

LA TEORÍA APOE EN LA CONSTRUCCIÓN DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO

La Teoría APOE en la construcción de pensamiento matemático

Proyecto de grado modalidad: Trabajo de Investigación

Cristian David Santiago Navarro y Mayra Alejandra Torres Alfonso

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciatura en Matemáticas

Director

Solange Roa Fuentes

Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Codirector

Astrid Carolina Archila Prada

Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga, 2024

Dedicatoria.

Dedico este trabajo, en primer lugar, a Dios, cuya guía y fortaleza han sido mi luz en este camino académico. A mis padres, Alejandro Santiago y Marely Navarro, por su amor, paciencia y sacrificio, que me han dado la confianza para superar cada reto. A mis hermanos, Alejandro Yesid y Jhojan Andrés, por su apoyo constante, que ha sido vital en cada paso de este proceso y a toda mi familia por cuyo cariño y respaldo han sido esenciales para alcanzar este logro. A mi novia, Carolina López, por su cariño y comprensión, gracias por estar siempre a mi lado y ser mi refugio en los momentos de incertidumbre. A mis amigos y a todos los que han sido parte de este hermoso viaje, mi más profundo agradecimiento. Este logro es tanto suyo como mío.

Cristian David Santiago Navarro

Dedico este trabajo a mi familia, a mi madre, mis hermanos y mi pareja, por su amor incondicional y constante apoyo, que han sido fundamentales en este logro. Agradezco también a mi profesora Solange Roa Fuentes, por su guía, paciencia y dedicación. Además, extendiendo mi gratitud a mis compañeros de carrera, con quienes compartí valiosas experiencias y apoyo mutuo. Sin todos ustedes, este proyecto no habría sido posible.

Mayra Alejandra Torres Alfonso

Agradecimiento.

Queremos comenzar expresando nuestro más profundo agradecimiento a Dios, quien ha sido nuestra guía constante en este viaje académico. También reconocemos el apoyo incondicional de nuestras familias cuyas palabras de aliento, sacrificios y amor han sido el motor que nos impulsó a alcanzar este logro.

Agradecemos a la Dra. Roa Fuentes, nuestra directora de Trabajo de Grado, por su experta orientación y paciencia. Su mentoría ha sido fundamental en nuestra formación académica. Además, a los evaluadores por su valioso tiempo, rigor y críticas constructivas, que han enriquecido nuestro trabajo y nos han guiado en cada corrección hacia la excelencia. Y a cada uno de los profesores de la Licenciatura en Matemáticas que, de alguna manera, han dejado su huella en nuestra formación académica. Sus enseñanzas y consejos han sido cruciales para nuestro desarrollo y crecimiento intelectual.

Finalmente, extendemos nuestra gratitud a nuestros amigos, quienes compartieron risas, noches de estudio y aventuras inolvidables. También agradecemos a todas las personas que nos alentaron, enviaron mensajes de ánimo y celebraron con nosotros. Este logro no es solo nuestro, sino de todos los que formaron parte de este camino.

¡mil gracias por ser parte de este proceso académico!

Cristian David Santiago Navarro y Mayra Alejandra Torres Alfonso

Tabla de Contenido

	Pág.
Introducción	10
1. Planteamiento del problema.....	12
2. Objetivos	13
2.1 Objetivo General.....	13
2.2 Objetivos Específicos.....	13
3. Marco Teórico: La Teoría APOE y el Ciclo de Investigación.....	13
4. Método	18
5. Resultados	20
5.1 La noción de número racional: aplicación de Acciones sobre objetos concretos para fomentar la construcción de Objetos abstractos	21
5.2 La noción de infinito matemático desde APOE: la paradoja de la pelota de tenis y la paradoja del Hotel de Hilbert.....	37
5.2.1 Análisis de la Descomposición Genética genérica propuesta por Roa-fuentes y Oktaç (2014)	43
5.2.1.1 Descomposición Genética de la paradoja de las pelotas de tenis.	46
5.2.1.2 Descomposición Genética de la paradoja del hotel de Hilbert.	53
5.2.2 ¿Cómo se explican los constructos teóricos de APOE a través de la noción de infinito matemático?	57
5.2.3 ¿Qué sugerencias didácticas sobre la enseñanza y el aprendizaje del infinito matemático surgen de las investigaciones analizadas en este trabajo?	63
6. Conclusiones	68

Referencias Bibliográficas 69

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1	19
Tabla 2	48

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1	15
Figura 2	17
Figura 3	25
Figura 4	28
Figura 5	30
Figura 6	31
Figura 7	32
Figura 8	33
Figura 9	33
Figura 10	34
Figura 11	50
Figura 12	54
Figura 13	55
Figura 14	55

Resumen

Título: La Teoría APOE en la construcción de pensamiento matemático*

Autor: Cristian David Santiago Navarro y Mayra Alejandra Torrez Alfonso.**

Palabras Clave: La Teoría APOE, Infinito Matemático, Paradojas, Número Real.

Descripción: Este Trabajo de Investigación busca fomentar el estudio de componentes teóricos y metodológicos que sustentan la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, en particular, la Teoría APOE como marco conceptual y metodológico. Para esto se analizan las bases epistemológicas de la Teoría, estas son: los constructos denominados estructuras y mecanismos mentales que explican la construcción de pensamiento matemático, El proceso metodológico se compone de tres etapas: análisis teórico, diseño e implementación de un modelo de enseñanza y observación, análisis y verificación de datos, estas etapas comprenden el ciclo de investigación propuestos desde APOE. La reflexión profunda sobre dichos elementos se refleja en la comprensión de una Descomposición Genética de la noción de número racional (fracción en relación parte-todo) y el infinito matemático (dualidad entre lo actual y lo potencial).

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Director: Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Codirector: Astrid Carolina Archila Prada. Matemática

Abstract

Title: APOS theory in the construction of mathematical thinking*

Author: Cristian David Santiago Navarro and Mayra Alejandra Torrez Alfonso.**

Key words: APOS Theory, Mathematical Infinity, Paradoxes, Real Number.

Description: This Research Work seeks to promote the study of theoretical and methodological components that support the didactics of mathematics as a scientific discipline, in particular, the APOS Theory as a conceptual and methodological framework. For this, the epistemological bases of the Theory are analyzed, these are: the constructs called mental structures and mechanisms that explain the construction of mathematical thinking. The methodological process consists of three stages: theoretical analysis, design and implementation of a teaching and observation model, analysis and verification of data, these stages comprise the research cycle proposed by APOS. The deep reflection on these elements is reflected in the understanding of a Genetic Decomposition of the notion of rational number (fraction in part-whole relation) and mathematical infinity (duality between the actual and the potential).

* Degree Work

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Bachelor's degree in Mathematics. Director: Solange Roa Fuentes. Doctor of Science in the Specialty of Educational Mathematics. Co-director: Astrid Carolina Archila Prada. Mathematics

Introducción

En 2014 Ilana Arnon, Jim Cottrill, Ed Dubinsky, Asuman Oktaç, Solange Roa-Fuentes, María Trigueros y Kirk Weller publican el libro *APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. El cual ofrece valiosos aportes sobre la Teoría que se estudia en este trabajo de investigación, el documento inicia con la presentación de las bases epistemológicas que sustentan la Teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema), principalmente con aspectos relacionados con el concepto de Abstracción Reflexiva para explicar sus principales constructos: las estructuras y los mecanismos mentales que fundamentan el propósito de ser de la Teoría.

El principal objetivo de esta investigación es estudiar a profundidad los principales constructos teóricos de APOE para explicar la construcción de conocimiento matemático. Además, se propone analizar el Ciclo de investigación como herramienta metodológica que permite la formulación de modelos cognitivos definidos de conceptos, nociones y/o teoremas específicos que son explicados a través de estructuras y mecanismos mentales dispuestos en Descomposiciones Genéticas. Esta mirada de la Teoría permite que los profesores en formación y próximos a graduarse como Licenciados en Matemáticas, tengan un encuentro más profundo con una perspectiva teórica que puede contribuir en mejorar su práctica docente. A lo largo de la investigación, se discute el potencial de la Descomposición Genética como un modelo cognitivo que puede guiar la programación de la actividad realizada por el profesor y determinar los niveles de razonamiento que dicha actividad puede promover en sus estudiantes. La reflexión particular sobre los fundamentos y el desarrollo de la Teoría APOE en esta investigación, se propone como una manera de generar conexiones entre la Teoría y la práctica; donde el profesor se concibe como

un profesor-investigador y el aula como su laboratorio. La sistematización continua del análisis de la actividad generada en el aula puede refinar los modelos cognitivos propuestos y señalarle al profesor-investigador mejores formas para promover una comprensión en el aula.

Como se muestra en el libro APOS Theory (Arnon et al., 2014), esta perspectiva teórica ha sido usada para explicar la forma en cómo los estudiantes de diferentes niveles escolares afrontan la comprensión de las matemáticas en áreas como álgebra lineal, cálculo, ecuaciones diferenciales, teoría de conjuntos y álgebra abstracta, entre otros. Dado que interesa analizar las herramientas que ofrece la Teoría APOE al profesor-investigador, se elige estudiar el acercamiento de estas perspectivas a dos nociones: una noción propia de las matemáticas escolares, en este caso la noción de número racional vista como fracción en relación parte-todo; y una noción que puede desarrollarse con mayor énfasis en la construcción de matemáticas más avanzadas a nivel universitario, en este caso la noción del infinito.

A lo largo de este documento se presenta la problemática que da origen al diseño y desarrollo de este Trabajo de Investigación, así como los objetivos que se propone. En el capítulo 3, se analizan de forma genérica las estructuras y mecanismos mentales, así como los elementos fundamentales del Ciclo de Investigación propuestos por la Teoría APOE. Con base en estos, en el capítulo 4, se desarrolla los aspectos más destacados de las nociones matemáticas estudiadas en este Trabajo de investigación, se ubica el problema dada la naturaleza de cada una de las nociones y se estudian los modelos cognitivos presentados en la literatura sobre estas nociones. Finalmente se presenta una discusión final sobre los aportes de esta Investigación en la formación de Licenciados en Matemáticas.

1. Planteamiento del problema

Diversos conceptos, nociones y teoremas matemáticos han sido estudiados desde la perspectiva de la Teoría APOE, usando o adaptando el Ciclo de Investigación en varias áreas de las matemáticas (para más detalle al respecto revisar Arnon et al. 2014, capítulo 12 *Annotated bibliography*). Por otra parte, dentro del marco de los trabajos de grado de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, este trabajo se propone a través de la modalidad de Trabajo de Investigación. Éste se plantea como un espacio para profundizar en el desarrollo de prácticas que promueven el espíritu de investigación científica sobre un tema específico de los futuros profesores de matemáticas con base en las perspectivas de la Teoría.

En consecuencia, en esta Investigación buscamos centrarnos en el estudio de los aspectos teóricos y metodológicos propuestos desde la Teoría APOE, con el fin de analizar la literatura acerca de la comprensión que pueden desarrollar los estudiantes de diferentes niveles académicos sobre: la noción de número racional y la noción del infinito matemático.

2. Objetivos

Con base en el panorama descrito sobre la modalidad de Trabajo de Investigación, los objetivos principales de esta Investigación son:

2.1 Objetivo General

Estudiar los constructos teóricos (estructuras y mecanismos mentales) y metodológicos (Ciclo de investigación) de la Teoría APOE a través del análisis de literatura relacionada con las nociones de número racional y el infinito matemático.

2.2 Objetivos Específicos

- Realizar una búsqueda bibliográfica sobre las investigaciones relacionadas con las nociones de número racional y el infinito matemático desde la perspectiva de la Teoría APOE.
- Sistematizar la información sobre los principales aportes de APOE a la comprensión de la noción de número racionales y la noción del infinito matemático como resultado de su estudio en el desarrollo de la Investigación.
- Analizar las implicaciones del uso del Ciclo de Investigación de APOE en la literatura estudiada en el Trabajo de Investigación.

3. Marco Teórico: La Teoría APOE y el Ciclo de Investigación

La Teoría APOE acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, se sustenta en la Teoría constructivista de Piaget; principalmente en el concepto de Abstracción reflexiva (Dubinsky, 1984). Esta Teoría fue planteada en principio por Ed Dubinsky y miembros de *Research*

undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC, por sus siglas en inglés), Asiala et al. (1996) proponen las primeras descripciones de los principales constructos teóricos de APOE, estas son las estructuras y mecanismos mentales que permite la construcción de un modelo cognitivo para la comprensión de una noción o concepto matemático.

Estos constructos son sustentados a partir de aspectos epistemológicos de APOE en Arnon et al. (2014), en este libro denominado APOS Theory se describen los elementos de las tres componentes que guían el Ciclo de Investigación propuesto por la Teoría, dando como ejemplo la descripción de algunos caminos seguidos por investigadores; mostrando la efectividad del uso de la Teoría, entre otros aspectos que resultan de interés para aquellos que quieren comprender aspectos cognitivos asociados a la construcción del pensamiento matemático.

