_1 - b_2) & -c_{df} & -c_{df} \\ c_{df}(b_1 - b_2) & c_{df}(b_1^2 + b_2^2) & -c_{df}b_1 & c_{df}b_2 \\ -c_{df} & -c_{df}b_1 & c_{df} & 0 \\ -c_{df} & c_{df}b_2 & 0 & c_{df} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_{sf} & k_{sf}(b_1 - b_2) & -k_{sf} & -k_{sf} \\ k_{sf}(b_1 - b_2) & k_{sf}(b_1^2 + b_2^2) & -k_{sf}b_1 & k_{sf}b_2 \\ -k_{sf} & -k_{sf}b_1 & k_{sf} + k_t & 0 \\ -k_{sf} & k_{sf}b_2 & 0 & k_{sf} + k_t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \varphi \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_t y_1 \\ k_t y_2 \end{bmatrix}$$

Con el objetivo de poder analizar los resultados del modelo propuesto se llevan las anteriores ecuaciones diferenciales al entorno de programación gráfica de Matlab-Simulink de la siguiente forma:

3.1 IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO EN SIMULINK

Figura 49. Implementación modelo Simulink.



Fuente: Autores

El esquema presentado en Simulink se compone de las siguientes partes: Entradas, bloque central, salidas, integradores y paneles de visualización. Estas serán descritas a continuación.

3.2 ENTRADAS

Cada uno de los parámetros de entrada, presentados en la tabla que se encuentra en el **Anexo M**. Parámetros de entrada para la simulación del sistema de suspensión frontal, pueden clasificarse en cinco categorías: Parámetros inerciales, constantes del sistema, dimensiones, variables retroalimentadas y variables de excitación.

3.2.1 Parámetros Inerciales. Estos corresponden a las masas e inercia del sistema, denotados como: m_f, m_1, m_2 e I_{xf} . La masa m_f corresponde a la masa de la carrocería frontal y es definida como el 60% de la masa total de vehículo, la cual tiene un valor de $m = 700 [kg]$ por lo que $m_f = 0.6 \cdot 700 \rightarrow m_f = 420 [kg]$.

La masa m_1 y m_2 hacen referencia a la masa no suspendida, siendo entonces la masa en conjunto del sistema de suspensión, es decir la suma de las masas del brazo de control, mangueta, resorte-amortiguador y rueda. De acuerdo con un estudio reciente de la Escuela superior politécnica del Ecuador denominado *Modelado Físico y Matemático del Sistema de Suspensión de un Cuarto de Vehículo* se estimó que un sistema McPherson genérico tiene una masa aproximada de $m_1 = m_2 = 40 [kg]$.

Finalmente, la inercia de la carrocería fue obtenida mediante el mismo procedimiento de obtención del centro de gravedad, descrito en el apartado del presente proyecto denominado *Definición de los parámetros geométricos y especificaciones funcionales*, en el que se hizo uso del software Solidworks para poder modelar una geometría simplificada de la carrocería, con la distribución de

masas establecidas desde los requerimientos de diseño, y que este calculara computacionalmente las inercias en cada uno de los ejes, siendo $I_{xf} = 983.74 [kg \cdot m^2]$

3.2.2 Constantes del sistema. Estas corresponden a la constante de rigidez del resorte k_{sf} , la constante de rigidez del neumático k_t y el coeficiente de amortiguamiento de los cilindros c_{df} . Tanto la constante del resorte como el coeficiente de amortiguamiento fueron calculados en el apartado del presente proyecto denominado *Diseño y selección del conjunto resorte-amortiguador*, siendo $k_{sf} = 14641 \left[\frac{N}{m}\right]$ y $c_{df} = 2063 \left[\frac{N \cdot s}{m}\right]$.

En cuanto a la rigidez del neumático se vuelve a recurrir al estudio reciente de la Escuela superior politécnica del Ecuador denominado *Modelado Físico y Matemático del Sistema de Suspensión de un Cuarto de Vehículo* en el que se estimó que $k_t = 125000 \left[\frac{N}{m}\right]$. Se adjunta la tabla con los parámetros de su estudio.

Tabla 7. Parámetros del modelo de estudio del artículo *Modelado Físico y Matemático del Sistema de Suspensión de un Cuarto de Vehículo*.

PARÁMETROS DEL MODELO			
Denominación	Símbolo	Cantidad	Unidad
Masa suspendida	M_2	250	kg
Masa no suspendida	M_1	40	kg
Rigidez suspensión	K_2	28000	N/m
Rigidez neumático	K_1	125000	N/m
Amortig. suspensión	B_2	2000	N*s/m
Amortig. neumático	B_1	100	N*s/m

Fuente: *Modelado Físico y Matemático del Sistema de Suspensión de un Cuarto de Vehículo*

3.2.3 Dimensiones. Estas corresponden a las dimensiones frontales de la carrocería, es decir la mitad del Track, el cual por especificaciones de diseño se definió de $T = 1400 [mm]$. por lo tanto, $b_1 = b_2 = 0.7 [m]$.

3.2.4 Variables retroalimentadas. Estas corresponden a las velocidades y posiciones de la masa no suspendida y suspendida (Posición-velocidad lineal masa suspendida, posición-velocidad lineal masa no suspendida 1 y 2, posición-velocidad angular carrocería) por lo que estas se retroalimentan de las mismas salidas luego de que son pasados por los integradores.

3.3 VARIABLES DE EXCITACIÓN

Estas corresponden a la forma en la que el sistema se va a excitar por lo que hacen referencia a las irregularidades del terreno a las que se puede ver sometido el vehículo. En ese orden de ideas, se proponen las siguientes formas de excitación.

3.3.1 Condiciones simétricas de ambas ruedas en resalto parabólico.

Figura 50. Resalto parabólico.

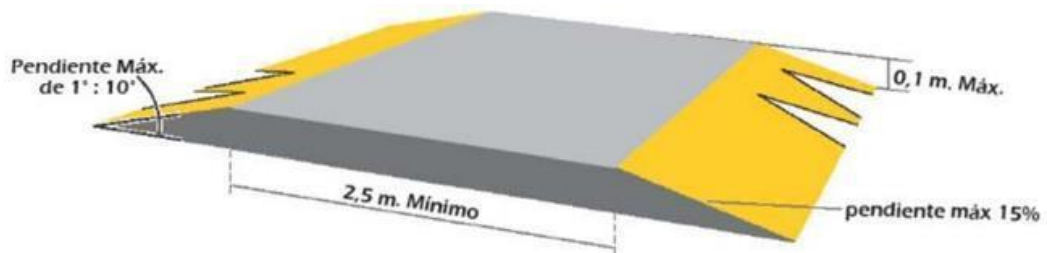


Fuente: <http://chicureo.com/taller/2012/09/25/el-mercurio-com-el-periodico-lider-de-noticias-en-chile/>

Para esta situación, ambas ruedas pasarán por un resalto de tipo parabólico en un periodo de aproximadamente 5 [s] por lo que se determina la ecuación matemática de la parábola y se lleva a un Matlab function, que puede ser visualizado en el **Anexo N**. Programación en Matlab de resaltos en vía

3.3.2 Condiciones simétricas de ambas ruedas en resalto portátil trapezoidal

Figura 51. Resalto Trapezoidal.



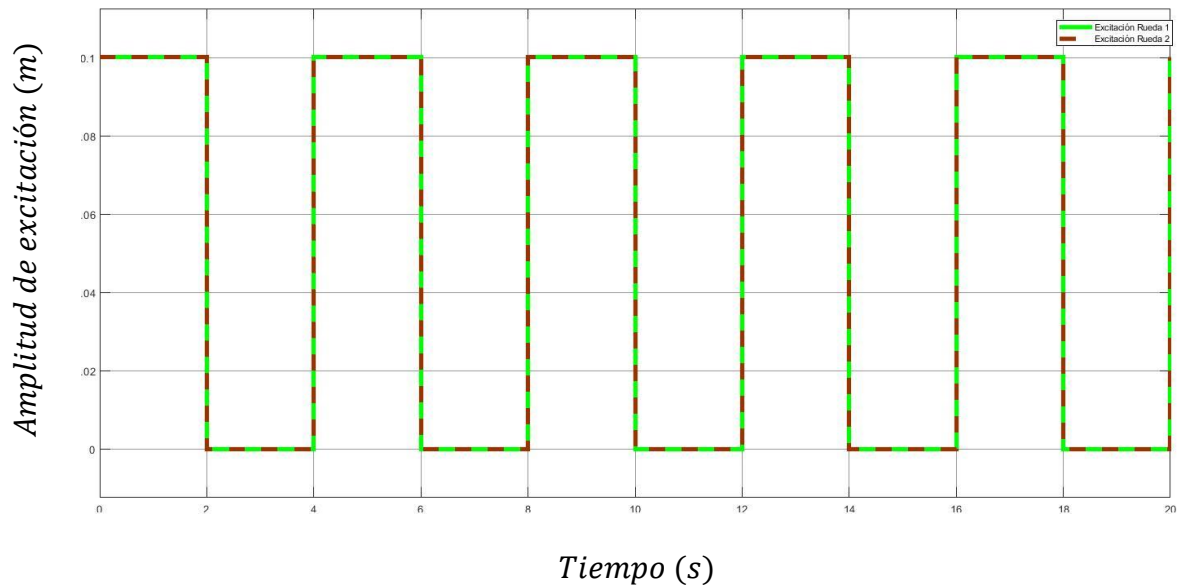
Fuente:<https://asdconsultoresjuridicos.jimdofree.com/accidentes-de-tr%C3%A1nsito/se%C3%B1ales-de-transito/>

Para esta situación ambas ruedas pasaran por un resalto de tipo trapezoidal en un periodo de aproximadamente 5 [s] por lo que se determina la ecuación matemática de las tres funciones que lo componen: dos rectas y una función constante. Su construcción en MATLAB se encuentra en el **Anexo N**. Programación en Matlab de resaltos en vía **Anexo O**. Disposición en Matlab del modelo vibratorio para el sistema de suspensión frontal.

3.3.3 Condiciones simétricas de ambas ruedas excitadas mediante dos funciones de pulso idénticas. En este caso se utiliza un generador de pulsos con el objetivo de analizar el comportamiento de la suspensión ante cambios súbitos del terreno, de manera que se pueda visualizar el tiempo que le cuesta al sistema acoplarse a la excitación sin la mayor oscilación posible.

La siguiente gráfica presenta una excitación simétrica en ambas ruedas con dos funciones de pulso de amplitud de $A = 0.1 [m]$ y periodo $T = 4 [s]$.

Figura 52. Funciones de pulso idénticas.



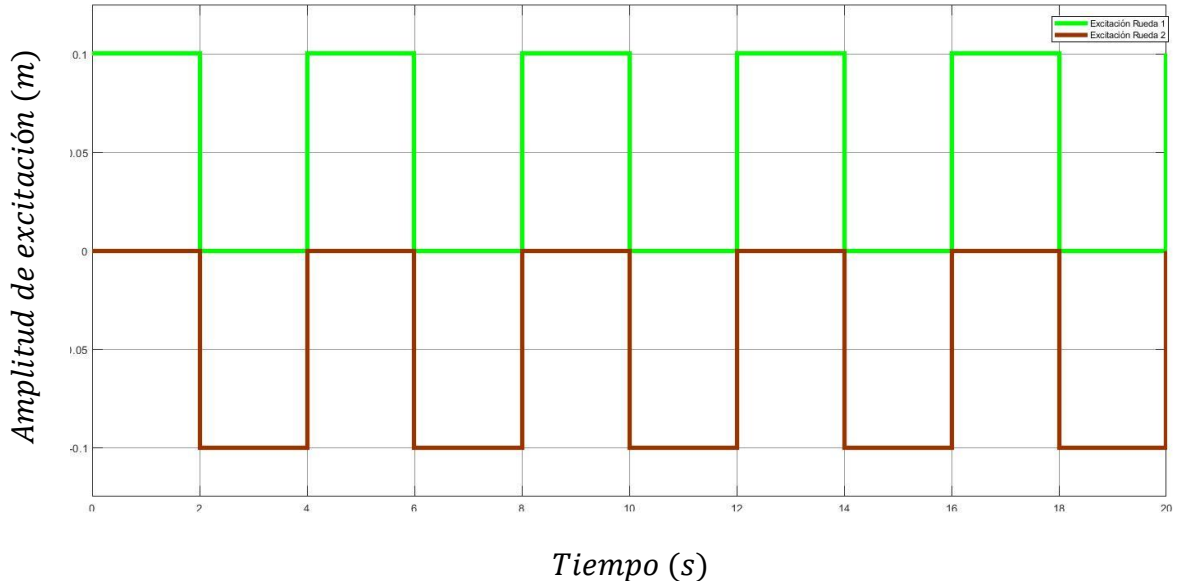
Fuente: Autores

En términos físicos la excitación se traduce de la siguiente manera: En los primeros 2 [s] ambas ruedas se encuentran en un resalto de $v = 0.1 [m]$ sobre el nivel del suelo, luego se produce un cambio abrupto que hace que ambas ruedas vuelvan a estar al nivel del suelo ($v = 0.1 [m] \rightarrow v = 0 [m]$) hasta los 4 [s], en dicho instante se vuelve a generar un cambio súbito desde el suelo hasta un resalto ($v = 0 [m] \rightarrow v = 0.1 [m]$) al cumplir el periodo la señal vuelve a repetirse. Tales cambios repentinos pondrán a prueba la capacidad de disipación de energía del sistema de suspensión y se analizará en el apartado de resultados.

3.3.4 Condiciones asimétricas de ambas ruedas excitadas mediante dos funciones de pulso con amplitudes de signo contrario. La siguiente gráfica presenta una excitación asimétrica en ambas ruedas con dos funciones de pulso:

La primera (Verde) con amplitud de $A = 0.1 [m]$ y periodo $T = 4 [s]$. La segunda (Marrón) con amplitud de $A = -0.1 [m]$ periodo $T = 4 [s]$ y desfase de $\varphi = 2 [s]$.

Figura 53. Funciones de pulso con amplitud de signo contrario.



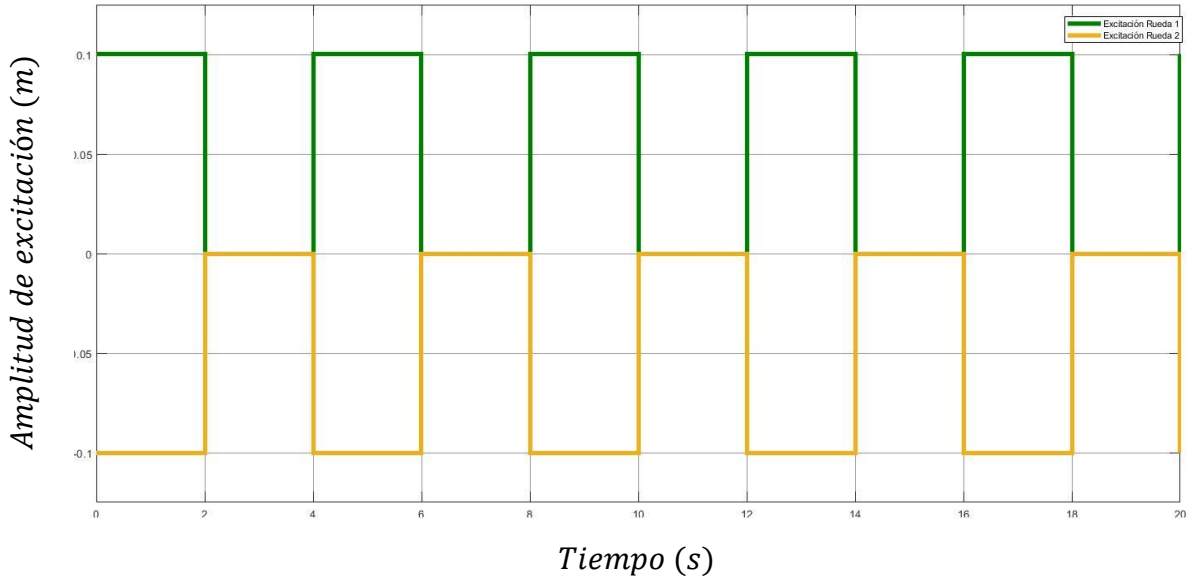
Fuente: Autores

En términos físicos la excitación se traduce de la siguiente manera: En los primeros 2 [s] la rueda 1 se encuentra en un resalto de $v = 0.1 [m]$ mientras que la rueda 2 se encuentra al nivel del suelo $v = 0 [m]$. En dicho instante la rueda 1 experimenta un cambio de estar en un resalto a estar al nivel del suelo ($v = 0.1 [m] \rightarrow v = 0 [m]$) mientras que la rueda 2 pasa del nivel del suelo a estar en un hueco ($v = 0 [m] \rightarrow v = -0.1 [m]$) esto permanece así hasta el instante $t = 4 [s]$. En dicho instante la rueda 1 pasa de estar en el nivel del suelo a estar en un resalto ($v = 0 [m] \rightarrow v = 0.1 [m]$) y la rueda 2 pasa de estar en un hueco a volver al nivel del suelo ($v = -0.1 [m] \rightarrow v = 0 [m]$)

3.3.5 Condiciones asimétricas de ambas ruedas excitadas mediante dos funciones de pulso en condición crítica. La siguiente gráfica presenta una excitación asimétrica en ambas ruedas con dos funciones de pulso: La primera

(Verde) con amplitud de $A = 0.1 [m]$ y periodo $T = 4 [s]$. La segunda (Amarilla) con amplitud de $A = -0.1 [m]$ y periodo $T = 4 [s]$.

Figura 54. Excitación Crítica.



Fuente: Autores

En términos físicos esta es considerada la excitación crítica porque puede proveer las condiciones necesarias para un volcamiento del vehículo. Dicha excitación se traduce de la siguiente forma, en los primeros 2 [s] la rueda 1 se encuentra en el resalto máximo mientras que la rueda 2 se encuentra en el hueco máximo. Esta situación de desbalanceo puede generar que el sistema rote respecto de la rueda 2 y esto será validado con el comportamiento del ángulo de balanceo. Posterior a esto, en el instante $t = 2 [s]$, ambas ruedas vuelven a estar al nivel del suelo (*Rueda 1* $v = 0.1 [m] \rightarrow v = 0 [m]$) y (*Rueda 2* $v = -0.1 [m] \rightarrow v = 0 [m]$) y esto permanece así hasta los 4 [s] en el que ambas ruedas vuelven a su posición anterior (*Rueda 1* $v = 0 [m] \rightarrow v = 0.1[m]$) y (*Rueda 2* $v = 0 [m] \rightarrow v = -0.1 [m]$).

Habiendo explicado las entradas del sistema y la forma en la que se va a excitar el modelo propuesto, se procede a presentar el bloque central y la forma en la que

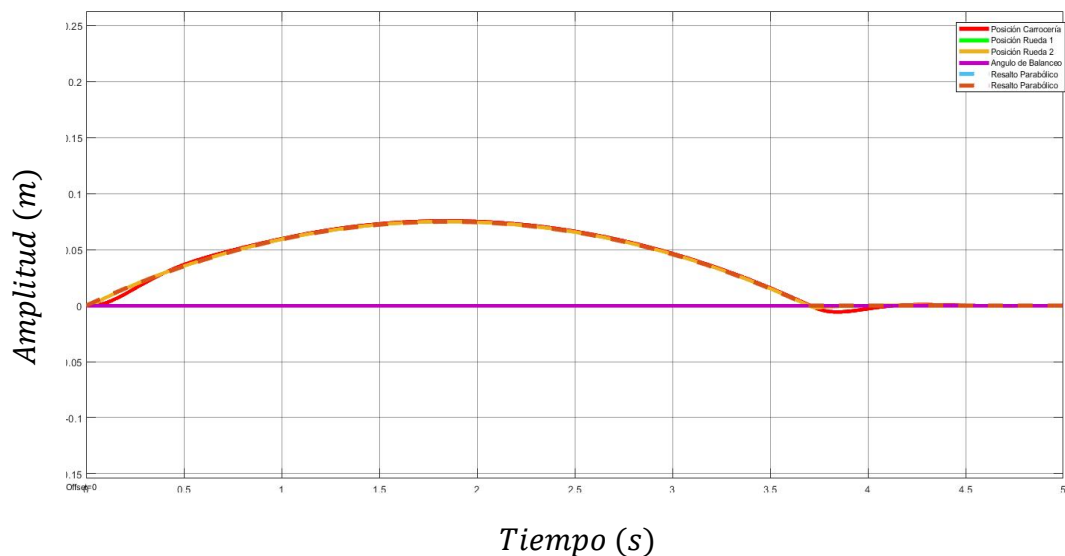
fueron dispuestas las ecuaciones diferenciales en el **Anexo O**. Disposición en Matlab del modelo vibratorio para el sistema de suspensión frontal.

3.4 RESULTADOS SIMULACIÓN

A continuación, se presentarán las gráficas de los resultados para cada forma de excitación del terreno. Dentro de cada imagen se visualizan las cuatro salidas del modelo de medio vehículo: La posición de la carrocería, el ángulo de balanceo y la posición de la rueda 1 y 2, adicional a lo anterior se superpone la función de entrada para analizar la forma en la que el sistema tiende a acoplarse a la perturbación del terreno.

3.4.1 Condiciones simétricas de ambas ruedas en resalto parabólico. Esta condición no representa mayor exigencia para el sistema de suspensión, pues al momento de tomar el resalto, tanto las ruedas como la carrocería, comienzan a seguir de manera idéntica el perfil del resalto parabólico durante el intervalo de 5 [s], tal como se puede apreciar en la siguiente imagen.

Figura 55. Señales de salida-resalto parabólico.



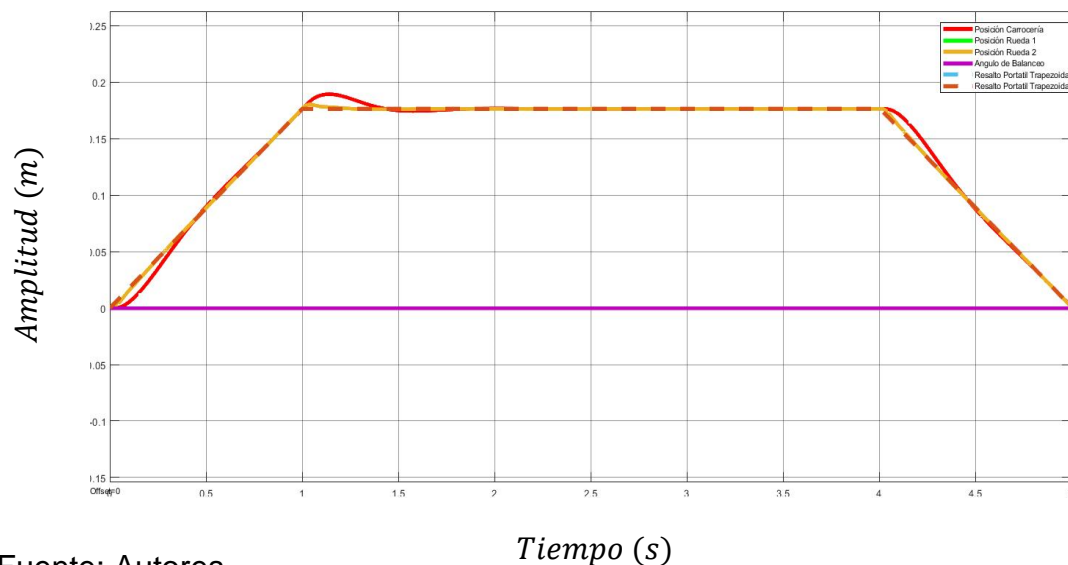
Fuente: Autores

En dicha imagen se puede apreciar que en el instante inicial y cerca de los 3.8 [s] la carrocería tiende a salirse del perfil del terreno, sin embargo esta particularidad no representa mayor oscilación del sistema y es ocasionada porque en esos puntos la condición del terreno cambia, pasando de una superficie parabólica a una completamente lineal o el caso contrario, lo que da a entender que la verdadera capacidad disipativa del amortiguador del sistema de suspensión se pone a prueba ante los cambios súbitos de las condiciones del terreno. Por otra parte, el ángulo de balanceo se mantiene constante y en un valor de $\varphi = 0$, pues ambas ruedas son excitadas de la misma forma, por lo que la carrocería no tiende a estar en condición de volcamiento en este modo de excitación.

3.4.2 Condiciones simétricas de ambas ruedas en resalto portátil trapezoidal.

En esta condición, al igual que en la anterior forma de excitación, el sistema no presentó mayor oscilación pues en el caso del resalto trapezoidal tanto las ruedas como la carrocería siguen también muy idénticas dicho perfil, solo presentando fluctuaciones en los instantes $t_1 = 1$ [s] y $t_2 = 4$ [s] que es donde la geometría del terreno cambia.

Figura 56. Señales de salida-resalto trapezoidal.

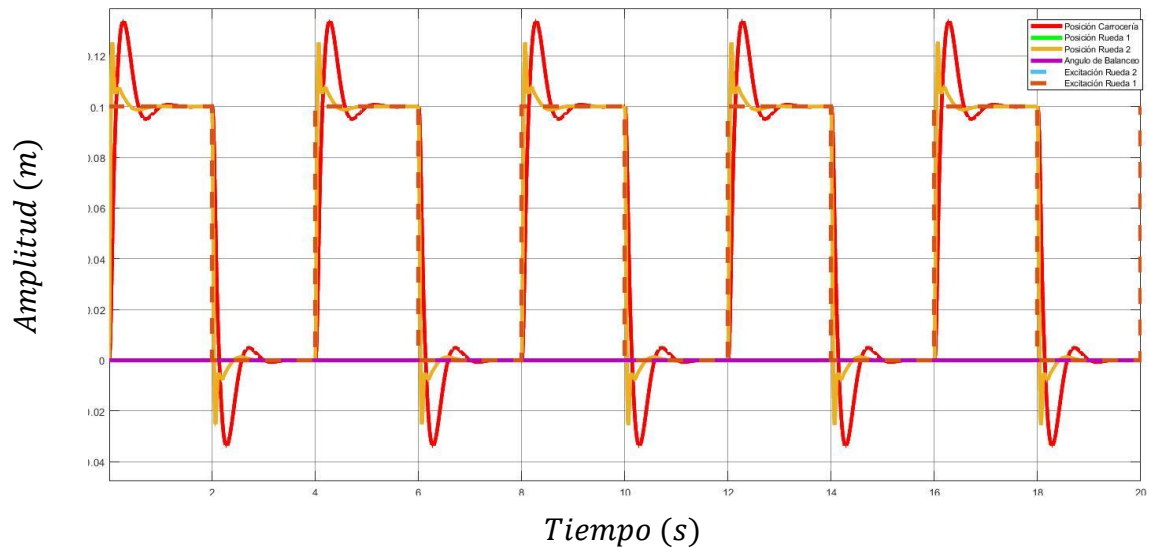


Fuente: Autores

De igual forma el ángulo de balanceo permanece constante y en el valor nulo por el hecho de ser una condición simétrica para ambas ruedas.

3.4.3 Condiciones simétricas de ambas ruedas excitadas mediante dos funciones de pulso idénticas. Entendiendo que el sistema de suspensión es puesto a prueba ante los cambios súbitos del terreno se analizan los resultados cuando la perturbación del terreno es modelada mediante una señal de pulsos tal como se presenta a continuación.

Figura 57. Señales de salida-funciones de pulso idénticas.



Fuente: Autores

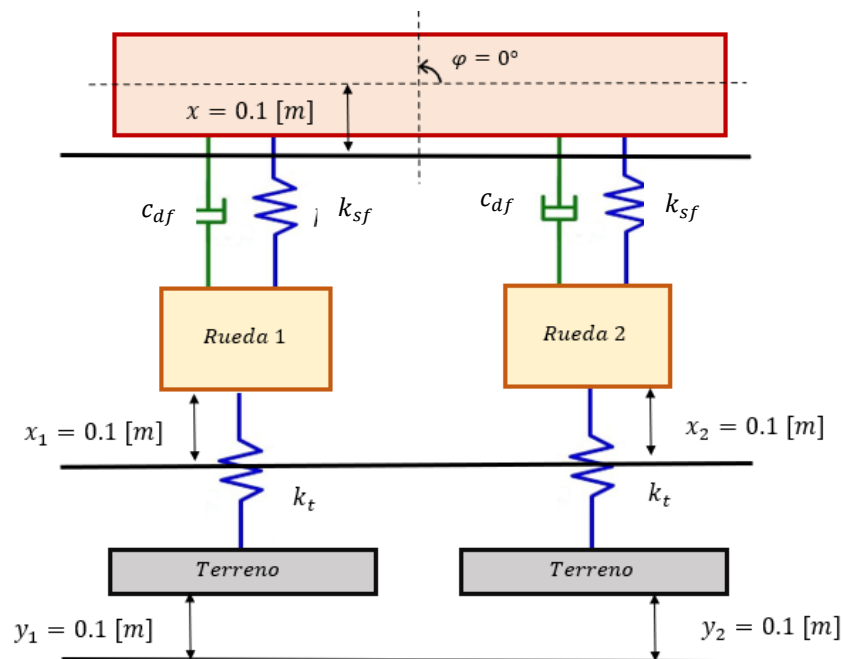
En la gráfica se puede apreciar la respuesta del sistema de suspensión, en los momentos en que la señal de pulso cambia su valor de amplitud, pues tanto en los periodos de resaltos ($v = 0 [m] \rightarrow v = 0.1 [m]$) y cambios al nivel del suelo ($v = 0.1 [m] \rightarrow v = 0 [m]$) las señales de la carrocería y las ruedas tienden a oscilar durante un periodo de tiempo antes de alcanzar la estabilidad.

Sin embargo, vale la pena notar, que dicha estabilidad es alcanzada justo antes del siguiente cambio en la perturbación de la entrada, un aspecto que está directamente

relacionado con la capacidad de amortiguamiento del sistema, que, en mayor parte, es aportado por el cilindro amortiguador con constante, $c_{df} = 2063 \left[\frac{N \cdot s}{m} \right]$.

Finalmente, el ángulo de balanceo sigue permaneciendo constante por la condición simétrica de excitación de la rueda. Dicho esto, se adjunta una imagen que detalla las posiciones, para el instante $t = 1.9 \text{ [s]}$, de cada uno de los componentes del modelo para tener mayor claridad de la condición de estabilidad del sistema.

Figura 58. Posición del sistema en el instante $t = 5.8 \text{ [s]}$.

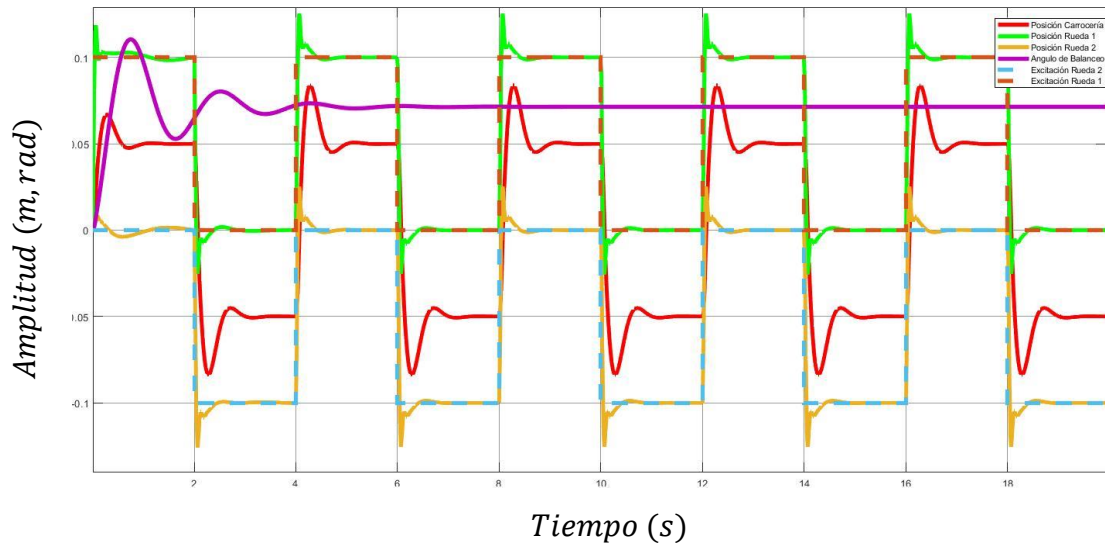


Fuente: Autores

3.4.4 Condiciones asimétricas de ambas ruedas excitadas mediante dos funciones de pulso con amplitudes de signo contrario. El análisis que se propone a continuación busca estudiar el comportamiento tanto angular como lineal de la carrocería cuando la perturbación de entrada es distinta para cada rueda. En este caso cuando una rueda se encuentra en su posición máxima la otra se encuentra al nivel del suelo haciendo variar el ángulo de balanceo de la carrocería,

el cual está directamente relacionado con la condición de no volcamiento del vehículo.

Figura 59. Señales de salida-funciones de pulso con amplitudes contrarias.



Fuente: Autores

Bajo esta condición de perturbación ambas ruedas comienzan a seguir la señal de pulsos con la que fueron excitadas, alcanzando una pequeña oscilación antes de estabilizarse, lo que se traduce en que, independientemente de la forma en la que se excite el sistema, las llantas siempre tratan de mantener dicho perfil aun cuando la condición del terreno es distinta para cada llanta.

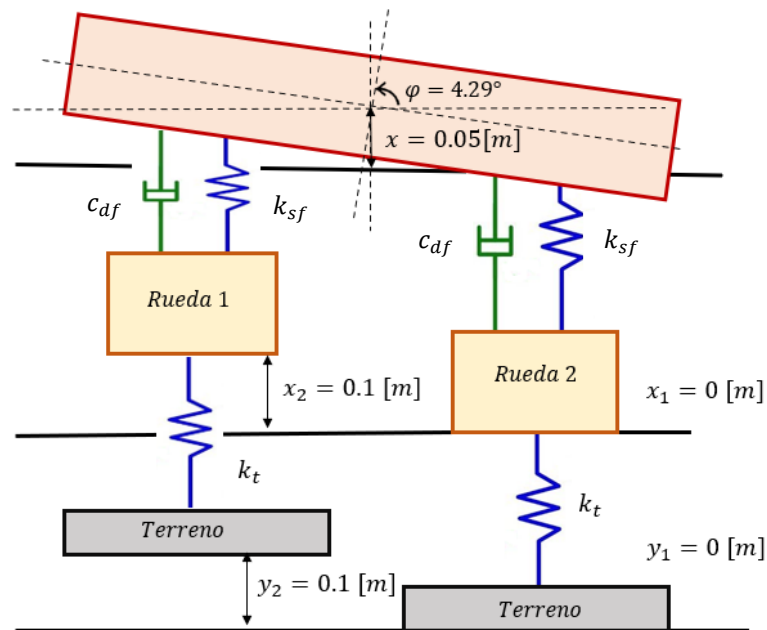
La carrocería por su parte presenta amplitudes mucho menores a las obtenidas en la condición anterior, pues en este caso se podría decir que se está excitando una llanta a la vez, en un periodo de 2 [s], ocasionado que la carrocería no suba tanto respecto a su posición de referencia, no obstante, sigue alcanzando la misma estabilidad al cabo de poco tiempo.

El ángulo de balanceo ahora si presenta oscilaciones por la condición dispar de la excitación en los primeros 5 segundos, a partir de ahí la carrocería permanece

inclinada en el resto del intervalo de estudio en un ángulo de aproximadamente $4,29^\circ$.

Se presenta entonces una imagen que detalla la condición estable para cuando la rueda 1 se encuentra excitada y la rueda 2 en el nivel del piso, de esta forma se detalla como la carrocería se desplaza hacia arriba de su posición de referencia y es girada en el sentido de las manecillas del reloj con el valor del ángulo mencionado anteriormente.

Figura 60. Posición del sistema en el instante $t = 5.8 [s]$.



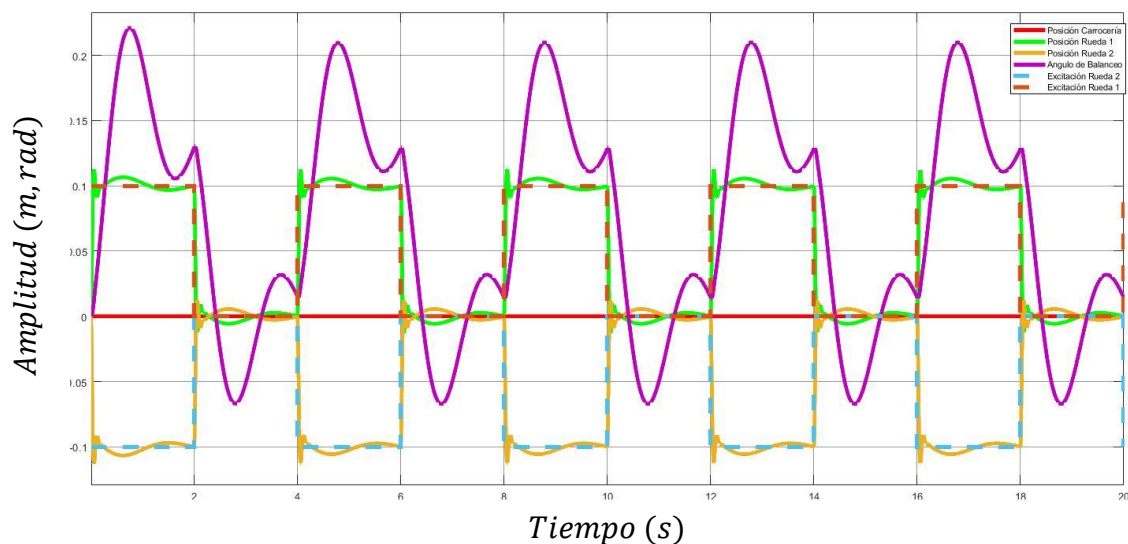
Fuente: Autores

3.4.5 Condiciones asimétricas de ambas ruedas excitadas mediante dos funciones de pulso en condición crítica. Ahora bien, luego de analizar las distintas condiciones de terreno propuestas, se procede a poner a prueba el sistema de suspensión en una condición crítica muy difícil de replicar en la realidad, y en la que, muy seguramente, no se alcance una estabilidad plena, pero que sirve, desde la perspectiva académica, para un estudio del comportamiento del sistema de

suspensión con el objetivo de lograr una optimización del diseño mecánico, refinamiento del modelo analítico o la posible incorporación de un sistema de control al mecanismo de suspensión.

La condición crítica que se está estudiando resulta de excitar la rueda 1 en la máxima amplitud de resalto, mientras que la rueda 2 es sometida a un hundimiento máximo de la misma amplitud del resalto, en otras palabras, lo que está subiendo la rueda 1 corresponde a lo que está bajando la rueda 2. Los resultados de dicha excitación son presentados a continuación:

Figura 61. Señales de salida-funciones de pulso en condición crítica.



Fuente: Autores

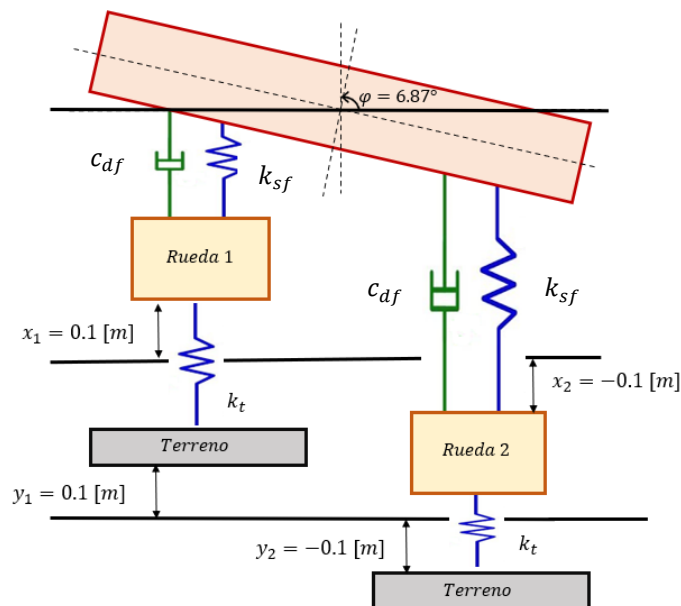
En la anterior imagen llama la atención principalmente el comportamiento del ángulo de balanceo y la posición de la carrocería, pues la ruedas, al ser un sistema de suspensión independiente, siguen el perfil de la perturbación ignorando la perturbación de la rueda contraria, siendo esto una ventaja de estos tipos de suspensión. La carrocería por su parte presenta un desplazamiento nulo en todo el intervalo de estudio, y esto se debe a que la distancia que sube la rueda 1

corresponde lo que baja la rueda 2, haciendo que la carrocería no modifique su posición lineal.

Sin embargo, el ángulo de balanceo presenta oscilaciones continuas y nunca llega a estabilizarse pues esta condición, aunque anula las oscilaciones lineales, amplifica las oscilaciones angulares, lo que se traduce en que la carrocería comenzó a adquirir únicamente un movimiento rotacional, similar al de una barra pivotada en su centro. Siendo esto supremamente negativo para el confort del pasajero, pues tales variaciones angulares desencadenarían en mareos y peor aún aumentarían la posibilidad de volcamiento del vehículo por el desbalance ocasionado por el terreno.

Finalmente, se adjunta una imagen en la que se detalla las posiciones del sistema para el instante $t = 1.9 [s]$ pues en este punto es donde las posiciones de las llantas se encuentran más cerca del valor de la excitación del terreno, sin embargo, vale la pena notar que, aunque las oscilaciones se atenúan, no se puede garantizar una estabilidad plena de estas.

Figura 62. Posición del sistema en el instante $t = 1.9 [s]$.



Fuente: Autores

La carrocería, tal como se había mencionado, nunca llega a estabilizarse en un valor de ángulo de balanceo constante, por lo que vale la pena analizar el comportamiento de la carrocería desde una perspectiva netamente cinemática, para detallar no solo sus posiciones sino también sus velocidades y aceleraciones durante todo el intervalo del tiempo de estudio, por lo que se presentan dichas gráficas a continuación.

Figura 63. Velocidad angular de la carrocería.

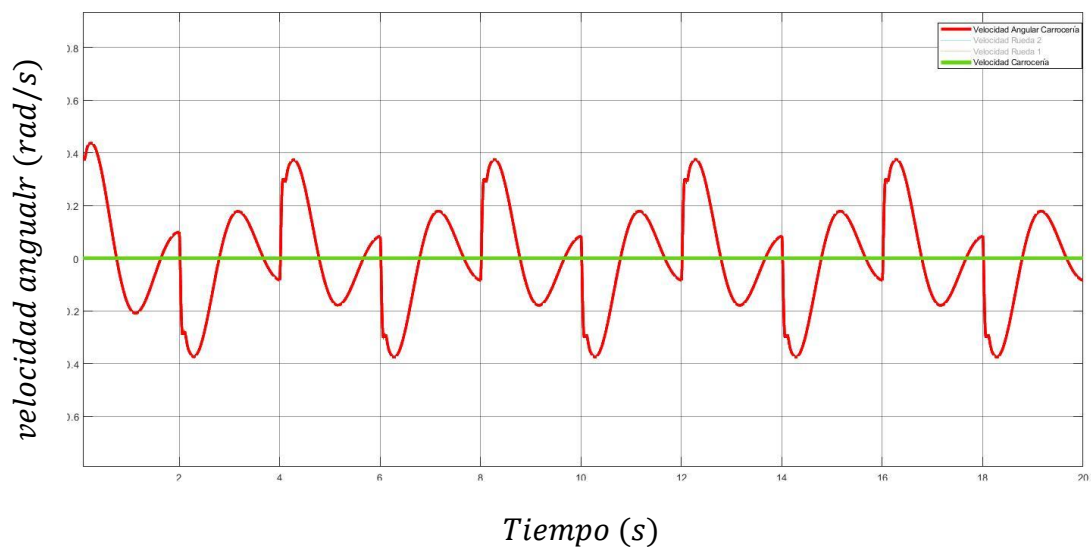
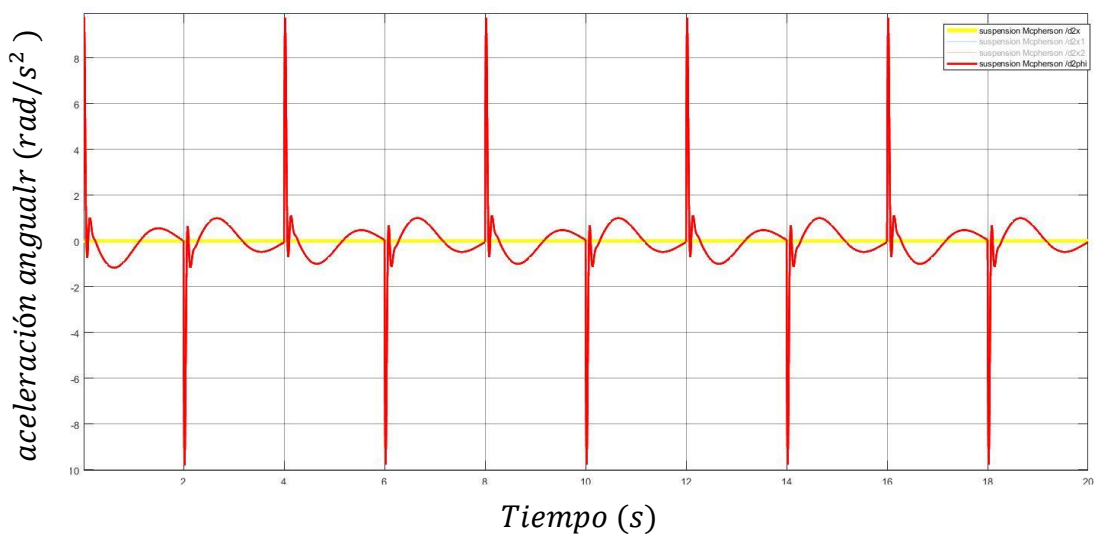


Figura 64. Aceleración angular de la carrocería.

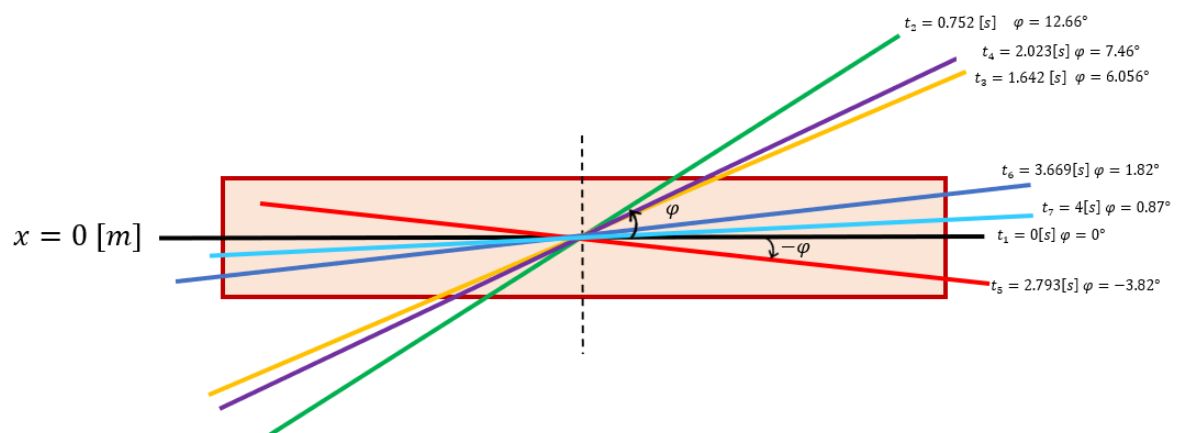


Fuente: Autores

Tanto la velocidad como la aceleración varían continuamente presentándose picos de amplitud en los momentos en que la perturbación cambia abruptamente, no obstante, lo principal que se puede extraer de estas gráficas es la tendencia nula a estabilizarse y a oscilar continuamente dada la perturbación impuesta.

La carrocería entonces presenta un comportamiento angular, tal cual se muestra en la siguiente imagen, variando su posición entre valores de $\varphi \rightarrow [-3.82^\circ - 12.66^\circ]$ en el intervalo de 4 [s] y repitiéndose continuamente, en razón a que las señales de pulso, que modelan la perturbación, tienen un periodo de $T = 4$ [s].

Figura 65. Múltiples posiciones angulares de la carrocería en el intervalo de 4 [s].



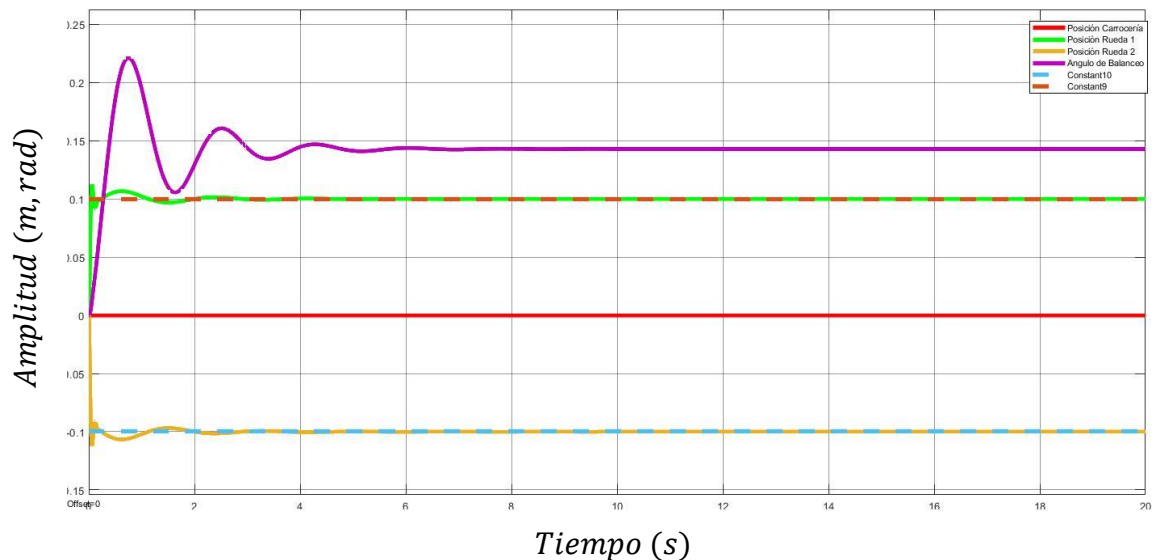
Fuente: Autores

Así pues, resulta inaceptable este comportamiento del ángulo de balanceo para un vehículo, por lo que un modo de controlar tales oscilaciones puede lograrse mediante la incorporación de una barra antivuelco que permita contrarrestar, por medio de la aplicación de un momento torsional, las variaciones angulares de la carrocería. Lo anterior dicho implicaría incorporar en el modelo analítico una variable más definida como $M_t = -k_r \cdot \varphi$, donde el k_r hace referencia a la rigidez torsional de la barra antivuelco.

La siguiente solución posible es incorporar una suspensión activa que permita cambiar las propiedades de rigidez y amortiguamiento continuamente para acoplarse con mayor facilidad a las características del terreno, no obstante, la incorporación de sensores y un controlador harían bastante costoso el sistema de suspensión, por lo que no sería viable desde la perspectiva económica para un proyecto de tales alcances.

Finalmente, vale la pena recalcar que estas condiciones de excitación corresponden a una situación muy difícil de replicar en la realidad y si dicho modelo tuviese más tiempo para estabilizarse lo lograría, solo que se busca que ese tiempo de estabilización sea lo menor posible, mediante la implementación de las soluciones ya mencionados. Se adjunta entonces los resultados del modelo cuando se le da el tiempo suficiente para que el sistema logre estabilizarse.

Figura 66. Excitación crítica de forma constante.



Fuente: Autores

Tal como se puede apreciar en el instante $t = 7 [s]$ el sistema se ha estabilizado completamente, pero, aunque parezca poco tiempo, puede ser suficiente para darse

una condición de volcamiento o malestares relacionados con el confort dentro del vehículo.

3.5 DIAGRAMAS DE BODE

Hasta este punto se han analizado los resultados del modelo del sistema de suspensión en el dominio del tiempo, por lo que, para consolidar dicho estudio, se hace necesario obtener los resultados del modelo en el dominio de la frecuencia. Los diagramas de Bode entonces son una representación de la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia, es decir, representa la variación de la magnitud y la fase como una función de la frecuencia. Dicho análisis se diferencia del estudio en el dominio del tiempo en el que se observan únicamente los cambios en magnitud de la señal de salida como función del tiempo.

Así pues, el diagrama de bode se compone de dos gráficas en escala semilogarítmica que permiten visualizar la magnitud en decibeles y la fase en grados sexagesimal para cada valor de frecuencia, la cual es dada en Hercios.

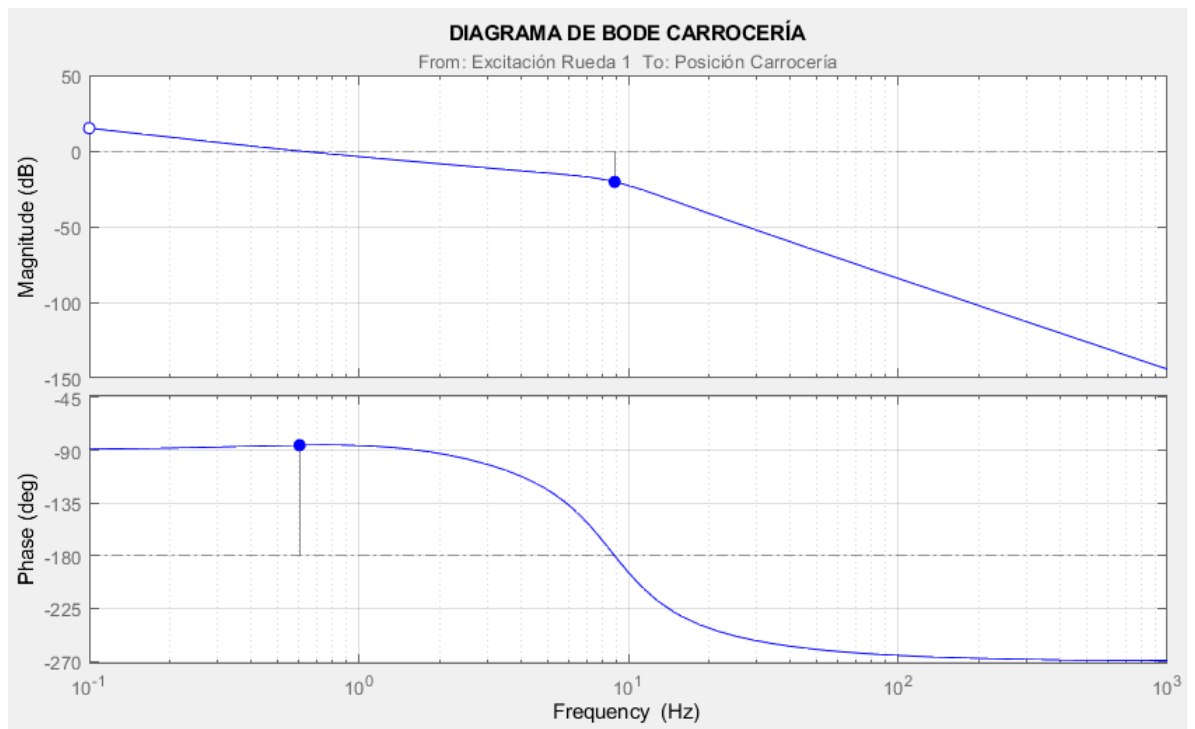
Las principales ventajas de los diagramas de Bode, aparte de facilitar el estudio de la respuesta del sistema en todo el rango de la frecuencia de forma sencilla, es la posibilidad de analizar la estabilidad del sistema mediante los márgenes de ganancia y fase. Por tanto, el análisis de la estabilidad del sistema permitirá diseñar controladores más precisos que cumplan a totalidad las necesidades de estabilidad deseadas.

Ahora bien, entendiendo que los diagramas de bode analizan la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia y sabiendo que el modelo del sistema de suspensión posee cuatro respuestas, se deberían presentar entonces cuatro diagramas de Bode (Respuesta lineal carrocería, rueda 1-2 y respuesta angular carrocería) No obstante se omite el diagrama de bode de la rueda 2 pues el

modelamiento matemático tanto para la rueda 1 como para la 2 es idéntico, por lo que tendrían el mismo comportamiento en la frecuencia y por ende el mismo diagrama de Bode.

Se procede a presentar los diagramas de la respuesta lineal de la carrocería, respuesta lineal de la rueda 1 y respuesta angular de la carrocería en ese orden.

Figura 67. Diagrama de Bode: Excitación del Neumático-Posición Carrocería.

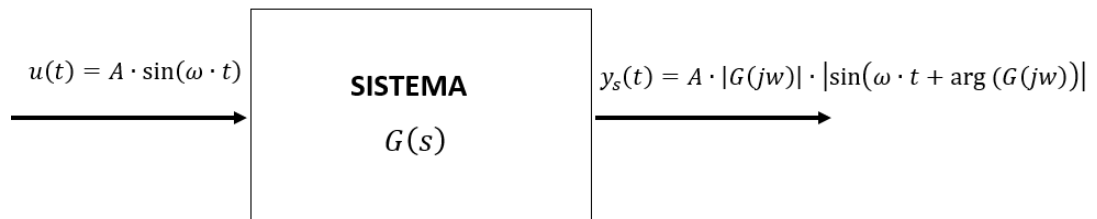


Fuente: Autores

El diagrama de Bode presentado corresponde a la respuesta del desplazamiento lineal de la carrocería. En dicho diagrama se puede apreciar que para la gráfica de la magnitud existe un rango de frecuencias $[0.1[Hz] - 10 [Hz]]$ a las que les corresponde una amplitud mayor a $0 [dB]$, esto indica que, si la señal de entrada posee alguna frecuencia de ese rango, la amplitud de la señal de salida será amplificada respecto de la entrada y para frecuencias mayores a las mencionadas

la señal de salida será atenuada. En términos matemáticos queda de la siguiente manera, donde $u(t)$ corresponde a la entrada, $G(s)$ al sistema y $y_s(t)$ a la salida.

Figura 68. Entrada y salidas del sistema.



Fuente: Autores

$|G(jw)| > 1$ (> 0 [dB]) \rightarrow La salida se amplifica respecto a la entrada

$|G(jw)| < 1$ (< 0 [dB]) \rightarrow La salida se atenúa respecto a la entrada

Sucede una situación similar con la fase, pues para frecuencias menores a 10 [Hz] la señal de salida sufre un desfase de $\arg(G(jw)) = -90^\circ$ y para frecuencias mayores a esta el desfase es de $\arg(G(jw)) = -270^\circ$.

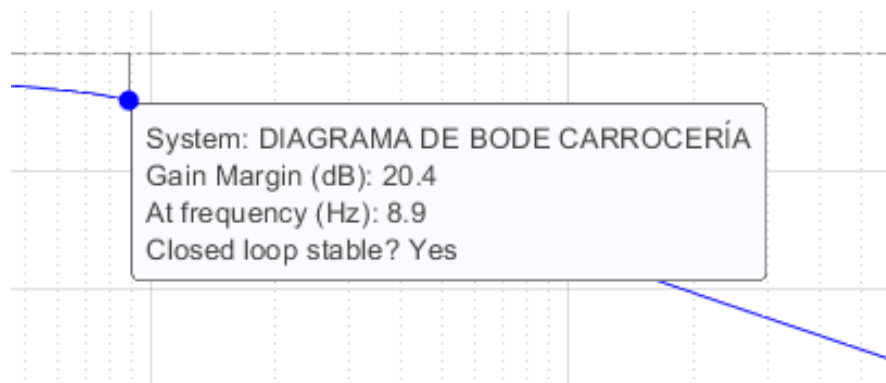
Por otra parte, para poder analizar la estabilidad del sistema es necesario calcular el margen de fase y margen de ganancia. El margen de fase (MF) se mide en la frecuencia donde la ganancia es igual a 0 [dB] y se calcula como la distancia necesaria para alcanzar los -180° , en otras palabras, cuanto debe disminuir la fase medida para alcanzar los -180° . El margen de ganancia (MG) se mide donde el desplazamiento de fases es -180° y se calcula como la distancia necesaria para llegar a los 0 [dB].

Los márgenes de fase y ganancia representan la distancia desde los puntos en los cuales se puede presentar inestabilidad. Un mayor margen de ganancia o de fase significa una mayor estabilidad para el sistema.

Para el caso del diagrama de Bode de la respuesta de la posición lineal de la carrocería se presentan las siguientes características:

$$MF = 90^\circ \quad MG = 20.4 [dB]$$

Figura 69. Estabilidad del sistema carrocería lineal.

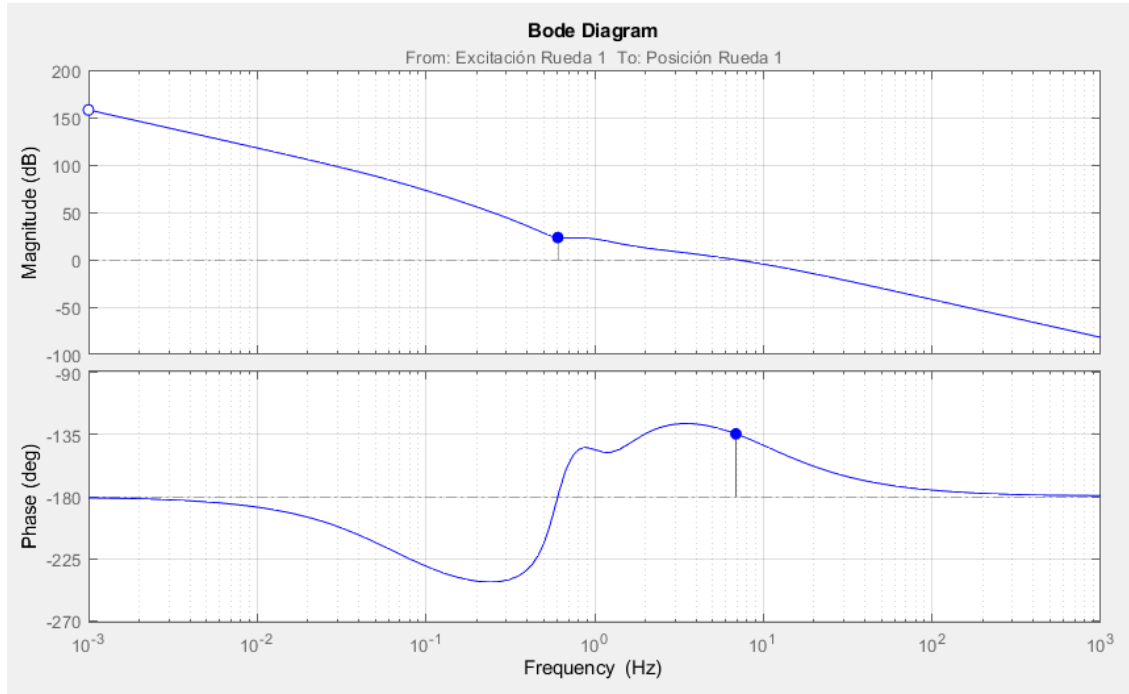


Fuente: Autores

El margen de fase y de ganancia son positivos tal como se muestra en la anterior imagen, por tanto, el sistema es catalogado como estable.

Se presenta ahora el diagrama de bode para el neumático en el que se amplifica la señal para un rango de frecuencia de $[0[Hz] - 8 [Hz]]$ y se atenúa para frecuencias mayores a $8 [Hz]$. La fase de la señal de salida tiende a estar desfasada aproximadamente -180° presentando notables variaciones en el intervalo de $[0[Hz] - 1 [Hz]]$ en el que se alcanzan valores de desfase entre -250° y -135° .

Figura 70. Diagrama de Bode: Excitación del Neumático-Posición Neumático.

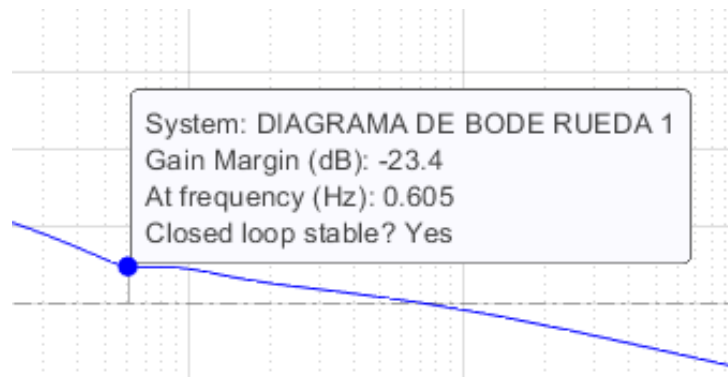


Fuente: Autores

Para el caso del diagrama de Bode de la respuesta de la posición lineal del neumático se presentan las siguientes características:

$$MF = 45^\circ \quad MG = -23 \text{ [dB]}$$

Figura 71. Estabilidad del sistema Neumático lineal.

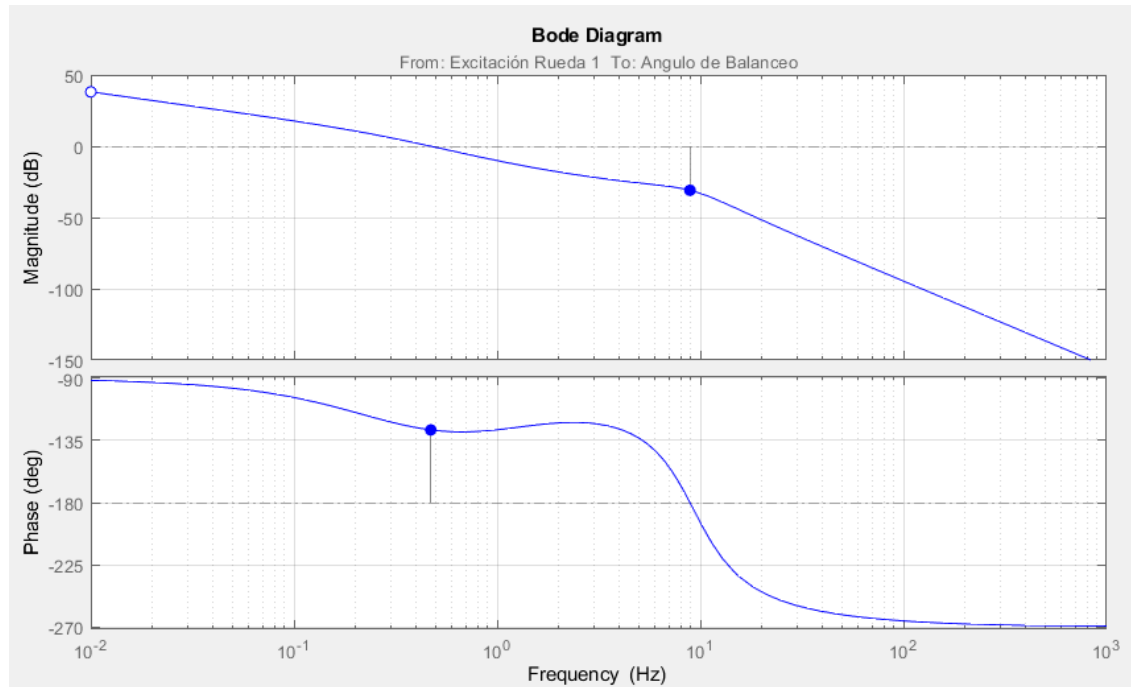


Fuente: Autores

Aunque se presenta un margen de ganancia negativo, implicando posibles inestabilidades en el aumento de la magnitud de la señal de salida, el margen de fase es positivo y es catalogado globalmente como un sistema estable tal cual se muestra en la imagen adjunta.

Finalmente, se presenta ahora el diagrama de bode para el ángulo de balanceo de la carrocería, en el que se amplifica la señal para un rango de frecuencia de $[0[Hz] - 0.5 [Hz]]$ y se atenúa para frecuencias mayores a $0.5 [Hz]$. La fase de la señal de salida tiende a estar desfasada aproximadamente -90° en frecuencias de $[0[Hz] - 10 [Hz]]$ y para frecuencias mayores a $10 [Hz]$ la señal se desfasa -270°

Figura 72. Diagrama de Bode: Excitación del Neumático-Posición Angular Carrocería.

