

Estado del arte de modelos de fractura de concreto reforzado con fibras

Francy Vanessa Caicedo González

Trabajo de Grado para Optar al título de Ingeniero Civil

Director:

Luis Eduardo Zapata Orduz

Ingeniero Civil, PhD.

Codirector:

David Sebastián Cotes Prieto Ingeniero Civil

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Físico-mecánicas

Escuela de Ingeniería Civil

Bucaramanga

2020

## Agradecimientos

Quiero dar gracias a Dios por darme sabiduría y fortaleza en todo momento. Gracias a mi familia por el apoyo y guía incondicional, a mi mamá porque es la razón de mi vida y a mis abuelos por ser un ejemplo de vida. Agradezco a mis profesores, especialmente a mi codirector David Sebastián Cotes Prieto por su confianza, colaboración y por dejar una huella en mi formación como profesional.

## Contenido

	<b>Pág.</b>
Introducción .....	10
1. Objetivos .....	13
1.1 Objetivo general.....	13
1.2 Objetivos específicos .....	13
2. Metodología .....	14
2.1 Búsqueda de literatura.....	14
2.2 Recopilación y análisis de la información .....	15
2.2.1 Enfoque de la mecánica del medio continuo (MMC).....	15
2.2.1.1 Análisis directo / Análisis indirecto o inverso. ....	16
2.2.1.2 Ecuación continua / Ecuación discontinua. ....	16
2.2.1.3 Comportamiento de ablandamiento (Softening) / Comportamiento de endurecimiento (Hardening).....	18
2.2.1.4 Modelo homogéneo / Modelo heterogéneo. ....	19
2.2.1.5 Resistencia a tracción equivalente ( $f_{eq}$ ) / Resistencia a tracción residual ( $f_R$ ).....	19
2.2.1.6 Tipo de ecuación cinemática.....	20
2.2.2 Enfoque de la mecánica de fractura, modelo de Irwin.....	20
3. Resultados y Discusión .....	22
3.1 Modelos con variables esfuerzo – deformación ( $\sigma - \epsilon$ ):.....	22

---

3.2 Modelos con variables esfuerzo – Ancho de grieta ( $\sigma - w$ ): .....	26
3.3 Modelos con variables que involucran un enfoque de la mecánica de fractura / modelo de Irwin, (P – CMOD) (P – CTOD) (K <sub>SIc</sub> ): .....	29
4. Conclusiones.....	31
Referencias Bibliográficas .....	33
Apéndices.....	39

## Lista de Figuras

	<b>Pág.</b>
Figura 1.. Curva continua con comportamiento de ablandamiento ().....	16
Figura 2. Curva discontinua bilineal con comportamiento hardening.....	17
Figura 3. Curva discontinua trilineal con comportamiento softening.....	18
Figura 4. Curva discontinua por partes softening. ....	19
Figura 5. Factor de intensidad de esfuerzos.....	21

**Lista de Tablas**

	<b>Pág.</b>
Tabla 1. Resumen modelos constitutivos con variables esfuerzo - deformación ( $\sigma - \varepsilon$ ). .....	25
Tabla 2. Resumen de modelos con variables esfuerzo - ancho de grieta ( $\sigma - w$ ). .....	28
Tabla 3. Resumen modelos que involucra un enfoque de Irwin. ....	30

**Lista de Apéndices**

	<b>Pág.</b>
Apéndice A. Línea de tiempo de la búsqueda realizada sobre modelos de daño en concreto reforzado con fibras. ....	39
Apéndice B. Cuadro comparativo con los modelos constitutivos que involucran las variables esfuerzo – deformación. ....	40
Apéndice C. Cuadro comparativo con los modelos constitutivos que involucran las variables esfuerzo – ancho de grieta. ....	49
Apéndice D. Cuadro comparativo con los modelos constitutivos que involucran en sus variables un enfoque al modelo de Irwin. ....	52
Apéndice E. Cuadro con nomenclatura utilizada en cada artículo de investigación. ....	54

## Resumen

**Título:** Estado del arte de modelos de fractura de concreto reforzado con fibras \*

**Autor:** Francy Vanessa Caicedo González\*\*

**Palabras Claves:** Concreto reforzado con fibras, ecuaciones constitutivas, análisis sistemático, mecánica de fractura, mecánica del medio continuo.

## Descripción

El concreto reforzado con fibras (CRF) ha proporcionado muchas ventajas a comparación con el concreto convencional debido a su capacidad de soportar daño después de la aparición de la primera grieta, sin embargo, uno de los inconvenientes de utilizar el CRF, es conocer un modelo que ayude a predecir el comportamiento post – fisuración de manera precisa, por esta razón, muchos investigadores sobre el tema han desarrollado modelos que ayuden a predecir este comportamiento, sin embargo, la información se encuentra dispersa. Con el fin de proporcionar una fuente directa y organizada para de la cual los investigadores y profesionales que deseen trabajar con CRF, puedan seleccionar los modelos para su análisis, este artículo tiene como objetivo la creación de un estado del arte sobre los modelos de fractura en CFR a partir de una revisión sistemática de la literatura sobre el tema. Se realizó una búsqueda y recopilación de información de la literatura encontrada en diferentes fuentes como libros, revistas de investigaciones indexadas y plataformas académicas suscritas a la base de datos de la Universidad Industrial de Santander, para después, realizar un cuadro comparativo, donde se clasifica los modelos dependiendo de tipo de modelo, ecuación constitutiva, ecuación cinemática y prueba de caracterización. En los resultados, se encontraron 36 modelos diferentes, en donde se evidenció el mayor uso, de un enfoque homogéneo (69.4%) en vez de heterogéneo (30.6%) para el desarrollo de modelos constitutivos que analizan el daño en CRF.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ingenierías Físico-mecánicas. Escuela de Ingeniería Civil. Director: Luis Eduardo Zapata Orduz, Ingeniero Civil, MSc, PhD. Codirector: David Sebastián Cotes Prieto, Ingeniero Civil

## Abstract

**Title:** State of the art of fiber reinforced concrete fracture models\*

**Author:** Francy Vanessa Caicedo González\*\*

**Keywords:** Fiber-reinforced concrete, constitutive equations, systematic analysis, fracture mechanics, continuous medium mechanics.

## Description

Fiber reinforced concrete (CRF) has provided many advantages compared to conventional concrete due to its ability to withstand damage after the first crack appears, however, one of the drawbacks of using CRF is knowing a model that helps to predict post-cracking behavior accurately, for this reason, many researchers on the subject have developed models that help predict this behavior, however, the information is scattered. In order to provide a direct and organized source from which researchers and practitioners wishing to work with CRF can select models for analysis, this article aims to create a state of the art on fracture models in CFR from a systematic review of the literature on the subject. A search and compilation of information from the literature found in different sources such as books, indexed research journals and academic platforms subscribed to the database of the Industrial University of Santander was carried out, to later make a comparative table, where the models depending on the type of model, constitutive equation, kinematic equation and characterization test. In the results, 36 different models were found, where the greatest use was evidenced of a homogeneous approach (69.4%) instead of heterogeneous (30.6%) for the development of constitutive models that analyze the damage in CRF.

---

\* Degree work

\*\* Faculty of Physic-mechanical Engineering. School of Civil Engineering. Director: Isabel Cristina Domínguez Rivera, Sanitary Engineer, MSc, PhD. Co-director: Sebastián Elías Patiño Gutiérrez, Civil Engineer

## Introducción

Debido a la fragilidad inherente del concreto convencional y al hecho de que posee baja resistencia a la tracción, en los últimos años se ha multiplicado el uso alternativo de concretos con mejores propiedades mecánicas (Caballero M., 2017). Una de esas alternativas es el concreto reforzado con fibras (CRF), que es un material cuasi-ductil utilizado en la industria de la construcción por su resistencia en estado endurecido y su capacidad de soportar cargas más allá de la primera grieta gracias a que las fibras ejercen un mecanismo de punteo, el cual permite transferir los esfuerzos a partes no agrietadas del material (González Salcedo, 2013), además, ayuda a controlar la propagación de micro y macro fisuras.

La adición de fibras no solo previene el agrietamiento del concreto, sino que también contribuye a reducir el ancho de la fisura en caso de presentarse (SIKA, 2014). Existe una gran variedad de fibras, las cuales se pueden clasificar en: (i) orgánicas (como por ejemplo, fibras de fique) e (ii) inorgánicas (como fibras de acero y poliméricas), su influencia en el comportamiento mecánico y de durabilidad en el concreto es compleja y no está bien entendida debido a factores como la alta aleatoriedad de las fibras, que induce heterogeneidad y anisotropía en el concreto, por esta razón, el interés de estudiar esos tipos de fibras en muchas instituciones a nivel mundial es elevada (Garibov & Ovchinnikov, 2018). El efecto más importante de las fibras tiene que ver con la capacidad de resistir tracción post-fisura, incrementando la ductilidad y tenacidad del material y caracterizada por la respuesta frente a la fisuración y a la reducción de la fragilidad del concreto convencional (Han, Zhao, Chen, & Lan, 2019).

El fenómeno del agrietamiento resulta de bastante importancia teórica para conocer el comportamiento mecánico del CRF en estado endurecido puesto que es a partir de dicho fenómeno que la fibra empieza a ejercer su función. A este respecto, la mecánica del medio continuo (MMC) y la mecánica de fractura (MF) proporciona un marco teórico importante para modelar el comportamiento de daño en estos materiales.

La MMC, se encarga de desarrollar modelos matemáticos que puedan representar la situación física real de los componentes estructurales bajo solicitaciones, sin considerar las posibles discontinuidades entre las partículas (Oliver, Agelet De Saracibar, Olivella, Agelet, & Bosch, n.d.)(RODRIGUES PONTE, 2008). De esta forma, se han desarrollado métodos aproximados para aplicar los principios de la MMC en la propagación de grietas, lo cual puede hacerse mediante la descripción material que pueden ser aquellos basados en la solución de las ecuaciones de la MMC, a través de las cuales se busca simular el daño inducido por el agrietamiento, que se pueden resolver de forma analítica o numérica, siendo la numérica la más común a través del método de elementos finitos (MEF) (Proença, 2018).

Por otro lado, la mecánica de fractura es una ciencia que estudia el desplazamiento de apertura en la boca de la grieta (CMOD, por sus siglas en inglés), el desplazamiento de apertura en la punta de la grieta (CTOD, por sus siglas en inglés) y el factor de intensidad de esfuerzos ( $K_{Ic}^S$ ), ocasionado por la propagación de fisuras (Cordeiro, 2015). A partir de sus dos ramas: (i) mecánica de fractura elástica lineal (LEFM, por sus siglas en inglés), donde la respuesta carga-deflexión de un cuerpo fisurado muestra esencialmente un comportamiento elástico-lineal hasta el punto donde ocurre una fractura inestable frágil. Existe una plasticidad altamente localizada en el extremo de la fisura, que precede a la fractura frágil, pero su zona de influencia es muy pequeña y no afecta el comportamiento total carga-deflexión (Universidad Nacional de la Plata, 2010), y (ii)

mecánica de fractura elastoplástica (EPFM, por sus siglas en inglés), la cual, estudia materiales que admite deformaciones grandes antes de la fractura (Gonzalez & Arane, 2002).

El estado avanzado en el que se encuentra actualmente la mecánica del medio continuo y la mecánica de fracturas ha permitido la aparición de diversos modelos de fractura, los cuales predicen y explican el fenómeno de agrietamiento del CFR bajo solicitaciones (Williams, 2001). Sin embargo, pese a que existe una gran variedad de metodologías e investigaciones que proponen modelos de fractura en CRF (Newman & Per-, 2019)(Li & Liu, 2020)(Tahenni, Chemrouk, & Lecompte, 2018), la información disponible se encuentra muy dispersa, lo cual supone una dificultad para los investigadores, así como para quienes requieran usar de dicha información con objetivos prácticos. La necesidad de un estado del arte que es un análisis objetivo, exhaustivo y crítico de la literatura sobre el tema en estudio (Mayer, 2009), se presenta relevante para facilitar la selección de los modelos más propicios dependiendo de las situaciones específicas.

Es así como la presente investigación tiene como objetivo la elaboración de un estado del arte sobre los modelos de fractura en concreto reforzado con fibras a partir de una revisión sistemática de la literatura más relevante sobre el tema. Este estado del arte presenta una recopilación, análisis y clasificación de la información presente en artículos de investigación publicados entre 1950 y 2020 con modelos semi-empíricos y analíticos sobre concretos convencionales, autocompactantes de alta resistencia y de alto desempeño reforzados con fibras de acero o poliméricas. Esta investigación permite conocer cuáles son los avances más importantes en el desarrollo de los modelos de fractura en concreto reforzado con fibras.

## **1. Objetivos**

### **1.1 Objetivo general**

Elaborar un estado del arte de los modelos de fractura para concreto reforzado con fibras, a partir de una revisión sistemática de la literatura más relevante sobre el tema.

### **1.2 Objetivos específicos**

1. Seleccionar la literatura más relevante sobre los diferentes modelos de fractura a través de una revisión estructurada de los documentos científicos de libre acceso o disponibles en las bases de datos adquiridas por la Universidad Industrial de Santander.

2. Elaborar una revisión sistemática de la literatura científica seleccionada identificando y comparando los axiomas, hipótesis, variables consideradas, tipo de formulación, método de solución de las ecuaciones, métodos de calibración y validación de los diferentes modelos de fractura seleccionados.

## 2. Metodología

### 2.1 Búsqueda de literatura

Para el desarrollo de este artículo se realizó la búsqueda y compilación de la información por diferentes fuentes como libros, revistas de investigaciones indexadas, fuentes de libre acceso y plataformas académicas suscritas a la base de datos de la Universidad Industrial de Santander.

La búsqueda se realizó con palabras claves como “Fiber concrete fracture”, “Fiber concrete cracking” y “Numerical modelling fiber concrete fracture” en la base de datos de la Universidad Industrial de Santander, específicamente, en editoriales científicas como Spocus, Elsevier y Web of Science, además, se revisaron tesis de maestría y doctorado de acceso gratuito de universidades internacionales. En esta búsqueda preliminar se identificaron 75 documentos que fueron citados en más de tres artículos de investigación diferentes, desde el año 1972 hasta el 2020, que tenían la información completa, ya que muchos de los artículos encontrados no tenían acceso libre.

Esta información se ordenó por año de publicación y se agrupó, teniendo en cuenta las citas que presentaban, de esta forma, se creó una línea de tiempo, en donde, por medio de la opción “Analizar resultados de búsqueda” presente en las plataformas académicas suscritas a la base de datos de la Universidad Industrial de Santander, se encontró el artículo más antiguo que presentó un modelo de fractura en CRF, y a partir de éste, se buscó los artículos en los cuales lo habían citado, conectando los artículos más antiguos que eran citados por los más recientes (Anexo 1). De los 75 documentos encontrados se seleccionaron 39, puesto a que estos fueron los únicos

que proponían un modelo para predecir el daño en CRF, debido a que la mayoría de los artículos encontrados, presentan la caracterización de propiedades mecánicas como resistencia a compresión, tracción y tenacidad, desde un punto de vista netamente experimental o empírico.

## **2.2 Recopilación y análisis de la información**

Después de recolectar la información, se realizó una comparación e interpretación de la información, analizando las hipótesis, los axiomas, variables consideradas, tipo de formulación, método de solución de las ecuaciones, métodos de calibración y validación por cada literatura de investigación, para realizar los modelos de fractura en concretos reforzados con fibras, y se clasificaron según las teorías de mecánica de fractura, tipo de fibras y variables asociadas.

Para el análisis sistemático de la información presentada en los documentos encontrados, se realizó una tabla, en donde se diferenciaron, las hipótesis, las variables, los parámetros, la ecuación de equilibrio, la ecuación constitutiva, el tipo de curva que presenta el modelo y la ecuación cinemática. Este análisis se efectuó para los 39 artículos seleccionados, de tal forma que se dividió a grandes rasgos en dos enfoques:

### ***2.2.1 Enfoque de la mecánica del medio continuo (MMC)***

Los modelos que implican este tipo de enfoque, son los que involucran en sus variables esfuerzo – deformación ( $\sigma - \epsilon$ ) y esfuerzo – ancho de grieta ( $\sigma - w$ ), que tratan de modelar el comportamiento a tracción del concreto reforzado con fibras mediante el concepto de modelo de grieta discreta o fisura ficticia, en donde el criterio de iniciación de la grieta es cuando alcanza el

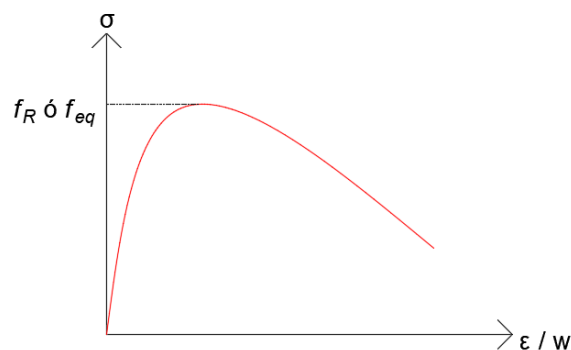
límite de resistencia a tracción (Juan Montilla, 2013), los cuales se clasificaron y agruparon, teniendo en cuenta los siguientes criterios:

**2.2.1.1 Análisis directo / Análisis indirecto o inverso.** La mayoría de los modelos encontrados en la literatura utilizan un aprovechamiento indirecto o análisis inverso, en donde los parámetros del material se definen a partir de datos experimentales, sin embargo, existen unos pocos que recurren a un aprovechamiento directo, que proporciona las mismas curvas utilizando propiedades básicas de sus materiales constituyentes (Juan Montilla, 2013).