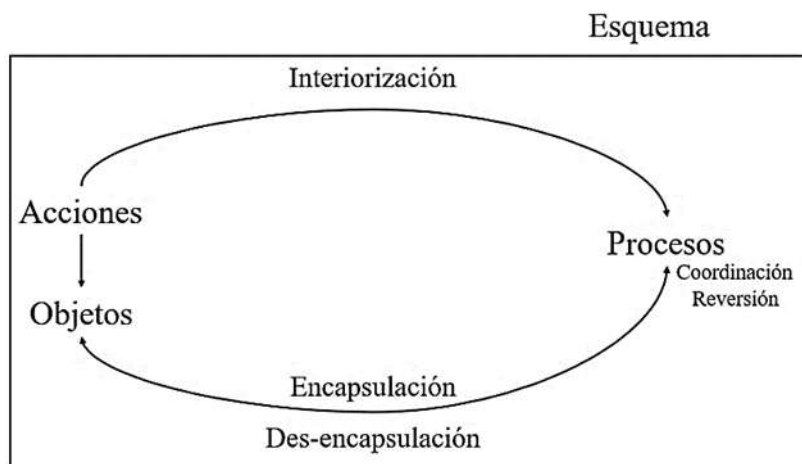
La descripción de las estructuras y mecanismos mentales es el fundamento sobre el cual se desarrolla la Teoría APOE; estas son pensados en términos de la Abstracción Reflexiva desarrollada por Piaget (1975). Así Dubinsky (1991) plantea algunas características importantes sobre la Abstracción Reflexiva de la siguiente manera: "... la abstracción reflexiva no tiene un principio absoluto, pero aparece desde edades muy tempranas en la coordinación de estructuras sensorio-motrices y continua hasta el desarrollo de cualidades matemáticas elevadas" (p.95). En consecuencia, en Asiala et al. (1996) se establece una definición para el conocimiento matemático de la siguiente manera:

El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones problemáticas en matemáticas, reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas; organizándolos en Esquemas con el fin de manejar dichas situaciones (p. 7).

De esta manera, la Teoría APOE postula que los conceptos o nociones matemáticas pueden ser estructurados por la aplicación de Acciones sobre objetos construidos previamente, con el fin de iniciar con la construcción de un nuevo Objeto por medio de los mecanismos mentales, que da paso a la construcción de un nuevo Esquema que puede ser asimilado por un Esquema preexistente. Por tanto, el principio de aprendizaje de esta Teoría se basa en que todo concepto o noción matemática puede ser construida por un individuo, teniendo en cuenta los conocimientos previos necesarios que deba tener para esta construcción. En la Figura 1 se muestra la forma de relacionar las estructuras a partir de algunos mecanismos mentales, permitiendo que el individuo logre construir las estructuras y mecanismos mentales apropiados para cada concepto mediante el establecimiento de conexiones entre las diferentes estructuras asociadas con un concepto o noción matemática.

Figura 1

Estructuras y mecanismos mentales de la Teoría APOE



Nota. Tomado de *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education* (p. 18), por Arnon et al., 2014, Springer.

El proceso de construcción del conocimiento no es lineal, la Figura 1 permite la explicación para la posible ruta de construcción de un Esquema mental asociado a un concepto o noción matemática. A continuación, se explica cada una de las estructuras mentales y la forma en que se relacionan y construyen con los mecanismos mentales basados en Arnon et al. (2014).

Las Acciones se definen como aquellas transformaciones que un individuo puede realizar sobre Objetos construidos previamente. Estas estructuras están condicionadas por un estímulo externo, una indicación que requiere desarrollarse paso a paso y no implica una reflexión. La interiorización de las Acciones en Procesos requiere de la experiencia de los individuos con situaciones matemáticas que sugieran algún tipo de reflexión.

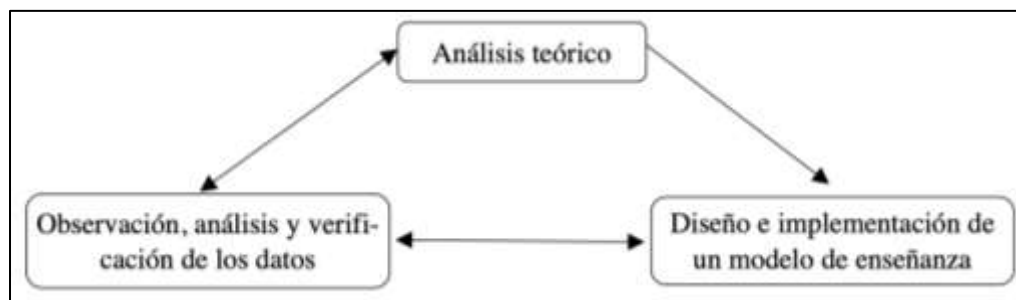
Los Procesos al igual que las Acciones son estructuras dinámicas, un Proceso puede ser encapsulado en un Objeto a través del mecanismo de encapsulación. Este mecanismo tiene en cuenta todas las características del Proceso y permite que el individuo realice nuevas transformaciones sobre él. Sin embargo, el mecanismo de encapsulación requiere de la preexistencia de un único Proceso, por tanto, cuando se tiene más de un Proceso, se define el mecanismo de coordinación que permite poner dos o más Procesos juntos en un único Proceso.

El Esquema es la estructura más robusta en la que se organiza el conocimiento matemático; esta estructura son colecciones de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas relacionados con un concepto matemático. Esta estructura es de utilidad cuando el individuo se enfrenta a una situación matemática, ya que la toma de decisiones sobre qué Esquemas le permiten abordar la situación de manera exitosa. Sin embargo, no necesariamente en todos los modelos cognitivos aparece la estructura Esquema, ya que no todo concepto o noción matemática requiere de este grado de evolución; por esta razón, en este trabajo se mencionarán algunos Esquemas de interés para algunos casos.

El Ciclo de investigación que propone la Teoría APOE es una herramienta que puede usarse para explicar los modelos cognitivos que pueden construir los estudiantes, para la comprensión de algunos conceptos matemáticos y así sugerir formas en que los alumnos puedan aprender estos conceptos. Además, el diseño y desarrollo del Ciclo de Investigación permite señalar las estrategias que propician un mejor aprendizaje de los conceptos abstractos o complejos.

Figura 2

Ciclo de investigación de la Teoría APOE



Nota. Tomado de *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education* (p. 94), por Arnon et al., 2014, Springer.

La Figura 2 muestra las tres componentes en la que está compuesta el Ciclo de Investigación que propone la Teoría APOE, estas componentes se denominan: Análisis Teórico, Diseño e implementación de un modelo de enseñanza, Observación, análisis y verificación de datos; estas se desarrollan a través de un ciclo que puede repetirse tantas veces como sea necesario para entender la naturaleza de un concepto y proponer estrategias pedagógicas efectivas para acompañar a los estudiantes en su aprendizaje.

El Análisis Teórico tiene como objetivo predecir las construcciones mentales que los estudiantes deben realizar para comprender un concepto; con base en este análisis se diseña un Descomposición Genética que ayude al diseño de estrategias pedagógicas como actividades y

ejercicios, con el fin de ayudar a los estudiantes a construir las estructuras y mecanismos mentales necesarios para el aprendizaje. A partir de estos diseños que son aplicados en los estudiantes, se analizan los datos con el objetivo de refinar el modelo cognitivo de tal manera que se pueda lograr la construcción de las estructuras y mecanismos mentales.

De esta manera, como resultado final de este Trabajo se espera presentar cómo el Ciclo de Investigación ha sido interpretado y desarrollado en diferentes investigaciones, así como las implicaciones de diseño que impone sobre el trabajo que puede potenciar un profesor de matemáticas en el aula.

4. Método

Este Trabajo de Investigación está organizado en tres fases que buscan fomentar a partir del análisis de información documental, la comprensión de los constructos teóricos y de método de la Teoría APOE. Para esto se desarrollan las sesiones del Trabajo de Investigación a través de la participación de todos los integrantes, mediante exposiciones orales, informes, escritos y relatorías. El desarrollo de todo el Trabajo lleva a los participantes a la construcción de un documento conjunto que evidencia la comprensión de la Teoría y su aporte al desarrollo del aula regular. A continuación, se describe cada fase y la manera como se desarrollan durante el año de ejecución del Trabajo de Investigación.

Fase I. Exploración: Identificación de la literatura. Esta fase consiste en la búsqueda de los principales documentos que guían el diseño y desarrollo de la Investigación. Los criterios de selección siguen las recomendaciones dadas por Sánchez y Molina (2012) para realizar una búsqueda bibliográfica, tomando como fuentes consultadas: artículos de investigación, tesis de

posgrado y libros. Como preguntas organizadoras de la búsqueda se toman en cuenta los conceptos de interés de los participantes del Trabajo de Investigación, estos son: la fracción y el infinito matemático, analizado con base en la Teoría APOE. Para organizar la revisión se plantearon tres preguntas guía: PG1. ¿Cuál es el objeto matemático de estudio?, PG2. ¿Cómo se describen las estructuras y mecanismos mentales?, PG3. ¿Cómo cada una de las tres componentes del Ciclo de Investigación es diseñada y desarrollada? Y PG4. ¿Cuáles son las principales contribuciones sobre la comprensión del objeto matemático de estudio? El desarrollo final de esta Fase nos lleva a la selección de la literatura que propone estudiar durante el desarrollo de la Investigación. En la Tabla 1 aparece la lista de publicaciones, en la selección fue determinante la experiencia de la directora del Trabajo de Investigación para determinar la pertinencia de cada documento, así como su relevancia respecto a la perspectiva que cada trabajo evidencia del uso de la Teoría APOE.

Tabla 1

Lista de publicaciones

Año de Publicación	Referencia	Palabras Clave
2012	Roa-Fuentes, S. (2012). <i>El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas</i> . Tesis de doctorado no publicada, CINVESTAV - IPN. México.	Infinito matemático, APOE, descomposición genética.
2014	Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2014). El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas. <i>Educación Matemática</i> , 26(1), 73 – 101.	Teoría APOE, Procesos iterativos infinitos, mecanismos y estructuras mentales, Objeto trascendente, Paradojas.
2016	Villabona, D. y Roa-Fuentes, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: Un modelo de construcción del	Teoría APOE, paradojas, triángulo de Sierpinski, procesos

	infinito matemático desde la teoría APOE. <i>Educación Matemática</i> , 28(2), 119 – 150.	iterativos infinitos, objetos trascendentes.
2021	Lasnibat, T., Flores, M. y Puraivan, E. (2021). Un enfoque cognitivo en la comprensión de la comparación entre los cardinales del conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros en estudiantes de secundaria. <i>Educación Matemática</i> , 33(2), 147 – 172. https://doi.org/10.24844/em3302.06	Infinito, cardinalidad, números naturales, números enteros, teoría APOE:

Fase II. Caracterización: Análisis de información documental. Esta Fase incluye el análisis de la literatura identificada. Se realiza una selección de los principales documentos que guían el estudio. En esta Fase los integrantes del Trabajo de Investigación exponen de manera regular sus avances a través de la presentación de exposiciones orales; además, presentan avances en la construcción del documento final, guiado por los objetivos de este trabajo.

Fase III. Construcción: Escrito final con los componentes teóricos y de método de los temas de interés. Esta Fase promueve la reflexión continua y generación del documento final con los principales teóricos y de método relacionados con el tema de interés de cada integrante del Trabajo de Investigación. Estos son compilados y organizados en el informe final de la Investigación. En el capítulo 5 se exponen las principales reflexiones alrededor de la literatura seleccionada y las discusiones desarrolladas en el Trabajo de Investigación.

5. Resultados

Los resultados son estructurados teniendo en cuenta las preguntas planteadas en la Fase II del método, aunque no se desarrollan de manera puntual; se tienen como sustento para presentar

la información, principalmente centradas en las discusiones desarrolladas durante el Trabajo de Investigación.

5.1 La noción de número racional: aplicación de Acciones sobre objetos concretos para fomentar la construcción de Objetos abstractos

Uno de los conceptos centrales de estudio en este Trabajo de Investigación es la noción de número racional entendida como fracción en relación parte-todo; por esta razón, nos enfocamos en el análisis de las estructuras y mecanismos mentales que surgen durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de la noción de fracción. Teniendo en cuenta que los participantes de la Investigación relacionan la Teoría APOE para la construcción de pensamiento matemático avanzado, y hacen énfasis en la comprensión de esta noción desde lo concreto a lo abstracto; el objetivo principal es estudiar los modelos cognitivos denominadas Descomposiciones Genéticas de la noción de número racional.

En particular se abordaron los fundamentos del problema de investigación, destacando la evolución reciente de la indagación en torno a la noción de fracciones en los grados de básica primaria. Se examinan las investigaciones existentes, el currículum escolar colombiano y los resultados de pruebas estandarizadas en educación básica; esto proporciona un contexto integral para la comprensión del problema vinculado a la construcción abstracta de los números racionales. El enfoque de las investigaciones que sustentan este estudio se centra en el cuestionamiento sobre: ¿cómo los estudiantes llevan a cabo la construcción de objetos abstractos?

Según Castro (2001) el aprendizaje de fracciones representa un desafío significativo para los docentes de primaria, evidenciado por el alto porcentaje de estudiantes que enfrentan dificultades en la comprensión de esta noción. En respuesta a esta problemática se ha planteado, por ejemplo, un enfoque pedagógico que aboga por la introducción de conceptos matemáticos,

como el de fracción, a través de actividades que permitan a los estudiantes manipular objetos concretos. Este método busca que los estudiantes descubran principios y soluciones matemáticas como fundamentos de conceptos abstractos, propiciando un aprendizaje continuo que va desde lo concreto hasta lo abstracto. En esta vía, Sánchez (2003) destaca la importancia de proporcionar condiciones adecuadas para que los estudiantes experimenten con material concreto para fomentar su comprensión. Además, dicho trabajo subraya que el ciclo de aprendizaje que propone la Teoría APOE es una interacción planificada entre el conocimiento estructurado y el estudiante, lo que facilita el diseño de tareas pertinentes para fomentar la comprensión de conceptos matemáticos.

Por otro lado, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) expone que la dificultad en la enseñanza y aprendizaje de los números fraccionarios radica en su relación con diversos tipos de situaciones y representaciones; ya que mencionan que: “Los números fraccionarios pueden estar vinculados a situaciones de medida, representar partes de un todo, funcionar como cocientes en repartos, ser indicios comparativos, razones, y expresarse de varias maneras, como fracciones, fracciones decimales, porcentajes, entre otras” (MEN, 2006, p.59)

El concepto de fracción se torna complejo y requiere un proceso de desarrollo secuencial a lo largo del tiempo, según Ávila y Mancera (1989), quienes sostienen que “es preciso adquirirlo a través de un prolongado proceso de desarrollo secuencial” (p.26). Ante esta complejidad conceptual, surge la necesidad apremiante de estudiar aspectos cognitivos que sustenten propuestas didácticas destinadas a fomentar el desarrollo de niveles conceptuales más altos en los estudiantes. El objetivo desde una perspectiva cognitiva en el marco de la Educación Matemática es promover en los estudiantes la construcción de nociones fundamentales sobre los números fraccionarios, impulsando así su evolución a lo largo de su trayectoria escolar.

