UNA INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DIRECTO DEL CÁLCULO DE VARIACIONES

DANIEL SANTIAGO JAIMES PORTILLA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2026

UNA INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DIRECTO DEL CÁLCULO DE VARIACIONES

DANIEL SANTIAGO JAIMES PORTILLA

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Jhean Eleison Pérez López
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2026

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, por su amor incondicional y por brindarme el apoyo necesario para enfocarme exclusivamente en mis estudios durante toda mi etapa universitaria. Todo esto no habría sido posible sin su esfuerzo y sacrificio continuo.

Al profesor Jhean Eleison Pérez López, por su inmensa paciencia, su orientación constante y sus valiosos aportes a lo largo del desarrollo de este trabajo. Su rigor académico, disponibilidad y sabios consejos fueron fundamentales para llevar a buen término esta monografía.

A todas las personas que de una u otra forma hicieron de mi paso por la universidad una experiencia grata y enriquecedora.

CONTENIDO

pág.

INTRODUCCIÓN **8**

1 PRELIMINARES **12**
1.1 FUNCIONES CONTINUAS Y HÖLDER CONTINUAS 12
1.1.1 Espacios de funciones continuas y notaciones 12
1.1.2 Derivación bajo el signo integral 14
1.1.3 Funciones Hölder continuas 15
1.2 ESPACIOS L^p 17
1.2.1 Definiciones y propiedades básicas 17
1.2.2 Convergencia débil 19
1.2.3 El Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones 21
1.3 ESPACIOS DE SOBOLEV 22
1.3.1 Derivadas débiles y espacios de Sobolev 22
1.3.2 Convergencia débil en $W^{k,p}$ 25
1.3.3 El caso unidimensional 25
1.3.4 Dominios con frontera Lipschitz 26
1.3.5 Inmersiones e inmersiones compactas 27
1.3.6 Fórmula de integración por partes 29
1.3.7 Desigualdad de Poincaré y consecuencias 29
1.4 ANÁLISIS CONVEXO 31

2 MÉTODOS CLÁSICOS **33**
2.1 LA ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE 34
2.1.1 El Teorema Principal 34
2.1.2 Casos especiales importantes 39

3 MÉTODOS DIRECTOS **54**
3.1 UN TEOREMA GENERAL DE EXISTENCIA 55
3.1.1 El Teorema Principal 55

3.1.2 Funcionales con un término lineal 62
3.1.3 Algunos contraejemplos 67
3.2 LA ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE 73
3.2.1 El caso suave 73
3.2.2 El caso Sobolev 80
3.2.3 Algunos ejemplos 94
3.3 EL PROBLEMA DE DIRICHLET-POISSON 100

BIBLIOGRAFÍA **108**

RESUMEN

TÍTULO: UNA INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DIRECTO DEL CÁLCULO DE VARIACIONES[*]

AUTOR: DANIEL SANTIAGO JAIMES PORTILLA[**]

PALABRAS CLAVE: CÁLCULO DE VARIACIONES, MÉTODO DIRECTO, ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE, ESPACIOS DE SOBOLEV, SEMICONTINUIDAD INFERIOR DÉBIL, CONVEXIDAD, PROBLEMA DE DIRICHLET-POISSON.

DESCRIPCIÓN:
El presente trabajo de grado aborda el tránsito desde la formulación clásica del Cálculo de Variaciones hacia el Método Directo, proporcionando un marco teórico riguroso y bien articulado para el estudio de problemas de minimización. En la teoría clásica, la búsqueda de extremos de un funcional integral se fundamenta en la deducción de las ecuaciones de Euler-Lagrange bajo el supuesto de regularidad C^2 en las soluciones. Sin embargo, este enfoque no garantiza la existencia de minimizadores y resulta insuficiente ante funcionales cuyos ínfimos no se alcanzan en espacios de funciones suaves, como lo evidencia el clásico contraejemplo de Weierstrass.