**2.2.1.2 Ecuación continua / Ecuación discontinua.** Otro factor que se tuvo en cuenta a la hora de clasificar los modelos fue el tipo de ecuación constitutiva, los cuales son no lineales y pueden ser continua (Figura 1), en donde incluye todas las ecuaciones constitutivas de tipo constante, exponencial, polinómica, entre otras, que no presentan discontinuidad en su dominio.

### Figura 1..

*Curva continua con comportamiento de ablandamiento ().*

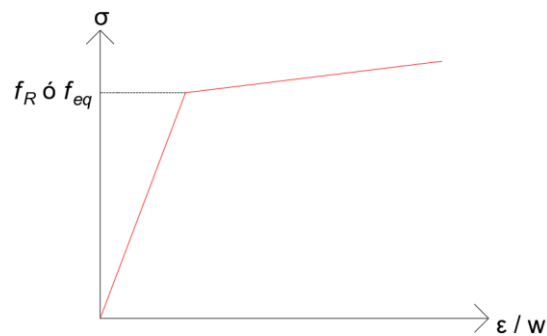


Nota: Adaptado de Wecharatana M.; Shah, S. P. (1983) "A model for predicting fracture resistance of fiber reinforced concrete," Cem. Concr. Res., vol. 13, no. c, pp. 819–829,

Por otro lado, las ecuaciones discontinuas pueden ser bilineal (Figura 2), que presenta en la curva constitutiva dos rectas con diferente pendiente; trilineal (Figura 3), con tres rectas desiguales y así sucesivamente para modelos cuatrilineal, pentalineal y octalineal. Además, se encontró ecuaciones definidas por partes, que están compuestas por una parte lineal y otra no lineal (exponencial, logarítmica, polinomial) (Figura 4).

### Figura 2.

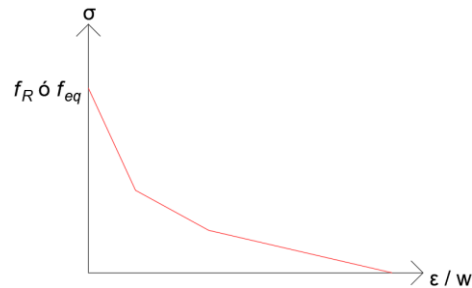
*Curva discontinua bilineal con comportamiento hardening.*



Nota: Adoptado de Ciancio, D.; Mazzotti, C.; Buratti, N. (2014) "Evaluation of fibre-reinforced concrete fracture energy through tests on notched round determinate panels with different diameters," *Constr. Build. Mater.*, vol. 52, pp. 86–95

**Figura 3.**

*Curva discontinua trilineal con comportamiento softening.*

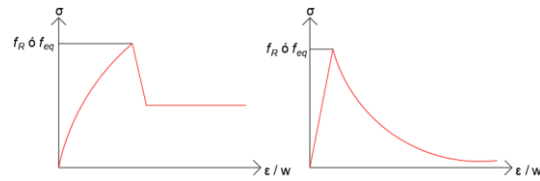


Nota: Adaptado de Gouveia, A. V.; Barros, J.; Cruz, J. S.; Self-compacting, S. F. R.; Analysis, M. N.; Method, F. E. (2007) “Crack Constitutive Model To Simulate the Behavior of Fiber Reinforced Concrete Structures Failing in Punching,” pp. 13–15,

**2.2.1.3 Comportamiento de ablandamiento (Softening) / Comportamiento de endurecimiento (Hardening).** El tipo de curva constitutiva adoptada en el modelo, puede tener un comportamiento de ablandamiento (softening), en donde el diagrama constitutivo del concreto reforzado con fibras tiende a decrecer después de que ocurre la rotura (figura 1); por otro lado, el comportamiento de endurecimiento (hardening), se puede visualizar en la gráfica que modela la ecuación constitutiva, cuando después del esfuerzo pico, la gráfica tiende a crecer (figura 2).

**Figura 4.**

*Curva discontinua por partes softening.*



Nota: Adoptado de Bitencourt Jr, L. A. G.; Trindade, Y. T.; Bittencourt, T. N.; Manzoli, O. L Rodrigues, .; E. A. (2018) “Multiscale modeling of steel fiber reinforced concrete based on the use of coupling finite elements and mesh fragmentation technique,” *Comput. Model. Concr. Struct.*,.

**2.2.1.4 Modelo homogéneo / Modelo heterogéneo.** Se utilizó la definición de modelo heterogéneo para describir a los artículos que consideran el efecto de cada material que compone el concreto reforzado con fibras por separado, y la definición de homogéneo para describir a los artículos que utilizan un promedio fenomenológico para modelar el comportamiento del material.

**2.2.1.5 Resistencia a tracción equivalente ( $f_{eq}$ ) / Resistencia a tracción residual ( $f_R$ ).**

Otra diferencia entre los modelos encontrados es el uso de la resistencia a la tracción por flexión equivalente ( $f_{eq}$ ) o la resistencia a la tracción por flexión residual ( $f_R$ ) para obtener las variables del modelo constitutivo. El parámetro  $f_{eq}$  está relacionado con la capacidad de absorción de energía del material hasta una determinada deflexión, mientras que el parámetro  $f_R$  corresponde al esfuerzo asociado a la fuerza en una determinada deflexión (Blanco, Pujadas, De La Fuente, Cavalaro, & Aguado, 2013).

**2.2.1.6 Tipo de ecuación cinemática.** La ecuación cinemática para el enfoque de la MMC relaciona deformaciones ( $\epsilon$ ) con desplazamientos ( $u$ ) o ancho de grieta ( $w$ ), utilizando ecuaciones lineales o definida por partes.

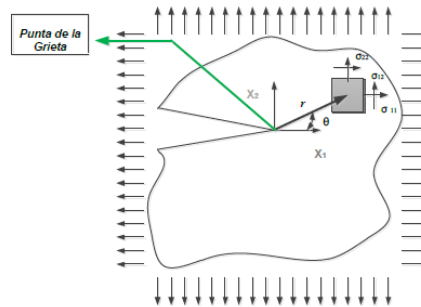
### **2.2.2 Enfoque de la mecánica de fractura, modelo de Irwin.**

Los modelos encontrados que tienen enfoque en la mecánica de fractura, son aquellos que involucran en las variables de la ecuación constitutiva, (i) carga – desplazamiento de apertura en la boca de la grieta (P – CMOD), (ii) carga – desplazamiento de apertura en la punta de la grieta (P – CTOD) y (ii) factor de intensidad de esfuerzos ( $K_{ic}^s$ ), en donde a su vez correlacionan CMOD y CTOD, mediante la ecuación cinemática, adoptando el modelo de Irwin como base de desarrollo.

Irwin en 1948, basado en los estudios de Griffith (1920), definió el concepto de tasa de liberación de energía o energía disponible para el crecimiento de la grieta ( $G$ ) como el cambio de energía potencial de un material elástico con respecto al área de una grieta (Lopez Fernandez & Torres Diaz, 2011):

$$G = \frac{dU_p}{da} = \frac{\pi * \sigma^2 * a}{E} \quad (1)$$

En 1957, Irwin verificó que en materiales frágiles como el vidrio, las dimensiones de la ZPI (Zona de procesos inelásticos) son considerablemente pequeñas en relación a las dimensiones de las estructuras analizadas, además, propuso el empleo del factor de intensidad de esfuerzos ( $K_{ic}^s$ ), el cual permite evaluar localmente el campo de esfuerzos al frente de la extremidad de la fisura (Figura 5), de esta forma, el estado de esfuerzos en el frente de una grieta se puede escribir como se presenta en la ecuación (2).

**Figura 5.***Factor de intensidad de esfuerzos*

Nota. Tomado de: López Fernández J. C.; Torres Diaz, J. A. (2011) “Principios básicos de la propagación de fractura por fatiga y estimación de los factores de intensidad de esfuerzos en placas de acrílicos fracturadas utilizando simulación numérica con validación experimental,” Universidad tecnológica de bolívar,

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} F_{ij}(\theta) \quad (2)$$

Siendo  $F_{ij}(\theta)$  una función de coordenadas cilíndricas  $\theta$ , la cual depende de la geometría de la estructura y de las condiciones de contorno, y  $K$  el factor de intensidad de esfuerzos (SIF, por sus siglas en inglés) que depende del modo de fractura en que la grieta fue solicitada, de la geometría, condiciones de contorno y de la longitud de la grieta, la cual se obtiene de la expresión (3).

$$K = y\theta\sqrt{\pi a} \quad (3)$$

Donde  $y$  es una función que depende de la geometría del cuerpo, lugar de la fisura y la carga; Irwin relacionó la tasa de liberación de energía ( $G$ ) con el factor de intensidad de esfuerzos ( $K$ ), definiendo el trabajo necesario por unidad de área para extender la fisura como fuerza impulsadora crítica ( $G_c$ ), genéricamente (Universidad Nacional de la Plata, 2010).

$$K_c^2 = E * G_c \quad (4)$$

El valor crítico de K con respecto al inicio de la fractura,  $K_c$ , es por lo tanto el parámetro que caracteriza la resistencia a la fractura del material y se lo denomina Tenacidad a la Fractura o Fractotenacidad del Material, y permiten evaluar el potencial de falla y la vida útil permanente de una estructura o componente conteniendo un defecto.

### 3. Resultados y Discusión

El concreto reforzado con fibras (CRF) proporciona muchas ventajas en cuanto a propiedades mecánicas y en la resistencia a la propagación de grieta a compresión con el concreto reforzado convencional (González Salcedo, 2013), sin embargo, uno de los problemas es conocer un modelo que pueda predecir el agrietamiento en CRF, por esta razón muchos artículos han propuesto diferentes modelos constitutivos para modelar este tipo de comportamiento; las principales ecuaciones constitutivas adoptadas, son las que involucran en sus variables esfuerzo – deformación ( $\sigma - \epsilon$ ), esfuerzo – ancho de grieta ( $\sigma - w$ ) y un enfoque de la mecánica de fractura, modelo de Irwin (P – CMOD) (P – CTOD) ( $K_{Ic}^s$ ).

#### 3.1 Modelos con variables esfuerzo – deformación ( $\sigma - \epsilon$ ):

En el Anexo 2, se presenta los modelos que involucran en sus variables esfuerzo – deformación ( $\sigma - \epsilon$ ), agrupando según: (i) tipo de modelo, es decir, si es homogéneo o heterogéneo

y si la curva es continua o discontinua; (ii) ecuación constitutiva, que define el modelo de fractura del concreto reforzado con fibras; (iii) ecuación cinemática, que relaciona deformaciones con desplazamientos o ancho de grieta; y por último, (iv) prueba de caracterización, en donde se realiza una gráfica del ensayo requerido para obtener los parámetros del modelo. En este análisis se encontraron 19 modelos, que se agruparon como se explica a continuación:

Empezando con los modelos homogéneos, que utilizaron un aprovechamiento indirecto o análisis inverso, se encontró aquellos que presentan curva constante, que analizaron concreto reforzado con fibras y con barras de refuerzo de acero (DBV, 2001), (CNR – Consiglio Nazionale delle Ricerche, 2008), (Fib. Model Code, 2010) y los que muestra una curva continua polinómica de grado 2 con resistencia a tracción residual ( $f_R$ ), estudiando concreto reforzado con fibras de acero, con una ecuación cinemática que relaciona ancho de grieta ( $w$ ) y deformación ( $\epsilon$ ) y en donde la prueba de caracterización es un ensayo de flexión de 4 puntos en vigas (Vandewalle, 2000) (Hamrat, Boulekbache, Chemrouk, & Amziane, 2016) (Tahenni, Chemrouk, & Lecompte, 2018); los siguientes, que exhiben un comportamiento de ablandamiento (softening), se tiene, aquellos que desarrollaron un modelo con curva discontinua trilineal, considerando el concreto reforzado con fibras de acero (Gouveia, y otros, 2007) (Ventura-Gouveia, Barros, Azevedo, & Sena-Cruz, 2008) (RILEM TC 162-TDF, 2003), los que describe un modelo cuatrilineal (Ministerio de Fomento, 2008) y modelos con curva discontinua pentalineal (Fib. Model Code, 2010) (Teresa, Molina, Borrell, & Malatesta, 2019); por último, se encontró modelo con comportamiento de endurecimiento (hardening) pentalineal (Fib. Model Code, 2010).

Por otro lado, se tiene los modelos heterogéneos, en donde se encontró, aquellos que presentan curva continua, analizando el efecto de punteo de la fibras sobre el concreto y utilizan el ensayo de tracción uniaxial en placa para caracterizar el modelo (Tzadka & Schulgasser, 2009),

también, los modelos que representan el efecto de las fibras por medio del ensayo de extracción (pull-out), de curva continua que muestra un comportamiento de endurecimiento (hardening) (Etse, Caggiano, & Vrech, 2012). Los siguientes artículos, que presentan un comportamiento de ablandamiento (softening) son (Bitencourt Jr, Trindade, Bittencourt, Manzoli, & Rodrigues, 2018) (Bitencourt, Manzoli, Bittencourt, & Vecchio, 2019), con un modelo de curva discontinua por partes, en donde el primer tramo de ecuación es de tipo exponencial, además, se tiene (Yan, Zhang, Ju, & Chen, 2019) (Montero-Chacón, Schlangen, & Medina, 2013), que exhibe un modelo trilineal, también, los que adoptan una curva pentalinear y octalinear (Pros Parés, 2011). Por último, se tiene, la literatura que adoptó un comportamiento de endurecimiento (hardening) con curva discontinua trilineal (Yan, Zhang, Ju, & Chen, 2019) (Montero-Chacón, Schlangen, & Medina, 2013).

El cuadro resumen del análisis sistemático de los modelos que involucran en sus variables esfuerzo – deformación ( $\sigma - \epsilon$ ) se presenta en la Tabla 1.

Tabla 1.

Resumen modelos constitutivos con variables esfuerzo - deformación ( $\sigma - \varepsilon$ ).

	(DBV, 2001)	(CNR – Consiglio Nazionale delle Ricerche, 2008)	(Fib. Model Code, 2010)	(Vandewalle, 2000)	(Hamrat, Boulekbache, Chemrouk, & Amziane, 2016)	(Tahenni, Chemrouk, & Lecompte, 2018)	(Tzadka & Schulgasser, 2009)	(Eise, Caggiano, & Vrech, 2012)	(Gouveia, y otros, 2007)	(Ventura-Gouveia, Barros, Azevedo, & Sena-Cruz, 2008)	(RILEM TC 162-TDF, 2003)	(Bittencourt Jr, Trindade, Bittencourt, Manzoli, & Rodrigues, 2018) (Bittencourt, Manzoli, Bittencourt, & Vecchio, 2019)	(Yan, Zhang, Ju, & Chen, 2019) (Montero-Chacón, Schlangen, & Medina, 2013)	(Ministerio de Fomento, 2008)	(Fib. Model Code, 2010) (Teresa, Molina, Borrell, & Malatesta, 2019)	(Pros Parés, 2011)
Análisis directo (AD) / Análisis indirecto (AI)	AI	AI	AI	AI	AI	AI	AI	AI	AI	AI	AI	AI	AI	AI	AI	AI
Ecuación continua (EC) / Ecuación discontinua (ED)	EC	EC	EC	EC	EC	EC	EC	EC	ED	ED	ED	ED	ED	ED	ED	ED
Resistencia residual ( $f_R$ ) / Resistencia equivalente ( $f_{eq}$ )	$f_{eq}$	$f_{eq}$	$f_R$	$f_R$	$f_R$	$f_R$		$f_R$	$f_{eq}$	$f_{eq}$	$f_R$	$f_R$	$f_R$	$f_R$	$f_R$	$f_R$
Modelo Homogéneo (HO) / Modelo Heterogéneo (HE)	HO	HO	HO	HO	HO	HO	HE	HE	HO	HO	HO	HE	HE	HO	HO	HE
Comportamiento Softening (S) / Hardening (H)								H	S	S	S	S	S	S/H	S	H/S
Usa fibras de acero (FA)/ fibras de polietilíneo (FP)	FA			FA	FA	FA		FA	FA	FA	FA	FA	FA	FA FP		FA



reforzado con fibras; (iii) ecuación cinemática, que relaciona deformaciones con desplazamientos o ancho de grieta; y por último, (iv) prueba de caracterización, en donde se realiza una gráfica del ensayo requerido para obtener los parámetros del modelo, en este análisis sistemático se encontró 10 modelos, que se agruparon como se explica a continuación:

Los primeros artículos encontrados son los que exhiben un enfoque homogéneo, con comportamiento de ablandamiento (softening) y un aprovechamiento indirecto o inverso, de los cuales (Wecharatana & Shah, 1983) (Carvalho, Barros, Zhang, & Dias-da-Costa, 2020) (Zhang & Li, 2004) (Meskenas & et al., 2014) representa la ecuación constitutiva mediante una curva continua, usando fibras de acero sin barras de refuerzo longitudinal, también se analizaron documentos que tienen una curva discontinua bilineal (Ciancio, Mazzotti, & Buratti, 2014) (Brisola, Palermo, & Almeida, 2019) (CNR – Consiglio Nazionale delle Ricerche, 2008); los que presentan curva discontinua trilineal (Woo, Kim, & Han, 2014) (Enfedaque, Alberti, & Gálvez, 2019) (Suárez, Gálvez, Enfedaque, & Alberti, 2019) (Suárez, Gálvez, Enfedaque, & Alberti, 2009) y por último, (Enfedaque, Alberti, & Gálvez, 2019), considera una curva discontinua cuatrilineal.