La investigación que se ha realizado sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción revela diversas dificultades notorias entre los estudiantes de educación básica. Londoño Millán, Kakes Cruz, y Llanes Castro (2015) identifican cuatro categorías principales de dificultades entre los alumnos de 5° y 6° de primaria: el uso del lenguaje, la representación gráfica, los procesos aritméticos, y la resolución de problemas. Entre las dificultades reportadas, los estudiantes confunden el numerador con el denominador y presentan errores al nombrar fracciones, especialmente cuando el denominador es dos. Además, muchos alumnos tienen problemas para ubicar fracciones en la recta numérica y suelen graficar fracciones impropias de manera incorrecta, lo que refleja una falta de comprensión profunda del concepto.

Estas dificultades no son exclusivas de un nivel educativo, sino que se arrastran a lo largo de la trayectoria académica, como lo confirma un estudio realizado por Rueda Seguro (2018), quien sostiene que los errores en el aprendizaje de las fracciones pueden deberse a factores como la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, las actitudes de los profesores, y los estilos de enseñanza.

El desarrollo de la noción de número racional implica el uso de representaciones gráficas que visualicen la unidad y sus partes de diversas formas. Este concepto es fundamental y debe expandirse para que los estudiantes comprendan el conjunto de números racionales como un conjunto estructurado. Kieran (1983) destaca que la expresión simbólica $\frac{a}{b}$ puede modelar diferentes significados matemáticos como los de: medida, cociente, operador multiplicativo y razón. Teniendo en cuenta que el ámbito escolar y los conocimientos adquiridos no son simplemente herramientas para resolver problemas, sino que requieren interpretaciones secuenciales durante los procesos de enseñanza y aprendizaje (Kieran, 1983); el objetivo es que los estudiantes desarrollen una comprensión concreta de la noción de fracción, lo que

eventualmente los llevara a construir una noción abstracta de número racional. En este contexto, Vergnaud (1983) destaca que el dominio de las fracciones es parte de un campo conceptual que involucra diversas situaciones, procedimientos, conceptos y representaciones interconectadas.

Estas ideas se han venido desarrollando hace varios años en el campo de la Educación Matemática, sin embargo, no han tenido el impacto suficiente en las aulas de clase. El Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES) lidera el seguimiento de calidad de los sistemas educativos y sus resultados impactan en la implementación de propuestas educativas; Colombia ha mostrado bajo desempeños en las pruebas SABER en los grados 3°, 5° y 9°, que buscan mejorar la calidad de la educación. Por esta razón, el Ministerio de Educación Nacional busca optimizar el nivel académico, identificando fortalezas y debilidades, desarrollando planes de mejoramiento en áreas clave como Matemáticas. Teniendo en cuentas esto, en el área de Matemáticas se evalúan las siguientes competencias: interpretación y representación, formulación-ejecución y argumentación, abarcando componentes numérico, variacional, geométrico, métrico y aleatorio.

En el contexto educativo colombiano, los estándares básicos de competencias en matemáticas han delineado una guía para la enseñanza de números fraccionarios; se enfatiza en la importancia de una reconceptualización de la unidad y del proceso de medición al transitar del número natural al fraccionario. Este cambio implica comprender las medidas en situaciones donde la unidad no se ajusta exactamente a la cantidad a medir, lo que representa un desafío conceptual para los estudiantes. Dentro del ámbito de la didáctica de las matemáticas, se han desarrollado secuencias para facilitar el aprendizaje de los diversos significados de las fracciones. Por ejemplo, Llinares y Sánchez (1988) buscaban en su investigación que los estudiantes construyeran un entendimiento más profundo y práctico de las fracciones, más allá de una mera memorización. En

particular, se destaca la importancia de proporcionar a los estudiantes experiencias significativas con interpretaciones de fracciones para promover una comprensión más sólida del concepto. Sin embargo, aún se sigue evidenciando un énfasis en la mecanización de algoritmos que generalmente no encierran las propiedades fundamentales de las fracciones, sino que promueven formas nemotécnicas de replicar información. Aún hoy día es urgente la necesidad de abordar de manera adecuada la construcción de la noción de fracción, como primera faceta de presentación de los números racionales.

Al respecto, Hurtado (2012) propone abordar la enseñanza de fracciones a través de situaciones problema, específicamente utilizando el método de resolución de problemas planteado por Pólya (1945). Un ejemplo de problema planteado por Hurtado (2012) es: “Se tienen dos tortas de igual tamaño. Si David comió un cuarto de una, y Juan comió tres octavos de la otra, ¿Quién comió una mayor cantidad de torta? El enfoque de Hurtado (2012) busca evaluar la comprensión de los estudiantes sobre fracciones y su capacidad para aplicar este conocimiento en contextos prácticos; sin embargo, Hurtado (2012) identificó que muchos estudiantes enfrentan dificultades en la interpretación y construcción de fracciones en situaciones problemáticas.

Figura 3

Tabla de resultados del primer problema de estudio exploratorio

	ARGUMENTACIÓN		PROCESO	
	Con procedimiento	Sin procedimiento	Operación	Gráfica
Correcto	0	6	0	6
Incorrecto	0	24	0	24

Su estudio exploratorio reveló que, al abordar este problema, solo un pequeño grupo de estudiantes logró comprender adecuadamente el problema, mientras que la mayoría presento

dificultades (ver Figura 3). Dentro de estas dificultades, Hurtado (2012) reporta confusión que evidencian los estudiantes entre numerador y denominador. Para superar estas dificultades Hurtado (2012) implementa una metodología que comprende cuatro momentos clave: diseño y aplicación de talleres; socialización de soluciones; retroalimentación y consenso de conceptos; y evaluación de la propuesta didáctica. A través de este enfoque, se fomentó la participación activa de los estudiantes en la resolución de problemas, estos les permitió argumentar sus procedimientos y potenciar un mayor significado de las fracciones.

La metodología de Hurtado (2012) destaca la importancia del uso de material concreto en la representación gráfica de fracciones y subraya la relevancia de involucrar a los estudiantes en la interpretación y construcción de soluciones. En última instancia, la investigación reveló que los estudiantes lograron avanzar en su comprensión de las fracciones y su capacidad para aplicar estos conceptos en situaciones problemáticas, resaltando la importancia de enfoques activos y participativos en la enseñanza de las matemáticas. Es importante destacar el rol de material concreto en el desarrollo de la noción de fracción, así como la necesidad de involucrar contextos que se asocien con la fracción. Con este panorama, a continuación, se aborda de manera particular el estudio de la fracción desde la perspectiva de la Teoría APOE, esta incluye una interpretación de las posibles transformaciones que es posible aplicar sobre Objetos concretos que permiten la construcción de Objetos abstractos.

El principal documento que abordamos es el capítulo 9, del libro APOS Theory (2014) titulado “Uso de la Teoría APOE para la enseñanza de matemáticas en la escuela primaria”, este capítulo se sumerge en la aplicación de las ideas de Piaget y la Teoría APOE en la enseñanza de fracciones en los grados 4 y 5 de escuelas primarias en Israel. La investigación se origina en la primera mitad de la década de 1990, cuando el equipo de matemáticas del *Centro de Tecnología*

Educativa del Tel-Aviv se propuso revisar los materiales existentes para la enseñanza de matemáticas en las escuelas primarias. Un área clave de enfoque fue la enseñanza de fracciones; los datos y conclusiones presentados en el capítulo provienen de dos estudios significativos: uno sobre la comprensión de los estudiantes sobre las relaciones parte-todo y otro, sobre el trabajo de los estudiantes con clases de equivalencia de fracciones. El capítulo también explora la adaptación de las ideas de Piaget sobre el aprendizaje de las matemáticas postsecundarias por parte de Ed Dubinsky (Asiala et al., 1996). Se destaca la transición entre las etapas de operaciones concretas en la escuela primaria y operaciones formales en la educación postsecundaria, abordando la diferencia en la naturaleza de los objetos sobre los que se aplican Acciones (Arnon et al., 2014).

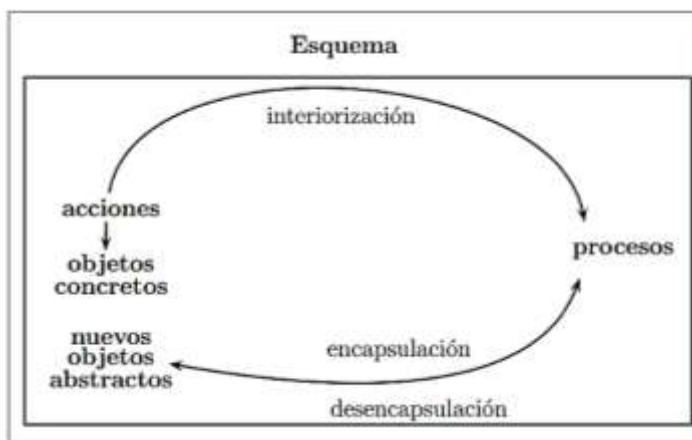
En particular Arnon et al. (2014), mencionan que es fundamental reconocer que los datos presentados en los estudios fueron recopilados en los primeros años de la década de 1990, y desde entonces, la Teoría APOE ha evolucionado. Esta exploración crítica de la Teoría APOE en la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria, sienta las bases para comprender cómo una Teoría de la Educación Matemática puede ser aplicada y adaptada en el diseño curricular y la instrucción, especialmente en el contexto específico de la enseñanza de fracciones.

En la primera sección del capítulo 9 del libro, se aborda la aplicación de la Teoría APOE en contextos educativos divergentes, centrándose en las diferencias entre la escuela primaria y la postsecundaria. La Teoría cognitiva de Piaget fundamentado de APOE, parte de la premisa de que el individuo construye conocimiento reflexionando sobre sus experiencias; para esto formula la etapa de operaciones concretas y la etapa de operaciones formales. Como muestran algunos autores, en el contexto concreto de la escuela primaria, la concreción implica el uso de objetos físicos reales o imaginarios. Arnon et al. (2014) ejemplifican esto usando recortes de círculos, representaciones visuales de fracciones donde los estudiantes interactúan con materiales tangibles;

además, se destaca el uso de gráficos cartesianos y dibujos de cuerpos en el ámbito matemático. En contraste, la abstracción, propia de las operaciones formales en la escuela postsecundaria, implica el manejo de conceptos matemáticos sin representaciones físicas, utilizando el lenguaje, la sintaxis y el conocimiento estructural matemático (Arnon et al., 2017). La Figura 4 ilustra cómo, en el contexto de primaria y secundaria generalmente, las Acciones son realizadas sobre Objetos concretos, que después de la generación de mecanismos y otras estructuras pueden ser transformados en Objetos abstractos.

Figura 4

Interpretación de la Teoría APOE para estudiantes de primaria y secundaria



Nota. Tomado de *Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. Enseñanza de las Ciencias, 35(2), (p.94)* por González Rojas, D. E., & Roa-Fuentes, S. (2017) traducción de Arnon et al., 2014 (p. 18)

La Figura 4 modifica la representación tradicional de las relaciones entre estructuras y mecanismos mentales propuesta por la Teoría APOE, comparado con la Figura 1, esto para mostrar la implementación de la Teoría en la etapa de operaciones concretas, donde las Acciones aplicadas a Objetos físicos generan Objetos matemáticos abstractos en la mente del estudiante. Según Arnon

et al. (2014) los Objetos sobre los cuales se actúa son concretos, mientras que los Objetos que surgen de la encapsulación de Acciones interiorizadas son abstractos, similar a la dinámica en estudiantes universitarios. Aunque como muestran González Rojas y Roa-Fuentes (2017) en matemáticas pueden identificarse conceptos como el de transformación lineal, donde el énfasis en la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos potencia la comprensión que estudiantes universitarios pueden desarrollar sobre él.

En Arnon et al. (2014) se aborda el plan de estudios de cuarto grado sobre fracciones, enfocado principalmente en la interpretación parte-todo; para esto se usa la representación de fracciones $\left(\frac{k}{n}\right)$ mediante la división de un objeto en n partes iguales, seleccionando k de dichas partes. En la investigación reportada se emplearon círculos y recortes circulares como representaciones de las fracciones, esto con el objetivo de desarrollar en los estudiantes la interpretación de la fracción como parte-todo. En una “secuencia de enseñanza tradicional” denominada STN (por sus siglas en inglés), los estudiantes operaron con recortes circulares impresos con fracciones unitarias hasta $\frac{1}{20}$. Sin embargo, se observó que estas actividades centradas en recortes circulares no favorecen la interpretación parte-todo; se sospechaba que los estudiantes reflexionan más sobre las características de los recortes que sobre la interpretación pretendida (Arnon et al., 2014).

En respuesta, el equipo de investigadores buscó mejorar la situación, inspirándose en las ideas de Piaget y la Teoría APOE. Piaget distingue tres tipos de experiencias adquiridas a través del contacto con el mundo exterior:

A. *Ejercicio simple*: no implica necesariamente que el conocimiento vaya a ser extraído.

B. *Experiencia física*: donde el niño manipula objetos físicos y mediante “un proceso simple de abstracción” extrae propiedades de los objetos.

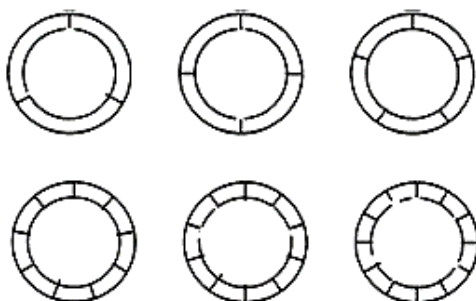
C. *Experiencia lógico-matemática*: en la que el niño, manipulando objetos, construye propiedades de la Acción misma y de las transformaciones que realiza sobre los Objetos.