Para superar estas limitaciones, se reinterpreta el problema variacional en el contexto de los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, donde las derivadas se entienden en sentido débil. Dentro de este marco, se desarrolla un teorema general de existencia del Método Directo del Cálculo de Variaciones, el cual establece la existencia de minimizadores débiles mediante la interacción de tres propiedades analíticas esenciales: la coercitividad del funcional, la compacidad en topologías débiles y la semicontinuidad inferior débil, esta última estrechamente ligada a las condiciones de convexidad del integrando. Finalmente, la teoría desarrollada se aplica al estudio de la existencia y unicidad de soluciones débiles para problemas de frontera elípticos, como el problema de Dirichlet-Poisson y su generalización, el problema asociado al p-Laplaciano.

---

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jhean Eleison Pérez López, Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: AN INTRODUCTION TO THE DIRECT METHOD OF THE CALCULUS OF VARIATIONS[*]

AUTHOR: DANIEL SANTIAGO JAIMES PORTILLA[**]

KEYWORDS: CALCULUS OF VARIATIONS, DIRECT METHOD, EULER-LAGRANGE EQUATION, SOBOLEV SPACES, WEAK LOWER SEMICONTINUITY, CONVEXITY, DIRICHLET-POISSON PROBLEM.

DESCRIPTION:
This undergraduate thesis addresses the transition from the classical formulation of the Calculus of Variations to the Direct Method, providing a rigorous and well-structured theoretical framework for the study of minimization problems. In the classical theory, finding the extrema of an integral functional relies on deriving the Euler-Lagrange equations under the assumption of C^2 regularity of the solutions. However, this approach does not guarantee the existence of minimizers and proves insufficient when dealing with functionals whose infima are not attained within spaces of smooth functions, as demonstrated by Weierstrass's classical counterexample.

To overcome these limitations, the variational problem is reformulated within the framework of Sobolev spaces $W^{1,p}(\Omega)$, where derivatives are understood in the weak sense. Within this setting, a general existence theorem for the Direct Method in the Calculus of Variations is developed, establishing the existence of weak minimizers through the interplay of three essential analytical properties: coercivity of the functional, compactness in weak topologies, and weak lower semicontinuity, the latter closely tied to the convexity conditions of the integrand. Finally, the developed theory is applied to prove the existence and uniqueness of weak solutions for elliptic boundary value problems, such as the Dirichlet-Poisson problem and its generalization to the p-Laplacian.

---

[*] Bachelor Thesis

[**] Faculty of Science. School of Mathematics. Advisor: Jhean Eleison Pérez López, Ph.D. in Mathematics.

INTRODUCCIÓN

El Cálculo de Variaciones constituye una de las ramas más clásicas e influyentes del Análisis Matemático, cuyos orígenes se remontan a los siglos XVII y XVIII con problemas geométricos y mecánicos concretos: el problema de la braquistócrona planteado por Johann Bernoulli en 1696[1], que busca la curva a lo largo de la cual un cuerpo se desliza en el menor tiempo posible bajo la acción de la gravedad; el problema de la superficie mínima de revolución, ligado a la forma que adopta una película de jabón entre dos anillos; o el problema isoperimétrico, cuya versión clásica (¿qué curva cerrada de longitud fija encierra la mayor área?) se remonta a la antigüedad. Todos estos problemas comparten una misma estructura: buscar, entre una clase de curvas o funciones admisibles, aquella que minimiza (o maximiza) cierta cantidad expresada como una integral. La sistematización de esta idea, iniciada por Leonhard Euler[2] y Joseph-Louis Lagrange[3] en el siglo XVIII, dio origen al Cálculo de Variaciones como disciplina.

Concretamente, el objeto de estudio es el problema de minimizar un funcional integral de la forma

$$(P) \qquad \inf_{u \in X} \left\{ I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx \right\},$$

donde $f = f(x, u, \xi)$ es una función dada (con ξ desempeñando el papel de u') y X es una clase admisible de funciones sujetas a condiciones de frontera prescritas, por ejemplo $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$. La pregunta central es doble: ¿existe un minimizador de (P) en X?, y si existe, ¿qué condiciones debe satisfacer?