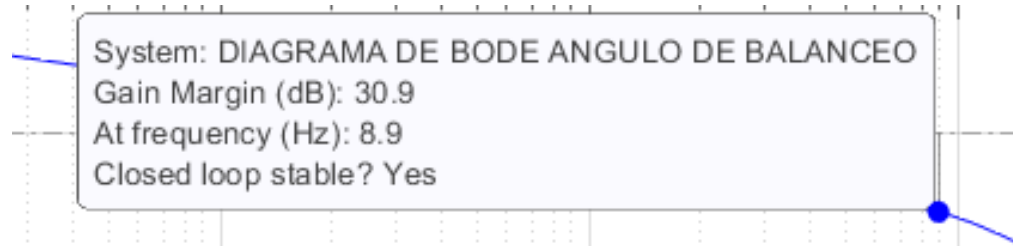


Fuente: Autores

Para el caso del diagrama de Bode de la respuesta de la posición angular de la carrocería se presentan las siguientes características:

$$MF = 45^\circ \quad MG = 30.9 [dB]$$

Figura 73. Estabilidad angular de la carrocería.



Fuente: Autores

El margen de fase y de ganancia son positivos tal como se muestra en la anterior imagen, por tanto, el sistema es catalogado como estable.

De esta forma, se concluye el estudio vibratorio del sistema McPherson, habiendo analizado la respuesta del modelo en el dominio del tiempo y la frecuencia.

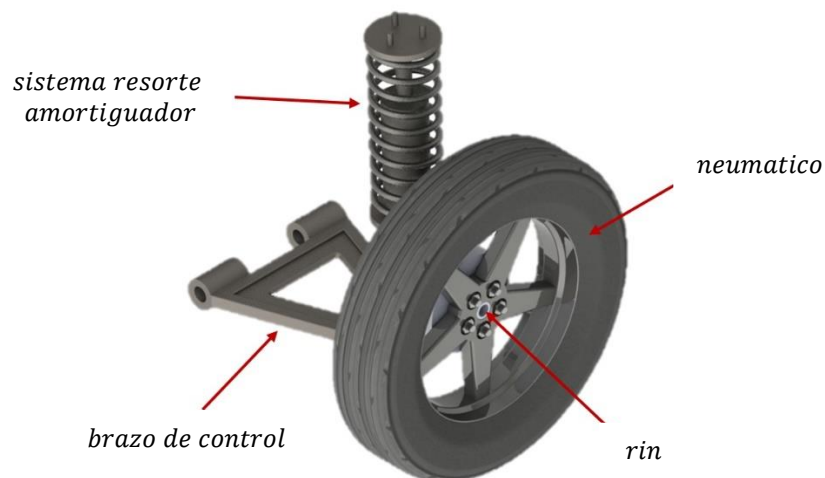
4. MODELADO Y ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS PARA LOS COMPONENTES PRINCIPALES DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN FRONTAL

El siguiente estudio que consolida y valida el diseño mecánico propuesto para el sistema de suspensión McPherson es el análisis estático estructural, por medio del método de elementos finitos, de los componentes principales que lo conforman (Brazo de control, Mangueta y soporte de la rueda).

Por tanto, el primer paso para realizar el análisis estructural consiste en modelar geoméricamente el sistema de suspensión, por medio del software Solidworks, teniendo en cuenta las dimensiones previamente obtenidas en el análisis y síntesis del mecanismo McPherson.

La siguiente imagen muestra el modelado geométrico del sistema de suspensión McPherson, detallando los siguientes componentes: Sistema resorte amortiguador, neumático, soporte de la rueda, brazo de control, rodamiento de contacto angular de doble hilera, rotula, mangueta y demás elementos de unión

Figura 74. Modelado Geométrico sistema de suspensión McPherson.

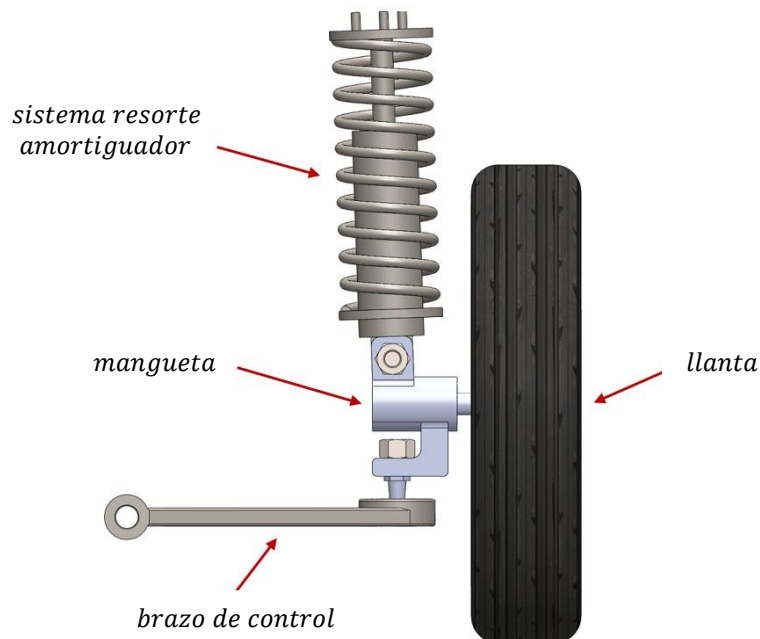


Fuente: Autores

Hasta este punto puede surgir la duda sobre la ausencia del brazo de dirección, pues en el ensamblado final se omite dicho componente. Lo anterior se debe a que los alcances establecidos en los análisis y estudios preliminares siempre se trató al sistema de suspensión desde el plano bidimensional, en el que la influencia cinemática del brazo de dirección no era relevante.

De igual forma, la mangueta fue diseñada contemplando las reacciones generadas por el brazo de dirección y estas serán tenidas en cuenta para el análisis estructural estático en el software ANSYS que será llevado a cabo a continuación.

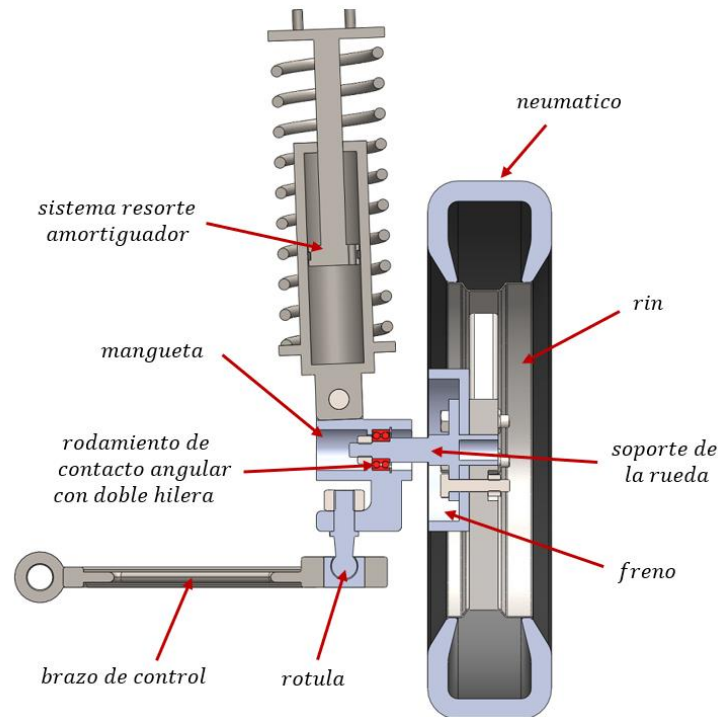
Figura 75. Vista lateral del sistema de suspensión McPherson.



Fuente: Autores

En esta vista es posible apreciar la similitud con respecto al modelo simplificado del sistema de suspensión McPherson, usado en el análisis cinemático y cinético, previamente expuesto, en el que se están respetando los ángulos y demás longitudes para cuando el sistema se encuentra en una posición $\theta_1 = 0^\circ$.

Figura 76. Vista en corte del sistema de suspensión McPherson.



Fuente: Autores

En esta vista se puede apreciar la unión, por medio de una rotula esférica, entre el brazo de control y la mangueta, permitiendo así tres grados de libertad: rotación en el plano de la imagen, rotación en el plano perpendicular a la imagen, y rotación alrededor del eje.

Por otra parte, se detalla que el cojinete acoplado al eje de la rueda es un rodamiento de contacto angular de doble hilera SKF 3203 A-2RS1TN9/MT33, cuyos principales beneficios son el poco espacio axial que ocupa, su fácil resistencia a los momentos de inclinación y la posibilidad de soportar cargas axiales y radiales en cualquier dirección, lo cual lo hace la perfecta opción para las condiciones de carga a las que se encuentra sometido el soporte de la rueda.

Presentado ya el modelado geométrico del sistema de suspensión, y antes de realizar el análisis estructural, es necesario definir los materiales de cada uno de los

componentes, con el propósito de conocer las propiedades mecánicas de estos (Modulo de elasticidad, limite elástico y esfuerzo de fluencia).

Tabla 8. Materiales seleccionados.

<i>Elemento</i>	<i>Material</i>	<i>Selección</i>
Brazo de control	Acero 4130 WQT 1100	<i>Tratado térmicamente a 593°C, es un acero altamente usado en la industria automotriz para fabricación de piezas que requieren alta tenacidad. De fácil mecanizado y mayor resistencia a la fatiga y dureza que la mayoría de aceros de su misma categoría.</i>
Mangueta	Acero forjado C1020 Estirado en frio	<i>Acero para fabricación de piezas de maquinaria, de fácil mecanización, baja dureza y buena soldabilidad</i>
soporte de la rueda	Acero 4340 estirado en frio	<i>Uso en la industria automotriz para la fabricación de piezas que requieren alta tenacidad y dureza, tales como: ejes, engranajes, piezas forjadas, pasadores, etc.</i>

Fuente: Autores

Tabla 9. Propiedades mecánicas de los materiales seleccionados.

<i>Material</i>	<i>Esfuerzo último o máxima resistencia (s_u)</i>	<i>Esfuerzo de fluencia a la tracción (s_y)</i>
Acero 4130 WQT 1100	127 [ksi] 875 [MPa]	114 [ksi] 786 [MPa]
Acero forjado C1020 Estirado en frio	78 [ksi] 538 [MPa]	66 [ksi] 455 [MPa]
Acero 4340 estirado en frio	122 [ksi] 841 [MPa]	105 [ksi] 723 [MPa]

Fuente: Autores

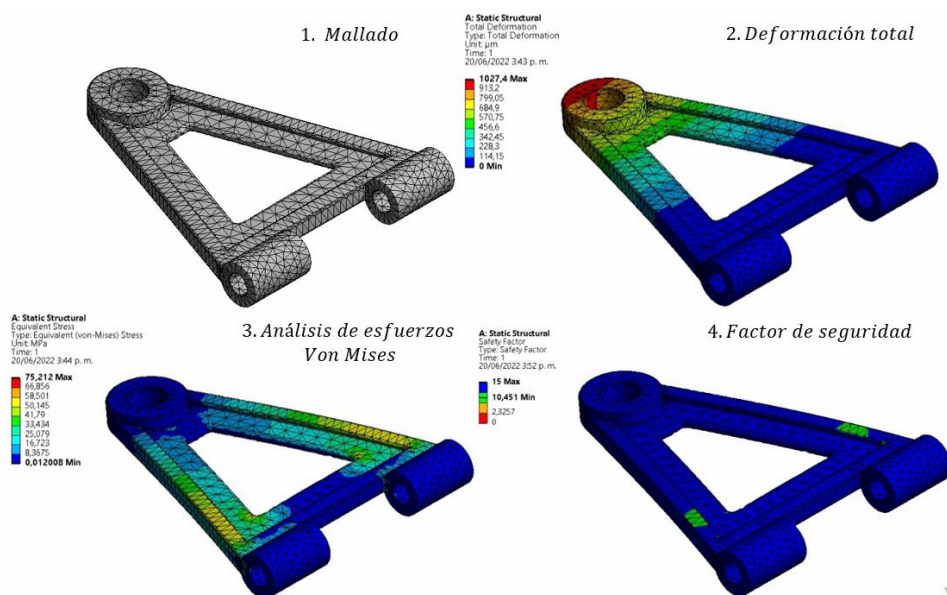
Los estudios que se le realizarán a cada pieza serán los siguientes: Análisis de deformaciones totales, análisis de esfuerzos equivalentes por el criterio de Von mises y factor de seguridad. De esta forma, para desarrollar dichos estudios, es

necesario definir las fuerzas y apoyos de cada pieza, teniendo en cuenta que las fuerzas ya fueron calculadas en el apartado del presente proyecto denominado *Resultados modelo dinámico sistema de suspensión (cinemático y cinético)*.

Por otra parte, la malla que será usada para el análisis de elementos finitos será la que se encuentra por defecto en el software ANSYS y no se usará otra malla particular, pues la geometría de las piezas en estudio no exige tal detalle.

Los estudios mencionados para el brazo de control se muestran en la Figura 77. No obstante, para observarlos a detalle, junto con los estudios de las demás piezas (mangueta y soporte), se pueden consultar en el **Anexo P**. Resultados del análisis estructural por medio del método de elementos finitos para el sistema de suspensión frontal

Figura 77. Análisis estático estructural aplicado al brazo de control.



Fuente: Autores

Posteriormente, se realizará un estudio de independencia de la malla para verificar que los resultados obtenidos no dependen del tipo de malla y si corresponden a una

solución confiable. Para tal efecto, se graficarán los resultados de deformación variando la cantidad de elementos de la malla tal como se muestra a continuación:

Tabla 10. Análisis Sensibilidad Brazo de Control.

Mangueta					
<i>Malla</i>	<i>Nodos</i>	<i>Elementos</i>	<i>Desplazamientos maximos (δ_{max}) [μm]</i>	<i>Esfuerzo maximos (σ_{max}) [MPa]</i>	<i>Factor Seg. minimo (N_{min})</i>
1	7712	4277	20,313	43,652	10,425
2	8793	4969	20,617	44,228	10,289
3	13456	7837	20,843	44,189	10,298
4	19872	11901	20,972	46,576	9,77
5	34705	20265	21,06	41,936	10,851
6	61863	37196	21,172	36,935	12,32
7	150315	92139	21,247	42,141	10,798

Fuente: Autores

Tabla 11. Análisis Sensibilidad Mangueta.

Brazo de control					
<i>Malla</i>	<i>Nodos</i>	<i>Elementos</i>	<i>Desplazamientos maximos (δ_{max}) [μm]</i>	<i>Esfuerzo maximos (σ_{max}) [MPa]</i>	<i>Factor Seg. minimo (N_{min})</i>
1	10139	5238	1014,5	76,513	10,273
2	12815	6789	1020,3	78,974	9,953
3	17398	9486	1025,1	76,973	10,211
4	21485	12317	1027,3	82,084	9,5756
5	22784	12684	1027,4	75,212	10,451
6	33950	19471	1030,6	79,275	9,9149
7	64550	37884	1032,7	85,331	9,2112

Fuente: Autores

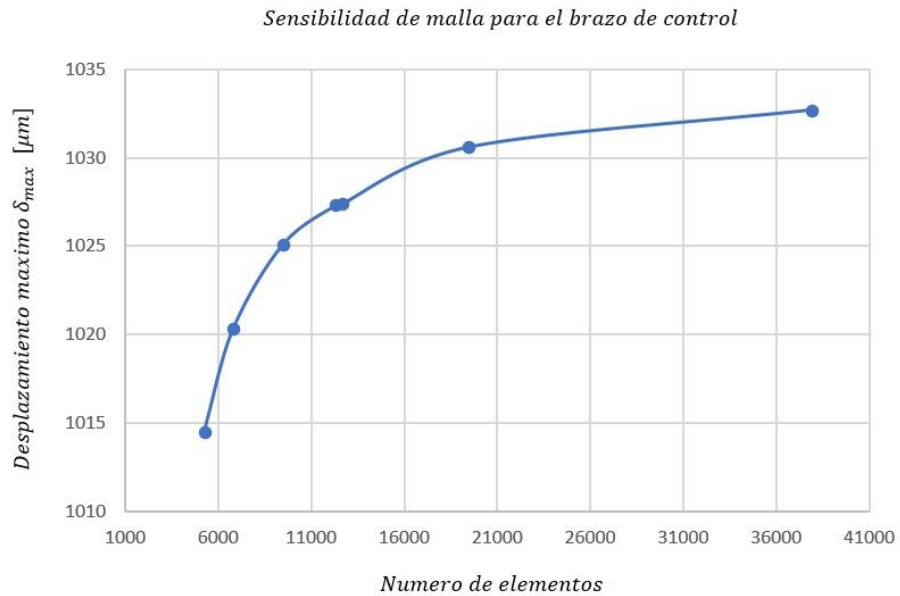
Tabla 12. Análisis Sensibilidad Soporte de Rueda.

Soporte de rueda					
<i>Malla</i>	<i>Nodos</i>	<i>Elementos</i>	<i>Desplazamientos maximos (δ_{max}) [μm]</i>	<i>Esfuerzo maximos (σ_{max}) [MPa]</i>	<i>Factor Seg. minimo (N_{min})</i>
1	3101	1464	129,54	97,254	7,4342
2	2383	1120	123,57	135	5,3556
3	3339	1664	125,02	77,776	9,2959
4	5184	2708	126,47	127,09	5,6891
5	12396	6792	131,64	115,37	6,2668
6	22730	13071	134,08	117,24	6,1668
7	64166	38332	135,44	130,22	5,5521

Fuente: Autores

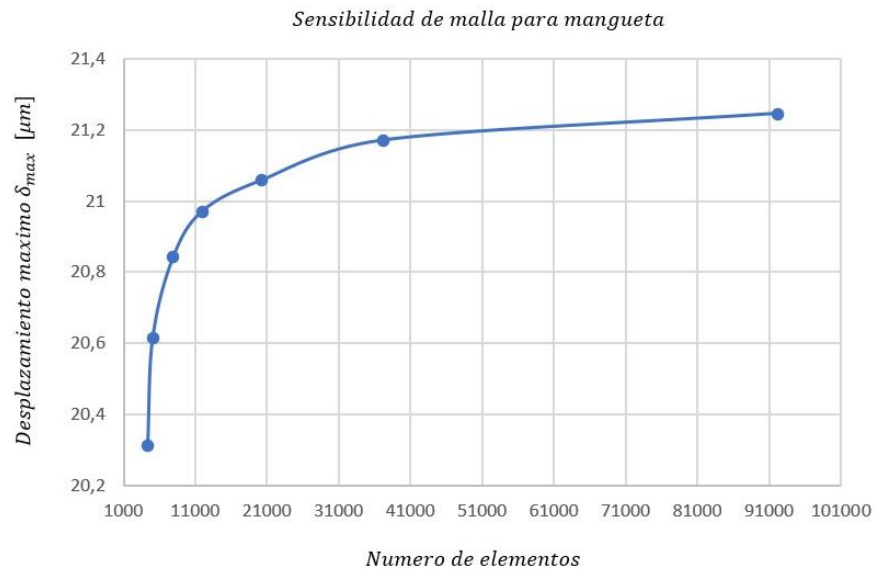
Se proceden a graficar los datos de las anteriores tablas, con el propósito de analizar la tendencia presentada.

Figura 78. Desplazamiento Vs Número de Elementos-Brazo de Control.



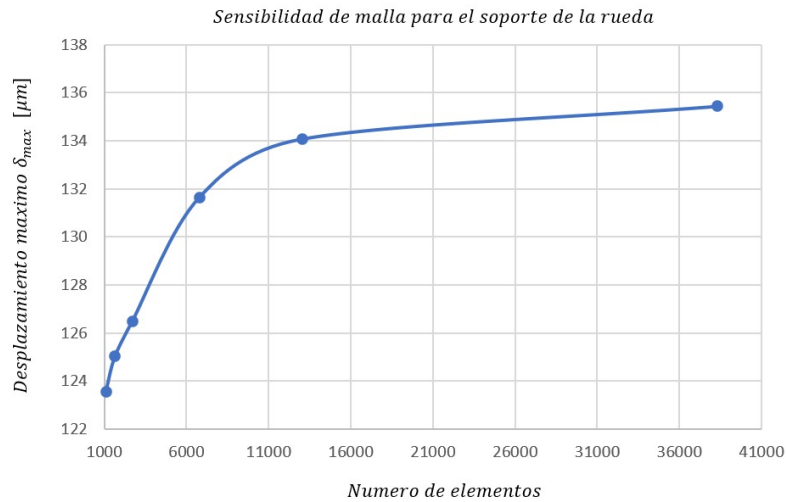
Fuente: Autores

Figura 79. Desplazamiento Vs Número de Elementos-Mangueta.



Fuente: Autores

Figura 80. Desplazamiento Vs Número de Elementos-Soporte Rueda.



Fuente: Autores

Las anteriores tres gráficas presentan el mismo comportamiento, demostrando que, a medida que la cantidad de elementos va aumentando, la variación entre resultados va disminuyendo; siendo concluyente que, para obtener resultados confiables en este tipo de geometría, resulta apropiado usar mallas con el suficiente refinamiento, que para este caso se optó por obtener los resultados a través de la malla 5.

Finalmente, en la siguiente tabla se resumen los resultados críticos de los estudios de deformación, esfuerzos y factor de seguridad para cada una de las piezas utilizando la malla 5.

Tabla 13. Resultados Críticos análisis elementos finitos.

	<i>Desplazamientos maximos (δ_{max})</i>	<i>Esfuerzo maximos (σ_{max})</i>	<i>Factor Seg. minimo (N_{min})</i>
Mangueta	21,06 [μm]	41,936 [MPa]	10,851
Brazo de control	1027,4 [μm]	75,212 [MPa]	10,451
Soporte de rueda	131,64 [μm]	115,37 [MPa]	6,267

Fuente: Autores

Los anteriores valores validan el diseño propuesto, pues para las tres piezas los resultados más críticos se encuentran muy lejos de escenarios en los que los elementos mecánicos fallan. Para el caso de la mangueta y el soporte de la rueda, los desplazamientos son insignificantes y para el brazo de control, que, aunque la deformación se encuentra por el orden de 1 [mm], esta no afecta la condición de funcionamiento de dicho miembro estructural.

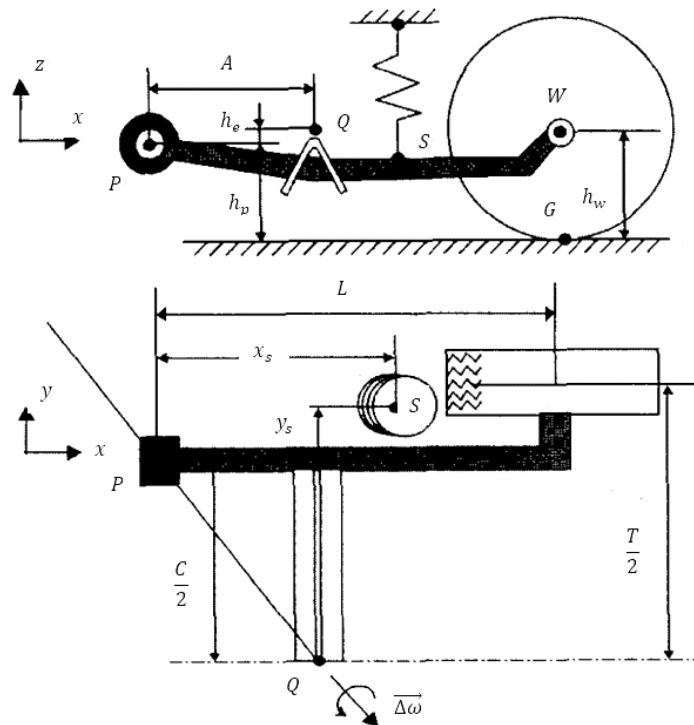
En cuanto a los resultados del factor de seguridad, indican que las piezas soportan, sin problema alguno, las cargas impuestas. Es decir, de acuerdo con la definición del factor de seguridad $N_{min} = \frac{S_y}{\sigma_{max}}$, los esfuerzos del brazo de control y de la mangueta se encuentran 10 veces por debajo del límite de fluencia, que es el que marca el fin de la zona elástica y el comienzo de la zona plástica, aquella donde la deformación es permanente. El soporte de la rueda, por su parte, presenta un factor de seguridad de $N = 6$ el cual también indica que el elemento mecánico no tendrá problemas para soportar las cargas impuestas.

5. ANÁLISIS GEOMÉTRICO, CINEMÁTICO Y CINÉTICO DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN TRASERO – EJE TORSIONAL

5.1 MODELO DINÁMICO DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN DE EJE TORSIONAL.

Para el estudio cinemático del sistema de eje torsional se hace uso del siguiente modelo con sus respectivas dimensiones:

Figura 81. Modelo sistema de eje torsional.



Fuente: J. Kang, Kinematic analysis of torsion beam rear suspension

En primera instancia, se procede a calcular los vectores de posición respecto del pivote P hacia el extremo de la viga y punto de contacto:

$$P: \left(0, \frac{C}{2}, h_p\right) \quad ; \quad W: \left(L, \frac{T}{2}, h_w\right) \quad ; \quad Q: (A, 0, h_p + h_e)$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(A, -\frac{C}{2}, h_e \right) = A \hat{i} - \frac{C}{2} \hat{j} + h_e \hat{k}$$

$$\overrightarrow{PW} = W - P = \left(L, \frac{T-C}{2}, h_w - h_p \right) = L \hat{i} + \frac{T-C}{2} \hat{j} + (h_w - h_p) \hat{k}$$

La rotación del punto Q vista desde P puede ser calculada por medio del vector de rotación $\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}$, el cual puede ser escrito como su magnitud, $|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|$, por el vector unitario a lo largo del eje \overrightarrow{PQ} , $\overrightarrow{u_{PQ}}$.

$$\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}} = |\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}| \cdot \overrightarrow{u_{PQ}} \quad \wedge \quad \overrightarrow{u_{PQ}} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$$

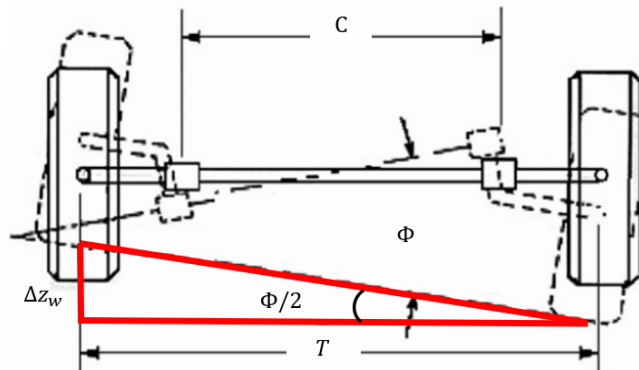
$$\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}} = |\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}| \cdot \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}|} \cdot \left[A \hat{i} - \frac{C}{2} \hat{j} + h_e \hat{k} \right]$$

$$\overrightarrow{PQ} = A \hat{i} - \frac{C}{2} \hat{j} + h_e \hat{k} \quad ; \quad \overrightarrow{PW} = L \hat{i} + \frac{T-C}{2} \hat{j} + (h_w - h_p) \hat{k}$$

$$\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}} = \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}|} \cdot \left[A \hat{i} - \frac{C}{2} \hat{j} + h_e \hat{k} \right]$$

Por geometría, el ángulo Φ es el cociente de dos veces el desplazamiento entre la distancia frontal de las ruedas.

Figura 82. Vista frontal del sistema de suspensión.



Fuente: LEE, Yang. An analytical approach for design and performance evaluation of torsion beam rear suspension

$$\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) = \frac{\Delta Z_w}{T}$$

Para ángulos pequeños se puede realizar la siguiente aproximación: $\tan(\Phi) = \Phi$.

$$\therefore \Phi = \frac{2\Delta Z_w}{T}$$

El desplazamiento vertical de la rueda, ΔZ_w , puede ser expresada como la componente en \hat{k} del vector que resulta del producto cruz entre el vector de rotación y el vector de posición del punto de contacto respecto del pivote.

$$\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}} \times \overrightarrow{PQ} = \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}|} \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A & -\frac{C}{2} & h_e \\ L & \frac{T-C}{2} & h_w - h_p \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}} \times \overrightarrow{PQ} &= \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}|} \cdot \left(\frac{C}{2}(h_p - h_w) - \frac{h_e(T-C)}{2} \right) \hat{i} + \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}|} \\ &\cdot \left(h_e L + A(h_p - h_w) \right) \hat{j} + \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}|} \cdot \left(\frac{A(T-C)}{2} + \frac{LC}{2} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

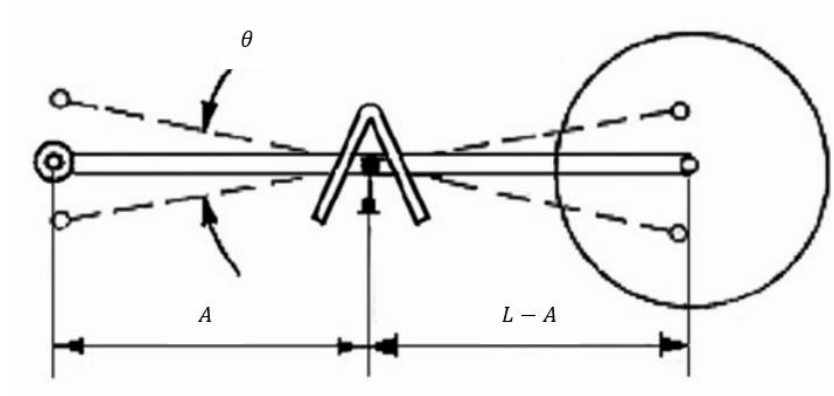
$$\Delta Z_w = \frac{A(T-C) + LC}{2} \cdot \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}|}$$

De manera que el ángulo roll queda como:

$$\Phi = \frac{A(T-C) + LC}{T} \cdot \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}|}$$

El ángulo θ hace referencia al desplazamiento angular de la barra de torsión, vista en el plano zx , por lo que, de acuerdo con la figura, θ será equivalente a dos veces la componente en \hat{j} del vector de rotación $\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}$.

Figura 83. Vista lateral del sistema de suspensión.



Fuente: LEE, Yang. An analytical approach for design and performance evaluation of torsion beam rear suspension

$$\theta = 2 |\Delta\omega_{PQ} \hat{j}| \rightarrow \theta = \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}} \cdot C$$

El ángulo Camber α será la variación angular en \hat{i} del vector de rotación $\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}$:

$$\alpha = \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}} \cdot A$$

El ángulo Toe β será la componente en \hat{k} del vector de rotación $\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}$:

$$\beta = \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}} \cdot h_e$$

De manera que el cambio de estos ángulos respecto al ángulo Φ se mantiene en una razón constante:

$$\alpha_\Phi = \frac{\alpha}{\Phi} = \frac{\frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}} \cdot A}{\frac{A(T-C) + LC}{T} \cdot \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}}} = \frac{AT}{A(T-C) + LC}$$

$$\alpha = \Phi \left[\frac{AT}{A(T - C) + LC} \right]$$

$$\beta_{\Phi} = \frac{\beta}{\Phi} = \frac{\frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}} \cdot h_e}{\frac{A(T - C) + LC}{T} \cdot \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}}}} = \frac{h_e T}{A(T - C) + LC}$$

$$\beta = \Phi \left[\frac{h_e T}{A(T - C) + LC} \right]$$

El ratio del ángulo roll respecto a la posición angular del eje de torsión se expresa como:

$$r = \frac{\Phi}{\theta} = \frac{\frac{A(T - C) + LC}{T} \cdot \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}}}{\frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}} \cdot C} = \frac{A(T - C) + LC}{TC}$$

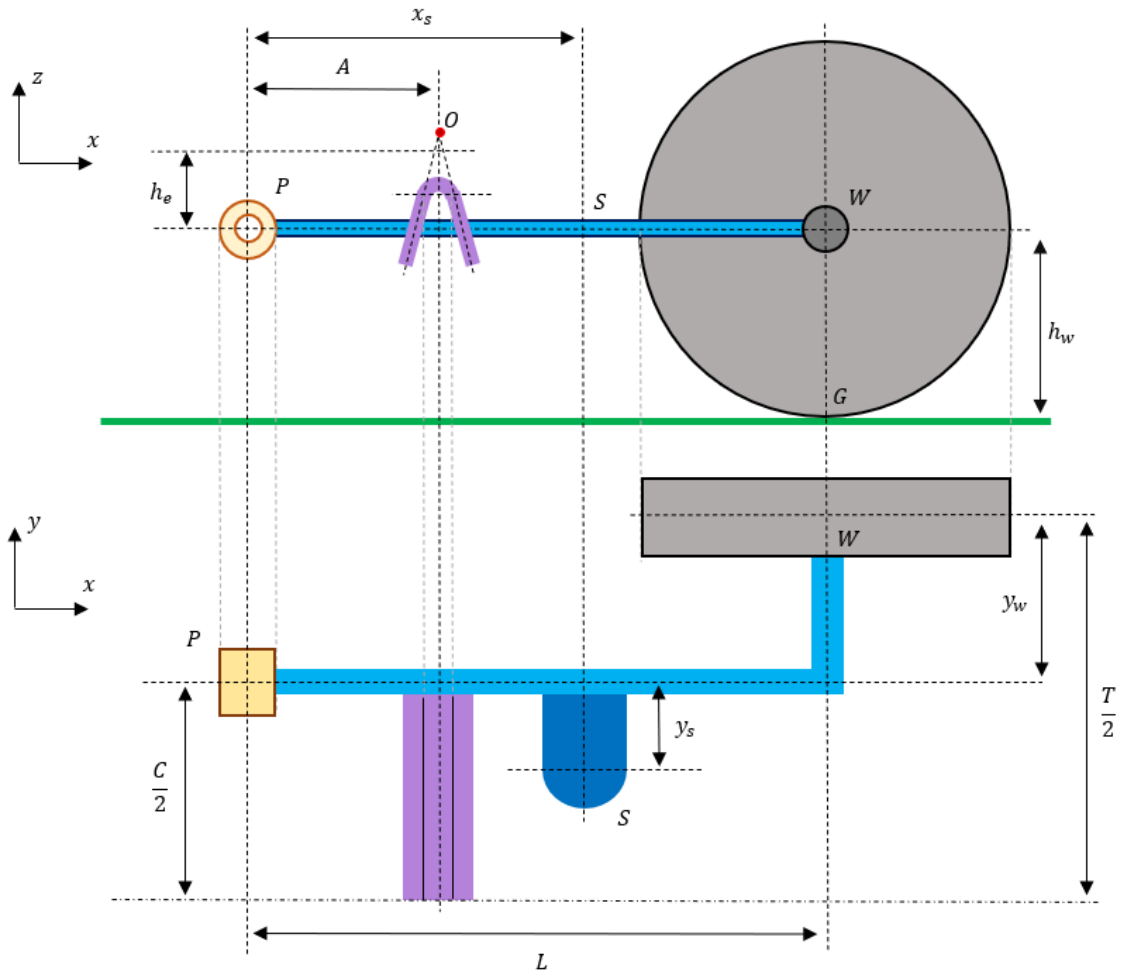
$$r = \frac{A}{C} + \frac{L - A}{T}$$

5.2 DIMENSIONAMIENTO SISTEMA DE SUSPENSIÓN EJE TORSIONAL.

Definidas las expresiones matemáticas que modelan la cinemática, principalmente el posicionamiento angular del sistema de suspensión se procede a definir las dimensiones del conjunto brazo longitudinal, eje a torsión y rueda con base en los criterios de desgaste mínimo de los neumáticos (Valores mínimos permisibles para el ángulo Camber) y el torque a resistir por el eje.

De esta forma, se establecerán las dimensiones descritas en las imágenes adjuntas:

Figura 84. Dimensiones del sistema de suspensión eje a torsión.

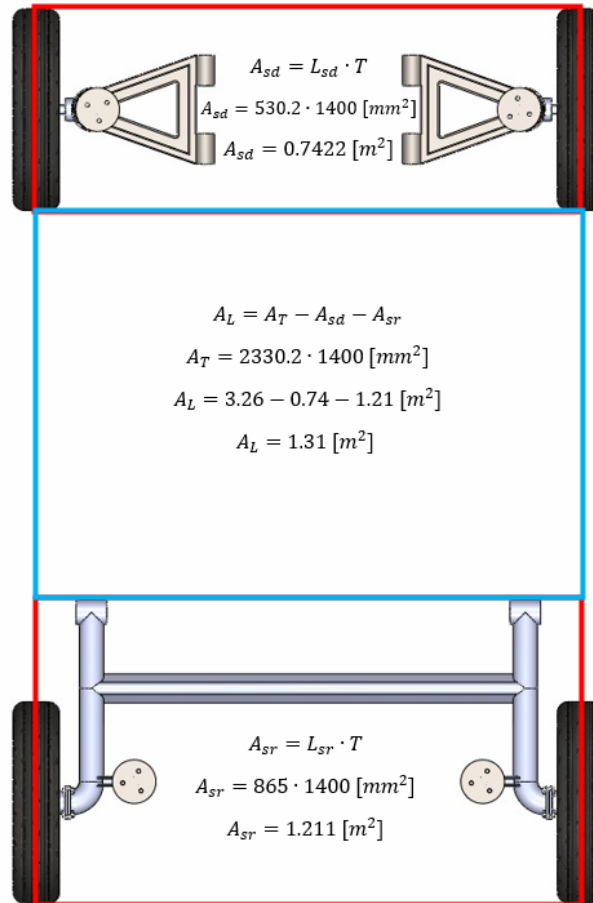


Fuente: Autores

5.2.1 Longitud brazo longitudinal L . La dimensión L corresponde a la longitud total del brazo longitudinal, la cual es función de la distancia entre ejes del vehículo, siendo esta de 1800 [mm]. No obstante, para la mitad trasera el máximo valor que puede tomar L sería la distancia entre ejes media, es decir 900 [mm], de los cuales se dejarán libres 300 [mm] y serán ocupados 600 [mm], de manera que $L = 500$ [mm] le corresponderán al brazo longitudinal.

Finalmente, la distribución de espacios queda de la siguiente manera:

Figura 85. Distribución de espacios en el vehículo.



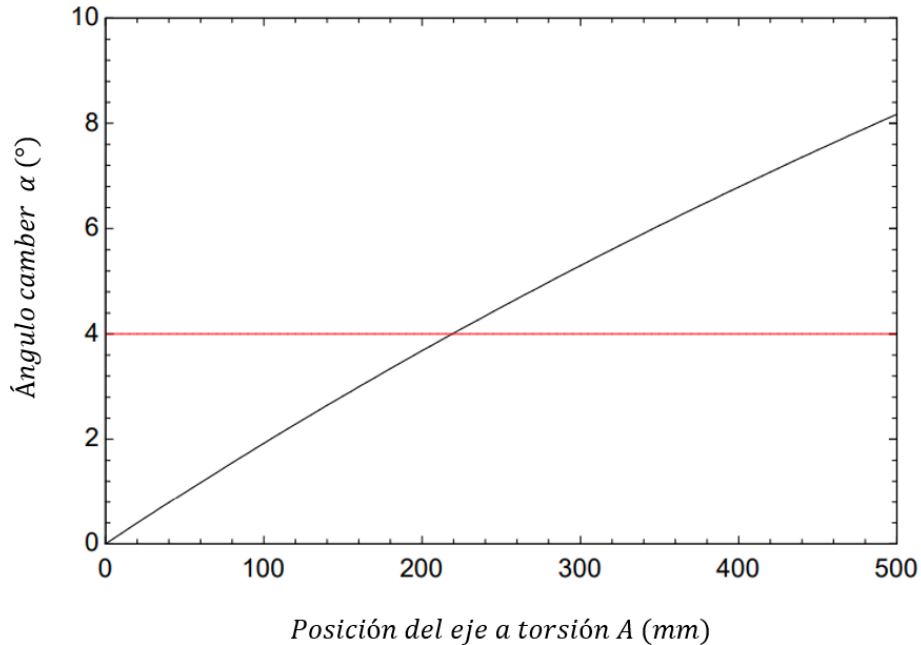
Fuente: Autores

De esta manera, es claro como la suspensión trasera ocupa un mayor espacio respecto la delantera, recordando que la suspensión McPherson se caracteriza por tener la ventaja de no ocupar gran espacio, ocupando solo el 14.48% del espacio total, mientras que la suspensión de eje torsional 37.11% y dejando libres 48.41% de toda el área ocupada por el vehículo.

5.2.2 Posición del eje a torsión respecto del pivote A. La posición del eje a torsión respecto del pivote es supremamente relevante para un funcionamiento adecuado del sistema, dicho esto se graficarán el comportamiento de las variables de interés (Ángulo Camber, ratio ángulo roll y rigidez ángulo roll) a medida que se varia la

posición del eje a torsión en un rango de 0 [mm] – 500[mm] para cuando la rueda tiene una deflexión máxima de $\Delta Z_w = 100$ [mm].

Figura 86. Camber Vs Posicionamiento de la Viga



Fuente: Autores

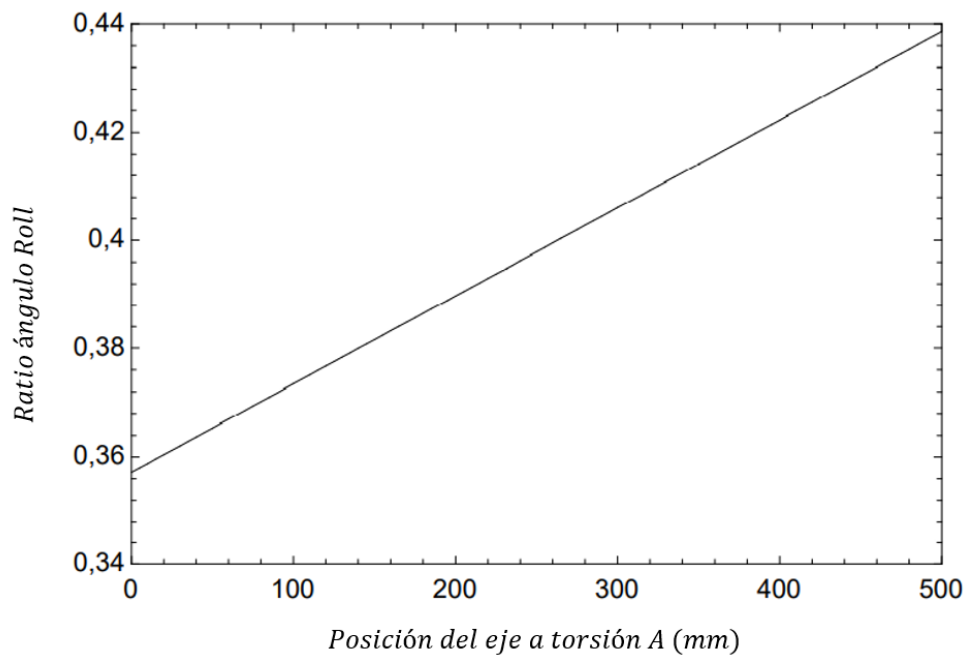
La anterior gráfica demuestra que a medida que el eje sometido a torsión se posiciona cerca a la rueda, el ángulo Camber máximo se va incrementando y por ende el desgaste del neumático se hace mucho mayor. Sin embargo, teniendo en cuenta el criterio del ángulo Camber, el cual establece que, si se desea garantizar un desgaste mínimo del neumático, su valor debería rondar en el rango máximo de -4° a 4° por lo que queda claro que, para cumplir con dicho criterio, el valor de la distancia A debería ser al menos menor a 220 [mm], por lo que $A < 220$.

La anterior lógica entonces indica que, para obtener el menor desgaste posible, el eje a torsión se debe ubicar tan cerca del apoyo como fuese posible. No obstante, ubicar el eje a torsión muy cerca al apoyo provoca que sea necesario aumentar su

capacidad de oposición a las deformaciones, es decir aumentar la rigidez con respecto al ángulo roll. Este fenómeno es explicado con las siguientes gráficas.

El ratio del ángulo roll es la razón con la cual va cambiando Φ a medida que cambia la posición angular del eje a torsión θ , en términos matemáticos $\Phi = r \cdot \theta$, siendo claro que a medida que aumenta r el ángulo Φ también lo hace en mayor medida.

Figura 87. Ratio Angulo Roll Vs Posicionamiento de la Viga.



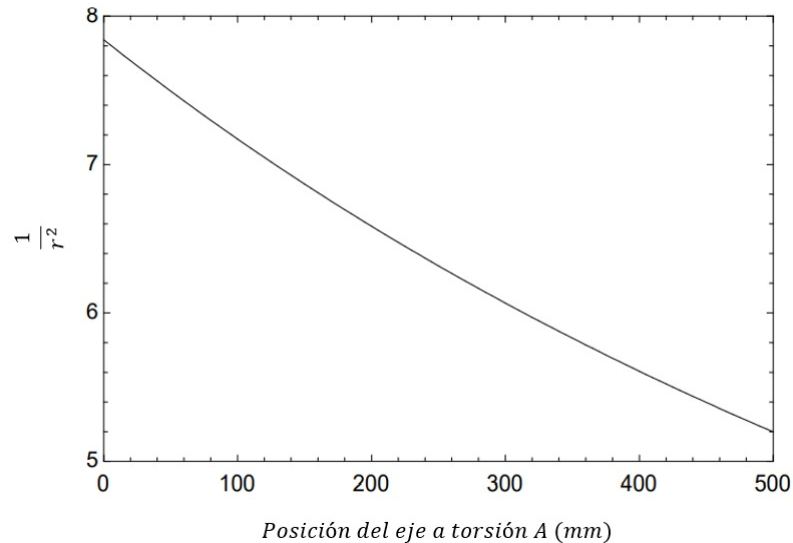
Fuente: Autores

Es claro que en la medida en la que el eje a torsión se acerca a la rueda, el ratio del ángulo roll aumenta, lo que implica un desplazamiento angular mayor y por ende una mayor capacidad de oposición a dicha deformación angular.

Tal relación entre el ratio y la rigidez, con respecto al ángulo roll, se expresa de la siguiente manera:

$$k_{\phi} = \frac{k_r}{r^2}$$

Figura 88. Rigidez angular Vs Posicionamiento de la viga.



Fuente: Autores

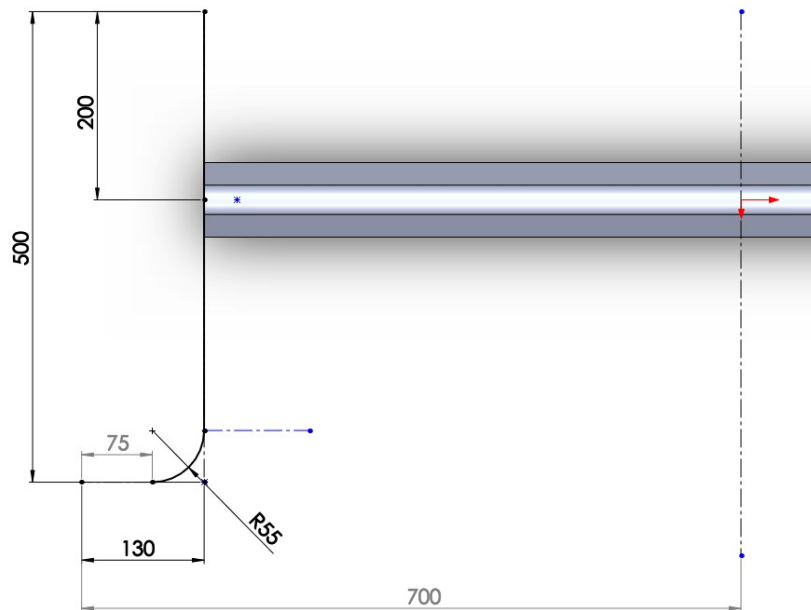
De esta forma se puede apreciar que, si se desea la mínima resistencia a la deformación del ángulo roll, se debe ubicar el eje a torsión tan cerca de la rueda como sea posible, lo que implica el uso de un material de propiedades bajas, principalmente un módulo de rigidez no muy alto y/o dimensiones de la sección transversal no muy robustas, que permita esfuerzos sin adquirir grandes deformaciones, haciendo útil un acero estructural común para tal aplicación.

Finalmente, estos dos fenómenos contrapuestos: el aumento del ángulo Camber y la disminución de la rigidez angular al aumentar la posición del eje, implica que la posición del eje puede estar en un rango de 190 [mm] – 210 [mm] para poder aprovechar ambos efectos, escogiéndose entonces un valor de $A = 200$ [mm].

5.2.3 Longitud del eje a torsión C. La longitud del eje a torsión está principalmente restringida por la distancia entre ruedas del vehículo, la cual es de 1400 [mm]. De dicho valor, para cada rueda, se usarán 130 [mm] dedicados al sistema de acople suspensión-rueda donde irán las bridas de unión, los elementos roscados, el

rodamiento y el eje del neumático tal como se puede apreciar en la siguiente imagen.

Figura 89. Distribución de espacios sistema eje a torsión.



Fuente: Autores

De esta manera, la longitud del eje a torsión se calcula de la siguiente forma:

$$C = T - 2 \cdot E_{ANS}$$

Donde E_{ANS} corresponde al espacio a usar para el sistema de acople neumático-suspensión y T a la distancia entre ruedas.

$$C = 1400 - 2 \cdot 130$$

$$C = 1140 [mm]$$

Finalmente, la longitud del eje a torsión será de 1140 [mm].

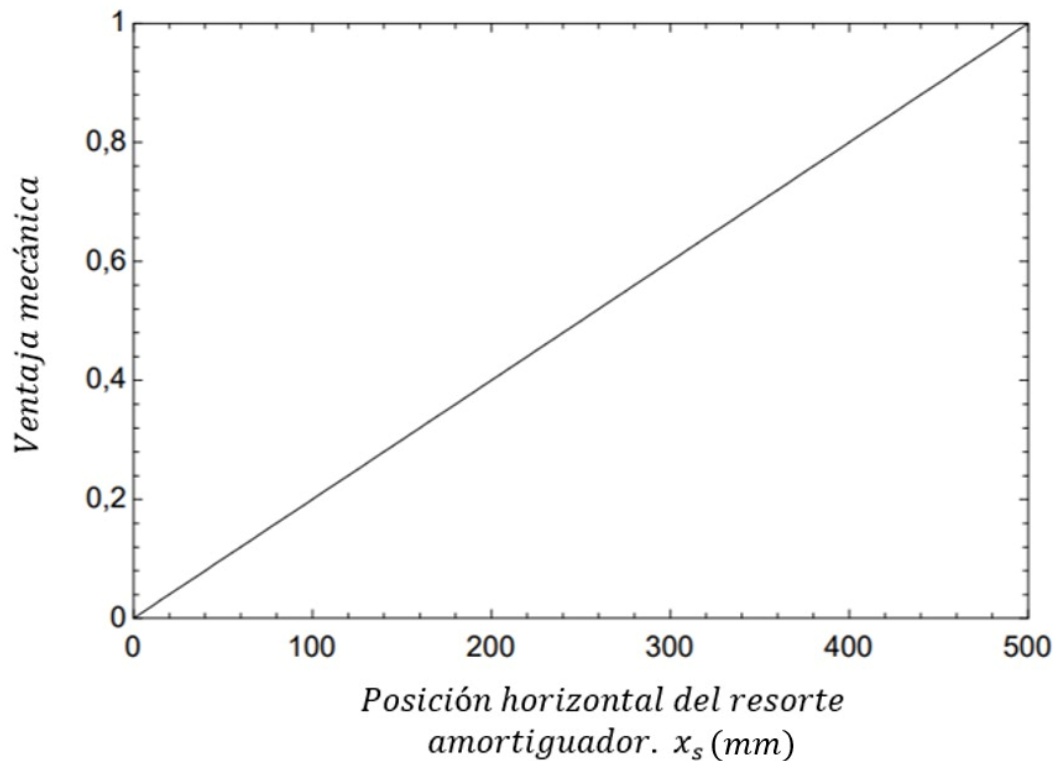
5.2.4 Posicionamiento del resorte-amortiguador (x_s, y_s). La correcta ubicación del resorte amortiguador puede ofrecer una alta ventaja mecánica para contrarrestar la fuerza que se ejerce sobre el neumático y que, por lo tanto, la carga soportada por el apoyo no sea demasiado elevada, beneficiándose así la condición estructural del sistema de suspensión. Para este caso, la ventaja mecánica se calcula de la siguiente manera:

$$VM = \frac{x_s}{L}$$

Donde x_s es la posición horizontal del resorte amortiguador y L la longitud del brazo longitudinal, de manera que resulta evidente que la reacción en y disminuye a medida que la ventaja mecánica aumenta.

$$P_z \propto \frac{1}{VM}$$

Figura 90. Ventaja Mecánica Vs Posición Resorte-amortiguador.

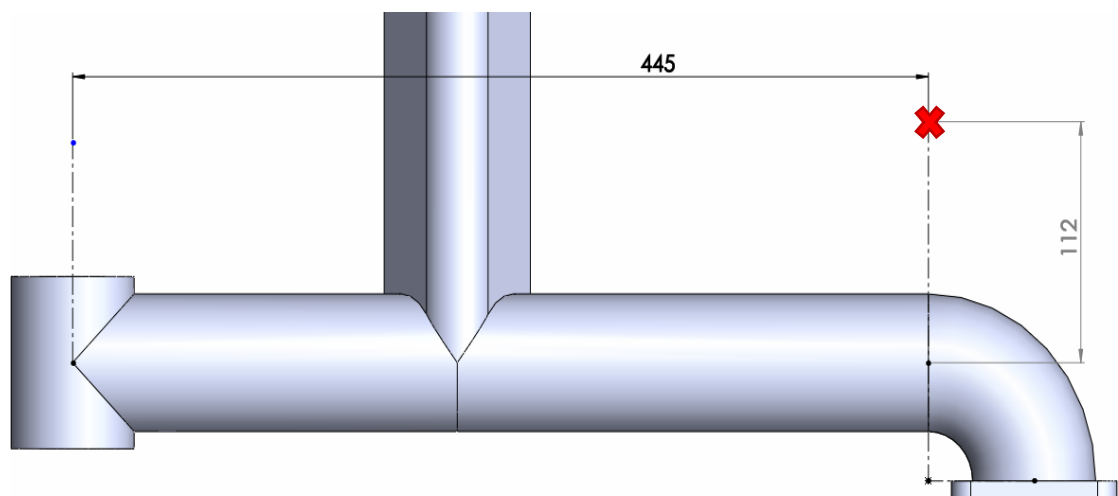


Fuente: Autores

Por lo que resulta concluyente que si se desea disminuir la reacción en el apoyo tanto como fuese posible, el resorte-amortiguador debe estar lo más cercano a la rueda, donde la ventaja mecánica se acerca a 1, tal como se puede apreciar en la anterior gráfica.

De esta forma, por cuestiones de espacio y por necesidades del ensamble resorte-amortiguador con el sistema de suspensión, este será ubicado a una distancia de $x_s = 445 [mm]$ respecto del pivote y a una distancia en el eje y de $y_s = -112 [mm]$ tal como se puede apreciar en la siguiente figura:

Figura 91. Posición resorte-amortiguador.



Fuente: Autores

Así pues, se obtiene una ventaja mecánica de $VM = \frac{445}{500} \rightarrow VM = 0.89$. No obstante, la condición de ubicar el resorte amortiguador a una distancia negativa implica que el T_x , resistido en el apoyo P , no se disminuirá por acción de la fuerza ejercida del resorte amortiguador, sino que se aumentará haciendo, posiblemente, crítico el

brazo longitudinal por torsión, antes que por cualquier otro tipo de carga. Esto será validado en análisis posteriores.

En definitiva, todos los parámetros dimensionales del sistema de suspensión han sido definidos con base en criterios que permiten mejorar el rendimiento de este. Dichos valores son consignados en la siguiente tabla:

Tabla 14. Dimensiones finales sistema de suspensión eje torsional.

<i>Dimensión</i>	<i>Descripción</i>	<i>Valor</i>
L	<i>Longitud del brazo longitudinal, del pivote (P) a la rueda (W)</i>	500 mm
A	<i>Longitud en x del pivote (P) a la mediatriz del eje torsional (O)</i>	200 mm
C	<i>Longitud del eje torsional</i>	1160 mm
T	<i>Track (Distancia entre ruedas)</i>	1400 mm
h_e	<i>Distancia en z del pivote (P) al centro de corte del eje torsional (O)</i>	44,03 mm
h_w	<i>Radio de la rueda</i>	265,1 mm
y_w	<i>Longitud del eje de la rueda</i>	130 mm
x_s	<i>Posición en x del sistema resorte – amortiguador</i>	445 mm
y_s	<i>Posición en y del sistema resorte – amortiguador</i>	-112 mm

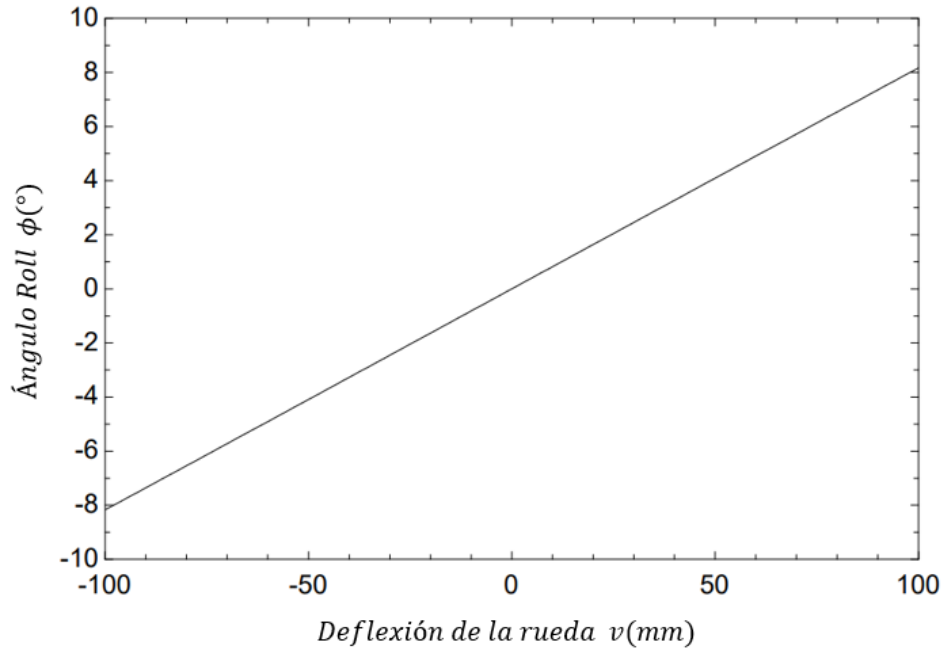
Fuente: Autores

Vale la pena aclarar que la dimensión h_e , la cual corresponde a la altura del centro de corte, medida desde el apoyo, es función de la geometría de la sección transversal, la cual será explicada en el apartado concerniente al diseño de la sección transversal. h_p , por su parte, representa la distancia desde el terreno hasta

el extremo superior del brazo longitudinal, esta se define conforme las demás dimensiones son determinadas.

5.2.5 Comportamiento cinemático final del sistema de suspensión. Al haber definido todos los parámetros dimensionales del sistema de suspensión, resulta conveniente mostrar el comportamiento cinemático final conforme se va variando la deflexión de la rueda, permitiendo así validar todos los criterios que fueron tenidos en cuenta para el dimensionamiento del sistema eje de a torsión.

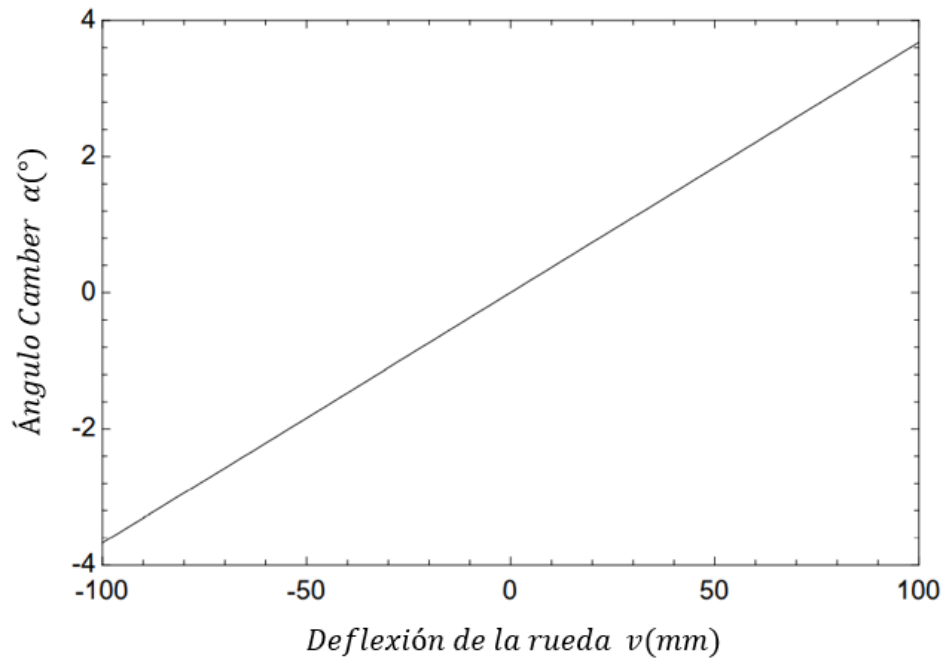
Figura 92. Angulo Roll Vs Deflexión de la rueda.



Fuente: Autores

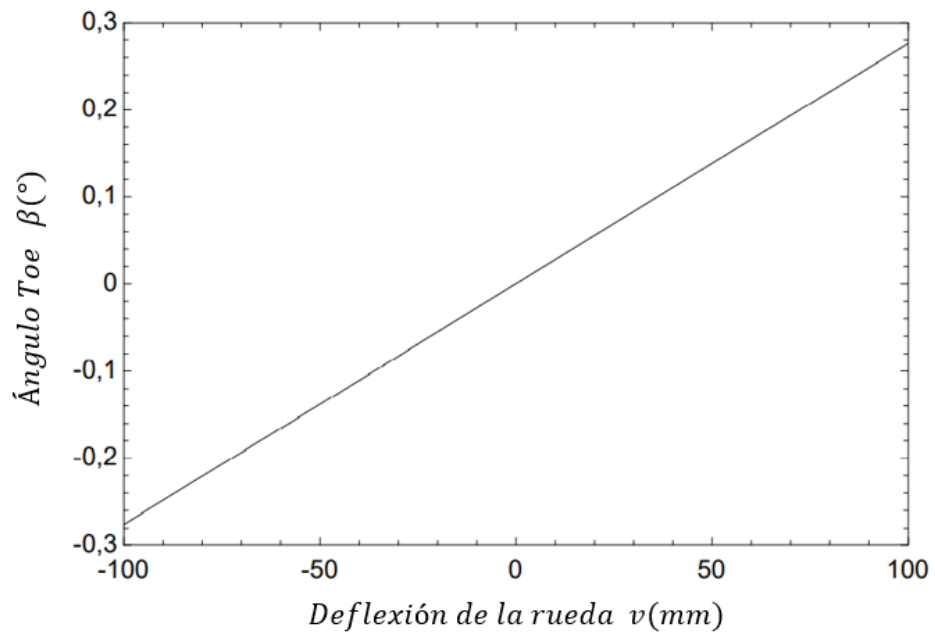
La deflexión de la rueda, que ha sido propuesta desde el diseño del sistema McPherson (suspensión delantera), se mantiene en el mismo rango de $-100[mm]$ a $100[mm]$ ofreciendo, para este caso, una variación del ángulo roll Φ de -8.171° a 8.171° . Tal variación resulta necesaria para cumplir con el criterio del ángulo Camber y desgaste mínimo del neumático, este es mostrado en la siguiente gráfica.

Figura 93. Angulo Camber Vs Deflexión de la rueda.



Fuente: Autores

Figura 94. Angulo Toe Vs Deflexión de la rueda.



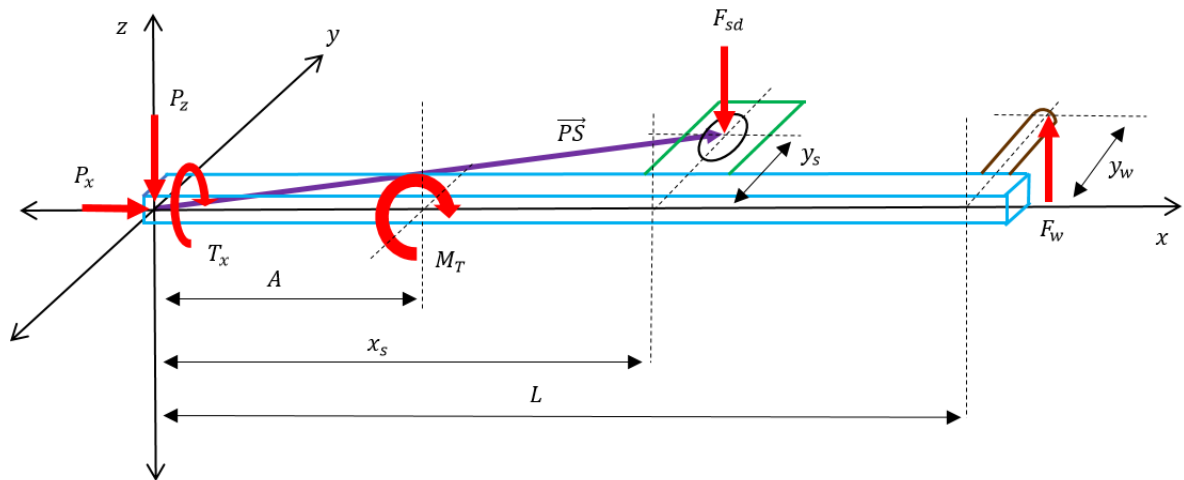
Fuente: Autores

Los valores del Camber α , como se pudo apreciar, se encuentran dentro del rango adecuado de $-3,678^\circ$ a $3,678^\circ$. Por su parte, el ángulo Toe β no presentó una mayor variación, siendo esto positivo, pues en los vehículos convencionales de tracción delantera, la ganancia del Toe no debe ser muy alta para que no afecte el funcionamiento de la dirección.

5.3 ANÁLISIS ESTÁTICO DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN

Se propone el siguiente diagrama de cuerpo libre, donde se ubican las reacciones producto de la fuerza de excitación de la rueda F_w :

Figura 95. DCL sistema eje a torsión.



Fuente: Autores

Para el estudio estático del sistema de suspensión se considerará una condición de ausencia de fricción en la rueda, por lo que la reacción en x de la junta P será nula.

$$\begin{aligned}
 +\rightarrow \sum F_x &= 0 \quad \rightarrow \quad P_x = 0 \\
 +\uparrow \sum F_y &= 0 \quad \rightarrow \quad P_z + F_{sd} = F_w
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+\mathcal{U} \sum M_x = 0 & \rightarrow F_w y_w - T_x - F_{sd} y_s = 0 \quad ; \quad \begin{aligned} T_x &= F_w y_w - F_{sd} y_s \\ y_w &= \frac{T - C}{2} \end{aligned} \\
+\mathcal{U} \sum M_y = 0 & \rightarrow F_w L - F_{sd} x_s - M_T = 0 \quad \rightarrow \quad M_T = F_w L - F_{sd} x_s \\
F_{sd} = F_s + F_d & \quad ; \quad \begin{aligned} F_s &= k_{sr} \Delta Z_s \\ F_d &= C_{dr} \dot{Z}_s \end{aligned} \quad \rightarrow \quad F_{sd} = k_{sr} \Delta Z_s + C_{dr} \dot{Z}_s
\end{aligned}$$

Para hallar la fuerza del resorte amortiguador, anteriormente establecida, se necesita definir una expresión que permita determinar la deformación del resorte, tanto en su desplazamiento vertical positivo como negativo (compresión o extensión de este).