(Arnon et al., 2014)

La secuencia STN se asemejaba más a la experiencia tipo B., donde los estudiantes identifican propiedades de los recortes circulares, en lugar de realizar una abstracción reflexiva, en este caso una interiorización de la interpretación parte-todo. Par remediar esto, los investigadores desarrollan una nueva secuencia didáctica que buscaba incrementar el nivel de experiencias, promoviendo experiencias de tipo C. que permitiera a los estudiantes la interiorización de Acciones; esto es, la construcción de la fracción como parte-todo. Para esto como se muestra en Arnon et al. (2014), se introducen anillos divisorios (ver Figura 5) construidos sobre cartón a partir de los cuales se inicia con el trabajo de los estudiantes; este cambio buscaba favorecer la construcción de una interpretación más profunda de fracciones, superando las limitaciones identificadas en la secuencia STN.

Figura 5

Anillos divisorios



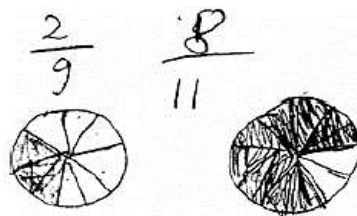
Nota. Tomado de *In the mind's eye: How children develop mathematical concepts—Extending*

Piaget's theory. Unpublished doctoral dissertation, School of Education, Haifa University (p.210) por Arnon, I. (1998).

En Arnon et al. (2014) se describe una estrategia de enseñanza diseñada para potenciar la interiorización de conceptos matemáticos, específicamente la construcción de representaciones de fracciones en estudiantes de cuarto grado. Además de los anillos divisorios, se introducen círculos vacíos ya preparados y recortes de círculos para mejorar la interpretación parte-todo. Los anillos divisorios eran herramientas clave, perforadas para facilitar su uso; se esperaba que los estudiantes seleccionaran un anillo dividido en n partes iguales, que lo colocaran sobre un círculo vacío con punto central de tal manera que logaran usar segmentos para dividir el círculo en partes iguales, sombreando k de esas partes. Esta metodología denominada EXP buscaba fomentar experiencias tipo C. (lógico matemáticas) en lugar de tipo B. (experiencia física simple). Se introdujeron recortes de círculos más adelante, ya que, desde la perspectiva teórica, dicha Acción, debía repartirse de tal manera que los estudiantes interiorizaran la Acción de “dibujar representaciones circulares de fracciones”. Se evidenció la interiorización mediante entrevistas, donde los estudiantes demostraron su comprensión verbalmente y mediante dibujos; estableciendo representaciones como las que aparecen en la Figura 6 y la Figura 7. Arnon (1998) citado en Arnon et al. (2014) muestra que los estudiantes mostraron un rendimiento significativamente mejor en el grupo EXP en comparación con el grupo STN.

Figura 6

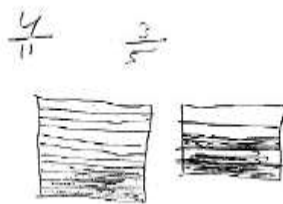
Aproximados dibujos de Yulia



Nota. Tomado de *In the mind's eye: How children develop mathematical concepts—Extending Piaget's theory*. Unpublished doctoral dissertation, School of Education, Haifa University (p.220) por Arnon, I. (1998).

Figura 7

Aproximados dibujos de Gali



Nota. Tomado de *In the mind's eye: How children develop mathematical concepts—Extending Piaget's theory*. Unpublished doctoral dissertation, School of Education, Haifa University (p.115) por Arnon, I. (1998).

En el análisis de datos de Arnon (1998) se tienen en cuenta cuatro conceptos o nociones en el desarrollo de las tareas propuestas por la investigadora, en dos instrumentos, estas son: la comparación de fracciones unitarias, la construcción de fracciones no unitarias, la comparación de fracciones no unitarias y multiplicación de una fracción unitaria por un número entero. Inicialmente se propone un camino para transitar de una estructura Acción a una estructura Proceso. Lo estudiantes EXP demostraron una mayor capacidad para interiorizar las Acciones

correctas y alcanzar concepciones Proceso para construir fracciones no unitarias (ver Figura 8 y Figura 9)

Figura 8

Tabla del porcentaje de estudiantes de cada clase por el concepto de fracciones no unitarias

	Class STN N = 28 (%)	Class EXP N = 32 (%)
Comparing non-unit fractions, degree of interiorization		
Not further than Action conception	32	12.5
Transition from Action to Process	39	22
At least Process conception	29	66

Nota. Tomado de *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education* (p. 160), por Arnon et al., 2014, Springer.

Figura 9

Interiorización general

	STN class N = 28 (%)	EXP class N = 32 (%)
Overall interiorization		
No proper actions interiorized	25	17
Exactly one proper action interiorized	21	10
Exactly two proper actions interiorized	14	3
Exactly three proper actions interiorized	18	27
Exactly four proper actions interiorized	21	43

Nota. Tomado de *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education* (p. 161), por Arnon et al., 2014, Springer.

Este enfoque, fundamentado en la Teoría APOE, mostró que la Acción de construir representaciones con anillos divisorios se interiorizó más fácilmente que las actividades centradas en recortes de círculos ya contruidos. Con base en el análisis de datos, Arnon et al. (2014) presentan la descripción de niveles de desarrollo cuando los estudiantes intentan transitar de la

Acción al Proceso; a continuación, profundizamos sobre dichos niveles, dada su relevancia para el profesor en formación y en ejercicio.

Construcción de una fracción no unitaria. Dibujar k círculos (numerador), dividir cada una entre n partes iguales (denominador); una Acción completamente incorrecta.

El resto lo sombre o borra- una parte de la Acción es incorrecta.

Comparación entre dos fracciones no unitarias. Numerador más grande implica fracción más grande (contando círculo). Denominador más grande implica fracción más grande (contando partes iguales).

Los números enteros más pequeños (numerador y denominador) significan partes más grandes y, por lo tanto, una fracción más grande.

Un denominador más pequeño significa partes más grandes y, por lo tanto, una fracción más grande.

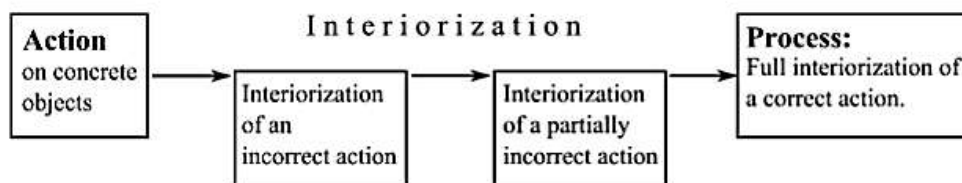
Área no sombreada más grande implica una fracción más grande.

Mayor número de partes no sombreadas implica fracciones más pequeñas.

Con base en este análisis de las Acciones específicas que pueden dar paso a la construcción de un Proceso, los autores proponen una Descomposición Genética que involucra todos los aspectos mencionados. Este modelo explica de manera genérica las relaciones entre los Objetos concretos y su implicación en la aplicación de Acciones (ver Figura 10).

Figura 10

Construcción de fracción no unitaria desde la Acción hasta el Proceso



Nota. Tomado de *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education* (p. 163), por Arnon et al., 2014, Springer.

Como se muestra en la Figura 10 la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos involucra la aplicación incorrecta o parcial, esto caracteriza la interiorización y claramente las características del Proceso. Como se muestra en Arnon et al. (2014) el mecanismo de interiorización permite que el individuo tenga control mental de las Acciones que realiza; esto puede ser interpretado en los estudiantes en edades escolares básicas como realizar operaciones de manera imaginaria con los Objetos concretos iniciales. Arnon et al. (2014) a partir del análisis de datos más detallado de Arnon (1998), señalan seis criterios que determinan la manera como los estudiantes pueden actuar sobre sus representaciones mentales; esto es, formas de usar su imaginación para transformar Objetos concretos en su mente. A continuación, se describen brevemente estos criterios haciendo énfasis en las reflexiones realizadas por los estudiantes frente a un conjunto de tareas.

Criterio 1: Los estudiantes declaran explícitamente que las respuestas que proporcionan son resultado de Acciones que realizan en su mente sobre Objetos concretos. En este criterio, los estudiantes realizan Acciones mentales sobre Objetos que tienen en su imaginación. Como muestran Arnon et al. (2014) en las transcripciones de las entrevistas no aparecen dibujos o algún tipo de representación del material manipulable, todo es resultado de la imaginación de los estudiantes.

Criterio 2: Activación de recortes de círculos imaginarios, estos no existían en el conjunto original de material manipulativo. Los estudiantes para realizar comparaciones entre dos fracciones acuden a representaciones mentales de material manipulable similar al usado en la investigación. Realizan Acciones mentales sobre recortes de círculos imaginarios que representan cada fracción y a partir de “superponer” los sectores circulares correspondientes define cuál es la fracción mayor.

Criterio 3: Uso de dibujos. En Arnon et al. (2014) los investigadores plantean que los dibujos que realizan los estudiantes de la fracción como parte-todo son poco útiles para comparar dos fracciones. Sin embargo, son utilizadas como apoyo por los estudiantes para realizar operaciones entre fracciones y números naturales.

Criterio 4: Indicaciones verbales que involucran el uso de un lenguaje que hace referencia a manipulaciones concretas. En los resultados del trabajo de Arnon (1998) se señala una lista de expresiones que desarrollan los estudiantes que indican la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos que están en su imaginación. Las expresiones que emergen principalmente son “parte” y “todo”.

Criterio 5: Indicaciones gestuales. Este criterio se relaciona con los gestos que con sus manos realizan los estudiantes; en este caso, gestos que indican arcos pequeños o arcos más grandes para comunicar qué fracción es mayor que otra.

Criterio 6: “Incitación”. Este criterio incluye todos los aspectos relacionados con la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos en la imaginación de los estudiantes para explicar o justificar sus razonamientos.

Los resultados de este estudio señalan una visión importante en el desarrollo de la Teoría APOE como fundamento para promover la comprensión de conceptos y nociones matemáticas

escolares. El rol de la imaginación en la investigación reportada y su evolución al promover el desarrollo de mecanismos mentales cada vez más complejos puede ser de gran importancia para los profesores en el aula.

5.2 La noción de infinito matemático desde APOE: la paradoja de la pelota de tenis y la paradoja del Hotel de Hilbert

Como resultado del análisis de los artículos estudiados en el Trabajo de Investigación encontramos que el infinito matemático es un tema que ha motivado el desarrollo de ideas fundamentales en el trabajo de matemáticos y filósofos a lo largo de la historia. A menudo se aborda desde una perspectiva puramente abstracta, como una entidad conceptual sin una verdadera existencia en el mundo real, el filósofo Sócrates menciona que “En cualquier dirección que recorras el alma nunca tropezará con sus límites” Trayéndolo al contexto sugiere que el infinito es un concepto que va más allá de nuestra comprensión física y tangible, similar a cómo podríamos considerar el alma. En este Trabajo de Investigación exploramos el infinito desde una mirada matemática que reconoce su dualidad: infinito potencial e infinito actual; en particular, en el contexto de la comprensión de dos paradojas: la paradoja de las pelotas de tenis y la paradoja del Hotel de Hilbert.

Las paradojas son situaciones que parecen contradecir la lógica común o la intuición humana, estas pueden manifestarse de diversas formas y pueden surgir cuando se aplican reglas o principios aparentemente sólidos, pero llega a una conclusión que parece irrazonable o auto contradictoria. En Villabona y Roa-Fuentes (2016) las autoras mencionan que las paradojas brindan un entorno propicio para reflexionar sobre el concepto del infinito, que resulta fundamental en el desarrollo cognitivo. Este espacio ofrece la oportunidad de explorar cómo las personas construyen sus entendimientos al contrastar y comparar el infinito potencial, que abarca

todas las posibilidades y potencialidades ilimitadas, con el infinito actual que representa la totalidad o la plenitud concreta en un momento dado.

Lo anterior mencionado permite que al referirnos de un tema matemático no se realice a la ligera si no que por medio de pasos lógicos y con rigurosidad matemática se llegue a una conclusión adecuada sin que haya contradicciones. A lo largo del tiempo se ha visto como los diferentes conceptos matemáticos han evolucionado a causa de las paradojas; por ejemplo, la Teoría de conjuntos se fortalece a partir de la paradoja de Cantor que menciona los conjuntos de todos los conjuntos encontrando diversas contradicciones, y la paradoja de Rusell, que cuestiona la existencia de conjuntos que contienen a sí mismos, condujo al desarrollo de axiomas más rigurosos para evitar la discordancia entre los pasos lógicos. En el marco, las paradojas son importantes pues juegan un papel crucial, ya que desafían nuestras intuiciones y nos empujan a buscar nuevas formas de entender y aplicar las matemáticas.

A través de un análisis de la paradoja de la pelota de tenis y la paradoja del hotel de Hilbert examinamos cómo la noción de infinito matemático influye en la resolución de problemas paradójicos. A través de una revisión de la literatura especializada sobre la noción de infinito matemático y APOE, dentro de la Investigación se discutió la influencia del infinito en la comprensión de conceptos matemáticos avanzados, así como su papel determinante en el desarrollo de la matemática contemporánea.