La estrategia clásica para responder a la segunda pregunta consiste en suponer, *a priori*, que (P) admite un minimizador $\bar{u} \in X \cap C^2([a, b])$ y deducir, bajo ese supuesto, una

---

[1] J. Bernoulli. Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur. En: *Acta Eruditorum* (1696), pág. 269.

[2] L. Euler. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Lausanne y Ginebra: Marc-Michel Bousquet & Cie., 1744.

[3] J.-L. Lagrange. Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies. En: *Miscellanea Taurinensia* II (1760–1761), págs. 335-362.

condición necesaria de primer orden[4]. Este razonamiento, debido a Euler y Lagrange, conduce a la célebre ecuación

$$\frac{d}{dx}\big[f_\xi(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\big] = f_u(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)),$$

conocida como la ecuación de Euler-Lagrange, la cual resulta además suficiente cuando la aplicación $(u,\xi)\mapsto f(x,u,\xi)$ es convexa.

Sin embargo, esta estrategia deja abierta la primera pregunta: nada garantiza que el ínfimo en (P) se alcance, y la ecuación de Euler-Lagrange solo es una condición necesaria cuando se sabe de antemano que existe un minimizador suficientemente regular. Que esta falla de existencia es un fenómeno real lo mostró Weierstrass en 1870[5], en su crítica al llamado principio de Dirichlet: exhibió un funcional integral acotado inferiormente, con condiciones de frontera compatibles, cuyo ínfimo no es alcanzado por ninguna función admisible. En el Capítulo 2 estudiamos una variante de su ejemplo, $I(u)=\int_0^1 x\,[u'(x)]^2\,dx$ con $u(0)=1$ y $u(1)=0$, cuyo ínfimo es 0 y no se alcanza ni en $C^1([0,1])$ ni en $C^1_{\text{piec}}([0,1])$.

Superar esta dificultad requiere dos ingredientes. El primero es abandonar la exigencia de regularidad *a priori* y reformular el problema en un marco funcional más amplio: los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, con $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ abierto y acotado, donde la noción de derivada se relaja a la de derivada débil[6,7], y donde (P) se generaliza a funcionales de la forma

$$I(u)=\int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))\,dx.$$

Ampliar la clase admisible, sin embargo, no basta: el funcional de Weierstrass tampoco alcanza su ínfimo en $W^{1,2}(0,1)$. El segundo ingrediente son hipótesis estructurales sobre el integrando f: la convexidad, que garantiza la semicontinuidad inferior débil del funcional,

---

[4] B. Dacorogna. *Introduction to the Calculus of Variations*. 4.ª ed. World Scientific Publishing, 2024.

[5] K. Weierstrass. Über das sogenannte Dirichlet'sche Prinzip. En: *Mathematische Werke*. Vol. 2. Leído ante la Königliche Akademie der Wissenschaften de Berlín el 14 de julio de 1870. Berlín: Mayer & Müller, 1895, págs. 49-54.

[6] R. A. Adams y J. J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. 2.ª ed. Vol. 140. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 2003.

[7] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. 2.ª ed. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2010.

y la coercitividad, que garantiza la compacidad débil de las sucesiones minimizadoras. Bajo estas hipótesis, el Método Directo del Cálculo de Variaciones[4] asegura la existencia de un minimizador, en general no suave. En el ejemplo de Weierstrass el integrando $x\xi^2$ es convexo en ξ, pero la coercitividad falla debido a la degeneración en $x = 0$; esta es precisamente la hipótesis ausente.

Esta problemática es especialmente pertinente para la formación en pregrado. En los cursos introductorios de optimización y análisis, el cálculo de variaciones suele presentarse desde una perspectiva puramente operativa: se enuncia la ecuación de Euler-Lagrange como una herramienta lista para aplicar, se resuelve para obtener candidatos, y se dan por supuestas sin mayor discusión tanto la existencia del minimizador como su regularidad. El estudiante aprende a manipular la ecuación, pero no percibe que las hipótesis en las que se basa pueden fallar, ni menos aún dispone de un marco teórico para abordar los casos en que fallan. El presente trabajo de grado se propone precisamente cubrir esa brecha.