Para ello, se determina el producto cruz entre el vector de posición del punto S (\overrightarrow{PS}), donde se encuentra ubicado el resorte amortiguador, y el vector de rotación del sistema $\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PS} = x_s \hat{i} + y_s \hat{j} \quad ; \quad \overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}} &= \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}} \cdot \left[A \hat{i} - \frac{C}{2} \hat{j} + h_e \hat{k} \right] \\
\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}} \times \overrightarrow{PS} &= \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A & -\frac{C}{2} & h_e \\ x_s & y_s & 0 \end{vmatrix} \\
\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}} \times \overrightarrow{PS} &= \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}} \left[-y_s h_e \hat{i} + x_s h_e \hat{j} + \left(A y_s + \frac{C}{2} x_s \right) \hat{k} \right]
\end{aligned}$$

De manera que la componente en \hat{k} corresponde al desplazamiento vertical del resorte amortiguador:

$$\Delta Z_s = \left(A y_s + \frac{C}{2} x_s \right) \frac{|\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}|}{|\overrightarrow{PQ}}$$

Teniendo en cuenta la relación del ángulo de torsión, $\theta = \frac{|\Delta\omega_{PQ}|}{|PQ|} C$, el desplazamiento del resorte queda como:

$$\Delta Z_s = \left(Ay_s + \frac{C}{2} x_s \right) \frac{\theta}{C}$$

Finalmente, usando la relación del ratio del ángulo roll para que la expresión dependa únicamente del ángulo Φ , el cual a su vez es función de la deflexión de la rueda ΔZ_w ; la ecuación para el desplazamiento del resorte-amortiguador queda de la siguiente manera:

$$\Delta Z_s = \left(Ay_s + \frac{C}{2} x_s \right) \frac{\Phi}{r C} \quad ; \quad r = \frac{\Phi}{\theta}$$

5.3.1 Velocidad instantánea del punto S. Para obtener la velocidad instantánea del cilindro amortiguador, se deriva la anterior expresión con respecto al tiempo.

$$\frac{dZ_s}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} \left(\frac{Ay_s + \frac{C}{2} x_s}{r C} \right)$$

Derivando la expresión de ángulo roll $\Phi = 2\Delta Z_w/T$:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{2}{T} \frac{dZ_w}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2}{T} v_w \\ \frac{dZ_s}{dt} = v_s &\quad \rightarrow \quad v_s = \frac{2}{T} v_w \left(\frac{Ay_s + \frac{C}{2} x_s}{r C} \right) \end{aligned}$$

Donde v_w es la velocidad instantánea de la rueda y se supondrá constante durante el ciclo de desplazamiento vertical de la misma, alcanzando su máxima deflexión $\Delta Z_w = 100 \text{ mm}$ en $t = 5 \text{ s}$.

$$v_w = \frac{\Delta Z_w}{\Delta t} = \frac{100 \text{ mm}}{5 \text{ s}} = 20 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Reescribiendo la expresión para la fuerza del sistema resorte-amortiguador con los parámetros ya obtenidos:

$$F_{sd} = k_{sr} \left[\left(Ay_s + \frac{C}{2} x_s \right) \frac{\Phi}{r C} \right] + C_{dr} \left[\frac{2}{T} v_w \left(\frac{Ay_s + \frac{C}{2} x_s}{r C} \right) \right]$$

Hallada la fuerza del sistema resorte amortiguador, es posible determinar el momento torsional, flector y reacciones en la junta P:

$$M_T = F_w L - \left\{ k_{sr} \left[\left(Ay_s + \frac{C}{2} x_s \right) \frac{\Phi}{r C} \right] + C_{dr} \left[\frac{2}{T} v_w \left(\frac{Ay_s + \frac{C}{2} x_s}{r C} \right) \right] \right\} x_s$$

$$T_x = F_w y_w - \left\{ k_{sr} \left[\left(Ay_s + \frac{C}{2} x_s \right) \frac{\Phi}{r C} \right] + C_{dr} \left[\frac{2}{T} v_w \left(\frac{Ay_s + \frac{C}{2} x_s}{r C} \right) \right] \right\} y_s$$

$$P_z = F_w - \left\{ k_{sr} \left[\left(Ay_s + \frac{C}{2} x_s \right) \frac{\Phi}{r C} \right] + C_{dr} \left[\frac{2}{T} v_w \left(\frac{Ay_s + \frac{C}{2} x_s}{r C} \right) \right] \right\}$$

Para poder determinar los valores numéricos de las anteriores expresiones matemáticas se usarán las dimensiones ya definidas y las constantes de rigidez y amortiguamiento corresponderán a las mismas que la del sistema McPherson a fin de simplificar los cálculos. Tales parámetros, adicionales a las dimensiones del sistema, son consignados en la siguiente tabla:

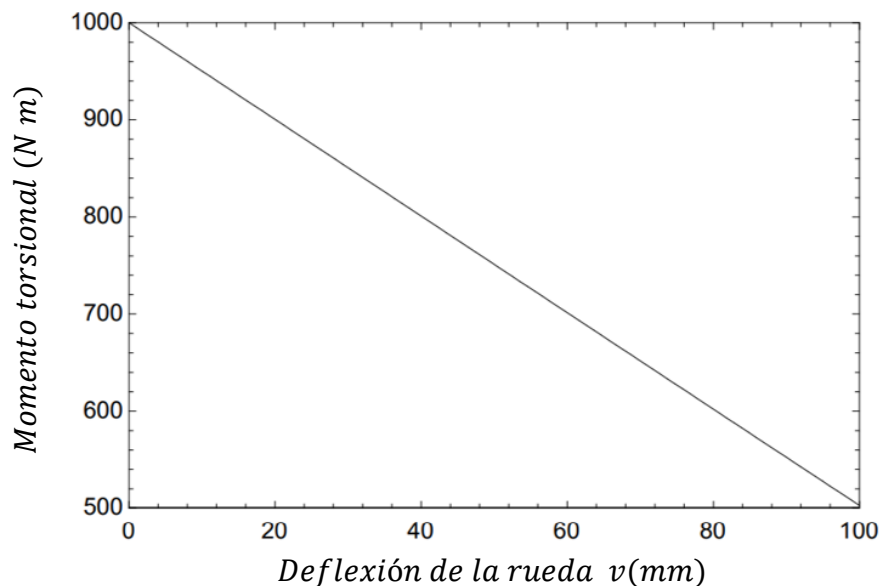
Tabla 15. Parámetros para la solución del análisis estático.

<i>Parámetro</i>	<i>Definición</i>	<i>Valor</i>
F_w	<i>Fuerza de excitación de la rueda</i>	2000 N
k_{sr}	<i>Coefficiente de rigidez del resorte</i>	14641 N/m
c_{dr}	<i>Constante de amortiguamiento del sistema</i>	2073 Ns/m
v_w	<i>velocidad de la rueda</i>	20 mm/s

Fuente: Autores

Resulta evidente que las reacciones del apoyo P no son constantes, dependen directamente del ángulo roll Φ , es decir $M_T(\Phi)$, $T_x(\Phi)$ y $P_z(\Phi)$ y el ángulo roll es función de la deflexión de la rueda $\Phi(\Delta Z_w)$, de este modo las reacciones dependen del valor que se le da a la deflexión de la rueda $M_T(\Delta Z_w)$, $T_x(\Delta Z_w)$ y $P_z(\Delta Z_w)$ por lo que se graficarán en el rango de 0[mm] a 100[mm] para analizar el comportamiento y determinar para qué valor de ΔZ_w , y por ende de Φ , se obtiene el momento torsional máximo.

Figura 96. Momento torsional

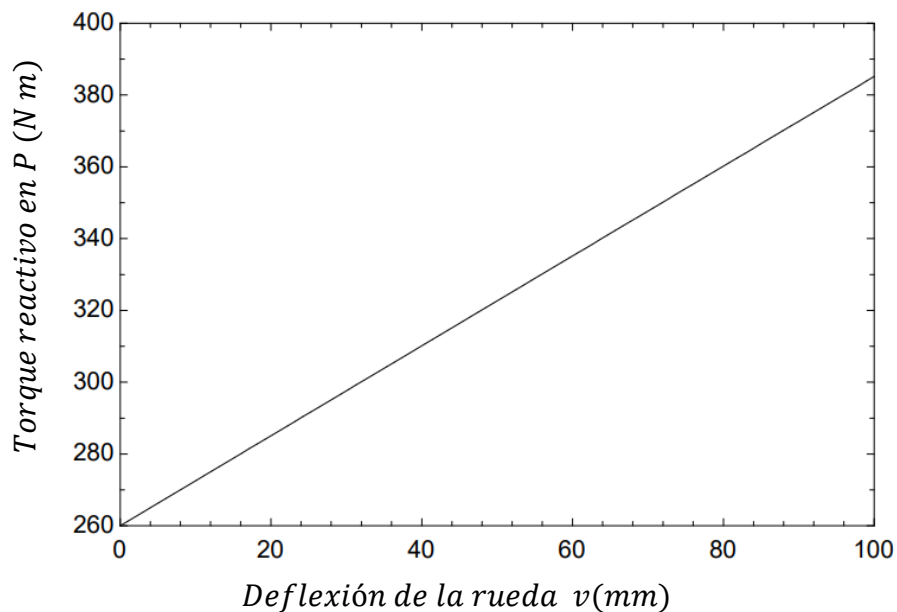


Fuente: Autores

De acuerdo con el comportamiento del momento torsional, resistido por la viga del sistema de suspensión, se tiene su máximo valor para cuando la rueda se encuentra fuera de su posición inicial, es decir para cuando $v = 0$, pues para esta situación la deformación del resorte $\Delta Z_s = 0$ y la velocidad inicial de la rueda $v_w = 0$ son nulas, por ende, la fuerza del resorte-amortiguador corresponde únicamente a la fuerza de precarga $F_{sd} = F_0$, que para la mitad trasera el $F_0(MAX)$ correspondería al 40% del peso total del vehículo y se calcularía de la siguiente forma $F_0(MAX) = 0.4 \cdot m \cdot g/2 \rightarrow F_0(MAX) = 0.4 \cdot 700 \cdot 9.81/2$, teniendo un valor de $F_0(MAX) = 1373.4$ [N].

No obstante, para este análisis se asumirá un $F_0 = 0$ [N] de manera que se diseñe la sección transversal de la viga con el momento torsional máximo posible, el cual es de $M_t(MAX) = 1000$ [N · m] tal como se puede ver en la anterior gráfica.

Figura 97. Torque en el apoyo P.

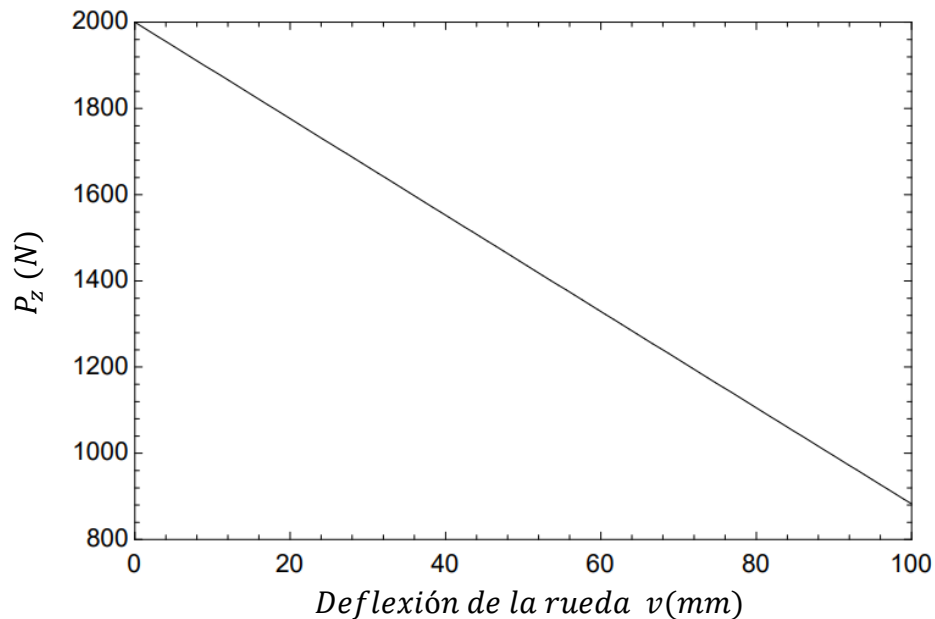


Fuente: Autores

El torque soportado por el brazo longitudinal tiene un comportamiento contrario al del momento torsional debido a que la posición negativa del resorte-amortiguador

en y de $y_s = -112$ [mm] hace que el torque aumente a medida que la fuerza del resorte amortiguador aumenta, si dicha posición y_s fuera positiva el torque soportado disminuiría ante el aumento de la deflexión de la rueda. Sin embargo, por limitaciones de espacio entre el eje torsional y la rueda, se sacrificó el $T_x(MAX)$ en el brazo longitudinal, obligando a realizar un diseño del miembro mucho más robusto en su sección transversal del que se tendría si y_s fuese positivo. Finalmente, $T_x(MAX) = 385$ [N · m]

Figura 98. Fuerza vertical en el apoyo P .



Fuente: Autores

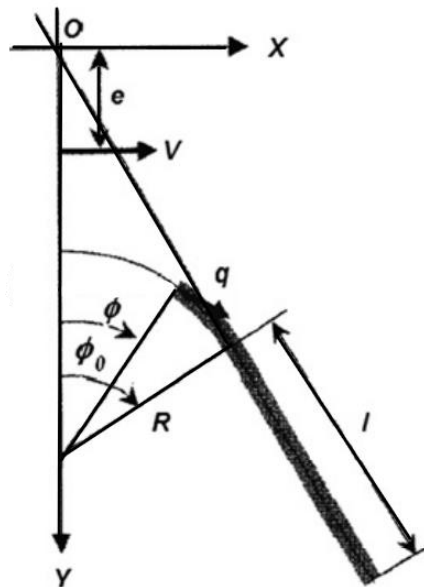
La fuerza vertical P_z tiene el mismo comportamiento decreciente que el momento torsional, pues su valor disminuye cuando la fuerza del resorte amortiguador aumenta, teniéndose un $P_z(MAX) = 2000$ [N], en esta situación es claro que ante la ausencia del resorte-amortiguador $P_z = F_w$, lo que indica que la reacción en P está soportando toda la fuerza de la carretera.

6. DISEÑO DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL Y CÁLCULO DE LA CONSTANTE DE RIGIDEZ A TORSIÓN DEL EJE.

Definidas las fuerzas actuantes en el sistema de suspensión de eje torsional se procede a establecer la geometría y material de la sección transversal, con el objetivo de calcular su rigidez a la torsión y la deformación angular para las cargas determinadas en el apartado anterior.

La geometría seleccionada consiste en una sección de pared delgada en forma de V invertida. Siendo este un perfil habitual, para las vigas a torsión del sistema suspensión, por su fácil maquinabilidad y alta estabilidad estructural. Las dimensiones principales de la sección transversal se detallan en la siguiente imagen.

Figura 99. Dimensiones sección transversal de la viga a torsión.



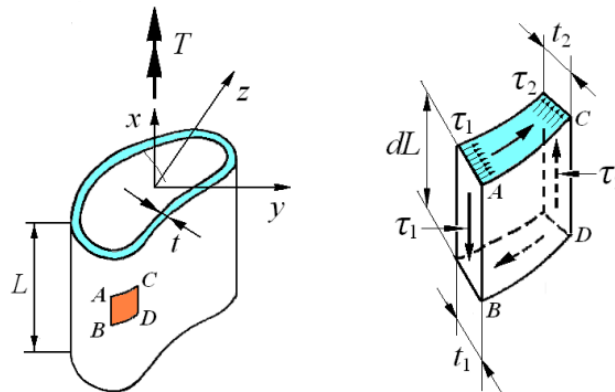
Fuente: LEE, Yang. An analytical approach for design and performance evaluation of torsion beam rear suspension.

En ese sentido, queda claro que, para poder definir completamente la geometría, se hace necesario conocer cuatro parámetros: El radio del sector circular que marca la línea media de la sección R , el ángulo ϕ_0 que establece la apertura del sector circular, la longitud del rectángulo l y el espesor de la sección t_s .

6.1 FLUJO CORTANTE A LO LARGO DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL

En ese orden de ideas, el primer parámetro relevante a calcular para la sección transversal de la viga, conociendo ya la geometría de esta, es el flujo cortante q . Este se define como la variación de la fuerza por unidad de longitud a lo largo de la línea media de la sección transversal de pared delgada y se deduce de la siguiente manera:

Figura 100. Elemento diferencial de la sección transversal.



Fuente: J.Massa, J.Giro, A Giudici. Compendio de cálculo estructural II.

Realizando un balance de fuerzas a lo largo del eje x para el elemento diferencial $ABCD$ y teniendo en cuenta la reciprocidad de los esfuerzos cortantes tangenciales se tiene que:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \tau_1 \cdot dA_1 = \tau_2 \cdot dA_2$$

$$\tau_1 \cdot t_1 \cdot dL = \tau_2 \cdot t_2 \cdot dL$$

$$\tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2 = cte$$

Se observa que el producto $\tau \cdot t$ es constante en todo el perímetro del perfil, dicho producto es constante a lo largo de toda la línea media y se denomina flujo cortante.

Teniendo en cuenta que el esfuerzo cortante puede escribirse como $\tau = \frac{V_x \cdot Q_y}{I_y \cdot t}$ el flujo de corte queda de la siguiente manera:

$$q = \tau \cdot t \quad \rightarrow \quad q = \frac{V_x \cdot Q_y}{I_y}$$

Donde V_x es la fuerza de corte resultante que actúa en el centro de corte de la viga ubicado a una distancia e del punto o tal como se puede apreciar en la Figura 99., de esta forma la fuerza resultante V_x genera un momento torsional en el punto o , por tanto, se tiene que:

$$M_t = V_x \cdot e$$

Conociendo el momento torsional de $M_t = 1000 [N \cdot m]$ el problema se resume en determinar el centro de corte para la geometría seleccionada.

6.2 CÁLCULO DE LA POSICIÓN DEL CENTRO DE CORTE

El centro de corte se define como el punto en el espacio en el cual puede ser aplicadas fuerzas cortantes sin causar una deformación torsional a la sección transversal de la estructura, este no depende de la magnitud de la fuerza sino de la geometría de la sección, en dado caso que la sección tenga ejes de simetría este se encontrará a lo largo de dichos ejes y para el caso de perfiles con dos ejes de simetría, el centro de corte se ubicará en la intersección de estos.

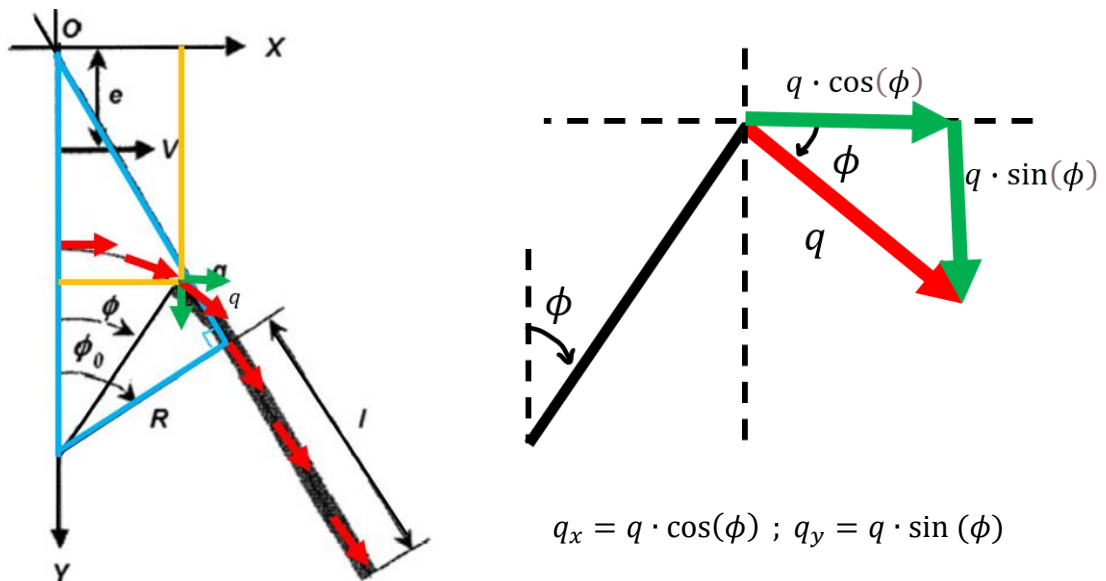
En ese orden de ideas, para la sección transversal de análisis el centro de corte se ubicará a lo largo del eje y por presentar simetría con respecto a dicho eje y su ubicación respecto del punto o se calcula mediante el siguiente procedimiento:

A partir de la expresión $M_t = V_x \cdot e$ se deduce que para calcular e se debe determinar M_t como la suma de todos los momentos que realizan los vectores de flujo de corte a lo largo de la línea media de la sección transversal:

$$e = \frac{M_t}{V_x}$$

Al lado izquierdo, de la siguiente imagen, se puede apreciar que solo los vectores de flujo de corte, que se encuentran a lo largo de la línea media del sector circular, son los que realizan momento alrededor de o , pues los vectores de flujo que pasan en la línea media de los rectángulos también pasan a través del punto o . Por otra parte, en el lado derecho se realiza una ampliación de la imagen de los vectores de flujo presentes en el sector circular, donde se descomponen a lo largo del eje x y y

Figura 101. Izquierda, Flujo cortante a lo largo de la viga. Derecha, descomposición de vectores de flujo cortante.



Fuente: Autores

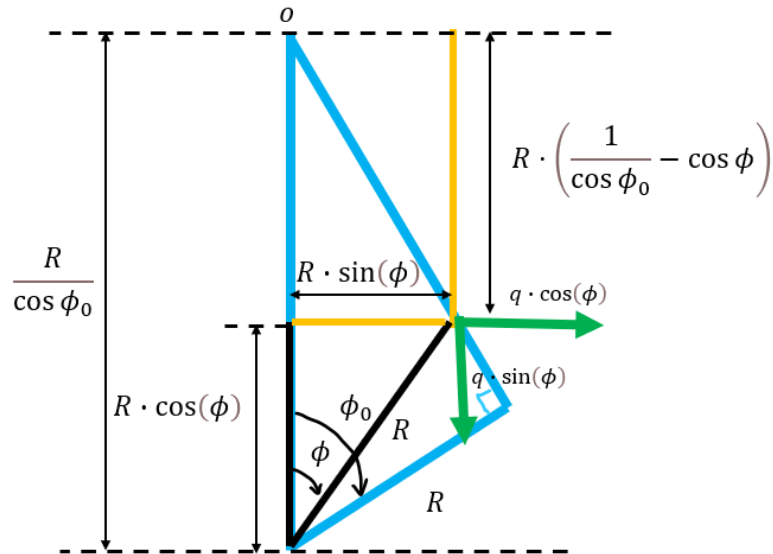
Calculadas las componentes del vector de flujo se procede a determinar los momentos que generan dichas componentes en el punto o . De manera generalizada

el momento en el punto o se escribe de la siguiente forma, donde es claro que la componente en x realiza un momento positivo y la componente en y realiza uno negativo, de acuerdo con la convención establecida:

$$+ \mathcal{U} \quad dM_t = q_x \cdot dy - q_y \cdot dx$$

En la siguiente imagen se detallan las distancias de interés para calcular tales momentos

Figura 102. Cálculo de los momentos alrededor de o .



Fuente: Autores

Por tanto, la expresión de momento torsional queda de la siguiente manera:

$$M_t = 2 \cdot \int_0^{\phi_0} [q \cdot \cos(\phi) \cdot R \cdot \left(\frac{1}{\cos \phi_0} - \cos \phi\right) - q \cdot R \cdot \sin^2(\phi)] \cdot R \cdot d\phi$$

solucionando: $M_t = 2 \cdot R^2 \cdot q \cdot (\tan \phi_0 - \phi_0)$

Utilizando la expresión de flujo de corte, la anterior ecuación también puede ser escrita como:

$$M_t = \frac{2 \cdot R^2 \cdot V_x \cdot Q_y}{I_y} \cdot (\tan \phi_0 - \phi_0)$$

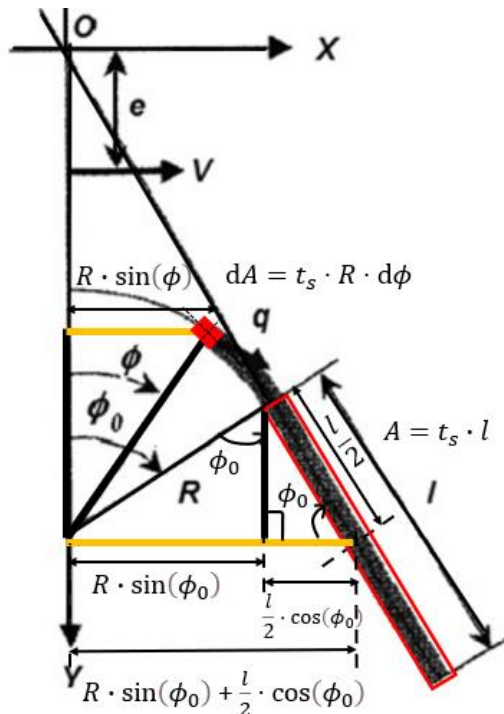
Finalmente, el valor de e puede ser calculado de la siguiente forma:

$$e = \frac{2 \cdot R^2 \cdot Q_y}{I_y} \cdot (\tan \phi_0 - \phi_0)$$

Donde Q_y e I_y corresponde al primer y segundo momento de área respectivamente, para poder calcular dichas magnitudes geométricas se deben plantear las siguientes expresiones.

6.2.1 Primer momento de área Q_y . Se define de manera general como $Q_y = \int x dA$. Por tanto, se determinará la distancia x hacia el eje y para la geometría en estudio. Dichas distancias se pueden apreciar a continuación:

Figura 103. Cálculo del primer momento de área.



Fuente: Autores

De esta manera la expresión del primer momento de área queda:

$$Q_y = t_s \cdot \left[\int_0^{\phi_0} R^2 \cdot \sin(\phi) \cdot d\phi + \left(R \cdot \sin(\phi_0) + \frac{l}{2} \cdot \cos(\phi_0) \right) \cdot l \right]$$

6.2.2 Segundo momento de área I_y . Se define de manera general como

$$I_y = \int x^2 dA.$$

En ese orden de ideas, para la sección transversal en estudio, se determinará la integral correspondiente al sector circular y para el área cuadrada se calculará el segundo momento de inercia respecto a su centroide mediante la formula $I_y = \frac{1}{12} b^3 h$, teniendo en cuenta los ejes rotados, para que, posteriormente, dicha inercia, sea llevada al eje y por medio del teorema de ejes paralelos $I_0 = I_c + A \cdot d^2$. Finalmente, la expresión del segundo momento de inercia respecto al eje y quedaría como:

$$I_y = 2t \cdot \int_0^{\phi_0} R^3 \cdot (\sin(\phi))^2 d\phi + \frac{l^3 \cos^2(\phi_0)}{12} + l \cdot \left(R \cdot \sin(\phi_0) + \frac{l}{2} \cdot \cos(\phi_0) \right)^2$$

De este modo, reemplazando I_y y Q_y en la expresión del centro cortante e , y realizando los respectivos ajustes algebraicos, la expresión que define la posición al centro cortante es:

$$e = \frac{R^2}{I} \cdot \left[\frac{R^2}{\cos(\phi_0)} \left(\frac{\phi_0}{2} + \frac{\sin(2 \cdot \phi_0)}{4} \right) + \left(\frac{B}{\cos(\phi_0)} - R^2 \right) \cdot \sin(\phi_0) - B \cdot \phi_0 \right]$$

Donde I y B se calculan de la siguiente manera:

$$I = R^3 \cdot \left(\frac{\phi_0}{2} - \frac{\sin(2 \cdot \phi_0)}{4} \right) + \frac{l^3 \cos^2(\phi_0)}{12} + l \cdot \left(R \cdot \sin(\phi_0) + \frac{l}{2} \cdot \cos(\phi_0) \right)^2$$

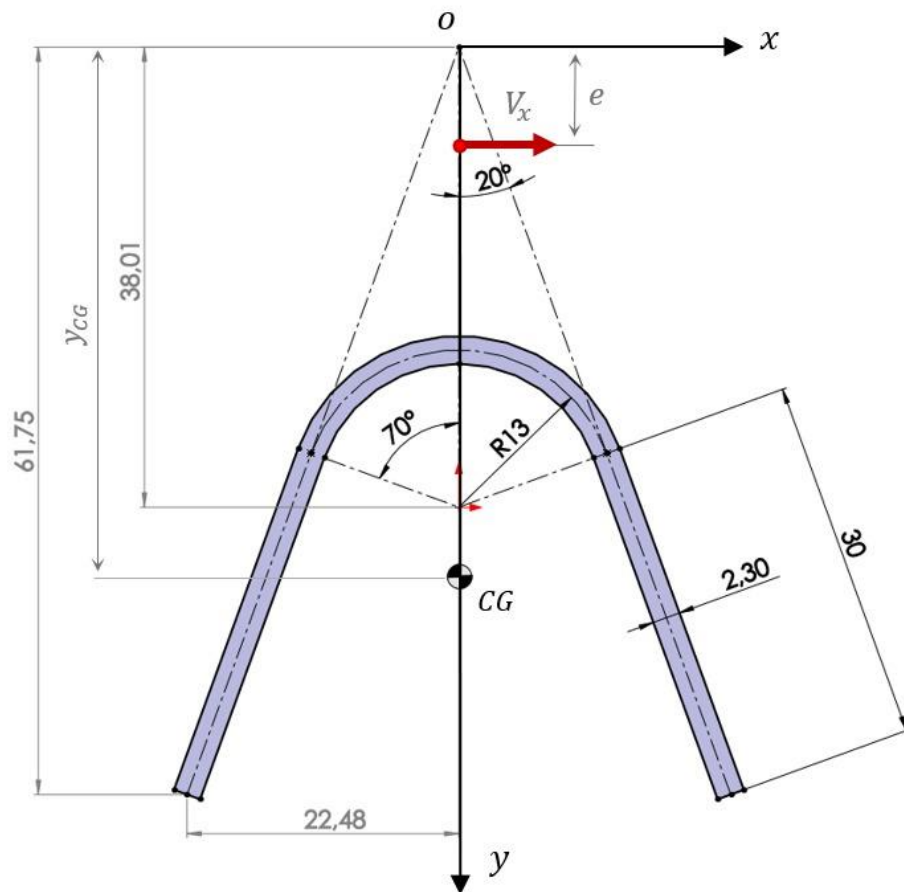
$$B = \left(\frac{l^2}{2} - R^2 \right) \cdot \cos(\phi_0) + R \cdot l \cdot \sin(\phi_0)$$

Definidas todas las propiedades geométricas se procede a levantar una propuesta de una geometría específica para la sección transversal y un material de fabricación, para así validar su resistencia y rigidez ante las cargas impuestas, y en dado caso que no cumpla las condiciones y especificaciones de diseño, se variarían los parámetros geométricos de la sección transversal, a modo de un diseño iterativo.

6.3 PROPUESTA SECCIÓN TRANSVERSAL PARA EL SISTEMA DE SUSPENSIÓN DE EJE A TORSIÓN

La primera propuesta para la sección transversal se adjunta en la siguiente imagen:

Figura 104. Primera propuesta de sección transversal.



Fuente: Autores

Con base en esta geometría se determina el momento polar de inercia en el centro de gravedad y la distancia del centro de gravedad respecto del eje x con ayuda del software Solidworks. Tales parámetros son consignados en la siguiente tabla:

Tabla 16. Parámetros geométricos de la primera propuesta de la sección transversal

Parámetro	Descripción	Valor
R	<i>Radio de sección circular del perfil</i>	13 mm
l	<i>Longitud de sección rectangular del perfil</i>	30 mm
Φ_o	<i>Angulo de sección circular</i>	70°
t_s	<i>Espesor del perfil</i>	2,3 mm
y_{CG}	<i>Distancia del CG al punto O</i>	40,85 mm
A_s	<i>Area de sección trasversal del perfil</i>	211,06 mm ²
e	<i>Distancia del centro cortante al punto O</i>	15,26 mm
J_{CG}	<i>Momento polar de inercia en el centro de gravedad</i>	75525,62 mm ⁴
J_{CC}	<i>Momento polar de inercia en el centro cortante</i>	213718,72 mm ⁴

Fuente: Autores

A partir del momento polar de inercia en el centro de gravedad, se determinará el momento polar de inercia en el centro cortante aplicando el teorema de ejes paralelos mediante la siguiente expresión:

$$J_{cc} = J_{CG} + u^2 \cdot A_s$$

Donde la distancia u corresponde a la longitud del centro de gravedad al centro cortante $u = y_{cg} - e$

$$J_{cc} = J_{CG} + (y_{cg} - e)^2 \cdot A_s$$

Remplazando los valores, el momento polar de inercia para la sección transversal queda:

$$J_{cc} = 75525,62 + (40.85 - 15.26)^2 \cdot 211.06 \rightarrow J_{cc} = 213718.72 [mm^4]$$

Teniendo el momento polar de inercia en el centro cortantes es posible calcular la constante de rigidez torsional k_r a partir de la siguiente expresión:

$$k_r = \frac{G \cdot J_{cc}}{L_t}$$

Donde L_t corresponde a la longitud del eje torsional, es decir $L_t = C = 1140 [mm]$ y G hace referencia al módulo de rigidez del material, que para este caso será acero estructural A36 por su fácil soldabilidad y maquinabilidad.

Para materiales isotrópicos lineales el módulo de rigidez puede calcularse como una función del módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson mediante la siguiente expresión:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

Que para el caso del A36 el módulo de elasticidad es $E = 200 [GPa]$ y su coeficiente de Poisson es de $\nu = 0.26$.

$$G = \frac{200}{2 \cdot (1 + 0.26)} \rightarrow G = 79.36 [GPa]$$

De esta manera, el valor de la constante de rigidez para esta sección, hecha de acero estructural A36, queda:

$$k_r = \frac{79.36 \cdot 10^9 \cdot 213718.72 \cdot 10000^{-4}}{1140 \cdot 1000^{-1}} \rightarrow k_r = 14879 \left[\frac{N \cdot m}{rad} \right]$$

Ahora, teniendo en cuenta el momento torsional máximo $M_t = 1000[N \cdot m]$ es posible calcular el ángulo máximo de deformación de la viga a torsión aplicando la siguiente expresión:

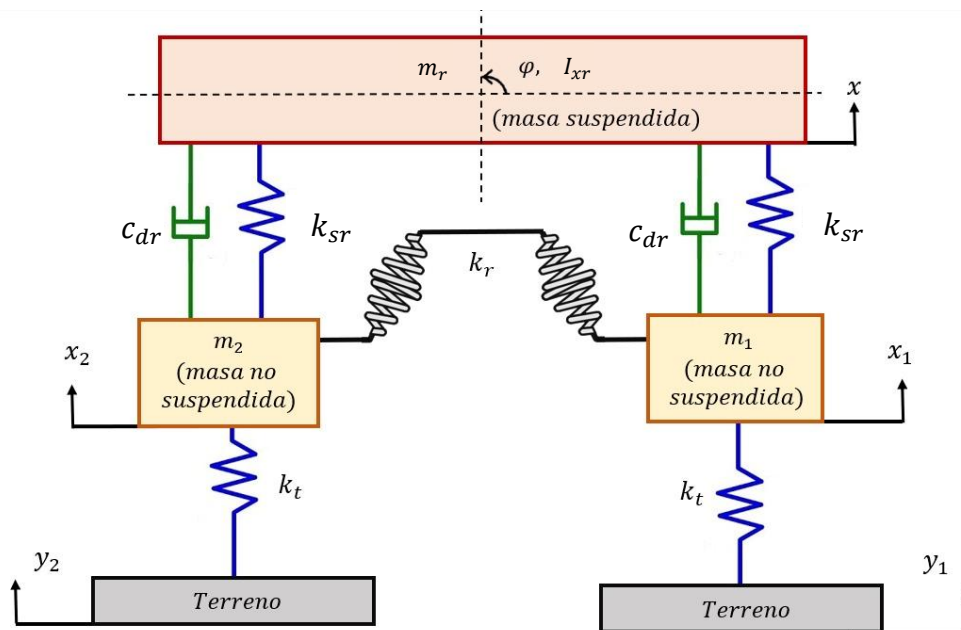
$$\theta_t = \frac{M_t}{k_r} \rightarrow \theta_t = \frac{1000 [N \cdot m]}{14879 \left[\frac{N \cdot m}{rad} \right]} \cdot \frac{180}{\pi} = 3.85^\circ$$

Teniendo en cuenta la constante de rigidez calculada y el ángulo de deformación máximo se llevarán tales variables a la simulación vibratoria para analizar la deformación de la viga ante el máximo momento torsional dinámico.

7. SIMULACIÓN VIBRATORIA DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN DE EJE TORSIONAL

Las ecuaciones diferenciales, que modelan el sistema de suspensión de eje torsional, son muy similares a las ya planteadas en el apartado de la simulación del sistema McPherson, pues el principal cambio es la inclusión del eje a torsión (que se asumirá de masa despreciable) el cual provee una rigidez a la torsión en momentos en que las llantas se encuentran desalineadas. Es decir, la viga a torsión se deformará un ángulo φ cuando las llantas sean excitadas de forma independiente.

Figura 105. Modelo vibratorio sistema eje torsional.



Fuente: Autores

En ese orden de ideas, la viga debe generar un momento reactivo de signo contrario para contrarrestar el momento que está haciendo girar la carrocería, dicho momento es posible calcularlo mediante la siguiente expresión:

$$M_t = -k_r \cdot \varphi$$

De manera que el conjunto de ecuaciones diferenciales queda de la siguiente forma:

1. De la ecuación de cinética lineal de la carrocería (Balance de fuerzas):

$$m_r \ddot{x} + 2c_{dr} \dot{x} - c_{dr} x_2 + c_{dr}(b_1 - b_2) \dot{\varphi} - c_{dr} \dot{x}_1 + 2k_{sr} x - k_{sr} x_2 - k_{sr} x_1 + k_{sr}(b_1 - b_2) \varphi = 0$$

2. De la ecuación de cinética rotacional de la carrocería (Balance de momentos):

$$I_{xr} \ddot{\varphi} + c_{dr}(b_1 - b_2) \dot{x} - c_{dr} b_1 \dot{x}_1 + c_{dr} b_2 \dot{x}_2 + c_{dr}(b_1^2 + b_2^2) \dot{\varphi} + k_{sr}(b_1 - b_2) x - k_{sr} b_1 x_1 + k_{sr} b_2 x_2 + k_{sr}(b_1^2 + b_2^2) \varphi + \mathbf{k}_r \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0$$

3. De la ecuación del balance de fuerzas para la masa 1 (m_1):

$$m_1 \ddot{x}_1 - c_{dr} \dot{x} + c_{dr} \dot{x}_1 - b_1 c_{dr} \dot{\varphi} - k_{sr} x + (k_{sr} + k_t) x_1 - k_{sr} b_1 \varphi - k_t y_1 = 0$$

4. De la ecuación del balance de fuerzas para la masa 2 (m_2):

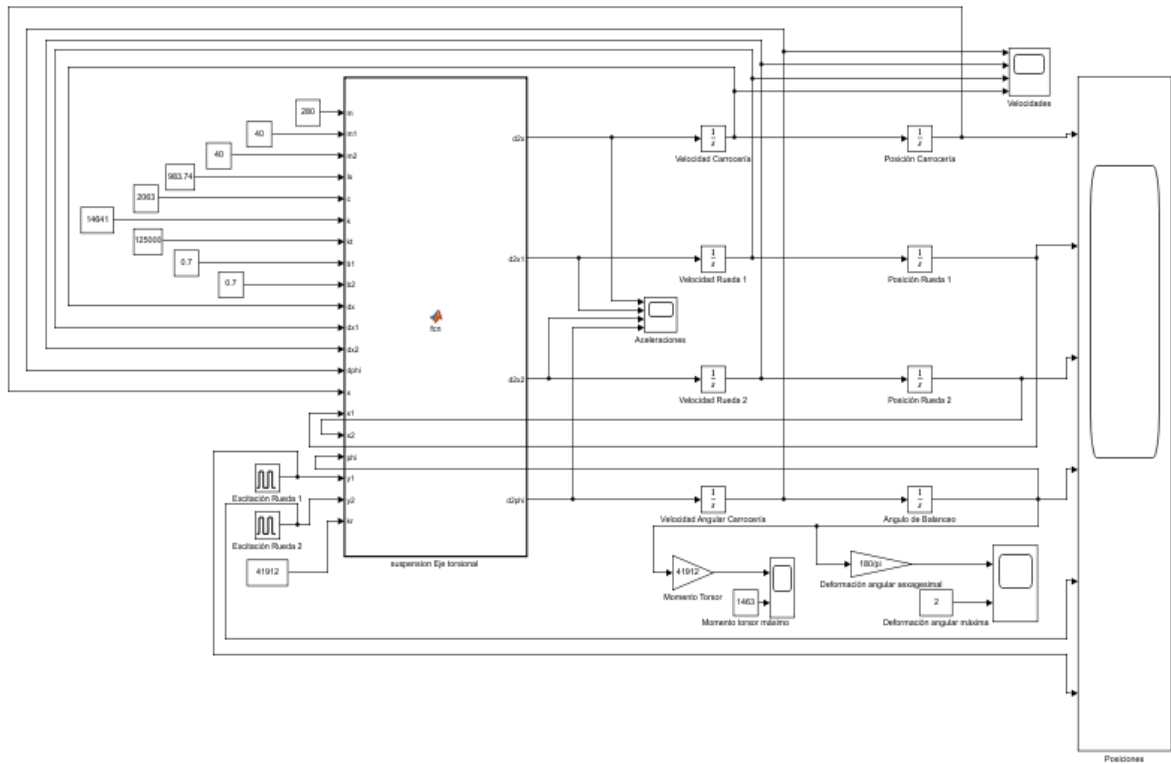
$$m_2 \ddot{x}_2 - c_{dr} \dot{x} + c_{dr} \dot{x}_2 - b_2 c_{dr} \dot{\varphi} - k_{sr} x + (k_{sr} + k_t) x_2 - k_{sr} b_2 \varphi - k_t y_2 = 0$$

En la ecuación del balance de momentos es posible ver la adición del término $M_t = -k_r \cdot \varphi$.

7.1 IMPLEMENTACIÓN EN MATLAB SIMULINK:

Así pues, dicho conjunto de ecuaciones diferenciales es llevado al entorno gráfico de Matlab-Simulink y puede apreciarse en la siguiente imagen:

Figura 106. Matlab-Simulink sistema eje a torsión.



Fuente: Autores

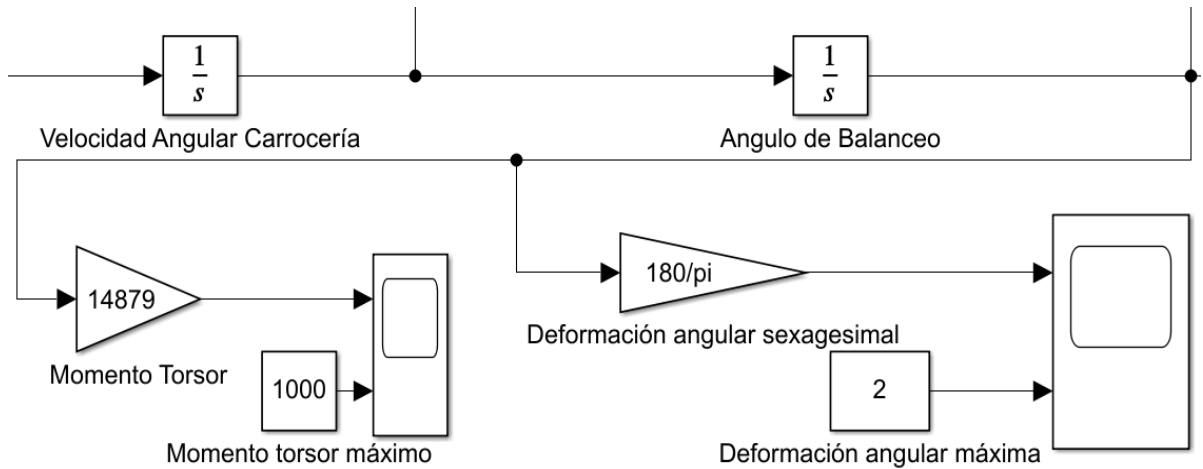
El Simulink presentado también comparte ciertas similitudes con el desarrollado para el sistema McPherson, en la que su principal diferencia radica en los parámetros de la simulación, los cuales son presentados en la tabla del **Anexo Q**. Parámetros de entrada para la simulación del sistema de suspensión trasero

Esta diferencia entre la simulación del sistema de suspensión McPherson y el eje torsional se encuentra en la adición de la rigidez del eje a torsión y la masa que soporta el sistema. Pues esta es definida como el 40% de la masa total del vehículo, la cual tiene un valor de $m = 700 [kg]$ por lo que $m_r = 0.4 \cdot 700 \rightarrow m_r = 280 [kg]$.

Para poder visualizar el momento, durante todo el intervalo de la simulación, se implementan los siguientes multiplicadores de manera que, sea fácil observar el

pico en el que se da el momento torsional máximo y la deformación que a este le corresponde.

Figura 107. Momento torsional y deformación angular.



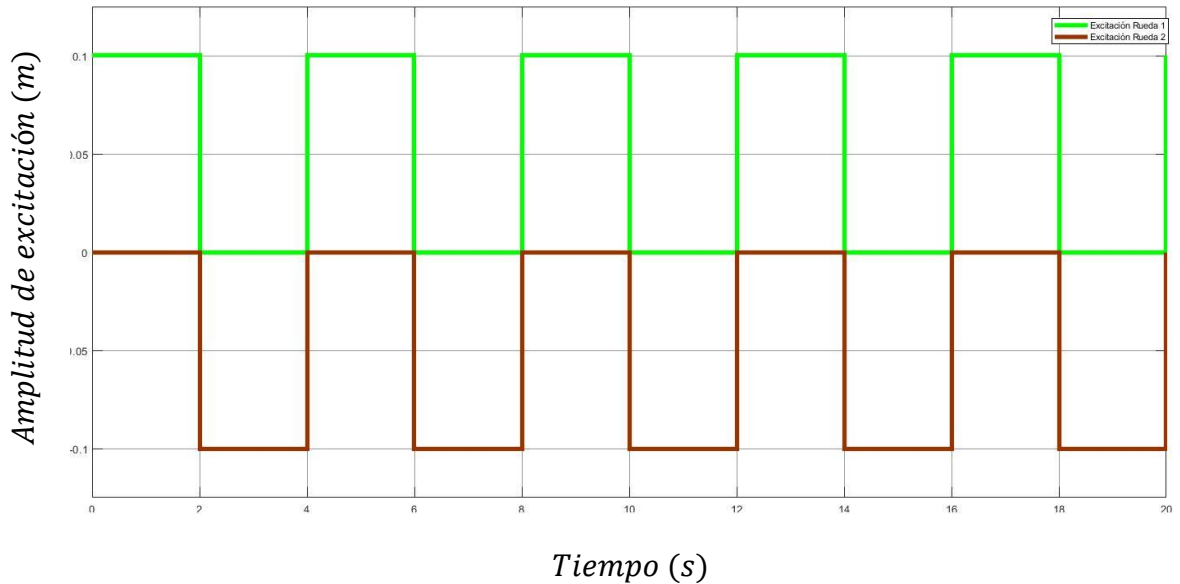
Fuente: Autores

7.2 MODOS DE EXCITACIÓN

Las formas de excitación a las que será sometido el sistema de suspensión de eje a torsión corresponderán a aquellas en las que el sistema presente un desbalance en la carrocería, pues es donde el eje a torsión comienza a trabajar. En ese orden de ideas, de todos los modos, ya estudiados en el sistema McPherson, el que mejor permite validar el rendimiento del sistema de eje a torsión es el siguiente:

7.2.1 Condiciones asimétricas de ambas ruedas excitadas mediante dos funciones de pulso con amplitudes de signo contrario. Este modo de excitación fue explicado a profundidad en el apartado de la simulación del sistema McPherson, donde ambas ruedas son deformadas de tal forma que cuando una está en posición extrema, la otra se encuentra en nivel neutro (0 mm).

Figura 108. Funciones de pulso con amplitud de signo contrario.



Fuente: Autores

Por otra parte, vale la pena aclarar que el volver a estudiar los modos de excitación, ya revisados en el sistema McPherson, sería caer en una redundancia, pues los resultados serían prácticamente idénticos, ya que en cada uno de ellos no se refleja un desbalance de las ruedas y para el caso del modo denominado *Condiciones asimétricas de ambas ruedas excitadas mediante dos funciones de pulso en condición crítica*, aunque existía un desbalance, la situación era muy difícil de replicar en la realidad, por lo que, se concluyó, que el sistema, por más robusto que fuera, nunca llegaría a estabilizarse ante tal condición tan crítica.

7.3 REDISEÑO DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL

Tal como se expuso en el apartado anterior, la sección transversal se deforma 3.83° ante un momento torsional de $M_t = 1000 [N \cdot m]$; dicha deformación puede aumentar si el momento cambia por condiciones dinámicas. De este modo, uno de los requerimientos de diseño que se establecerá radica en que la viga a torsión se deforme tan solo 2° para el máximo momento torsional dinámico, con la condición

de excitación previamente definida, por lo que se calculará la constante de rigidez apropiada que cumpla tal requerimiento.

Para poder definir la geometría de la sección transversal que cumpla el requerimiento ya mencionado, se seguirá el siguiente procedimiento:

$$k_r(\textit{iterativo}) = \frac{M_t(\textit{Dinámico})}{\theta_t}$$

Se partirá de la constante de rigidez previamente definida y se analizará a través del visualizador del momento torsional el valor del $M_t(\textit{Dinámico})$ máximo y se recalculará la constante de rigidez sabiendo que $\theta_t = 2^\circ$.

Así pues, teniendo la nueva constante de rigidez $k_r(\textit{iterativo})$ se calculará el momento polar de inercia que debería tener dicha sección mediante la siguiente expresión:

$$J_{cc} = \frac{k_r(\textit{Iterativo}) \cdot C}{G}$$

Tal procedimiento debe repetirse hasta que la simulación arroje que ante el máximo $M_t(\textit{Dinámico})$ la viga a torsión se deforme tan solo 2° , en ese punto se tendrá el J_{cc} que cumpla tal requerimiento y el problema concluirá en variar la geometría de la sección, hasta alcanzar el J_{cc} deseado.

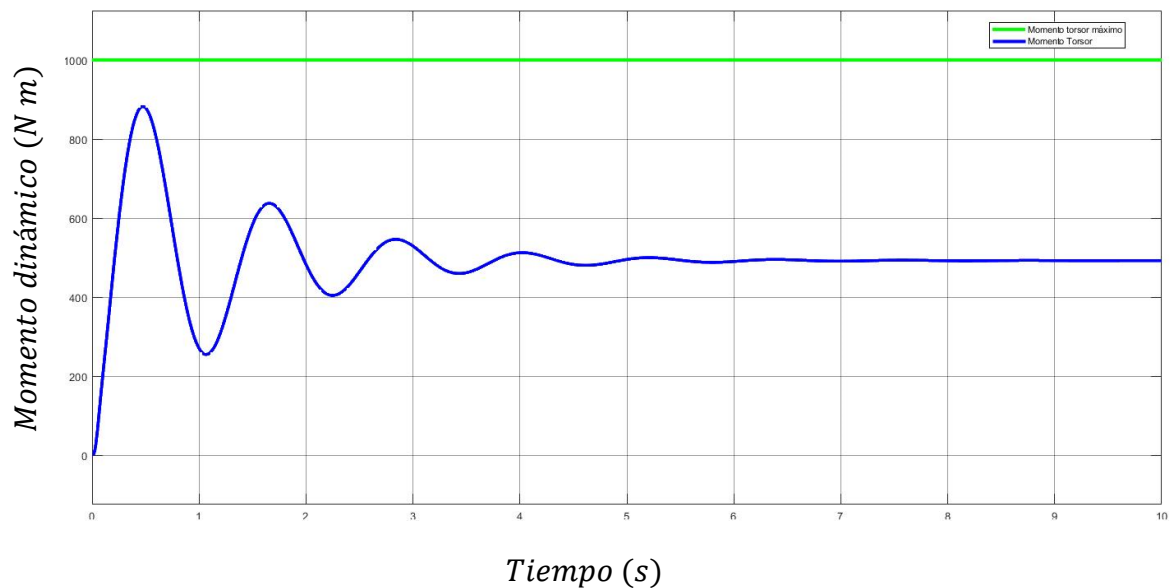
En la variación de la geometría se cambiarán cualquiera de los cuatro parámetros (Espesor, ángulo del sector circular medio, radio y longitud del rectángulo) en el software Solidworks, hasta que se llegue a un momento polar de inercia lo más cercano posible a lo definido desde la simulación.

Para mayor claridad se mostrará el procedimiento para el primer intento de la iteración y las demás serán consignadas por medio de una tabla.

En ese orden de ideas se procede a correr la simulación con la constante de rigidez del eje a torsión que se había definido en un inicio, $k_r = 14879 \left[\frac{N \cdot m}{rad} \right]$ para poder detallar el valor de la deformación y momento máximo.

La siguiente gráfica corresponde a la variación del momento dinámico a lo largo del tiempo cuando la sección transversal tiene rigidez $k_r = 14879 \left[\frac{N \cdot m}{rad} \right]$:

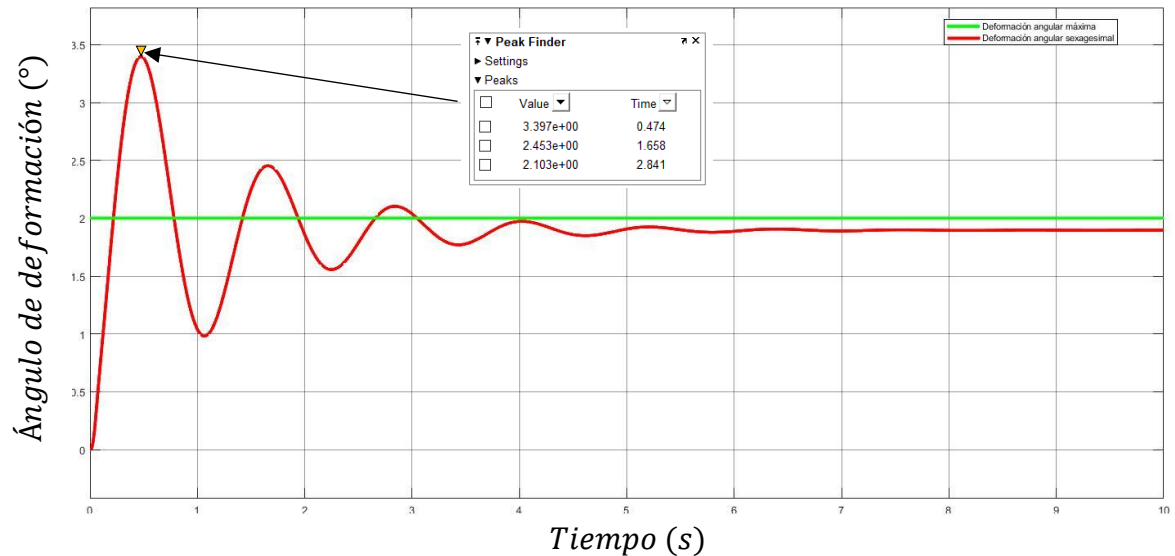
Figura 109. Variación del momento dinámico para $k_r = 14879 \left[\frac{N \cdot m}{rad} \right]$.



Fuente: Autores

Por medio de esta gráfica es posible apreciar que el momento dinámico máximo corresponde al instante $t = 0.474 [s]$ y tiene un valor de $M_t(Dinámico) = 882.2 [N \cdot m]$ por lo que, para un primer análisis, podría parecer favorable pues se encuentra por debajo del momento torsional que se usó para el diseño del eje torsional, el cual es de $M_t = 1000 [N \cdot m]$. No obstante, se procede a validar la deformación del eje, esperando que esta se encuentre también por debajo de los 2° .

Figura 110. Variación del ángulo de deformación para $k_r = 14879 \left[\frac{N \cdot m}{rad} \right]$.



Fuente: Autores

Resulta evidente que la deformación de 2° no se cumple para el valor del momento dinámico máximo y esto se puede validar por medio de la herramienta Peak Finder de Matlab, en la que el máximo ángulo de deformación se obtiene a los $t = 0.474$ [s] y tiene un valor de $\theta_t = 3.397^\circ$.

En ese orden de ideas, se procede a realizar el proceso iterativo explicado con anterioridad. Para tal efecto se recalculará la constante de rigidez con los datos obtenidos en la simulación, es decir se usará el $M_t(Dinámico) = 882.2$ [N · m] y $\theta_t = 2^\circ$, siendo este último la deformación que se quiere lograr cuando se aplica el momento dinámico máximo.

$$k_r(\text{iterativo } 1) = \frac{M_t(Dinámico)}{\theta_t} \rightarrow k_r(\text{iterativo } 1) = \frac{882.2 \text{ [N} \cdot \text{m]}}{2^\circ \cdot \frac{\pi}{180}}$$

Finalmente, la constante recalculada da:

$$k_r(\text{iterativo } 1) = 25273 \left[\frac{N \cdot m}{rad} \right]$$

Y por consiguiente el momento polar de inercia aumenta a este valor:

$$J_{cc} = \frac{25273 \left[\frac{N \cdot m}{rad} \right] \cdot 1140 [mm] \cdot \frac{1 [m]}{1000 [mm]} \cdot \frac{1000^4 [mm^4]}{1 [m^4]}}{79.36 \cdot 10^9 \left[\frac{N}{m^2} \right]}$$

$$J_{cc} = 363024 [mm^4]$$

Ahora, el siguiente paso corresponde en llevar la constante recalculada $k_r(\text{iterativo } 1) = 25273 \left[\frac{N \cdot m}{rad} \right]$ a la simulación y repetir el mismo procedimiento hasta que se logre la deformación de $\theta_t = 2^\circ$ para el momento dinámico máximo.

En la siguiente tabla se consignan los 8 intentos restantes del proceso iterativo

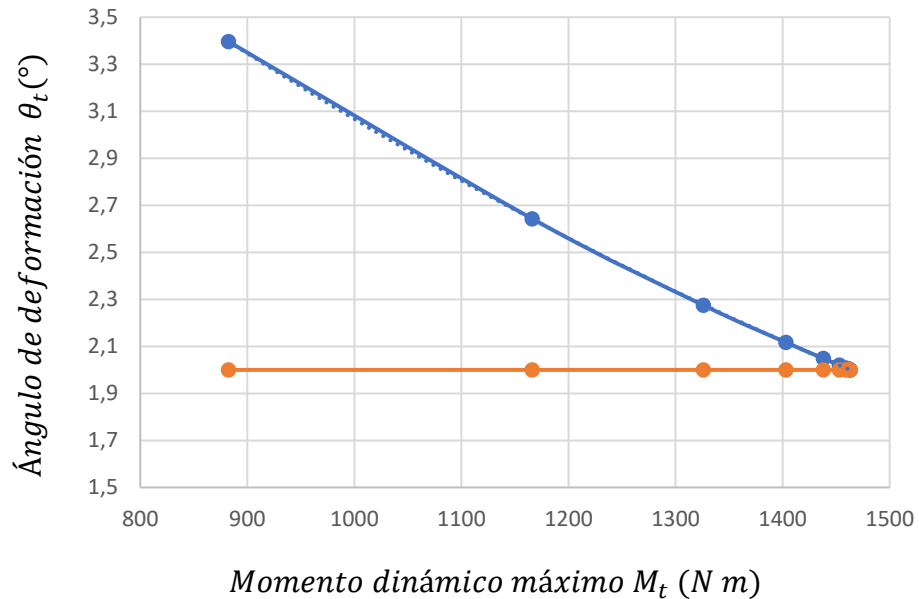
Tabla 17. Proceso iterativo rediseño sección transversal.

<i>Iteración No.</i>	$M_{t_{max} \text{ dinámico}} (N \cdot m)$	$\theta_t (rad)$	$k_r \left(\frac{N \cdot m}{rad} \right)$	$J_{cc} (mm^4)$	$\theta_{t_{max}} (^\circ)$
1	882,2	0,03490659	25273,16834	363024	3,397
2	1166	0,03490659	33403,43946	479807	2,643
3	1326	0,03490659	37987,10182	545647	2,275
4	1403	0,03490659	40192,98933	577332	2,117
5	1438	0,03490659	41195,66547	591735	2,049
6	1453	0,03490659	41625,38382	597907	2,02
7	1459	0,03490659	41797,27115	600376	2,008
8	1462	0,03490659	41883,21482	601610	2,004
9	1463	0,03490659	41911,86271	602022	2

Fuente: Autores

En dicha tabla se puede apreciar que en la medida en la que se iba recalculando la constante de rigidez, la deformación se iba acercando cada vez más a los $\theta_t = 2^\circ$, esto se ilustra de mejor manera en la siguiente gráfica:

Figura 111. Momento dinámico máximo vs Deformación máxima.



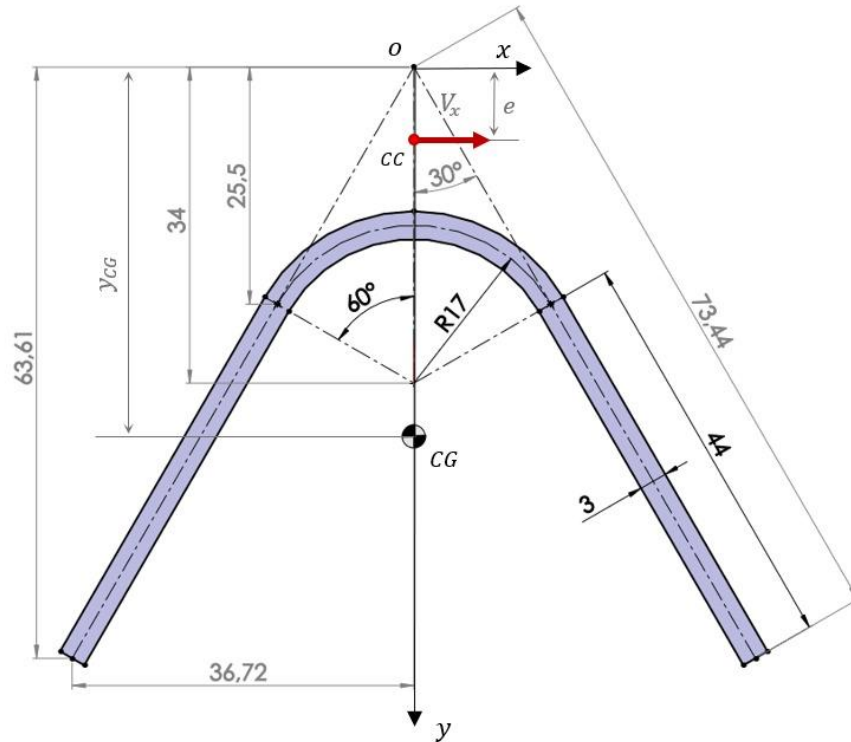
Fuente: Autores

Finalmente, la sección transversal debe tener una rigidez de $k_r = 41912 \left[\frac{N \cdot m}{rad} \right]$ y por tanto un momento polar de inercia de $J_{cc} = 602022 [mm^4]$ para que cumpla las especificaciones planteadas, por consiguiente, se variarán los parámetros geométricos para conseguir un J_{cc} lo más aproximado posible al ideal.

7.4 GEOMETRÍA DE LA NUEVA SECCIÓN TRANSVERSAL

Luego de variar los parámetros se presenta la geometría final de la sección transversal:

Figura 112. Geometría sección transversal definitiva.



Fuente: Autores

En la siguiente tabla se resumen los parámetros y propiedades geométricas más relevantes de la sección

Tabla 18. Parámetros y propiedades geométricos de la sección transversal final.

Parámetro	Descripción	Valor
R	Radio de sección circular del perfil	17 mm
l	Longitud de sección rectangular del perfil	44 mm
Φ_o	Angulo de sección circular	60°
t	Espesor del perfil	3 mm
y_{CG}	Distancia del CG al punto O	37,45 mm

A	<i>Area de sección transversal del perfil</i>	$370,81 \text{ mm}^2$
e	<i>Distancia del centro cortante al punto O</i>	$7,615 \text{ mm}$
J_{CG}	<i>Momento polar de inercia en el centro de gravedad</i>	$273551,23 \text{ mm}^4$
J_{CC}	<i>Momento polar de inercia en el centro cortante</i>	$603612,28 \text{ mm}^4$

Fuente: Autores

Así pues, se repite el mismo procedimiento para calcular el momento polar de inercia en el centro de cortante:

$$J_{cc} = J_{CG} + (y_{cg} - e)^2 \cdot A_s$$

$$J_{cc} = 273551.23 + (37.45 - 7.615)^2 \cdot 370.81 \rightarrow J_{cc} = 603612.28 [\text{mm}^4]$$

En otras palabras, la variación de parámetros desde el software de modelado Solidworks permitió obtener una sección transversal de $J_{cc} = 603612.28 [\text{mm}^4]$ con tan solo un error del 0.26% respecto del momento polar de inercia ideal de $J_{cc} = 602022 [\text{mm}^4]$. De este modo la constante de rigidez quedaría:

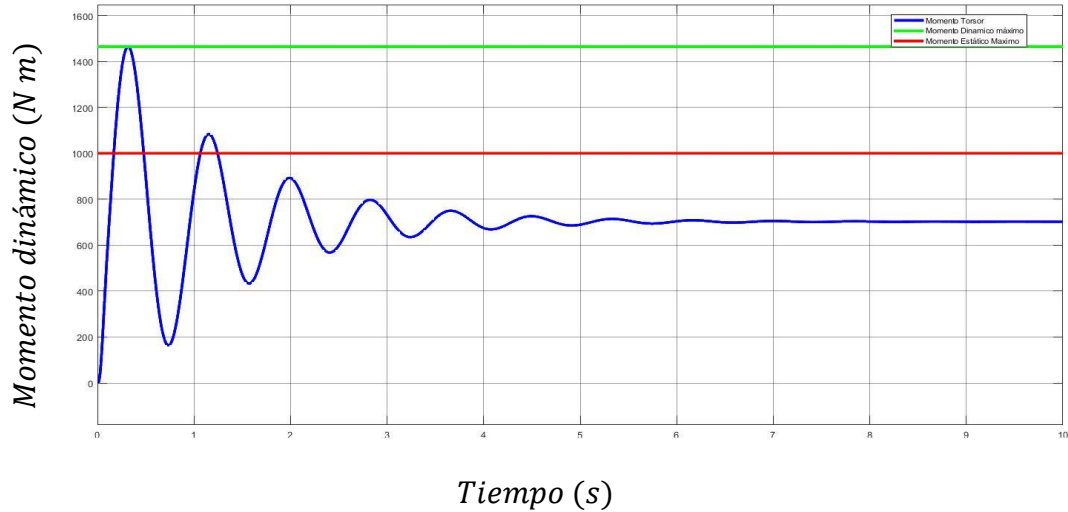
$$k_r = \frac{G \cdot J_{cc}}{L_t} \rightarrow k_r = \frac{79.36 \cdot 10^9 \cdot 603612.28 \cdot 10000^{-4}}{1140 \cdot 1000^{-1}} \rightarrow k_r = 42023 \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}} \right]$$

Deformándose tan solo $\theta_t = 1.36^\circ$ ante el momento máximo estático de $M_t = 1000 [\text{N} \cdot \text{m}]$.

7.5 RESULTADOS FINALES DE LA SIMULACIÓN VIBRATORIA

Finalmente se lleva la constante de rigidez final a la simulación para analizar el comportamiento:

Figura 113. Variación del momento dinámico para la sección transversal definitiva.

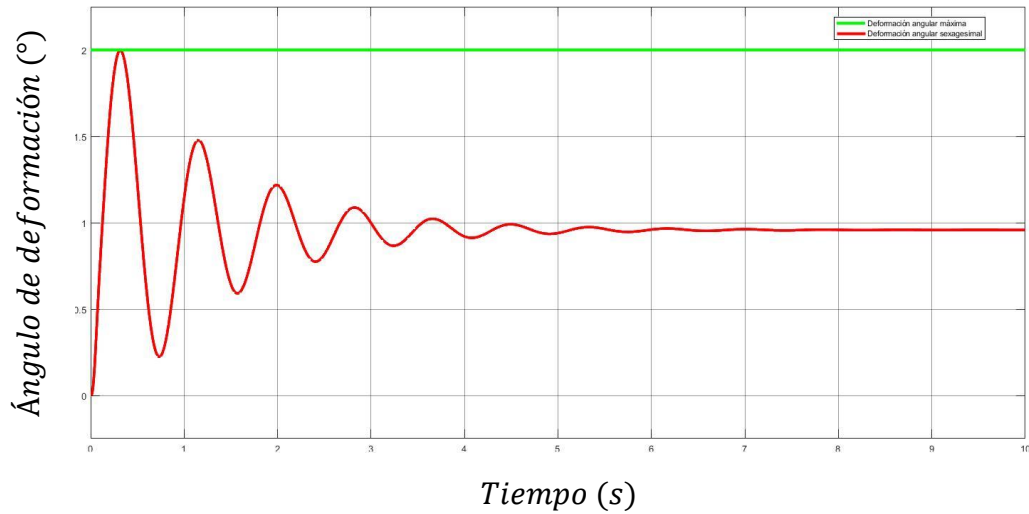


Fuente: Autores

Para esta geometría el momento dinámico máximo corresponde a $M_t(Dinámico) = 1465 [N \cdot m]$ (Resaltado en verde) y el máximo momento estático $M_t = 1000 [N \cdot m]$ (Resaltado en rojo). No obstante, estos valores solo se alcanzan en los primeros instantes de la simulación y el momento reactivo tiende a estabilizarse a un valor de $M_t(Estabilizado) = 702.7 [N \cdot m]$, el cual se encuentra por debajo de los dos momentos que fueron utilizados para el diseño del sistema de suspensión de eje a torsión. Por tanto, se puede concluir que, durante gran parte del tiempo el sistema estará sometido a cargas no tan exigentes, sin tener en cuenta que la excitación de la simulación vibratoria obliga a la simulación a trabajar a su máximo rendimiento por variar de manera drástica la posición del terreno mediante una señal de pulsos.