De acuerdo con lo mencionado la noción de infinito matemático es fundamental en el campo de las matemáticas, nos representa cantidades extremadamente grandes con una mirada potencial o muy pequeñas que tienden a un límite. Además, el infinito nos permite abordar problemas que van más allá de los números reales, permitiéndonos explorar conceptos como límites, series y conjuntos infinitos o también en disciplinas con álgebra lineal, álgebra abstracta,

análisis real y topología, se encuentran situaciones donde se deben realizar demostraciones que implican la concepción de procesos mentales que se extienden hacia el infinito. Las diferentes formas de entender el infinito han llevado al desarrollo de nuevas teorías matemáticas; un ejemplo cercano es la Teoría de conjuntos; además, el infinito ha sido esencial en las áreas del Cálculo y el Análisis matemático. Aunque el infinito puede parecer un concepto abstracto, su comprensión es crucial para el desarrollo de habilidades matemáticas avanzadas y para la exploración de conceptos y problemas que van más allá de nuestra experiencia cotidiana,

La percepción y comprensión de este concepto con base en la Teoría APOE ha motivado el desarrollo de la Teoría misma, ya que al ser un Objeto trascendente va más allá de la realidad empírica o material de los individuos como lo menciona Villabona y Roa-Fuentes (2016) nos permite tener una idea de este tipo de Objetos pues no están vinculados directamente a la experiencia sensorial o a la percepción; por tanto, es posible identificar o analizar diferentes paradojas que plantean preguntas sobre la naturaleza del infinito, la noción de convergencia y el desarrollo de la intuición humana.

Estos aspectos promueven casi en la mayoría de los casos que los estudiantes desarrollen conceptos erróneos sobre el infinito; por ejemplo, al considerarlo como el número más grande, que al mismo tiempo puede dar paso a números casi o iguales a cero. Según Alguacil de Nicolás, et al (2016) se destaca que los errores conceptuales son una de las principales dificultades que enfrentan los futuros maestros en su comprensión de las matemáticas. Estos errores, que a menudo surgen de malentendidos o concepciones erróneas sobre los conceptos matemáticos pueden ser difíciles de abordar debido a su naturaleza arraigada y a menudo intuitiva. Además, estos errores conceptuales pueden persistir en el tiempo y a pesar de la instrucción; por tanto, es fundamental que los docentes desarrollemos una noción de infinito que fomente su comprensión en diversos

contextos matemáticos. Pues este artículo de investigación enfatiza la importancia de identificar y abordar estos errores conceptuales, ya que proporcionan una valiosa visión de los procesos mentales de los estudiantes y pueden servir como un punto de partida para la construcción de un conocimiento matemático.

Dentro de los primeros trabajos centrados en el infinito desde la perspectiva de APOE se encuentra la publicación de Dubinsky et al. (2005a) quienes plantean que las estructuras Proceso y Objeto se encargan de explicar tanto el infinito potencial como el actual, sin que se genere conflicto entre ellas. A partir de estas ideas los autores justifican la formulación de diferentes paradojas y evidencian la problemática de desarrollar el mecanismo de coordinación de Procesos que dan paso a la estructura Objeto asociada al infinito matemático actual. Durante el desarrollo del Trabajo de Investigación analizamos la Descomposición Genética de Dubinsky et al. (2005a) que procede a analizar el infinito potencial como un Proceso dinámico.

[...] El infinito potencial es la concepción de infinito como Proceso. Este Proceso se construye empezando por los primeros pasos (por ejemplo 1,2,3 en la construcción del conjunto de los números naturales) que se refieren a una concepción Acción. Repetir estos pasos (por la adición de 1 repetidamente) al infinito, requiere de la interiorización de estas Acciones en un Proceso. El infinito actual es el Objeto mental que se obtiene de la encapsulación de este Proceso (Dubinsky et al., 2005a, p.346).

Dicho análisis permite hacer una analogía de lo analizado por Dubinsky et al. (2005a) en el infinito como un Proceso en constante construcción y expansión. Imagina que estás construyendo una escalera con infinitos escalones, donde cada escalón representa un número natural, llevando un orden sucesivo. Es decir, comienza con el primer escalón, luego subes al segundo, al tercero y así sucesivamente; cada paso que se da en la escalera implica una Acción, es

decir, sumar 1 al número anterior. Esta Acción se repite infinitamente, lo que requiere interiorizarla como parte de un Proceso iterativo continuo desde un aspecto dinámico pues estamos en constante movimiento.

Pasar de un infinito potencial a un infinito actual no es tarea fácil pues como lo menciona Dubinsky et al. (2005a) llegar a un infinito actual es cuando se logra concebir este Proceso iterativo infinito en algo estático; es decir, es la concepción Objeto la que captura la esencia de esta expansión continua e infinita, como si encapsuláramos la totalidad de la escalera en nuestras mentes al hablar de un Objeto trascendente. Villabona (2016) discute que cuando una persona logra la evolución de la concepción Proceso del infinito en una concepción Objeto, debe ser capaz de visualizar las propiedades inherentes del Objeto que trasciende, en este caso, el infinito matemático. El Objeto trascendente puede ser conceptualizado como el estado límite al que llega el Proceso iterativo que lo generó. Es decir, nos referimos a la idea de que un Proceso iterativo puede generar un Objeto trascendente por medio del mecanismo de encapsulación propuesto en la Teoría APOE, que se ha estudiado en el Trabajo de Investigación.

Además, Dubinsky et al. (2005b) realizan aportes históricos y paradójicos relacionado con el infinito y APOE, pues muestran la importancia de las paradojas en la evolución del concepto de infinito, revelan no solo los límites de nuestro conocimiento actual, sino también las posibilidades de expansión y refinamiento de nuestras Teorías. Al confrontarnos con aparentes contradicciones, como las paradojas clásicas de Zenón o las paradojas modernas de Cantor, somos impulsados a revisar y mejorar nuestras bases conceptuales para evitar dichas contradicciones, no solo problemas, sino que nos motivan a mejorar nuestra comprensión y a ver las cosas desde diferentes ángulos. Además, por medio de la Teoría APOE se estudian las estructuras y mecanismos mentales de los estudiantes y la comprensión que ellos han desarrollado del infinito; esto permite sugerir

métodos de enseñanza que ayuden a los estudiantes a construir Esquemas mentales sólidos para comprender el infinito a través de una Descomposición Genética.

Las principales ideas dadas por Dubinsky et al. (2005a; 2005b) fueron punto de partida para el trabajo de Brown et al. (2010). Estos últimos autores mencionan los Procesos iterativos que involucran infinitas repeticiones y cómo estas iteraciones están relacionadas con el concepto de infinito. Los estudiantes pueden enfrentar desafíos para comprender la naturaleza de los Procesos iterativos infinitos y la noción de infinito en sí mismas. Por ejemplo, los estudiantes pueden tener dificultades para conceptualizar cómo un Proceso puede continuar indefinidamente sin alcanzar un límite final, pero para esto se debe entender que la estructura Objeto está más allá de los objetos que corresponden a los números naturales. Además, Brown et al. (2010) llaman a este Objeto, un Objeto trascendente del Proceso, es decir, no se desprende de manera directa del Proceso iterativo infinito; este concepto se refiere a la encapsulación de un Proceso iterativo infinito en una entidad única. En otras palabras, un Proceso iterativo infinito puede ser visto como una estructura Objeto una vez que se considera como una totalidad; este Objeto trascendente representa el paso de un Proceso iterativo infinito (infinito potencial) a un Objeto trascendente (infinito actual). Este concepto es fundamental en la construcción del infinito matemático desde la Teoría APOE.

También Villabona y Roa-Fuentes (2016) resaltan que varias investigaciones en el campo de la matemática Educativa se han centrado en identificar cómo las personas llegan a comprender tanto el infinito potencial como el infinito actual. En dicha investigación, se ha constatado que las concepciones que los estudiantes tienen acerca de este concepto se relacionan principalmente con el infinito potencial. Estas concepciones tienden a formarse en los primeros años de educación escolar y, a menudo, resultan difíciles de cambiar o enriquecer mediante la instrucción matemática; lo que genera Procesos aislado que son difíciles de coordinar para dar paso a la construcción de un

único Proceso que permita la construcción del Objeto. En la generación de dicho mecanismo es fundamental la guía o el andamiaje de los docentes de matemáticas en los diferentes niveles escolares.

En este contexto buscamos principalmente dar cuenta de: ¿Cómo se explica la comprensión del infinito matemático a través de los constructos de APOE? y ¿Qué sugerencias didácticas sobre la enseñanza y el aprendizaje del infinito matemático surgen de las investigaciones analizadas en el Trabajo?

Para dar respuesta a estas preguntas; a continuación, se realiza un análisis de la Descomposición Genética genérica propuesta por Roa-fuentes y Oktaç (2014), como un insumo destacado que parte de las investigaciones presentadas hasta ahora.

5.2.1 Análisis de la Descomposición Genética genérica propuesta por Roa-fuentes y Oktaç (2014)

El trabajo realizado por Roa-fuentes y Oktaç (2014) representa un avance en la comprensión cognitiva del infinito matemático, ellas plantean una Descomposición Genética genérica que señala puntos sensibles, exclusivos del infinito. Los cuales han sido analizados a lo largo del Trabajo de Investigación.

Este modelo cognitivo parte de la construcción de un Proceso iterativo infinito que da paso a la construcción de un Objeto trascendente; esto a partir de la noción del conjunto de los números naturales como entidad que debe constituirse por el individuo como terminada. Entonces, independientemente del contexto que dé lugar a la construcción del infinito matemático, el individuo debe identificar las transformaciones que se aplican de \mathbb{N} (conjunto de números naturales) en otro conjunto X para generar los términos de una secuencia; por ejemplo, una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(x) = 2x - 1$.

Por tanto, bajo una concepción Acción relacionada con lo infinito, el sujeto debe reconocer las transformaciones presentes en la situación matemáticas, es decir, ser capaz de identificar los elementos de las transformaciones en un subconjunto limitado de números naturales, para el caso de la función f se necesita interactuar con la función paso a paso una cantidad finita de veces hasta darse cuenta qué está construyendo un subconjunto de los números naturales, los impares positivos.

Una vez se tienen estructuradas dichas Acciones, es posible generar el mecanismo de interiorización, es decir, construir un Proceso mediante el cual el individuo puede pensar en que f actúa sobre una cantidad infinita de elementos, x , sin necesidad de aplicarla o calcular la imagen de cada uno. Esto promueve la construcción de Procesos iterativos infinitos; se establece una relación uno a uno entre cada número natural y su imagen bajo f , es decir, estructura una biyectividad entre \mathbb{N} y los impares positivos. Esto no es inmediato, ya que puede surgir controversia al afirmar que se pueden calcular una cantidad infinita de pasos o iteraciones. Cuando el sujeto se queda en esta controversia y no interioriza entonces se dice que no ha construido la concepción del Proceso.

Cabe destacar que según Roa-fuentes y Okaç (2014) el mecanismo de interiorización se origina debido a la imposibilidad de representar todos los estados del Proceso iterativo infinito, es necesario que el individuo acepte que todos los elementos del conjunto de los naturales han sido transformados, pues los Procesos iterativos nacen de la relación biyectiva que existe entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de la transformación de cada uno de los elementos de una manera dinámica.

En los contextos matemáticos donde la noción de infinito es tan compleja de entender por su naturaleza, es posible identificar uno o varios Procesos iterativos relacionados con los números

naturales. Una vez que se comprende el concepto de infinito desde una concepción Proceso iterativo, se puede aplicar el mecanismo de encapsulación si se trata de un Proceso único, o coordinación si hay posibles Procesos involucrados; según Roa-fuentes y Oktaç (2014) estos pasos permiten la construcción de una concepción Objeto y es cuando el sujeto es capaz de ver el Proceso terminado desde una perspectiva estática.

A partir de dicho análisis, las autoras proponen dos Descomposiciones Genéticas particulares: una para la paradoja de las pelotas de tenis y otra para la paradoja del hotel de Hilbert; éstas surgen debido a la necesidad de explicar cómo entiende un individuo el infinito matemático desde una manera potencial y actual. En este artículo las autoras declaran que las estructuras y mecanismos tradicionales no han sido suficientes; este estudio se realizó a una población particular estos son: niños y jóvenes talento en matemáticas entre 9 y 12 años Roa-Fuentes y Oktaç (2014).

Cabe destacar que la exploración de las paradojas matemáticas y su análisis a través del marco teórico APOE juega un papel crucial en la construcción de la noción de infinito matemático. Las paradojas, al desafiar nuestras intuiciones y exponer las limitaciones de nuestra comprensión inicial sirven como puntos de partida para el desarrollo cognitivo y promover una reflexión conceptual profunda. La Teoría APOE proporciona un enfoque sistemático para comprender cómo los individuos interactúan con estas paradojas, desde la realización de Acciones concretas hasta la interiorización y generalización de conceptos abstractos. Al estudiar las paradojas a través de la lente de la Teoría APOE, se han identificado Proceso cognitivos involucrados en la construcción del objeto matemático, en este caso, el infinito.

Esta comprensión no solo permite un acercamiento a la complejidad matemática, sino que también ofrece perspectivas valiosas para la enseñanza y el aprendizaje de conceptos fundamentales en matemáticas en diferentes niveles escolares. En última instancia, esta

intersección entre paradojas, la Teoría APOE y el infinito contribuye significativamente a la formación de una base sólida para la construcción del Objeto trascendente y promueve el desarrollo de habilidades críticas y analíticas necesarias para los futuros profesores de matemáticas logren realizar un seguimiento adecuado de las estructuras y mecanismos mentales que han construido los estudiantes a través del estudio del infinito.

A continuación, se analiza a profundidad cada Descomposición Genética de las paradojas y se muestran resultados de los niveles de comprensión que evidencian los estudiantes que participaron en la investigación de Roa-Fuentes y Oktaç (2014).