El objetivo principal de esta monografía es desarrollar esta transición analítica de manera rigurosa y bien articulada. Los resultados auxiliares se enuncian con referencia precisa a su fuente, mientras que los resultados centrales se demuestran en detalle. El trabajo se encuentra estructurado de la siguiente manera.

En el Capítulo 1 reunimos el marco funcional necesario: los espacios de funciones continuas y Hölder continuas; los espacios L^p, con sus nociones de convergencia fuerte y débil y el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones; los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, incluyendo las derivadas débiles, las inmersiones, la compacidad débil de sucesiones acotadas y la desigualdad de Poincaré; y las herramientas de análisis convexo que se emplean posteriormente, como los criterios de convexidad y las desigualdades de Young y Jensen.

En el Capítulo 2 abordamos la formulación clásica. Demostramos que la ecuación de Euler-Lagrange es una condición necesaria, que es suficiente bajo convexidad y que el minimizador es único bajo convexidad estricta, y estudiamos los casos en que el lagrangiano no depende de alguna de sus variables, incluyendo la identidad de Beltrami y su aplicación a las superficies mínimas de revolución. Mediante ejemplos explícitos exponemos los límites del enfoque clásico: integrandos no convexos cuyo ínfimo no se alcanza en C^1, y el ejemplo de Weierstrass[5], donde ni siquiera la ampliación a funciones de clase C^1 a trozos produce un minimizador.

En el Capítulo 3 desarrollamos el núcleo del trabajo: el teorema de existencia del Método Directo[4] para funcionales integrales sobre $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, bajo hipótesis de convexidad, coercitividad y crecimiento. Mostramos mediante contraejemplos que las hipótesis de convexidad y de coercitividad no pueden omitirse, deducimos la forma débil de la ecuación de Euler-Lagrange junto con su recíproco bajo convexidad, y aplicamos la teoría al problema de Dirichlet-Poisson y a su generalización, el p-Laplaciano, obteniendo existencia y unicidad de sus soluciones débiles. Se cierra así el arco iniciado por Weierstrass: el principio de Dirichlet, cuya validez él puso en duda, queda establecido con rigor en el marco de los espacios de Sobolev.

1. PRELIMINARES

En este capítulo reunimos las definiciones y los resultados que se emplean en los capítulos siguientes. Los resultados se enuncian sin demostración; la referencia principal es el libro de Dacorogna[4].

1.1. FUNCIONES CONTINUAS Y HÖLDER CONTINUAS

1.1.1. Espacios de funciones continuas y notaciones

Definición 1.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.

(I) $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ es el conjunto de las funciones continuas $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

(II) $C^0(\bar{\Omega}) = C(\bar{\Omega})$ es el conjunto de las funciones continuas acotadas $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que se pueden extender de manera continua y acotada a $\bar{\Omega}$.

(III) El **soporte** de una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ se define como

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}.$$

(IV) $C_0(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : \operatorname{supp} u \subset \Omega \text{ es compacto}\}$.

(V) Se define la norma sobre $C(\bar{\Omega})$ por

$$\|u\|_{C^0} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|.$$

Observación 1.2. (I) $C(\bar{\Omega})$ con la norma $\|\cdot\|_{C^0}$ es un espacio de Banach.

(II) En la definición de $C(\bar{\Omega})$ se exige que las funciones sean acotadas. Si Ω es acotado, esto no es una restricción. Si Ω no es acotado, se podría, como hacen algunos autores, exigir solamente que las funciones se extiendan continuamente a la frontera (sin ser necesariamente acotadas). En el marco del presente trabajo la definición que adoptamos es, sin embargo, más apropiada, pues queremos definir una norma sobre

$C(\bar{\Omega})$ aun cuando Ω no sea acotado. Nótese que, de acuerdo con nuestra definición, $C(\overline{\mathbb{R}^n}) \subsetneq C(\mathbb{R}^n)$; en efecto, la función $u(x) = x$ es tal que $u \in C(\mathbb{R})$, pero $u \notin C(\bar{\mathbb{R}})$.