Por otro lado, se tiene los modelos heterogéneos, con comportamiento de ablandamiento (softening) y que usan un aprovechamiento indirecto o análisis inverso, en donde, (De Cea, Henrique, & Cavalaro, 2013), presenta dos tipos curva, trilineal y cuatrilineal que representa la ecuación constitutiva.

Por último, se realiza un cuadro resumen de los modelos constitutivos que involucran en sus variables esfuerzo – ancho de grieta ( $\sigma - w$ ), teniendo en cuenta los mismos factores de clasificación que en el numeral anterior (Tabla 2).



### 3.3 Modelos con variables que involucran un enfoque de la mecánica de fractura / modelo de Irwin, (P – CMOD) (P – CTOD) ( $K_{Ic}^s$ ):

Para estos tipos de modelos, los cuales involucran un enfoque de la mecánica de fractura, específicamente el modelo de Irwin, que analiza la relación de las variables, carga – desplazamiento de apertura en la boca de la grieta (P – CMOD), carga – desplazamiento de apertura en la punta de la grieta (P – CTOD) y factor de intensidad de esfuerzos ( $K_{Ic}^s$ ), se plantea en el Anexo 4 la clasificación de estos modelos agrupando según: (i) tipo de variable (P – CMOD, P – CTOD,  $K_{Ic}^s$ ); (ii) tipo de modelos, si es homogéneo o heterogéneo; (iii) ecuación constitutiva; (iv) ecuación cinemática y (v) prueba de caracterización.

Realizando el análisis sistemático, se encontro 7 modelos, de los cuales (Jenq, Asce, Shah, & Asce, 1986) (Bernardi, Michelini, Sirico, Vantadori, & Zanichelli, 2017) presentan un enfoque heterogéneo con las variables carga – desplazamiento de apertura en la boca de la grieta (P – CMOD); el siguiente articulo encontrado presenta un enfoque homogéneo que involucra la relación carga – desplazamiento de apertura en la punta de la grieta (P – CTOD) (Park, Jo, Park, & Choi, 2010).

Siguiendo con los modelos homogéneos, se tiene (Stephen, Gettu, Ferreira, & Jose, 2018) (Ferreira, De Hanai, & Ferrari, 2016) (Stengel, Lin, Schießl, & Gehlen, 2012) que relacionan carga con desplazamiento de apertura en la boca de la grieta (P – CMOD), los cuales utilizaron un aprovechamiento indirecto realizado a través del ensayo de flexión de 3 puntos; y por último se tiene, los modelos que tomaron como variables el factor de intensidad de esfuerzos ( $K_{Ic}^s$ ), donde utilizaron un enfoque homogéneo y análisis indirecto, usando la prueba de flexión de 3 puntos en

vigas con muesca (Sun & et al., 2019) (Aliha, Razmi, & Mousavi, 2018). El cuadro resumen se presenta en la Tabla 3.

**Tabla 3.**

*Resumen modelos que involucra un enfoque de Irwin.*

	(Jenq, Asce, Shah, & Asce, 1986)	(Bernardi, Michelini, Sirico, Vantadori, & Zanichelli, 2017)	(Park, Jo, Park, & Choi, 2010)	(Stephen, Gettu, Ferreira, & Jose, 2018) (Ferreira, De Hanai, & Ferrari, 2016)	(Stengel, Lin, Schießl, & Gehlen, 2012)	(Sun & et al., 2019)	(Aliha, Razmi, & Mousavi, 2018)
Análisis directo (AD) / Análisis indirecto (AI)	AI	AI	AI	AI	AI	AI	AI
Modelo Homogéneo (HO) / Modelo Heterogéneo (HE)	HE	HE	HO	HO	HO	HO	HO
Usa fibras de acero (FA)/ fibras de polipropileno (FPR)/ fibras de nylon (FN)/ fibras carbor (FC)/ fibras Híbridas (FH)/ fibras basalto (FB)/ fibras sintéticas (FS)	FA	FPR	FC FN	FA FPR FH	FA	FB	FS
Analiza con barras de acero de refuerzo (CB) / sin barras de acero de refuerzo (SB)	SB	SB	SB	SB	SB	SB	SB
Variable (i) P - CMOD / (ii) P - CTOD / (iii) $K_{IC}^S$	i	i	ii	i	i	iii	iii
Tipo de concreto: Concreto convencional (CC)/ Concreto autocompactante (CA)/ Concreto de alta resistencia (CR)/ Concreto de alto desempeño (CD) reforzado con fibras	CC	CC	CC	CC CR	CC	CC	CC

#### 4. Conclusiones

Este artículo de investigación recopiló y analizó los modelos constitutivos de la literatura encontrada en diferentes fuentes como libros, revistas de investigaciones indexadas y plataformas académicas suscritas a la base de datos de la Universidad Industrial de Santander, desde el año 1972 al 2020, realizando una comparación en términos de la capacidad para predecir el agrietamiento en concreto reforzado con fibras, de este análisis comparativo se puede concluir que:

De los 39 artículos analizados, en total se encontraron 36 modelos diferentes, en donde se evidenció el uso de fibras de acero con un porcentaje de 63.9% para analizar el comportamiento de agrietamiento a comparación con los otros tipos de fibras, el cual tiene un porcentaje de 19.4% y el 17% restante no reporta el tipo de fibra que uso.

Los conceptos en que se basaron los modelos de daño en concreto reforzado con fibras (CRF) encontrados, esta dado por un aprovechamiento indirecto, realizando ensayos de laboratorio para obtener los parámetros de resistencia, en donde se evidenció la ejecución del ensayo de flexión de tres y cuatro puntos, con un porcentaje de 72.2% como el ensayo más usado para caracterizar el CRF a comparación con otro tipos de ensayo (27.8%).

Otro aspecto importante que exhibió la literatura encontrada, es el mayor uso, de un enfoque homogéneo (69.4%) en vez de heterogéneo (30.6%) para el desarrollo de modelos constitutivos que analizan el daño en concreto reforzado con fibras (CRF).

Con respecto a los modelos que involucran en sus variables esfuerzo – deformación ( $\sigma - \epsilon$ ) y esfuerzo – ancho de grieta ( $\sigma - w$ ), la tendencia que se encontró es la de utilizar resistencia a

tracción residual  $f_R$  (47.2%) en vez de resistencia a tracción equivalente  $f_{eq}$  (41.7%) y el 11% restante no reportó haber utilizado  $f_R$  o  $f_{eq}$ .

En cuanto a su comportamiento, el análisis sistemático reveló la tendencia a utilizar modelos de ablandamiento (softening), con un porcentaje de 52.8% a comparación con los de endurecimiento (hardening), que tiene un porcentaje de 27.8%, para predecir la aparición de grietas en CRF y el 19% restante no reporta tipo de comportamiento.

Con respecto al tipo de concreto, se evidenció que de los 36 modelos encontrados, 83.3% utilizan concreto convencional, 11.1% concreto de alta resistencia y 5.56% concreto autocompactante reforzado con fibras.

### Referencias Bibliográficas

- Aliha, M. R., Razmi, A., & Mousavi, A. (2018). Fracture study of concrete composites with synthetic fibers additive under modes I and III using ENDB specimen. *Constr. Build. Mater.*, vol. 190, 612–622.
- Bernardi, P., Michelini, E., Sirico, A., Vantadori, S., & Zanichelli, A. (2017). Fracture toughness of fibre-reinforced concrete determined by means of numerical analysis. *Procedia Struct. Integr.*, vol. 5, 848–855.
- Bitencourt Jr, L. A., Trindade, Y. T., Bittencourt, T. N., Manzoli, O. L., & Rodrigues, E. A. (2018). Multiscale modeling of steel fiber reinforced concrete based on the use of coupling finite elements and mesh fragmentation technique. *Comput. Model. Concr. Struct.*
- Bitencourt, L. A., Manzoli, O. L., Bittencourt, T. N., & Vecchio, F. J. (2019). Numerical modeling of steel fiber reinforced concrete with a discrete and explicit representation of steel fibers. *Int. J. Solids Struct.*, vol. 159, 171–190.
- Blanco, A., Pujadas, P., De La Fuente, A., Cavalaro, S., & Aguado, A. (2013). Application of constitutive models in European codes to RC-FRC. *Constr. Build. Mater.*, vol. 40, 246–259.
- Brisola, G. M., Palermo, L., & Almeida, L. C. (2019). Analysis of the crack propagation in fiber-reinforced concrete specimens using the bem. *WIT Trans. Eng. Sci.*, vol. 122, 39–49.
- Caballero M., K. E. (2017). *Propiedades mecánicas del concreto reforzado con fibras metálicas* .
- Carvalho, M. R., Barros, J. A., Zhang, Y., & Dias-da-Costa, D. (2020). A computational model for simulation of steel fibre reinforced concrete with explicit fibres and cracks. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 363, 112879.

- Ciancio, D., Mazzotti, C., & Buratti, N. (2014). Evaluation of fibre-reinforced concrete fracture energy through tests on notched round determinate panels with different diameters. *Constr. Build. Mater.*, vol. 52, 86–95.
- CNR – Consiglio Nazionale delle Ricerche. (2008). Istruzioni per la Progettazione, l'Esecuzione ed il Controllo di Strutture di Calcestruzzo Fibrorinforzato. *Comm. di Stud. per la predisposizione e l'analisi di norme Tec. Relat. alle Costr.*
- Cordeiro, S. G. (2015). *Formulações do Método dos Elementos de Contorno aplicadas à análise elástica e à fratura coesiva de estruturas compostas planas.*
- DBV. (2001). *DBV Stahlfaserbeton Merkblatt, " Dtsch. Bet. Vereins.*
- De Cea, A. A., Henrique, S., & Cavalaro, P. (2013). Caracterización y diseño del hormigón reforzado con fibras plásticas.
- Enfedaque, A., Alberti, M. G., & Gálvez, J. C. (2019). *Analysis of the versatility of multi-linear softening functions applied in the simulation of fracture behaviour of fibre-reinforced cementitious materials,* ". Materials (Basel).
- Etse, G., Caggiano, A., & Vrech, S. (2012). Multiscale failure analysis of fiber reinforced concrete based on a discrete crack model. *Int. J. Fract.*, vol. 178, no. 1–2, 131–146.
- Ferreira, L. E., De Hanai, J. B., & Ferrari, V. J. (2016). Optimization of a hybrid-fiber-reinforced high-strength concrete. *Mech. Compos. Mater.*, vol. 52, no. 3, 295–304.
- Fib. Model Code. (2010). *Comité Euro-International du Beton-Federation International de la Precontrainte.*
- Garibov, R. B., & Ovchinnikov, I. G. (2018). The model of fiber-reinforced concrete element deformation under the conditions of plane stress state and subjected to radiation and its identification. *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.*, vol. 456, no. 1.
- González Salcedo, L. O. (2013). *Componentes Del Concreto Reforzado Con Fibras En Sus Propiedades Mecánicas* . palmira: Univ. Nac. Colomb.

- Gouveia, A. V., Barros, J., Cruz, J. S., Self-compacting, S. F., Analysis, M. N., & Method, F. E. (2007). Crack Constitutive Model To Simulate the Behavior of Fiber Reinforced Concrete Structures Failing in Punching. 13–15.
- Hamrat, M., Boulekbache, B., Chemrouk, M., & Amziane, S. (2016). Flexural cracking behavior of normal strength, high strength and high strength fiber concrete beams, using Digital Image Correlation technique. *Constr. Build. Mater.*, vol. 106, 678–692.
- Han, J., Zhao, M., Chen, J., & Lan, x. (2019). Effects of steel fiber length and coarse aggregate maximum size on mechanical properties of steel fiber reinforced concrete. *Constr. Build. Mater.*, vol. 209, 577–591.
- J., G., & Arane, J. L. (2002). *Mecánica de fractura*.
- Jenq, B. Y., Asce, S. M., Shah, S. P., & Asce, M. (1986). Crack propagation in fiber-reinforced concrete. *J. Struct. Eng.*, vol. 112, no. 1, 19–34.
- Juan Montilla, F. J. (2013). Desarrollo de modelos numéricos para el análisis del comportamiento térmico, mecánico y en fractura del hormigón a edades tempranas.
- Li, D., & Liu, S. (2020). Macro polypropylene fiber influences on crack geometry and water permeability of concrete. *Constr. Build. Mater.*, vol. 231, 117-128.
- Lopez Fernandez, J. C., & Torres Diaz, J. A. (2011). *Principios básicos de la propagación de fractura por fatiga y estimación de los factores de intensidad de esfuerzos en placas de acrílicos fracturadas utilizando simulacion numerica con validación experimental*. Universidad Tecnologica de Bolivar.
- Mayer, P. (2009). Guidelines for writing a Review Article A ) Good to know about review articles B ) Elements of a review article C ) Guidelines for preparing a review article in 18 steps D ) Examples of high-quality review articles in the plant sciences ( to be used in yo. 1-10.
- Meskenas, A., & et al. (2014). Determination of the stress - crack opening relationship of SFRC by an inverse analysis. *Mech. Compos. Mater.*, vol. 49, no. 6, 1021–1028.

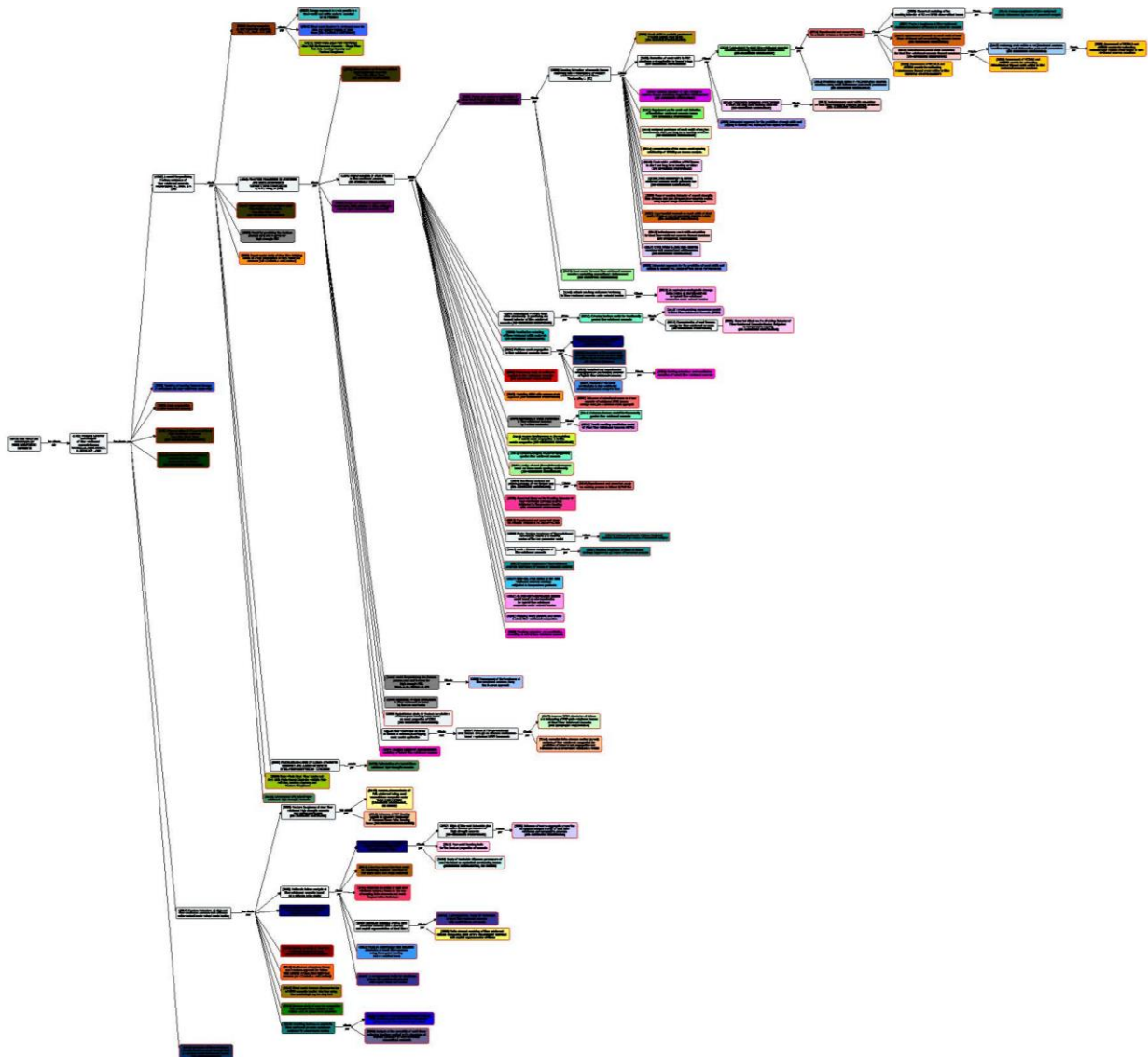
- Ministerio de Fomento. (2008). EHE-08 Instrucción del Hormigón Estructural,. *Comisión Permanente del Hormigón*.
- Montero-Chacón, F., Schlangen, E., & Medina, F. (2013). A lattice-particle approach for the simulation of fracture processes in fiber-reinforced high-performance concrete. *Proc. 8th Int. Conf. Fract. Mech. Concr. Concr. Struct. Fram. 2013*, 1249–1256.
- Newman, R., & Per, I. S.--. (2019). Irwin 's Stress Intensity Factor A Historical Perspective.
- Oliver, X., Agelet De Saracibar, C., Olivella, X. O., Agelet, C., & Bosch, S. (s.f.). *Politext / Ingeniería Civil Universitat Politècnica De Catalunya*.
- Park, S. K., Jo, B. W., Park, J. H., & Choi, J. S. (2010). Fracture behaviour of polymer concrete reinforced with carbon and nylon fibres. *Adv. Cem. Res.*, vol. 22, no. 1, 45–51.
- Proença, S. P. (2018). *Curso de resistência dos materiais*.
- Pros Parés, A. (2011). Numerical approach for modeling Steel Fiber Reinforced Concrete.
- RILEM TC 162-TDF. (2003).  $\sigma - \varepsilon$  -design method Final Recommendation,” RILEM TC 162-TDF . *Test Des. methods steel fibre Reinf. Concr.*, vol. 36, no. October, 560–567.
- Rodrigues Ponte, E. C. (2008). *1 Introdução*. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC - Rio.
- SIKA. (2014). *Concreto reforzado con fibras*.
- Stengel, T., Lin, X., Schießl, P., & Gehlen, C. (2012). Tailor-made steel fiber reinforced ultra high performance concrete - single fiber pull-out, bending capacity and fracture toughness. *RILEM Bookseries*, vol. 2, 127–135.
- Stephen, S. J., Gettu, R., Ferreira, L. E., & Jose, S. (2018). Assessment of the toughness of fibre-reinforced concrete using the R-curve approach. *Sadhana - Acad. Proc. Eng. Sci.*, vol. 43, no. 3, 1–6.