5.2.1.1 Descomposición Genética de la paradoja de las pelotas de tenis. Roa-Fuentes y Oktaç (2014) declaran que, en el diseño y desarrollo de su investigación usan la segunda versión de la paradoja de las pelotas de tenis propuesta por Dubinsky et al. (2008):

[...] Imagina que tienes tres botes con una capacidad ilimitada. Dos de los botes están vacíos y están etiquetados con las letras A y T. El otro, el bote contenedor, tiene una cantidad infinita de pelotas de tenis numeradas de la siguiente manera: 1,2,3, ... Imagina que realizas el siguiente experimento: Sacas del bote contenedor las pelotas número 1 y 2 y las colocas dentro del bote A e inmediatamente sacas la pelota de menor denominación; la pelota número 1, y la colocas en el bote T. Después sacas del bote contenedor las pelotas número 3 y 4 y las colocas dentro del bote A e inmediatamente después sacas la pelota de menor denominación; la pelota número 2, y la colocas dentro del bote T. Después sacas las pelotas 5 y 6 del bote contenedor y las colocas dentro del bote A e inmediatamente después sacas la pelota de menor número en este caso la número 3 y la colocas en el bote T. Siguiendo con el experimento ¿Cuál es el contenido de los botes A y T cuando el bote contenedor esté vacío? (p.100)

Roa-Fuentes y Oktaç (2014) realizan un análisis donde se encuentran dos razonamientos distintos en relación con el contenido del bote A y bote T al mediodía. El primer razonamiento sugiere que, bajo la concepción de un infinito potencial, los botes A y T siempre tienen la misma cantidad de pelotas. Esta noción implica que, independientemente de la cantidad de pelotas extraídas de cada bote, siempre habrá un número infinito de pelotas restantes en ambos, esto se debe a que se enfocan en la construcción del Proceso dinámico en que las iteraciones nunca acaban. Por otro lado, las autoras proponen que el segundo razonamiento surge al considerar un infinito actual y es cuando el bote A queda vacío al medio día, es decir, todas las pelotas de tenis han pasado al bote T, lo cual indica el fin del experimento. Esta perspectiva sugiere que, aunque se asuma un infinito potencial inicialmente, el concepto de un infinito actual se manifiesta cuando se observa el agotamiento de las pelotas en el bote A, marcando así el cese del proceso experimental.

Este contraste entre la conceptualización de un infinito potencial y un infinito actual arroja luz sobre las complejidades inherentes a la comprensión de conceptos infinitos en el contexto de la Descomposición Genética. Por ejemplo, puede ser difícil que alguien que está en la etapa de Acción o Proceso de la Teoría APOE entienda el concepto de un infinito actual, ya que esto requiere pensar en el infinito como un objeto completo en lugar de un Proceso en curso.

La Tabla 2 a continuación nos permite tener una traducción visual de los aspectos a tener en cuenta en la paradoja de la pelota de tenis, en el que podemos determinar las Acciones entre los botes A y T que ocurre a través de las iteraciones o el transcurso del tiempo y el movimiento de las pelotas. Las autoras mencionan que Dubinsky et al. (2010) describen tres Procesos fundamentales en la paradoja: la iteración en relación con los números naturales (P_N), la trayectoria de las pelotas de tenis (P_M) y la progresión del tiempo (P_T).

Tabla 2

Pasos del proceso de iteración de la paradoja de la pelota de tenis

Iteración	Tiempo (minutos antes del mediodía)	Bote A	Bote T
1	$\frac{1}{2}$	2	1
2	$\frac{1}{2^2}$	3,4	1,2
3	$\frac{1}{2^3}$	4,5,6	1,2,3
4	$\frac{1}{2^4}$	5,6,7,8	1,2,3,4
...
n	$\frac{1}{2^n}$	$2n - (n - 1),$ $\dots, 2n - 1, 2n$	$1, 2, 3, \dots, n$
...

Nota. Tomado de *El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas*. Educación matemática, 26 (1), 73-101 (p. 91). Por Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. 2014.

En la concepción Acción según el modelo cognitivo planteado por Roa-Fuentes y Oktaç (2014) el individuo debe realizar un número pequeño de interacciones de tal modo que logre establecer relaciones entre cada número natural y un estado correspondiente, en este caso, definido por el contenido de los botes. Por ejemplo, determinar cómo se trasladan las pelotas y ver que cada iteración está relacionada con los números naturales (P_N), en cada iteración se oprime un

interruptor para que el mecanismo funcione, la iteración 1 ocurre cuando falta $\frac{1}{2}$ de minuto para el medio día, donde las pelotas 1 y 2 pasan al bote A e inmediatamente la pelota de menos denominación, en este caso la 1 pasa al bote T. En la iteración 2 ocurre cuando falta $\frac{1}{4}$ de minuto antes del mediodía donde las pelotas 3 y 4 pasan al bote A e inmediatamente la pelota de menor denominación en el bote A, en este caso la 2 pasa al bote T. La iteración 3 ocurre cuando falta $\frac{1}{8}$ de minuto antes del mediodía donde las pelotas 5 y 6 pasan al bote A e inmediatamente la pelota de menor denominación del bote A, en este caso la pelota 3 pasa al bote T y así sucesivamente hasta llegar al mediodía. Al realizar estas Acciones el individuo trata de interiorizar lo que está haciendo, dándose cuenta de las relaciones entre cada iteración y la transformación correspondiente es que el movimiento de la pelota y el transcurrir del tiempo dependen de cada iteración realizada a los números naturales.

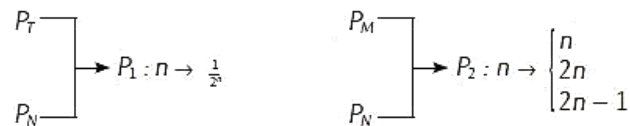
Estas relaciones destacan la construcción de una concepción de Proceso, considerando los tres Procesos fundamentales P_N, P_M y P_T mencionados previamente. Se hace imperativo desarrollar un mecanismo de coordinación para establecer Procesos iterativos infinitos, dado que estos Procesos poseen naturalezas distintas; mientras que las iteraciones crecen infinitamente grandes debido a una cantidad infinita de pelotas, el tiempo decrece infinitamente hasta llegar al mediodía. Por consiguiente, la coordinación de estos Procesos no es algo trivial y, como resultado podría llevar a los individuos a no poder percibir el final del experimento, quedándose atrapados en la concepción Proceso. Esto ocurre en Roa-Fuentes (2012) cuando las autoras analizan el proceso realizado por Santiago un niño de 12 años de la fundación Telegenio donde muestran que matemáticamente puede determinar que el medio día se ha alcanzado, pero no le permite relacionar su análisis matemático con el contexto de la situación planteada, pues accionar infinitamente el

interruptor lo lleva a considerar que esto no es posible lo que genera contradicción en sus argumentos, por tanto concluye que el medio día nunca es alcanzado.

Según Roa-Fuentes y Oktaç (2014) se pueden encontrar dos Procesos iterativos infinitos como lo es la relación entre $(P_N \leftrightarrow P_T) \rightarrow (P_1)$ y $(P_N \leftrightarrow P_M) \rightarrow (P_2)$ como se puede observar en la Figura 11; estos Procesos han sido estudiados en el Trabajo de investigación para dar una mayor comprensión de los Procesos iterativos.

Figura 11

Procesos iterativos infinitos



Nota. Tomado de *El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas*. Educación matemática, 26 (1), 73-101 (p. 93). Por Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. 2014.

El Proceso iterativo infinito P_1 analiza dos de los tres Procesos fundamentales que mencionan las autoras Roa-fuentes y Oktaç (2014) el Proceso P_N que son las iteraciones realizadas en cada Acción y el Proceso P_T que es la progresión del tiempo antes del mediodía; en grosso modo es encontrar la trayectoria del tiempo en el que la interacción se realizó. Es decir, la relación que hay entre P_N Y P_T ; por ejemplo, la iteración 1 se ejecutó en el tiempo $\frac{1}{2^1}$ que es $\frac{1}{2}$ de minuto antes del mediodía, la iteración 2 se ejecutó en el tiempo $\frac{1}{2^2}$ que es $\frac{1}{4}$ de minuto antes del mediodía, y así sucesivamente donde se puede calcular una infinitud de iteraciones y el tiempo restante antes de llegar al mediodía, esto se debe a que en cada iteración n , se ejecutará en el minuto $\frac{1}{2^n}$ antes del mediodía.

En el artículo de Villabona y Roa-Fuentes (2016) las autoras realizan un análisis de la paradoja de Aquiles y la tortuga, el cual tiene similitud con respecto a este Proceso iterativo infinito P_1 . En este artículo estudian la relación del tiempo a una distancia que se va partiendo cada vez a la mitad de esta, pues esta paradoja lo que nos dice es que Aquiles el hombre más rápido del mundo se enfrenta en una competencia contra una tortuga, sobre una línea recta a una velocidad constante. La tortuga sale con una ventaja para que haya igualdad, cada vez que Aquiles recorre la mitad de la distancia que lleva la tortuga, está ya ha avanzado un poco más, y nuevamente cuando Aquiles llega a la mitad de la nueva distancia la tortuga ha avanzado un poco más; lo interesante de esta paradoja es que para alcanzar la mitad de cada nueva distancia los tiempos se van reduciendo infinitamente, lo que ocurre como como se ha analizado hasta ahora en el Proceso iterativo infinito P_1 .

Otro resultado que aporta Villabona y Roa-Fuentes (2016) es que a pesar de que dos sujetos construyan los Procesos iterativos infinitos y comprendan su naturaleza, sus conclusiones sobre el mismo resultado pueden ser diferentes; ellas nos muestran el caso de dos personas que entrevistaron (de los estudiantes entrevistados de maestría en educación matemática y maestría en matemáticas) los cuales construyeron el Proceso indicado, pero con conclusiones diferentes. Pues al momento de resolver la pregunta ¿alcanza Aquiles a la tortuga? Jaime contesta “Aquiles no la alcanza ya que el límite no es un valor dado” pues a pesar de que entiende que el tiempo tiende a cero, lo relaciona con el concepto de límite lo que genera un bloqueo y dice que nunca alcanzaría a la tortuga en un contexto matemático. Mientras que Dalia comenta “va a llegar un momento donde la va a alcanzar” aunque cabe destacar que al comienzo la respuesta era contraria, pero ella al analizarlo como la suma de series infinitas logra concluir que esta converge al punto en donde

Aquiles lograría alcanzar y pasar a la tortuga. Podemos observar cómo Dalia deja de un lado el Proceso dinámico pues puede saber que la suma de las series da un resultado convergente.

En el Proceso iterativo infinito P_2 se analizan otros dos Procesos fundamentales trabajados por Roa-fuentes y Oktaç (2014) el Proceso P_N que son las iteraciones realizadas y el Proceso P_M que es la trayectoria de las pelotas, la relación entre estos Procesos quiere decir que es el movimiento de las pelotas de acuerdo con las iteraciones. Por ejemplo, en la iteración 10, la pelota 10 pasa al bote T y las pelotas 19 y 29 pasan al bote A; esto se debe a que en cada iteración n , la pelota número n pasa al bote T, y las pelotas $2n - 1$ y $2n$ pasan al bote A. Un análisis hipotético sobre este Proceso iterativo infinito podría dar lugar a que el sujeto piense que al mediodía los botes A y T tendrán la misma cantidad de pelotas, ya que en el bote A en la iteración n , habrá n pelotas $(2n - (n - 1), \dots, 2n - 1, 2n)$ y en el bote T en la iteración n , habrá n pelotas $(1, 2, 3, \dots, n)$, pero este Proceso iterativo infinito P_2 pasar de ser dinámico a estático cuando se logra coordinar con el Proceso iterativo infinito P_1 .

La concepción Objeto es cuando el individuo es capaz de coordinar y encapsular los Procesos iterativos infinitos que se han creado. En esta paradoja, la encapsulación del Proceso se motiva por la pregunta: ¿Cuál es el contenido del bote A y del bote T al mediodía? Una persona podrá lograr la construcción del Objeto trascendente cuando pueda ver el Proceso iterativo infinito como terminado, es decir como algo estático y pueda pensar en este Proceso como una totalidad.

De esta manera se genera el Objeto trascendente relacionado específicamente con el infinito como cardinal de un conjunto, cabe destacar que los autores mencionan que lo infinitamente pequeños es más difícil de comprender que lo infinitamente grande y esto lo podemos ver en el cálculo infinitesimal, desarrollado por figuras como Newton y Leibniz en el siglo XVII introdujo conceptos cruciales relacionados con el infinito, especialmente en el contexto

de lo pequeño. Sin embargo, esta noción no está exenta de desafíos, ya que las paradojas planteadas por filósofos como Zenón de Elea han suscitado preguntas fundamentales sobre cómo abordar la infinitud de lo pequeño. La obra de matemáticos y filósofos, como Whitehead y Russell, ha abordado estas cuestiones desde una perspectiva más formal, mientras que el análisis no estándar de Abraham Robinson ha proporcionado un marco matemático sólido para trabajar con infinitesimales. Este fascinante campo de estudio, que se remonta a Euclides y se expande hasta nuestros días, sigue desafiando y enriqueciendo nuestra comprensión de la naturaleza del infinito en sus diversas manifestaciones, tanto grandes como pequeñas.

5.2.1.2 Descomposición Genética de la paradoja del hotel de Hilbert. En la Investigación se analizó la versión y adaptación de Momolo y Zazkis (2008) en la que proponen la paradoja la cual permite ver la dualidad del infinito, en la que se plantea la siguiente situación:

[..] Imagina un hotel con un número infinito de habitaciones, donde todas las habitaciones se encuentran ocupadas. Pero llega un nuevo huésped, un personaje muy importante, que solicita al administrador ser ubicado en este hotel. ¿Cómo podrías ubicar al nuevo huésped en una habitación?, luego imagina que al mismo hotel llegan un número infinito de huéspedes. ¿Puede el administrador ubicarlos a todos? (Roa-fuentes y Oktaç, 2014, p.21)

Roa-fuentes y Oktaç (2014) logran analizar dos aspectos importantes que surgen en esta paradoja, ver el infinito como algo terminado y la imposibilidad de plantearlo en un contexto real. Al estudiar las preguntas debemos aceptar que el hotel está lleno a pesar de que tiene infinitas habitaciones, esto obliga al individuo a tener una buena abstracción, pues Roa-fuentes y Oktaç (2014) mencionan que los estudiantes recurren a argumentos como: si hay finitos números de personas en el mundo no se puede llenar un hotel que tiene infinitas habitaciones o si el hotel tiene infinitas habitaciones, nunca puede estar completamente lleno, creando obstáculos que no permiten

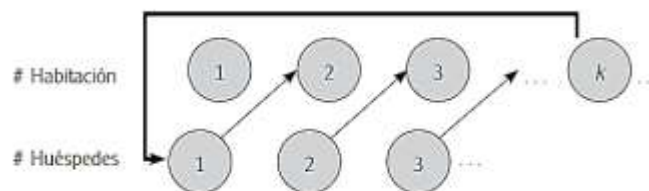
visualizar ni analizar lo interesante de la paradoja y lo que puede brindar en la construcción del infinito como un Objeto trascendente.