Por otra parte, al existir un error del 0.26% con respecto al momento polar de inercia ideal, la deformación, ante el momento dinámico máximo, no es exactamente $\theta_t = 2^\circ$ sino que se encuentra un poco por abajo, con un valor de $\theta_t = 1.967^\circ$ siendo esto igualmente aceptable. El comportamiento a detalle del ángulo de deformación se puede apreciar en la siguiente imagen:

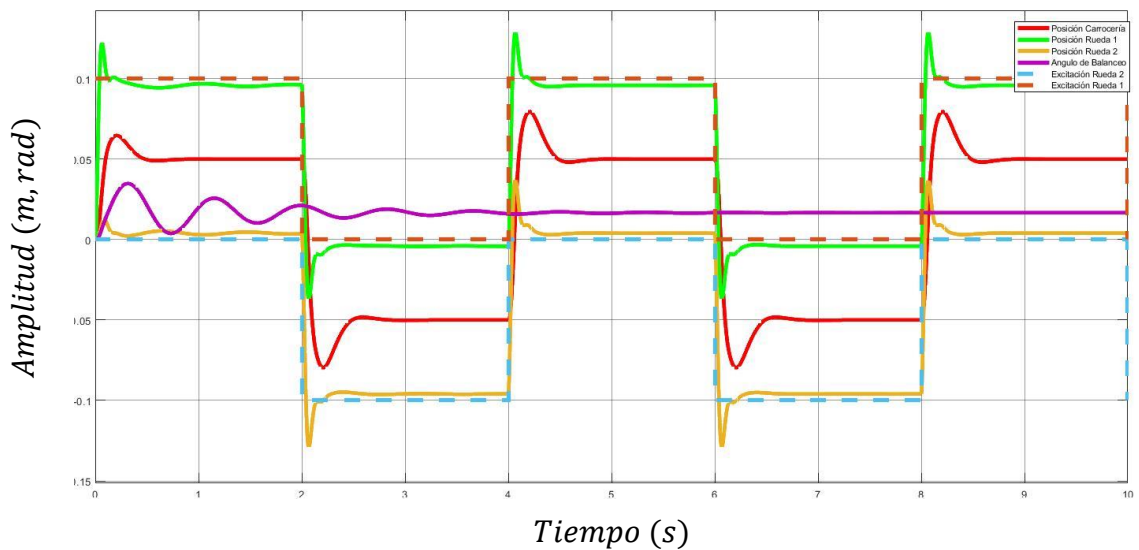
Figura 114. Variación del ángulo de deformación para la sección transversal definitiva.



Fuente: Autores

Finalmente, el resultado de la simulación vibratoria que contempla todos los demás parámetros, es decir: la posición lineal de la carrocería, la posición de la rueda 1, la posición de la rueda 2 y la posición angular de la carrocería puede verse a continuación:

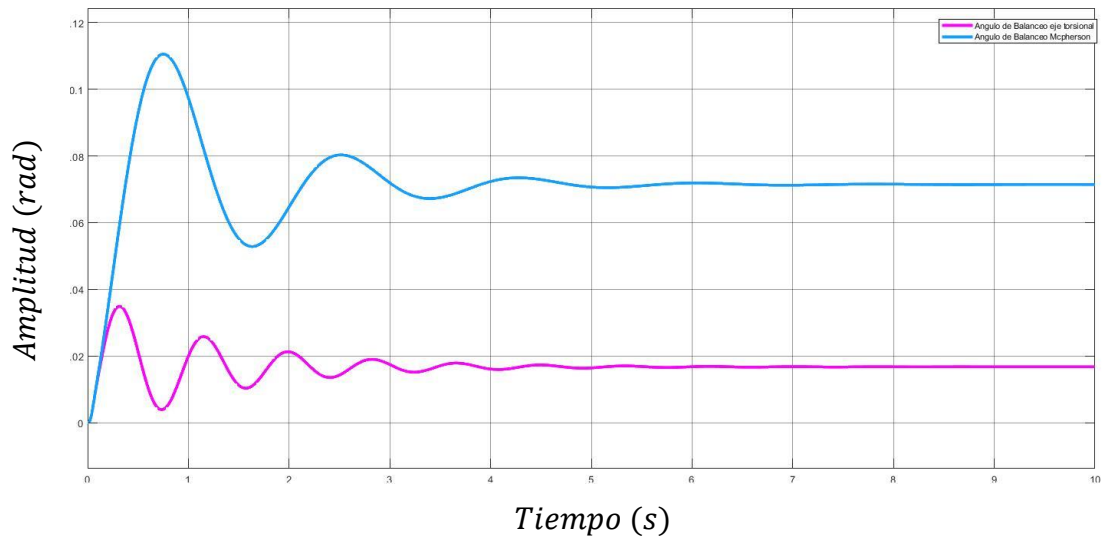
Figura 115. Resultados simulación vibratoria para el sistema eje torsional.



Fuente: Autores

En la anterior imagen es posible apreciar que los resultados para la posición lineal de la carrocería y para la rueda 1 y 2 se mantienen de forma igual que con respecto a los resultados obtenidos para suspensión McPherson, pues tal como se mencionó en la deducción matemática del modelo para el eje a torsión, el cambio más pronunciado se da en la variación del ángulo de balanceo, por lo que para detallar tal cambio se presentan los resultados del ángulo de balanceo del sistema McPherson y del eje torsional en una misma gráfica:

Figura 116. Comparación ángulo de balanceo entre ambos Sistemas.



Fuente: Autores

Comparando las dos variaciones del ángulo de balanceo es posible apreciar que el añadir un eje a torsión, que se deforme ante las irregularidades del terreno, permite disminuir la posibilidad de volcamiento, pues disminuye, en gran medida, la variación de la posición angular de la carrocería. Permitiendo así, que este oscile en un rango más limitado para los valores del ángulo de balanceo.

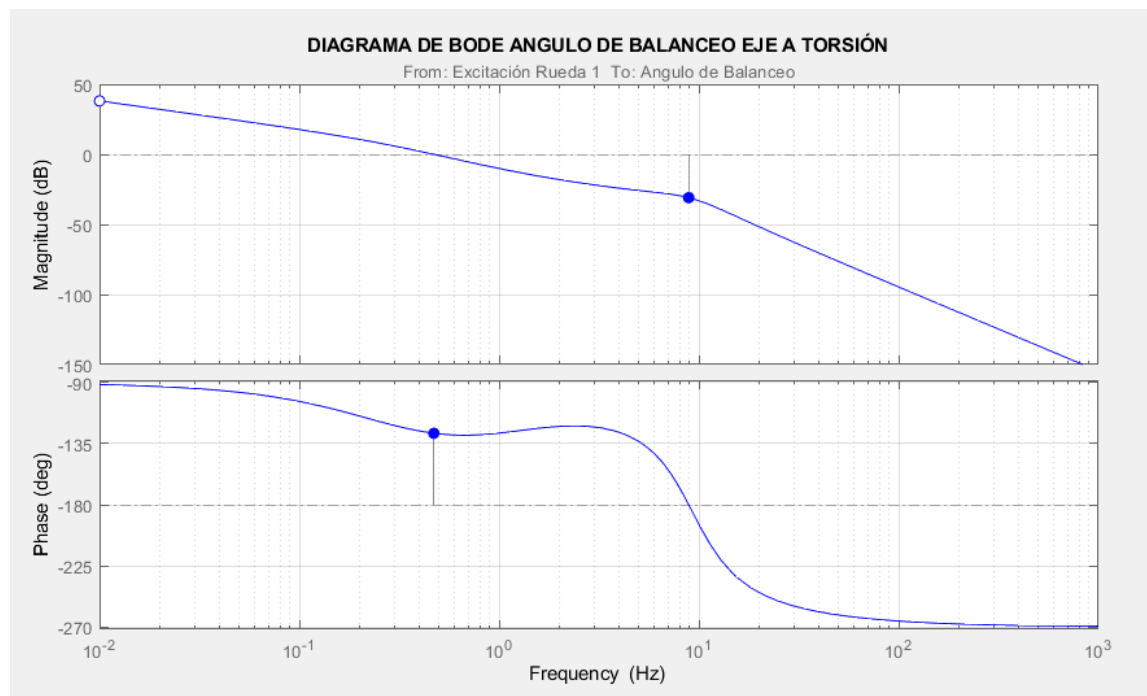
No obstante, es posible concluir que la amplitud se disminuye sacrificando las oscilaciones presentadas antes de la estabilización, en otras palabras; el sistema McPherson oscila en menor medida, pero con una mayor amplitud antes de alcanzar

la estabilización, mientras que el sistema de eje a torsión oscila en mayor medida, pero con una menor amplitud.

7.6 DIAGRAMA DE BODE: ÁNGULO DE BALANCEO

Para concluir el estudio de la simulación, se presenta ahora el diagrama de bode para el ángulo de balanceo de la carrocería, en el que se amplifica la señal para un rango de frecuencia de $[0[Hz] - 0.5 [Hz]]$ y se atenúa para frecuencias mayores a $0.5 [Hz]$. La fase de la señal de salida tiende a estar desfasada aproximadamente -90° en frecuencias de $[0[Hz] - 10 [Hz]]$ y para frecuencias mayores a $10 [Hz]$ la señal se desfasa -270° .

Figura 117. Diagrama de Bode carrocería eje a torsión

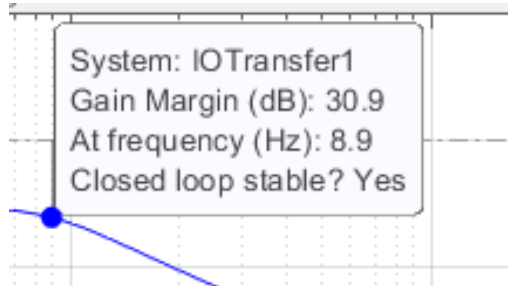


Fuente: Autores

Para el caso del diagrama de Bode de la respuesta de la posición angular de la carrocería se presentan los siguientes márgenes de fase y de ganancia:

$$MF = 45^\circ \quad MG = 30.9 [dB]$$

Figura 118. Estabilidad angular de la carrocería



Fuente: Autores

El margen de fase y de ganancia son positivos tal como se muestra en la anterior imagen, por tanto, el sistema es catalogado como estable.

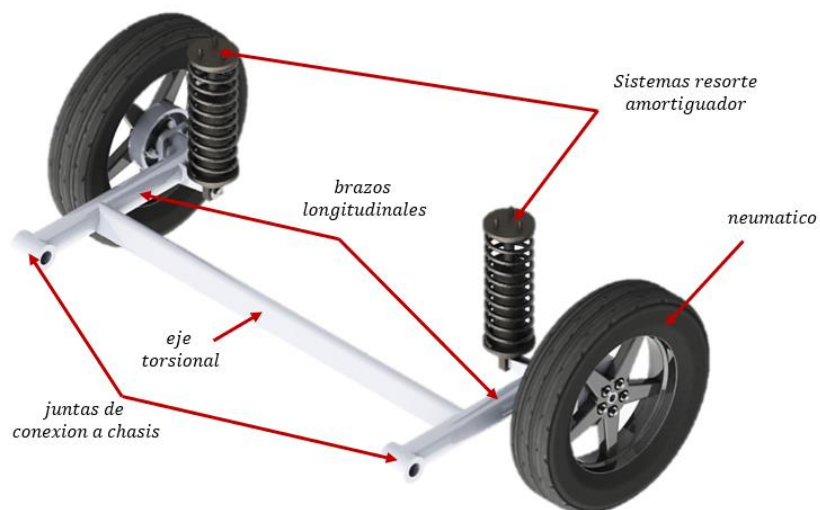
Vale la pena aclarar que el diagrama de bode del sistema McPherson con respecto al del eje torsional, para el ángulo de balanceo y demás parámetros, son prácticamente idénticos, pues la variación en el modelo es muy insignificante para poder apreciar un gran cambio en la respuesta de la amplitud y fase de la señal de salida en el dominio de la frecuencia.

8. MODELADO Y ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL SISTEMA DE SUSPENSIÓN TRASERO

Al igual que el sistema de suspensión frontal, es necesario realizar el estudio de elementos finitos a los componentes principales del sistema de suspensión trasero, para así validar el diseño mecánico. Este último resulta del análisis cinético, cinemático y geométrico del sistema de suspensión de eje torsional, dando como resultado un modelo geométrico simplificado en el que se consolidan las dimensiones geométricas generales de los elementos que lo conforman.

Al obtener los parámetros iniciales de construcción, el análisis estructural del sistema parte del diseño en detalle de la suspensión, donde se tendrá presente la capacidad de manufacturabilidad y ensamble del conjunto de piezas que se realizarán en el software Solidworks. Dicho esto, se presenta el diseño final del sistema de suspensión de eje torsional que se posicionará en la zona trasera del vehículo.

Figura 119. Modelado geométrico sistema de suspensión eje torsional



Fuente: Autores

El sistema de suspensión trasero fue diseñado de tal forma que los sistemas resorte-amortiguador pudieran bascular a través de los brazos soporte que se extienden a través del brazo longitudinal, con el fin de permitir la rotación del cilindro amortiguador.

Así mismo, su ubicación se estimó en función de los valores máximos de fuerza que soportaría dicho sistema y el momento máximo torsional del eje. En este orden de ideas, la sección transversal del eje torsional se diseñó a partir de la configuración geométrica que permitiera un ángulo máximo torsional dinámico de 2° .

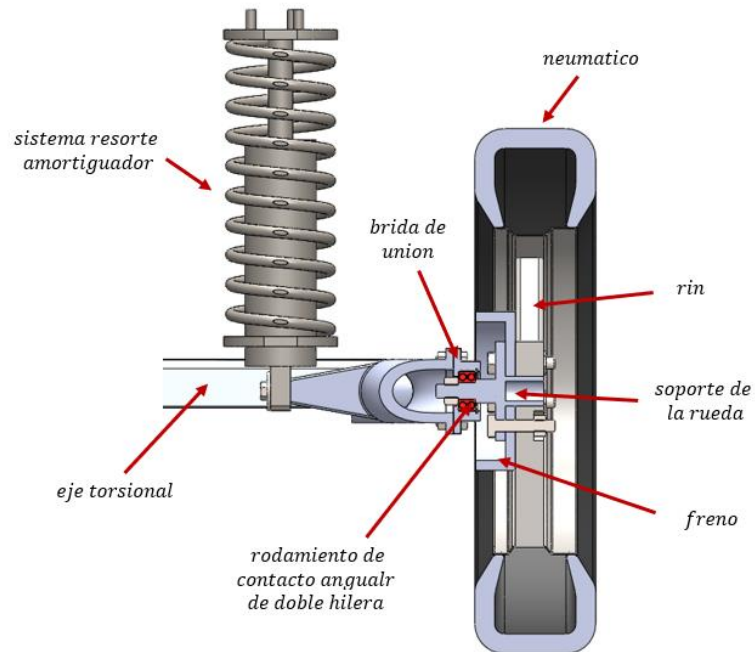
Por ende, el diseño del perfil se basó en un modelo iterativo, variando los parámetros principales del área trasversal, de tal forma que el momento polar de inercia en el centro cortante (J_{cc}) se aproximara lo más posible al obtenido para el requerimiento de ángulo máximo de torsión.

Finalmente, el acople con la rueda se configuró a través de un sistema de bridas para poder ensamblar la rueda y demás elementos de unión, tales como el rodamiento de contacto angular de doble hilera, el soporte de la rueda y los elementos de sujeción entre ellos.

Cabe notar que el rodamiento usado en el sistema de suspensión trasero es el mismo que se acopla en el sistema de suspensión McPherson, es decir, un rodamiento de contacto angular de doble hilera SKF 3203 A-2RS1TN9/MT33.

En la siguiente figura se detallan los elementos mencionados:

Figura 120. Vista en corte del sistema de suspensión eje torsional



Fuente: Autores

Definida la geometría y el diseño en detalle del sistema de suspensión trasero, se hace necesario seleccionar los materiales de cada componente estructural, tal como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 19. Materiales seleccionados.

Elemento	Material	Selección
Conjunto eje torsional, brazo longitudinal y soporte sistema resorte amortiguador	Acero estructural A36	<i>acero con fines de fabricacion general y estructural. Tiene alta resistencia, homogeneidad en la calidad, permite ser soldado, posee una alta ductilidad y es resistente a la corrosion.</i>
Bridas de union		<i>Se puede encuntrar en una amplia gama de configuraciones geometricas, que facilitan la fabricacion de estructuras mas complejas. Asi mismo, es de facil mecanizacion.</i>

<i>Soporte de la rueda</i>	<i>Acero 4340 estirado en frio</i>	<i>Uso en la industria automotriz para la fabricación de piezas que requieren alta tenacidad y dureza, tales como: ejes, engranajes, piezas forjadas, pasadores, etc.</i>
-----------------------------------	------------------------------------	---

Fuente: Autores

Tabla 20. Propiedades mecánicas de los materiales seleccionados.

<i>Material</i>	<i>Esfuerzo ultimo o máxima resistencia (s_u)</i>	<i>Esfuerzo de fluencia a la tracción (s_y)</i>
<i>Acero estructural A36</i>	67 [ksi] 460 [MPa]	36 [ksi] 250 [MPa]
<i>Acero 4340 estirado en frio</i>	122 [ksi] 841 [MPa]	105 [ksi] 723 [MPa]

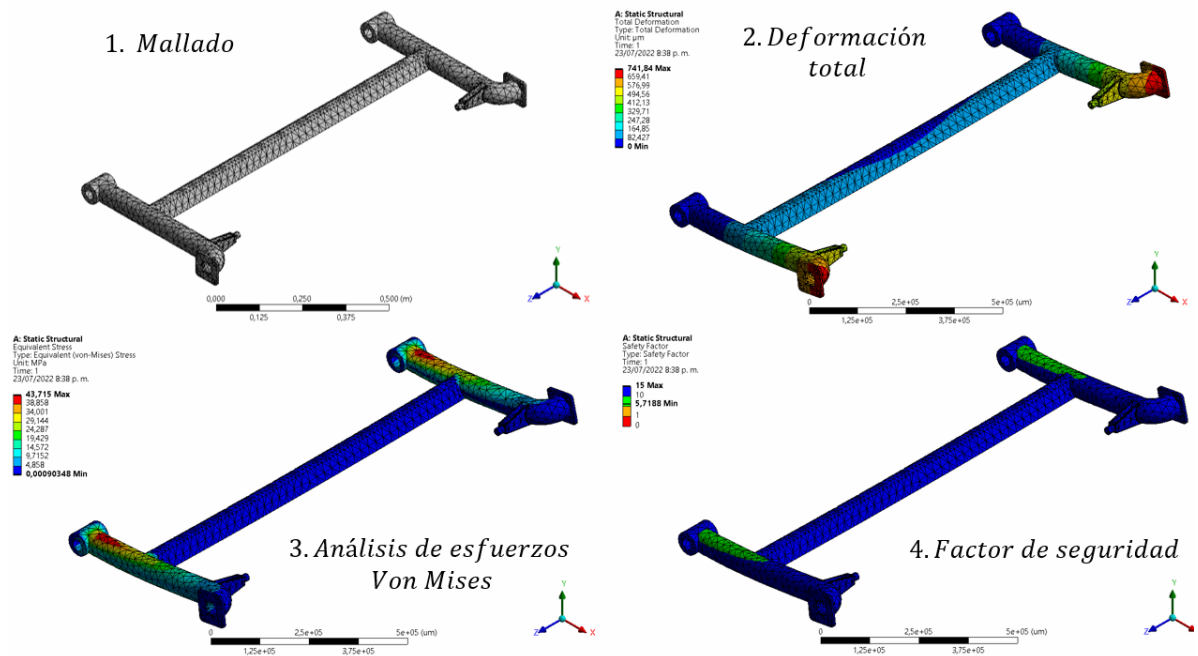
Fuente: Autores

Los estudios, que se realizarán para el análisis de elementos finitos del sistema de suspensión eje torsional, incluirán el apartado de análisis de deformaciones totales, análisis de esfuerzos equivalentes según criterio de Von Mises y factor de seguridad.

En primera instancia, se realizará un análisis de cuatro casos de deformación del sistema, donde se busca estudiar el comportamiento del sistema de suspensión cuando se aplica a las ruedas una fuerza de excitación en sentidos iguales u opuestos. Así mismo, se busca analizar la deflexión de la rueda y el impacto de la fuerza reactiva del sistema resorte amortiguador en todo el conjunto del brazo soporte y el brazo longitudinal al cual está conectado.

Dicho esto, se presentan los resultados del caso más crítico, el cual corresponde a la situación de excitación de las ruedas en el mismo sentido sin deformación del sistema resorte-amortiguador, tal como se muestra en la imagen.

Figura 121. Análisis estático estructural del sistema de suspensión eje torsional para el caso 1.



Fuente: Autores

Los resultados en detalle de los casos estudiados se pueden encontrar en el **Anexo R**. Resultados del análisis estructural por medio del método de elementos finitos para el sistema de suspensión trasero, donde se presenta una malla común que será usada para todos los análisis.

Posteriormente, se realizará un estudio de sensibilidad de malla para verificar la independencia de los resultados obtenidos de los análisis realizados y determinar si corresponden a una solución confiable. Para generar el estudio de sensibilidad

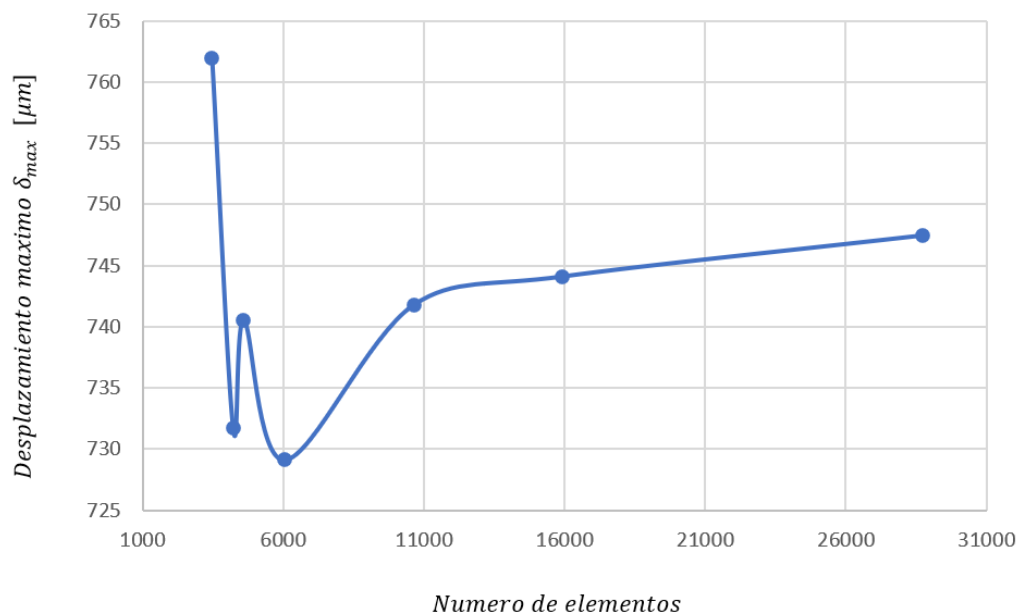
de malla se grafican los resultados de deformación total variando la resolución de la malla, tal como se muestra a continuación:

Tabla 21. Análisis sensibilidad eje torsional.

<i>Eje torsional</i>					
<i>Malla</i>	<i>Nodos</i>	<i>Elementos</i>	<i>Desplazamientos maximos (δ_{max}) [μm]</i>	<i>Esfuerzo maximo (σ_{max}) [MPa]</i>	<i>Factor Seg. minimo (N_{min})</i>
1	7093	3466	761,91	41,2	6,067
2	8957	4215	731,7	43,56	5,739
3	9722	4596	740,53	46,2	5,41
4	12556	6054	729,11	43,182	5,789
5	21798	10639	741,8	43,71	5,7188
6	30698	15933	744,12	44,32	5,64
7	54850	28721	747,47	44,047	5,676

Fuente: Autores

Figura 122. Sensibilidad de la malla para el eje torsional.



Fuente: Autores

En la anterior grafica es posible observar que, para mallas con bajo refinamiento, se presenta una fluctuación de los valores de desplazamiento total, mientras que mallas más refinadas comienzan a presentar un comportamiento de estabilización de los elementos desplazados. De esta forma, se puede afirmar que resulta apropiado usar mallas con un mayor refinamiento para obtener resultados más confiables, por lo que se decide usar una malla estándar con refinamiento 5.

De esta forma, en la siguiente tabla se presenta los resultados críticos de los análisis mencionados para el eje torsional en su caso más crítico.

Tabla 22. Resultados Críticos análisis elementos finitos.

	<i>Desplazamientos maximos (δ_{max})</i>	<i>Esfuerzo maximos (σ_{max})</i>	<i>Factor Seg. minimo (N_{min})</i>
<i>eje torsional</i>	741,84 [μm]	43,715 [MPa]	5,719

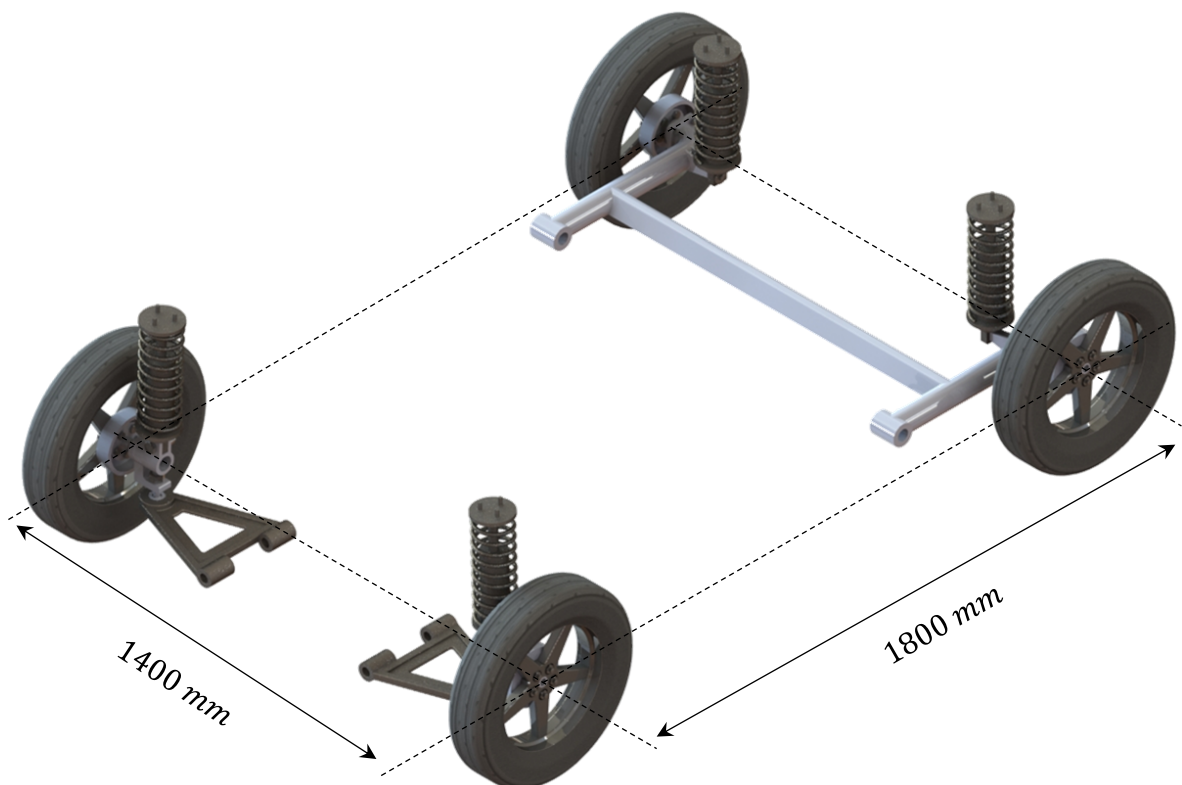
Fuente: Autores

Los anteriores valores validan el diseño propuesto para el sistema de suspensión eje torsional, pues el esfuerzo máximo presentado en el elemento se encuentra muy lejos del esfuerzo de fluencia del acero estructural A36, que se comprueba en el factor de seguridad obtenido, $N = 5,7$. Así mismo, la deformación máxima, aunque se encuentre por el orden de $\delta = 742 [\mu m]$, no afecta la condición de funcionamiento de este.

9. PRESENTACIÓN FINAL DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN PARA UN VEHÍCULO ELÉCTRICO DE CUATRO RUEDAS CON TRACCIÓN DELANTERA

A continuación, se presenta el modelo final del sistema de suspensión propuesto, respetando la distancia entre eje y distancia entre ruedas.

Figura 123. Sistema de suspensión frontal y trasero.



Fuente: Autores

Los planos de ensamble y fabricación de cada componente de los sistemas de suspensión diseñados se encuentran en el **Anexo S**. Planos del conjunto del sistema de suspensión McPherson – Eje torsional, donde se podrán apreciar sus dimensiones, materiales y demás especificaciones técnicas.

10. CONCLUSIONES

- El dimensionamiento de los miembros del sistema McPherson, realizado a partir del análisis y síntesis del mecanismo, demuestra que el ubicar el CB lo más alejado posible, de la superficie de contacto, provoca que las fuerzas centrífugas transmitidas al CG del vehículo se disminuyan, garantizando así una tasa de cambio positiva del ángulo Camber.
- La configuración geométrica del mecanismo, para el sistema McPherson, permite observar que la variación de la longitud del eje de la rueda no afecta de forma significativa a la ganancia del Camber, lo que permite una variación del ángulo en el rango recomendado de $\pm 4^\circ$ y proporciona así una mayor vida útil, con un desgaste uniforme, de la superficie del neumático.
- En el estudio cinemático del sistema McPherson se evidencia que la relación de suspensión se mantuvo en valores muy cercanos a 1 en el intervalo del tiempo de análisis, lo que implica que la rueda cambió su posición vertical con la misma proporción con la que el resorte se deformó, siendo esto deseado para mejorar la conducción y comodidad del pasajero.
- La evidencia presentada en el apartado de los resultados del modelo dinámico del sistema de suspensión frontal demuestra que, considerar los pesos y aceleraciones de los miembros del mecanismo articulado, no representan mayor variación en los valores de las fuerzas reactivas calculadas, permitiendo así realizar un análisis únicamente estático en el que se considera a los elementos del mecanismo McPherson como miembros de dos fuerzas.

- Los resultados de la simulación vibratoria del sistema McPherson, en el dominio del tiempo, validaron las propiedades de rigidez y amortiguamiento del cilindro-amortiguador, para cada una de las condiciones de excitación propuestas, presentándose un sobre-pico máximo de alrededor del 27.5% respecto de la señal de entrada para las variables concernientes a la posición lineal de la carrocería y la de ambas ruedas, demostrando así la capacidad de respuesta del sistema de suspensión ante los cambios súbitos de la posición del terreno.
- La respuesta del ángulo de balanceo en el dominio del tiempo, para el sistema McPherson, se mantuvo nula para aquellas condiciones del terreno que excitaban de forma simétrica la posición de ambas ruedas, mientras que, para aquellas en las que sucedía lo contrario, como el caso de la condición de excitación mediante dos funciones de pulso con amplitudes de signo contrario, el ángulo de balanceo tendía a oscilar con un sobre-pico del 40% respecto de su valor de estabilización.
- Los resultados de la simulación vibratoria del sistema McPherson, en el dominio de la frecuencia, validan la estabilidad de la suspensión a través del signo positivo de los márgenes de fase (MF) y de ganancia (MG) visualizados desde el diagrama de Bode para cada una de las señales de salida con respecto de la señal de entrada, que, en este caso, corresponde a la excitación del neumático.
- El diseño propuesto para los componentes del sistema McPherson fue validado a través del análisis estático estructural por medio del método de elementos finitos, debido a que los factores de seguridad tuvieron valores mayores a 2, demostrando que las piezas resisten, en gran medida, las fuerzas reactivas causadas por el peso del vehículo y las fuerzas generadas

durante los ciclos de conducción propuestos, dando así un sistema estructuralmente estable bajo las condiciones iniciales de diseño.

- El dimensionamiento del sistema de suspensión trasero permitió establecer que el posicionamiento del eje a torsión está íntimamente relacionado con el máximo valor del ángulo Camber, pues, para la deflexión máxima de $v = 100 [mm]$, el variar la posición del eje, acercándolo cada vez más hacia la rueda, ocasiona que aumente el Camber máximo y, por tanto, se disminuya la vida útil, con un desgaste dispar, de la superficie del neumático.
- El análisis y cálculo de las fuerzas reactivas del pivote P del sistema de suspensión trasero, mediante un modelo estático, evidenció que la fuerza vertical P_z y el momento flector M_t disminuyen con un comportamiento lineal a medida que aumenta la deflexión de la rueda, alcanzando ambos sus valores máximos para cuando $v = 0 [mm]$, siendo coherente con esta situación, que es cuando el resorte-amortiguador no ha empezado comprimirse y, por ende, a generar una fuerza que se contraponga a la ocasionada por la carretera.
- El torque reactivo T_x presente en el apoyo P , a diferencia de las demás reacciones, registró un aumento en su magnitud a medida que se incrementó la deflexión de la rueda. Lo anterior debido a que, por limitaciones de espacio, el resorte amortiguador se ubicó a una distancia negativa en la que la fuerza aplicada realiza un torque en la misma dirección que el torque de la carretera; amplificándose así el torque neto del brazo longitudinal, pero sin llegar a hacerlo crítico por este tipo de carga.
- Las dimensiones principales de la sección transversal del eje a torsión fueron definidas mediante un proceso iterativo, en el que se buscó que la sección

transversal se deformara tan solo 2° cuando se aplicara el momento dinámico máximo para la condición del terreno definida como: excitación mediante dos funciones de pulso con amplitudes de signo contrario. A partir de esta especificación de diseño, se definió que la constante de rigidez del eje a torsión debe tener un valor de $k_r = 41912 \left[\frac{N \cdot m}{rad} \right]$ y una inercia respecto al centro de corte de $J_{cc} = 602022 [mm^4]$.

- La respuesta del ángulo de balanceo, en el dominio del tiempo, para el sistema de eje a torsión, resultó en la única señal de salida que presentó cambios significativos respecto de los resultados obtenidos para el sistema McPherson, ocasionado principalmente por la adición, dentro del modelo analítico, del momento reactivo $M_t = -k_r \cdot \varphi$ generado por la barra a torsión. Tal adición conllevó a la disminución de la amplitud de la función del ángulo de balanceo, pero en el aumento de la oscilación del mismo. En otras palabras: se sacrificó el confort del pasajero en favor de la estabilidad angular de la carrocería.
- En el análisis estructural estático del sistema de eje a torsión, se plantearon cuatro casos distintos de aplicación de la fuerza sobre el neumático; estos casos se centraron en verificar el comportamiento del sistema en las situaciones críticas en las que actuaba o no la fuerza del cilindro amortiguador, mostrando que los esfuerzos máximos son independientes del sentido de aplicación de la fuerza de excitación, pero varían significativamente respecto de si se ha comprimido o no el resorte-amortiguador.
- El análisis estático estructural realizado, por medio del método de elementos finitos, aplicado al sistema de suspensión trasero, permite observar las deformaciones totales y los esfuerzos resultantes del conjunto de eje a

torsión, evidenciando que los puntos críticos se encuentran a lo largo del brazo longitudinal y en la zona de los soportes de los resortes-amortiguadores. No obstante, los esfuerzos generados en dichas zonas no sobrepasan a los esfuerzos admisibles del material, siendo esto validado a través de los factores de seguridad que resultaron mayores a 2.

- El estudio de sensibilidad de malla, aplicado a los tres componentes principales del sistema de suspensión McPherson y al eje torsional, arrojan un comportamiento de mayor variación de resultados para mallas de menor refinamiento, por lo que se opta por usar mallas con mayor resolución, debido a que estas permiten obtener elementos de malla de mayor calidad y, por tanto, resultados de deformación y esfuerzos más confiables.

BIBLIOGRAFÍA

APARICIO IZQUIERDO, Francisco; VERA ALVAREZ, Carlos y DIAZ LOPEZ, Vicente. Teoría de los vehículos automóviles. Madrid: Dextra, 2001. p. 289.

ARÉVALO, Christian; MEDINA, Ayrton y VALLADOLID, Juan. Estudio cinemático y dinámico del sistema de suspensión de un monoplaza de competencia eléctrico Formula Student. *INGENIUS* [En línea]. Cuenca (Ecuador): Universidad Politécnica Salesiana, 19 de Junio de 2018. No. 20. 96-107. [Consultado 18 de Octubre de 2021] ISSN 1390-860X. DOI: 10.17163/ings.n20.2018.09.

ASME INTERNATIONAL MECHANICAL CONGRESS AND EXPOSITION. (2006, Noviembre, 5-10, Noviembre: Chicago, Illinois, Estados Unidos). Design of automotive torsion beam suspension using lumped-compliance linkage model. Chicago: ASME, 2006, 10 p.

BORJA, Felipe. Modelo directo no paramétrico de amortiguador magnético-reológico basado en redes neuronales. Proyecto final de carrera ingeniería técnica industrial: Mecánica. Madrid: Universidad Carlos III de Madrid. Escuela Politécnica Superior. 2012. p. 1-47.

CHEN, Kaiyu y BEALE, David G. Base Dynamic Parameter Estimation of a MacPherson Suspension Mechanism. *Vehicle System Dynamics* [En línea] Auburn (USA): Auburn University, 2003, vol. 39 No. 3 [Consultado 5 de Julio 2021]. ISSN 1744-5159. DOI: 10.1076/vesd.39.3.227.14151

DEHBARI ,S. y MARZBANRAD, J. Kinematic and Dynamic Analysis for a New MacPherson Strut Suspension System. *Mechanics and Mechanical Engineering* [En línea]. Tehran (Iran): Vehicle Dynamical Systems Research Laboratory, School of

Automotive Engineering Iran University of Science and Technology, 10 de Septiembre de 2018, vol. 22, No.4. [Consultado 24 de Julio 2021]. ISSN 1223–1238. DOI: 10.2478/mme-2018-0094

DIXON, John. Suspension geometry and computation. Hoboken: Wiley, 2009. 405 p. ISBN 978-04-705-1021-6.

DONG, Xiaoming. Handbook of vehicle suspension control systems. Chongqing: Chongqing University. 393 p.

FERNÁNDEZ, Alfonso. Modelos de un amortiguador magneto-reológico. Proyecto final de carrera ingeniería técnica industrial: Mecánica. Madrid: Universidad Carlos III de Madrid. Escuela Politécnica Superior. 2012. p. 8-28.

FICHERA, Gabrielle. PETRONE, Francesco y LACAGNINA, Michelle. Modelling of Torsion Beam Rear Suspension by Using Multibody Method. En: *Multibody System Dynamics*. 2004, vol. 12, pp. 303-316.

GAVILANEZ, Camilo. Análisis e importancia de sistemas de suspensión de vehículos livianos mediante modelo digital. Proyecto de investigación licenciado en electromecánica automotriz. Quito: Universidad San Francisco de Quito USFQ. Colegio de ciencias e ingenierías. 2016. p. 15-38.

GUIGGIANI, Massimo. The science of vehicle dynamics. Berlín: Springer, 2014. p. 67-82. ISBN 978-94-017-8532-7.

GÜLER, Duygu. Dynamic analysis of double wishbone suspension. Tesis de grado para optar a Master en ciencias aplicadas a la ingeniería mecánica. Izmir: School of Engineering and Sciences of İzmir Institute of Technology. 2006, 54p.

HAPIAN-SMITH, Julian. An introduction to modern vehicle design. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2002. p.277-330. ISBN 978-07-506-5044-1.

HUREL, Jorge. *et al.* Modelado físico y matemático del sistema de suspensión de un cuarto de vehículo. En: 15thLACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education, and Technology. USA, 2017. [En línea]. Disponible en: http://www.laccei.org/LACCEI2017-BocaRaton/full_papers/FP295.pdf

HUREL, Jorge. MANDOW, Anthony y GARCIA CERESO, Alfonso. Kinematic and dynamic analysis of the McPherson suspension with a planar quarter-car model. En: *Vehicle System Dynamics* [en línea]. 12 Junio 2013, vol. 51, pp.1422-1437. [Consultado 30 de Julio 2021]. DOI: 10.1080/00423114.2013.804937

KANG, Juseok. Kinematic analysis of torsion beam rear suspension. En: *Trans. KSAE*. 2004, vol.12, nro. 5, pp.146–153.

KONG, Y. S., et al. Side force analysis of suspension strut under various load cases. *Jurnal Teknologi* [En línea]. Selangor (Malasia): Department of Mechanical and Materials Engineering, Faculty of Engineering & Built Environment, Universiti Kebangsaan Malaysia, 25 de Abril de 2016, vol 78, No. 6-10. 85-90. [Consultado 14 de Noviembre de 2021]. ISSN 2180-3722. Disponible en: www.jurnalteknologi.utm.my

LACCEI INTERNATIONAL MULTI-CONFERENCE FOR ENGINEERING, EDUCATION, AND TECHNOLOGY. (15: 2017, Julio, 19-21, Julio: Boca Raton, Florida, Estados Unidos). Modelado Físico y Matemático del Sistema de Suspensión de un Cuarto de Vehículo. Guayaquil: Escuela Superior Politécnica del Litoral, 2017, 8 p.

LAJQI, Shpetim. Suspension and steering system development of a four wheel drive and four wheel steered terrain Vehicle. Tesis doctoral. Maribor: Universidad de Maribor. Facultad de Ingeniería Mecánica. 2013. 202p.

LEE, Dongchan y YANG, Chulho. An analytical approach for design and performance evaluation of torsion beam rear suspension. En: *ELSEVIER* [en línea]. Enero 2013, vol. 63, pp.98–106. [Consultado 26 de Julio 2021]. DOI: 10.1016/j.finel.2012.09.002

MAČUŽIĆ, Slavica; LUKIĆ, Jovanka y RUŽIĆ, Dragan. Three-Dimensional Simulation of the McPherson Suspension System. *Hrčak* [En línea]. 2018. 1286-1290. [Consultado 29 de Junio de 2021]. ISSN 1848-6339. DOI: 10.17559/TV-20161215093920

MESA FERNANDEZ, Daniel. Simulación virtual de una suspensión McPherson en entorno VRML. Trabajo de grado Ingeniería técnica industrial mecánica. Madrid: Escuela politécnica superior de la universidad Carlos III de Madrid. Área de Ingeniería Mecánica, 2011. 132p.

PENG, Zhang, *et al.* Structural Parameter Optimization Design of Torsion Beam Semi-Independent Suspension Based on Multi-Island Genetic Algorithm. En: *Scientific.net* [en línea]. 18 Julio 2019, vol. 893, pp.109-115. [Consultado 22 de Julio 2021]. Disponible en: <https://www.scientific.net/AMM.893.109>

VEGA, William, *et al.* Revisión de las Características de Modelado y Optimización para el Diseño del Sistema de Suspensión Macpherson. *SciELO Analytics*. [En línea]. Quito (Ecuador): Universidad Particular Internacional SEK, Fac. de Arquitectura e Ingenierías, Diciembre de 2018, vol. 29 [Consultado 3 de Agosto de 2021]. ISSN 221-234. DOI: 10.4067/s0718-07642018000600221

WEST, Robert L.; FERRIS, John B. y MERKLE, Matthew A. An Approach to Using Finite Element Models to Predict Suspension Member Loads in a Formula SAE Vehicle. Tesis de grado para optar a Master en ciencias aplicadas a la ingeniería mecánica. Blacksburg: Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University. 2009, 153p.

Anexo A. Lista de variables.

<i>Símbolo</i>	<i>Unidad</i>	<i>Descripción</i>
a	$[m/s^2]$	Aceleración del vehículo
a_1	$[mm/s^2]$	Aceleración total en el CG del brazo de control
a_{1x}	$[mm/s^2]$	Aceleración en el CG del brazo de control en el eje x
a_{1y}	$[mm/s^2]$	Aceleración en el CG del brazo de control en el eje y
a_2	$[mm/s^2]$	Aceleración total en el CG de la mangueta
a_{2x}	$[mm/s^2]$	Aceleración en el CG de la mangueta en el eje x
a_{2y}	$[mm/s^2]$	Aceleración en el CG de la mangueta en el eje y
a_{cent}	$[m/s^2]$	Aceleración centrífuga
a_{neu}	$[mm]$	Ancho de la rueda
a_L	$[mm/s^2]$	Aceleración instantánea del resorte-amortiguador
$arg()$	$[^\circ]$	Argumento del número complejo
A	$[mm]$	Posición del eje a torsión
\vec{A}	$[N \nabla^\circ]$	Vector reacción en el apoyo A

A_L	$[m^2]$	Área libre del vehículo
A_S	$[mm^2]$	Área de la sección transversal del eje a torsión
A_{sd}	$[m^2]$	Área cubierta por sistema de suspensión delantero
A_{sr}	$[m^2]$	Área cubierta por sistema de suspensión trasero
A_T	$[m^2]$	Área total ocupada por vehículo
A_x	$[N]$	Reacción del apoyo A en el eje x
A_y	$[N]$	Reacción del apoyo A en el eje y
b	$[mm]$	Distancia del eje frontal al CG del vehículo
b_1	$[m]$	Posición del punto de aplicación de las fuerzas del resorte amortiguador 1 respecto del centro de la carrocería
b_2	$[m]$	Posición del punto de aplicación de las fuerzas del resorte amortiguador 2 respecto del centro de la carrocería
\vec{B}	$[N \text{ } \angle^\circ]$	Vector reacción en el apoyo B
B_f	$[N]$	Fuerza de fricción en el eje frontal
B_r	$[N]$	Fuerza de fricción en el eje trasero
B_x	$[N]$	Reacción del apoyo B en el eje x

B_y	[N]	Reacción del apoyo B en el eje y
c	[mm]	Distancia del eje trasero al CG del vehículo
c_{cf}	[Ns/m]	Coeficiente de amortiguamiento crítico para la suspensión frontal
c_d	[Ns/m]	Coeficiente de amortiguamiento
c_{df}	[Ns/m]	Coeficiente de amortiguamiento para el sistema de suspensión frontal
c_{dr}	[Ns/m]	Coeficiente de amortiguamiento para el sistema de suspensión trasero
C	[mm]	Longitud del eje a torsión
\vec{C}	[N ∇ °]	Vector reacción en el apoyo C
CB	–	Centro de balanceo
CG	–	Centro de gravedad
$C_{resorte}$	–	Índice del resorte
C_x	[N]	Reacción del apoyo C en el eje x
C_y	[N]	Reacción del apoyo C en el eje y
d	[mm]	Diámetro de hilo
d_{rin}	[mm]	Diámetro del rin de la rueda

D	$[mm]$	Diámetro medio de la espira
\vec{D}	$[N \text{ } \angle^\circ]$	Vector de la dirección
D_{neu}	$[mm]$	Diámetro del neumático
D_p	$[m]$	Distancia de parada
e	$[mm]$	Excentricidad del centro de corte respecto al punto O.
e_{max}	$[\%]$	Peralte máximo
E	$[GPa]$	Módulo de elasticidad
E_{ANS}	$[mm]$	Espacio longitudinal designado para el sistema acople-neumático-suspensión
F_{acel}	$[N]$	Fuerza de aceleración
F_{cent}	$[N]$	Fuerza centrífuga
F_d	$[N]$	Fuerza del amortiguador
F_{fren}	$[N]$	Fuerza de frenado
F_{Li}	$[N]$	Fuerza lateral en las ruedas internas a la curva
F_{Ld}	$[N]$	Fuerza lateral en las ruedas externas a la curva
F_s	$[N]$	Fuerza del resorte

F_{sd}	[N]	Fuerza del conjunto resorte-amortiguador
F_w	[N]	Fuerza de excitación
g	[m/s ²]	Gravedad
G	[GPa]	Módulo de rigidez
$G(s)$	–	Función de transferencia
$G(j\omega)$	–	Función de transferencia evaluada cuando $s = j\omega$
h	[mm]	Altura del vehículo
h_{CG}	[mm]	Altura del CG del vehículo al suelo
h_e	[mm]	Distancia desde el pivote hasta el centro cortante del eje a torsión
h_p	[mm]	Distancia del pivote P al suelo
h_w	[mm]	Distancia del eje de la rueda al suelo
I_{xf}	[kg · m ²]	Inercia alrededor del eje x de la carrocería frontal
I_{xr}	[kg · m ²]	Inercia alrededor del eje x de la carrocería trasera
I_y	[mm ⁴]	Segundo momento de área de la sección transversal del eje a torsión
j_s	–	Numero de pares superiores

j_i	–	Numero de pares inferiores
J_1	$[kg \cdot m^2]$	Inercia del brazo de control en el CG
J_2	$[kg \cdot m^2]$	Inercia de la mangueta en el CG
J_{cc}	$[mm^4]$	Momento polar de inercia en el centro cortante del eje a torsión
J_{CG}	$[mm^4]$	Momento polar de inercia en el CG del eje a torsión
$k_{diseño}$	$[N/m]$	Constante de rigidez de diseño preliminar del resorte para la suspensión frontal
k_r	$[N \cdot m/rad]$	Constante de rigidez torsional del eje a torsion
k_s	$[N/m]$	Constante de rigidez
k_{sf}	$[N/m]$	Constante de rigidez del resorte de la suspensión frontal
k_{sr}	$[N/m]$	Constante de rigidez del resorte de la suspensión trasera
k_t	$[N/m]$	Constante de rigidez del neumático
K_L	$[mm/rad]$	Derivada de la longitud del resorte-amortiguador respecto a θ_1
K_{yp}	$[mm/rad]$	Derivada de la posición vertical del punto de contacto neumático-superficie respecto a θ_1

l	$[mm]$	Longitud de la sección circular del perfil del eje a torsión
L	$[mm]$	Distancia entre ejes (Wheelbase)
	$[mm]$	Longitud del brazo longitudinal
\vec{L}	$[mm \ \&^\circ]$	Vector de posición del sistema resorte-amortiguador
L_{cierre}	$[mm]$	Longitud de cierre del resorte
L_f	$[mm]$	Longitud libre del resorte
$L_{resorte}$	$[mm]$	Longitud instantánea del resorte
L_t	$[mm]$	Longitud del eje a torsión
m	$[kg]$	Masa total del vehículo
m_1	$[kg]$	Masa no suspendida de la rueda 1
m_2	$[kg]$	Masa no suspendida de la rueda 2
m_b	$[kg]$	Masa del brazo de control para el sistema de suspensión frontal
m_f	$[kg]$	Masa de la carrocería frontal del vehículo
m_m	$[kg]$	Masa de la mangueta para el sistema de suspensión frontal
m_q	$[kg]$	Masa de un cuarto de vehículo en el tren delantero

m_r	[kg]	Masa de la parte trasera del vehículo
M	[GDL]	Movilidad del mecanismo
MF	[$^\circ$]	Margen de fase
MG	[dB]	Margen de ganancia
M_t	[$N\ m$]	Momento torsional en el eje a torsión
n	[<i>cantidad</i>]	Numero de eslabones del mecanismo articulado
n_{plazas}	[<i>cantidad</i>]	Número de plazas del vehículo
N	–	Factor de seguridad
N_a	[<i>cantidad</i>]	Número de espiras activas
N_d	[N]	Fuerza normal en las ruedas externas del vehículo respecto a la curva de giro
N_f	[N]	Reacción normal en las ruedas del tren frontal debido al peso del vehículo
N_i	[N]	Fuerza normal en las ruedas internas del vehículo respecto a la curva de giro
N_{min}	–	Factor de seguridad mínimo
N_r	[N]	Reacción normal en las ruedas del tren trasero debido al peso del vehículo

N_s	—	Factor de seguridad del resorte
N_t	[cantidad]	Número total de espiras
o	—	Punto de intersección de las tangentes a la sección circular del perfil del eje a torsión
p_{neu}	[%]	Perfil del neumático
P	[HP]	Potencia del motor eléctrico
\overrightarrow{PW}	[mm; mm; mm]	Vector del punto de apoyo al eje de la rueda de la suspensión trasera
\overrightarrow{PQ}	[mm; mm; mm]	Vector del punto de apoyo al centro del eje a torsión de la suspensión trasera
\overrightarrow{PS}	[mm; mm; mm]	Vector del punto de apoyo al sistema resorte-amortiguador de la suspensión trasera
P_x	[N]	Reacción en el eje x en el pivote del brazo longitudinal
P_z	[N]	Reacción en el eje z en el pivote del brazo longitudinal
q	[N/mm]	Flujo cortante a lo largo de la sección transversal del eje a torsión
Q_y	[mm ³]	Primer momento de área del perfil del eje a torsión
r	[mm]	Radio de la rueda
	—	Ratio del ángulo Roll

\vec{r}	$[mm; mm]$	Vector de posición del punto de contacto de la rueda con el terreno al centro de esta
\vec{r}_1	$[mm; mm]$	Vector de posición del brazo de control
\vec{r}_2	$[mm; mm]$	Vector de posición del punto de conexión mangueta-brazo de control al eje de la rueda
\vec{r}_3	$[mm; mm]$	Vector de posición de la dirección respecto al eje de la rueda
\vec{r}_4	$[mm; mm]$	Distancia vertical del apoyo de la dirección respecto al apoyo del brazo de control
\vec{r}_5	$[mm; mm]$	Distancia vertical de la rótula del amortiguador-resorte respecto al apoyo de la dirección
\vec{r}_6	$[mm; mm]$	Distancia horizontal de la rótula del amortiguador-resorte respecto al apoyo de la dirección
\vec{r}_7	$[mm; mm]$	Vector imaginario desde el apoyo de la dirección hasta la rótula del resorte amortiguador
\vec{r}_8	$[mm; mm]$	Vector de posición del eje de la rueda
\vec{r}_a	$[mm; mm]$	Vector de posición de la mangueta ($r_2 + r_3$)
\vec{r}_b	$[mm; mm]$	Vector auxiliar para posición del punto de contacto neumático-superficie
\vec{r}_c	$[mm; mm]$	Vector auxiliar para posición del punto de contacto neumático-superficie

r_{CG1x}	[mm]	Posición del CG del brazo de control en el eje x respecto al punto A de la suspensión frontal
r_{CG1y}	[mm]	Posición del CG del brazo de control en el eje y respecto al punto A de la suspensión frontal
r_{CG2x}	[mm]	Posición del CG de la mangueta en el eje x respecto al punto A de la suspensión frontal
r_{CG2y}	[mm]	Posición del CG de la mangueta en el eje y respecto al punto A de la suspensión frontal
R	[mm]	Radio de la sección circular del perfil del eje a torsión
\vec{R}_B	[mm; mm]	Vector de posición desde el CG de la mangueta al apoyo B para la suspensión frontal
\vec{R}_C	[mm; mm]	Vector de posición desde el CG de la mangueta al apoyo C para la suspensión frontal
R_{curva}	[m]	Radio mínimo para el ciclo de conducción en curva
R_s	—	Relación de suspensión
S_u	[MPa ó ksi]	Esfuerzo ultimo o máxima resistencia
S_{us}	[MPa ó ksi]	Limite elástico a la torsión del material del resorte
S_{ut}	[MPa ó ksi]	Resistencia a la tensión máxima del material del resorte
S_y	[MPa ó ksi]	Esfuerzo de fluencia a la tracción

t	[s]	Tiempo
	[mm]	Espesor
t_s	[mm]	Espesor de la sección transversal del eje a torsión
T	[mm]	Distancia entre ruedas (Track)
T_x	[N m]	Torque reactivo en el pivote P alrededor del eje x
u	[mm]	Longitud del centro cortante al CG del eje a torsión
$u(t)$	–	Función de entrada
$\overrightarrow{u_{PQ}}$	–	Vector unitario del eje de rotación PQ
v	[mm]	Deflexión de la rueda
v_{1x}	[mm/s]	Velocidad instantánea en el CG del brazo de control de la suspensión frontal en el eje x
v_{1y}	[mm/s]	Velocidad instantánea en el CG del brazo de control de la suspensión frontal en el eje y
v_{2x}	[mm/s]	Velocidad instantánea en el CG de la mangueta de la suspensión frontal en el eje x
v_{2y}	[mm/s]	Velocidad instantánea en el CG de la mangueta de la suspensión frontal en el eje y
v_L	[mm/s]	Velocidad instantánea del resorte-amortiguador

v_{max}	$[m/s \text{ ó } km/h]$	Velocidad máxima del vehículo
v_s	$[mm/s]$	Velocidad instantánea del resorte-amortiguador del sistema de suspensión trasero
v_w	$[mm/s]$	Velocidad instantánea de las ruedas del sistema de suspensión trasero
VM	–	Ventaja mecánica
V_x	$[N]$	Fuerza de corte resultante que actúa sobre el centro de corte del eje a torsión
W	$[N]$	Peso del vehículo
W_1	$[N]$	Peso del brazo de control
W_2	$[N]$	Peso de la mangueta de la suspensión frontal
x	$[m]$	Posición de la carrocería
x_1	$[m]$	Posición de la masa no suspendida 1
x_2	$[m]$	Posición de la masa no suspendida 2
\dot{x}	$[m/s]$	Velocidad de oscilación de la carrocería
\dot{x}_1	$[m/s]$	Velocidad de oscilación de la masa no suspendida 1
\dot{x}_2	$[m/s]$	Velocidad de oscilación de la masa no suspendida 2
\ddot{x}	$[m/s^2]$	Aceleración de oscilación de la carrocería

\ddot{x}_1	$[m/s^2]$	Aceleración de oscilación de la masa no suspendida 1
\ddot{x}_2	$[m/s^2]$	Aceleración de oscilación de la masa no suspendida 2
(x, y, z)	$[mm; mm; mm]$	Ejes coordenados
(x_s, y_s)	$[mm; mm]$	Posición del sistema resorte-amortiguador de la suspensión trasera
y_1	$[m]$	Excitación del terreno en la llanta 1
y_2	$[m]$	Excitación del terreno en la llanta 2
y_{CG}	$[mm]$	Distancia del CG desde el punto O de la sección transversal del eje a torsión
\vec{y}_p	$[mm; mm]$	Vector de posición del punto de contacto neumático-superficie respecto al eje coordenado del mecanismo articulado de la suspensión frontal
$y_s(t)$	—	Función de salida
y_w	$[mm]$	Longitud del eje soporte de las ruedas traseras
\dot{Z}_s	$[mm/s]$	Velocidad instantánea del resorte-amortiguador del sistema de suspensión trasero
α	$[^\circ]$	Ángulo Camber
α_ϕ	—	Razón de cambio del ángulo Camber respecto al ángulo Roll
β	$[^\circ]$	Ángulo Toe

β_1	[°]	Ángulo máximo de inclinación para estabilidad del vehículo en subida
β_2	[°]	Ángulo máximo de inclinación para estabilidad del vehículo en bajada
β_Φ	–	Razón de cambio del ángulo Toe respecto al ángulo Roll
δ_{max}	[μm]	Desplazamientos totales máximos en los elementos estructurales
Δ_{max}	[mm]	Deformación máxima del sistema resorte-amortiguador
$\overrightarrow{\Delta\omega_{PQ}}$	[rad]	Vector de rotación del sistema de suspensión trasero respecto al eje PQ
ΔZ_s	[mm]	Desplazamiento vertical del resorte-amortiguador del tren trasero
ΔZ_w	[mm]	Desplazamiento vertical de las ruedas del sistema de suspensión trasero
ε_1	[rad/s^2]	Aceleración angular del brazo de control
ε_2	[rad/s^2]	Aceleración angular de la mangueta del tren delantero
θ	[° ó rad]	Posición angular del eje a torsión
θ_1	[° ó rad]	Posición angular del brazo de control
θ_2	[° ó rad]	Posición angular del sistema resorte-amortiguador para la suspensión frontal

θ_3	$[\text{° ó } rad]$	Posición angular del vector de dirección, \vec{D}
θ_4	$[\text{°}]$	Angulo de inclinación del sistema resorte-amortiguador
θ_t	$[\text{° ó } rad]$	Deformación angular del eje a torsión
κ_s	—	Factor de cortante directo del resorte
μ	—	Coefficiente de fricción entre el neumático y la superficie
ξ	—	Relación de amortiguamiento
ρ	—	Decremento logarítmico
σ_{max}	$[MPa]$	Esfuerzo máximo
τ	$[MPa]$	Esfuerzo cortante
τ_1, τ_2	$[MPa]$	Esfuerzos cortantes unitarios
τ_s	$[MPa]$	Esfuerzo cortante en la espira del resorte
τ_d	$[Hz]$	Periodo amortiguado
ν	—	Coefficiente de Poisson
φ	$[\text{° ó } rad]$	Ángulo de balanceo
$\dot{\varphi}$	$[rad/s]$	Velocidad angular de la carrocería

$\ddot{\phi}$	[<i>rad/s</i> ²]	Aceleración angular de la carrocería
ϕ	[° ó <i>rad</i>]	Angulo Roll
ϕ_o	[° ó <i>rad</i>]	Apertura de la mitad del sector circular para el perfil del eje a torsión
ω_1	[<i>rad/s</i>]	Velocidad angular del brazo de control
ω_2	[<i>rad/s</i>]	Velocidad angular de la mangueta de la suspensión frontal
ω_d	[<i>rad/s</i>]	Frecuencia amortiguada
ω_n	[<i>rad/s</i>]	Frecuencia natural

Anexo B. Fundamentación teórica.

DEFINICIÓN DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN

El sistema de suspensión de un vehículo se define como el conjunto de elementos mecánicos y estructurales que permiten la conexión entre las ruedas y el chasis, dando la posibilidad de un movimiento relativo entre sus partes. A su vez, mantiene el contacto neumático-suelo, mejorando la adherencia entre estos con el objetivo de garantizar la seguridad ante la respuesta dinámica de la dirección. Por tanto, el sistema de suspensión se encarga de soportar el peso del vehículo, mitigando las vibraciones de las cargas de impacto generadas por las irregularidades del terreno.

COMPONENTES DE UN SISTEMA DE SUSPENSIÓN

Ahora bien, para realizar el diseño del sistema de suspensión es preciso describir los elementos fundamentales que forman parte de este. No obstante, cabe notar que no todos los elementos que posteriormente se describirán deberán ser usados para el diseño del sistema de suspensión propuesto en este proyecto. Dicho esto, los sistemas de suspensión, desde el punto de vista vibratorio, poseen cuatro componentes principales:

Elemento elástico. Garantiza la unión de la masa suspendida a los elementos rodantes del vehículo, aportando una fuerza recuperadora cuando se produce una separación entre los elementos mencionados, debido a su capacidad de almacenar energía de deformación.

Elemento amortiguador. Son elementos disipadores de energía que permiten mitigar las oscilaciones del elemento flexible, producto de irregularidades en el terreno.

Masa suspendida. Se considera masas suspendidas a todas las masas cuyo peso es soportado por el sistema de suspensión. Abarca todos los componentes internos del vehículo: chasis, carrocería, pasajeros, equipaje y demás.

Masa no suspendida. Todas las masas cuyos pesos no son soportados por el sistema de suspensión, como por ejemplo los neumáticos, rines, frenos, etc.

ELEMENTOS ELÁSTICOS

Estos elementos poseen excelentes propiedades elásticas, pero poca capacidad de absorción de energía mecánica, por lo que no pueden ser montados solos en la suspensión y se montan siempre con un amortiguador de doble efecto que frene tanto su compresión como su expansión. Según su forma de instalación en el vehículo, los elementos elásticos más comunes son:

Ballestas. Tipo de muelle compuesto por una serie de láminas de acero, superpuestas, de longitud decreciente en forma de parábola, que se unen al eje por medio de una abrazadera. Actúa como un resorte de flexión, que es capaz de soportar esfuerzos de flexión y cortante.

Muelles helicoidales. Consisten en un arrollamiento helicoidal de acero elástico formado por un hilo de diámetro variable en función de la carga que debe soportar.

Barras de torsión. Las barras de torsión están fabricadas de aceros de alto límite elástico. El peso del vehículo aplica una torsión inicial a la barra, proporcionando la altura adecuada a la carrocería y consiguiendo así el efecto muelle. Van fijadas por un extremo al chasis y por el otro al brazo oscilante de la rueda, de manera que, los movimientos de la rueda implican una torsión de la barra.

AMORTIGUADORES

Es un dispositivo que permite los efectos de oscilación producidos por el muelle, el cual almacena una cierta cantidad de energía al pasar por un terreno irregular. De esta forma, el amortiguador evita que la carrocería del vehículo oscile continuamente, disipando la energía acumulada en el muelle, transformándola en calor. Así, existen diversos tipos de amortiguadores entre los que se encuentran:

De fricción. este tipo de amortiguador es poco empleado y consta de dos brazos sujetos al bastidor y al eje o rueda correspondiente. Los brazos se unen entre si a través de discos que rotan y generan fricción, ofreciendo una resistencia al movimiento.

Hidráulicos. aquellos en los que el amortiguamiento se obtiene por medio del movimiento de un vástago que fuerza el paso de un fluido de una cámara a otra a través de una serie de agujeros o válvulas.

Neumático. este amortiguador posee el mismo principio de funcionamiento que el hidráulico, pero en vez de llenar las cámaras con un líquido, se hace uso de un gas inerte a gran presión.

Reológicos. se caracterizan por tener partículas en el fluido que se orientan a través de una pequeña corriente electromagnética, generando en el fluido un cambio de viscosidad.

OTROS ELEMENTOS

Barra estabilizadora. Está formada por una barra de acero que trabaja a torsión, y su función es estabilizar el vehículo frente a acciones que produzcan balanceo. Sus

extremos se fijan a los soportes de suspensión de las ruedas y contrarrestan la inclinación del vehículo cuando toma curvas.

Barra Panhard. es una barra transversal, que impide el movimiento lateral de los ejes.

Silentblocks. son unos casquillos de goma que se utilizan en los coches, en los puntos donde el chasis del vehículo se une a un componente móvil de la suspensión. Su función es absorber el ruido y las vibraciones producto de las irregularidades del terreno.

Rotulas. Constituyen un elemento de unión y fijación de la suspensión y la dirección, que permite el pivotamiento y giro de los extremos de la barra de dirección, manteniendo la geometría de las ruedas.

Mangueta. es una pieza fabricada con acero o aleaciones que une el buje, en el cual se montan los rodamientos que permiten la rotación de la rueda, a los elementos de la suspensión.

Brazos de suspensión. unen el bastidor con las ruedas y sirven como soporte al muelle y amortiguador. Están diseñados para soportar esfuerzos en la dirección del brazo.

Tirantes. son brazos longitudinales de acero, situados entre la estructura del vehículo y el sistema de suspensión. Absorben los desplazamientos y esfuerzos de los elementos de la suspensión en los periodos de aceleración y frenado del vehículo.

Figura 124. Elementos del sistema de suspensión.



Fuente: FERNÁNDEZ, Alfonso. Modelos de un amortiguador reológico.

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE SUSPENSIÓN

Antes de realizar el análisis de alternativas subsecuente, se hace necesario realizar una investigación a profundidad de los diferentes tipos de sistemas de suspensión. Según su geometría, se establecen tres tipos de sistemas de suspensión: rígida, semirrígida e independiente.

Suspensión rígida. En este tipo de suspensión, las ruedas del mismo eje están conectadas mediante un elemento rígido, normalmente una barra. En consecuencia, todo el movimiento que ejecuta una rueda se transmite a la otra del mismo eje. De esta forma, al elevarse una rueda se extiende su inclinación la otra rueda.

Figura 125. Suspensión rígida.