- Suárez, F., Gálvez, J. C., Enfedaque, A., & Alberti, M. G. (2009). Simulation of mixed-mode fracture (I-II) on PFRC specimens with various fibre proportions using an embedded cohesive crack model. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, vol. 596 no. 1.
- Suárez, F., Gálvez, J. C., Enfedaque, A., & Alberti, M. G. (2019). Modelling fracture on polyolefin fibre reinforced concrete specimens subjected to mixed-mode loading. *Eng. Fract. Mech.*, vol. 211, no. February, 244–253.
- Sun, X., & et al. (2019). Fracture performance and numerical simulation of basalt fiber concrete using three-point bending test on notched beam. *Constr. Build. Mater.*, vol. 225, 788–800.
- Tahenni, T., Chemrouk, M., & Lecompte, T. (2018). Steel fibres effects on the flexural cracking behaviour of reinforced high strength concrete beams with particular reference to the major design codes crack width models,” , p. *Eur. J. Environ. Civ. Eng.*, vol. 8189, 1-20.
- Teresa, C., Molina, V., Borrell, C. M., & Malatesta, S. C. (2019). *Simulación numérica del ensayo de panel cuadrado de hormigón reforzado con fibra.*
- Tzadka, U., & Schulgasser, K. (2009). Energy approach to crack growth in a fiber-reinforced brittle material modeled by an inclusion. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, vol. 52, no. 2, 72–82.
- Universidad Nacional de la Plata. (2010). *Conceptos básicos de la mecánica de fractura.*
- Vandewalle, L. (2000). Cracking behaviour of concrete beams reinforced with a combination of ordinary reinforcement and steel fibers. *Mater. Struct. Constr.*, vol. 33, no. 3, 164–170.
- Ventura-Gouveia, A., Barros, J. A., Azevedo, A. F., & Sena-Cruz, J. M. (2008). Multi-Fixed smeared 3D crack model to simulate the behavior of fiber reinforced concrete structures. *CCC2008-Challenges Civ. Constr.*, 11.
- Wecharatana, M., & Shah, S. P. (1983). A model for predicting fracture resistance of fiber reinforced concrete. *Cem. Concr. Res.*, vol. 13, no. c., 819–829.

- Williams, J. G. (2001). Introduction to linear elastic fracture mechanics. *Eur. Struct. Integr. Soc.*, vol. 28, no. C, 3–10.
- Woo, S. K., Kim, K. J., & Han, S. H. (2014). Tensile cracking constitutive model of Steel Fiber Reinforced Concrete (SFRC). *KSCE J. Civ. Eng.*, vol. 18, no. 5, 1446–1454.
- Yan, Z., Zhang, Y., Ju, J. W., & Chen, Q. (2019). An equivalent elastoplastic damage model based on micromechanics for hybrid fiber-reinforced composites under uniaxial tension. *Damage Mech.*, vol. 28, no. 1239, 79–117.
- Zhang, J., & Li, V. C. (2004). Simulation of crack propagation in fiber-reinforced concrete by fracture mechanics. *Cem. Concr. Res.*, vol. 34, no. 2, 333–339.

### Apéndices

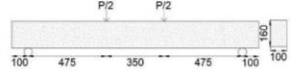
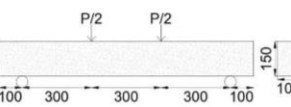
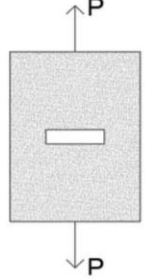
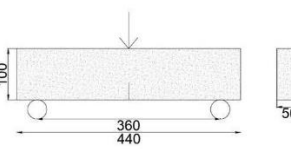
#### Apéndice A. Línea de tiempo de la búsqueda realizada sobre modelos de daño en concreto reforzado con fibras.

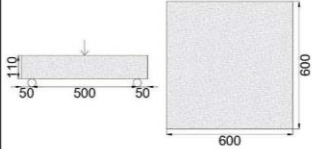


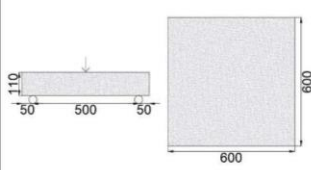
**Apéndice B. Cuadro comparativo con los modelos constitutivos que involucran las variables esfuerzo – deformación.**

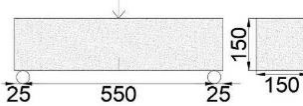
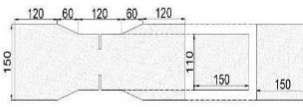
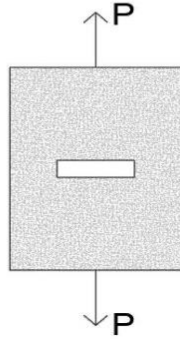
En este Anexo se presenta los modelos que involucran en sus variables esfuerzo – deformación ( $\sigma - \epsilon$ ), agrupando según: (i) tipo de modelo, es decir, si es homogéneo o heterogéneo y si la curva es continua o discontinua; (ii) ecuación constitutiva, que define el modelo de fractura del concreto reforzado con fibras; (iii) ecuación cinemática, que relaciona deformaciones con desplazamientos o ancho de grieta; y por último, (iv) prueba de caracterización, en donde se realiza una gráfica del ensayo requerido para obtener los parámetros del modelo. En este análisis se encontraron 19 modelos, los cuales se listan a continuación:

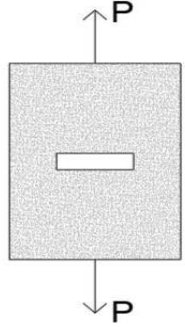
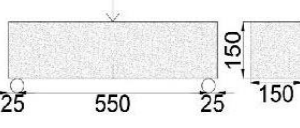
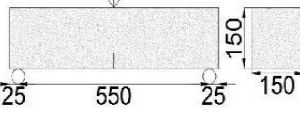
TIPO DE MODELO	ECUACIÓN CONSTITUTIVA	ECUACIÓN CINEMATICA	PRUEBA DE CARACTERIZACIÓN
Homogéneo , curva constante	$\sigma = f_{eq,ctd,II} = \frac{f_{eq,ctk,II} * \alpha_c^f * \alpha_{sys}}{\gamma_{ct}^f} \leq f_{eq,ctdI}$ $\epsilon_1 = \epsilon_u = 10\%$ <p>[24]</p>	No presenta	
	$\sigma = f_{Ftu} = \frac{f_{eq2}}{3}$ $\epsilon_1 = \epsilon_u = 20\% \text{ Softening}; 10\% \text{ hardening}$ <p>[25]</p>		
	$\sigma = f_{Ftu} = \frac{f_{R3}}{3}$ $\epsilon_1 = \epsilon_u = 20\% \text{ Softening}; 10\% \text{ hardening}$ <p>[26]</p>		
Homogéneo , curva continua polinomio de grado 2	$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \left[ 1 - \beta_1 * \beta_2 * \left( \frac{f_R}{\sigma} \right)^2 \right]$ <p>[27]</p>	$w = k * \epsilon$ $k = \left( 50 + 0.25 * \beta_1 * \beta_3 * \frac{\phi_b}{\rho_r} \right) * \frac{50}{l} * \frac{1}{d}$	

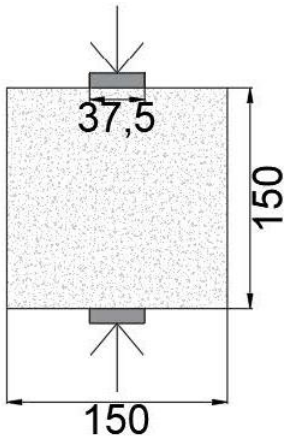
TIPO DE MODELO	ECUACIÓN CONSTITUTIVA	ECUACIÓN CINEMATICA	PRUEBA DE CARACTERIZACIÓN
	$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} - \frac{\beta_2 * f_R * (1 + n\rho_f)}{E * \rho_f} \quad [28]$		
	$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_s} \left[ 1 - \left( \frac{f_R}{\sigma} \right)^2 \right] \quad [15]$	$w = k * \varepsilon$ $k = \left( 50 + 0.25 * \beta_1 * \beta_3 * \frac{\phi_b}{\rho_f} \right) * \frac{50 * p}{d} + \alpha V_f$ $\alpha = 0.31 * \frac{l}{b} + 0.64 \quad \text{para } b > l$	
Heterogéneo, curva continua	$\sigma_f = \frac{\sigma}{V_f} - \frac{\sigma}{V_f} * \frac{ y }{w_{max}} \left[ 1 - \frac{E_2}{E} \right] \quad [33]$ $\varepsilon_f = \frac{\sigma}{E_2} \left\{ 1 - \frac{ y }{w_{max}} \left[ 1 - \frac{E_2}{E} \right] \right\}$ $w_{max} = \frac{\left[ 1 - \frac{E_2}{E} \right] \sigma}{\Delta \sigma V_f} \quad U_c = \frac{\sigma^2}{2E^*(x,y)}$ $U_c = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\pi [\hat{\rho}(x,y)]^2 \sigma^2}{4E} * \frac{V}{t_p}$ $\hat{\rho}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} * \sqrt{\frac{E - E^*(x,y)}{E^*(x,y)}} * \sqrt{\frac{t_p}{V}}$	No presenta	
Heterogéneo, curva continua, modelo de endurecimiento (hardening)	<p>Para interfaz (concreto):</p> $\sigma_c = D_c * (\varepsilon_c - \varepsilon_c^{\text{cr}}) \quad D_c = \begin{bmatrix} D_N & 0 \\ 0 & D_T \end{bmatrix}$ $f(\sigma_c, D) = \sigma_c^2 - (c_0 - \sigma_n \tan(\phi))^2 + (c_0 - f_R * \tan(\phi))^2$ $\varepsilon_c^{\text{cr}} = \lambda * \bar{n} \quad \bar{n} = A * B$ <p>Para la interfaz concreto -fibras:</p> $\sigma = w[\rho_i] \sigma_c + \sum_{j=0}^{n_f} w[\rho_j] (\tau [\varepsilon_N] u_N + \dot{\tau}_f [\dot{\gamma}_T] u_T)$ $w[\rho_i] = 1 \quad w[\rho_j] = [1 - \alpha_f V_f] V_{f,1}$ $V_{f,1} = \frac{V_f}{n_f} = \frac{A_f}{\alpha * A_c} \quad n_f = \alpha * \frac{V_f}{A_f} A_c$ $\alpha = \frac{\int_0^{n/2} \int_0^{n/2} l \cos(\theta) \cos(\omega) d\theta d\omega}{\left( \frac{\pi}{2} \right)^2 * l}$ $\frac{d\tau[x]}{dx} = -\frac{4\tau_a[x]}{d_f}$ $\tau_a[x] = \begin{cases} -k_E n[x] & n[x] \leq n_e \\ -\tau_{y,a} + k_s (n[x] - n_e) & n_e < n[x] \leq n_u \\ 0 & n[x] > n_u \end{cases}$ $V_{d,u} = k_{dow} * d^2 * \sqrt{ f_c  *  \sigma_{y,s} }$	$\varepsilon_N = \frac{u_N}{l_f} \quad \gamma_T = \frac{u_T}{l_f}$ $u_N = u * n_N \quad u_T = u * n_T$	

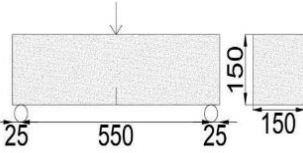
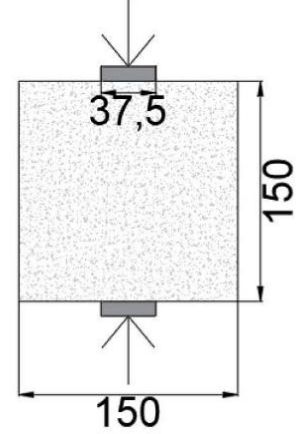
TIPO DE MODELO	ECUACIÓN CONSTITUTIVA	ECUACIÓN CINEMATICA	PRUEBA DE CARACTERIZACIÓN
Homogéneo, curva trilínea, modelo de ablandamiento (softening)	$\Delta\sigma = D * \Delta\varepsilon \quad [20]$ $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}\}^T$ $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}\}^T$ <p>No fisurado:</p> $D^{co} = \begin{bmatrix} D_{mf,e}^{co} & 0 \\ 0 & D_{s,e}^{co} \end{bmatrix} \quad D_{mf,e}^{co} = \frac{E}{1-\nu^2} * \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$ $D_{s,e}^{co} = FG_c * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ <p>Fisurado:</p> $D^{crco} = \begin{bmatrix} D_{mf}^{crco} & 0 \\ 0 & D_s^{crco} \end{bmatrix}$ $D_{mf}^{crco} = D_{mf,e}^{co} - D_{mf,e}^{co} [T^{cr}]^T (D^{cr} + T^{cr} D_{mf,e}^{co} [T^{cr}]^T)^{-1} T^{cr} D_{mf,e}^{co}$ $T^{cr} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}$ $D^{cr} = \begin{bmatrix} D_{II}^{cr} & 0 \\ 0 & D_{III}^{cr} \end{bmatrix}$ <p><math>D_{II}^{cr}</math> es definido por el diagrama esfuerzo normal - deformación, en donde la deformación de grieta ultima <math>\varepsilon_{n,u}^{cr}</math> es:</p> $\varepsilon_{n,u}^{cr} = \frac{2}{\xi_1 + \alpha_1 \xi_2 - \alpha_2 \xi_1 + \alpha_2} * \frac{G_f^I}{f_{eq} l_b}$ $\alpha_1 = \frac{\sigma_{n,2}^{cr}}{\sigma_{n,1}^{cr}} \quad \alpha_2 = \frac{\sigma_{n,3}^{cr}}{\sigma_{n,1}^{cr}} \quad \xi_1 = \frac{\varepsilon_{n,2}^{cr}}{\varepsilon_{n,u}^{cr}} \quad \xi_2 = \frac{\varepsilon_{n,3}^{cr}}{\varepsilon_{n,u}^{cr}}$ $D_{II}^{cr} = \frac{\beta_4}{1-\beta_4} G_c \quad \beta_4 = \left(1 - \frac{\varepsilon_n^{cr}}{\varepsilon_{n,u}^{cr}}\right)^{p_1}$ $D_s^{crco} = \begin{bmatrix} D_{III,sec}^{23} & 0 \\ 0 & D_{III,sec}^{31} \end{bmatrix} \quad D_{III,sec}^{23} = \frac{\tau_{23,max}}{Y_{23,max}}$ $D_{III,sec}^{31} = \frac{\tau_{31,max}}{Y_{31,max}} \quad Y_{23,p} = \frac{\tau_{23,p}}{G_c}$ $Y_{31,p} = \frac{\tau_{31,p}}{G_c} \quad Y_{23,u} = Y_{23,p} + \frac{2G_f^{III}}{\tau_{23,p} * l_b}$ $Y_{31,u} = Y_{31,p} + \frac{2G_f^{III}}{\tau_{31,p} * l_b}$	No presenta	