Ahora nos centramos en estudiar la paradoja en un contexto matemático en la que los estudiantes a través de las propiedades de los conjuntos infinitos pueden acomodar un nuevo huésped e incluso infinitos nuevos huéspedes, aunque el hotel este lleno y es aquí donde ocurre el aspecto paradójico que se ha estudiado en el Trabajo de investigación.

Para esto se relaciona la paradoja con la cardinalidad que tienen los números naturales, en la que se asigna un número natural a cada habitación es decir a la primera habitación se le asigna el número 1, a la segunda habitación se le asigna el número 2, a la n -ésima habitación se le asigna el número n y así sucesivamente lo que permite observar que en cada una de estas habitaciones se encuentra hospedado un huésped, pues el enunciado nos dice que el hotel está lleno.

Figura 12

Proceso para acomodar un nuevo huésped



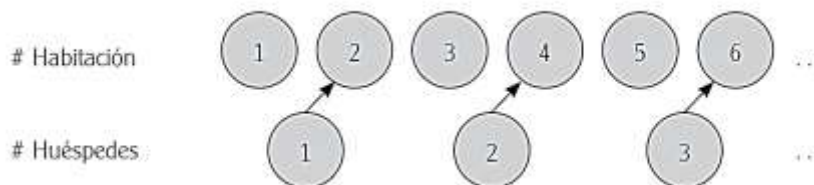
Nota. Tomado de *El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas*. Educación matemática, 26 (1), 73-101 (p. 95). Por Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. 2014.

Para el primer caso de esta paradoja podemos observar en la Figura 12, que es posible acomodar un huésped, si utilizamos un movimiento secuencial sugerido por Roa-fuentes y Oktaç (2014), es decir definir una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $f(x) = x + 1$ para todo $x \in \mathbb{N}$; con esto el

huésped que está en la habitación 1 pasa a la habitación 2, el huésped de la habitación 2 pasa a la habitación 3 y así sucesivamente, dejando así la habitación 1 para el nuevo huésped importante.

Figura 13

Proceso de llenado para un número infinito de nuevos huéspedes

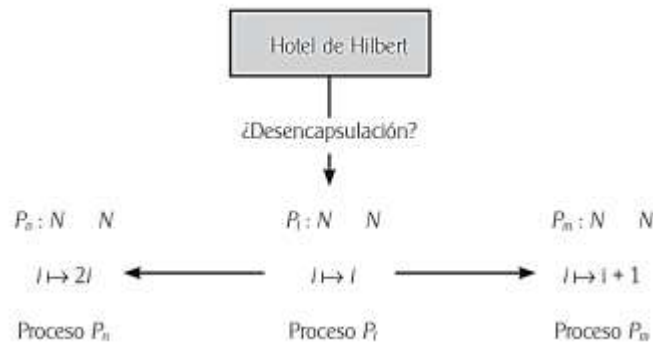


Nota. Tomado de *El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas*. Educación matemática, 26 (1), 73-101 (p. 96). Por Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. 2014.

Ahora analizamos la segunda pregunta ¿Sería posible para el administrador alojar a un número infinito de nuevos huéspedes? Roa-fuentes y Oktaç (2014) nos comenta que la respuesta es Sí, esto lo podemos observar en la Figura 13, si definimos una función $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $g(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{N}$, con esto el huésped de la habitación 1 pasa a la habitación 2, el huésped de la habitación pasa a la habitación 4, el huésped de la habitación 3 pasa a la habitación 6 y así sucesivamente. Cada huésped se ubica en habitaciones pares dejando las habitaciones impares libres para los nuevos huéspedes.

Figura 14

Procesos iterativos infinitos sobre la paradoja del hotel de Hilbert



Nota. Tomado de *El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas*. Educación matemática, 26 (1), 73-101 (p. 97). Por Roa-fuentes, S., & Oktaç, A. 2014.

De esta manera, la Descomposición Genética propuesta por Roa-fuentes y Oktaç (2014) comienza cuando el sujeto debe aceptar la asignación de un número natural (P_1) a cada habitación del hotel, esto permite realizar una transformación de la asignación de habitaciones a los huéspedes mediante la iteración sobre los números naturales (P_m) para añadir un nuevo huésped o para añadir un número de infinitos huéspedes (P_n). Por ejemplo, para acomodar un nuevo huésped se realiza el mecanismo de coordinación entre los Procesos P_1 y P_m logrando asignar una correspondencia biyectiva entre los siguientes conjuntos $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$ y $\mathbb{N}_2 = \{2,3,4, \dots\}$ donde a cada $n \in \mathbb{N}$ se le asigna su sucesor $n + 1 \in \mathbb{N}_2$. En un conjunto matemático los conjuntos \mathbb{N} y \mathbb{N}_2 son equipotentes, lo que implica aceptar que “el todo es igual a una de sus partes”; esto permite analizar que los dos conjuntos tienen la misma cardinalidad, es decir que todos los huéspedes pueden acomodarse en alguna nueva habitación dejando la habitación 1 libre para el nuevo huésped que llega.

La segunda pregunta motiva a obtener una mayor reflexión ya que estimula Procesos cognitivos que van más allá de los argumentos netamente teóricos sobre la noción de infinito, pues

se estudia el infinito de una manera más actual que potencia, ya que se necesita acomodar a una cantidad infinita de nuevos huéspedes en un hotel donde todas las habitaciones están ocupadas. Aunque sabemos que el hotel tiene infinitos números de habitaciones, para lograr esto el estudiante debe coordinar los Procesos P_1 y P_n en la que puedan establecer una biyectividad entre el conjunto de los naturales y el conjunto de los pares; es decir, el Proceso en que para todo $x \in \mathbb{N}$ se le asigna un $2x$. De esta manera, podemos asignar a los huéspedes actuales en las habitaciones con números pares, dejando así las habitaciones con números impares disponibles para los huéspedes recién llegados. Esta estrategia resulta ser un concepto intrigante, ya que sugiere que, incluso en un hotel con un número infinito de habitaciones ya ocupadas, hay espacio para acoger a una cantidad infinita de nuevos huéspedes.

Con respecto a los análisis y paradojas exploradas en el transcurso de este Trabajo de Investigación, nos encontramos en una posición propicia para abordar los interrogantes que fueron planteados como objetivos al inicio de este estudio, dando evidencia de los avances obtenidos por parte de cada uno de los estudiantes.

5.2.2 ¿Cómo se explican los constructos teóricos de APOE a través de la noción de infinito matemático?

La Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) ofrece un marco conceptual para comprender cómo se desarrolla el conocimiento matemático; en el contexto del infinito, esta Teoría proporciona un lente a través de la cual se pueden analizar los procesos mentales de la Teoría APOE que pueden adquirir los sujetos involucrados en la construcción del Objeto trascendente, el infinito.

A continuación, a partir de los diferentes artículos sobre la noción de infinito estudiado en el Trabajo de Investigación se realiza una explicación de cada uno de los constructos (estructuras

y mecanismos mentales) de la Teoría APOE; permitiendo observar los avances y resultados obtenidos a través de este estudio realizado.

Estructura Acción: Es la etapa inicial y la más básica que se obtiene en la comprensión de un concepto matemático como lo menciona Arnon et al. (2014) y se logra evidenciar cuando el individuo realiza una cantidad finita de operaciones matemáticas sobre un contexto dado. Por ejemplo, las paradojas analizadas en esta Investigación nos brindan datos y resultados que nos permiten tener una mayor comprensión de la escritura desde un enfoque potencial, puestos estos pasos finitos pueden continuar indefinidamente. Pero a medida que los individuos reflexionan sobre estas Acciones pueden conducir a las siguientes estructuras mentales de la Teoría APOE, lo que permite una comprensión más profunda y abstracta de este concepto matemático.

En la paradoja de la pelota de tenis según Roa-Fuentes y Oktaç (2014) nos muestra la importancia de la realización de Acciones al momento de construir un concepto matemático; pues a partir de las Acciones realizadas en las iteraciones dadas, se logra tener una idea básica de lo que sucede al mediodía de los botes A y T, en Roa-Fuentes y Oktaç (2014) Santiago, seudónimo de un niño que ha sido catalogado como talento matemático realiza una tabla para ir anotando lo que ocurre en cada iteración; en este caso, analiza el transcurrir del tiempo dependiendo de cada iteración logrando tener una idea de lo que se trata la paradoja de la pelota de tenis, creando unas breves construcciones de lo que sucede al mediodía. Sin embargo, lo crucial de esta estructura es que solo se hace una cantidad finita de veces hasta que logra entender de qué se trata el problema estudiado.

En cuanto a la paradoja del Hotel de Hilbert, a partir de Roa-Fuentes y Oktaç (2014) en la resolución de la segunda problemática donde necesitamos poder acomodar un número infinito de nuevos huéspedes se logra evidenciar la estructura Acción a través de la construcción de un

subconjunto del conjunto dado por la función $f(x) = 2x$. Es decir, el estudiante realiza paso a paso estas transformaciones hasta comprender que las habitaciones con número impares están libres; este nivel implica una comprensión práctica del infinito como parte de la actividad matemática.

Mecanismo de Interiorización: Es el puente que permite lograr pasar de una estructura Acción a una estructura Proceso; esto con el fin de que el individuo logre una mayor comprensión y abstracta de los conceptos que está construyendo, en este destaca la naturaleza dinámica y en constante expansión de la comprensión matemática en un contexto dado. Por ejemplo, en la paradoja de la pelota de tenis realizar una cantidad finita de iteraciones permite reflexionar en el Proceso que se está realizando cuando el individuo logra analizar que cada vez que el transcurso del tiempo en las iteraciones es menor y tiende a cero es cuando ha construido una concepción Proceso, pues tiene una noción dinámica del objeto matemático.

Estructura Proceso: Esta estructura implica la interiorización y la coordinación de las Acciones realizadas con número de iteraciones finitas; sin embargo, al hablar de la noción de infinito matemático es necesario realizar Procesos iterativos infinitos. Las autoras Villabona y Roa-Fuentes (2016) nos comenta que una estructura dinámica del infinito es definida como un Proceso iterativo infinito, el cual se describe por medio de una relación entre el conjunto de los números naturales y otro conjunto cualquiera y que a partir de estos se obtiene una sucesión infinita de objetos (numerable). Aquí, el individuo comprende que el concepto matemático no es simplemente un conjunto de Acciones aisladas, sino un Proceso continuo; es decir, que es dinámico logrando obtener una percepción del infinito potencia. Cabe destacar que estos Procesos no siempre son únicos.

Un ejemplo claro es en la paradoja de la pelota de tenis, pues se puede observar que Roa-Fuentes y Oktaç (2014) muestran dos Procesos iterativos infinitos P_1 y P_2 , los cuales permiten dar una idea de qué son los Procesos iterativos infinitos y cómo se crean mediante la coordinación de dos Procesos bases del contexto dado; en el caso de Proceso iterativo P_1 se logra analizar los Procesos mencionados por Roa-Fuentes y Oktaç (2014) el cual es P_N y P_T el número de iteraciones y el transcurrir del tiempo, respectivamente. Podemos analizar que mientras P_N tiende al infinito P_T tiende a cero, ver estos Procesos por separados nos puede llevar a una contradicción, por eso es importante la construcción de nuevos Procesos iterativos infinitos. Por este motivo en Villabona y Roa-Fuentes (2016) cuando se estudia la paradoja de Aquiles y la tortuga, Julio, seudónimo de uno de los estudiantes de maestría entrevistado se bloquea al tratar de construir un Proceso en el que Aquiles alcanza la tortuga, ya que lo quiere hacer de una manera general sin reflexionar en las Acciones realizadas; pues era necesario tener en cuenta la construcción de un Proceso iterativo infinito.

En la paradoja del hotel de Hilbert, el proceso de asignar habitaciones a nuevos huéspedes implica una comprensión de cómo las Acciones individuales realizadas a las habitaciones se relacionan entre sí por medio de un Proceso iterativo infinito, así, el proceso que se construye para pasar los huéspedes actuales del hotel a las habitaciones pares consta de un Proceso iterativo infinito, pues el dueño del hotel podría realizar estas Acciones infinitamente y entender que al realizar este Proceso iterativo infinito quedan libres las habitaciones impares para los nuevos huéspedes. Lograr comprender que se puede realizar una biyección entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los pares donde están ahora los huéspedes del hotel, significa que existe una correspondencia uno a uno y sobreyectiva entre los elementos de ambos conjuntos; esto implica que tienen la misma cantidad de elementos. La coordinación de estos Procesos

iterativos infinitos como lo menciona Villabona y Roa-Fuentes (2016) permite dar paso al Objeto trascendente.