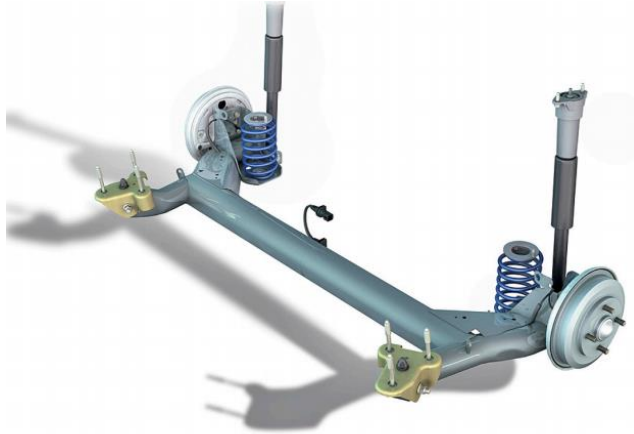
Fuente: <https://es.slideshare.net/Fran1176/cfs-gim8>

Esta disposición se caracteriza por su resistencia y bajos costos a la hora de ser fabricada. Sin embargo, son poco cómodas para los pasajeros y proporciona una menor seguridad.

Suspensión semirrígida. La energía transmitida por una perturbación a una de las ruedas se trasmite de forma parcial a la otra rueda. Dicho esto, en las suspensiones semirrígidas se pueden encontrar dos modelos principales:

- Sistema de eje torsional. Las ruedas están unidas rígidamente a dos brazos longitudinales conectados, a su vez, por un travesaño que permite la torsión durante las perturbaciones, dando estabilidad al vehículo. Esta configuración, a causa de la torsión del puente, permite una recuperación parcial del ángulo de caída con un alto efecto de estabilización. Así mismo, sus ventajas se centran en su bajo peso, bajo costo y poco espacio ocupado.

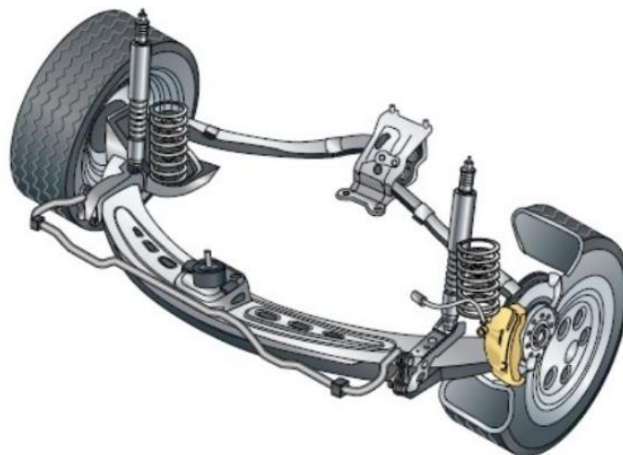
Figura 126. Suspensión de eje torsional.



Fuente: BORJA, Felipe. Modelo directo no paramétrico de amortiguador magneto-reológico basado en redes neuronales.

- Sistema de Dion. Las ruedas están conectadas mediante un eje rígido (eje de Dion) que permite movimientos longitudinales limitados por tirantes de suspensión, que, a su vez, están unidos, mediante dos semiejes, a un eje longitudinal anclado al bastidor, para permitir el movimiento vertical de ambas ruedas de forma independiente. Este sistema tiene como ventaja, frente al eje rígido, que se disminuye la masa no suspendida debido al poco peso del eje de Dion.

Figura 127. Suspensión eje de Dion.

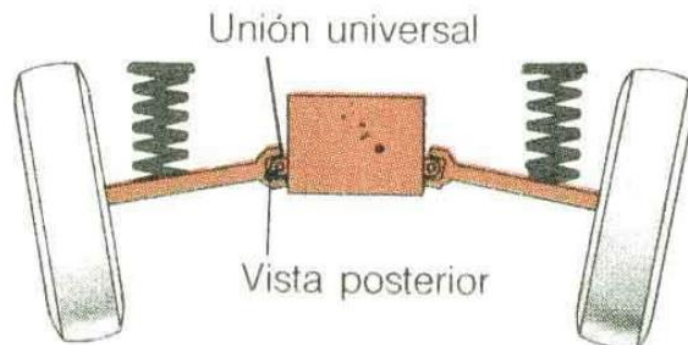


Fuente: <https://es.slideshare.net/Fran1176/cfs-gim8>

Suspensión independiente. En esta configuración, las ruedas están conectadas al bastidor del vehículo mediante un sistema articulado que les permite desplazarse verticalmente sin afectar a la rueda opuesta. Así mismo, este tipo de suspensiones aísla de mejor manera el chasis del vehículo, pues las oscilaciones transmitidas a la estructura son menores con respecto a otro tipo de suspensión.

- Suspensión de eje oscilante. Consiste en un conjunto donde el elemento de rodadura y el semieje son solidarios, de forma que el conjunto oscila alrededor de una articulación próxima al plano longitudinal del vehículo. Por otra parte, cabe notar que este tipo de suspensión no se puede usar como eje directriz, debido a que el movimiento oscilatorio de los semiejes altera notablemente la caída de las ruedas en las curvas.

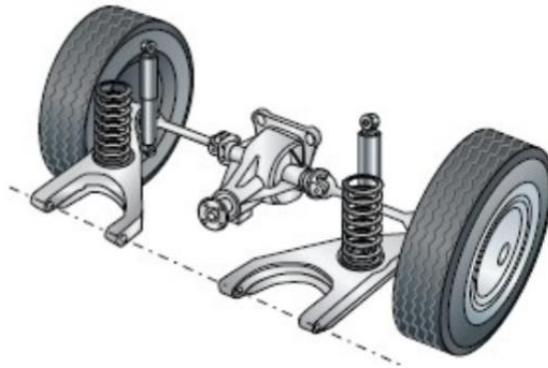
Figura 128. Suspensión de eje oscilante.



Fuente: GAVILANEZ, Camilo. Análisis e Importancia de Sistema de Suspensión de Vehículos Livianos Mediante Modelo Digital.

- Suspensión de brazos tirados o arrastrados. Realiza la unión de la rueda y el bastidor mediante una articulación por delante del eje, con un brazo que en su parte anterior esta unido al bastidor y en la posterior a la rueda. De esta forma, las ruedas son desplazadas por los brazos longitudinales que pivotan en el anclaje de la carrocería.

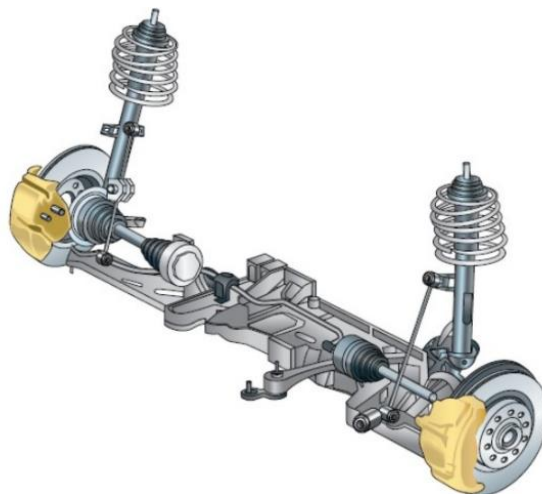
Figura 129. Suspensión de brazos arrastrados.



Fuente: <https://es.slideshare.net/Fran1176/cfs-gim8>

- Suspensión McPherson. Formada por dos brazos anclados al bastidor y oscilantes en la unión con la rueda, unidos entre sí por una barra estabilizadora o por un eje auxiliar. Es el sistema más compacto, liviano y usado en el tren delantero de los vehículos. Permite un menor consumo de combustible y menor número de componentes del sistema, haciendo posible montar un sistema de tracción delantera más sencillo. Sin embargo, los pivotamientos del sistema de suspensión en la carrocería deben ser más resistentes, debido a que las perturbaciones se transmiten de forma directa a la estructura del vehículo.

Figura 130. Suspensión McPherson.



Fuente: <https://es.slideshare.net/Fran1176/cfs-gim8>

- Suspensión de paralelogramo deformable. Se denomina suspensión por trapecio articulado o triángulos superpuestos, debido a que está formada por dos elementos articulados paralelos y unidos desde el bastidor a la mangueta de la rueda. Se llama “deformable” por la deformación del paralelogramo cuando se experimenta una perturbación.

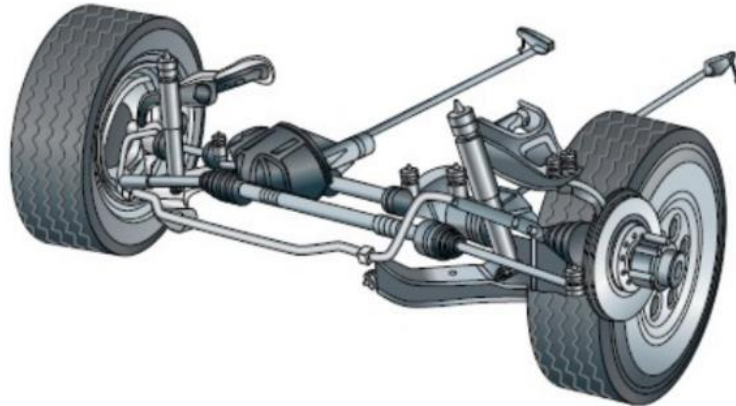
Figura 131. Suspensión de trapecio deformable



Fuente: FERNÁNDEZ, Alfonso. Modelos de un amortiguador reológico.

- Suspensión multibrazo (multilink). Se basa en el mismo concepto básico que la suspensión de paralelogramo deformable. Así, el paralelogramo está formado por dos brazos transversales, la mangueta de la rueda y el propio bastidor. Su característica principal radica en la función de los elementos guía de la suspensión multibrazo, los cuales tienen anclajes elásticos, mediante manguitos de goma, que permiten modificar los parámetros geométricos de la rueda para mejorar la estabilidad del vehículo en las distintas situaciones de uso.

Figura 132. Suspensión multilink.

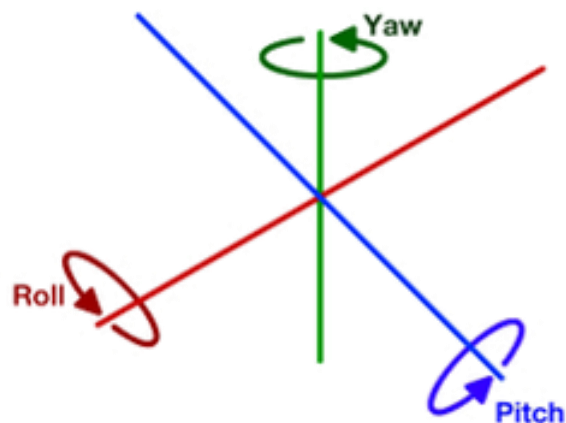


Fuente: <https://es.slideshare.net/Fran1176/cfs-gim8>

TÉRMINOS BÁSICOS PARA EL DISEÑO DE UN SISTEMA DE SUSPENSIÓN

Ángulos de navegación (roll, pitch and yaw). Son un tipo de ángulos que permiten describir la orientación de un cuerpo en tres dimensiones. El ángulo Roll se asocia a la orientación en el eje longitudinal, Pitch en el eje transversal y Yaw en el eje vertical. La practicidad de estos ángulos permitirá conocer la orientación de la carrocería del vehículo respecto a un sistema de referencia fijo.

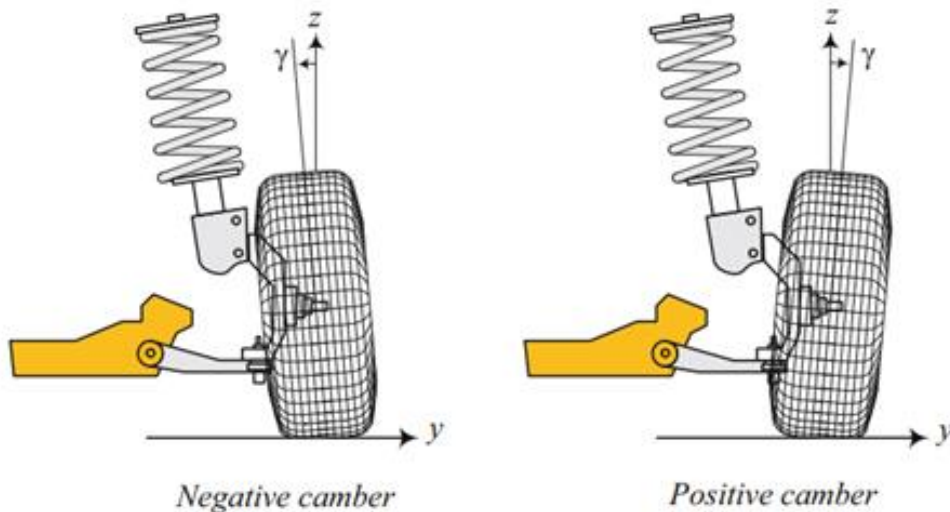
Figura 133. Ángulos de navegación.



Fuente: <https://dautomotrizuft.weebly.com/suspensioacuten.html>

Ángulo Camber. Es el ángulo de inclinación del plano de las ruedas con respecto al plano vertical, si el plano de la rueda gira alrededor del eje x y se inclina hacia el chasis se tiene un ángulo Camber negativo, mientras que si se inclina hacia afuera se obtiene un Camber positivo.

Figura 134. Ángulo Camber.



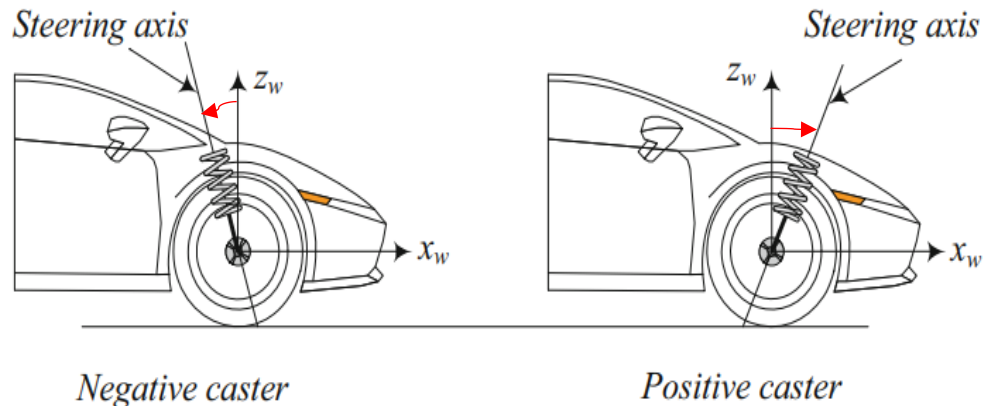
Fuente: GUIGGIANI, Massimo. The science of vehicle dynamics

En cuanto a las implicaciones dinámicas del ángulo Camber, se puede decir que las fuerzas laterales y de adherencia generadas durante la conducción son funciones de este. Por tal motivo, la selección de un ángulo Camber negativo mejorará el agarre y la estabilidad en las curvas, permitiendo la correcta transmisión del esfuerzo a través del plano vertical de la rueda, mientras que un ángulo Camber nulo otorgará el máximo contacto de la superficie de rodadura y la carretera para así obtener la máxima aceleración posible en una trayectoria recta.

Ángulo Caster. Es el ángulo de inclinación entre la vertical y el eje de pivotamiento de las ruedas con el que se controla la dirección, también conocido como eje de dirección. Se entiende por Caster negativo cuando el eje de dirección forma una inclinación al girar de derecha a izquierda con respecto al plano vertical de la rueda

delantera y por Caster positivo cuando el giro es de izquierda a derecha. Cuanto mayor sea este ángulo se requerirá mayor esfuerzo para hacer girar la dirección.

Figura 135. Ángulo Caster.

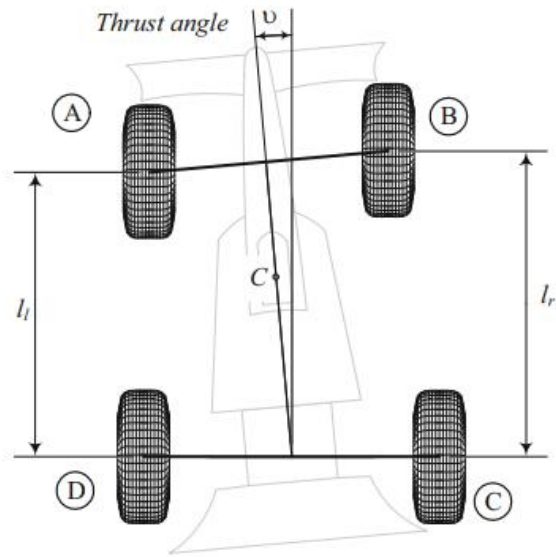


Fuente: GUIGGIANI, Massimo. The science of vehicle dynamics

Por su parte, durante la conducción al momento de girar, existe una relación funcional entre el ángulo Caster y el ángulo Camber, pues con una configuración de Caster positivo la rueda de afuera gana Camber negativo y la rueda interior Camber positivo, causando que ambas ruedas se recuesten dentro de la curva. Por lo tanto, la correcta selección del ángulo Caster permitirá que los neumáticos delanteros, al momento de girar ciertos grados, obtengan el Camber necesario para igualar el Camber dinámico.

Ángulo Thrust. Posicionados desde una vista superior del vehículo, el ángulo Thrust es la inclinación que se forma entre el eje central del vehículo y la perpendicular del eje trasero, cuando se tiene un ángulo Thrust nulo se confirma el paralelismo entre el eje delantero y trasero, como también que la distancia entre ejes a ambos lados del vehículo es la misma. Generalmente es mayor a cero para vehículo de carreras ya que proporciona un mejor agarre al momento de tomar las curvas.

Figura 136. Ángulo Thrust.

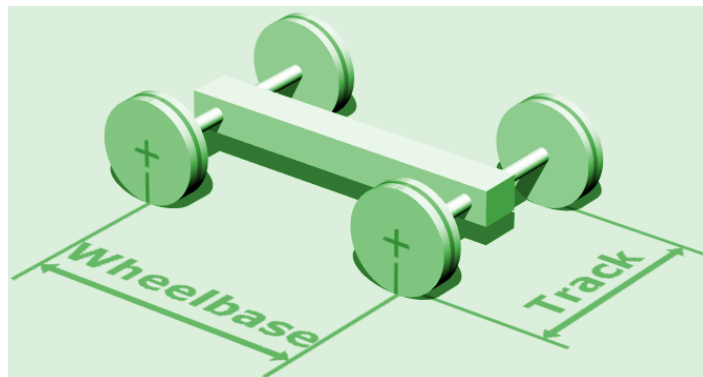


Fuente: GUIGGIANI, Massimo. The science of vehicle dynamics

Wheelbase (Distancia entre ejes). Es la distancia comprendida entre el centro de la rueda trasera y el centro de la rueda delantera.

Track (Distancia entre ruedas). Es la distancia comprendida entre el centro de la rueda izquierda y el centro de la rueda derecha.

Figura 137. Wheelbase y Track

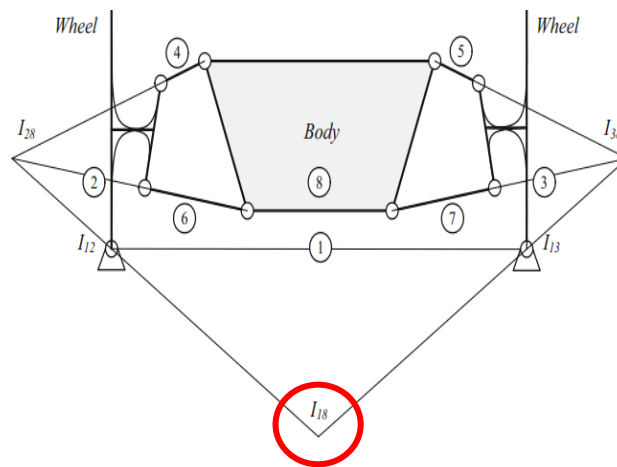


Fuente: <https://dautomotrizuft.weebly.com/suspensioacuten.html>

Por otra parte, se hace indispensable hacer mención que el vehículo se comporta de mejor manera al momento de tomar curvas cuando se incrementa la proporción del Track con respecto al Wheelbase, mientras que cuando el Wheelbase es mucho mayor en proporción con respecto al Track, mejor comportamiento y estabilidad tendrá el vehículo en trayectorias rectas.

Centro de balanceo. El centro de balanceo o también conocido como Roll axis, puede tener dos definiciones: La geométrica y la que provee la Sociedad de ingenieros automotrices. La primera establece que es un punto imaginario, en el espacio, sobre el cual toda la masa suspendida del vehículo va a rotar cuando el vehículo se incline al tomar una curva. La SAE, por su parte, lo define como un punto en el plano transversal vertical, en el cual se pueden aplicar fuerzas laterales a la masa del muelle sin producir un balanceo en la suspensión.

Figura 138. Centro de balanceo



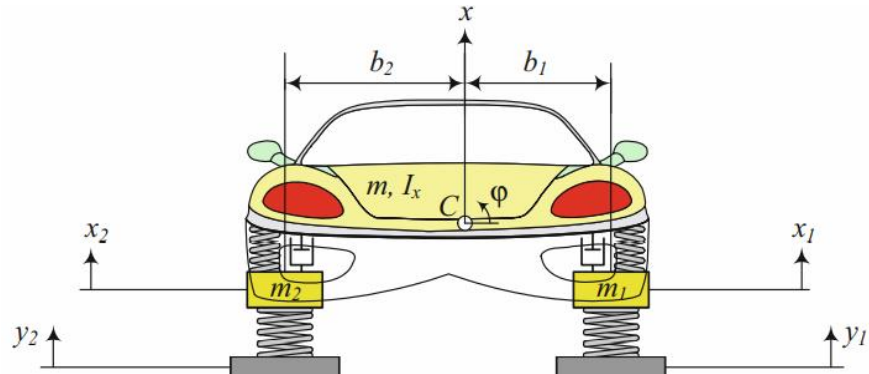
Fuente: GUIGGIANI, Massimo. The science of vehicle dynamics

MODELOS VIBRATORIOS PARA LA SIMULACIÓN

El modelo de la figura 17. representa el sistema independiente de la suspensión de medio vehículo. Dicho modelo contiene el movimiento vertical de la carrocería y de

las ruedas delanteras (derecha e izquierda), a su vez, se incluye el ángulo de balanceo para analizar las vibraciones originadas por la variación de tal parámetro. Esta cantidad de grados de libertad permite considerar el análisis del movimiento vertical-transversal o vertical-longitudinal del vehículo.

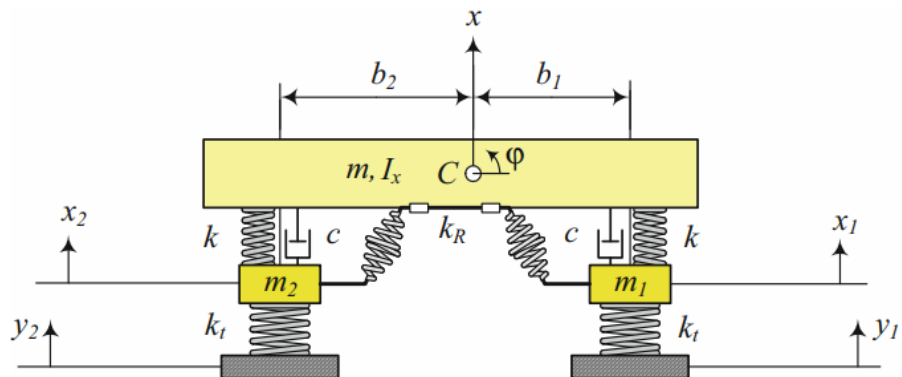
Figura 139. Modelo para un sistema de suspensión independiente.



Fuente: REZA, Jazar. Vehicle Dynamics.

Cabe destacar que el modelo de medio automóvil puede ser diferente para la mitad delantera y la mitad trasera debido al uso de diferentes suspensiones y distribución de masas. Además, en las mitades delantera y trasera se pueden utilizar diferentes barras antivuelco y diferente rigidez torsional tal como se muestra a continuación.

Figura 140. Modelo para un sistema de suspensión con eje torsional.



Fuente: REZA, Jazar. Vehicle Dynamics.

El modelo de la figura 18. es similar al ya presentado, solo que posee una barra torsional, con rigidez propia, que le proporciona estabilidad al vehículo. El par generado en dicho miembro estructural es proporcional al ángulo de balanceo, de manera que contrarreste los momentos generados por las inestabilidades de la carrocería.

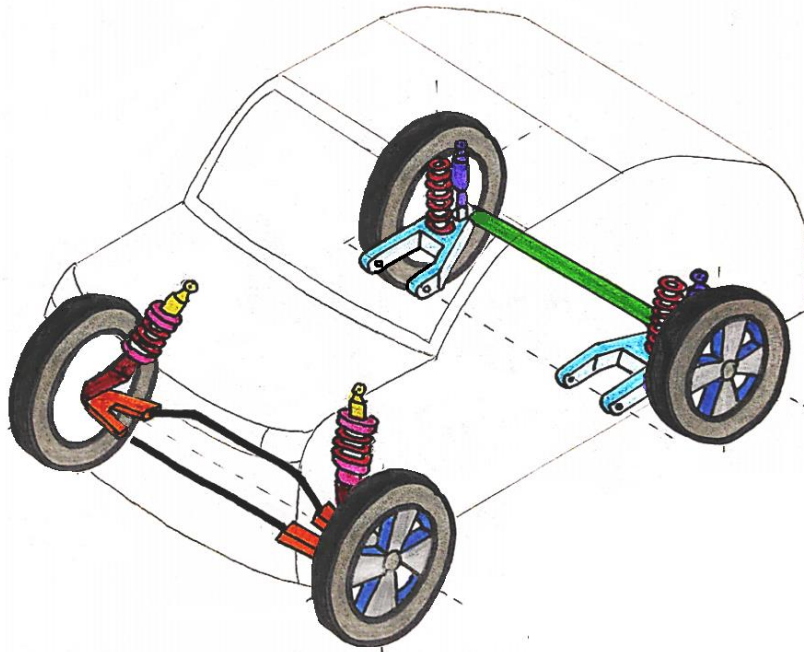
Anexo C. Proceso de diseño conceptual

PLANTEAMIENTO DE ALTERNATIVAS

Alternativa 1: Sistema McPherson y brazos arrastrados. Para la primera alternativa se propone un sistema McPherson y de brazos arrastrados para el tren delantero y trasero, respectivamente. El primer sistema seleccionado se caracteriza por ser un modelo compacto, liviano y económico; sin embargo, requiere mucho espacio vertical y este se ve afectada de manera directa por las irregularidades del terreno, lo que repercute en el confort del pasajero.

Por otra parte, el sistema de brazos arrastrados es muy eficiente para terrenos con irregularidades mínimas, pues transmite las vibraciones con mucha facilidad al chasis del vehículo.

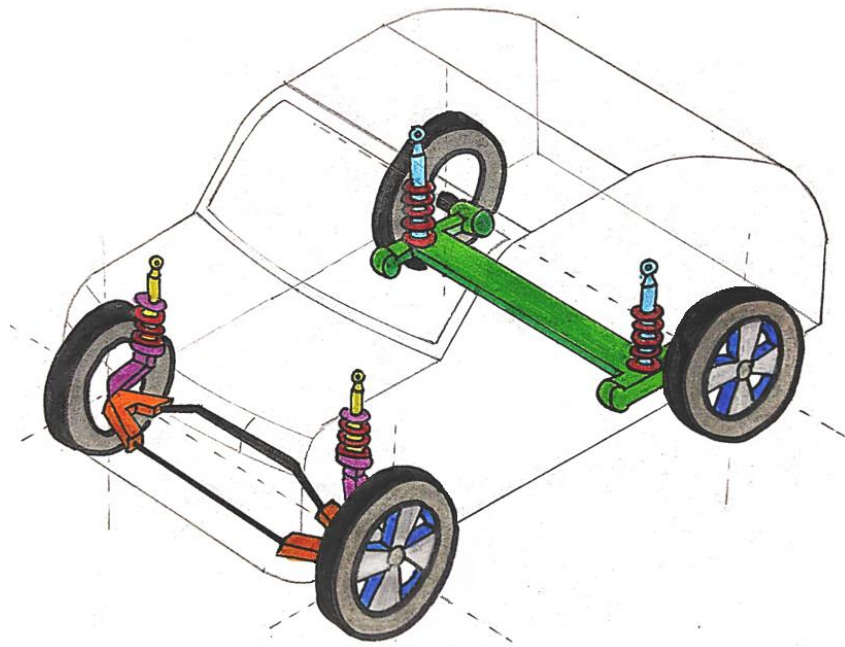
Figura 141. Alternativa 1



Fuente: Autores

Alternativa 2: Sistema McPherson y eje torsional. Esta alternativa es una variación de la alternativa 1, en la que se hace el cambio del sistema de brazos arrastrados por uno de eje torsional. Dicho sistema proporciona una suspensión de bajo peso, costo y poco espacio ocupado. Su mayor ventaja radica en que durante las perturbaciones, permite una mayor estabilidad del vehículo, garantizando la seguridad de los pasajeros. No obstante, el hecho de que sea una suspensión semirrígida ocasiona que la geometría de cada rueda dependa una de la otra, causando una disminución efectiva de la maniobrabilidad del vehículo.

Figura 142. Alternativa 2



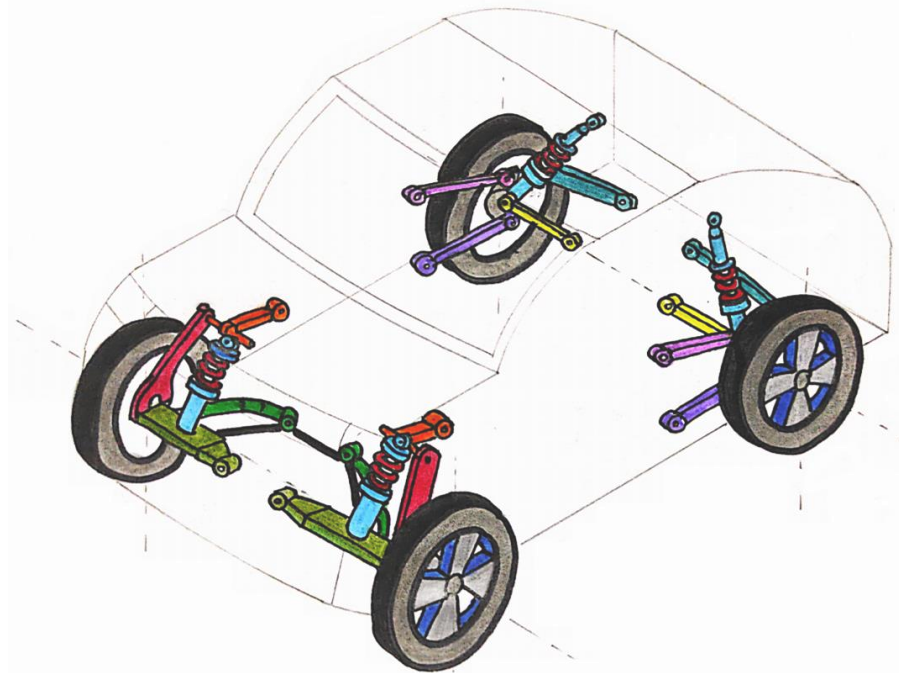
Fuente: Autores

Alternativa 3: Sistema de paralelogramos deformables y multilink. Para la tercera alternativa se propone un sistema de suspensión de paralelogramo deformable y multilink en el tren delantero y trasero, respectivamente. Dicha configuración proporciona una independencia en cada una de las cuatro ruedas, por lo que, en conjunto, proporciona mejor maniobrabilidad y mayor seguridad al volante. En cuanto al tema de confort, ambos sistemas proveen una alta absorción

de las vibraciones longitudinales y una gran firmeza en los movimientos transversales, debido a que cada brazo está conectado al cuerpo del vehículo por medio de silentblocks de alta calidad.

Sin embargo, el estudio y diseño de estos sistemas es engorroso y poco práctico, sumado a que el costo de estos es bastante alto, lo que lo hace una configuración poco práctica para las irregularidades mínimas que podría llegar a tener el terreno urbano, siendo mucho más viable para vehículos de carreras, en los que se alcanzan altas velocidades y se necesita gran precisión.

Figura 143. Alternativa 3



Fuente: Autores

EVALUACIÓN DE ALTERNATIVAS

Se procede a realizar la evaluación de las alternativas anteriormente descritas en base a la información obtenida de la matriz QFD, con lo que es posible escoger la

alternativa que se ajusta a las peticiones del consumidor-fabricante. A continuación, se presentan los criterios de evaluación obtenidos a partir de la matriz QFD en orden descendente.

Tabla 23. Evaluación de alternativas

<i>Evaluación de alternativas</i>			<i>Alternativa 1</i>		<i>Alternativa 2</i>		<i>Alternativa 3</i>		
<i>Criterio de evaluación</i>	<i>parámetros</i>	P_i	<i>calif.</i>	<i>pond.</i>	<i>calif.</i>	<i>pond.</i>	<i>calif.</i>	<i>pond.</i>	
<i>Diseño suspensión</i>	39,6%	<i>Análisis sencillo</i>	0,4	4	0,63	3,5	0,55	1	0,16
		<i>Mínimos costos de fabricación</i>	0,3	4	0,48	4	0,48	1	0,12
		<i>Compacto y liviano</i>	0,2	3,5	0,28	4	0,32	3	0,24
		<i>Complejidad (mínima cantidad de elementos)</i>	0,1	3,5	0,14	4,5	0,18	1	0,04
<i>Dirección y control</i>	20,7%	<i>Estabilidad</i>	0,6	3	0,37	4	0,50	5	0,62
		<i>Independencia geométrica</i>	0,4	5	0,41	3,5	0,29	5	0,41
<i>Aislamiento vibratorio</i>	20,0%	<i>Mitigación de cargas</i>	0,5	3	0,30	4,5	0,45	5	0,50
		<i>Confort pasajero</i>	0,5	3	0,30	4,5	0,45	4,5	0,45
<i>Adherencia</i>	19,7%	<i>Solución óptima (irregularidades mínimas)</i>	1	4,5	0,89	4	0,79	0	0,00
<i>Puntaje total</i>			3,80		4,00		2,54		

Fuente: Autores

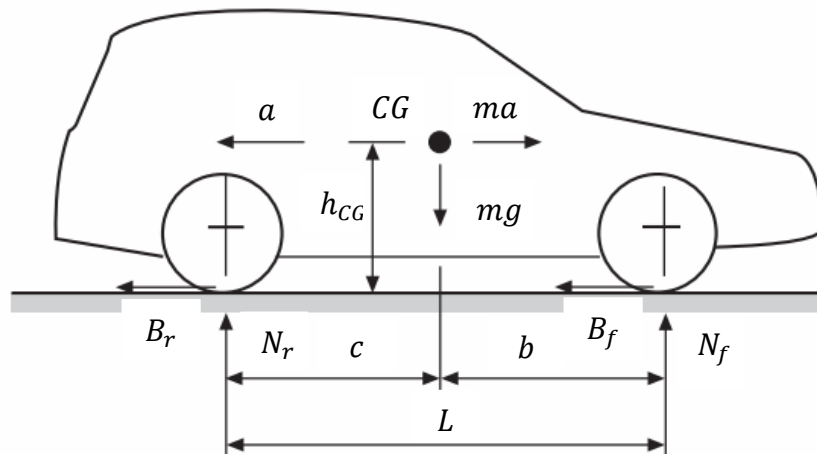
Anexo D. Factores de carga dinámica

Los tipos de cargas que actual sobre las ruedas, durante un ciclo de conducción, se pueden clasificar en: laterales (fuerzas en curvas), longitudinales (aceleración y fuerzas de frenado), verticales (fuerzas gravitacionales causadas por el peso del vehículo). En ese orden de ideas, se hace necesario implementar un modelo que permita calcular dichas fuerzas, asumiendo lo siguiente:

- El chasis del vehículo como un cuerpo rígido
- El vehículo es conducido sobre un terreno plano, sin pendiente
- Velocidad constante en las curvas
- Aceleración longitudinal constante.

A continuación, se muestra las cargas aplicadas sobre las ruedas del eje frontal y trasero del vehículo durante un caso de ciclo de frenado.

Figura 8. Diagrama de cuerpo libre de un vehículo durante el frenado



Fuente: HAPPIAN-SMITH, Julian. Modern Vehicle Design

Las ecuaciones del equilibrio dinámico para este caso quedan formuladas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 +\rightarrow \sum F_x &= ma \quad \rightarrow \quad B_f + B_r = ma \\
 +\uparrow \sum F_y &= 0 \quad \rightarrow \quad N_f + N_r - mg = 0 \\
 +\curvearrowright \sum M_{CG} &= 0 \quad \rightarrow \quad (B_f + B_r) h_{CG} + N_r c - N_f b = 0
 \end{aligned}$$

Se despejan las fuerzas normales de cada rueda en función de la aceleración longitudinal y los parámetros geométricos del vehículo:

$$\begin{aligned}
 mah_{CG} + (mg - N_f)c - N_f b &= 0 \\
 N_f &= \frac{mah_{CG}}{c + b} + \frac{mgc}{c + b} = \frac{mah_{CG}}{L} + \frac{mgc}{L} \\
 N_r &= \frac{mgb}{L} - \frac{mah_{CG}}{L}
 \end{aligned}$$

Por otra parte, determinar las fuerzas de fricción en cada una de las ruedas, causadas por el ciclo de frenado, se hace imposible debido a que no se dispone de las suficientes ecuaciones para resolver el sistema. Se asume entonces que las fuerzas de frenado son proporcionales al coeficiente de fricción μ entre la rueda y la superficie del terreno; estas determinadas por las siguientes expresiones:

$$B_f = N_f \mu = \left(\frac{mah_{CG}}{L} + \frac{mgc}{L} \right) \mu \quad ; \quad B_r = N_r \mu = \left(\frac{mgb}{L} - \frac{mah_{CG}}{L} \right) \mu$$

Las fuerzas dinámicas son muy difíciles de cuantificar, sin embargo, la experimentación ha establecido un rango de factores de carga dinámicos para determinar dichas fuerzas. Estos factores son aplicados a las fuerzas normales

estáticas que actúan sobre el vehículo en reposo, dadas por las siguientes expresiones:

$$N_{fs} = \frac{mgc}{2L} \quad ; \quad N_{rs} = \frac{mgb}{2L}$$

Algunos de los valores típicos para los factores de carga dinámicos usados por los fabricantes del campo automotriz se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 24. Factores de carga dinámica

Tipo de carga	Factor de carga		
	<i>Longitudinal</i>	<i>Transversal</i>	<i>Vertical</i>
<i>Bache delantero / trasero</i>	<i>3g en la rueda afectada</i>	0	<i>4g en la rueda afectada, 1g en las demás ruedas</i>
<i>Bache durante las curvas</i>	0	0	<i>3.5g en la rueda afectada, 1g en las demás ruedas</i>
<i>Impacto lateral contra el bordillo del anden</i>	0	<i>4g en las ruedas delanteras y traseras del lado afectado</i>	<i>1g en todas las ruedas</i>
<i>Frenado de emergencia</i>	<i>2g en las ruedas delanteras, 0.4g en las ruedas traseras</i>	0	<i>2g en las ruedas delanteras, 0.8g en las ruedas traseras</i>

Fuente: HAPPIAN-SMITH, Julian. Modern Vehicle Design

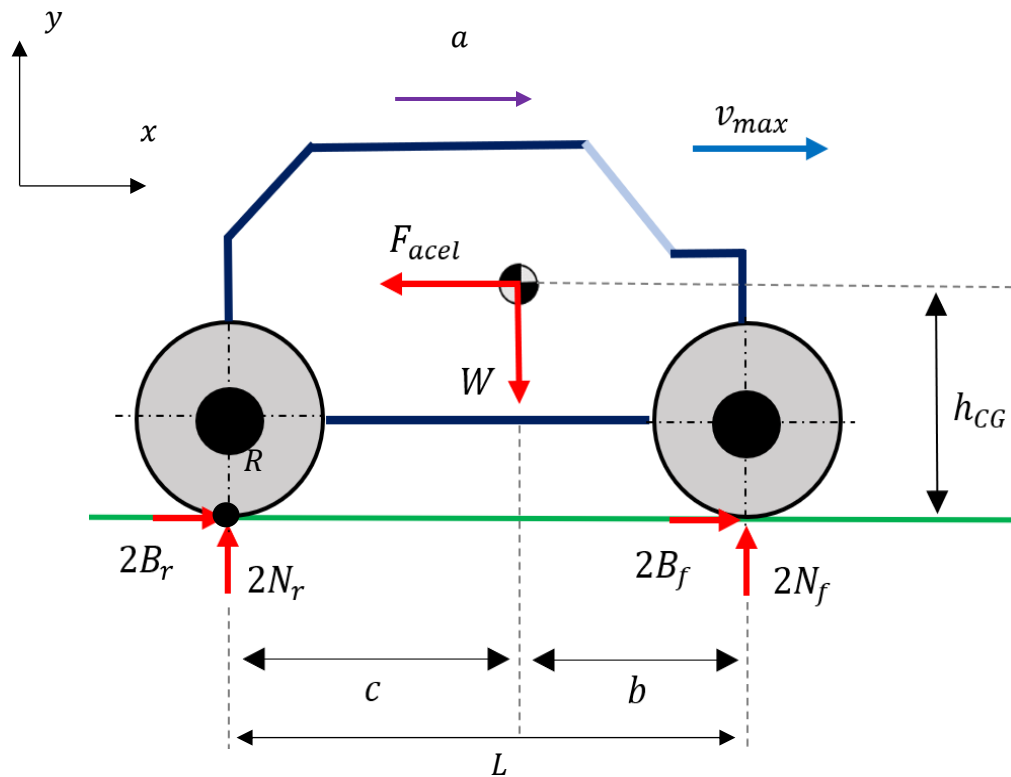
Bajo estas referencias serán asumidas las cargas que son aplicadas al sistema de suspensión.

Anexo E. Cálculos dinámicos en situación de aceleración, frenado y curva

Para completar el estudio dinámico del sistema de suspensión frontal y trasero, es necesario plantear los ciclos de conducción para aceleración, frenado y movimiento en curva del vehículo. De estos análisis, será posible establecer las fuerzas máximas que se presentan en cada neumático y que por ende se transmiten a los sistemas de suspensión. No obstante, los cálculos aquí propuestos no serán usados en los procesos de diseño anteriormente mostrados y solo se usarán para verificar la estabilidad final del sistema de suspensión.

CICLO DE ACELERACIÓN

Figura 144. DCL vehículo acelerando



Fuente: autores

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \rightarrow 2B_r + 2B_f = F_{acel} ; F_{acel} = ma \\ \sum F_y = 0 & \rightarrow 2N_r + 2N_f = W ; W = mg \\ \sum M_R = 0 & \rightarrow 2N_f L + F_{acel} h_{CG} - Wc = 0 \end{aligned}$$

Donde :

$m = 700 \text{ kg}$ (peso total del vehiculo con pasajeros)

$b = 0,81 \text{ m}$ (distancia del CG a eje delantero)

$c = 0,99 \text{ m}$ (distancia del CG a eje trasero)

$L = 1,8 \text{ m} = c + b$ (distancia entre ejes)

Por otra parte, la distancia h_{CG} es la distancia desde el centro de gravedad hasta el punto de contacto neumático-piso. Este se supondrá inicialmente como la suma del radio de la rueda y la dimensión media de la carrocería del vehículo. Dicho esto, esta dimensión equivaldrá a:

$$h_{CG} = r + \frac{h}{2} = 0,265 + \frac{1,45}{2} = 0,99 \text{ m}$$

Para obtener la aceleración de estudio, se toma como referencia el rendimiento del Renault Twizy 80, que acelera de 0 a 45 km/h en 6,1 s. No obstante, se plantea una aceleración de 0 a 30 km/h en 8 s para el diseño del vehículo de este proyecto, debido a que se supone una situación donde la capacidad del motor del vehículo diseñado es menor que el auto referenciado. De esta forma se tiene que:

$$30 \frac{\text{km}}{\text{h}} \left(\frac{1000\text{m}}{1\text{km}} \right) \left(\frac{1\text{h}}{3600\text{s}} \right) = 8,333 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow \int_0^{v_f} dv = \int_0^{t_f} a dt$$

$$\int_0^{8,333 \text{ m/s}} dv = a \int_0^{8s} dt \rightarrow a = \frac{8,333 \text{ m/s}}{8s} \rightarrow a = 1,041 \frac{m}{s^2}$$

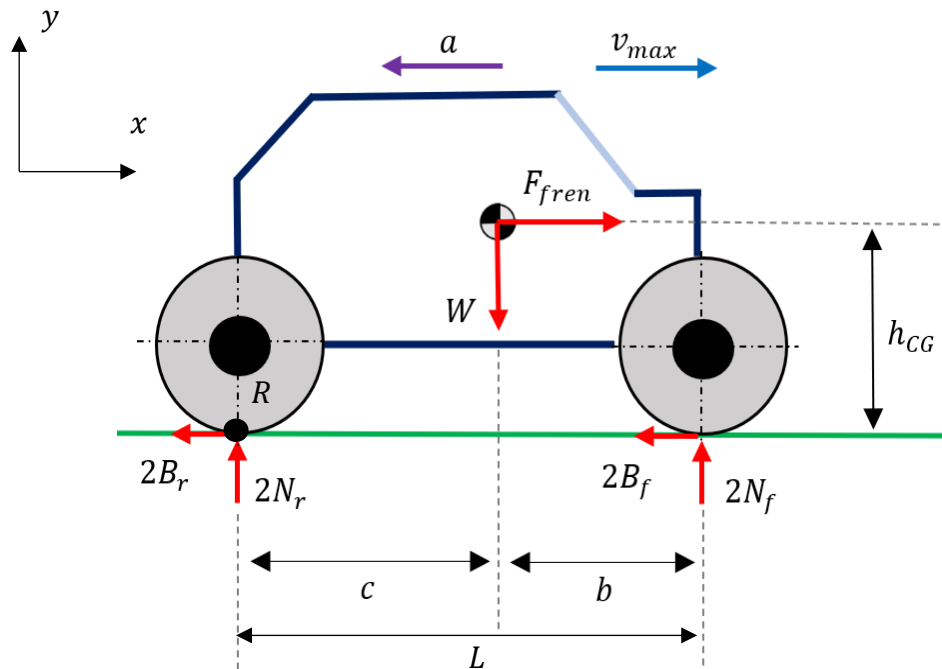
De las ecuaciones dinámicas planteadas al inicio, se procede a despejar las reacciones normales en cada rueda, donde cada reacción esta multiplicada por dos debido a que en el tren hay dos ruedas.

$$N_f = \frac{m(gc - ah_{CG})}{2L} \rightarrow N_f = 1688,03 \text{ N}$$

$$N_r = \frac{W}{2} - N_f \rightarrow N_r = 1745,46 \text{ N}$$

CICLO DE FRENADO:

Figura 145. Vehículo frenando.



Fuente: Autores

$$\sum F_x = 0 \rightarrow 2B_r + 2B_f = F_{fren} ; F_{fren} = ma$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 2N_r + 2N_f = W ; W = mg$$

$$\sum M_R = 0 \rightarrow 2N_f L + F_{fren} h_{CG} - Wc = 0$$

Para hallar la desaceleración del vehículo, se hace necesario remitirse a los manuales de diseño geométrico para vías del Ministerio de Transporte colombiano e Invias. De este documento se extraerá la distancia mínima necesaria que necesitara el vehículo para frenar a su máxima velocidad, que para el caso del vehículo diseñado es $v_{max} = 80km/h$.

Tabla 25. Distancias de visibilidad de parada en tramos a nivel

VELOCIDAD ESPECÍFICA V_e	DISTANCIA PERCEPCIÓN-REACCIÓN	DISTANCIA DURANTE EL FRENADO A NIVEL	DISTANCIA DE VISIBILIDAD DE PARADA	
			CALCULADA	REDONDEADA
(km/h)	(m)	(m)	(m)	(m)
20	13.9	4.6	18.5	20
30	20.9	10.3	31.2	35
40	27.8	18.4	46.2	50
50	34.8	28.7	63.5	65
60	41.7	41.3	83	85
70	48.7	56.2	104.9	105
80	55.6	73.4	129	130
90	62.6	92.9	155.5	160
100	69.5	114.7	184.2	185
110	76.5	138.8	215.3	220
120	83.4	165.2	248.6	250
130	90.4	193.8	284.2	285

Fuente: Ministerio de Transporte de Colombia. Manual de Diseño Geométrico de Carreteras. 2008

Con la distancia de parada, $D_p = 129 m$, se procede a calcular la aceleración del vehículo a partir de lo siguiente:

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow dt = \frac{dx}{v} \quad ; \quad a = \frac{dv}{dt}$$

$$\text{Sustituyendo: } a = \frac{dv}{\frac{dx}{v}} \rightarrow a dx = v dv$$

$$\text{Integrando ambos miembros: } \int_0^{x_f} a dx = \int_{v_{max}}^0 v dv$$

$$a(x) \Big|_0^{129m} = \frac{v^2}{2} \Big|_{22,222 \frac{m}{s}}^0 \rightarrow a = \frac{-\left(22,222 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 129 m} \rightarrow a = -1,914 \frac{m}{s^2}$$

Ahora bien, se procede a usar las ecuaciones dinámicas planteadas para el frenado, de las cuales se obtiene que:

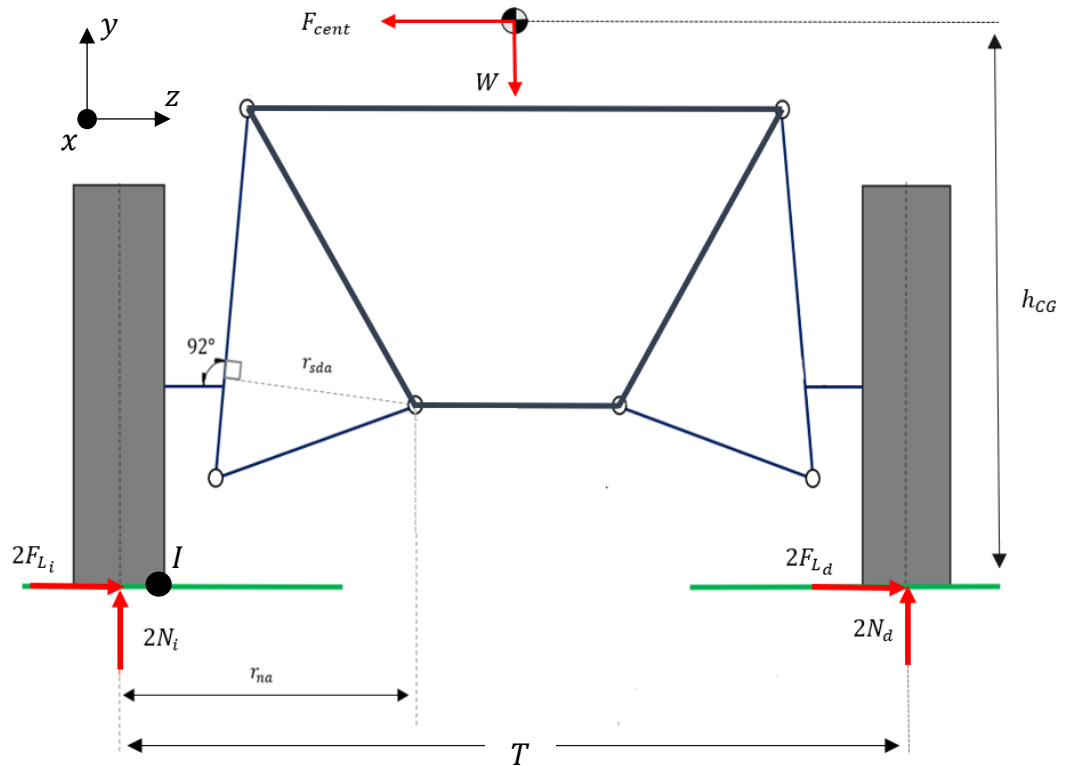
$$N_f = \frac{F_{fren} h_{CG} + Wc}{2L} \rightarrow N_f = 2256,87 N$$

$$N_r = \frac{W}{2} - N_f \rightarrow N_r = 1176,63 N$$

CICLO DE CONDUCCION EN CURVA

Para definir el comportamiento dinámico de la suspensión en una curva, se hace necesario establecer un diagrama de cuerpo libre en vista frontal, para poder observar las reacciones laterales y normales a los neumáticos, debidos a la aceleración en el tramo en estudio. De esta forma, se presenta el DCL con los miembros articulados del sistema de suspensión frontal.

Figura 146. DCL en vista frontal del vehículo en una curva



Fuente: Autores

Donde: $T = 1,4 \text{ m}$ (distancia entre ruedas del vehículo)

Del DCL presentado se establecen las siguientes ecuaciones:

$$\sum M_I = 0 \rightarrow F_{cent} h_{CG} - \frac{mg\omega}{2} + 2N_d T = 0 \quad ; \quad F_{cent} = ma_{cent}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 2N_i + 2N_d - W = 0$$

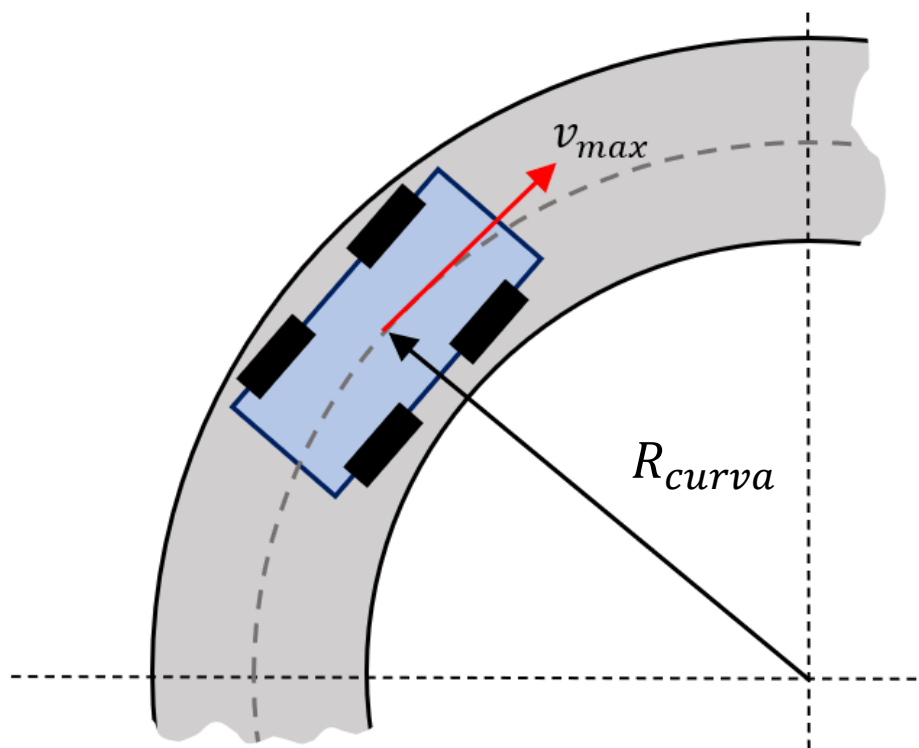
$$\sum F_z = 0 \rightarrow 2F_{L_i} + 2F_{L_d} - F_{cent} = 0$$

Para resolver el sistema de ecuaciones es necesario en primer lugar establecer la fuerza centrífuga que experimenta el vehículo en una curva. Dicho esto, se plantea que:

$$a_{cent} = \frac{v_{max}^2}{R_{curva}}$$

Dónde: v_{max} es la velocidad con al que se mueve el vehículo, que para el caso en estudio es la velocidad crítica o máxima; R_{curva} , hace referencia al radio de giro, como se muestra en la siguiente figura.

Figura 147. vehículo en condición de aceleración en curva



Fuente: Autores

El radio de giro será determinado a partir de los parámetros para diseño geométrico de vías del Ministerio de transporte colombiano, donde se establece una relación entre velocidad específica y radio mínimo, para un peralte máximo de $e_{max} = 8\%$. Así mismo, para cada velocidad se proporciona el coeficiente de fricción transversal, con el que se podrá determinar la fuerza lateral que experimenta cada neumático.

Tabla 26. Radios mínimos para peralte máximo $e_{max} = 8\%$ y fricción máxima

VELOCIDAD ESPECÍFICA (V_{CH}) (km/h)	PERALTE MÁXIMO (%)	COEFICIENTE DE FRICCIÓN TRANSVERSAL $f_{Tmáx}$	TOTAL $e_{máx} + f_{Tmáx}$	RADIO MÍNIMO (m)	
				CALCULADO	REDONDEADO
40	8,0	0,23	0,31	40,6	41
50	8,0	0,19	0,27	72,9	73
60	8,0	0,17	0,25	113,4	113
70	8,0	0,15	0,23	167,8	168
80	8,0	0,14	0,22	229,1	229
90	8,0	0,13	0,21	303,7	304
100	8,0	0,12	0,20	393,7	394
110	8,0	0,11	0,19	501,5	501
120	8,0	0,09	0,17	667,0	667
130	8,0	0,08	0,16	831,7	832

Fuente: Ministerio de Transporte de Colombia. Manual de Diseño Geométrico de Carreteras. 2008

Para la velocidad máxima del vehículo, $v_{max} = 80 \text{ km/h}$, se tiene un radio mínimo de giro de $R_{curva} = 229 \text{ m}$. Obtenidos estos parámetros, la fuerza centrífuga que experimenta el vehículo es:

$$a_{cent} = \frac{v_{max}^2}{R_{curva}} = \frac{\left(22,222 \frac{m}{s}\right)^2}{229 \text{ m}} \rightarrow a_{cent} = 2,1564 \frac{m}{s^2}$$

$$F_{cent} = ma_{cent} = (700 \text{ kg}) \left(2,1564 \frac{m}{s^2}\right) \rightarrow F_{cent} = 1509,48 \text{ N}$$

Calculando las reacciones en cada neumático con las ecuaciones obtenidas a partir del análisis dinámico del DCL:

$$N_d = \frac{\frac{mgT}{2} - F_{cent}h_{CG}}{2T} \rightarrow N_d = 1183,04 \text{ N}$$

$$N_i = \frac{W}{2} - N_d \quad \rightarrow \quad N_i = 2250,46 \text{ N}$$

Las fuerzas laterales se hallarán a partir del coeficiente de fricción que se genera a partir del contacto neumático-superficie, de manera que:

$$F_{Li} + F_{Ld} = \frac{F_{cent}}{2} \quad \rightarrow \quad \mu N_i + \mu N_d = \frac{F_{cent}}{2}$$

$$\mu = \frac{F_{cent}}{2(N_i + N_d)} \quad \rightarrow \quad \mu = 0,2198 \approx 0,22$$

Se evidencia que el coeficiente de fricción obtenido a partir de las ecuaciones dinámicas es igual al que se presenta en la tabla de radios mínimos, por lo que se puede afirmar que los cálculos realizados para la obtención de las reacciones en los neumáticos en ciclo de conducción en curva son correctos. De esta forma, el valor de las fuerzas laterales para cada neumático equivale a:

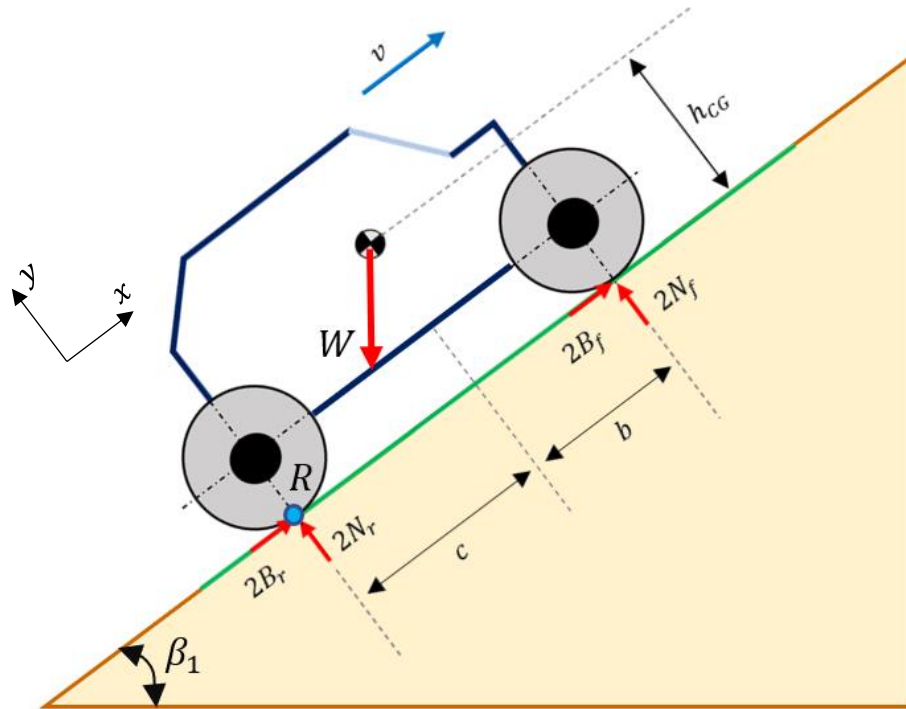
$$F_{Li} = \mu N_i = 495,1 \text{ N} \quad ; \quad F_{Ld} = \mu N_d = 260,27 \text{ N}$$

INCLINACIÓN MÁXIMA PERMISIBLE DEL VEHÍCULO EN SUBIDA Y BAJADA

Para finalizar el análisis de los ciclos de conducción del vehículo, se requiere establecer las inclinaciones máximas sobre las cuales el vehículo puede desplazarse sin perder su estabilidad o volcarse.

De esta forma, se inicia con el caso de conducción en subida con pendiente β_1 . Para hallar la el máximo ángulo en subida, se establece que el vehículo pierde contacto en el tren delantero, por lo que la reacción normal en los neumáticos de este tren sera nulas.

Figura 148. Ciclo de conducción de vehículo en pendiente positiva



Fuente: Autores

A partir del DCL presentado, se obtiene la siguiente ecuación de momentos en R:

$$\sum M_R = 0 \rightarrow N_f L + W \operatorname{sen}(\beta_1) h_{CG} - W \operatorname{cos}(\beta_1) c = 0$$

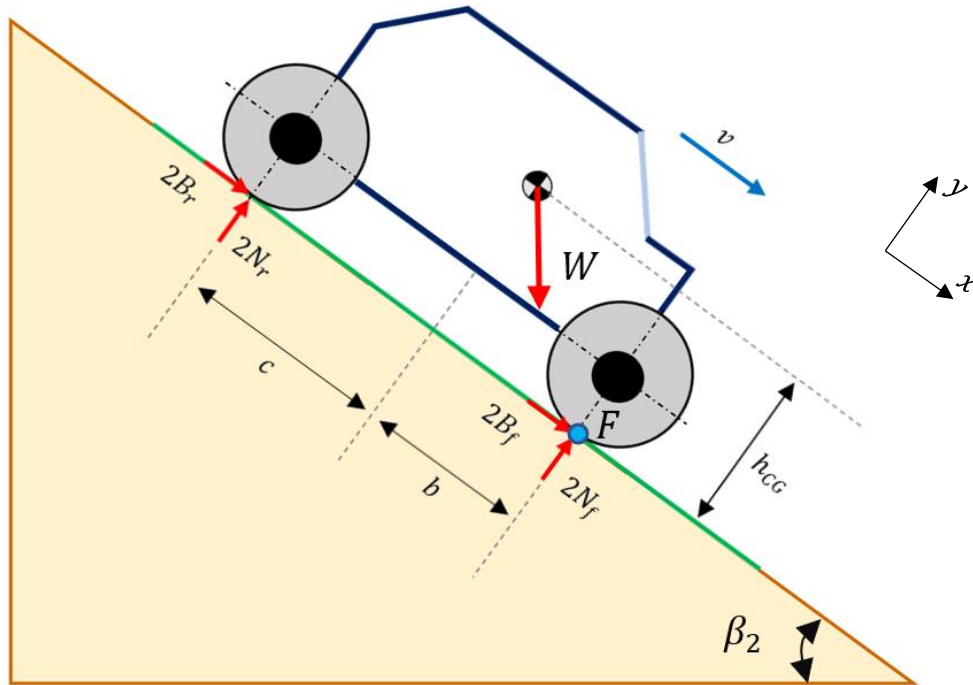
$$\text{si } N_f = 0 \rightarrow W \operatorname{sen}(\beta_1) h_{CG} = W \operatorname{cos}(\beta_1) c$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\beta_1)}{\operatorname{cos}(\beta_1)} = \frac{c}{h_{CG}} \rightarrow \tan(\beta_1) = \frac{c}{h_{CG}}$$

$$\beta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{c}{h_{CG}}\right) \rightarrow \beta_1 = \tan^{-1}(1) = 45^\circ$$

Ahora bien, se debe realizar el mismo proceso para encontrar la pendiente máxima negativa sobre la que el vehículo puede operar. Dicho esto, se establece el siguiente diagrama para determinar dicho ángulo.