TIPO DE MODELO	ECUACIÓN CONSTITUTIVA	ECUACIÓN CINEMÁTICA	PRUEBA DE CARACTERIZACIÓN
Homogéneo , curva trilineal, modelo de ablandamiento (softening)	$\sigma = D * \epsilon \quad \Delta\sigma_i^{cr} = \{\Delta\sigma_n^{cr}, \Delta\tau_{t_1}^{cr}, \Delta\tau_{t_2}^{cr}\}^T \quad [29]$ $\sigma = \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \Delta\sigma_3, \Delta\tau_{23}, \Delta\tau_{31}, \Delta\tau_{12}\}^T \quad \Delta\sigma_i^{cr} = T^{cr} \Delta\sigma$ <p>Comportamiento lineal elástico para concreto entre grietas:</p> $D^{co} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$ <p>Para la zona de grieta:</p> $\Delta\sigma_i^{cr} = D^{cr} \Delta\epsilon_i^{cr} \quad D^{cr} = \begin{bmatrix} D_n^{cr} & 0 & 0 \\ 0 & D_{t_1}^{cr} & 0 \\ 0 & 0 & D_{t_2}^{cr} \end{bmatrix}$ <p><math>D_n^{cr}</math> corresponde al modulo de fractura de modo I, y se define en el diagrama esfuerzo de grieta normal vs deformación de grieta normal, donde la deformación de grieta normal ultima, <math>\epsilon_{n,u}^{cr}</math>, es:</p> $\epsilon_{n,u}^{cr} = \frac{2}{\xi_1 + \alpha_1 \xi_2 - \alpha_2 \xi_1 + \alpha_2} * \frac{G_{f,n}}{f_{eq} l_b}$ $\alpha_1 = \frac{\sigma_{n,2}^{cr}}{\sigma_{n,1}^{cr}} \quad \alpha_2 = \frac{\sigma_{n,3}^{cr}}{\sigma_{n,1}^{cr}} \quad \xi_1 = \frac{\epsilon_{n,2}^{cr}}{\epsilon_{n,u}^{cr}} \quad \xi_2 = \frac{\epsilon_{n,3}^{cr}}{\epsilon_{n,u}^{cr}}$ <p><math>D_{t_1}^{cr}</math> y <math>D_{t_2}^{cr}</math> son los modulos de modo de fractura por deslizamiento, pueden ser obtenidos con:</p> $D_{t_1}^{cr} = D_{t_2}^{cr} = \frac{\beta_4}{1 - \beta_4} G_c \quad \beta_4 = \left(1 - \frac{\epsilon_n^{cr}}{\epsilon_{n,u}^{cr}}\right)^{p_4}$ $\gamma_{t_1,p}^{cr} = \gamma_{t_2,p}^{cr} \frac{\tau_{t,p}^{cr}}{D_{t_1}^{cr}} \quad \gamma_{t_1,u}^{cr} = \gamma_{t_2,u}^{cr} \frac{2G_{f,s}}{\tau_p^{cr} l_b}$ <p>Para el concreto agrietado:</p> $\Delta\sigma = D^{cco} \Delta\epsilon$ $D^{cco} = \left( D^{co} - D^{co} [\tilde{T}^{cr}]^T \left( \tilde{D}^{cr} + \tilde{T}^{cr} D^{co} [\tilde{T}^{cr}]^T \right)^{-1} \tilde{T}^{cr} D^{co} \right)$ $\tilde{D}^{cr} = \begin{bmatrix} D_n^{cr} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{t_1}^{cr} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_{t_2}^{cr} \end{bmatrix}$ $\tilde{T}^{cr} = \{T_1^{cr}, T_2^{cr}, \dots, T_{n_{cr}}^{cr}\}^T$	$\epsilon = \Delta\epsilon^{co} + \Delta\epsilon^{cr}$ $\Delta\epsilon_i^{cr} = \{\Delta\epsilon_n^{cr}, \Delta\gamma_{t_1}^{cr}, \Delta\gamma_{t_2}^{cr}\}^T$ $\Delta\epsilon^{cr} = \{\Delta\epsilon_1^{cr}, \Delta\epsilon_2^{cr}, \Delta\epsilon_3^{cr}, \Delta\gamma_{23}^{cr}, \Delta\gamma_{31}^{cr}, \Delta\gamma_{12}^{cr}\}^T$ $\Delta\epsilon^{cr} = [T^{cr}]^T \Delta\epsilon_i^{cr}$ $T^{cr} = \begin{bmatrix} a_{11}^{cr} & a_{12}^{cr} & a_{13}^{cr} & 2a_{12}a_{13} & 2a_{11}a_{13} \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{13}a_{23} & a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22} & a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21} \\ a_{11}a_{31} & a_{12}a_{32} & a_{13}a_{33} & a_{13}a_{32} + a_{12}a_{33} & a_{12}a_{31} + a_{11}a_{32} \end{bmatrix}$	

TIPO DE MODELO	ECUACIÓN CONSTITUTIVA	ECUACIÓN CINEMATICA	PRUEBA DE CARACTERIZACIÓN
Homogéneo, curva trilineal, modelo de ablandamiento (softening)	$\sigma_1 = 0.7 * f_{ctm, f1} (1.6 - d) \quad [30]$ $\sigma_2 = 0.45 * k_h * f_{R,1}$ $\sigma_3 = 0.37 * k_h * f_{R,4}$ $\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_{HRF}}; \epsilon_2 = \epsilon_1 + 0.1\%; \epsilon_3 = \epsilon_u = 25\%$	No presenta	
Heterogéneo, curva por partes, modelo de ablandamiento (softening)	<p>Concreto: [21][35]</p> $\sigma = \begin{cases} (1-R)\bar{\sigma} & \text{si } \bar{\sigma}_n > 0 \\ \bar{\sigma} & \text{si } \bar{\sigma}_n \leq 0 \end{cases} \quad \bar{\sigma} = D : \epsilon$ $\bar{\sigma}_n - r \leq 0$ $R = 1 - \frac{f_R}{r} * e^{-\frac{r}{E_c} \bar{\sigma}_n} \quad r = \max[\bar{\sigma}_n]$ <p>Interacción fibras concreto:</p> $\tau(s) = \begin{cases} \tau_{max} \left(\frac{n}{n_1}\right)^\alpha & \text{si } n \leq n_1 \\ \tau_{max} - \frac{(\tau_{max} - \tau_f)(n - n_1)}{n_2 - n_1} & \text{si } n_1 \leq n \leq n_2 \\ \tau_f & \text{si } n > n_2 \end{cases}$	No presenta	
Heterogéneo, curva trilineal, modelo de ablandamiento (softening)	$\sigma_c = \begin{cases} E_c \epsilon & \epsilon \leq \epsilon_{fc} \\ (1-d)E_c \epsilon & \epsilon_{fc} \leq \epsilon \leq \epsilon^* \\ (1-d)E_c (\epsilon - \epsilon^p) & \epsilon^* \leq \epsilon \leq \epsilon_{tu} \end{cases} \quad [36][37]$ $B_T = \frac{f_R - \sigma_{fc}}{E_c \epsilon^* \exp\left(\frac{\epsilon_{fc}}{\epsilon^*} - 1\right) - E_c \epsilon_{fc}}$ $d = \begin{cases} 1 - \frac{\epsilon_{fc}}{\epsilon} (1 - B_T) - B_T \exp\left[1 - \frac{\epsilon_{fc}}{\epsilon}\right] & \epsilon_{fc} \leq \epsilon \leq \epsilon^* \\ 1 - \frac{\sum \alpha_i(\delta) N_i A_{ft} E_{ft}}{A_c E_c} & \epsilon^* \leq \epsilon \leq \epsilon_{tu} \end{cases}$ $\epsilon^p = \begin{cases} \delta & 0 \leq \epsilon \leq \epsilon^* \\ \frac{\delta}{L} - \frac{d \sigma_B}{(1-d)E_c} \epsilon^* & \epsilon^* \leq \epsilon \end{cases}$ $\epsilon_{tu} = \frac{\min\left(\frac{L_{f1}}{16}, \frac{L_{f2}}{16}\right) \text{ ó } \frac{L_{f1}}{16}}{L} + \frac{f_R}{E_c}$	<p>Relación desplazamiento de apertura de grieta - deformación para sistema mono fibra:</p> $\delta = \frac{L_{f1}}{2} \frac{E_c}{g_{s1} \sigma_{01}} + \sqrt{\left(\frac{g_{s1} \sigma_{01}}{E_c} \frac{L_{f1}}{4}\right)^2 - \frac{g_{s1} \sigma_{01}}{E_c} \left(\frac{g_{s1} \sigma_{01}}{E_c} - \epsilon\right)}$ <p>para <math>\epsilon &gt; \epsilon^*</math></p> <p>Relación desplazamiento de apertura de grieta - deformación para FRC:</p> $\delta = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{para } \epsilon > \epsilon^*$ $A = \frac{4}{E_c} \left(\frac{g_{s1} \sigma_{01}}{L_{f1}^2} + \frac{g_{s2} \sigma_{02}}{L_{f2}^2}\right); B = \left(\frac{4}{L_{f1}} + \frac{4}{L_{f2}} - \frac{1}{L}\right)$ $C = \frac{g_{s1} \sigma_{01} + g_{s2} \sigma_{02}}{E_c} - \epsilon$	

TIPO DE MODELO	ECUACIÓN CONSTITUTIVA	ECUACIÓN CINEMATICA	PRUEBA DE CARACTERIZACIÓN
Heterogéneo, curva trilínea, modelo de ablandamiento (hardening)	$\sigma_c = \begin{cases} E_c \varepsilon & \varepsilon \leq \varepsilon_{fc} \\ (1-d)E_c \varepsilon & \varepsilon_{fc} \leq \varepsilon \leq \varepsilon^* \\ (1-d)E_c (\varepsilon - \varepsilon^p) & \varepsilon^* \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{tu} \\ 0 & \varepsilon \leq \varepsilon_{fc} \\ 1 - \frac{\sum \alpha_i(\delta) N_i A_{ft} E_{ft}}{A_c E_c} & \varepsilon_{fc} \leq \varepsilon \end{cases} \quad [36][37]$ $d = \begin{cases} 0 & \varepsilon \leq \varepsilon_{fc} \\ \left[ 1 - \frac{\sigma_{B0} - f_R}{(1-d)E_c (\varepsilon^* - \varepsilon_{fc})} \right]^* & \varepsilon_{fc} < \varepsilon < \varepsilon^* \\ \frac{\delta}{L} - \frac{d \sigma_B}{(1-d)E_c} & \varepsilon^* \leq \varepsilon \end{cases}$ $\varepsilon^p = \frac{\min\left(\frac{L_{f1}}{16}, \frac{L_{f2}}{16}\right) \delta \frac{L_{f1}}{16} + \sigma_{B0}}{L} + \frac{\sigma_{B0}}{E_c}$	Relación desplazamiento de apertura de grieta - deformación para sistema mono fibra: $\delta = \frac{L_{f1}}{2} \cdot \frac{E_c}{g_{s1} \sigma_{01}} \cdot \left[ \left( \frac{g_{s1} \sigma_{01}}{E_c} - \frac{L_{f1}}{4} \right) + \sqrt{\left( \frac{g_{s1} \sigma_{01}}{E_c} - \frac{L_{f1}}{4} \right)^2 - \frac{g_{s1} \sigma_{01}}{E_c} \left( \frac{g_{s1} \sigma_{01}}{E_c} - \varepsilon \right)} \right]$ para $\varepsilon > \varepsilon^*$ Relación desplazamiento de apertura de grieta - deformación para FRC: $\delta = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{para } \varepsilon > \varepsilon^*$ $A = \frac{4}{E_c} \left( \frac{g_{s1} \sigma_{01}}{L_{f1}^2} + \frac{g_{s2} \sigma_{02}}{L_{f2}^2} \right); \quad B = \left( \frac{4}{L_{f1}} + \frac{4}{L_{f2}} - \frac{1}{L} \right)$ $C = \frac{g_{s1} \sigma_{01} + g_{s2} \sigma_{02}}{E_c} - \varepsilon$	
Homogéneo, curva cuatrilínea, modelo de ablandamiento (Softening)	$\sigma_1 = f_{ct,a} = 0.6 * f_{ct,f1,a} \quad [31]$ $\sigma_2 = f_{ctR1,a} = 0.45 * f_{R1,a}$ $\sigma_3 = f_{ctR3,a} = k_1 (0.5 * f_{R3,a} - 0.2 f_{R1,a})$ $\varepsilon_2 = 0.1 + 1000 * \frac{f_{ct,a}}{E_{c,0}}$ $\varepsilon_3 = \frac{2.5}{l_{cs}}; \quad l_{cs}: \text{Longitud característica}$ $\varepsilon_u = [20\% \text{ Flexión}; 10\% \text{ Tracción pura}]$	No presenta	
Homogéneo, curva cuatrilínea, modelo de endurecimiento (hardening)	$f_{ctm} = f_{ctk0,m} \left( \frac{f_{ck}}{f_{ck0}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad f_{fts} = 0.45 f_{R1} \quad [26]$ $f_{ftu} = k [f_{fts} - \left( \frac{w_u}{CMOD_3} \right) (f_{fts} - 0.5 f_{R3} + 0.2 f_{R1})]$ $\varepsilon_{SLU} = \frac{w_u}{l_{cs}} = \min \left( \varepsilon_{ftu}, \frac{2.5}{l_{cs}} = \frac{2.5}{y} \right)$ $\varepsilon_{Fu} = [20\% \text{ softening}; 10\% \text{ hardening}]$	No presenta	

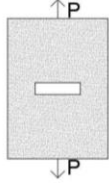
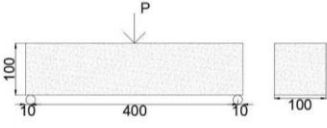
TIPO DE MODELO	ECUACIÓN CONSTITUTIVA	ECUACIÓN CINEMATICA	PRUEBA DE CARACTERIZACIÓN
Heterogéneo, curva pentalinear, modelo de ablandamiento (softening)	<p>Concreto plano: [38]</p> <p>Modelo Continuo (Mazars):</p> $\epsilon_c = \frac{1}{E * (1 - D)} * [(1 + \mu)\sigma - \mu T_r(\sigma)]$ $D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c$ $\sigma_c = \frac{E * (1 - D)}{1 + \nu} \left[ \epsilon + \frac{\nu}{1 - 2\nu} Tr(\epsilon) \right]$ $D_t = 1 - \frac{Y_0(1 - A_t)}{E} - A_t * e^{-\beta_t(s - \gamma_0)} \quad \alpha_t = \sum_i \frac{\epsilon_{ci}(\epsilon_i)}{\epsilon^2}$ $D_c = 1 - \frac{Y_0(1 - A_c)}{E} - A_c * e^{-\beta_c(s - \gamma_0)} \quad \alpha_c = \sum_i \frac{\epsilon_{ci}(\epsilon_i)}{\epsilon^2}$ $\alpha_t + \alpha_c = 1 \quad \{\epsilon_i\} = \frac{\epsilon_t +  \epsilon_c }{2} \quad \hat{\epsilon} = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\epsilon_i +  \epsilon_c }{2} \right)^2}$ <p>Interacción concreto fibras (atraves del ensayo de extracción "Pull out"):</p> $\sigma = \frac{P}{A_{fiber} * \cos \theta} \quad \sigma_1 = \frac{P_{s01}}{A_{fiber}} \quad \epsilon_1 = \frac{w_{s01} * \cos \theta}{L}$ $\epsilon_2 = \epsilon_1 + \frac{(w_{s01} * \cos \theta + \frac{L_d}{L_c} * (w_{s01} - w_{s01}) * \cos \theta + \Delta w_{s01}) * \cos \theta}{L_{elem}}$ $\sigma_2 = \frac{P_{s01} * \cos \theta * L_{eff} * \left( \frac{L_e - L_d}{L_e} + \frac{P_{s02} * L_d}{P_{s01} * L_e} \right) + \mu * D_{p1}}{A_{fiber} * \cos \theta}$ $\epsilon_3 = \epsilon_1 + \frac{(w_{s02} * \cos \theta + \Delta w_{s02}) * \cos \theta}{L_{elem}} - \frac{w_{s01} \cos \theta}{L_{elem}}$ $\sigma_3 = \frac{P_{s02} * \cos \theta * L_{eff} + \mu * D_{p1}}{A_{fiber} * \cos \theta}$ $\epsilon_4 = \epsilon_1 + \frac{L_e - (L_{sp1} + d) * \cos \theta}{L_{elem}} - \frac{w_{s01} \cos \theta}{L_{elem}}$ $\sigma_4 = \frac{\mu * D_{p1}}{A_{fiber} * \cos \theta}$ $\epsilon_5 = \epsilon_1 + \frac{(L_e - L_{sp1}) * \cos \theta}{L_{elem}} - \frac{w_{s01} \cos \theta}{L_{elem}}$ $\sigma_5 = 0$	$\epsilon = \begin{cases} \frac{w * \cos \phi}{L} & \text{si } w \leq w_1 \\ \frac{w_1 * \cos \phi}{L} + \frac{(w - w_1) * \cos \phi}{L_{elem}} & \text{si } w \geq w_1 \end{cases}$	