Mecanismo de coordinación: Para Arnon et al. (2014) este mecanismo es el proceso en el que se logra coordinar o manejar los diferentes Procesos para formar una estructura mental más sólida. Este mecanismo se analiza en la paradoja de la pelota de Tenis, pues al estudiar los Procesos iterativos P_1 y P_2 , donde P_1 se encarga de estudiar el transcurrir del tiempo en cada iteración y P_2 estudia el movimiento de las pelotas con respecto a cada iteración. Si cada uno de estos Procesos se trabajan por separados van a existir contradicciones pues tienen diferente naturaleza mientras que P_1 tiende a cero, P_2 tiende al infinito; por este motivo es que Roa-Fuentes y Oktaç (2014) mencionan que “coordinar dichos Proceso en un único Proceso que finalmente pueda dar paso a la construcción del Objeto trascendente” (p.89) Siendo necesario coordinar estos Proceso iterativos infinitos permitiendo que el individuo construya por medio del mecanismo de encapsulación el infinito.

Mecanismo de Encapsulación: Según las autoras Roa-Fuentes y Oktaç (2014) este mecanismo se da cuando el individuo empieza a pensar en el Proceso como un todo, en este caso, siendo una estructura más compleja que la utiliza en otros objetos matemáticos, esto se debe a la naturaleza del infinito como un Objeto trascendente que se debe abstraer del Proceso. La relación del conjunto de los números naturales y el número de las habitaciones de la paradoja del hotel de Hilbert, al momento de realizar el desplazamiento de los huéspedes a las nuevas habitaciones en los números pares respecto a $f(x) = 2x$ para hospedar a un número infinito de nuevos huéspedes en las habitaciones impares, nos permite encapsular en nuestra mente esta cantidad de Procesos iterativos infinitos lo que permitiría el paso al Objeto trascendente como algo estático, es decir el hotel lleno.

Cuando un Objeto matemático se necesita descomponer en Procesos y Acciones, este mecanismo en la Teoría APOE se llama *Desencapsulación*, lo que permite la construcción de nuevas estructuras, esto a partir de la coordinación con otros Proceso.

Estructura Objeto: Es la conceptualización de un Proceso iterativo infinito en un infinito actual, por ejemplo, en Villabona y Roa-Fuentes (2016) las autoras comentan que expresar los Procesos iterativos en términos generales y coordinarlos eficazmente en uno único, permite que el individuo sea capaz de ver el infinito como una totalidad coherente y estática. En el contexto del infinito matemático, esto significa entender el infinito no solo como un proceso en curso, sino como un concepto acabado y definido.

Por ejemplo, en la paradoja del hotel de Hilbert, el individuo reconoce que incluso un hotel lleno que tiene infinitas habitaciones puede acomodar a un número infinito de nuevos huéspedes, mediante una transformación del conjunto de los números naturales, que permiten analizar diferentes Procesos iterativos infinitos que dan paso al Objeto trascendente; lo que demuestra una comprensión completa del infinito como un objeto matemático.

Estructura Esquema: Es el nivel más alto de la Teoría APOE que implica la integración del Objeto trascendente de infinito en un Esquema cognitivo más amplio que abarca otras áreas del conocimiento matemático. Aquí, el infinito se convierte en parte de un marco conceptual más grande que permite a los individuos relacionar y conectar conceptos matemáticos de manera más sofisticada.

En el artículo de Villabona y Roa-Fuentes (2016) se evidencia cuando los estudiantes pueden utilizar el concepto de infinito como parte de su comprensión de la convergencia de series infinitas en la paradoja de Aquiles y la tortuga para poder dar como terminado el experimento, es decir, que Aquiles alcanza la tortuga. Otro ejemplo claro, es la construcción del Proceso iterativo

infinito relacionado con la paradoja de la pelota de tenis en el transcurrir del tiempo con respecto a cada iteración; es decir, cuando analizamos que el $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, la concepción que se tiene del límite dice que tiende, pero nunca es cero; para esto se puede apoyar en otros esquemas, como: la suma de series infinitas, la serie geométrica de $\frac{1}{3^n}$, que permite observar de la figura estudiada como la sumatoria de esta serie es igual a $\frac{1}{2}$. Lograr comprender esto demuestra una comprensión profunda y flexible del concepto que se ha utilizado logrando encapsular adecuadamente los Procesos creados.

En conclusión, la Teoría APOE proporciona un enfoque integral para comprender el desarrollo del conocimiento matemático, especialmente en el contexto del infinito; a través de las estructuras de Acción, Proceso, Objeto y Esquema, los individuos pueden avanzar desde Acciones concretas relacionadas con el infinito hasta una comprensión completa y flexible que se integra en un marco conceptual más amplio. Al abordar el infinito matemático desde esta perspectiva, los estudiantes no solo adquieren habilidades prácticas para manipular conceptos infinitos, sino que también desarrollan una comprensión profunda de su naturaleza continua y su lugar en el panorama matemático más amplio. Esta comprensión más amplia les permite relacionar el concepto de infinito con otros temas matemáticos, facilitando una visión más holística y sofisticada del mundo matemático en general.

5.2.3 ¿Qué sugerencias didácticas sobre la enseñanza y el aprendizaje del infinito matemático surgen de las investigaciones analizadas en este Trabajo?

Basándonos en las investigaciones discutidas en este Trabajo de Investigación, podemos extraer varias sugerencias didácticas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del infinito matemático apoyándonos en la Teoría APOE, la cual brinda recursos constructivistas similares a

los desarrollados por Piaget para ayudar en la enseñanza y aprendizaje de diferentes objetos matemáticos.

A continuación, se realizan algunas sugerencias didácticas basándonos en los resultados y conclusiones de los artículos de investigación de Roa-Fuentes y Oktaç (2014) y Villabona y Roa-Fuentes (2016), los cuales como lo hemos visto a través de este documento, han realizado aportes muy importantes con la Teoría APOE y la noción de infinito matemático mediante diferentes paradojas.

- La construcción gradual del conocimiento en matemáticas implica un enfoque constructivista que parte de conceptos elementales como Acciones para llegar a comprender la noción de infinito. Un pionero de esta actividad fue Piaget al presentar la Teoría del desarrollo cognitivo, su Teoría se basa en la idea de que los niños pasan por etapas cognitivas para la construcción de nuevos objetos matemáticos. Además, iniciar con actividades o tareas simples como contar objetos o reconocer patrones numéricos, sienta una base sólida para que los estudiantes desarrollen una comprensión más profunda del infinito. Este enfoque progresivo les permite familiarizarse con los conceptos matemáticos de manera gradual y estructurada desde la Teoría APOE, lo que facilita su comprensión y aplicación en contextos más complejos con el objetivo de llegar a la estructura mental más avanzada.
- La exploración de paradojas vinculadas al infinito, como las mencionadas en este documento representa una valiosa estrategia para fomentar el pensamiento crítico y la reflexión en el aula. Integrar estas paradojas en el proceso educativo brinda a los estudiantes la oportunidad de enfrentarse directamente a las complejidades del

infinito y los anima a desarrollar habilidades para resolver problemas aparentemente contradictorios. Tal como se evidencia en el documento de Roa-Fuentes y Oktaç (2014), esta aproximación activa promueve un entendimiento más profundo y dinámico de conceptos matemáticos abstractos que son encapsulados en Objetos trascendentes.

- Incorporar actividades interactivas en el proceso de enseñanza del infinito matemático es esencial para promover la participación activa de los estudiantes; estas actividades pueden incluir la resolución de problemas en grupo, discusiones dirigidas y ejercicios prácticos que requieran la aplicación de conceptos infinitos en contextos variados. Al participar en estas actividades, los estudiantes tienen la oportunidad de compartir sus ideas, confrontar diferentes perspectivas y colaborar en la construcción colectiva de su comprensión del infinito. Este enfoque no solo fortalece el aprendizaje individual, sino que también fomenta el desarrollo de habilidades de trabajo en equipo y pensamiento crítico; además, esto permite que los individuos más avanzados en la construcción del concepto de infinito pueden ayudar a los compañeros a tener una mejor comprensión e incluso superar los obstáculos conceptuales que no los dejan avanzar.
- La conceptualización relevante es clave para facilitar la comprensión de infinito en el ámbito educativo; al integrar este concepto en contextos reales y pertinentes, como el transcurrir del tiempo, la distancia estudiada en las diferentes paradojas los estudiantes pueden ver cómo se aplica esta noción en diferentes campos y entender su importancia práctica. Por ejemplo, al explorar cómo el infinito se utiliza en las matemáticas para describir concepto como función y límites o en la economía para

comprender conceptos como el crecimiento exponencial; los estudiantes pueden relacionar el infinito con situaciones cotidianas y motivarse a explorar más a fondo este concepto matemático. Esta estrategia no Oslo aumenta la relevancia del infinito, sino que también estimula el interés y la participación activa de los estudiantes en su aprendizaje.

- La integración de tecnología en la enseñanza del infinito matemático puede ser altamente beneficiosa para los estudiantes; mediante el uso de herramientas tecnológicas como softwares de visualización matemática o simulaciones interactivas, los estudiantes pueden explorar conceptos abstractos de una manera más tangible y dinámica. Por ejemplo, mediante gráficos animados o representaciones visuales generadas de las paradojas estudiadas, los estudiantes pueden comprender mejor los conceptos de convergencia de series infinitas o la naturaleza de los conjuntos infinitos desde su dualidad. Además, estas herramientas les permiten experimentar con diferentes escenarios y manipular parámetros, lo que fomenta la experimentación y el descubrimiento activo. En última instancia, el uso de tecnología puede mejorar la comprensión y el compromiso de los estudiantes con el infinito matemático al ofrecerles una experiencia de aprendizaje más interactiva y accesible.
- Para un aprendizaje significativo del infinito matemático, es esencial que los estudiantes no se limiten a memorizar procedimientos, sino que desarrollen una comprensión conceptual profunda. Esto implica explorar diversas representaciones del infinito, como series infinitas, límites y la cardinalidad de conjuntos y comprender las conexiones fundamentales entre ellas; en lugar de simplemente

aplicar fórmulas o algoritmos, los estudiantes deben ser alentados a reflexionar sobre el significado detrás de estos conceptos y cómo se aplican en diferentes contextos matemáticos. Al centrarse en la comprensión conceptual, los estudiantes pueden adquirir una base sólida que les permita abordar problemas relacionados con el infinito con mayor confianza y profundidad.

Al implementar las sugerencias didácticas desarrolladas en el Trabajo de investigación, los futuros profesores pueden facilitar un aprendizaje más efectivo y profundo del infinito matemático, permitiendo a los estudiantes desarrollar una comprensión más sofisticada de este concepto crucial en diversos campos, mediante la aplicación de la teoría APOE.

6. Conclusiones

Las reflexiones sintetizadas en las secciones anteriores muestran una organización sobre el estudio de componentes teóricos y de método de una perspectiva particular de la Didáctica de las Matemáticas, la Teoría APOE. Esta perspectiva cognitiva permite analizar las implicaciones sobre qué es “aprender” una porción de conocimiento matemático a través de la aplicación o adaptación de su Ciclo de Investigación y cómo dicho aprendizaje puede generarse en diferentes contextos. En este Trabajo de Investigación, todos los participantes tienen la oportunidad de profundizar en el estudio de los constructos teóricos y las componentes del Ciclo de investigación propuesto por la Teoría APOE, al tomar un concepto particular como objeto de análisis. Los logros sobre la comprensión de dicho objeto matemático a través del lente teórico de APOE será reflejado en la escritura de un documento, que busca fomentar el ejercicio de escritura científica en los participantes del Trabajo de Investigación como resultado de su participación en el mismo.

Para futuros Trabajos de investigación sobre la Teoría APOE, se recomienda incluir experiencias prácticas en el aula para que los participantes puedan aplicar de manera tangible los conocimientos adquiridos durante el Trabajo de Investigación. La falta de tiempo en esta ocasión impidió alcanzar este objetivo. Aunque los futuros profesores lograron una comprensión más profunda de cómo la Teoría APOE puede ser utilizada para analizar y diseñar situaciones de aprendizaje en matemáticas, influyendo directamente en sus prácticas pedagógicas, la Investigación también facilitó el desarrollo de habilidades de indagación clave. Estas habilidades incluyen la formulación de preguntas, la recopilación y análisis de datos, y la escritura científica, fundamentales para una práctica docente reflexiva y basada en evidencia.

Referencias Bibliográficas

- Alguacil de Nicolás, M., Boqué Torremorell, M. C., & Pañellas Valls, M. (2016). *Dificultades en conceptos matemáticos básicos de los estudiantes para maestro*.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- Asiala, M., A. Brown, D. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews y K. Thomas (1996), “*A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II*”, en J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (eds.), *cbms Issues in Mathematics Education*, núm. 6, pp. 1-32.
- Brown, A., McDonald, M. & Weller, K. (2010). “*Step by Step: Infinite Iterative Processes and Actual Infinity*”. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 115-141.
- Dubinsky, E., K. Weller, K. Stenger y D. Vidakovic (2008), “*Infinite iterative processes: The Tennis Ball Problem*”, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 1, núm. 1, pp. 99-121.
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005a). *Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1*. *Educational Studies in Mathematics*, 58 (3), 335 – 359.
- Dubinsky, E., Weller, K., MacDonald, M. & Brown, A. (2005b). *Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2*. *Educational Studies in Mathematics*, 60 (2), 254 – 266.

- Mamolo, A., y R. Zazkis (2008), "*Paradoxes as a window to infinity*", *Research in Mathematics Education*, vol. 10, núm. 2, pp. 167-182.
- Londoño Millán, N., Kakes Cruz, A., & Llanes Castro, J. (2015). *Dificultades en conceptos matemáticos que impliquen el uso de fracciones*. Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.
- Roa-Fuentes, S. (2012), *El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en matemáticas*, tesis de doctorado inédita, Centro de investigaciones y de estudios avanzados del ipn, México.
- Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2014). *El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas*. *Educación matemática*, 26(1), 73-101.
- Rueda Seguro, N. O. (2018). *Algunas dificultades que presentan los estudiantes de séptimo para sumar y restar fracciones: una mirada desde la modelación matemática*. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias.
- Villabona Millán, D. P., & Roa-Fuentes, S. (2016). *Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE*. *Educación matemática*, 28(2), 119-150.