Figura 149. Ciclo de conducción de vehículo en pendiente negativa



Fuente: Autores

Para este caso, la pendiente máxima negativa se experimentará cuando el tren trasero pierda el contacto con el terreno, generando una reacción normal nula, $N_r = 0$

$$\sum M_F = 0 \rightarrow N_r L - W \operatorname{sen}(\beta_2) h_{CG} + W \operatorname{cos}(\beta_2) b = 0$$

$$\text{si } N_r = 0 \rightarrow W \operatorname{sen}(\beta_2) h_{CG} = W \operatorname{cos}(\beta_2) b$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\beta_2)}{\operatorname{cos}(\beta_2)} = \frac{b}{h_{CG}} \rightarrow \tan(\beta_2) = \frac{b}{h_{CG}}$$

$$\beta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{b}{h_{CG}}\right) \rightarrow \beta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{0,81}{0,99}\right) = 39,3^\circ$$

Anexo F. Cálculo de la relación de suspensión

La relación de suspensión, R_s , se define como:

$$R_s = \frac{K_{yp}}{K_L}$$

Donde, K_{yp} hace referencia a la variación de la posición vertical del punto de contacto y K_L a la variación de la longitud del resorte-amortiguador, con respecto a θ_1 . Dicho esto, se procede a realizar las respectivas derivadas:

$$K_{yp} = -r_1 \cos(\theta_1) + r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) \frac{d\theta_2}{d\theta_1} + r_3 \cos(\alpha) \frac{d\alpha}{d\theta_1} - r \operatorname{sen}(\alpha) \frac{d\alpha}{d\theta_1}$$

$$\frac{d\alpha}{d\theta_1} = \frac{d\theta_4}{d\theta_1} - \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \quad ; \quad \frac{d\theta_4}{d\theta_1} = 0$$

$$\frac{d\alpha}{d\theta_1} = -\frac{d\theta_2}{d\theta_1}$$

$$K_{yp} = -r_1 \cos(\theta_1) + \frac{d\theta_2}{d\theta_1} [r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) - r_3 \cos(\alpha) + r \operatorname{sen}(\alpha)]$$

Para facilitar la interpretación de las ecuaciones, se realiza la siguiente sustitución:

$$\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = K_{\theta_2}$$

$$K_{yp} = -r_1 \cos(\theta_1) + K_{\theta_2} [r_2 \operatorname{sen}(\theta_2) - r_3 \cos(\alpha) + r \operatorname{sen}(\alpha)]$$

Para poder hallar K_{θ_2} se hace necesario derivar implícitamente el sistema de ecuaciones obtenido en el primer lazo vectorial desarrollado:

$$\begin{cases} K_L \operatorname{sen}(\theta_2) + L \cos(\theta_2) K_{\theta_2} + r_1 \operatorname{sen}(\theta_1) + r_a \cos(\theta_2) K_{\theta_2} = 0 \\ -K_L \cos(\theta_2) + L \operatorname{sen}(\theta_2) K_{\theta_2} - r_1 \cos(\theta_1) + r_a \operatorname{sen}(\theta_2) K_{\theta_2} = 0 \end{cases}$$

Lo anterior da como resultado K_L y K_{θ_2} como las únicas incógnitas a determinar:

$$K_L = -\frac{L \cos(\theta_2) K_{\theta_2} + r_1 \operatorname{sen}(\theta_1) + r_a \cos(\theta_2) K_{\theta_2}}{\operatorname{sen}(\theta_2)}$$

$$K_L = \frac{L \operatorname{sen}(\theta_2) K_{\theta_2} - r_1 \cos(\theta_1) + r_a \operatorname{sen}(\theta_2) K_{\theta_2}}{\cos(\theta_2)}$$

$$\begin{aligned} & -[L \cos(\theta_2) K_{\theta_2} + r_1 \operatorname{sen}(\theta_1) + r_a \cos(\theta_2) K_{\theta_2}] \cos(\theta_2) \\ & = [L \operatorname{sen}(\theta_2) K_{\theta_2} - r_1 \cos(\theta_1) + r_a \operatorname{sen}(\theta_2) K_{\theta_2}] \operatorname{sen}(\theta_2) \\ & -L \cos^2(\theta_2) K_{\theta_2} - r_1 \operatorname{sen}(\theta_1) \cos(\theta_2) - r_a \cos^2(\theta_2) K_{\theta_2} \\ & = L \operatorname{sen}^2(\theta_2) K_{\theta_2} - r_1 \cos(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) + r_a \operatorname{sen}^2(\theta_2) K_{\theta_2} \\ & L K_{\theta_2} (\operatorname{sen}^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_2)) + r_a K_{\theta_2} (\operatorname{sen}^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_2)) \\ & = r_1 (\cos(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) - \operatorname{sen}(\theta_1) \cos(\theta_2)) \end{aligned}$$

Del anterior despeje y aplicando las identidades trigonométricas necesarias, se obtiene la siguiente expresión para K_{θ_2} :

$$K_{\theta_2} (L + r_a) = r_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) \quad \rightarrow \quad K_{\theta_2} = \frac{r_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{L + r_a}$$

Reemplazando K_{θ_2} en K_L se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} K_L \cos(\theta_2) &= K_{\theta_2} \operatorname{sen}(\theta_2) (L + r_a) - r_1 \cos(\theta_1) \\ K_L \cos(\theta_2) &= r_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) - r_1 \cos(\theta_1) \\ K_L &= \frac{r_1 (\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) - \cos(\theta_1))}{\cos(\theta_2)} \end{aligned}$$

Finalmente, la relación de suspensión queda expresada como:

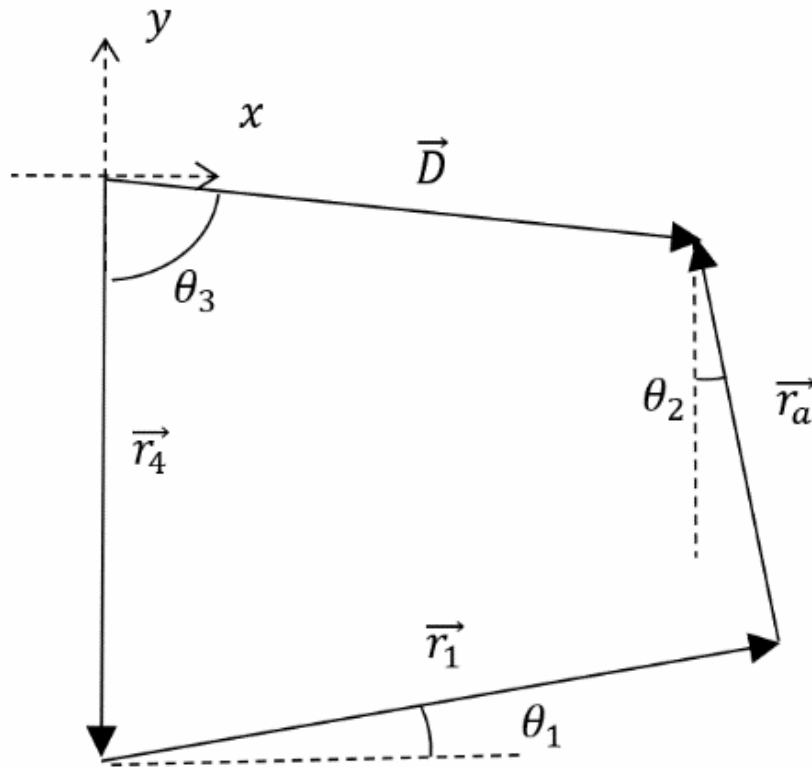
$$R_s = \frac{K_{yp}}{K_L} = \frac{\frac{dy_p}{d\theta_1}}{\frac{dL}{d\theta_1}} = \frac{dy_p}{dL}$$

$$R_s = \frac{\frac{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{L + r_a} [r_2 \text{sen}(\theta_2) - r_8 \cos(\alpha) + r \text{sen}(\alpha)] - \cos(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2 - \theta_1) \text{sen}(\theta_2) - \cos(\theta_1)} \cos(\theta_2)$$

Anexo G. Variación del vector de dirección

Para conocer la variación del vector dirección, se plantea el siguiente lazo vectorial:

Figura 4. Lazo vectorial de la dirección



Fuente: Autores

$$\vec{D} = \vec{r}_4 + \vec{r}_1 + \vec{r}_a$$

$$\text{En } x : D \operatorname{sen}(\theta_3) = r_1 \cos(\theta_1) - r_a \operatorname{sen}(\theta_2)$$

$$\text{En } y : -D \cos(\theta_3) = -r_4 + r_1 \operatorname{sen}(\theta_1) + r_a \cos(\theta_2)$$

Anexo H. Análisis de velocidades

A partir de las ecuaciones obtenidas en el primer lazo vectorial, se derivan con respecto al tiempo, obteniendo las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} \operatorname{sen}(\theta_2) + \frac{d\theta_2}{dt} \cos(\theta_2) L &= -r_1 \operatorname{sen}(\theta_1) \frac{d\theta_1}{dt} - r_a \cos(\theta_2) \frac{d\theta_2}{dt} \\ - \left[\frac{dL}{dt} \cos(\theta_2) - \frac{d\theta_2}{dt} \operatorname{sen}(\theta_2) L \right] &= r_1 \cos(\theta_1) \frac{d\theta_1}{dt} - r_a \operatorname{sen}(\theta_2) \frac{d\theta_2}{dt} \end{aligned}$$

Estas derivadas se pueden reescribir como:

$$\frac{dL}{dt} = v_L \quad ; \quad \frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 \quad ; \quad \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2$$

$$\begin{aligned} v_L \operatorname{sen}(\theta_2) + \omega_2 \cos(\theta_2) L &= -r_1 \operatorname{sen}(\theta_1) \omega_1 - r_a \cos(\theta_2) \omega_2 \\ \omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2) L - v_L \cos(\theta_2) &= r_1 \cos(\theta_1) \omega_1 - r_a \operatorname{sen}(\theta_2) \omega_2 \end{aligned}$$

$$v_L = \frac{-[r_1 \operatorname{sen}(\theta_1) \omega_1 + r_a \cos(\theta_2) \omega_2 + \omega_2 \cos(\theta_2) L]}{\operatorname{sen}(\theta_2)}$$

$$v_L = \frac{\omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2) L - r_1 \cos(\theta_1) \omega_1 + r_a \operatorname{sen}(\theta_2) \omega_2}{\cos(\theta_2)}$$

$$\begin{aligned} -r_1 \operatorname{sen}(\theta_1) \cos(\theta_2) \omega_1 - r_a \cos^2(\theta_2) \omega_2 - \omega_2 \cos^2(\theta_2) L \\ = \omega_2 \operatorname{sen}^2(\theta_2) L - r_1 \cos(\theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) \omega_1 + r_a \operatorname{sen}^2(\theta_2) \omega_2 \end{aligned}$$

$$r_1 \omega_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) = \omega_2 (L + r_a)$$

$$\omega_2 = \frac{r_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)} \omega_1$$

De igual manera, la velocidad del resorte-amortiguador se puede calcular como:

$$v_L \cos(\theta_2) = \omega_2 [r_a \operatorname{sen}(\theta_2) + L \operatorname{sen}(\theta_2)] - r_1 \cos(\theta_1) \omega_1$$

$$v_L \cos(\theta_2) = (r_a + L) \operatorname{sen}(\theta_2) \frac{r_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)} \omega_1 - r_1 \cos(\theta_1) \omega_1$$

$$v_L \cos(\theta_2) = \omega_1 r_1 [\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) - \cos(\theta_1)]$$

$$v_L = \frac{r_1 [\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{sen}(\theta_2) - \cos(\theta_1)]}{\cos(\theta_2)} \omega_1$$

Nota: La notación "L" usada en este anexo hace referencia a L_{resorte} , debido a disminución en la longitud de las ecuaciones.

Anexo I. Análisis de aceleraciones

A continuación, se presenta el proceso matemático para la obtención de las aceleraciones de los miembros articulados del sistema de suspensión McPherson, partiendo de la segunda derivada del vector de posición angular y lineal de los eslabones y el sistema resorte-amortiguador, respectivamente.

$$\frac{d^2L}{dt^2} = a_L \quad ; \quad \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \varepsilon_1 \quad ; \quad \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \varepsilon_2$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{r_1 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)} \frac{d\theta_1}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = r_1 \left[\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \frac{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)} + \frac{d\theta_1}{dt} A \right]$$

$$A = \frac{d[\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)(L + r_a)^{-1}]}{dt}$$

$$= \cos(\theta_2 - \theta_1) (\omega_2 - \omega_1) (L + r_a)^{-1} - (L + r_a)^{-2} v_L \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)$$

$$A = \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1) (\omega_2 - \omega_1)}{(L + r_a)} - \frac{v_L \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)^2}$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = r_1 \left[\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \frac{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)} + \frac{d\theta_1}{dt} \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)} \left(\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_1}{dt} \right) - \frac{dL}{dt} \frac{d\theta_1}{dt} \frac{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)^2} \right]$$

$$\rightarrow \varepsilon_2 = r_1 \left[\varepsilon_1 \frac{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)} + \omega_1 \frac{\cos(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)} (\omega_2 - \omega_1) - v_L \omega_1 \frac{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{(L + r_a)^2} \right]$$

$$\frac{dL}{dt} = r_1 [\tan(\theta_2) \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1) - \sec(\theta_2) \cos(\theta_1)] \frac{d\theta_1}{dt}$$

$$\frac{d^2L}{dt^2} = r_1 \left[\frac{d^2\theta_1}{dt^2} B + \frac{d\theta_1}{dt} \frac{dB}{dt} \right]$$

$$B = \tan(\theta_2) \sin(\theta_2 - \theta_1) - \sec(\theta_2) \cos(\theta_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} = & \sec^2(\theta_2) \frac{d\theta_2}{dt} \sin(\theta_2 - \theta_1) + \cos(\theta_2 - \theta_1) \left(\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_1}{dt} \right) \tan(\theta_2) \\ & + \left[-\sec(\theta_2) \tan(\theta_2) \frac{d\theta_2}{dt} \cos(\theta_1) + \sin(\theta_1) \frac{d\theta_1}{dt} \sec(\theta_2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2L}{dt^2} = & r_1 \left\{ \frac{d^2\theta_1}{dt^2} [\tan(\theta_2) \sin(\theta_2 - \theta_1) - \sec(\theta_2) \cos(\theta_1)] \right. \\ & + \frac{d\theta_1}{dt} \left[\sec^2(\theta_2) \sin(\theta_2 - \theta_1) \frac{d\theta_2}{dt} + \cos(\theta_2 - \theta_1) \left(\frac{d\theta_2}{dt} - \frac{d\theta_1}{dt} \right) \tan(\theta_2) \right. \\ & \left. \left. - \sec(\theta_2) \tan(\theta_2) \cos(\theta_1) \frac{d\theta_2}{dt} + \sin(\theta_1) \sec(\theta_2) \frac{d\theta_1}{dt} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a_L = & r_1 \{ \varepsilon_1 [\tan(\theta_2) \sin(\theta_2 - \theta_1) - \sec(\theta_2) \cos(\theta_1)] \\ & + \omega_1 [\sec^2(\theta_2) \sin(\theta_2 - \theta_1) \omega_2 + \cos(\theta_2 - \theta_1) (\omega_2 - \omega_1) \tan(\theta_2) \\ & - \sec(\theta_2) \tan(\theta_2) \cos(\theta_1) \omega_2 + \sin(\theta_1) \sec(\theta_2) \omega_1] \} \end{aligned}$$

Nota: La notación "L" usada en este anexo hace referencia a $L_{resorte}$, debido a disminución en la longitud de las ecuaciones.

Anexo J. Aceleraciones en los centros de gravedad de los miembros articulados

El vector de posición del centro de gravedad del cuerpo 1 visto desde el punto A, se expresa como:

$$r_{CG1x} = \frac{r_1}{2} \cos(\theta_1) \quad \wedge \quad r_{CG1y} = \frac{r_1}{2} \operatorname{sen}(\theta_1)$$

$$\frac{d r_{CG1x}}{dt} = v_{1x} \quad ; \quad \frac{d r_{CG1y}}{dt} = v_{1y}$$

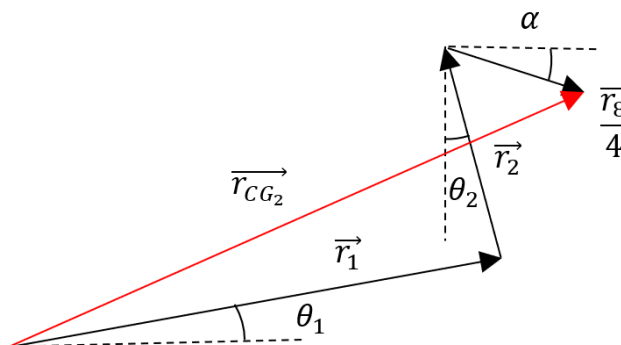
$$v_{1x} = -\frac{r_1}{2} \operatorname{sen}(\theta_1) \omega_1 \quad \wedge \quad v_{1y} = \frac{r_1}{2} \cos(\theta_1) \omega_1$$

$$\frac{d v_{1x}}{dt} = a_{1x} \quad ; \quad \frac{d v_{1y}}{dt} = a_{1y}$$

$$a_{1x} = -\frac{r_1}{2} [\cos(\theta_1) \omega_1^2 + \varepsilon_1 \operatorname{sen}(\theta_1)] \quad \wedge \quad a_{1y} = \frac{r_1}{2} [\operatorname{sen}(\theta_1) \omega_1^2 + \varepsilon_1 \cos(\theta_1)]$$

Por otra parte, se requiere conocer la aceleración en el cuerpo 2, por lo que se procede a construir el lazo vectorial que permita determinar la posición del centro de gravedad.

Figura 150. Lazo vectorial para el análisis cinemático del centro de gravedad del cuerpo 2



Fuente: autores

En la realidad, este miembro posee una geometría compleja que será analizada posteriormente, por lo que se decide, de forma preliminar, simplificar el modelo de manera que el centro de gravedad se encuentre a $\frac{3}{4}r_8$, visto desde el punto de conexión del miembro y la rueda.

$$\vec{r}_{CG_2} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \frac{\vec{r}_8}{4}$$

$$\vec{r}_1 = r_1 [\cos(\theta_1) \hat{i} + \sin(\theta_1) \hat{j}]$$

$$\vec{r}_2 = r_2 [-\sin(\theta_2) \hat{i} + \cos(\theta_2) \hat{j}]$$

$$\frac{\vec{r}_8}{4} = \frac{r_8}{4} [\cos(\alpha) \hat{i} - \sin(\alpha) \hat{j}]$$

$$r_{CG_2x} = r_1 \cos(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2) + \frac{r_8}{4} \cos(\alpha)$$

$$r_{CG_2y} = r_1 \sin(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2) - \frac{r_8}{4} \sin(\alpha)$$

$$\frac{d r_{CG_2x}}{dt} = v_{2x} \quad ; \quad \frac{d r_{CG_2y}}{dt} = v_{2y}$$

$$v_{2x} = -r_1 \sin(\theta_1) \omega_1 - r_2 \cos(\theta_2) \omega_2 - \frac{r_8}{4} \sin(\alpha) \dot{\alpha}$$

$$\rightarrow v_{2x} = -r_1 \sin(\theta_1) \omega_1 - r_2 \cos(\theta_2) \omega_2 + \frac{r_8}{4} \sin(\alpha) \omega_2$$

$$v_{2y} = r_1 \cos(\theta_1) \omega_1 - r_2 \sin(\theta_2) \omega_2 + \frac{r_8}{4} \cos(\alpha) \omega_2$$

$$\frac{d v_{2x}}{dt} = a_{2x} \quad ; \quad \frac{d v_{2y}}{dt} = a_{2y}$$

$$v_{2x} = -r_1 \sin(\theta_1) \omega_1 + \omega_2 \left[\frac{r_8}{4} \sin(\alpha) - r_2 \cos(\theta_2) \right]$$

$$a_{2x} = -r_1 [\cos(\theta_1) \omega_1^2 + \varepsilon_1 \sin(\theta_1)] + \varepsilon_2 \left[\frac{r_8}{4} \sin(\alpha) - r_2 \cos(\theta_2) \right] \\ + \left[-\frac{r_8}{4} \cos(\alpha) \omega_2 + r_2 \sin(\theta_2) \omega_2 \right] \omega_2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a_{2x} = & -r_1 [\cos(\theta_1) \omega_1^2 + \varepsilon_1 \text{sen}(\theta_1)] + \varepsilon_2 \left[\frac{r_8}{4} \text{sen}(\alpha) - r_2 \cos(\theta_2) \right] \\ & + \omega_2^2 \left[r_2 \text{sen}(\theta_2) - \frac{r_8}{4} \cos(\alpha) \right] \end{aligned}$$

$$v_{2y} = r_1 \cos(\theta_1) \omega_1 + \omega_2 \left[\frac{r_8}{4} \cos(\alpha) - r_2 \text{sen}(\theta_2) \right]$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a_{2y} = & r_1 [\varepsilon_1 \cos(\theta_1) - \text{sen}(\theta_1) \omega_1^2] + \varepsilon_2 \left[\frac{r_8}{4} \cos(\alpha) - r_2 \text{sen}(\theta_2) \right] \\ & + \omega_2^2 \left[\frac{r_8}{4} \text{sen}(\alpha) - r_2 \cos(\theta_2) \right] \end{aligned}$$

Anexo K. Cálculos del resorte helicoidal a compresión y coeficiente de amortiguamiento

CÁLCULO DEL RESORTE HELICOIDAL A COMPRESIÓN:

De acuerdo con la fuerza máxima hallada en el apartado de diseño del sistema resorte-amortiguador, que posee un valor de $F_{sd} = 2742,174 \text{ N}$, se procede a realizar el diseño del resorte helicoidal a compresión de la suspensión, para lo cual se establecerá una deflexión máxima δ_{max} . Dicho valor corresponde a la diferencia entre la longitud del resorte en su estado libre ($v_{min} = -100 \text{ mm} \rightarrow L_f = 391,77 \text{ mm}$) y la longitud del resorte cuando el neumático se encuentra en su posición máxima de excitación ($v_{max} = +100 \text{ mm} \rightarrow L_{max} = 203,27 \text{ mm}$).

$$\Delta_{max} = L_f - L_{max} = 188,5 \text{ mm}$$

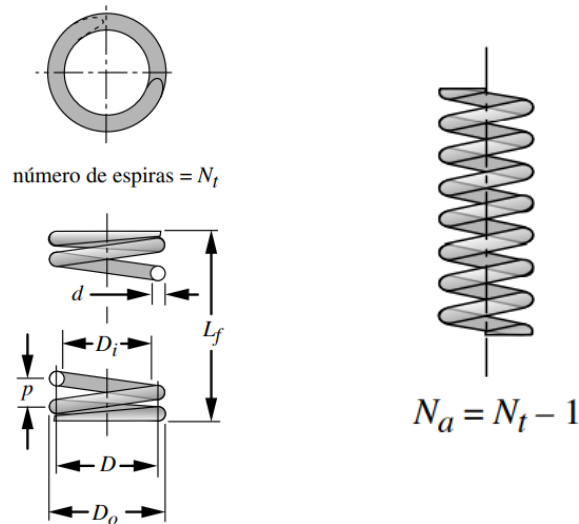
Ahora, con la fuerza y deflexión máxima, se procede a obtener una constante de rigidez de diseño preliminar:

$$k_{diseño} = \frac{F_{sd}}{\Delta_{max}} = \frac{2742,174 \text{ N}}{188,5 \text{ mm}} = 14,547 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Para su construcción se opta por usar un alambre de acero A232 debido a que, además de ser el material más común para fabricar resortes, posee un excelente comportamiento en sistemas con cargas de fatiga, choque e impacto, gracias a sus altos contenidos de Cromo y Vanadio.

Así mismo, se propone un diámetro de hilo de $d = 11 \text{ mm}$ y diámetro medio de la espira de $D = 100 \text{ mm}$.

Figura 151. Izquierda, Dimensiones del resorte helicoidal a compresión. Derecha, número de espiras total para un resorte rectificad



Fuente: Norton, Robert L. DISEÑO DE MAQUINAS, un enfoque integrado. México: Pearson Educación, 2011.

Con estos valores es posible calcular el índice del resorte, que no es más que el cociente entre el diámetro medio de la espira y el diámetro de hilo, cuyo valor varía dentro del rango de $4 < C_{resorte} < 12$. Dichos limites se deben a que los resortes con un índice menor a 4 son difíciles de manufacturar y aquellos mayores a 12 tienden a pandearse.

En ese orden de ideas, se verifica si el resorte propuesto posee un índice que se encuentre dentro del intervalo establecido:

$$C_{resorte} = \frac{D}{d} = \frac{100}{11} = 9,091$$

Se procede a calcular el número de espiras que poseerá el resorte y la longitud de cierre, teniendo presente que sus extremos serán rectificad

$$\Delta_{max} = \frac{8 \cdot F_{sd} \cdot D^3 \cdot N_a}{G \cdot d^4} \rightarrow N_a = \frac{\Delta_{max} \cdot G \cdot d^4}{8 \cdot F_{sd} \cdot D^3} \rightarrow N_a = 10,062$$

$$\therefore N_a \approx 10 \text{ espiras} \rightarrow N_t = N_a + 1 = 10 + 1 = 11 \text{ espiras}$$

$$L_{cierre} = d \cdot N_t = (11 \text{ mm})(11 \text{ espiras}) = 121 \text{ mm}$$

Al hallar el número de espiras activas y totales del resorte, es posible calcular la constante de rigidez real:

$$k_{sf} = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot N_a} \rightarrow k_{sf} = 14,641 \frac{N}{mm}$$

$$\%Error = \left(1 - \frac{k_{diseño}}{k_{sf}} \right) \cdot 100 = 0,64\%$$

Nótese que la diferencia entre el $k_{diseño}$ y k_{sf} es mínima, con una desviación del 0,64%, confirmando que el material seleccionado y los diámetros propuestos fueron elegidos de forma adecuada para el resorte diseñado.

ANÁLISIS DE RESISTENCIA DEL RESORTE HELICOIDAL A COMPRESIÓN:

Realizado el cálculo de los parámetros geométricos del resorte, se procede a realizar un estudio a partir de los criterios de resistencia de este. Para ello, es necesario calcular las variables incidentes en este estudio, las cuales son:

Factor de cortante directo.

$$\kappa_s = 1 + \frac{0,5}{C} \rightarrow \kappa_s = 1 + \frac{0,5}{9,091} = 1,055$$

Esfuerzo cortante en la espira.

$$\tau_s = \kappa_s \cdot \left(\frac{8 \cdot F_{sd} \cdot D}{\pi \cdot d^3} \right) \rightarrow \tau_s = 1,055 \cdot \left(\frac{(8)(2742,714)(100)}{\pi(11^3)} \right) = 553,6 \text{ MPa}$$

Resistencia a la tensión máxima.

$$S_{ut} = A \cdot d^b$$

Tabla 27. Coeficientes y exponentes para la expresión de la resistencia máxima a la tensión

ASTM #	Material	Intervalo		Exponente <i>b</i>	Coeficiente <i>A</i>		Factor de correlación
		mm	in		MPa	psi	
A227	Forjado en frío	0.5–16	0.020–0.625	-0.182 2	1 753.3	141 040	0.998
A228	Alambre musical	0.3–6	0.010–0.250	-0.162 5	2 153.5	184 649	0.9997
A229	Revenido en aceite	0.5–16	0.020–0.625	-0.183 3	1 831.2	146 780	0.999
A232	Cromo-v.	0.5–12	0.020–0.500	-0.145 3	1 909.9	173 128	0.998
A401	Cromo-s.	0.8–11	0.031–0.437	-0.093 4	2 059.2	220 779	0.991

Fuente: Norton, Robert L. DISEÑO DE MAQUINAS, un enfoque integrado. México: Pearson Educación, 2011.

Como el material usado para el diseño del resorte es un acero A232, los coeficientes a usar serán: $A = 1909,9 \text{ MPa}$ y $b = -0,1453$

$$S_{ut} = 1909,9 d^{-0,1453} \rightarrow S_{ut} = 1909,9(11)^{-0,1453} = 1348 \text{ MPa}$$

Limite elástico a la torsión y factor de seguridad. Se ha estimado, a través de pruebas extensas, que una estimación razonable de la resistencia ultima a la torsión es del 67% de la resistencia ultima a la tensión ²

$$S_{us} = 0,67 S_{ut} \rightarrow S_{us} = 0,67(1348 \text{ MPa}) = 903,16 \text{ MPa}$$

$$N_s = \frac{S_{us}}{\tau_s} = \frac{903,16}{553,6} = 1,63$$

Este factor de seguridad muestra un comportamiento adecuado del resorte en términos de resistencia de las cargas a compresión que soporta durante un ciclo de conducción estático y posición del neumático neutro.

Verificación de condición de pandeo en el resorte. El pandeo se verifica a partir del cálculo de la relación de esbeltez del resorte y la razón de deflexión a la longitud libre, que son calculadas a partir de las siguientes expresiones:

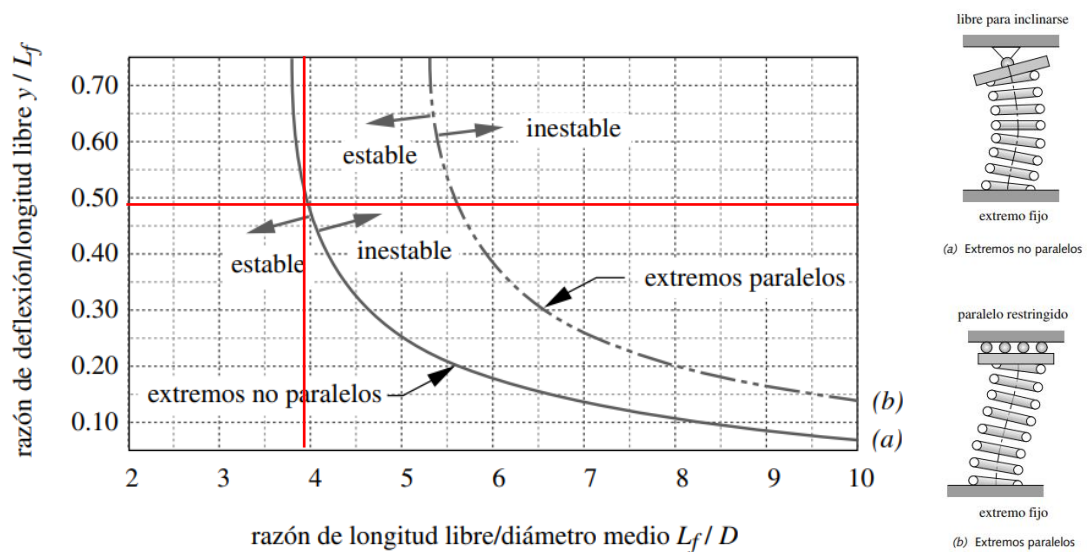
$$\text{Esbeltez} = \frac{L_f}{D} = \frac{391,77}{100} = 3,92$$

$$\text{Deflexion} = \frac{\Delta_{max}}{L_f} = \frac{188,5}{391,77} = 0,48$$

Ahora bien, se busca el punto de corte de los valores de esbeltez y deflexión en la Figura 152., teniendo en cuenta que los extremos del resorte se mantendrán paralelos durante toda su deflexión.

² Norton, Robert L. DISEÑO DE MAQUINAS, un enfoque integrado. México: Pearson Educación, 2011.

Figura 152. curvas de situación crítica de pandeo



Fuente: Norton, Robert L. DISEÑO DE MAQUINAS, un enfoque integrado. México: Pearson Educación, 2011.

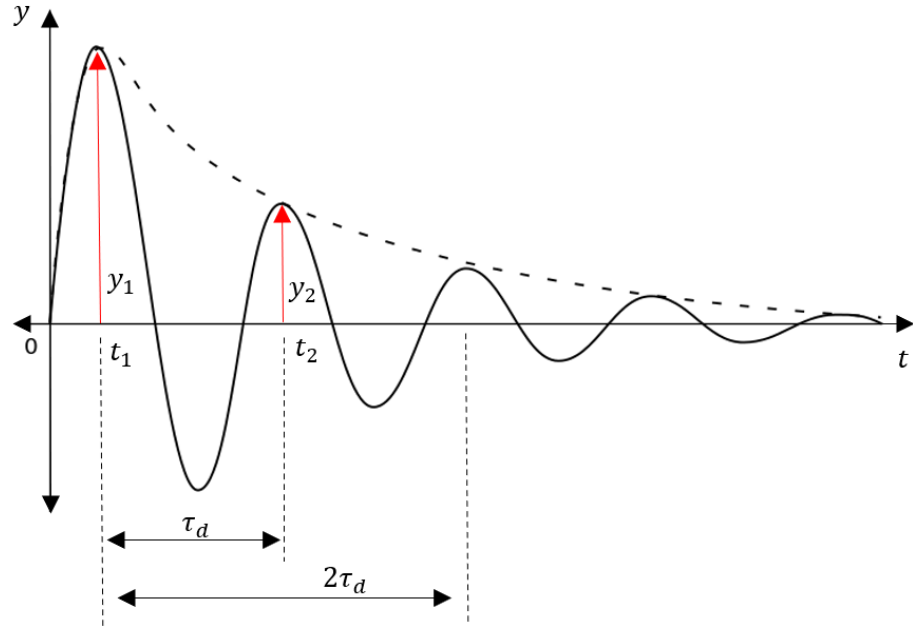
Hallado el punto de corte, se observa que este se encuentra en la zona de estabilidad estructural y se corrobora que no existe la presencia de pandeo, independientemente de que sus extremos se encuentren paralelos o no.

CÁLCULOS DEL AMORTIGUADOR PARA LA SUSPENSIÓN DELANTERA

Se requiere que el sistema de suspensión, al momento de recibir la señal de excitación producto de la irregularidad del terreno, disipe el movimiento de tal forma que la amplitud decaiga en un 99% después de un solo periodo de amortiguamiento.

Dado el requerimiento, se procede a obtener la relación de amortiguamiento a partir del decrecimiento logarítmico, tal como se muestra en la siguiente figura:

Figura 153. Decremento logarítmico



Fuente: Autores

$$y_1 = y e^{-\xi \omega_n t_1} \quad ; \quad y_2 = y e^{-\xi \omega_n (t_1 + \tau_d)} \quad ; \quad y_2 = 0,01 y_1$$

$$\rho = \ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \ln\left(\frac{y_1}{0,01 y_1}\right) = \ln\left(\frac{1}{0,01}\right)$$

$$\rho = \ln\left(\frac{y e^{-\xi \omega_n t_1}}{y e^{-\xi \omega_n (t_1 + \tau_d)}}\right) = \ln\left(\frac{y e^{-\xi \omega_n t_1}}{y e^{-\xi \omega_n t_1} \cdot e^{-\xi \omega_n \tau_d}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{-\xi \omega_n \tau_d}}\right) = \xi \omega_n \tau_d$$

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{2\pi \xi \omega_n}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad \therefore \rho = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Reemplazando los valores calculados e igualando los decrecimientos logarítmicos hallados, se obtiene que la relación de amortiguamiento es:

$$\ln\left(\frac{1}{0,01}\right) = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad \rightarrow \quad \xi = 0,5911$$

$$\xi = \frac{c_{df}}{c_{cf}} \quad ; \quad c_{cf} = 2m_q\omega_n = 2m_q\sqrt{\frac{k_{sf}}{m_q}} = 2\sqrt{k_{sf} \cdot m_q}$$

Nótese que m_f hace referencia a la masa que soporta un cuarto del vehículo en el tren delantero. Dicho esto, y sabiendo que el tren delantero debe soportar el 60% de la carga total del vehículo, se procede a calcular m_q :

$$m_q = \frac{0,6 m}{2} = \frac{0,6 (700 \text{ kg})}{2} = 210 \text{ kg}$$

$$\therefore c_{cf} = 2\sqrt{(14641)(210)} = 3506,9 \frac{Ns}{m}$$

Hallada la constante de amortiguamiento crítica, se procede a calcular la constante de amortiguamiento del sistema, que será necesaria para realizar la simulación vibratoria del de la suspensión delantera.

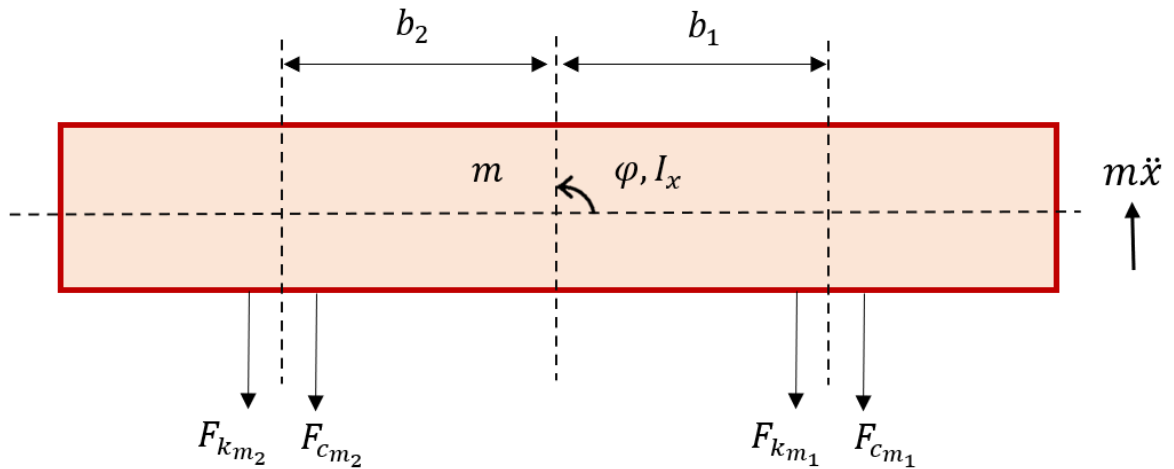
$$c_{df} = \xi \cdot c_{cf} = 0,5911 (3506,9) = 2072,9 \frac{Ns}{m}$$

Anexo L. Deducción del modelo vibratorio para medio vehículo sin barra estabilizadora

Para poder obtener las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento del modelo del sistema de suspensión, se procede a realizar el diagrama de cuerpo libre para cada elemento que conforma la mitad del vehículo.

En el caso de la carrocería, que corresponde a la masa suspendida, actúan las siguientes fuerzas:

Figura 154. DCL de la carrocería



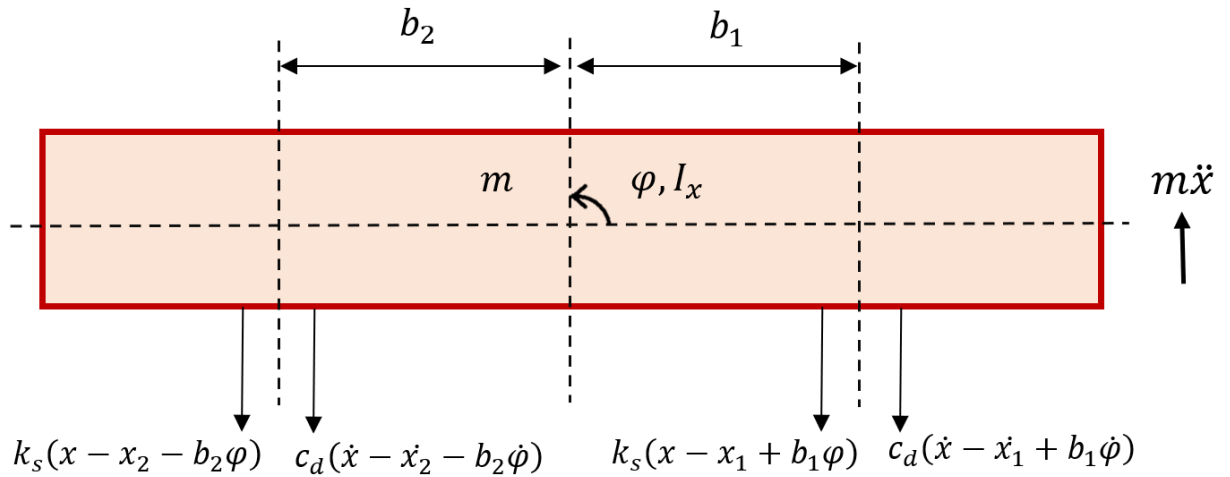
Fuente: Autores

$$F_{k_{m_1}} = k_s(x - x_1 - b_1\varphi) \quad ; \quad F_{k_{m_2}} = k_s(x - x_2 - b_2\varphi)$$

$$F_{c_{m_1}} = c_d(\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1\dot{\varphi}) \quad ; \quad F_{c_{m_2}} = c_d(\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2\dot{\varphi})$$

Aplicando la segunda ley de Newton traslacional y rotacional para la carrocería:

Figura 155. Fuerzas actuando en la carrocería



Fuente: Autores

$$+\uparrow \sum F_y = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = -c(\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2\dot{\varphi}) - c(\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1\dot{\varphi}) - k(x - x_2 - b_2\varphi) - k(x - x_1 + b_1\varphi)$$

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2\dot{\varphi}) + c(\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1\dot{\varphi}) + k(x - x_2 - b_2\varphi) + k(x - x_1 + b_1\varphi) = 0$$

(1)

$$+\circlearrowleft \sum M_o = I_x\ddot{\varphi}$$

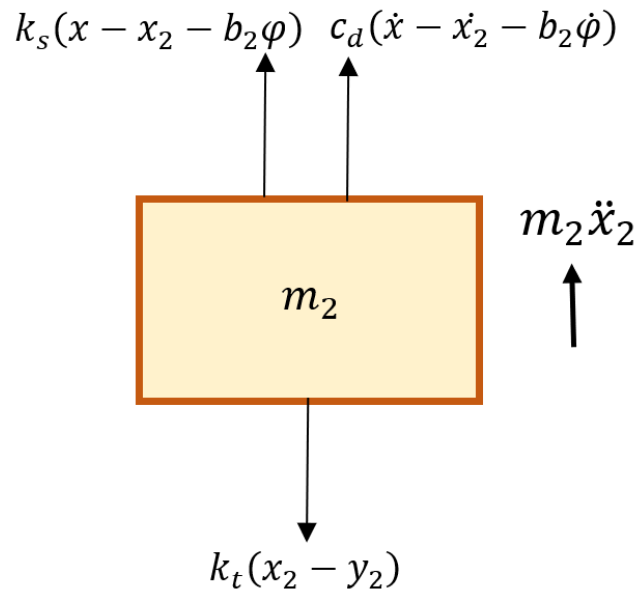
$$b_2k(x - x_2 - b_2\varphi) + b_2c(\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2\dot{\varphi}) - b_1k(x - x_1 + b_1\varphi) - b_1c(\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1\dot{\varphi}) - k_r\varphi = I_x\ddot{\varphi}$$

$$I_x\ddot{\varphi} + b_1k(x - x_1 + b_1\varphi) + b_1c(\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1\dot{\varphi}) - b_2k(x - x_2 - b_2\varphi) - b_2c(\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2\dot{\varphi}) + k_r\varphi = 0$$

(2)

Se repite el mismo análisis dinámico para la masa no suspendida:

Figura 156. DCL de la rueda (masa 2)



Fuente: Autores

$$+\uparrow \sum F_y = m_2\ddot{x}_2$$

$$k(x - x_2 - b_2\phi) + c(\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2\dot{\phi}) - k_t(x_2 - y_2) = m_2\ddot{x}_2$$

$$m_2\ddot{x}_2 - c(\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2\dot{\phi}) - k(x - x_2 - b_2\phi) + k_t(x_2 - y_2) = 0 \quad \mathbf{(3)}$$

Por analogía se tiene que la ecuación diferencial que rige el movimiento para la masa uno es:

$$m_1\ddot{x}_1 - c(\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1\dot{\phi}) - k(x - x_1 + b_1\phi) + k_t(x_1 - y_1) = 0 \quad \mathbf{(4)}$$

Anexo M. Parámetros de entrada para la simulación del sistema de suspensión frontal

Las entradas del modelo corresponden a los siguientes parámetros físicos:

Tabla 28. Parámetros entrada para la simulación del sistema de suspensión frontal

ENTRADAS DEL MODELO		
Parametro	Simbolo	Valor
<i>Masa suspendida frontal</i>	m_f	420 [kg]
<i>Masa no suspendida 1</i>	m_1	40 [kg]
<i>Masa no suspendida 2</i>	m_2	40 [kg]
<i>Inercia a lo largo del eje x de la masa suspendida</i>	I_{xf}	983.74 [kg · m ²]
<i>Constante de amortiguamiento de los cilindros amortiguadores</i>	c_{df}	2063 [$\frac{N \cdot s}{m}$]
<i>Constante de rigidez del resorte amortiguador</i>	k_{sf}	14641 [$\frac{N}{m}$]
<i>Constante de rigidez del neumático</i>	k_t	125000 [$\frac{N}{m}$]
<i>Posición del punto de aplicación de las fuerzas del resorte amortiguador 1 respecto del centro de la carrocería</i>	b_1	0.7 [m]
<i>Posición del punto de aplicación de las fuerzas del resorte amortiguador 2 respecto del centro de la carrocería</i>	b_2	0.7 [m]
<i>Velocidad de oscilación de la carrocería</i>	\dot{x}	Retroalimentado

<i>Velocidad de oscilación del sistema de suspensión 1</i>	\dot{x}_1	<i>Retroalimentado</i>
<i>Velocidad de oscilación del sistema de suspensión 2</i>	\dot{x}_2	<i>Retroalimentado</i>
<i>Velocidad angular de la carrocería</i>	$\dot{\varphi}$	<i>Retroalimentado</i>
<i>Posición de la carrocería</i>	x	<i>Retroalimentado</i>
<i>Posición de la masa no suspendida 1</i>	x_1	<i>Retroalimentado</i>
<i>Posición de la masa no suspendida 2</i>	x_2	<i>Retroalimentado</i>
<i>Angulo de balanceo</i>	φ	<i>Retroalimentado</i>
<i>Excitación del terreno en la llanta 1</i>	y_1	<i>Propuesto</i>
<i>Excitación del terreno en la llanta 2</i>	y_2	<i>Propuesto</i>

Fuente: Autores

Anexo N. Programación en Matlab de resaltos en vía

RESALTO PARABOLICO

El resalto parabólico se modela en MATLAB de la siguiente forma:

Figura 157. Construcción del resalto parabólico en Matlab-Simulink



Fuente: Autores

En este esquema la rampa, la cual tiene una pendiente de 1, representa el paso del tiempo como parámetro de entrada. El bloque central contiene el código de programación del resalto parabólico y es presentado a continuación:

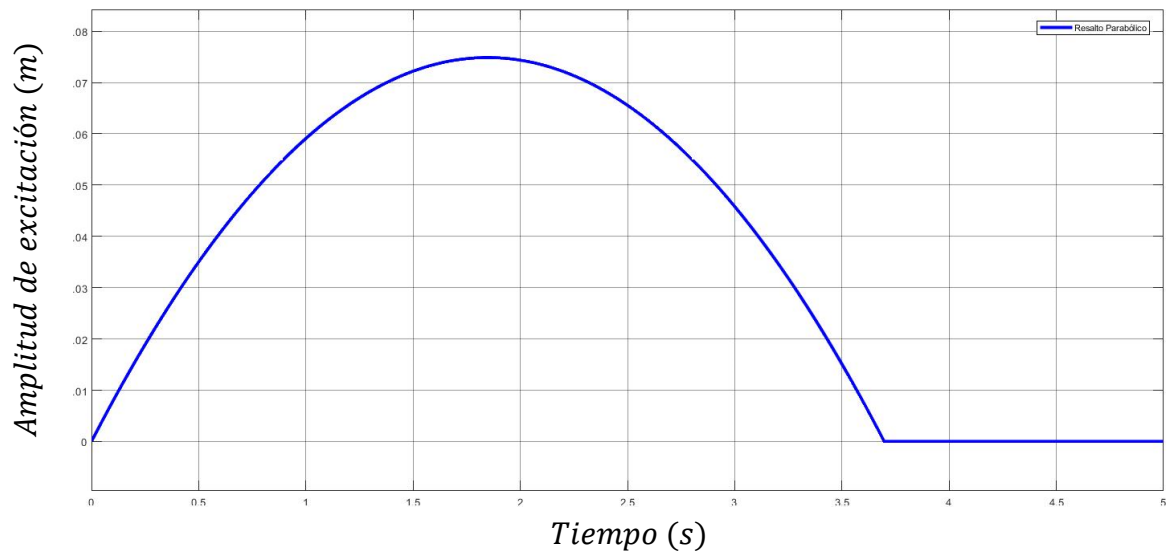
Figura 158. Contenido Matlab-function

```
function y = fcn(x)
if x>=0
if x<=3.7
y=-0.02191*x^2+0.081*x;
else
y=0;
end
else
y=0;
end
end
```

Fuente: Autores

Finalmente, se visualiza la gráfica en el scope.

Figura 159. Resalto Parabólico en Matlab-Simulink

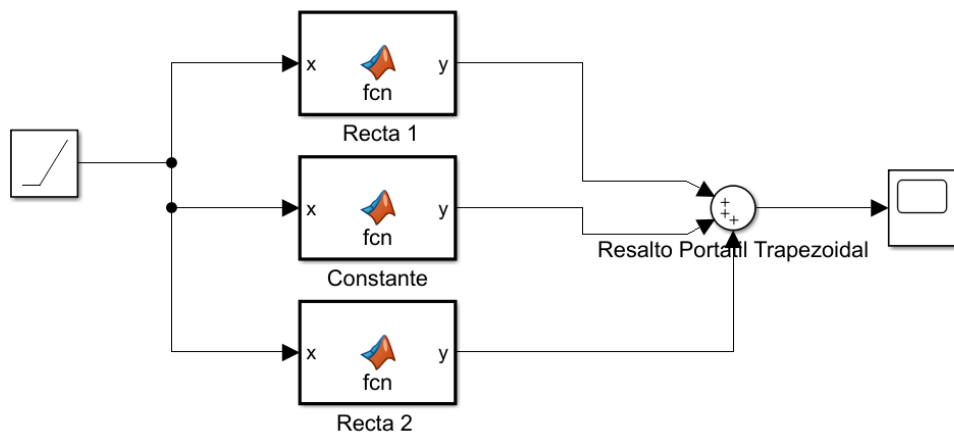


Fuente: Autores

RESALTO TRAPEZOIDAL

El resalto trapezoidal se modela en MATLAB de la siguiente forma:

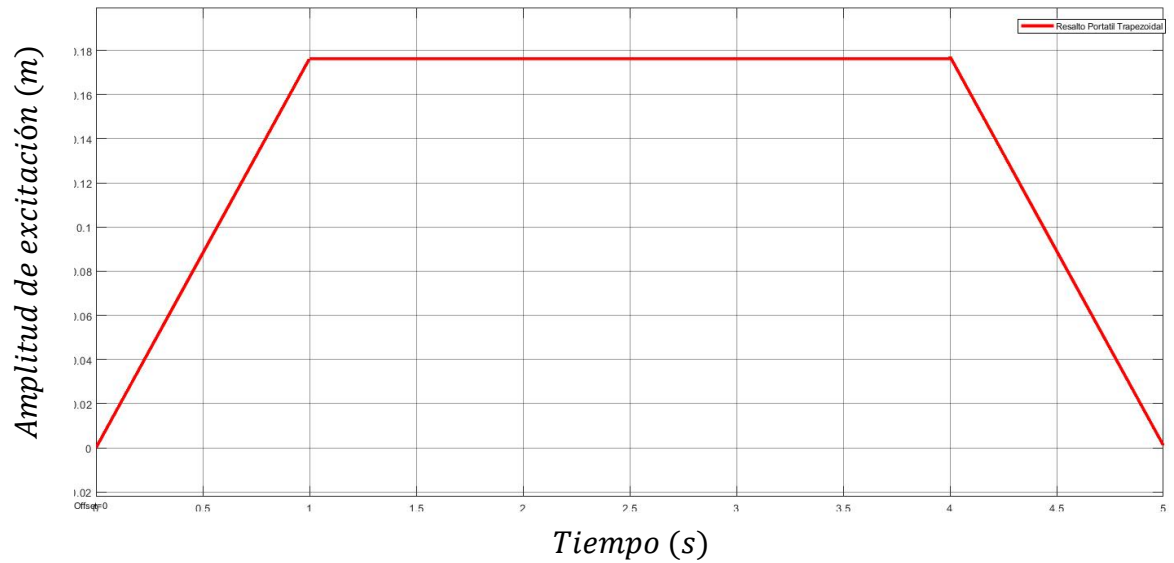
Figura 160. Construcción del resalto trapezoidal en Matlab-Simulink



Fuente: Autores

Cada bloque contiene la programación de la función correspondiente, luego es llevado a un sumador y se visualiza la siguiente gráfica:

Figura 161. Resalto trapezoidal en Matlab-Simulink



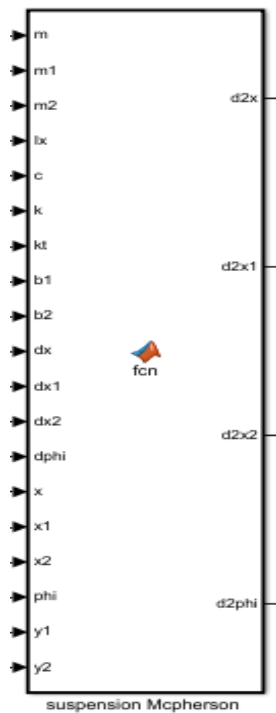
Fuente: Autores

Anexo O. Disposición en Matlab del modelo vibratorio para el sistema de suspensión frontal.

BLOQUE CENTRAL

En el bloque central, que no es más que un Matlab Function, se encuentran todas las ecuaciones diferenciales ya deducidas, en la siguiente imagen se puede observar las entradas, que fueron descritas hace un instante, y las salidas que corresponden a las aceleraciones de cada uno de los grados de libertad.

Figura 162. Bloque Central.



Fuente: Autores

Dentro del bloque central fueron escritas las cuatro ecuaciones diferenciales despejando la derivada de mayor orden, de manera que el sistema recibe todas las

variables de entrada y la calcula, ese dato es llevado después a una serie de integradores.

Figura 163. Interior Bloque Central.

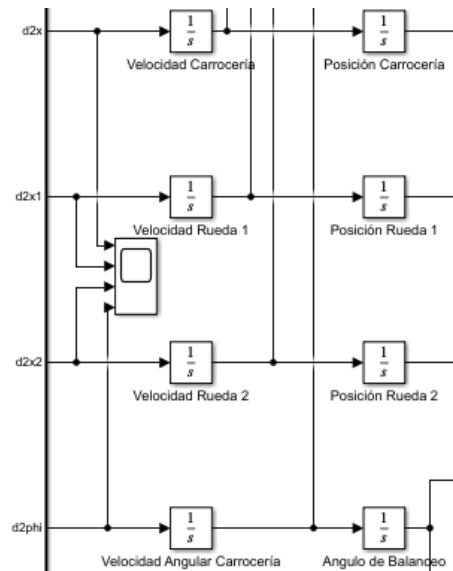
```
function [d2x,d2x1,d2x2,d2phi] = fcn(m,m1,m2,Ix,c,k,kt,b1,b2,dx,dx1,dx2,dphi,x,x1,x2,phi,y1,y2)
d2x = (-c*(dx-dx2-b2*dphi)-c*(dx-dx1+b1*dphi)-k*(x-x2-b2*phi)-k*(x-x1+b1*phi))/m
d2phi = (b2*k*(x-x2-b2*phi)+b2*c*(dx-dx2-b2*dphi)-b1*k*(x-x1+b1*phi)-b1*c*(dx-dx1+b1*dphi))/Ix
d2x1 = (c*(dx-dx1+b1*dphi)+k*(x-x1+b1*phi)-kt*(x1-y1))/m1
d2x2 = (c*(dx-dx2-b2*dphi)+k*(x-x2-b2*phi)-kt*(x2-y2))/m2
```

Fuente: Autores

INTEGRADORES

En el Simulink propuesto se implementan dos integradores por cada salida, estos reciben el valor calculado de la segunda derivada y lo integran obteniéndose así el valor de la velocidad, se repite el mismo procedimiento y se obtiene el valor de la posición tal cual se evidencia en la siguiente imagen.

Figura 164. Integradores

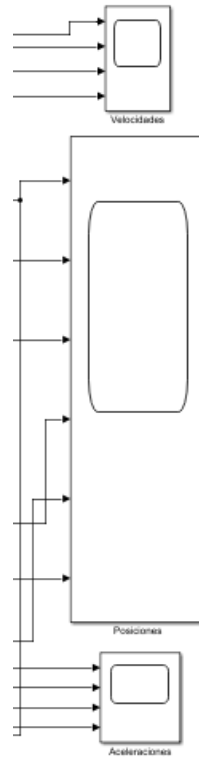


Fuente: Autores

PANELES DE VISUALIZACIÓN

Finalmente, en los scopes se podrá visualizar cada una de las variables a través del tiempo: Aceleración, velocidad y posición.

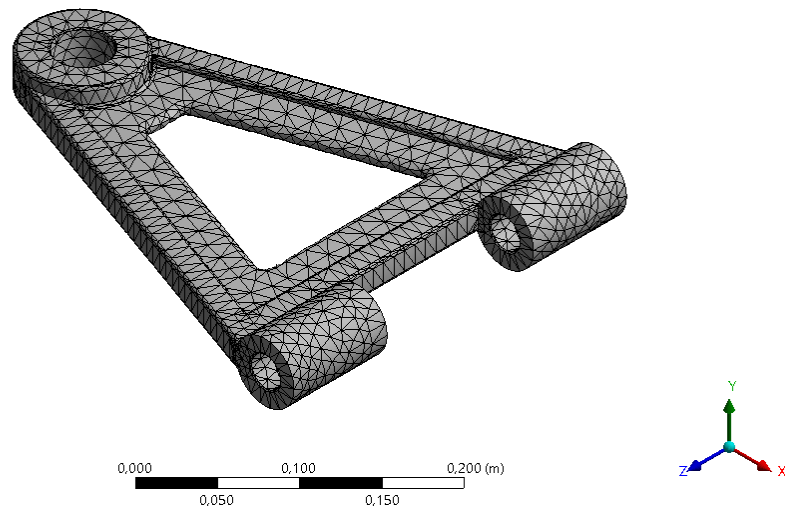
Figura 165. Paneles de visualización



Fuente: Autores

Anexo P. Resultados del análisis estructural por medio del método de elementos finitos para el sistema de suspensión frontal

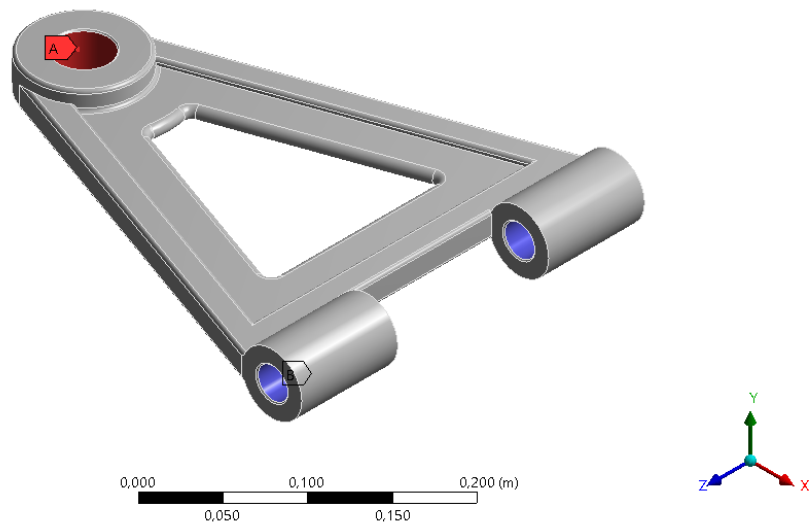
Figura 166. Malla Brazo de Control



Fuente: Autores

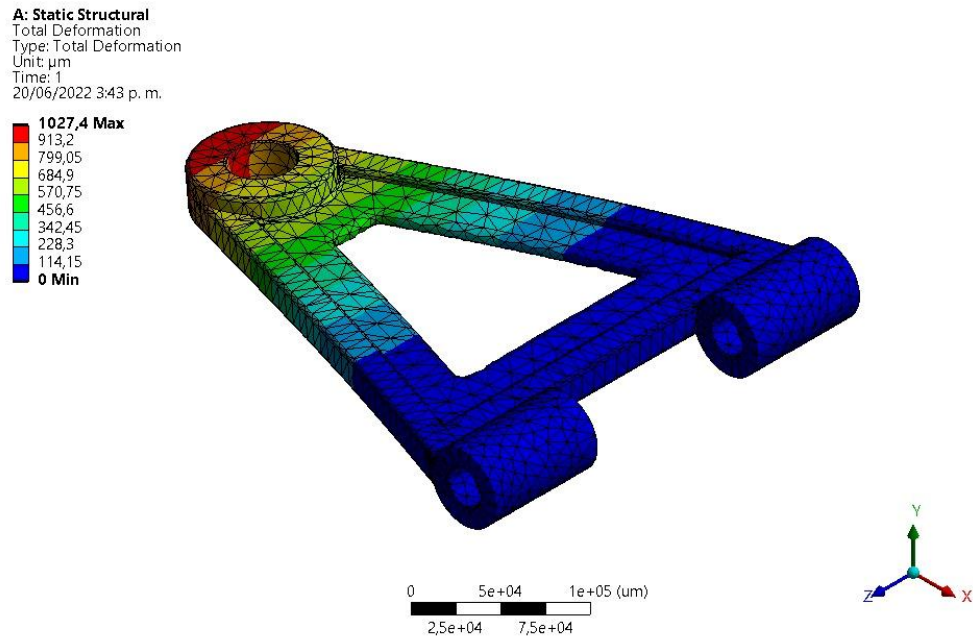
Figura 167. Fuerzas impuestas Brazo de Control

A: Static Structural
Force
Time: 1, s
19/06/2022 6:02 p. m.
A Force: 1529,3 N
B Cylindrical Support: 0, m



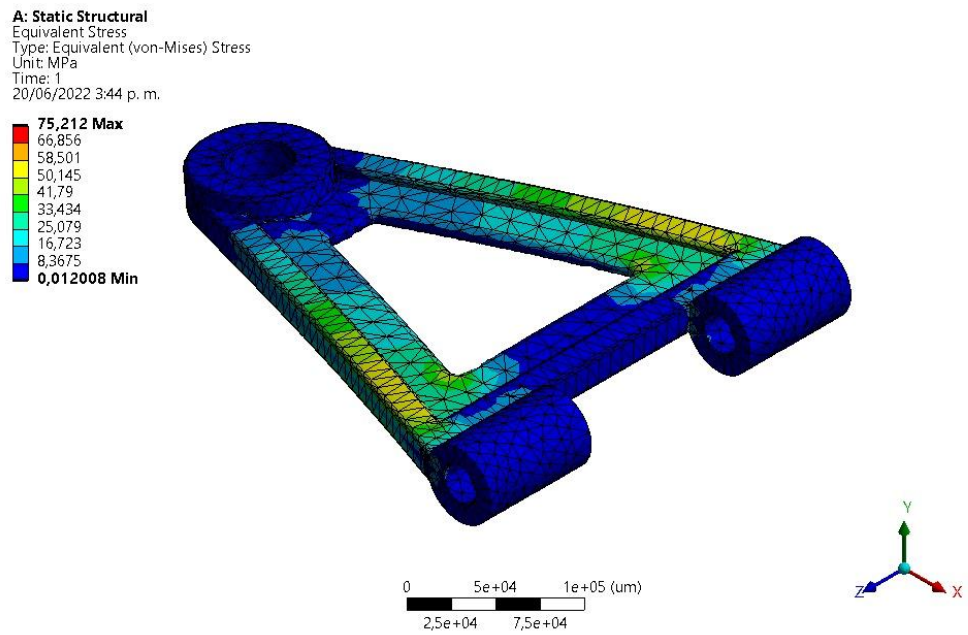
Fuente: Autores

Figura 168. Deformaciones totales Brazo de Control



Fuente: Autores

Figura 169. Esfuerzos equivalentes Brazo de Control

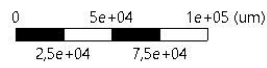
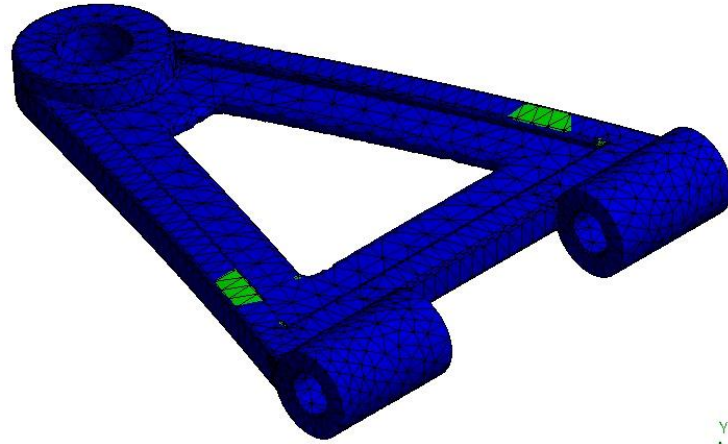


Fuente: Autores

Figura 170. Factor de seguridad Brazo de Control

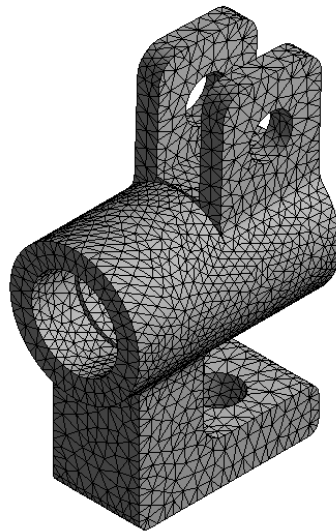
A: Static Structural
Safety Factor
Type: Safety Factor
Time: 1
20/06/2022 3:52 p. m.

15 Max
10,451 Min
2,3257
0



Fuente: Autores

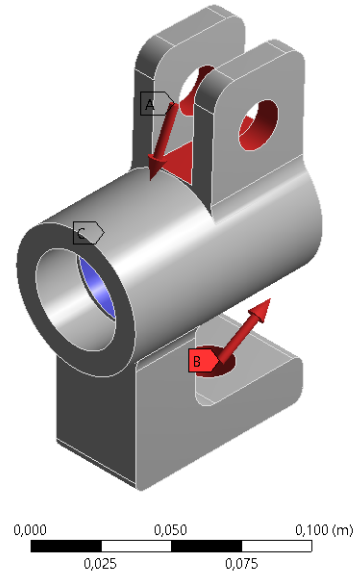
Figura 171. Malla Mangueta



Fuente: Autores

Figura 172. Fuerzas impuestas Mangueta

A: Static Structural
Force
Time: 1, s
19/06/2022 7:06 p. m.
A Force: 2948,1 N
B Force 2: 1529,3 N
C Fixed Support

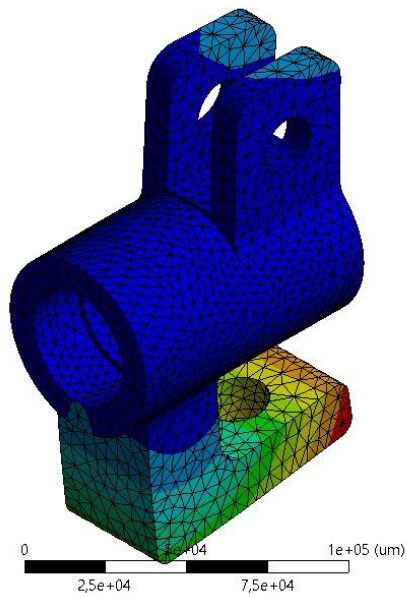


Fuente: Autores

Figura 173. Deformaciones totales Mangueta

A: Static Structural
Total Deformation
Type: Total Deformation
Unit: μm
Time: 1
20/06/2022 3:57 p. m.

21,061 Max
18,721
16,381
14,041
11,701
9,3605
7,0204
4,6802
2,3401
0 Min

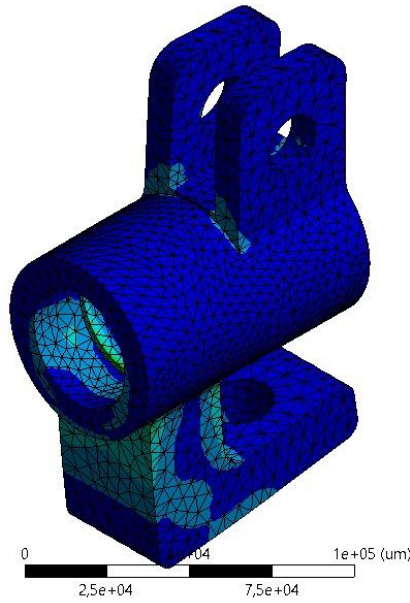


Fuente: Autores

Figura 174. Esfuerzos equivalentes Mangueta

A: Static Structural
Equivalent Stress
Type: Equivalent (von-Mises) Stress
Unit: MPa
Time: 1
20/06/2022 3:56 p. m.

41,936 Max
37,278
32,62
27,962
23,304
18,646
13,988
9,3305
4,6726
0,014703 Min

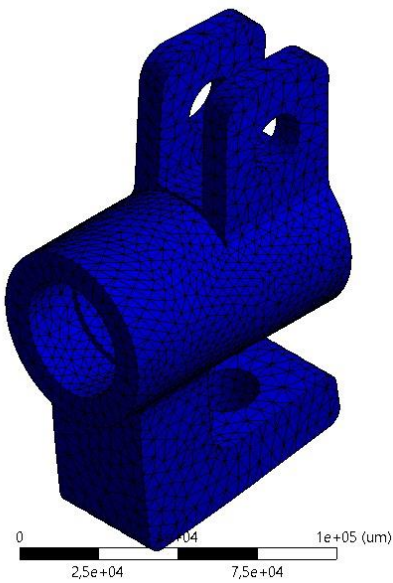


Fuente: Autores

Figura 175. Factor de seguridad Mangueta

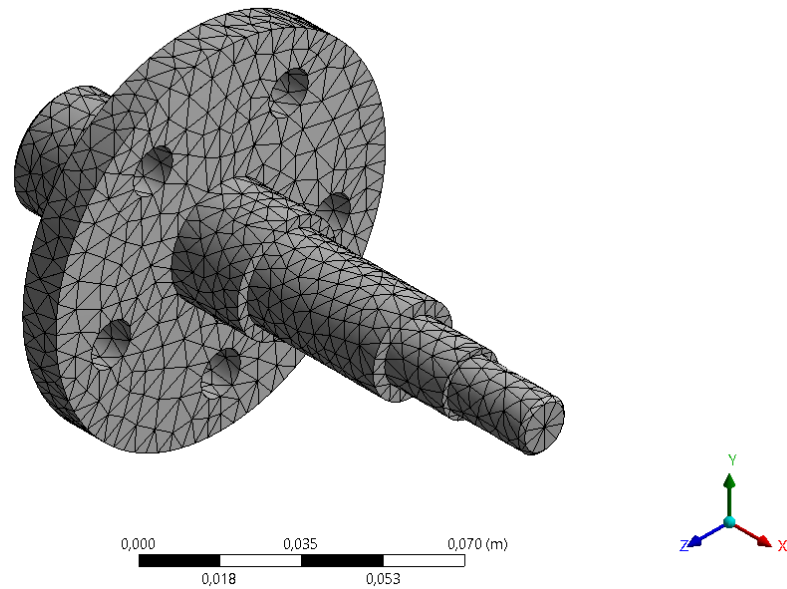
A: Static Structural
Safety Factor
Type: Safety Factor
Time: 1
20/06/2022 3:57 p. m.