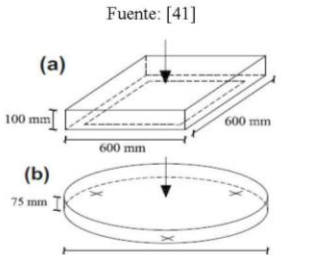
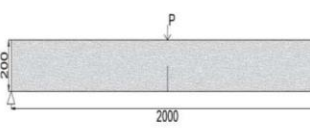
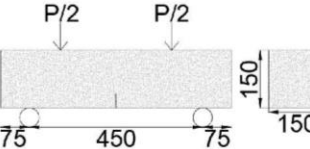
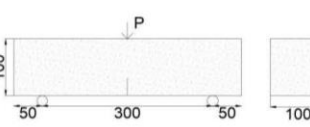
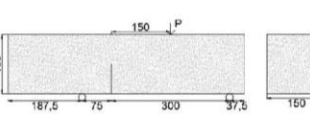
TIPO DE MODELO	ECUACIÓN CONSTITUTIVA	ECUACIÓN CINEMATICA	PRUEBA DE CARACTERIZACIÓN
Homogéneo, curva pentalineal, modelo de ablandamiento (softening)	<p>[26][32]</p> $f_{ctm} = f_{ctk0,m} \left( \frac{f_{ck}}{f_{ck0}} \right)^{\frac{2}{3}}$ $f_{Rts} = 0.45 f_{R1}$ $f_{Rtu} = k [f_{Rts} - \left( \frac{w_{it}}{CMOD_3} \right) (f_{Rts} - 0.5f_{R3} + 0.2f_{R1})]$ $\varepsilon_{SLU} = \frac{w_{it}}{l_{cs}} = \min \left( \varepsilon_{Fu}, \frac{2.5}{y} \right)$ $\varepsilon_{Fu} = [20\% \text{ softening}; 10\% \text{ hardening}]$	No presenta	
Heterogéneo, curva octalineal, modelo de ablandamiento (softening) [Para concreto]	<p>Concreto plano: [38]</p> <p>Modelo Continuo (Mazars):</p> $\varepsilon_c = \frac{1}{E * (1 - D)} * [(1 + \mu)\sigma - \mu T_r(\sigma)I]$ $D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c$ $\sigma_c = \frac{E * (1 - D)}{1 + \nu} \left[ \varepsilon + \frac{\nu}{1 - 2\nu} Tr(\varepsilon)I \right]$ $D_t = 1 - \frac{Y_0(1 - A_t)}{\varepsilon} - A_t * e^{-B_t(\varepsilon - \varepsilon_0)} \quad \alpha_t = \sum_i \frac{\varepsilon_{it} \langle \varepsilon_i \rangle}{\varepsilon^2}$ $D_c = 1 - \frac{Y_0(1 - A_c)}{\varepsilon} - A_c * e^{-B_c(\varepsilon - \varepsilon_0)} \quad \alpha_c = \sum_i \frac{\varepsilon_{ci} \langle \varepsilon_i \rangle}{\varepsilon^2}$ $\alpha_t + \alpha_c = 1 \quad \langle \varepsilon_i \rangle = \frac{\varepsilon_i +  \varepsilon_i }{2} \quad \varepsilon = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\varepsilon_i +  \varepsilon_i }{2} \right)^2}$		

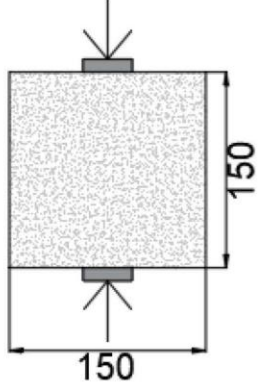
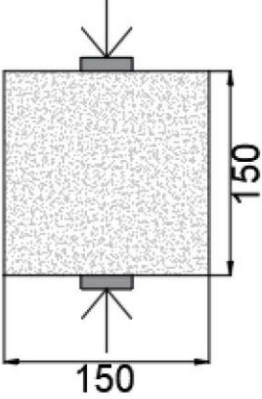
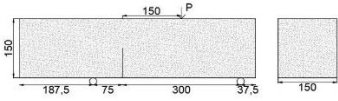
TIPO DE MODELO	ECUACIÓN CONSTITUTIVA	ECUACIÓN CINEMATICA	PRUEBA DE CARACTERIZACIÓN
Heterogéneo, curva octalinea, modelo de ablandamiento (softening) [Para concreto con fibras]	Interacción concreto fibras (atraves del ensayo de extracción "Pull out"): $\sigma_1 = \frac{P_{s01}}{A_{fiber}} \quad \varepsilon_1 = \frac{w_{s01} * \cos \phi}{L}$ $\sigma_2 = \frac{(P_{s01} * L_{eff(H2)} + \Delta P_{H01} * \frac{L_e - 6L_{SP1}}{L_e}) * \cos \phi + \mu * D_{F1}}{A_{fiber} * \cos \phi}$ $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \frac{(w_{s01} + \Delta w_{H01} * \cos \phi * \frac{L_e - 6L_{SP1}}{L_e} + \Delta w_{SP1}) * \cos \phi}{L_{elem}}$ $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \frac{(w_{s01} + \Delta w_{H01} * \cos \phi + \Delta w_{SP1} + \Delta w_{SP2}) * \cos \phi}{L_{elem}}$ $\sigma_3 = \frac{(P_{s01} * L_{eff(H3)} + \Delta P_{H01}) * \cos \phi + \mu * D_{F2}}{A_{fiber} * \cos \phi}$ $\varepsilon_4 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \frac{\Delta w_{H01} * \cos^2 \phi}{L_{elem}} - \frac{w_{s01} \cos \phi}{L_{elem}}$ $\sigma_4 = \frac{(P_{s01} * L_{eff(H4)} + \sum_{i=1}^2 \Delta P_{H0i}) * \cos \phi + \mu * D_{F2}}{A_{fiber} * \cos \phi}$ $\varepsilon_5 = \varepsilon_1 + \varepsilon_4 + \frac{\Delta w_{H03} * \cos^2 \phi}{L_{elem}} - \frac{w_{s01} \cos \phi}{L_{elem}}$ $\sigma_5 = \frac{(P_{s01} * L_{eff(H5)} + \sum_{i=1}^3 \Delta P_{H0i}) * \cos \phi + \mu * D_{F2}}{A_{fiber} * \cos \phi}$ $\varepsilon_6 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5 + \frac{\Delta w_{H04} * \cos^2 \phi}{L_{elem}} - \frac{w_{s01} \cos \phi}{L_{elem}}$ $\sigma_6 = \frac{(P_{s02} * L_{eff(H6)} + \sum_{i=1}^4 \Delta P_{H0i}) * \cos \phi + \mu * D_{F2}}{A_{fiber} * \cos \phi}$ $\varepsilon_7 = \varepsilon_1 + \frac{(L_e - (L_{SP1} + L_{SP2} + d)) * \cos \phi}{L_{elem}} - \frac{w_{s01} \cos \phi}{L_{elem}}$ $\sigma_7 = \frac{(\sum_{i=1}^4 \Delta P_{H0i}) * \cos \phi + \mu * D_{F2}}{A_{fiber} * \cos \phi}$ $\varepsilon_8 = \varepsilon_1 + \frac{(L_e - (L_{SP1} + L_{SP2})) * \cos \phi}{L_{elem}} - \frac{w_{s01} \cos \phi}{L_{elem}}$ $\sigma_8 = 0$	$\varepsilon = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{w * \cos \phi}{L} & \text{si } w \leq w_1 \\ \frac{w_1 * \cos \phi}{L} + \frac{(w - w_1) * \cos \phi}{L_{elem}} & \text{si } w \geq w_1 \end{array} \right\}$	

**Apéndice C. Cuadro comparativo con los modelos constitutivos que involucran las variables esfuerzo – ancho de grieta.**

En este Anexo se presenta los modelos con las variables esfuerzo – ancho de grieta ( $\sigma - w$ ), agrupando según: (i) tipo de modelo, es decir, si es homogéneo o heterogéneo y si la curva es continua o discontinua; (ii) ecuación constitutiva, que define el modelo de fractura del concreto reforzado con fibras; (iii) ecuación cinemática, que relaciona deformaciones con desplazamientos o ancho de grieta; y por último, (iv) prueba de caracterización, en donde se realiza una gráfica del ensayo requerido para obtener los parámetros del modelo, en este análisis sistemático se encontró 10 modelos, que se agruparon como se explica a continuación:

TIPO DE MODELO	ECUACIÓN CONSTITUTIVA	ECUACIÓN CINEMATICA	PRUEBA DE CARACTERIZACIÓN
Homogéneo, Curva continua (exponencial), modelo ablandamiento (softening)	<p style="text-align: right;">[18][39]</p> $\frac{\sigma}{\sigma_{max}} = \left[ 1 - \frac{w}{w_{max}} \right]^2 e^{-M \left[ \frac{w}{w_{max}} \right]^N}$ $\sigma_{max} = \beta * \tau * V_f * \frac{l}{d}$	No presenta	
Homogéneo, Curva continua	<p style="text-align: right;">[40][41]</p> $w(x) = \frac{8}{E} \int_x^a \left\{ \int_0^{a'} G(x', a', b) [\sigma(x') - \tau(x')] dx' \right\} * G(x, a, b) da'$ $K_a = 2 * \int_0^a G(x, a, h) * \sigma_a(x) dx$ $K_b = -2 * \int_0^a G(x, a, h) * \tau(w(x)) dx$ $G(x, a, b) = \frac{h_1 \left( \frac{x}{a}, \frac{a}{b} \right)}{\sqrt{\pi a} * \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{1/2}}$ $h_1 \left( \frac{x}{a}, \frac{a}{b} \right) = \frac{g \left( \frac{x}{a}, \frac{a}{b} \right)}{\left( 1 - \frac{a}{b} \right)^{3/2}}$ $r = \frac{x}{a}; z = \frac{a}{b}$ $g(r, z) = g_1(z) + r g_2(z) + r^2 g_3(z) + r^3 g_4(z)$ $g_1(z) = 0.46 + 3.06z + 0.84(1-z)^5 + 0.66z^2(1-z)^2$ $g_3(z) = 6.17 - 28.22z + 34.54z^2 - 14.39z^3 - (1-z)^3 - 5.88(1-z)^5 - 2.64z^2(1-z)^2$ $g_4(z) = -6.63 + 25.16z - 31.04z^2 + 14.41z^3 + 2(1-z)^3 + 5.04(1-z)^5 + 1.98z^2(1-z)^2$	No presenta	

TIPO DE MODELO	ECUACIÓN CONSTITUTIVA	ECUACIÓN CINEMATICA	PRUEBA DE CARACTERIZACIÓN
Homogéneo, Curva bilineal modelo softening	$\sigma = \begin{cases} E * \varepsilon & w = 0 \\ \sigma_{w(w)} = g(w) * f_R & w \geq 0 \end{cases} \quad [19]$ $g(w) = b_l - a_l w = \begin{cases} 1 - a_1 w, & 0 \leq w \leq w_1 \\ b_2 - a_2 w, & w_1 \leq w \leq w_2 \end{cases}$	No presenta	<p>Fuente: [41]</p> 
	$\sigma(w) = \begin{cases} f_R \left(1 - \frac{w}{w_c}\right) & 0 \leq w \leq w_1 \\ f'_R \left(1 - \frac{w}{w_c}\right) & w_1 \leq w \leq w_c \\ 0 & w > w_c \end{cases} \quad [42]$	No presenta	
	$\sigma_1 = f_{FTS} = 0.45 * f_{eq1}$ $\sigma_2 = f_{FTu} = k \left[ f_{FTS} - \left( \frac{W_u}{W_{I2}} \right) (f_{FTS} - 0.5 f_{eq2} + 0.2 f_{eq1}) \right]$ $k = [0.7 \text{ tensión pura}; 1 \text{ otros casos}]$ $\varepsilon_2 = \varepsilon_u = 20\% \text{ Softening}; 10\% \text{ hardening} \quad [25]$	$\varepsilon_u = \frac{W_u}{l_{cs}}$	
Homogéneo, Curva trilineal, modelo softening	$\sigma_{tensile\ stress} = \begin{cases} \frac{f_t - f_1}{w_1} w + f_t & \text{para } w < w_1 \\ f_1 & \text{para } w_1 < w < w_2 \\ \frac{f_1}{w_c - w_2} (w - w_c) & \text{para } w_2 < w < w_c \\ 0 & \text{para } w_c < w \end{cases} \quad [43]$ $f_t = a_{ft} V_f + b_{ft} \quad f_1 = a_{f1} V_f + b_{f1}$ $w_1 = b_{w1} \quad w_2 - w_1 = a_{w2-w1} (1 - b_{w2-w1} e^{-V_f})$ $w_c = \begin{cases} \frac{l}{2} & V_f < b_{wc} \\ \left( \frac{l}{2} - a_{wc} \right) * e^{-(V_f - b_{wc})} + a_{wc} e^{-(V_f - b_{wc})} & V_f \geq b_{wc} \end{cases}$		
	$\sigma = \begin{cases} f_R + \left( \frac{\sigma_k - f_R}{w_k} \right) w & 0 < w < w_k \quad [44][45][46] \\ \sigma_k + \left( \frac{\sigma_r - \sigma_k}{w_r - w_k} \right) (w - w_k) & w_k < w \leq w_r \\ \sigma_r + \left( \frac{-\sigma_r}{w_f - w_k} \right) (w - w_r) & w_r < w \leq w_f \\ 0 & w > w_f \end{cases}$		

TIPO DE MODELO	ECUACIÓN CONSTITUTIVA	ECUACIÓN CINEMATICA	PRUEBA DE CARACTERIZACIÓN
Heterogéneo, Curva trilínea, modelo softening	$\sigma_{HRFP}(w) = \sigma_c(w) + \sigma_f(w) \quad [47]$ $\sigma_c(w) = f_{ctm} * e^{-kw}$ $f_{ctm} = \begin{cases} 0.3(f_R)^{\frac{2}{3}} & 12 \leq f_R \leq 50 \text{ MPa} \\ 2.12 \ln\left(1 + \frac{f_R + 8}{10}\right) & 50 \leq f_R \leq 90 \text{ MPa} \end{cases}$ $\sigma_f(w) = \frac{\sum P_{N;\theta_i}(w)}{A_{sec}} \quad P_{N;\theta_i}(w) = P_{\theta_i}(w) * N_{\theta_i}$ $P(\theta_i) = \begin{cases} f(\theta_i)(1.29 - 0.38\eta_\theta) & \eta_\theta < 0.75 \\ f(\theta_i) & \eta_\theta \geq 0.75 \end{cases}$ $\tau^* = \frac{\int_0^{Le} \tau(s) ds}{Le} \quad P_{s01} = \int_0^{Le} \tau^* \pi d dx \quad P_{s02} = \frac{P_{s01}}{2}$ $N_{\theta_i} = P(\theta_i) * N_\theta$ $N_f = \frac{A_{sec}}{A_f} * V_f * \eta_\theta \quad \eta_\theta = \eta_{Mi} + \Delta\eta_{ci} + \Delta\eta_{Di} + \Delta\eta_{FWi}$		
Heterogéneo, Curva cuadrilínea, modelo softening	$\sigma_{HRFP}(w) = \sigma_c(w) + \sigma_f(w) \quad [47]$ $\sigma_c(w) = f_{ctm} * e^{-kw}$ $f_{ctm} = \begin{cases} 0.3(f_R)^{\frac{2}{3}} & 12 \leq f_R \leq 50 \text{ MPa} \\ 2.12 \ln\left(1 + \frac{f_R + 8}{10}\right) & 50 \leq f_R \leq 90 \text{ MPa} \end{cases}$ $\sigma_f(w) = \frac{\sum P_{N;\theta_i}(w)}{A_{sec}} \quad P_{N;\theta_i}(w) = P_{\theta_i}(w) * N_{\theta_i}$ $P(\theta_i) = \begin{cases} f(\theta_i)(1.29 - 0.38\eta_\theta) & \eta_\theta < 0.75 \\ f(\theta_i) & \eta_\theta \geq 0.75 \end{cases}$ $\tau^* = \frac{\int_0^{Le} \tau(s) ds}{Le} \quad P_{s01} = \int_0^{Le} \tau^* \pi d dx \quad P_{s02} = \frac{P_{s01}}{2}$ $N_f = \frac{A_{sec}}{A_f} * V_f * \eta_\theta \quad N_{\theta_i} = P(\theta_i) * N_\theta$ $\eta_\theta = \eta_{Mi} + \Delta\eta_{ci} + \Delta\eta_{Di} + \Delta\eta_{FWi}$		
Homogéneo, Curva cuadrilínea, modelo softening	$\sigma = \begin{cases} f_R + \left(\frac{\sigma_k - f_R}{w_k}\right)w & 0 < w < w_k \\ \sigma_k + \left(\frac{\sigma_r - \sigma_k}{w_r - w_k}\right)(w - w_k) & w_k < w \leq w_r \\ \sigma_r & w_r < w \leq w_t \\ \sigma_r + \left(\frac{-\sigma_r}{w_f - w_t}\right)(w - w_t) & w_t < w \leq w_f \\ 0 & w > w_f \end{cases} \quad [44]$		

**Apéndice D. Cuadro comparativo con los modelos constitutivos que involucran en sus variables un enfoque al modelo de Irwin.**

Se presenta los modelos, los cuales involucran un enfoque de la mecánica de fractura, específicamente el modelo de Irwin, que analiza la relación de las variables, carga – desplazamiento de apertura en la boca de la grieta (P – CMOD), carga – desplazamiento de apertura en la punta de la grieta (P – CTOD) y factor de intensidad de esfuerzos ( $K_I^{s,ic}$ ), los cuales se agruparon según: (i) tipo de variable (P – CMOD, P – CTOD,  $K_I^{s,ic}$ ); (ii) tipo de modelos, si es homogéneo o heterogéneo; (iii) ecuación constitutiva; (iv) ecuación cinemática y (v) prueba de caracterización. En este análisis se encontró 7 modelos, que se listan a continuación:

VARIABLES	TIPO DE MODELO	ECUACIÓN CONSTITUTIVA	ECUACIÓN CINEMATICA	PRUEBA DE CARACTERIZACIÓN
P – CMOD	Heterogéneo	<p>Para <math>P^M</math>: <math>P = P^M + P_k^f + P_s^f</math> [48]</p> <p><math>CMOD^s</math>: <math>0.5K_{Ic}^s &gt; K_I</math></p> $CMOD = \begin{cases} \frac{N}{N-1} * CMOD^s; & 0.5K_{Ic}^s \leq K_I \leq K_{Ic}^c \\ CMOD^s * \left(\frac{M}{M-1}\right) + CMOD_{max} * \left(\frac{M-N}{NM-N}\right); & K_I = K_{Ic}^c \end{cases}$ <p><math>CMOD^e = \frac{6Psa}{b^2tE'} * V_1\left(\frac{a}{b}\right)</math>; <math>a = a_0 + l_{ei}</math>; <math>E' = \frac{E}{(1-\nu^2)}</math></p> $V_1\left(\frac{a}{b}\right) = 0.76 - 2.28A + 3.87A^2 - 2.04A^3 + \frac{0.66}{(1-A)^2}$ ; $A = \frac{a}{b}$ $K_I = \frac{1.5Ps}{b^2t} F_1\left(\frac{a}{b}\right) \sqrt{\pi a}$ $F_1\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} * \frac{1.99 - A(1-A)(2.15 - 3.93A + 2.7A^2)}{(1+2A)(1-A)^{3/2}}$ <p>Para <math>P_k^f</math>:</p> <p><math>CMOD^s</math>: <math>0.5K_{Ic}^s &gt; K_I^f</math></p> $CMOD = \begin{cases} \frac{N}{N-1} * CMOD^s; & 0.5K_{Ic}^s \leq K_I^f \leq K_{Ic}^c \\ CMOD^s * \left(\frac{M}{M-1}\right) + CMOD_{max} * \left(\frac{M-N}{NM-N}\right); & K_I^f = K_{Ic}^c \end{cases}$ $K_I^f = \int_{a_0/n}^1 \frac{2\tau(n)F(X,Y)}{\sqrt{\pi a}} dn$ $F(X,Y) = \frac{3.52(1-X)}{(1-Y)^{3/2}} * \frac{4.35 - 5.28X}{(1-Y)^{3/2}} + \left[ \frac{1.30 - 0.30(X)^2}{\sqrt{1-X^2}} + 0.83 - 1.76X \right] [1]$ <p><math>X = \frac{c}{a}</math>; <math>Y = \frac{a}{b}</math></p> $\frac{\tau(n)}{\tau_{max}} = \left(1 - \frac{n}{n_{max}}\right)^m$ ; $0 \leq n \leq n_{max}$ $\tau_{max} = 1.655 * V_f$ <p>Para <math>P_s^f</math>:</p> $F_T = \int_0^{l_e} t\tau(n)dn + \int_{l_e}^{it} t\sigma_c(n)dn$ $P_s^f = A \left\{ F_T * \left[ l_p + \frac{2}{3} * (b - l_t - a_0) \right] \right\} * \frac{1}{S}$	$CTOD = CMOD^s * \left\{ \left(1 - \frac{a_0}{a}\right)^2 + \left(-1.149 * \frac{a}{b} + 1.081\right) \left[ \frac{a_0}{a} - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$	

VARIABLES	TIPO DE MODELO	ECUACIÓN CONSTITUTIVA	ECUACIÓN CINEMATICA	PRUEBA DE CARACTERIZACIÓN
P-CMOD	Heterogéneo	$K_{IC}^S = \frac{3 * P_{peak} * S}{2 * W^2 * B} * \sqrt{\pi a} * F(\beta) \quad [49]$ $F(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} * \frac{1.99 - \beta(1 - \beta)(2.15 - 3.93\beta + 2.7\beta^2)}{(1 + 2\beta)(1 - \beta)^{3/2}}$ $a = a_0 + \Delta a_c$ $D = (D_c^{-1} + D_{c,cr1}^{-1})^{-1}$ $\sigma = D\epsilon$		
P-CTOD	Homogéneo	$K_{IC}^S = 3(P + 0.5W_h) \frac{s\sqrt{\pi a} g_1(\frac{a}{b})}{2b^2 t} \quad [50]$ $W_h = W_{h0} * \frac{S}{L}$ $g_1(\frac{a}{b}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} * \frac{[2.15 - 3.93\frac{a}{b} + 2.7(\frac{a}{b})^2]}{(1 + \frac{2a}{b})(1 - \frac{a}{b})^{3/2}}$ $CTOD = \frac{6(P + 0.5W_h) * s * a}{Eb^2 t} * g_2(\frac{a}{b})$ $* g \left\{ (1 - \beta)^2 + (1.081 - 1.149\frac{a}{b})(\beta - \beta^2) \right\}^{1/2}$ $\beta = \frac{a_0}{a}$ $g_2(\alpha_0) = 0.76 - 2.28\alpha_0 + 3.78\alpha_0^2 - 2.04\alpha_0^3 + \frac{0.66}{(1 - \alpha_0)^2}$ $\alpha_0 = \frac{(a_0 + H_0)}{(b + H_0)} \quad \alpha = \frac{(a + H_0)}{(b + H_0)}$		
P-CMOD	Homogéneo	$K_I = \frac{3Ps\sqrt{\pi a}}{2tb^2} f_1(x) \quad CMOD = \frac{6Ps a}{Etb^2} V_1(x) \quad [51][52]$ $f_1(x) = \begin{cases} 0.4 + 7.3x - 41.6x^2 + 118.5x^3 - 156.3x^4 + 85.2x^5 & \text{para } 0.17 \leq x \leq 0.65 \\ \frac{0.604 - 0.547x}{1 - 2.076x + 1.027x^2} & \text{para } x > 0.65 \end{cases}$ $V_1(x) = 0.197 + 17.816x - 107.63x^2 + 338.21x^3 - 494.26x^4 + 298.86x^5 \text{ para } 0.175 \leq x \leq 0.65$ $V_1(x) = \frac{0.817 - 0.218x}{1 - 2.011x + 1.012x^2} \text{ para } 0.175 \leq x \leq 0.65$		
P-CMOD	Homogéneo	$CMOD_t = CMOD_0^a + CMOD^* + CMOD_0^s \quad [53]$ $CMOD^* = \frac{CMOD_t}{\alpha^c} \quad K_{IC}^S = \frac{3 * P_{max} * S}{2 * t * b^2} * \sqrt{\pi * a} * F(\zeta)$ $a = a_0 + l_{ec}$		No reporta
K <sub>IC</sub> <sup>S</sup>	Homogéneo	$K_{IC}^Q = \frac{1.5 \left( P_Q + \frac{mg}{2} * 10^{-2} \right) * 10^{-3} S \sqrt{a_0}}{th^2} f(\alpha) \quad [54]$ $f(\alpha) = \frac{1.99 - \alpha(1 - \alpha) * (2.15 - 3.39\alpha + 2.7 * \alpha^2)}{(1 + 2\alpha) * (1 - \alpha)^{3/2}}, \alpha = \frac{a_0}{h}$ $K_{IC}^S = \frac{1.5 \left( P_{max} + \frac{mg}{2} * 10^{-2} \right) * 10^{-3} S \sqrt{a_c}}{th^2} f(\alpha)$ $f(\alpha) = \frac{1.99 - \alpha(1 - \alpha) * (2.15 - 3.39\alpha + 2.7 * \alpha^2)}{(1 + 2\alpha) * (1 - \alpha)^{3/2}}, \alpha = \frac{a_c}{h}$		
K <sub>IC</sub> <sup>S</sup>	Homogéneo	$K_{Ic} = -2.1658V_f^2 + 0.8784V_f + 1.0444 \quad 0 < V_f < 0.5 \quad R^2 = 0.9899$ $K_{IIIc} = -1.878V_f^2 + 1.2803V_f + 0.4983 \quad 0 < V_f < 0.5 \quad R^2 = 1$		<p>Fuente: [55]</p>

### Apéndice E. Cuadro con nomenclatura utilizada en cada artículo de investigación.

[18]	<p><math>\sigma</math>: Esfuerzo del concreto reforzado con fibras  <math>w</math>: Ancho de grieta  <math>M</math> y <math>N</math>: Constantes del Material  <math>l/d</math>: Relación de aspecto de las fibras  <math>\beta</math>: Constante que depende de la longitud y la distribución espacial de las fibras  <math>\tau</math>: Esfuerzo de adherencia de las fibras  <math>V_f</math>: Fracción de volumen de las fibras</p>
[48]	<p>CMOD: Desplazamiento de apertura en la boca de la grieta  <math>P</math>: Carga aplicada  <math>P^M</math>: Contribución debida a la matriz y está relacionada con <math>K_I</math>  <math>P^f</math>: Está relacionado con <math>K_{II}</math> y explica el efecto de singularidad debido al punteo de fibra  <math>P^f_r</math>: Satisface el equilibrio global debido a las fuerzas de punteo de la fibra  <math>\sigma_0</math>: Longitud inicial de la grieta  <math>\sigma</math>: Longitud de la grieta  <math>CMOD_{max}</math>: Valor de CMOD para el pico de carga en la matriz de concreto no reforzado  <math>K_{I,c}</math>: Factor de intensidad de esfuerzo crítico de modo I de apertura  <math>l_e</math>: Extensión de grieta efectiva  <math>s</math>: Longitud entre apoyos de la viga  <math>b</math>: altura de la viga  <math>t</math>: Espesor de la viga  <math>E</math>: Modulo de Young  <math>\nu</math>: Relación de poisson  <math>n</math>: Deslizamiento de la fibra  <math>n_{max}</math>: Deslizamiento con carga cero, que se puede suponer que es la mitad de la longitud de la fibra  <math>m</math>: Constante, que depende del tipo de fibras y se supuso que era 2 para las fibras rectas utilizadas en esta investigación.  <math>c</math>: Longitud mayor que <math>\sigma_0</math> y menor que <math>\sigma</math>  <math>\sigma_c</math>: Esfuerzo en el concreto  <math>l_1</math>: Distancia hasta el eje neutro de la sección de la viga  <math>l_p</math>: Distancia desde el eje neutro hasta el centroide de la fuerza <math>F_T</math>  CTOD: Desplazamiento de apertura en la punta de la grieta</p>
[27]	<p><math>\sigma</math>: Esfuerzo del concreto reforzado con fibras  <math>f_r</math>: Resistencia a tracción residual.  <math>\beta_1</math>: Coeficiente que tiene en cuenta las propiedades de unión de la barra  <math>\beta_2</math>: Coeficiente que tiene en cuenta la duración de la carga o de la carga repetida.  <math>k</math>: Separación de grietas  <math>e</math>: Deformación asociada a la carga  <math>\phi_b</math>: Tamaño de la barra  <math>\beta_3</math>: Coeficiente que tiene en cuenta la forma de la distribución de deformaciones  <math>p_r</math>: Relación de refuerzo efectiva <math>A_s / A_{eff}</math> donde <math>A_s</math> es el área del refuerzo contenida dentro del área de tensión efectiva <math>A_c, eff</math>  <math>E</math>: Modulo de Young  <math>w</math>: Ancho de grieta  <math>l/d</math>: Relación de aspecto de las fibras</p>

[40]	<p><math>\sigma</math>: Esfuerzo  <math>w</math>: Ancho de grieta  <math>E</math>: Modulo de Young  <math>\sigma</math>: Longitud de la grieta  <math>b</math>: Profundidad de la viga  <math>\tau</math>: Esfuerzo de adherencia de las fibras</p>
[30]	<p><math>\sigma</math>: Esfuerzo  <math>\epsilon</math>: Deformación  <math>D</math>: Matriz de rigidez  <math>D^{co}</math>: Matriz constitutiva del concreto no dañado  <math>D^{co}_{m,f,e}</math>: Componentes del concreto de deformación en el plano no fisurado  <math>D^{co}_{n,e}</math>: Componentes del concreto de deformación fuera del plano no fisurado  <math>E</math>: Modulo de Young  <math>\nu</math>: Relación de poisson  <math>G_c</math>: Modulo de Elasticidad transversal  <math>F</math>: Constante correctiva de cortante ( Para secciones rectangulares, <math>F = 5/6</math>)  <math>D^{cra}</math>: Matriz constitutiva del concreto agrietado  <math>D^{cra}_{m,f}</math>: Componente de deformación en el plano fisurado  <math>D^{cra}_{f}</math>: Componente de deformación fuera del plano fisurado  <math>T^g</math>: Matriz de transformación del sistema de coordenadas local de grieta al sistema de coordenadas local del elemento  <math>D^g</math>: Matriz constitutiva de la grieta  <math>\Theta</math>: Angulo entre el sistema de coordenadas local de la grieta y el sistema de coordenadas de elementos finitos  <math>D^g_I</math>: Componente constitutivo de apertura de grieta en modo I (normal)  <math>D^g_{II}</math>: Componente constitutivo de apertura de grieta en modo II (Cortante en el plano)  <math>\epsilon^{cr}_{n,n}</math>: Deformación normal ultimo de la grieta  <math>\alpha_i</math> y <math>\beta_j</math>: Parámetros que definen la forma del diagrama esfuerzo normal - deformación normal de grieta  <math>G^g_f</math>: Energia de fractura  <math>\beta_d</math>: Factor de retención cortante  <math>\epsilon^{cr}_n</math>: Deformación normal de grieta actual  <math>p_1</math>: Constante que depende del disminución o incremento de <math>\beta_d</math>  <math>f_{eq}</math>: Resistencia a tracción equivalente  <math>l_g</math>: Ancho de banda de grieta.</p>
[31]	<p><math>\sigma</math>: Esfuerzo  <math>\epsilon</math>: Deformación  <math>D</math>: Matriz de rigidez  <math>\Delta\epsilon^{co}</math>: Vector de deformación incremental del concreto no fisurado entre las grietas  <math>\Delta\epsilon^{gl}</math>: Vector de incremento de deformación de la grieta (Coordenada de sistema global)  <math>\Delta\epsilon^{gl}</math>: Vector de incremento de deformación de la grieta (Coordenada de sistema local)  <math>T^g</math>: Matriz de transformación del sistema de coordenadas local a global  <math>\Delta\sigma^g</math>: Incremento de esfuerzo (Coordenadas locales)  <math>D^{co}</math>: Matriz constitutiva del concreto no dañado  <math>E</math>: Modulo de Young  <math>\nu</math>: Relación de poisson  <math>D^g</math>: Matriz constitutiva de la grieta  <math>\epsilon^{cr}_{n,n}</math>: Deformación normal ultimo de la grieta  <math>\alpha_i</math> y <math>\beta_j</math>: Parámetros que definen la forma del diagrama esfuerzo normal - deformación normal de grieta  <math>G^g_n</math>: Energia de fractura en la dirección n  <math>f_{eq}</math>: Resistencia a tracción equivalente  <math>l_g</math>: Ancho de banda de grieta.  <math>G_c</math>: Modulo cortante elástico del concreto  <math>\beta_d</math>: Factor de retención cortante  <math>p_1</math>: Constante que depende del disminución o incremento de <math>\beta_d</math>  <math>G^g_s</math>: Energia de fractura en la dirección s  <math>D^{cra}</math>: Matriz constitutiva del concreto agrietado  <math>T^g</math>: Matriz de transformación de grietas multidireccionales  <math>D^g</math>: Matriz constitutiva de grietas multidireccionales</p>
[20]	<p><math>\sigma_f</math>: Esfuerzo de las fibras  <math>\sigma</math>: Esfuerzo del concreto reforzado con fibras  <math>V_f</math>: Volumen de la fracción de fibras  <math> y_f </math>: Distancia de la grieta visible  <math>w_{max}</math>: Amplitud máxima de la grieta  <math>E_g</math>: Modulo de elasticidad de la grieta visible  <math>E</math>: Modulo de elasticidad del concreto reforzado con fibras  <math>\epsilon_y</math>: Deformación en la dirección "y" de las fibras  <math>U_c</math>: Energia elástica de la zona de daño  <math>\rho(x,y)</math>: Densidad de daño  <math>V</math>: Volumen del elemento  <math>tp</math>: Espesor de la placa  <math>U_e</math>: Energia elástica del material equivalente  <math>E^*(x,y)</math>: Modulo de elasticidad de la zona de daño</p>