15 Max
10,851 Min
1
0



Fuente: Autores

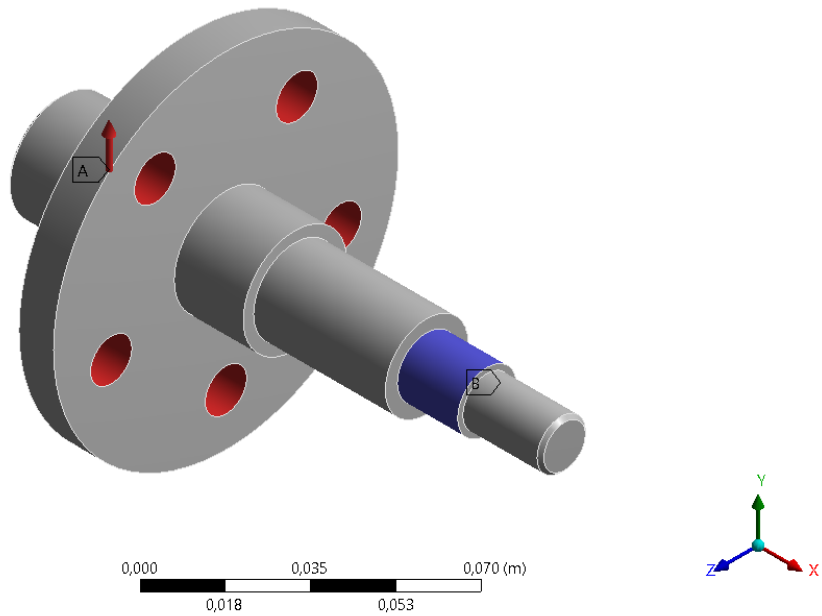
Figura 176. Malla Soporte Rueda



Fuente: Autores

Figura 177. Fuerzas Impuestas sobre el soporte de la rueda

A: Static Structural
Force
Time: 1, s
19/06/2022 7:19 p. m.
A Force: 2000, N
B Fixed Support

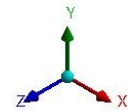
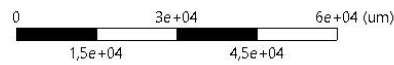
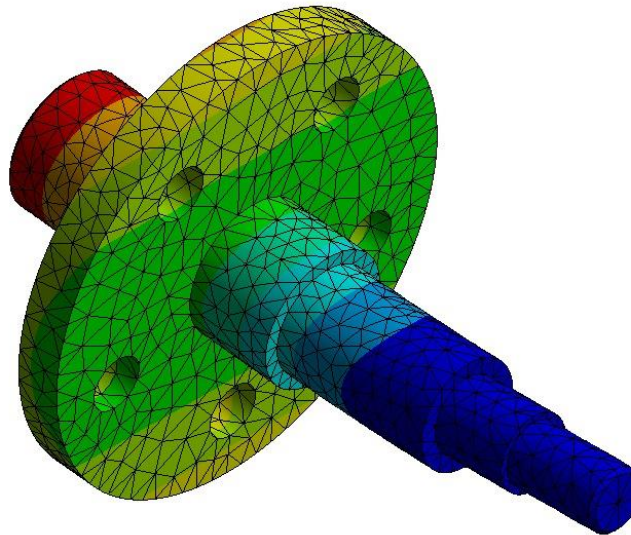


Fuente: Autores

Figura 178. Deformaciones totales Soporte de la rueda

A: Static Structural
Total Deformation
Type: Total Deformation
Unit: μm
Time: 1
20/06/2022 3:59 p. m.

131,64 Max
117,01
102,39
87,759
73,133
58,506
43,88
29,253
14,627
0 Min

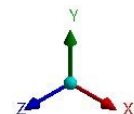
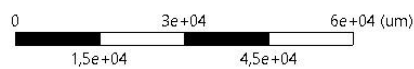
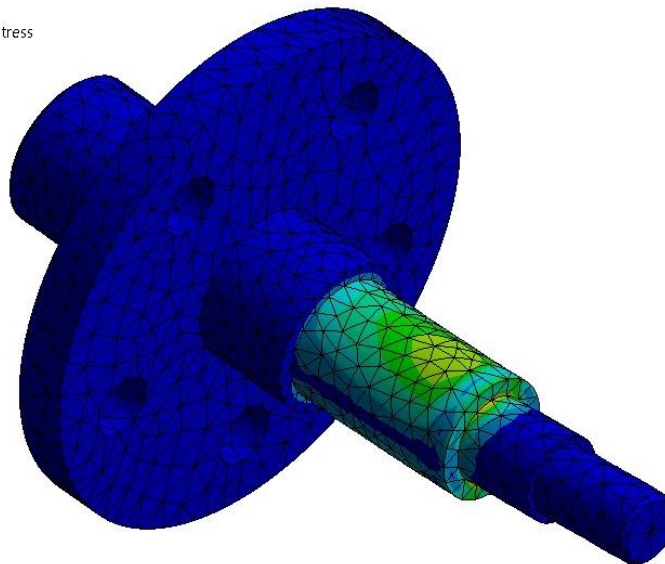


Fuente: Autores

Figura 179. Esfuerzos equivalentes Soporte de la rueda

A: Static Structural
Equivalent Stress
Type: Equivalent (von-Mises) Stress
Unit: MPa
Time: 1
20/06/2022 3:59 p. m.

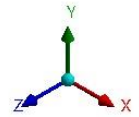
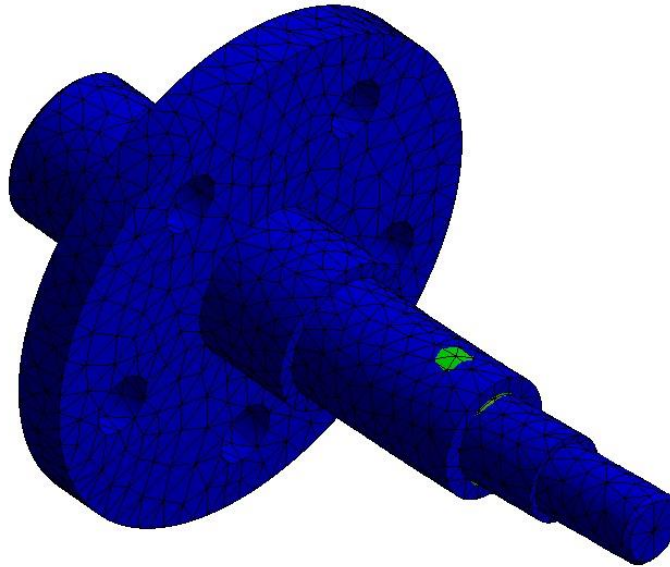
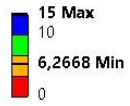
115,37 Max
102,55
89,732
76,913
64,094
51,275
38,457
25,638
12,819
1,1356e-5 Min



Fuente: Autores

Figura 180. Factor de Seguridad Soporte de la rueda

A: Static Structural
Safety Factor
Type: Safety Factor
Time: 1
20/06/2022 4:00 p. m.



Fuente: Autores

Anexo Q. Parámetros de entrada para la simulación del sistema de suspensión trasero

Las entradas del modelo corresponden a los siguientes parámetros físicos:

Tabla 29. Parámetros entrada para la simulación del sistema de suspensión trasero

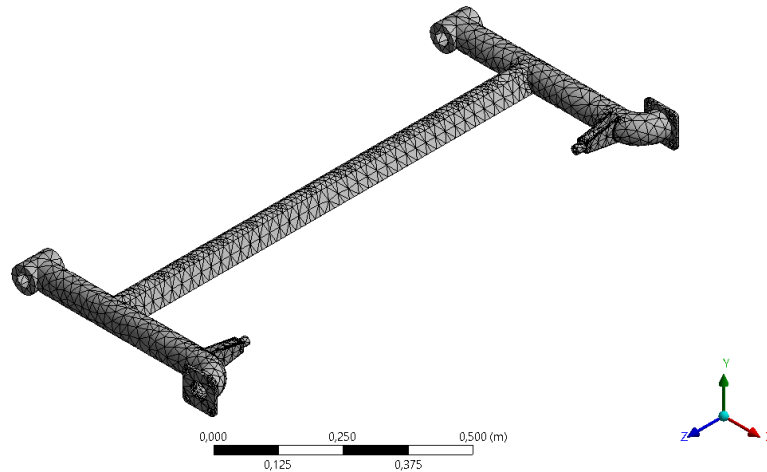
ENTRADAS DEL MODELO		
Parametro	Simbolo	Valor
<i>Masa suspendida</i>	m_r	280 [kg]
<i>Masa no suspendida 1</i>	m_1	40 [kg]
<i>Masa no suspendida 2</i>	m_2	40 [kg]
<i>Inercia a lo largo del eje x de la masa suspendida</i>	I_{xr}	983.74 [kg · m ²]
<i>Constante de amortiguamiento de los cilindros amortiguadores</i>	c_{dr}	2063 [$\frac{N \cdot s}{m}$]
<i>Constante de rigidez del resorte amortiguador</i>	k_{sr}	14641 [$\frac{N}{m}$]
<i>Constante de rigidez del neumático</i>	k_t	125000 [$\frac{N}{m}$]
<i>Posición del punto de aplicación de las fuerzas del resorte amortiguador 1 respecto del centro de la carrocería</i>	b_1	0.7 [m]
<i>Posición del punto de aplicación de las fuerzas del resorte amortiguador 2 respecto del centro de la carrocería</i>	b_2	0.7 [m]
<i>constante de rigidez torsional del eje</i>	k_r	41912 [$\frac{N \cdot m}{rad}$]

<i>Velocidad de oscilación de la carrocería</i>	\dot{x}	<i>Retroalimentado</i>
<i>Velocidad de oscilación del sistema de suspensión 1</i>	\dot{x}_1	<i>Retroalimentado</i>
<i>Velocidad de oscilación del sistema de suspensión 2</i>	\dot{x}_2	<i>Retroalimentado</i>
<i>Velocidad angular de la carrocería</i>	$\dot{\varphi}$	<i>Retroalimentado</i>
<i>Posición de la carrocería</i>	x	<i>Retroalimentado</i>
<i>Posición de la masa no suspendida 1</i>	x_1	<i>Retroalimentado</i>
<i>Posición de la masa no suspendida 2</i>	x_2	<i>Retroalimentado</i>
<i>Angulo de balanceo</i>	φ	<i>Retroalimentado</i>
<i>Excitación del terreno en la llanta 1</i>	y_1	<i>Propuesto</i>
<i>Excitación del terreno en la llanta 2</i>	y_2	<i>Propuesto</i>

Fuente: Autores

Anexo R. Resultados del análisis estructural por medio del método de elementos finitos para el sistema de suspensión trasero

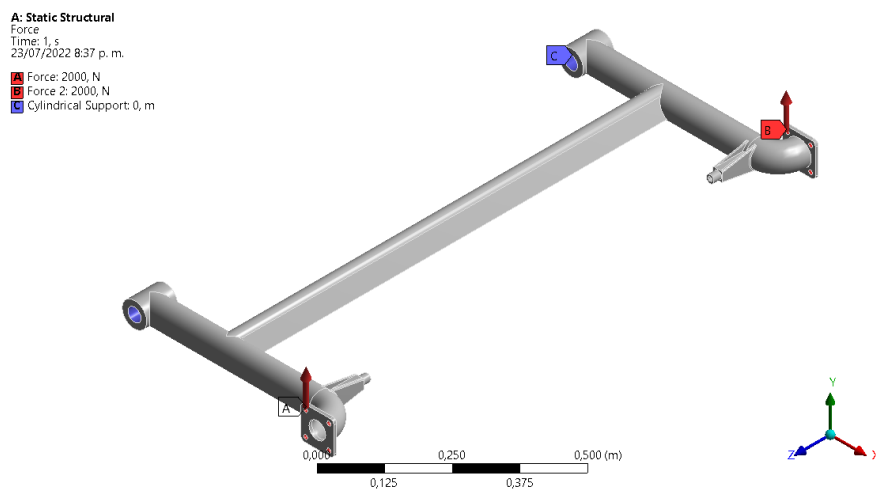
Figura 181. Malla del sistema de eje torsional



Fuente: Autores

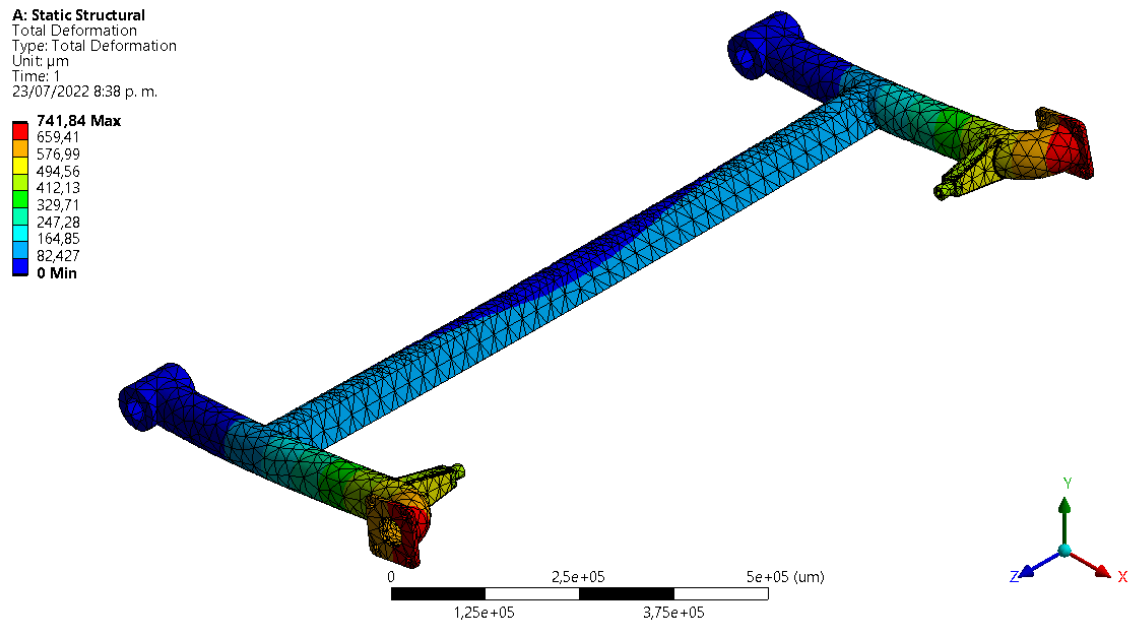
CASO 1: FUERZA APLICADA EN LAS RUEDAS EN EL MISMO SENTIDO SIN DEFLEXIÓN DEL SISTEMA

Figura 182. Fuerzas impuestas para el caso 1



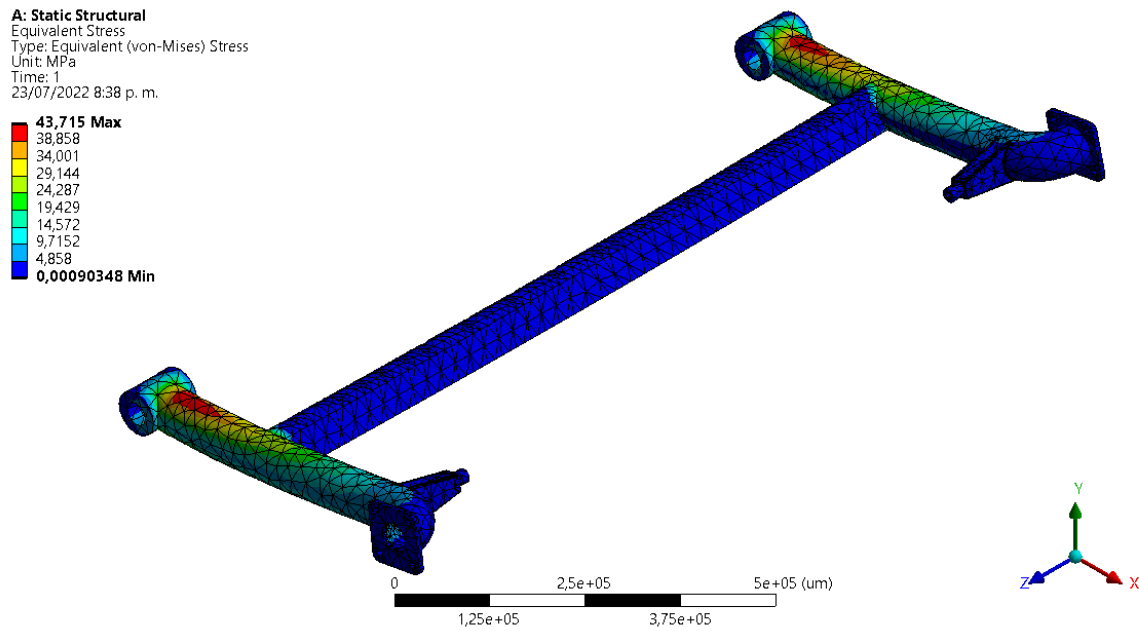
Fuente: Autores

Figura 183. Deformaciones totales para el caso 1



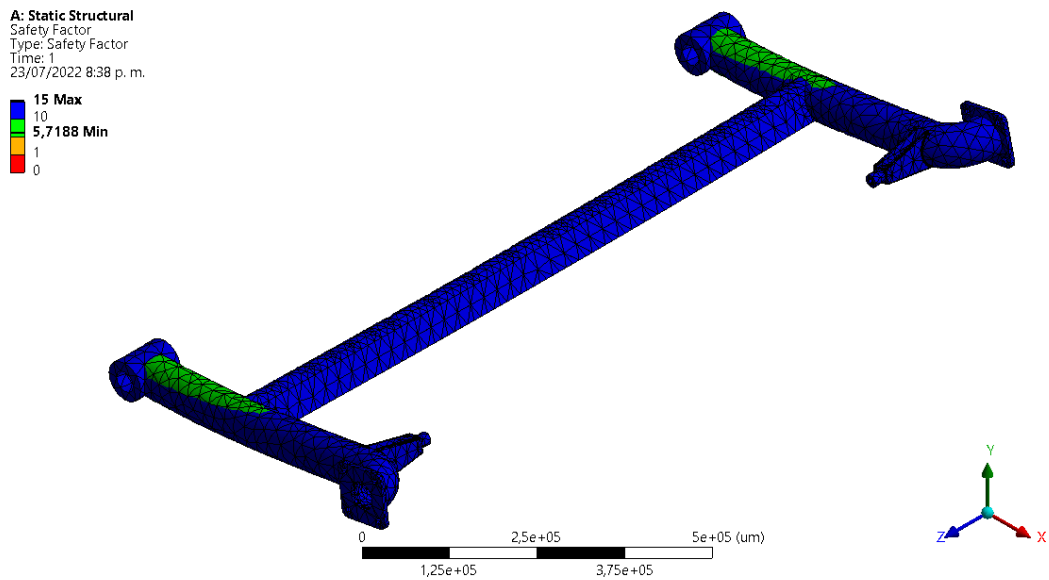
Fuente: Autores

Figura 184. Esfuerzos equivalentes para el caso 1



Fuente: Autores

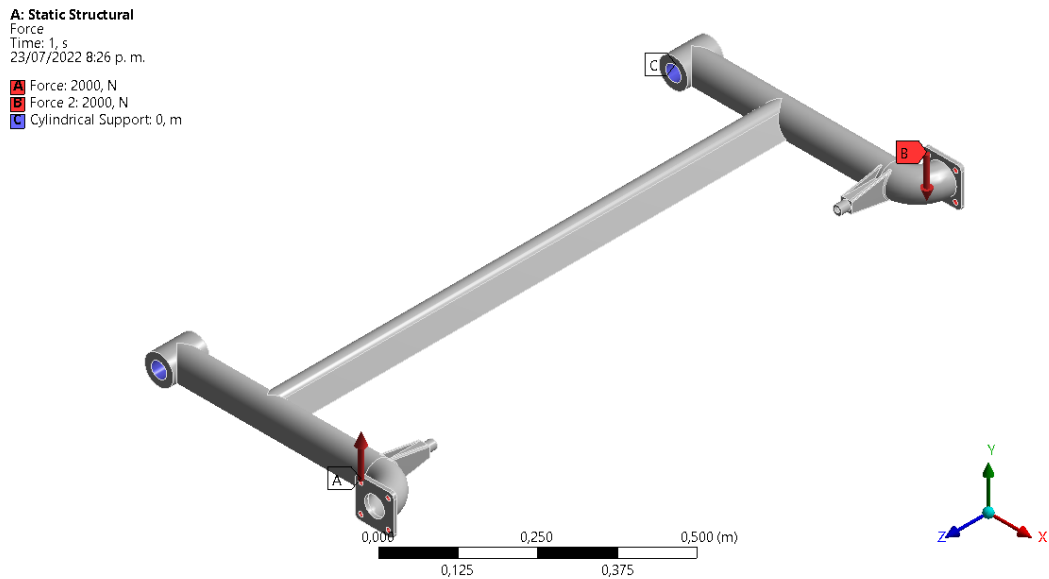
Figura 185. Factor de seguridad para el caso 1



Fuente: Autores

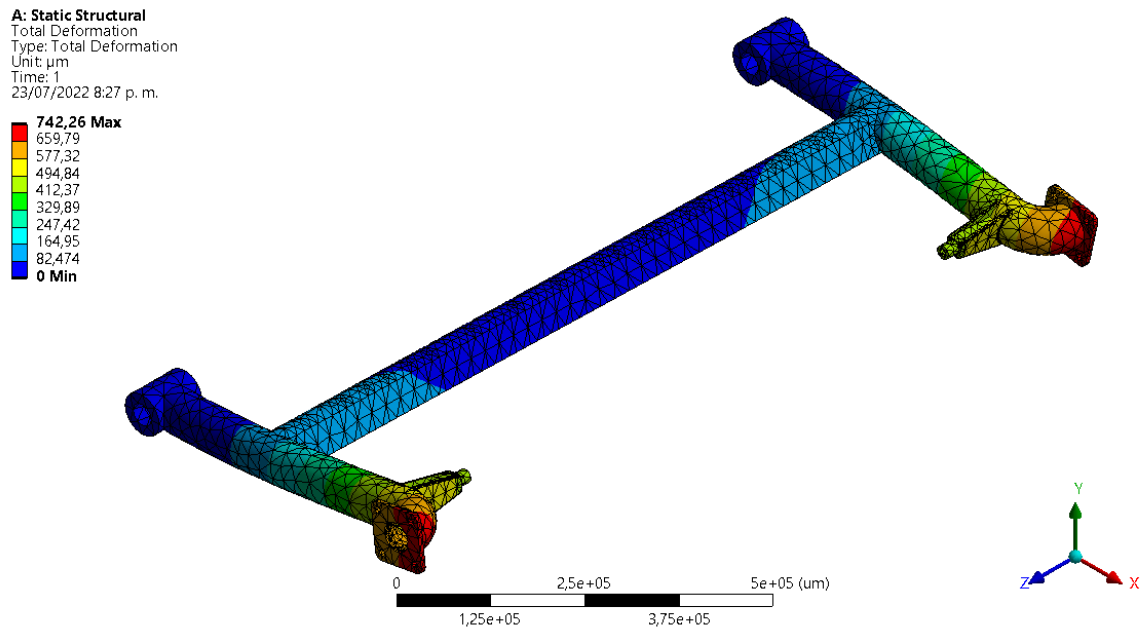
CASO 2: FUERZA APLICADA EN LAS RUEDAS EN SENTIDO OPUESTO SIN DEFLEXIÓN DEL SISTEMA

Figura 186. Fuerzas impuestas para el caso 2



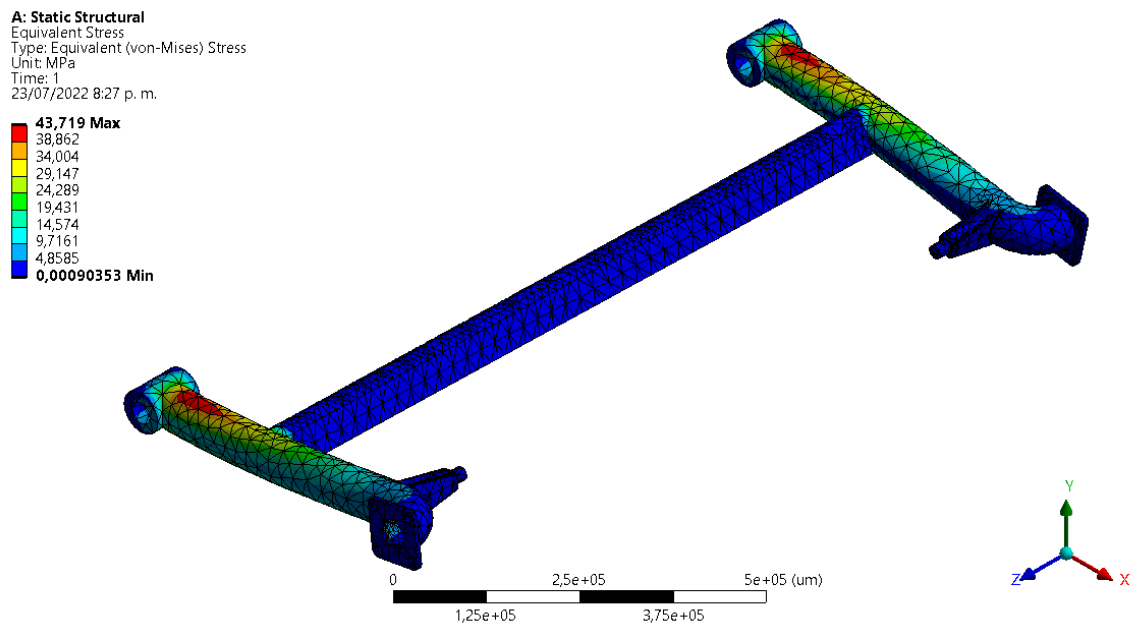
Fuente: Autores

Figura 187. Deformaciones totales para el caso 2



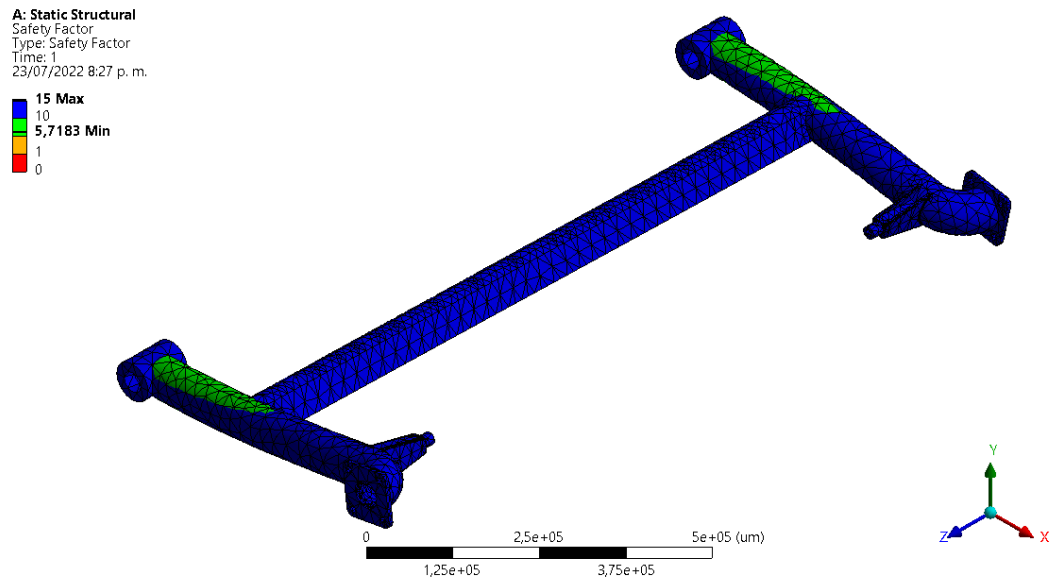
Fuente: Autores

Figura 188. Esfuerzos equivalentes para el caso 2



Fuente: Autores

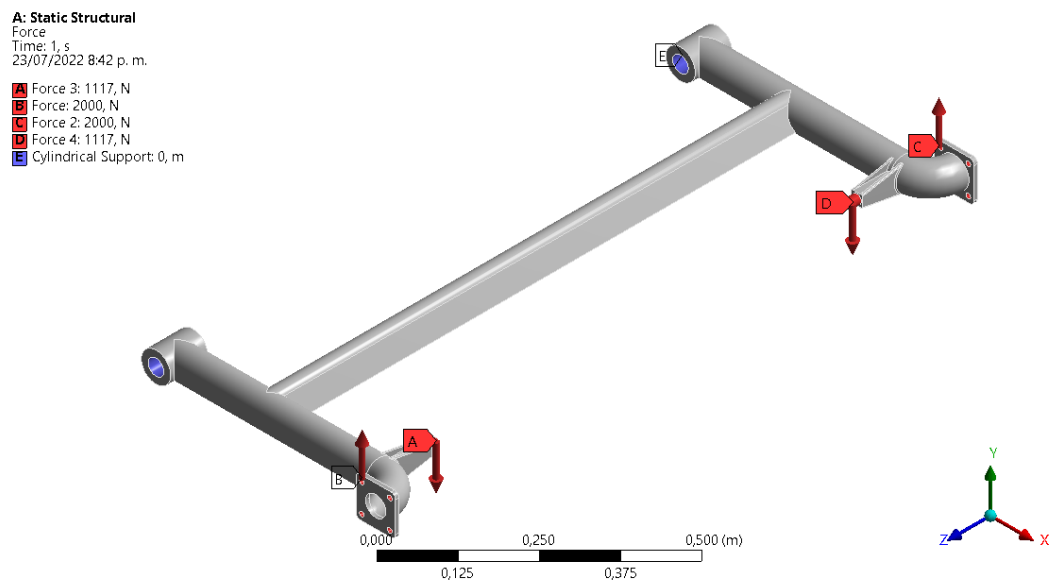
Figura 189. Factor de seguridad para el caso 2



Fuente: Autores

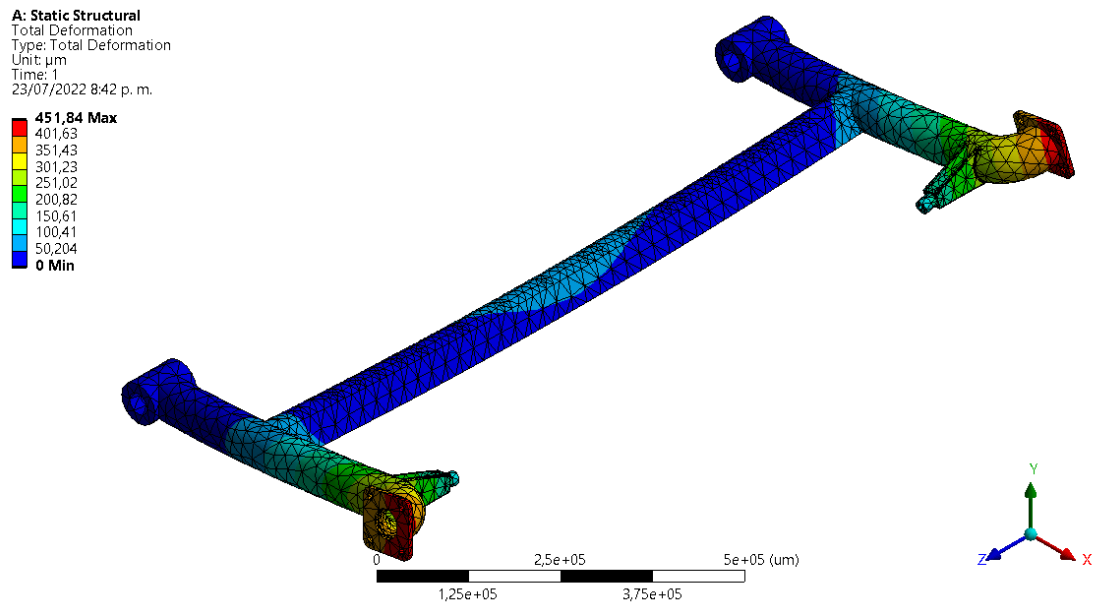
CASO 3: FUERZA APLICADA EN LAS RUEDAS EN EL MISMO SENTIDO CON DEFLEXIÓN DEL SISTEMA

Figura 190. Fuerzas impuestas para el caso 3



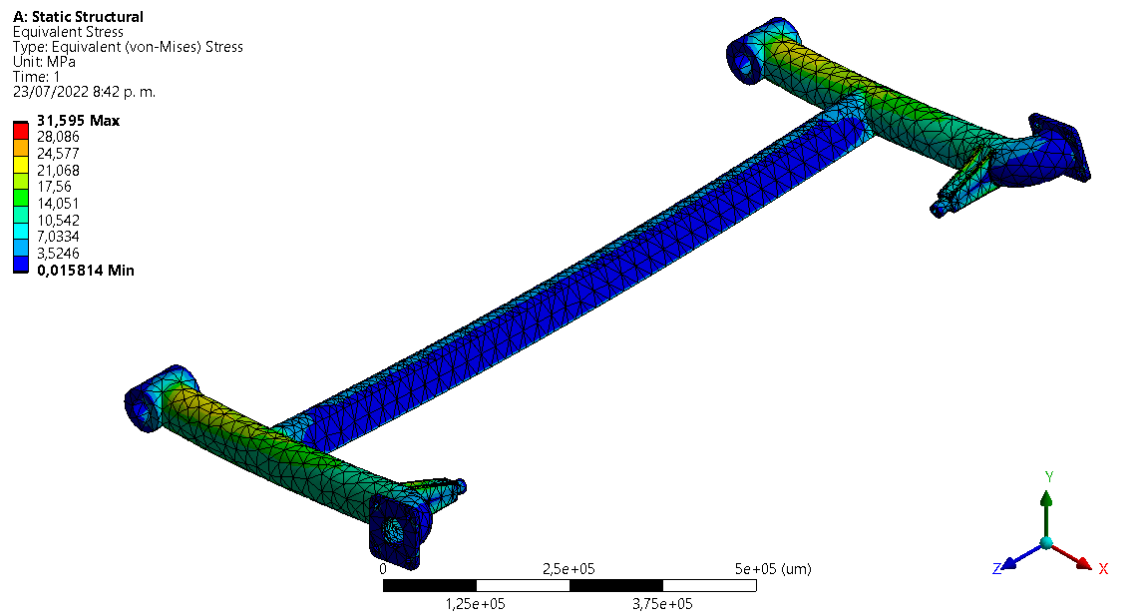
Fuente: Autores

Figura 191. Deformaciones totales para el caso 3



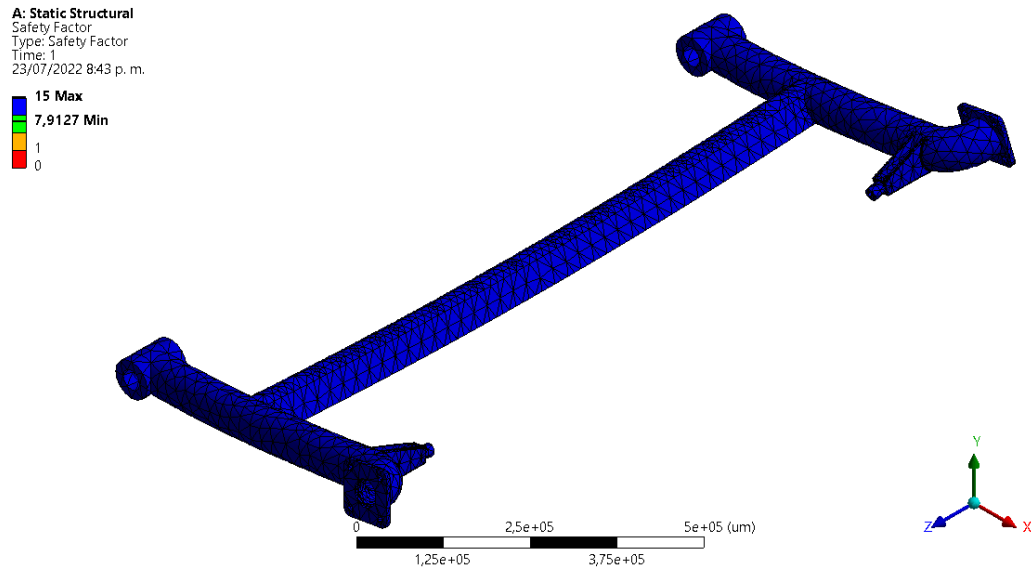
Fuente: Autores

Figura 192. Esfuerzos equivalentes para el caso 3



Fuente: Autores

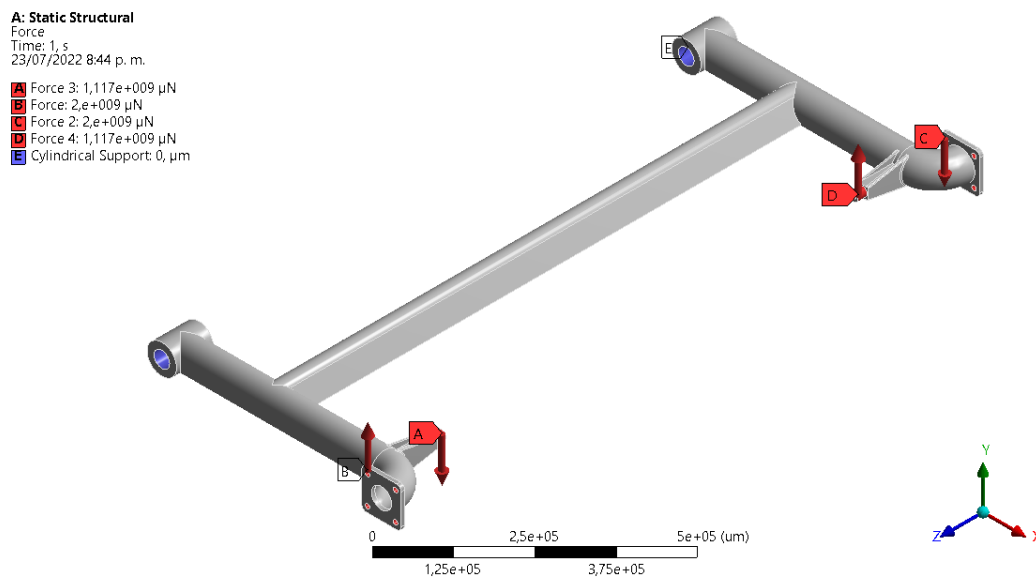
Figura 193. Factor de seguridad caso 3



Fuente: Autores

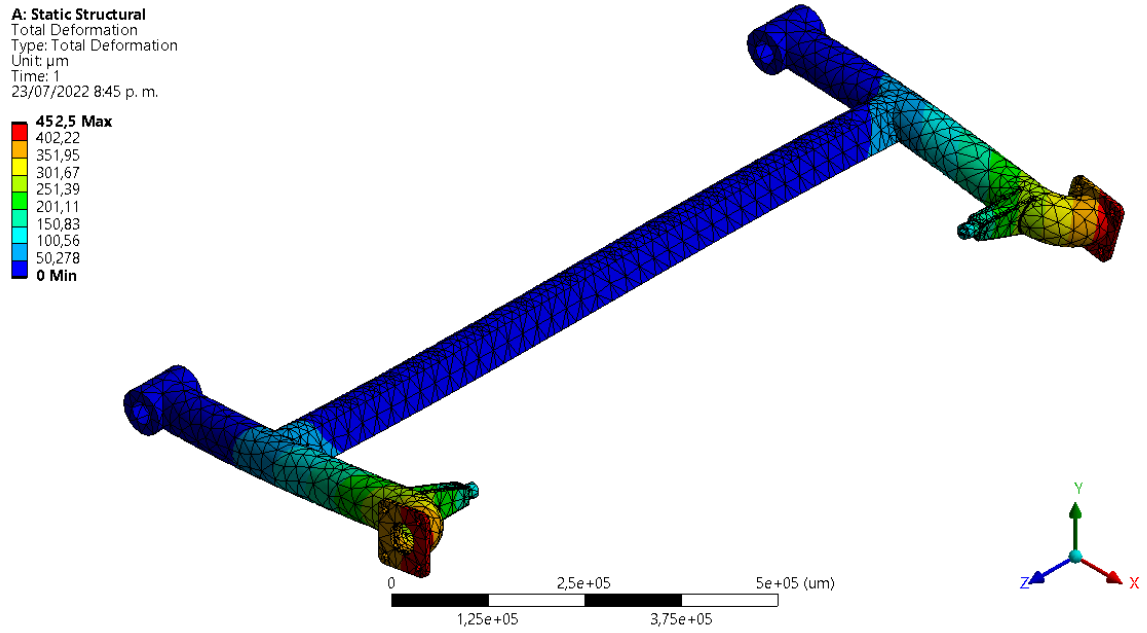
CASO 4: FUERZA APLICADA EN LAS RUEDAS EN SENTIDO OPUESTO CON DEFLEXIÓN DEL SISTEMA

Figura 194. Fuerzas impuestas caso 4



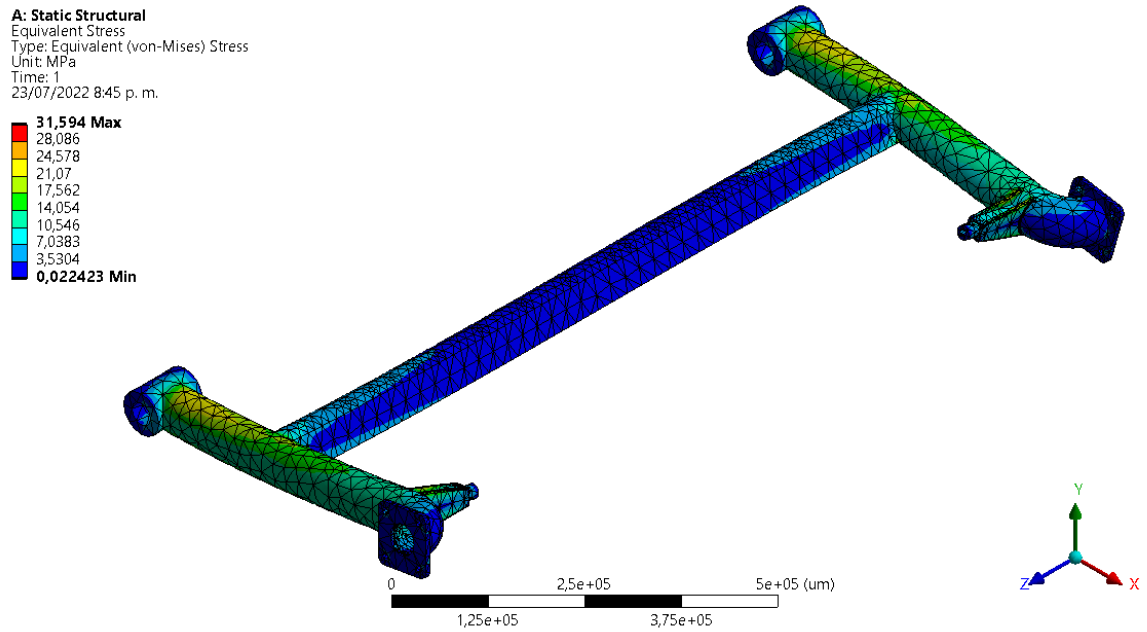
Fuente: Autores

Figura 195. Deformaciones totales caso 4



Fuente: Autores

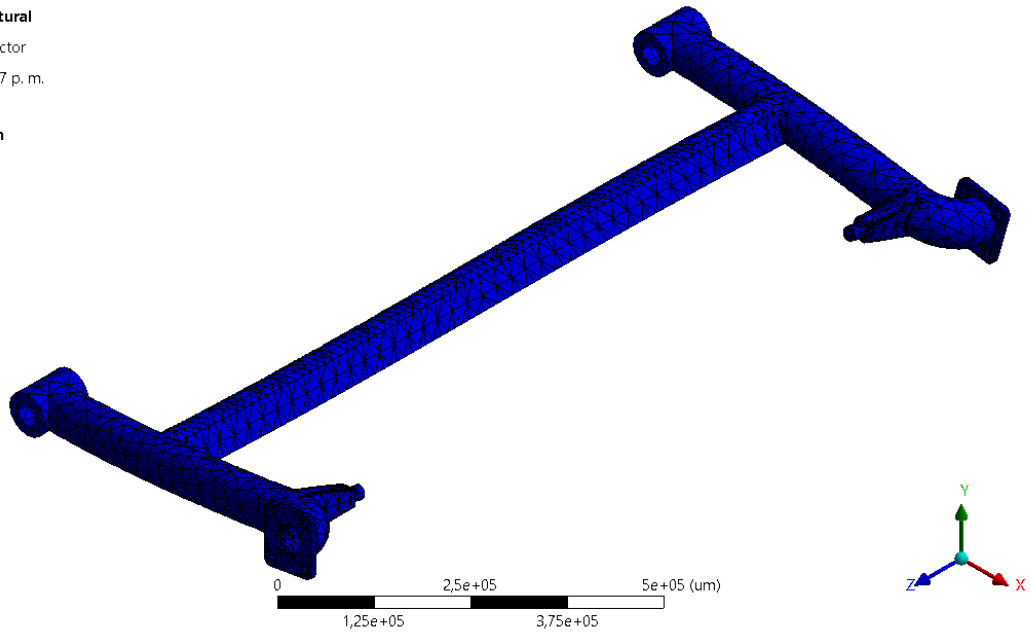
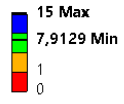
Figura 196. Esfuerzos equivalentes caso 4



Fuente: Autores

Figura 197. Factor de seguridad caso 4

A: Static Structural
Safety Factor
Type: Safety Factor
Time: 1
23/07/2022 8:47 p. m.

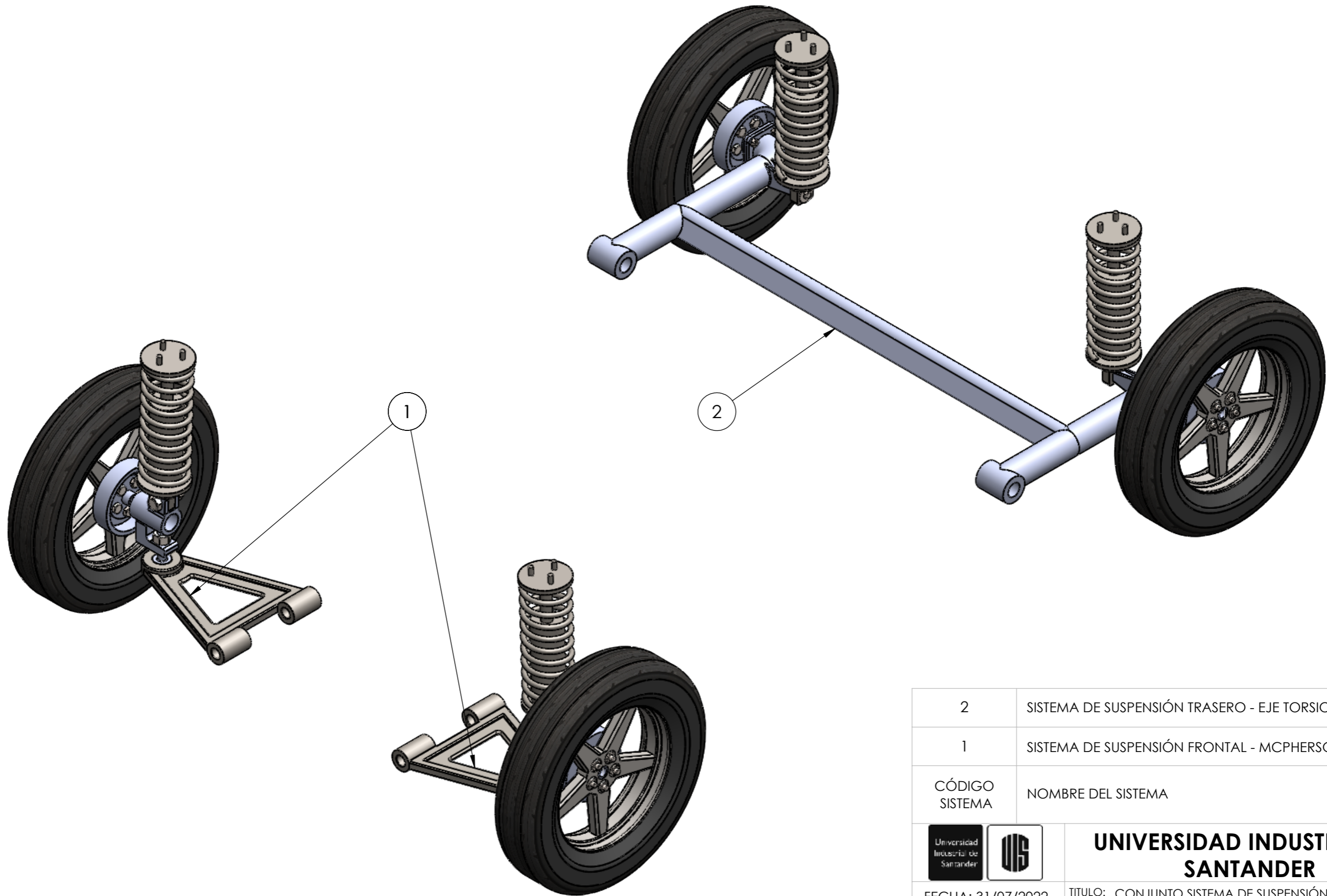


Fuente: Autores

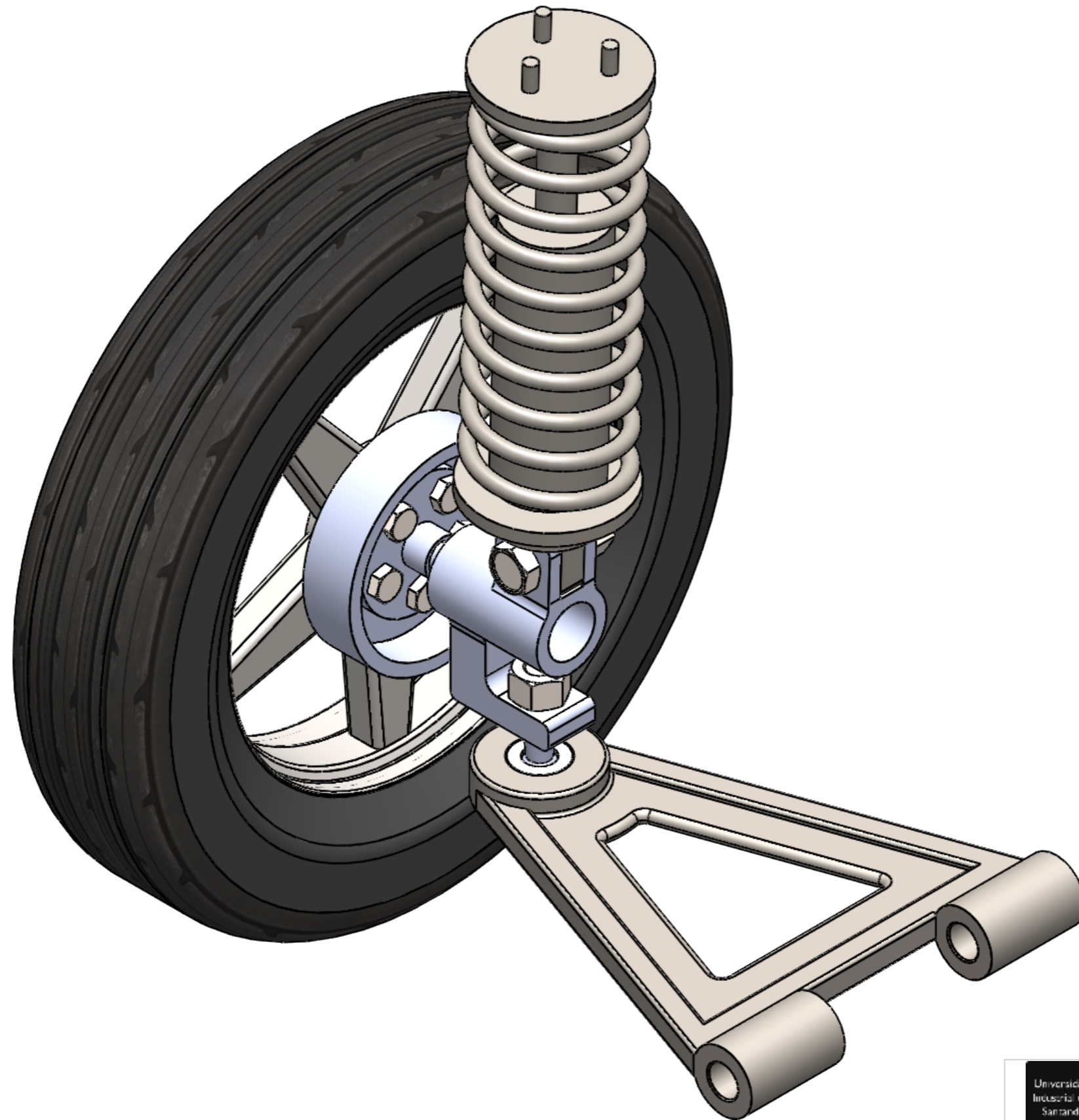
Anexo S. Planos del conjunto del sistema de suspensión McPherson – Eje torsional

A continuación, se presentan los planos para los sistemas de suspensión diseñados, donde se muestra la configuración total, componentes a detalle, tecnología de fabricación y dimensiones de los elementos más importantes de cada uno. De esta forma, se realiza una lista de los planos generados:

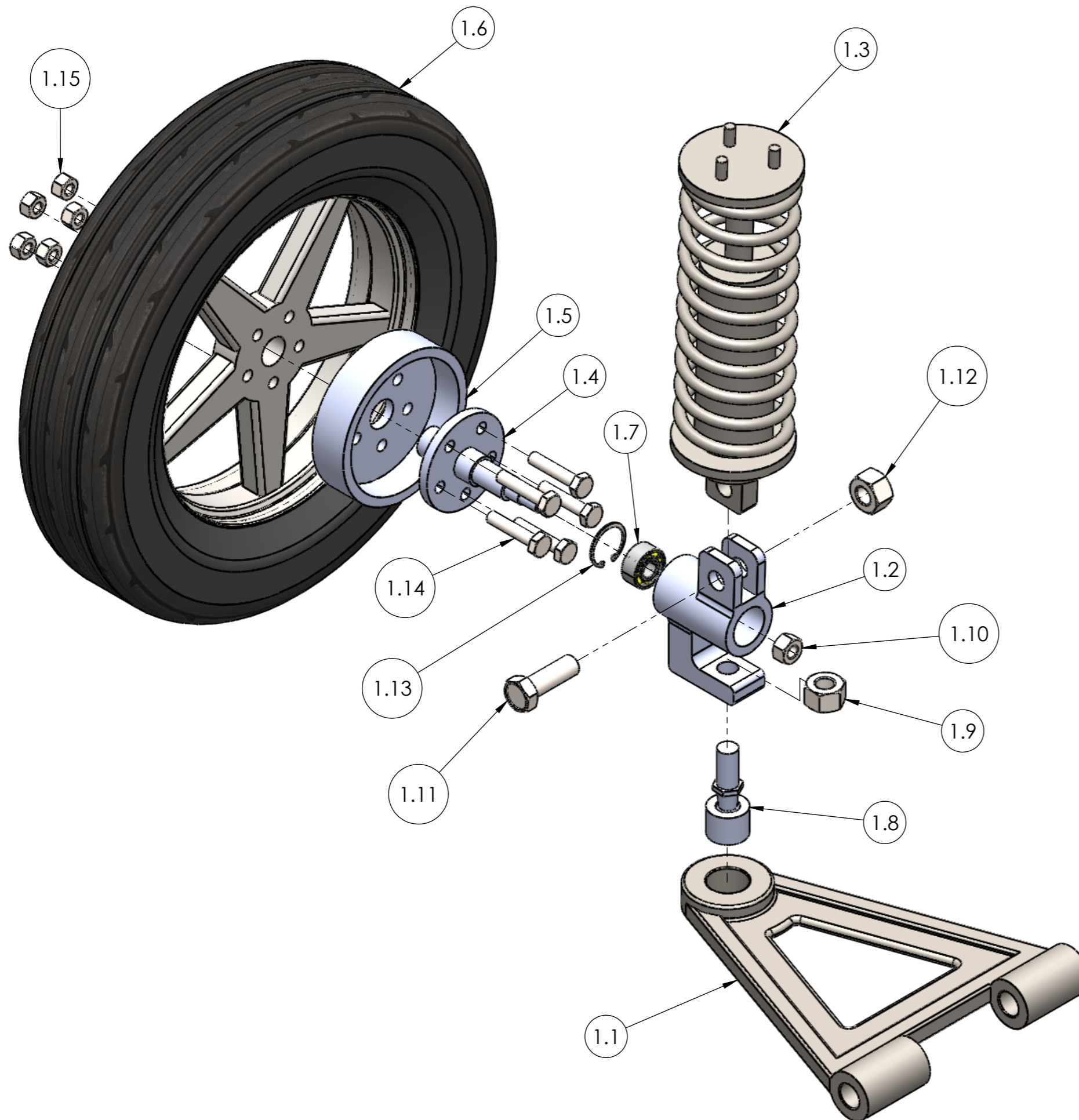
- Plano 1.** Conjunto sistema de suspensión McPherson – eje torsional.
- Plano 2.** Sistema de suspensión frontal – McPherson. Vista isométrica.
- Plano 3.** Sistema de suspensión frontal – McPherson. Vista explosionada.
- Plano 4.** Sistema de suspensión frontal – McPherson. Vista corte lateral.
- Plano 5.** Sistema de suspensión frontal – McPherson. Pieza 1.1 – Brazo de control.
- Plano 6.** Sistema de suspensión frontal – McPherson. Pieza 1.2 – Mangueta.
- Plano 7.** Sistema de suspensión frontal – McPherson. Pieza 1.4 – Soporte de la rueda frontal.
- Plano 8.** Sistema de suspensión trasero –Eje torsional. Vista isométrica.
- Plano 9.** Sistema de suspensión trasero –Eje torsional. Vista explosionada.
- Plano 10.** Sistema de suspensión trasero –Eje torsional. Vista corte lateral.
- Plano 11.** Sistema de suspensión trasero –Eje torsional. Pieza 2.1 – Eje torsional.
- Plano 12.** Sistema de suspensión trasero –Eje torsional. Pieza 2.3 – Soporte de la rueda trasera.
- Plano 13.** Sistema de suspensión trasero –Eje torsional. Pieza 2.3 – Brida de unión.
- Plano 14.** Sistema Resorte-Amortiguador. Vista isométrica.
- Plano 15.** Sistema Resorte-Amortiguador. Vista explosionada.
- Plano 16.** Sistema Resorte-Amortiguador. Vista corte lateral.
- Plano 17.** Sistema Resorte-Amortiguador. Dimensionamiento general del sistema.



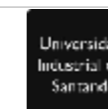
2	SISTEMA DE SUSPENSIÓN TRASERO - EJE TORSIONAL
1	SISTEMA DE SUSPENSIÓN FRONTAL - MCPHERSON
CÓDIGO SISTEMA	NOMBRE DEL SISTEMA
 	UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FECHA: 31/07/2022	TÍTULO: CONJUNTO SISTEMA DE SUSPENSIÓN MCPHERSON - EJE TORSIONAL
ESCALA: 1:8	AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE GUTIERREZ JUAN PABLO GONZALEZ MANTILLA
UNIDADES: mm	REVIS: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ
A4	 HOJA 1/17



		UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	
FECHA: 31/07/22	ESCALA: 1:3	TITULO: SISTEMA DE SUSPENSIÓN FROTAL - MCPHERSON VISTA ISOMÉTRICA	CÓDIGO DEL SISTEMA: 1
UNIDADES: mm	A4	AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ	REVISAR: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ
			HOJA 2/17



1.15	TUERCA HEXAGONAL	10	M12 X 1,75
1.14	TORNILLO HEXAGONAL	10	M12 X 1,75 X 60
1.13	ANILLO RETÉN	2	INTERNO DE Ø 45 mm
1.12	TUERCA HEXAGONAL	2	M20 X 2,5
1.11	TORNILLO HEXAGONAL	2	M20 X 2,5 X 60
1.10	TUERCA HEXAGONAL	2	M14 X 2
1.9	TUERCA HEXAGONAL	2	M20 X 2,5
1.8	RÓTULA	2	CABEZA M40, CUERPO M20X95
1.7	RODAMIENTO DE CONTACTO ANGULAR DE DOBLE HILERA	2	SKF 3203 A-2RS1TN9/MT33
1.6	CONJUNTO RIN-NEUMÁTICO	2	125/80 R13
1.5	FRENO	2	FRENO DE DISCO
1.4	SOPORTE DE LA RUEDA	2	ACERO 4340 ESTIRADO EN FRIO
1.3	SISTEMA RESORTE AMORTIGUADOR	2	RESORTE EN ACERO 232 AMORTIGUADOR HIDRAHÚLICO
1.2	MANGUETA	2	ACERO FORJADO C1020 ESTIRADO EN FRIO
1.1	BRAZO DE CONTROL	2	ACERO 4130 WQT 1100
CÓDIGO PIEZA	NOMBRE DE LA PIEZA	CANT.	ESPECIFICACIÓN: DIMENSIONAL, MATERIAL, REFERENCIA TÉCNICA DE SELECCIÓN, MARCA.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FECHA: 31/07/22

ESCALA: 1:4

UNIDADES: mm

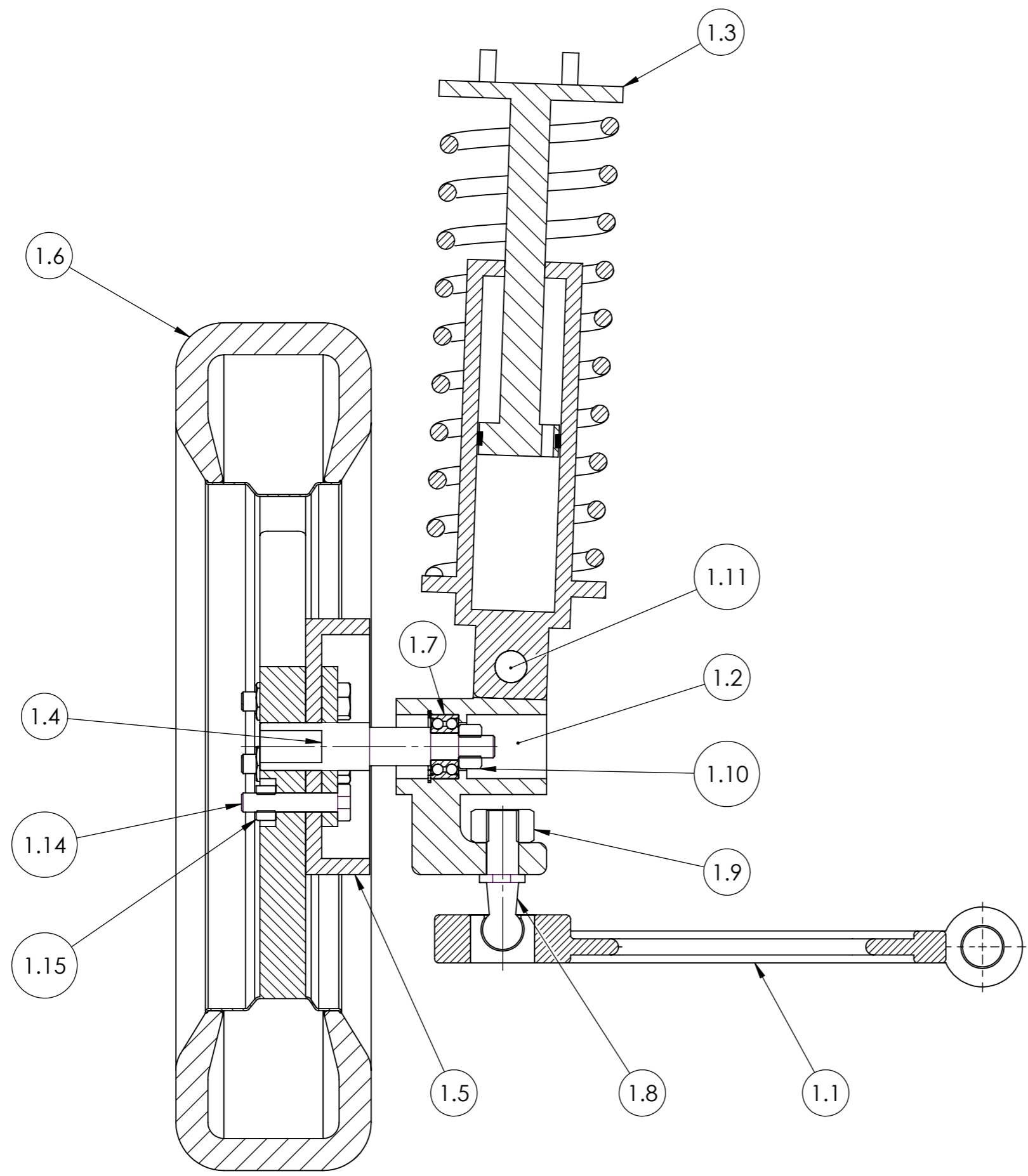
A4

TÍTULO: SISTEMA DE SUSPENSIÓN FRONTAL - MCPHERSON
VISTA EXPLOSIONADA
CÓDIGO DE SISTEMA: 1

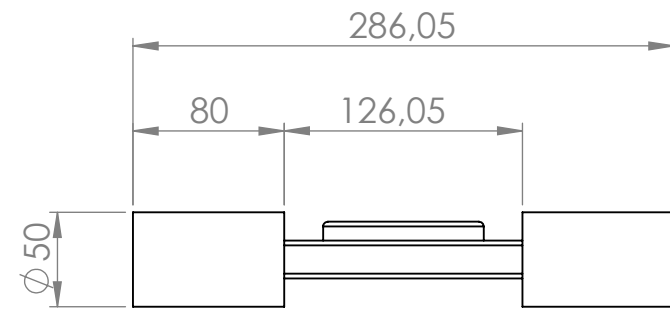
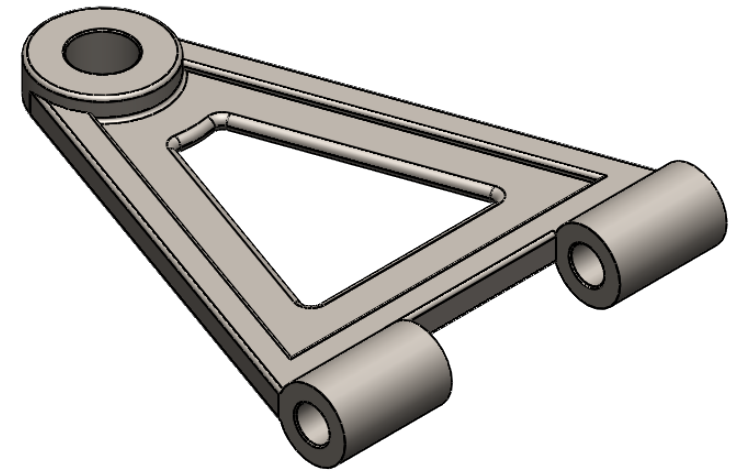
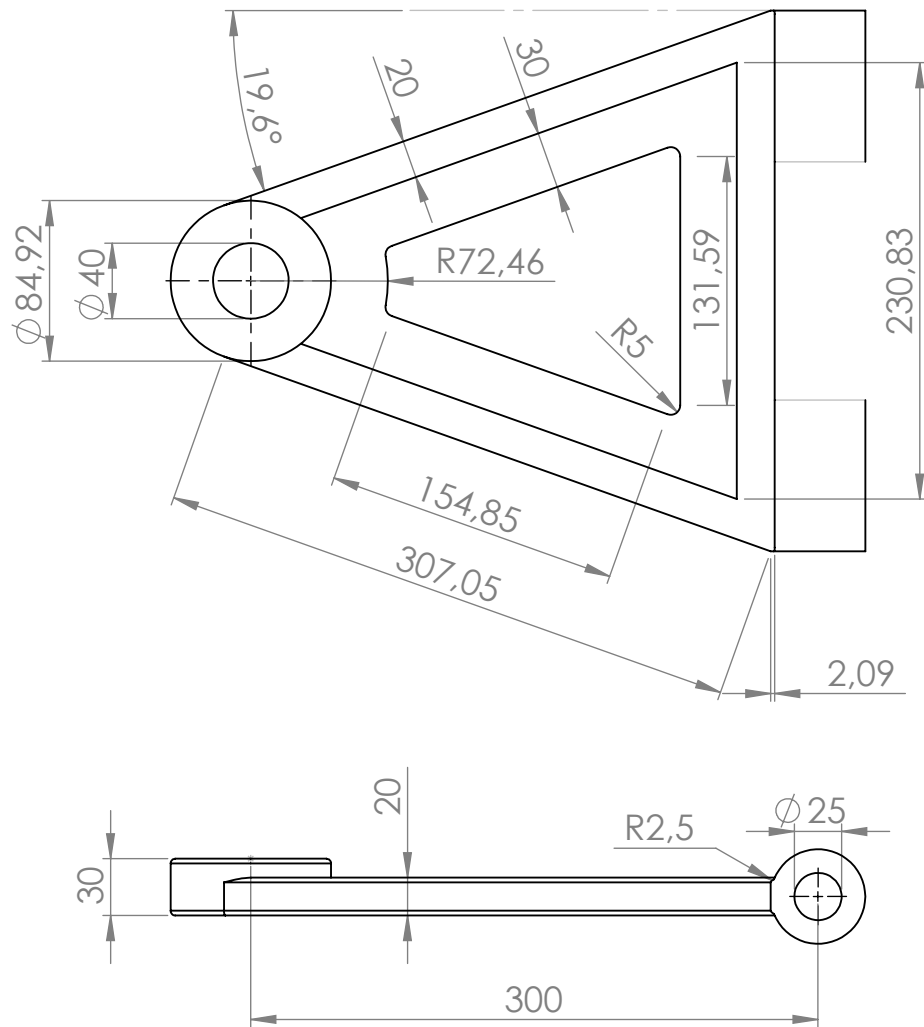
AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ

REVISA: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ

HOJA 3/17



		UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	
FECHA: 31/07/22		TITULO: SISTEMA DE SUSPENSIÓN FRONTAL - MCPHERSON VISTA EN CORTE LATERAL	
ESCALA: 1:3		AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ	
UNIDADES: mm		REVISAR: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ	
A4		HOJA 4/17	



DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE FABRICACIÓN:

MATERIAL: ACERO 4130 WQT 1100

MECANIZADO CNC DE ALTA PRECISIÓN Y TRATAMIENTO TÉRMICO DE TEMPLE REVENIDO



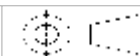
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FECHA: 31/07/22

ESCALA: 1:4

UNIDADES: mm

A4



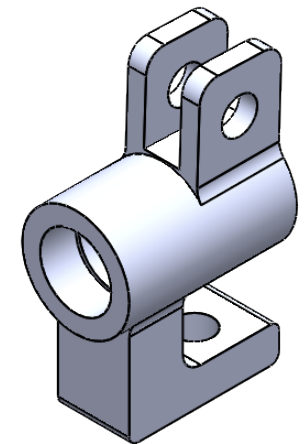
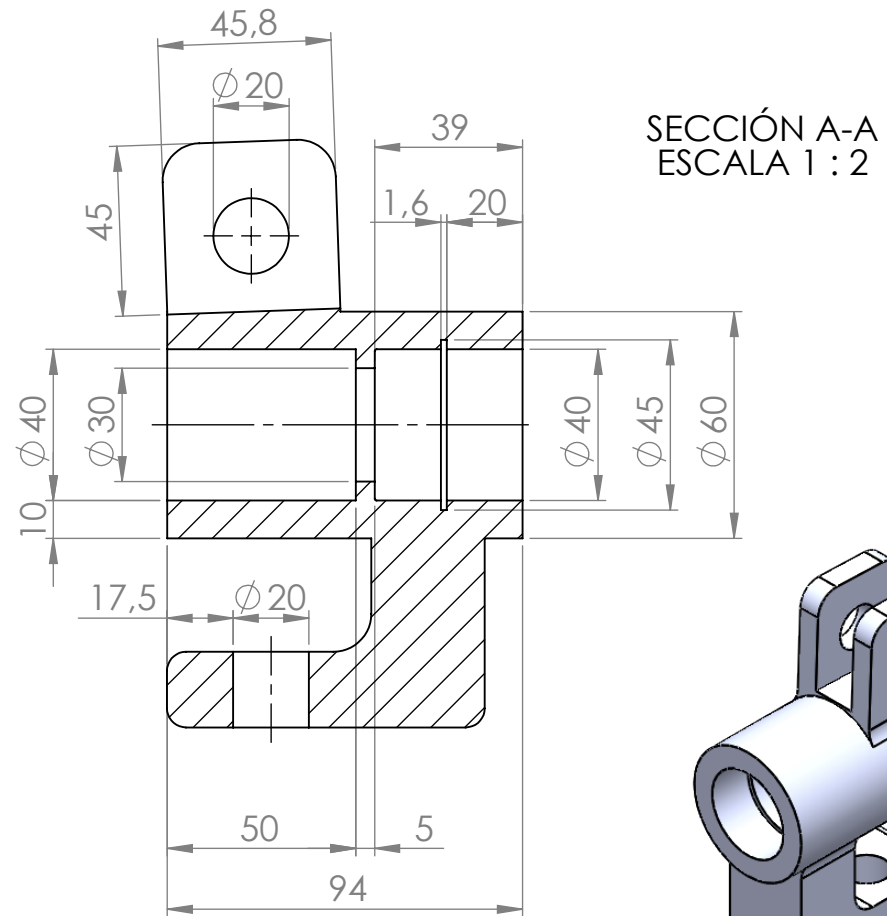
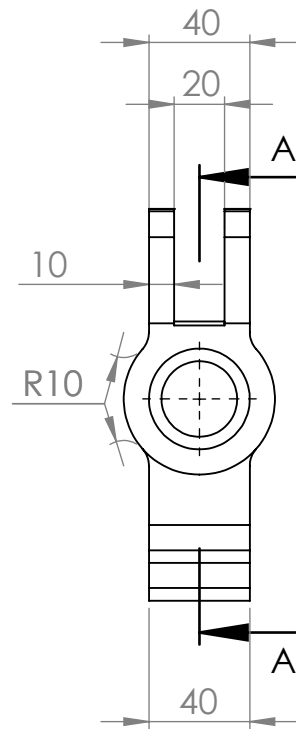
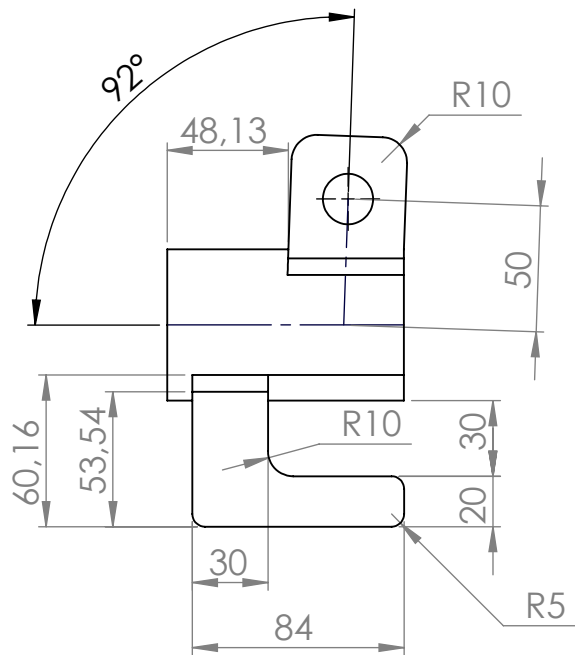
TÍTULO: SISTEMA DE SUSPENSIÓN FRONTAL-MCPHERSON
PIEZA

CÓDIGO DE PIEZA: 1.1 - BRAZO DE CONTROL

AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ

REVISÁ: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ

HOJA 5/17



DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE FABRICACIÓN:

MATERIAL: ACERO FORJADO C1020 ESTIRADO EN FRIO

FUNDICIÓN DE LA PIEZA Y POSTERIOR MECANIZADO CNC DE ALTA PRECISIÓN PARA ACABADO DE LA PIEZA QUE INCLUYE FRESADO, TALADRADO Y MANDRINADO DE RADIOS INTERNOS.