[50]	<p><math>K_{Ic}</math>: Factor de intensidad de esfuerzo crítico de modo I de apertura  <math>P</math>: Carga aplicada  <math>W_{hp}</math>: Peso propio de la viga  <math>s</math>: Longitud entre apoyos de la viga  <math>L</math>: Longitud de la viga  <math>a</math>: Longitud de la grieta  <math>b</math>: altura de la viga  <math>E</math>: Modulo de elasticidad  <math>t</math>: Espesor de la viga  <math>a_0</math>: Longitud inicial de la grieta  <math>H_0</math>: espesor del soporte del calibre de clip</p>
[29]	<p><math>\sigma_c</math>: Esfuerzo de la interfaz (concreto)  <math>D</math>: Matriz de rigidez del concreto  <math>e^{\text{pl}}</math>: Deformación relativo plástico de la interfaz (concreto)  <math>e_r</math>: Deformación relativa de la interfaz (concreto)  <math>D_N</math>: Rigidez normal de la interfaz (concreto)  <math>D_T</math>: Rigidez tangencial de la interfaz (concreto)  <math>\sigma_N</math>: Vector esfuerzo en la dirección normal de la interfaz (concreto)  <math>\sigma_T</math>: Vector esfuerzo en la dirección tangencial de la interfaz (concreto)  <math>c_0</math>: Cohesión  <math>\varphi</math>: Angulo de fricción  <math>f_A</math>: Resistencia a tracción residual  <math>\nabla</math>: Vector gradiente  <math>A</math>: Operador de transformación  <math>B</math>: Condición de frontera  <math>\sigma</math>: Esfuerzo del concreto reforzado con fibras  <math>w[p]</math>: Función de ponderación definida por medio del volumen de la interfaz (concreto)  <math>w[f]</math>: Función de ponderación definida por medio del volumen de fibras  <math>C_i</math>: Cumplimiento inicial calculado a partir del gráfico de carga trazada contra CMOD  <math>C_u</math>: Descarga de cumplimiento en carga máxima  <math>\tau_f</math>: Esfuerzo por efecto Clavija (Dowel) de la fibra  <math>\tau</math>: Esfuerzo de adherencia de las fibras  <math>\epsilon_f</math>: Deformación axial de la fibra  <math>u_f</math>: Vector unitario de la fibra en la dirección axial  <math>u_T</math>: Vector unitario de la fibra en la dirección tangencial  <math>Y_T</math>: Deformación tangencial de la fibra  <math>n_f</math>: Numero de fibras que atraviesan la interfaz  <math>\alpha</math>: Factor de orientación de la fibra  <math>V_f</math>: Contenido de fibras  <math>A_f</math>: Área de la sección transversal de la fibra  <math>A_i</math>: Área de la interfaz (concreto)  <math>l</math>: longitud de la fibra  <math>\Theta_{\theta}</math>: Ángulos de inclinación espacial de la fibra individual que atraviesa la interfaz (concreto)  <math>V_{f1}</math>: Contenido de una sola fibra individual  <math>\alpha_f</math>: Parámetro del material  <math>\tau_{ex}</math>: Esfuerzo de extracción entre la fibra y el concreto  <math>k_F</math>: Pendiente elástica de la relación esfuerzo - deslizamiento  <math>n[x]</math>: Desplazamiento tangencial entre la fibra y el concreto  <math>\tau_{ex}</math>: Resistencia al corte por extracción  <math>k_s</math>: Pendiente de ablandamiento de la relación esfuerzo - deslizamiento  <math>n_s</math>: Deslizamiento elásticos  <math>n_u</math>: Deslizamiento ultimo  <math>V_d</math>: Fuerza de clavija (Dowel)  <math>E_s</math>: Modulo elástico del acero  <math>J_s</math>: Momento de inercia de las fibras  <math>\lambda_f</math>: Parámetro de Winkler  <math>\Delta</math>: Desplazamiento transversal  <math>D_c</math>: Rigidez del concreto  <math>d</math>: Diámetro de la fibra  <math>V_{d,u}</math>: Resistencia máxima de clavija (Dowel)  <math>k_{sp}</math>: Coeficiente empírico no dimensional  <math>f_c</math>: Resistencia a compresión del concreto  <math>\sigma_{y_s}</math>: Limite elástico del acero</p>

[37]	<p>P: Carga aplicada  E: Modulo de Young del concreto plano  <math>\nu</math>: Relación de poisson del concreto plano  <math>\mu</math>: Constante de Lamé  D: Parámetro escalar que explica el daño (D=0 -&gt; sano; D=1-&gt; Dañado)  <math>\sigma_c</math>: Esfuerzo del concreto plano  <math>\epsilon_c</math>: Tensor deformación del concreto plano  <math>y=\epsilon</math>: Variable de estado  <math>Y_0</math>: Umbral de daño  Dt: Daño generado bajo tracción  Dc: Daño generado bajo compresión  <math>\epsilon_i</math>: Deformaciones principales  <math>\epsilon_{ti}</math>: Deformación principal a tracción  <math>\epsilon_{ci}</math>: Deformación principal a compresión  <math>A_f, B_f, A_c, B_c</math>: Parámetros del concreto plano  <math>\theta</math>: Angulo entre la fibra y dirección de la carga  A<sub>fiber</sub>: Área de la fibra  L: Longitud de la fibra  <math>L_{elem}</math>: Tamaño del elemento de la fibra (para la discretización dada)  w: Ancho de la grieta</p>
[53]	<p>P: Carga aplicada  <math>P_{max}</math>: Carga máxima aplicada  CMOD<sub>t</sub>: Desplazamiento de apertura en la boca de la grieta para la carga máxima  CMOD<sub>0</sub><sup>e</sup>: Desplazamiento de apertura en la boca de la grieta elástica para carga pre-pico  CMOD<sub>s</sub><sup>e</sup>: Desplazamiento de apertura en la boca de la grieta elástica debido a efectos no lineales  CMOD*: Desplazamiento de apertura en la boca de la grieta inelástico  <math>\alpha^*</math>: Factor de resistencia  s: Longitud entre los dos soportes de la viga  t: Espesor de la viga  b: altura de la viga  <math>\alpha_0</math>: Longitud inicial de la grieta  <math>\alpha</math>: Longitud efectiva de la grieta critica  <math>l_{ee}</math>: Extensión de grieta efectiva  F(<math>\zeta</math>): Función de cumplimiento</p>

[47]	<p> <math>\sigma_{HRFP}(w)</math>: Comportamiento a tracción del concreto reforzado con fibras plásticas  <math>\sigma_c(w)</math>: Esfuerzo postfisuración del concreto en masa  <math>\sigma_f(w)</math>: Esfuerzo de las fibras trabajando a pull - out  <math>f_R</math>: Resistencia a tracción residual.  <math>\eta_\theta</math>: Numero de orientación en la estructura objeto de diseño  <math>\eta_{Mf}</math>: Propiedades en estado fresco del concreto  <math>\Delta\eta_{ci}</math>: Procedimiento de hormigonado  <math>\Delta\eta_{Di}</math>: Efectos dinámicos (vibración)  <math>\Delta\eta_{Fwi}</math>: Geometría del encofrado  <math>N_f</math>: Numero total de fibras en una sección transversal  <math>A_{sec}</math>: Área de la sección transversal (<math>mm^2</math>)  <math>A_f</math>: Área de la sección transversal de la fibra (<math>mm^2</math>)  <math>V_f</math>: Volumen de fibras en %  <math>P(\theta_i)</math>: Perfil de orientación  <math>f(\theta_i)</math>: Función de densidad de probabilidad  <math>N_{\theta_i}</math>: Numero de fibras en cada <math>\theta_i</math>  <math>P_{N,\theta}(w)</math>: Contribución de las fibras en la respuesta global de carga -ancho de fisura de la sección  <math>\tau^*</math>: Esfuerzo de adherencia aparente  <math>d</math>: Diámetro de la fibra  <math>F</math>: Fuerza axial actuando sobre un punto de la fibra situado a una distancia <math>x</math> de la longitud embebida  <math>L_e</math>: Longitud embebida  <math>\tau(s)</math>: Esfuerzo de adherencia entre fibra - matriz  <math>P_{s01}</math>; <math>P_{s02}</math>: Puntos de carga que caracteriza la grafica de pull out de las fibras  <math>w_{s01}</math>; <math>w_{s02}</math>: Puntos de deslizamiento que caracteriza la grafica de pull out de las fibras (0.050 mm; 0.400 mm, respectivamente) </p>
[19]	<p> <math>\sigma</math>: Esfuerzo de tracción  <math>E</math>: Modulo de elasticidad  <math>\varepsilon</math>: Deformación elástica  <math>\sigma_w(w)</math>: Relación esfuerzo -ancho de grieta  <math>f_R</math>: Resistencia a tracción residual.  <math>w</math>: Ancho de la grieta  <math>w1, w2</math>: Limites de los dos segmentos de la curva bilineal </p>

<p>[43]</p>	<p>w: Ancho de grieta  <math>\sigma_{\text{tensile stress}}</math>: Esfuerzo de grieta a tracción  <math>f_1, f_1'</math>: Parámetros de resistencia debido al efecto de las fibras en el concreto  <math>f_2'</math>: Resistencia a tracción residual.  <math>\alpha_{ft}, \beta_{ft}, \alpha_{ft}'</math>,  <math>\beta_{ft}1, \beta_{ft}1', \alpha_{w2}, \beta_{w2}, \alpha_{w2}, \beta_{w2}</math>: Coeficiente experimentales, obtenidos por mínimos cuadrados  <math>w2, \alpha_{wc}, \beta_{wc}</math>:  l: Longitud de la fibra  <math>V_f</math>: Contenido de fibras</p>
<p>[28]</p>	<p><math>\sigma</math>: Esfuerzo del concreto reforzado con fibras  <math>f_2'</math>: Resistencia a tracción residual.  <math>\beta_1</math>: Coeficiente que tiene en cuenta las propiedades de unión de la barra  <math>\beta_2</math>: Coeficiente que tiene en cuenta la duración de la carga o de la carga repetida.  Es: Modulo de Young del cemento reforzado  w: Ancho medio de grietas (mm)  k: Separación final promedio de grietas (mm)  e: Deformación media en el refuerzo de tracción.  <math>\phi_b</math>: Tamaño de la barra  <math>p_f</math>: Relación de refuerzo efectiva <math>A_s / A_{eff}</math> donde <math>A_s</math> es el área del refuerzo contenida dentro del área de tensión efectiva <math>A_c</math>, <math>eff</math>  d: Diámetro de la fibra  <math>\beta_3</math>: Parámetro que depende del tiempo de carga  l: Longitud de la fibra</p>
<p>[49]</p>	<p><math>\alpha_0</math>: Longitud de la muesca  <math>\alpha</math>: Longitud efectiva de la grieta crítica  Ci: Cumplimiento inicial  Cu: Cumplimiento no cargado  D: Matriz de rigidez total  Dc: Matriz de rigidez del concreto  <math>D_c, c_{rl}</math>: Matriz de rigidez de la grieta  E: Modulo de elasticidad  f: Coeficiente de desaire  <math>K_{1c}^S</math>: Factor de intensidad de esfuerzos criticos  <math>P_{peak}</math>: Carga pico  S: Longitud de carga  B: Espesor de la muestra  w: Profundidad de la muestra  <math>\alpha_0</math>: relación entre la longitud de la muesca y la profundidad de la muestra  <math>\beta</math>: Relación entre la longitud efectiva de la grieta crítica y la profundidad de la muestra  e: Deformación total  <math>\epsilon_c</math>: Deformación relacionada con el hormigón reforzado con fibra (FRC) entre grietas  <math>\epsilon_{c,rl}</math>: Deformación relacionada con mecanismos resistentes desarrollados en la zona de fractura.  <math>\sigma_f</math>: Esfuerzo de la fibra  <math>\tau_0</math>: Resistencia de unión interfacial  <math>\Delta\alpha_c</math>: Crecimiento estable de grietas a carga máxima  <math>\eta_0</math>: Factor de eficiencia de orientación</p>

[51]	<p>CMOD: Desplazamiento de apertura en la boca de la grieta  <math>K_I</math>: Factor de intensidad de esfuerzos en modo I  P: Carga aplicada  s: Longitud entre los dos soportes de la viga  <math>\alpha_0</math>: Longitud de la muesca  <math>\alpha</math>: Longitud efectiva de la grieta crítica  t: Espesor de la viga  b: altura de la viga  <math>f_I(x), V_I(X)</math>: Funciones adimensionales que depende de la geometría  x: Longitud de grieta relativa  E: Modulo de Young</p>
[55]	<p><math>K_{IC}</math>: Factor de intensidad de esfuerzos en modo I  <math>V_f</math>: Porcentaje de fibras  <math>K_{III}</math>: Factor de intensidad de esfuerzos en modo III  P: Carga aplicada</p>
[33]	<p><math>\sigma</math>: Esfuerzo del concreto reforzado con fibras  <math>\epsilon</math>: Deformación  C: Tensor elástico de cuarto orden  <math>f_R</math> Resistencia a tracción residual.  E: Modulo de Young  <math>G_f</math>: Energía de fractura del material  R: Variable de daño escalar  r: Deformación como variable interna</p>
[52]	<p>CMOD: Desplazamiento de apertura en la boca de la grieta  <math>K_I</math>: Factor de intensidad de esfuerzos en modo I  P: Carga aplicada  s: Longitud entre los dos soportes de la viga  <math>\alpha_0</math>: Longitud de la muesca  <math>\alpha</math>: Longitud efectiva de la grieta crítica  t: Espesor de la viga  b: altura de la viga  <math>f_I(x), V_I(X)</math>: Funciones adimensionales que depende de la geometría  x: Longitud de grieta relativa  E: Modulo de Young</p>

[15]	<p><math>\sigma_s</math>: Esfuerzo (MPa) en el refuerzo de tracción calculada sobre la base de una sección agrietada</p> <p><math>f_R</math>: Resistencia a tracción residual.</p> <p>Es: Modulo de Young del cemento reforzado</p> <p>w: Ancho medio de grietas (mm)</p> <p>k: Separación final promedio de grietas (mm)</p> <p><math>\epsilon_{sm}</math>: Deformación media en el refuerzo de tracción.</p> <p><math>\phi_b</math>: Tamaño de la barra</p> <p><math>k_1</math>: Coeficiente que tiene en cuenta las propiedades de unión de las barras</p> <p><math>k_2</math>: Coeficiente que tiene en cuenta la forma de la distribución de deformaciones</p> <p><math>p_{eff}</math>: Relación de refuerzo efectiva <math>A_s / A_{ceff}</math> donde <math>A_s</math> es el área del refuerzo contenida dentro del área de tensión efectiva <math>A_c</math>, <math>eff</math></p> <p>p: Coeficiente de reducción de ancho de grieta</p> <p>d: Diámetro de la fibra</p> <p>l: Longitud de la fibra</p> <p>Vf: Volumen de fibras en %</p> <p><math>\alpha</math>: Factor de orientación de la fibra</p> <p>b: Profundidad de la viga</p>
[21]	<p><math>\sigma_c</math>: Esfuerzo nominal</p> <p><math>\epsilon^*</math>: Deformación correspondiente al pico de esfuerzo de punteo</p> <p><math>f_R</math>: Resistencia a tracción residual.</p> <p><math>\epsilon_m</math>: Deformación post fisuración</p> <p>L: Longitud característica de las grietas</p> <p>Lfi: Longitud de fibra para cada tipo i</p> <p><math>E_c</math>: Modulo de Young del concreto</p> <p>Efi: Modulo de Young para cada tipo de fibra i</p> <p>Afi: Area para cada tipo de fibra i</p> <p>Ni: Transporte de carga efectivo para la fibra i</p> <p><math>A_c</math>: Area sección del concreto</p> <p><math>\alpha_i</math>: Relación de punteo efectivo</p> <p><math>\epsilon_{fc}</math>: Deformación de la primera grieta</p> <p><math>\sigma_{fc}</math>: Esfuerzo para que ocurra la primer agrieta</p> <p><math>\epsilon^p</math>: Deformación plástica</p> <p><math>\delta</math>: Desplazamiento de apertura de la grieta</p>
[42]	<p><math>\sigma</math>: Esfuerzo</p> <p>w: Desplazamiento de apertura de grieta</p> <p>ft: Resistencia a tracción</p> <p>wc: Ancho máximo de la zona de fractura</p>

[44]	$\sigma$ : Esfuerzo $w$ : Desplazamiento de apertura de grieta $f_R$ : Resistencia a tracción residual.
[54]	$K_{IC}^Q$ : Rigidez de iniciación $m$ : Masa de la muestra del tramo medio $P_Q$ : Carga de iniciación de grietas $P_{max}$ : Carga pico $\alpha_0$ : Longitud de la muesca $\alpha_c$ : Longitud efectiva de la grieta
[45]	$\sigma$ : Esfuerzo $w$ : Desplazamiento de apertura de grieta $f_R$ : Resistencia a tracción residual.
[34]	$\tau$ : Esfuerzo de adherencia $s$ : Deslizamiento de la fibra
[46]	$\sigma$ : Esfuerzo $w$ : Desplazamiento de apertura de grieta $f_R$ : Resistencia a tracción residual.
[39]	$\sigma$ : Esfuerzo $w$ : Ancho de grieta $M$ y $N$ : Constantes del Material $l/d$ : Relación de aspecto de las fibras $\beta$ : Constante que depende de la longitud y la distribución espacial de las fibras $\tau$ : Esfuerzo de adherencia de las fibras $V_f$ : Fracción de volumen de las fibras
[24]	$\alpha_{sys}$ : Coeficiente por efecto del tamaño $f_{eq}$ : Resistencia a tracción por flexión equivalente $\alpha_c'$ : coeficiente de comportamiento de resistencia a largo plazo
[25]	$f_{eq}$ : Resistencia a tracción por flexión equivalente
[26]	$f_R$ : Resistencia a tracción por flexión residual
[25]	$f_{eq}$ : Resistencia a tracción por flexión equivalente $W_u$ : Ancho de grieta ultimo $l_{cs}$ : Longitud característica de las grietas
[32]	$f_R$ : Resistencia a tracción por flexión residual $f_{ctm}$ : Resistencia a la tracción máxima del concreto en masa
[36]	$f_R$ : Resistencia a tracción por flexión residual $l_{cs}$ : Longitud característica de las grietas
[26]	$f_R$ : Resistencia a tracción por flexión residual $W_u$ : Ancho de grieta ultimo $l_{cs}$ : Longitud característica de las grietas