REDONDEO DE ARISTA INTERNA DE POSICIONAMIENTO DE RODAMIENTO DE 0,5 mm



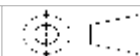
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FECHA: 31/07/22

ESCALA: 1:3

UNIDADES: mm

A4



TITULO: SISTEMA DES SUSPENSIÓN FRONTAL - MCPHERSON
PIEZA

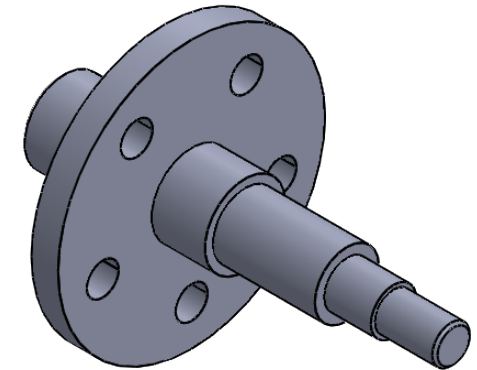
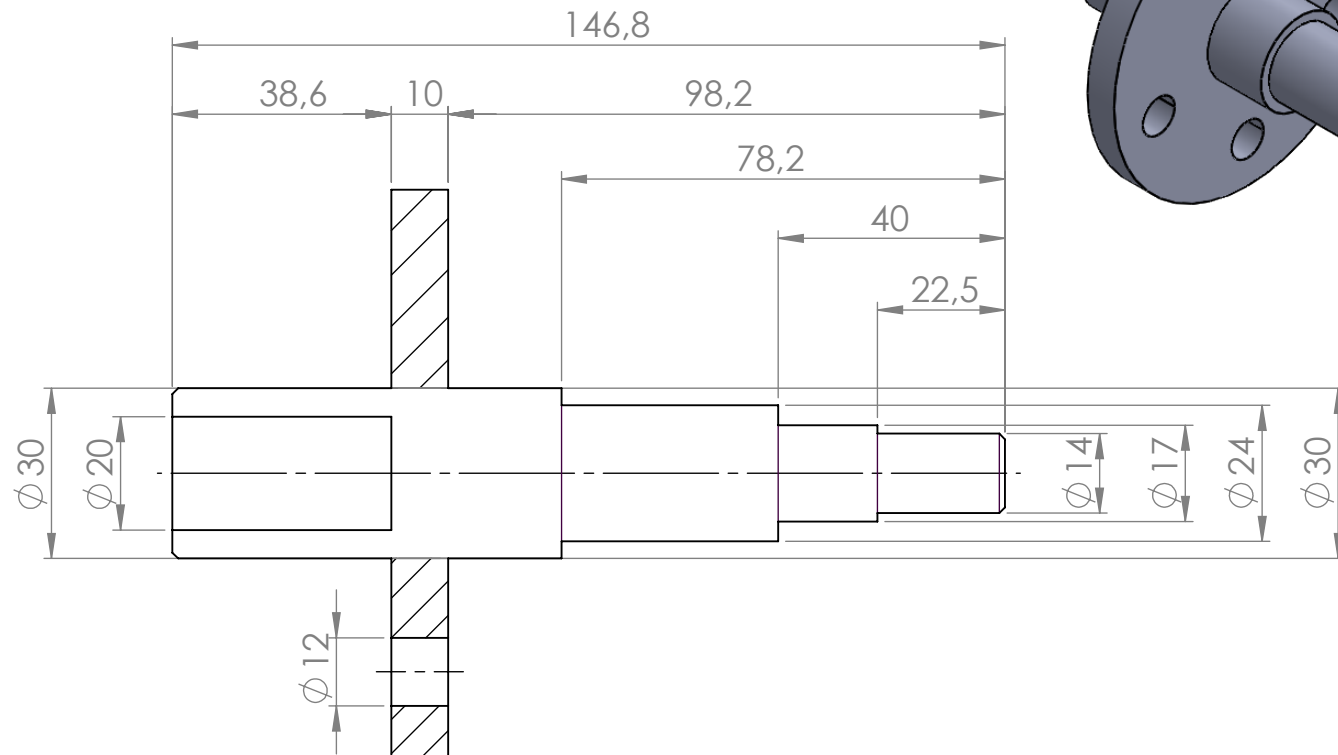
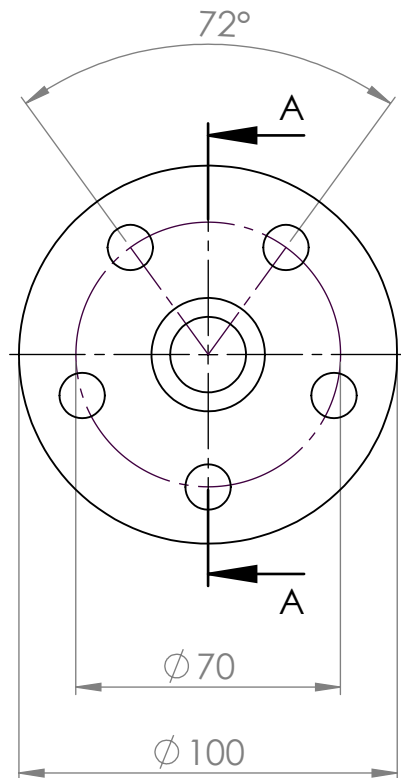
CÓDIGO DE PIEZA: 1.2 - MANGUETA

AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ

REVISÁ: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ

HOJA 6/17

SECCIÓN A-A
ESCALA 3 : 4



DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE FABRICACIÓN:

MATERIAL: ACERO 4340 ESTIRADO EN FRIO
TORNEADO CNC DE ALTA PRECISIÓN, MATERIA PRIMA INICIAL BARRA DE ϕ 30 mm.

SOLDADURA DE UN DISCO DE ϕ 100 mm X 10 mm CON 5 PERFORACIONES DE 12 mm PARA TORNILLERIA M12X60 ESPACIADAS A IGUAL DISTANCIA CADA 72°, SOBRE UN DIAMETRO IMAGINARIO DE ϕ 70 mm.

SECCIÓN DE ϕ 14 mm ROSCADA PARA TUERCA DE APRIETE A RODAMIENTO.



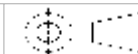
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FECHA: 31/07/22

ESCALA: 1:2

UNIDADES: mm

A4



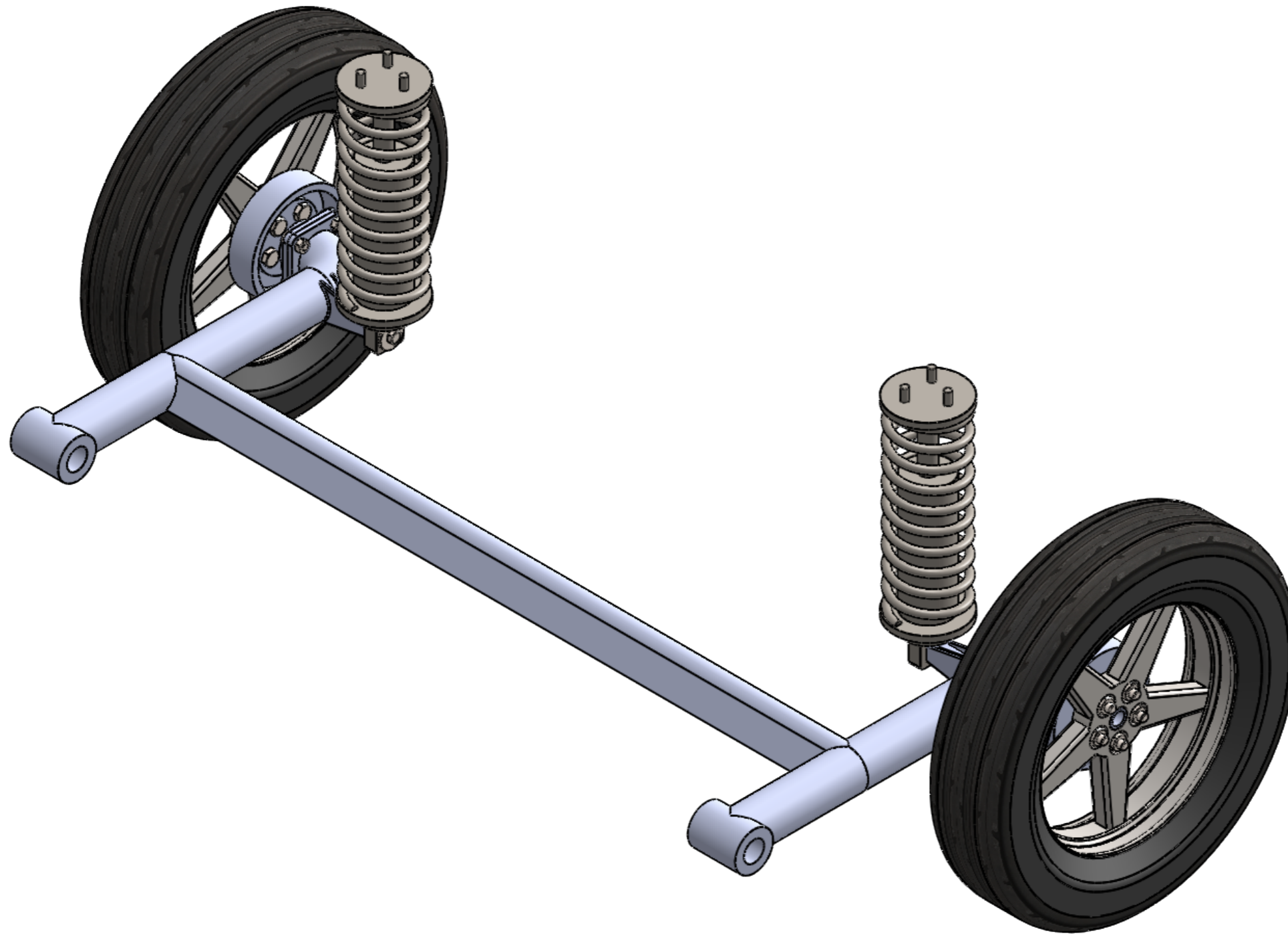
TÍTULO: SISTEMA DE SUSPENSIÓN FRONTAL
PIEZA

CÓDIGO DE PIEZA: 1.4 - SOPORTE DE LA RUEDA

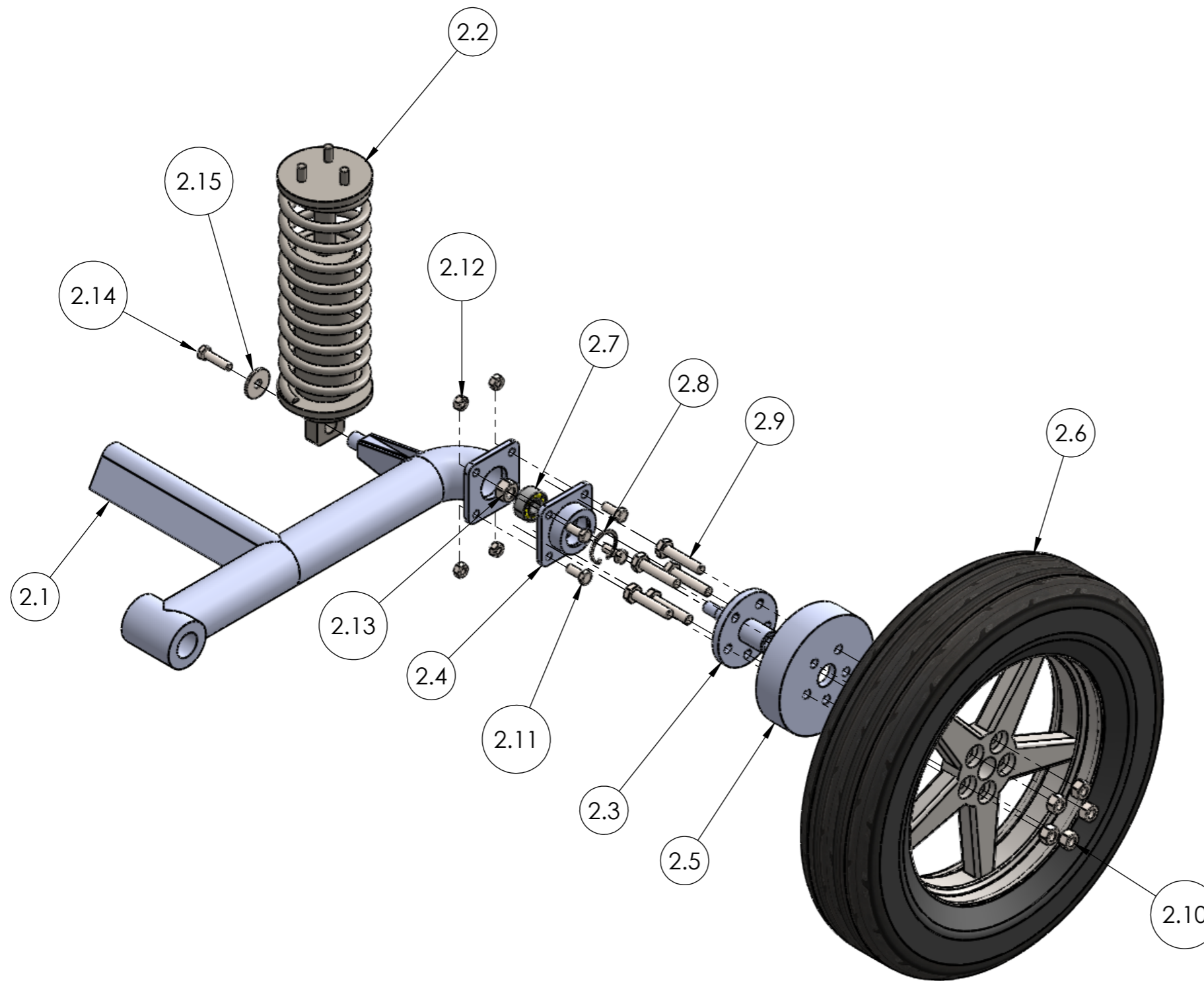
AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ

REVIS: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ

HOJA 7/17



		UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	
FECHA: 31/07/22	ESCALA: 1:6	TITULO: SISTEMA DE SUSPENSIÓN TRASERO - EJE TORSIONAL VISTA ISOMÉTRICA CÓDIGO DE SISTEMA: 2	
UNIDADES: mm	A4	AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ	REVISAR: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ
			HOJA 8/17



2.15	ARANDELA PLANA ANCHA	2	Ø 10 mm
2.14	TORNILLO HEXAGONAL	2	M10 X 1,5 X 40
2.13	TUERCA HEXAGONAL	2	M14 X 2
2.12	TUERCA HEXAGONAL	8	M10 X 1,75
2.11	TORNILLO HEXAGONAL	8	M10 X 1,5 X 25
2.10	TUERCA HEXAGONAL	10	M 12 X 1,75
2.9	TORNILLO HEXAGONAL	10	M12 X 1,75 X 60
2.8	ANILLO RETÉN	2	INTERNO DE Ø 45 mm
2.7	RODAMIENTO DE CONTACTO ANGULAR DE DOBLE HILERA	2	SKF 3203 A-2RS1TN9/MT33
2.6	CONJUNTO RIN-NEUMÁTICO	2	125/80 R13
2.5	FRENO	2	FRENO DE DISCO
2.4	BRIDA DE UNIÓN EJE-RUEDA	2	ACERO ESTRUCTURAL A36
2.3	SOPORTE DE LA RUEDA	2	ACERO 4340 ESTIRADO EN FRIO
2.2	SISTEMA RESORTE AMORTIGUADOR	2	RESORTE EN ACERO 232 AMORTIGUADOR HIDRAHULICO
2.1	CONJUNTO EJE TORSIONAL	1	ACERO ESTRUCTURAL A36
CÓDIGO PIEZA	NOMBRE DE LA PIEZA	CANT.	ESPECIFICACIÓN: DIMENSIONAL, MATERIAL, REFERENCIA TÉCNICA DE SELECCIÓN, MARCA



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FECHA: 31/07/22

ESCALA: 1:6

UNIDADES: mm

A4

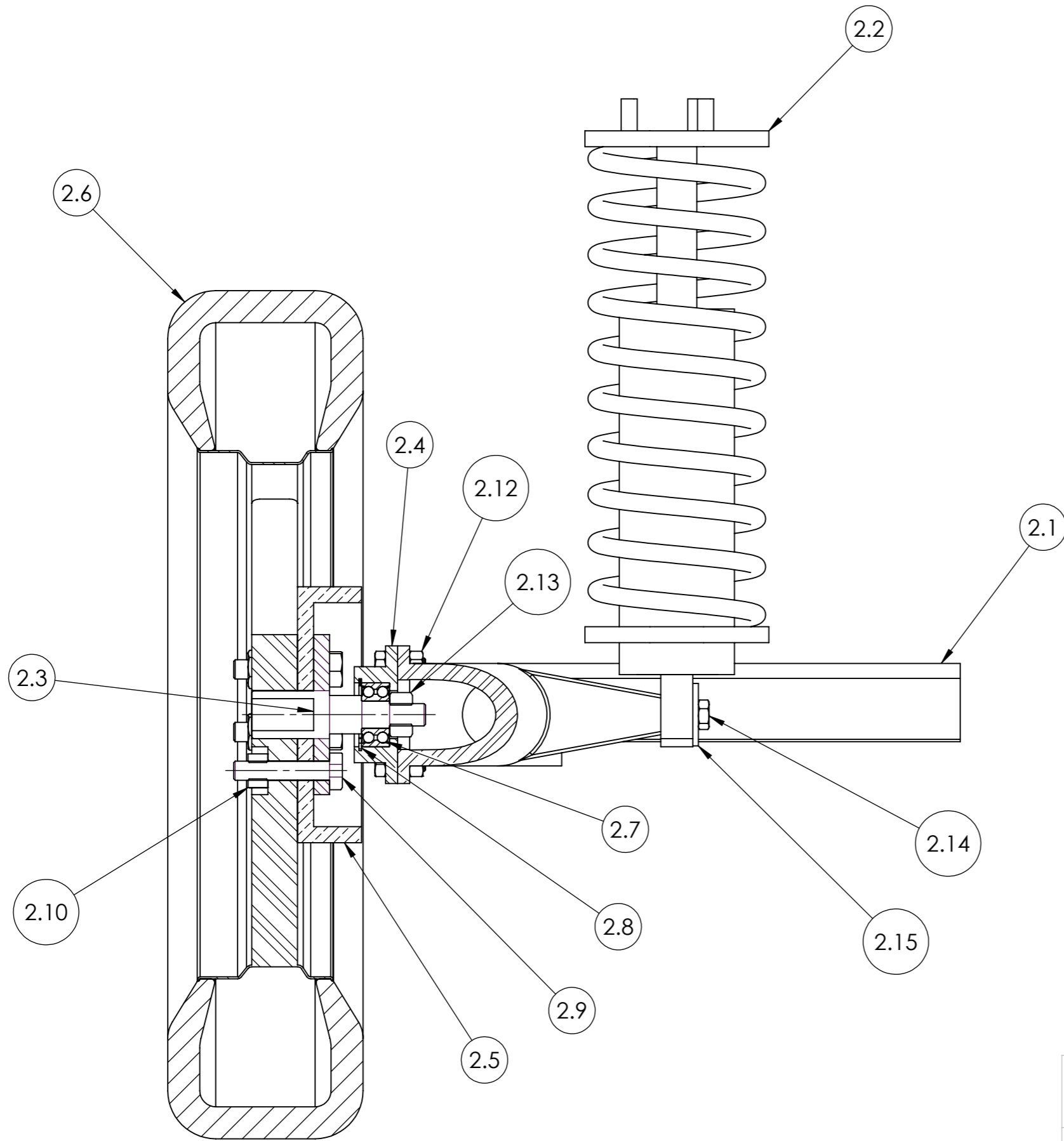


TÍTULO: SISTEMA DE SUSPENSIÓN TRASERA- EJE TORSIONAL
VISTA EXPLOSIONADA
CÓDIGO DE SISTEMA: 2

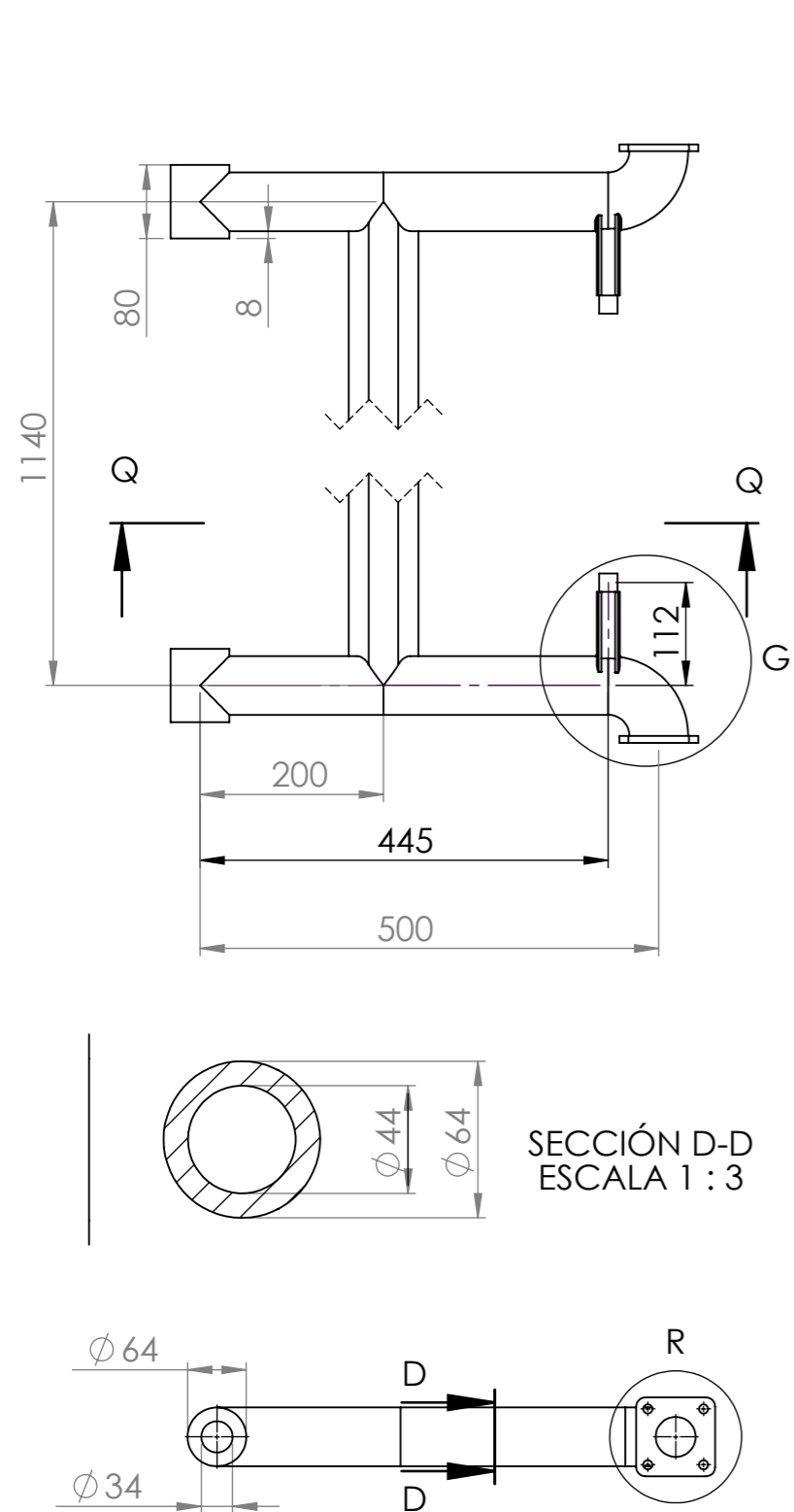
AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ

REVISÓ: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ

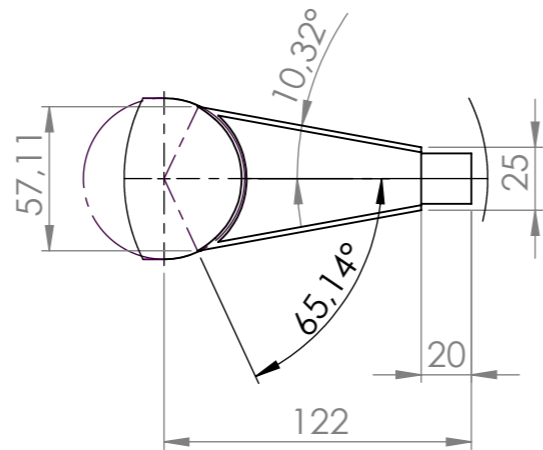
HOJA 9/19



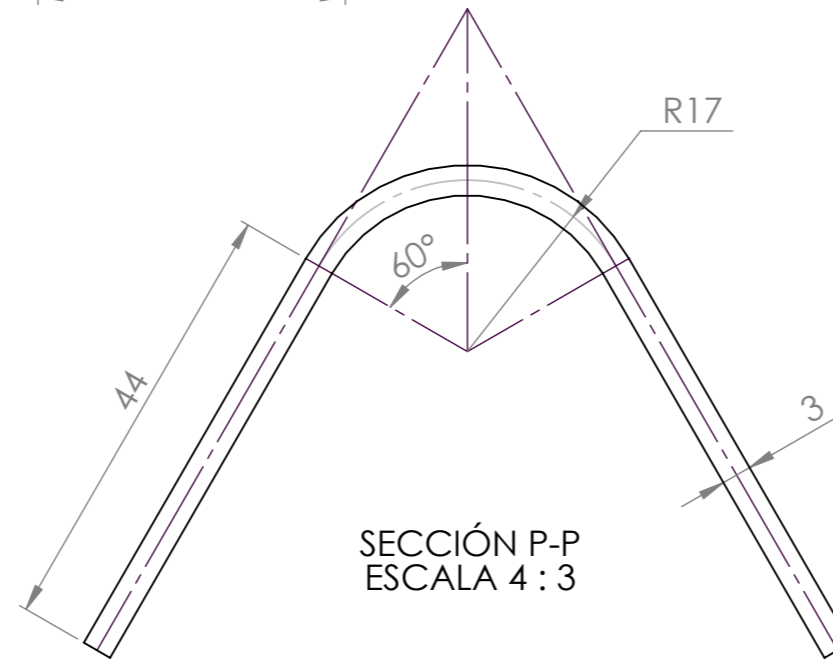
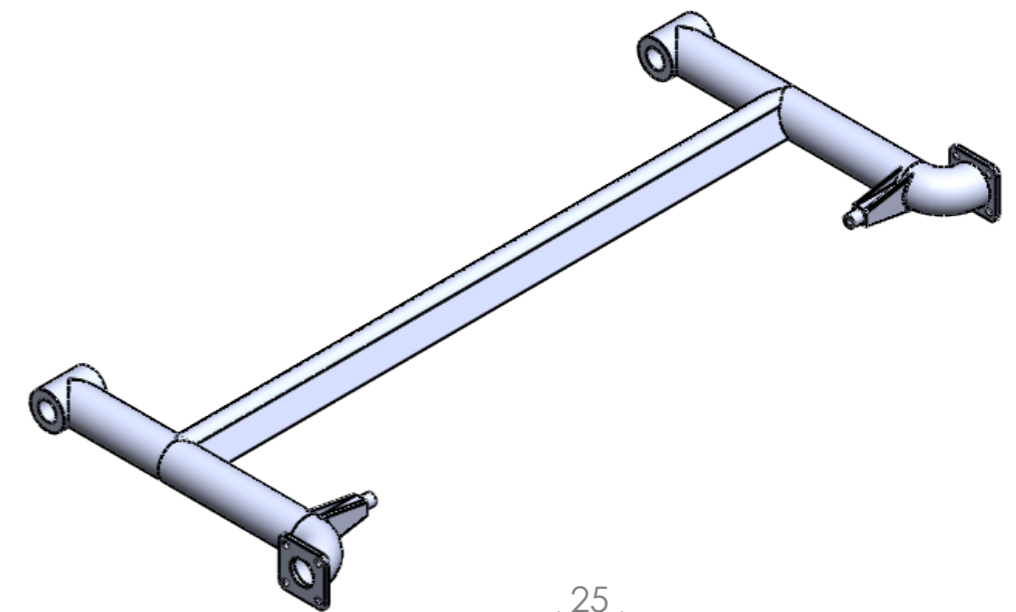
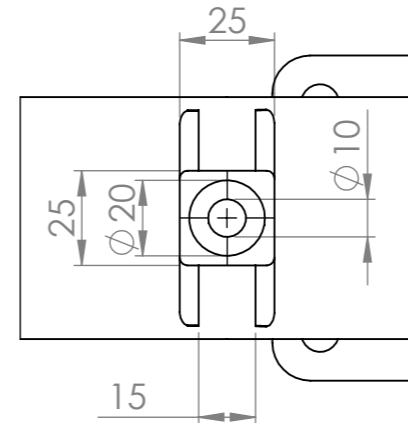
		UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	
FECHA: 31/07/22		TITULO: SISTEMA DE SUSPENSIÓN TRASERO - EJE TORSIONAL VISTA EN CORTE LATERAL	
ESCALA: 1:3		AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ	
UNIDADES: mm		REVISAR: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ	
A4		HOJA 10/17	



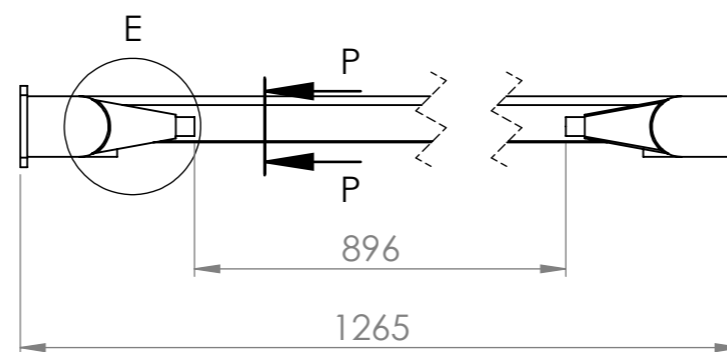
DETALLE E
ESCALA 1 : 3



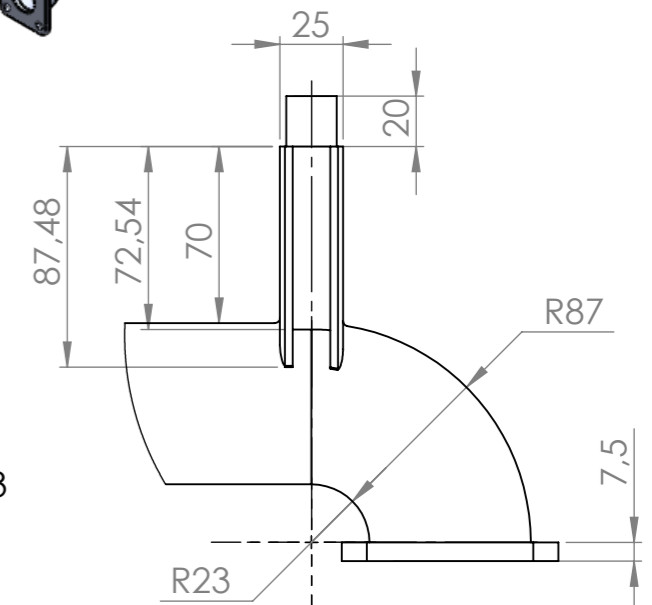
SECCIÓN Q-Q
ESCALA 1 : 2



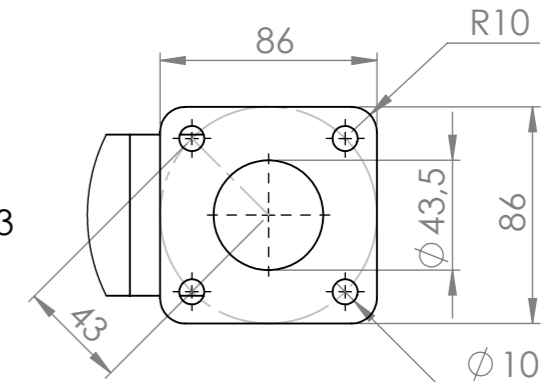
SECCIÓN P-P
ESCALA 4 : 3



DETALLE G
ESCALA 1 : 3



DETALLE R
ESCALA 1 : 3



DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE FABRICACIÓN: MATERIAL: ACERO ESTRUCTURAL A36

EL PROCESO DE FABRICACIÓN INICIA CORTANDO DOS TUBOS DE ACERO DE $\phi 65$ mm Y DISMINUYENDO SU DIÁMETRO HASTA $\phi 64$ mm A TRAVÉS DE UN CILINDRADO EXTERNO. ASÍ MISMO, ESTE PROCESO SE REALIZARÁ PARA LAS JUNTAS CONECTADAS AL CHASIS DEL VEHÍCULO.

POSTERIOR A ESTO, CON UNA LÁMINA DE CALIBRE 3 SE PROCEDE A FABRICAR EL PERFIL DEL EJE TORSIONAL, DOBLANDO UNA LÁMINA DE 1140mm x 124mm PARA DARLE LA FORMA REQUERIDA Y MOSTRADA EN EL PRESENTE PLANO. ESTE A SU VEZ SE SOLDARÁ A LOS BRAZOS LONGITUDINALES, POR LO QUE TAMBIÉN SE HACE NECESARIO REALIZAR UN CORTE CIRCULAR A LOS EXTREMOS DE LA LÁMINA PARA ENSAMBLARLOS SOBRE LOS TUBOS.

FINALMENTE, LOS SOPORTES DE LOS SISTEMAS RESORTE-AMORTIGUADOR SE FABRICARÁN A PARTIR DE MECANIZADO DE ALTA PRECISIÓN Y SOLDADOS POR MEDIO DE MIG.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FECHA: 31/07/22

TÍTULO: SISTEMA DE SUSPENSIÓN TRASERA - EJE TORSIONAL
PIEZA

ESCALA: 1:8

CÓDIGO DE PIEZA: 2.1 - EJE TORSIONAL

UNIDADES: mm

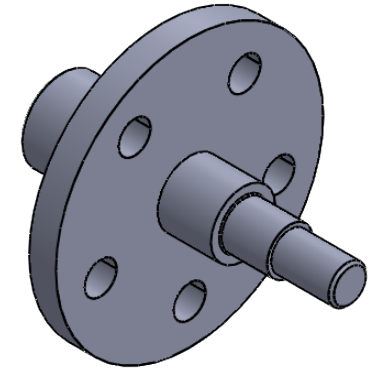
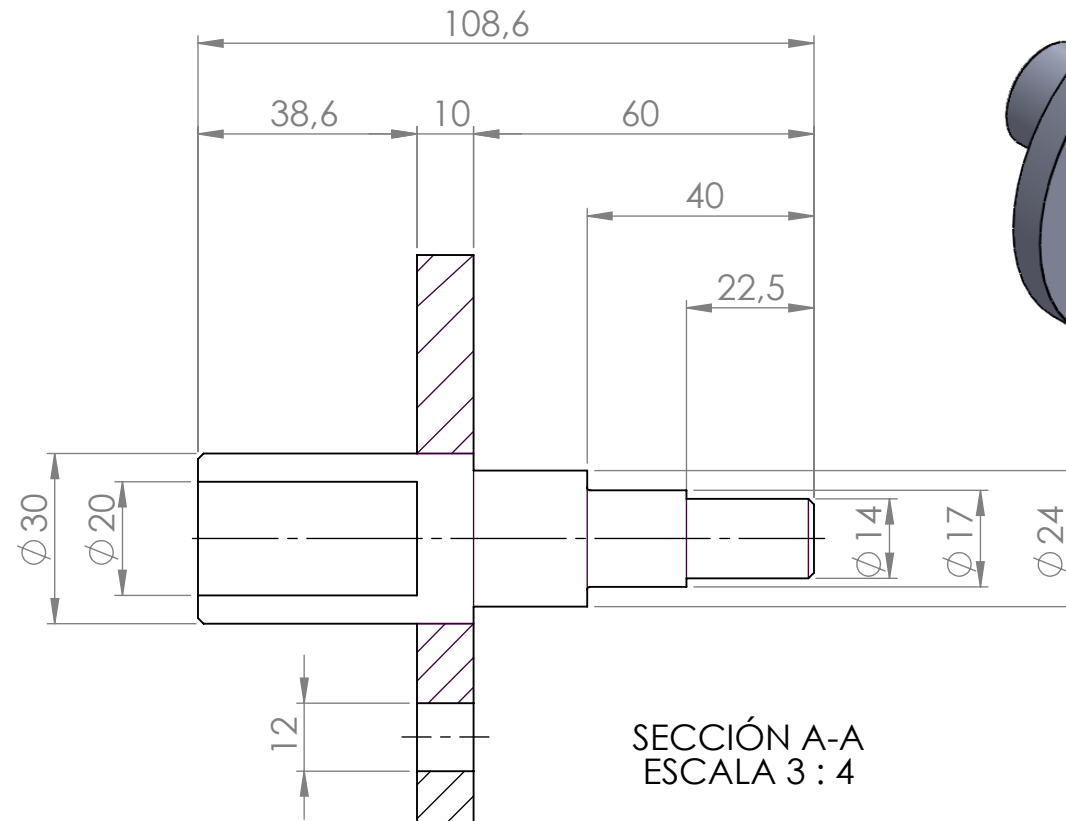
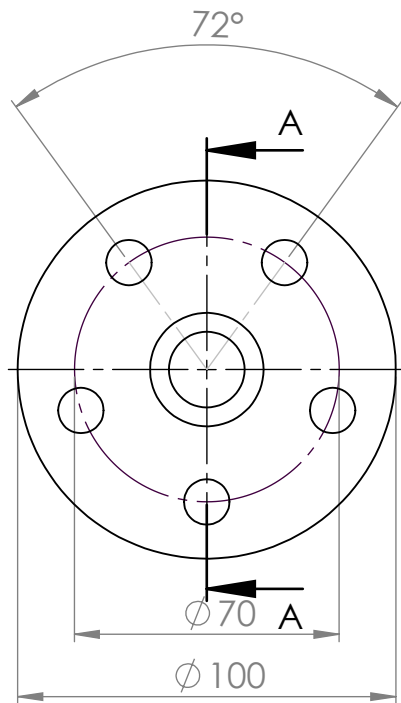
AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ

A4



REVISÓ: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ

HOJA 11/17



SECCIÓN A-A
ESCALA 3 : 4

DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE FABRICACIÓN:

MATERIAL: ACERO 4340 ESTIRADO EN FRIO

TORNEADO CNC DE ALTA PRECISIÓN, MATERIA PRIMA INICIAL BARRA ϕ 30mm

SOLDADURA DE UN DISCO DE ϕ 100mm X 10mm CON 5 PERFORACIONES DE 12 mm PARA TORNILLERÍA M12X60 ESPACIADAS A IGUAL DISTANCIA CADA 72°, SOBRE UN DIÁMETRO IMAGINARIO DE ϕ 70mm.

SECCIÓN DE ϕ 14mm ROSCADA PARA TUERCA DE APRIETE A RODAMIENTO.



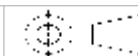
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FECHA: 31/07/22

ESCALA: 1:2

UNIDADES: mm

A4



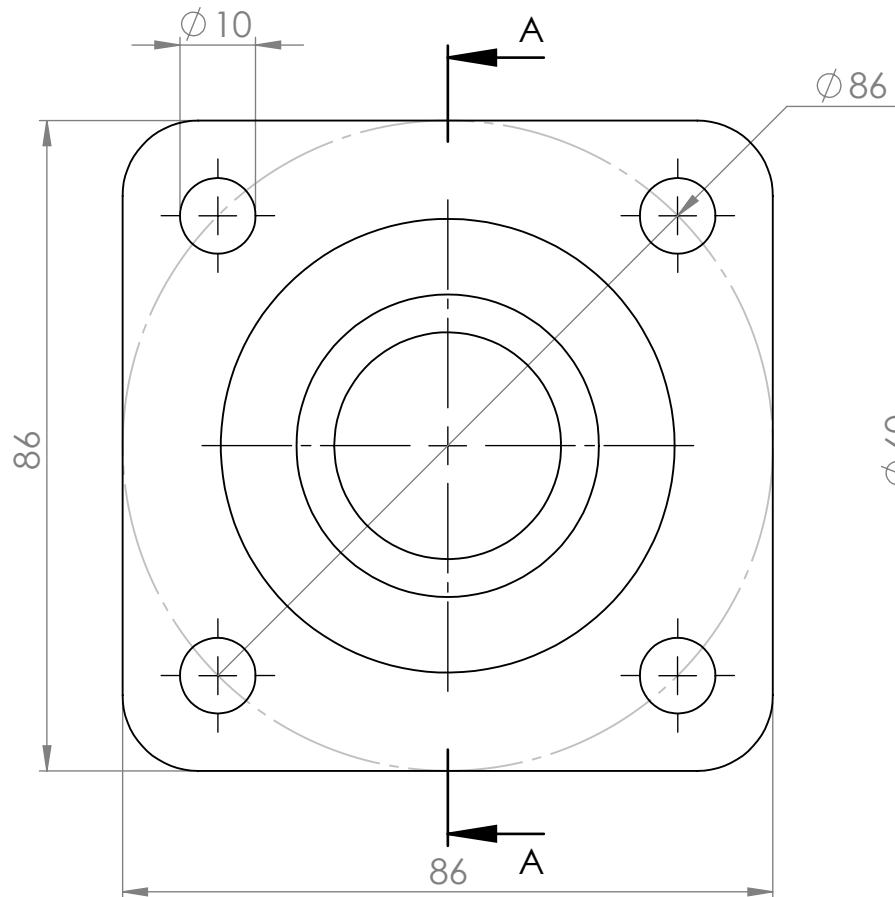
TÍTULO: SISTEMA DE SUSPENSIÓN TRASERO - EJE TORSIONAL
PIEZA

CÓDIGO DE PIEZA: 2.3 - SOPORTE DE LA RUEDA

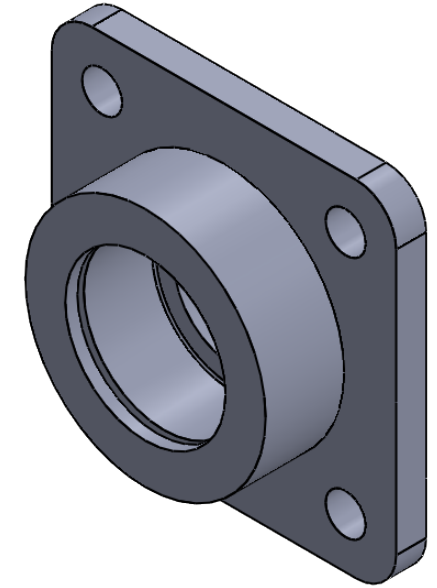
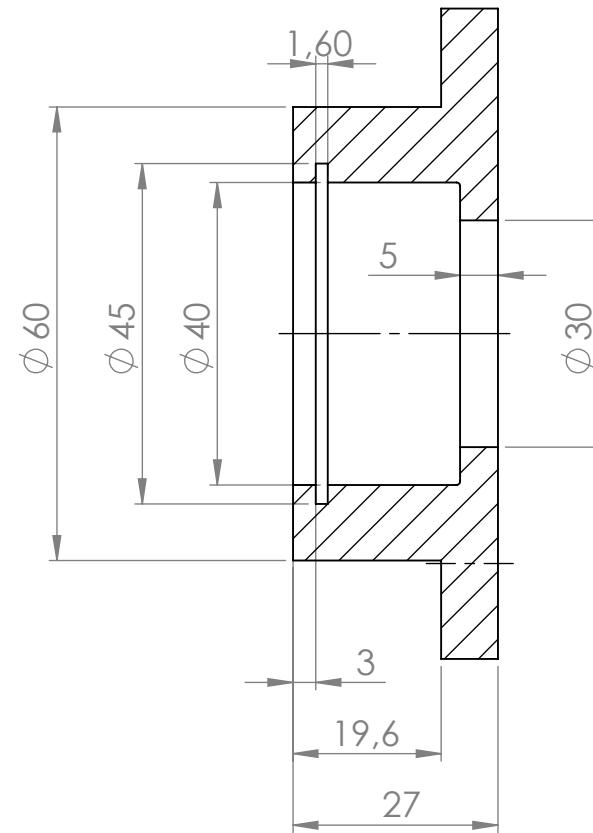
AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ

REVIS: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ

HOJA 12/17



SECCIÓN A-A



DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE FABRICACIÓN:

MATERIAL: ACERO ESTRUCTURAL A 36

MECANIZADO CNC CON FRESA Y TORNO A UN BLOQUE DE ACERO ESTRUCTURAL DE 100X100X30 mm PARA LLEVARLO A LAS MEDIDAS REQUERIDAS EN PLANO.

LA CAVIDAD PARA INSERTAR EL ANILLO RETÉN SE REALIZARÁ A TRAVÉS DE UN PROCESO DE MANDRINADO Y SE REQUERIE UN REDONDEO DE 0,5 mm EN EL ASIENTO DEL RODAMIENTO.



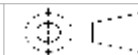
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FECHA: 31/07/22

ESCALA: 1:1

UNIDADES: mm

A4



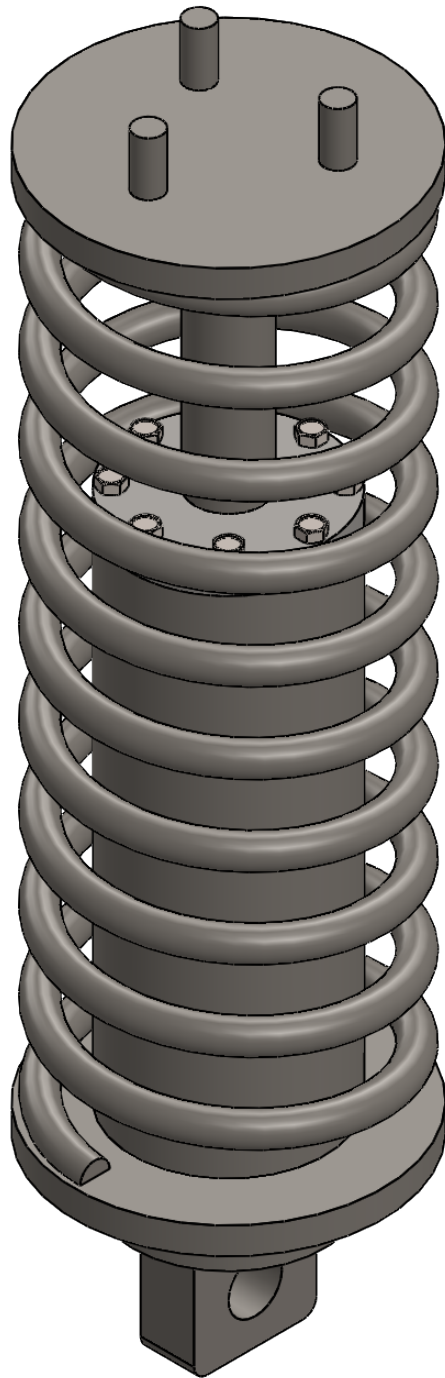
TÍTULO: SISTEMA DE SUSPENSIÓN TRASERA- EJE TORSIONAL
PIEZA

CÓDIGO DE PIEZA: 2.4 - BRIDA DE UNIÓN

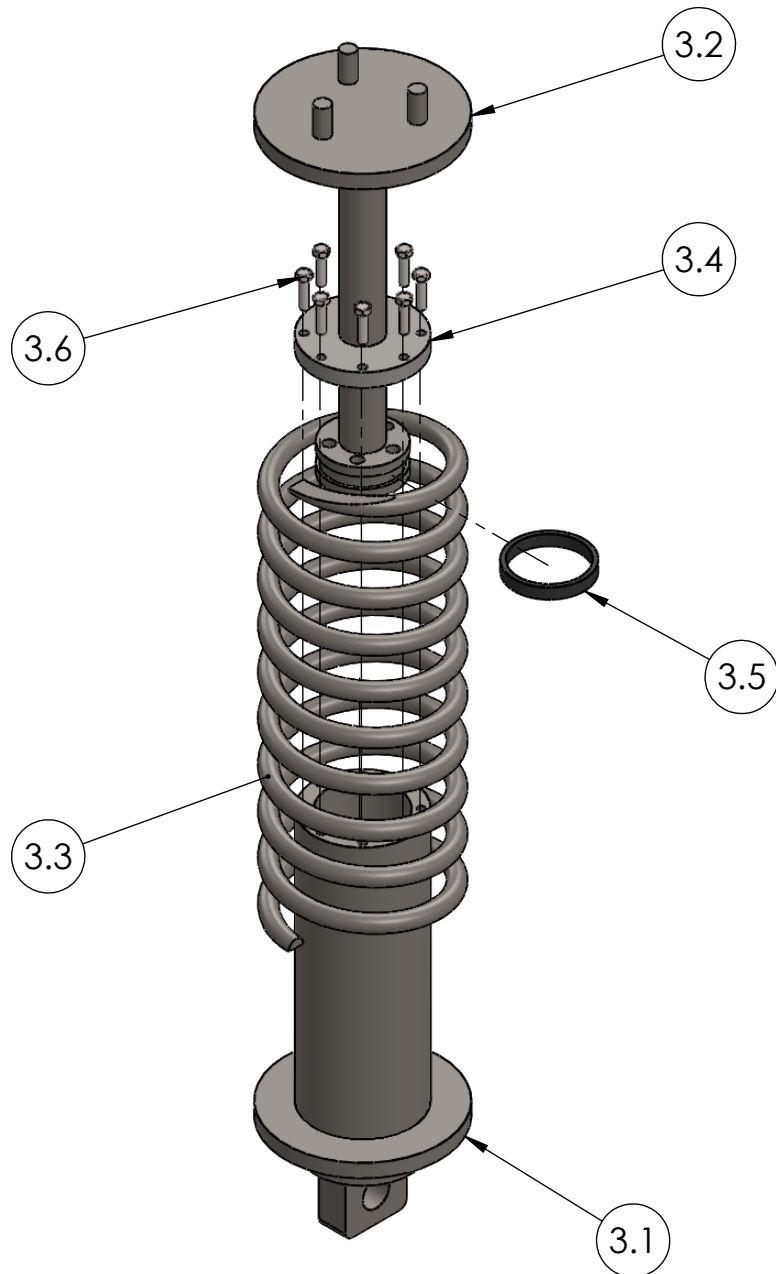
AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ

REVISÁ: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ

HOJA 13/17



		UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER		
FECHA: 31/07/22	TITULO: SISTEMA RESORTE-AMORTIGUADOR VISTA ISOMÉTRICA			
ESCALA: 1:2	AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ			
UNIDADES: mm	A4		REVIS: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ	HOJA 14/17



3.6	TORNILLO HEXAGONAL	1	M5X0,8X30
3.5	SELLO SECCIÓN RECTANGULAR	1	CAUCHO NITRILO
3.4	TAPA CILINDRO-VASTAGO	1	ACERO 4130 ESTIRADO EN FRIO
3.3	RESORTE HELICOIDAL	1	ACERO 232
3.2	VÁSTAGO AMORTIGUADOR	1	ACERO 4130 ESTIRADO EN FRIO
3.1	CILINDRO AMORTIGUADOR	1	ACERO 4130 ESTIRADO EN FRIO
CÓDIGO PIEZA	NOMBRE DE LA PIEZA	CANT.	ESPECIFICACIÓN: DIMENSIONAL, MATERIAL, REFERENCIA TÉCNICA DE SELECCIÓN, MARCA.



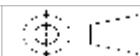
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FECHA: 31/07/22

ESCALA: 1:4

UNIDADES: mm

A4

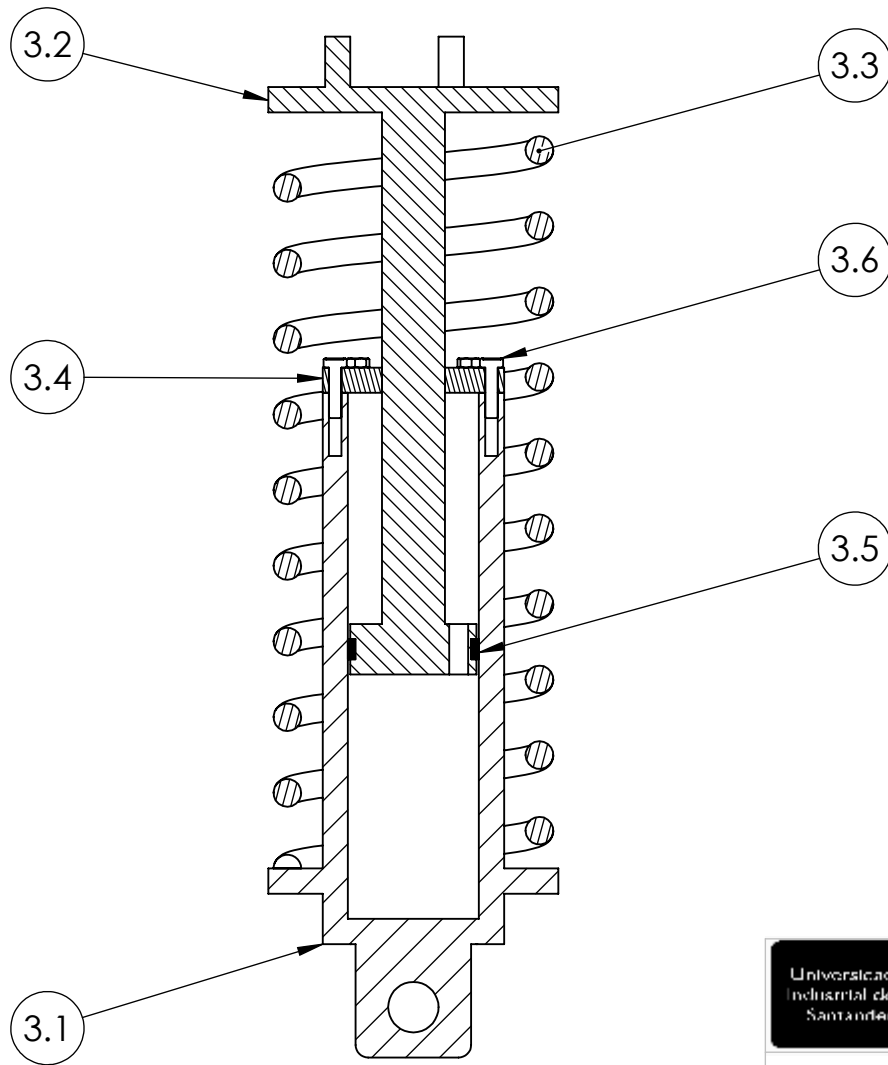


TITULO: SISTEMA RESORTE-AMORTIGUADOR
VISTA EXPLOSIONADA
CÓDIGO DE SISTEMA: 3

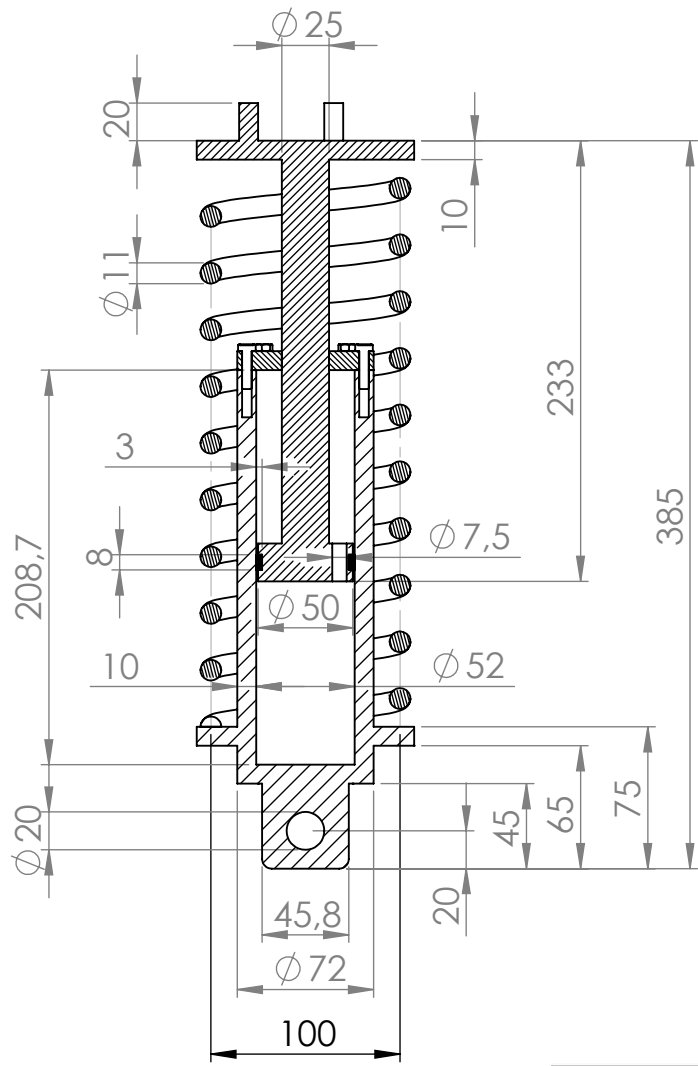
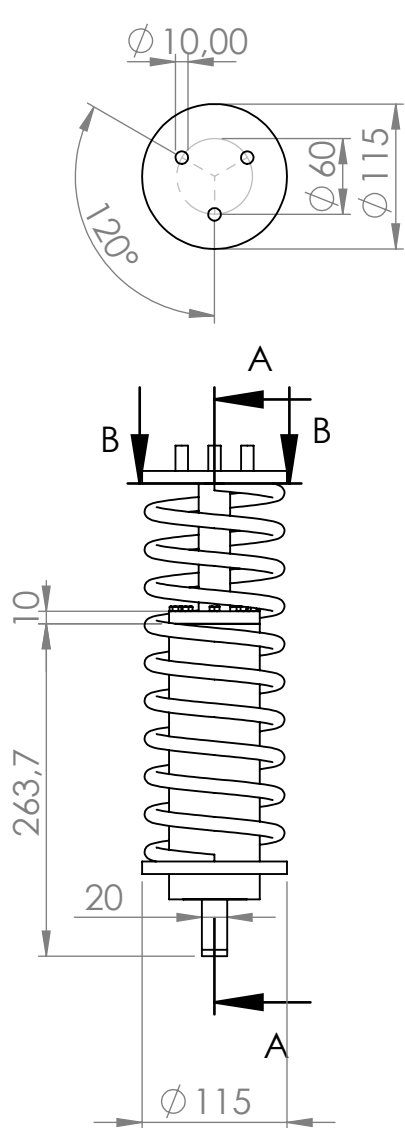
AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ

REVISÁ: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ

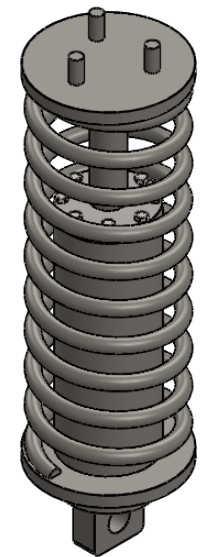
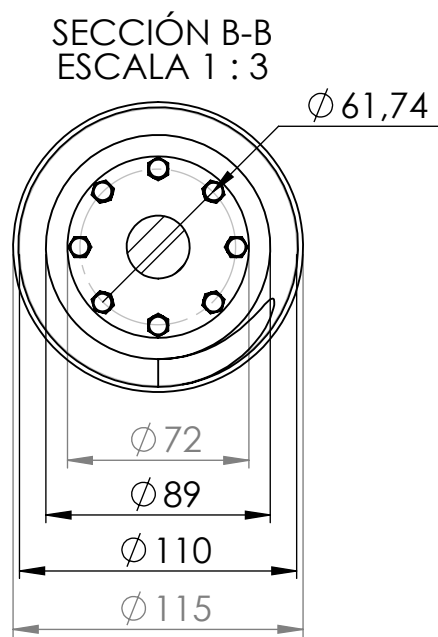
HOJA 15/17



 		UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER	
FECHA: 31/07/22		TITULO: SISTEMA RESORTE-AMORTIGUADOR VISTA CORTE LATERAL	
ESCALA: 1:3		AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ	
UNIDADES: mm		REVIS: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ	
A4		HOJA 16/17	



SECCIÓN A-A
ESCALA 1 : 4



Concepto	Notación	Especificación
Material	-	Acero al cromo vanadio (A232)
Diámetro de hilo	d	11 mm
Diámetro medio de la espira	D	100 mm
Numero de espiras activas	N_a	10 espiras
Numero de espiras totales	N_t	11 espiras
Constante de rigidez	k_{sf}	14,641 N/mm
coeficiente de amort.critico	C_{cf}	3507 Ns/m
relación de amortiguamiento	ξ	0,5911
coeficiente de amortiguamiento	C_{af}	2073 Ns/m



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FECHA: 31/07/22

TITULO: SISTEMA RESORTE-AMORTIGUADOR
DIMENSIONAMIENTO GENERAL
CÓDIGO DE SISTEMA: 3

ESCALA: 1:6

UNIDADES: mm

AUTOR: DANIEL AUGUSTO DUARTE, JUAN PABLO GONZALEZ

A4

REVIS: ING. WILLIAM PINTO HERNANDEZ

HOJA 17/17

DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE FABRICACIÓN: ESPECIFICACIONES EN TABLA.

MECANIZADO CNC DE ALTA PRESIÓN PARA EL CILINDRO AMORTIGUADOR Y ENROLLADO, TEMPLADO, REVENIDO, SHOT PEENING Y RECTIFICADO DE CARAS PARA EL RESORTE HELICODAL A COMPRESIÓN.