Empleamos además las siguientes notaciones.

(I) Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, denotamos las derivadas parciales de cualquiera de las dos maneras siguientes:

$$D_j u = u_{x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \qquad \nabla u = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}).$$

(II) Introducimos ahora las notaciones para las derivadas de orden superior. Sea $k \geq 0$ un entero; un elemento de

$$A_k = \left\{ a = (a_1, \ldots, a_n) : a_j \geq 0 \text{ entero y } \sum_{j=1}^{n} a_j = k \right\}$$

se llama **multi-índice** de orden k. En algunas ocasiones escribimos también, para tales elementos,

$$|a| = \sum_{j=1}^{n} a_j = k.$$

Sea $a \in A_k$, escribimos

$$D^a u = D_1^{a_1} \cdots D_n^{a_n} u = \frac{\partial^{|a|} u}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}}.$$

En particular, $A_0 = \{(0, \ldots, 0)\}$ y convenimos que $D^{(0,\ldots,0)} u = u$.

Definición 1.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $k \geq 0$ un entero.

(I) El conjunto de las funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que tienen todas las derivadas parciales $D^a u$, $a \in A_m$, $0 \leq m \leq k$, continuas, se denota por $C^k(\Omega)$.

(II) $C^k(\bar{\Omega})$ es el conjunto de las funciones de $C^k(\Omega)$ acotadas cuyas derivadas hasta orden k se pueden extender de manera continua y acotada a $\bar{\Omega}$. A este espacio se le dota de la siguiente norma:

$$\|u\|_{C^k} = \max_{0 \leq |a| \leq k} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^a u(x)|.$$

(III) $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$.

(IV) $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\Omega), \quad C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\bar{\Omega})$.

(V) $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$.

Observación 1.4. $C^k(\bar{\Omega})$ con su norma $\|\cdot\|_{C^k}$ es un espacio de Banach.

También necesitamos definir el conjunto de las funciones continuas a trozos.

Definición 1.5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.

(I) Definimos $C^0_{\text{piec}}(\bar{\Omega}) = C_{\text{piec}}(\bar{\Omega})$ como el conjunto de las funciones continuas a trozos acotadas $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Esto significa que existe una partición finita de Ω en abiertos $\Omega_i \subset \Omega$, $i = 1, \ldots, I$, tal que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{I} \overline{\Omega_i}, \qquad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \ \text{ si } i \neq j, \ \ 1 \leq i, j \leq I,$$

y $u|_{\Omega_i}$ es acotada y continua para cada $i = 1, \ldots, I$.

(II) Análogamente, $C^k_{\text{piec}}(\bar{\Omega})$, con $k \geq 1$, es el conjunto de las funciones $u \in C^{k-1}(\bar{\Omega})$ para las cuales existe una partición como en (i) tal que $u|_{\Omega_i} \in C^k(\Omega_i)$ para cada $i = 1, \ldots, I$ y las derivadas parciales de orden k de u, definidas en $\bigcup_{i=1}^I \Omega_i$, están en $C^0_{\text{piec}}(\bar{\Omega})$.

1.1.2. Derivación bajo el signo integral El siguiente teorema, que establece condiciones suficientes para derivar bajo el signo integral, se ha tomado de la Sección 7.24 del libro de Apostol[1].

Teorema 1.6. *Sea $Q = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Considere una función g Riemann integrable en $[a, b]$ y suponga que, para cada $y \in [c, d]$ fijo, la función $x \mapsto g(x)f(x, y)$ es Riemann integrable en $[a, b]$, de modo que la función*

$$F(y) = \int_a^b g(x)f(x, y)\, dx$$

[1] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis*. 2.ª ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1974.

está bien definida. Si la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *es continua en el rectángulo* Q*, entonces la derivada* $F'(y)$ *existe para cada* $y \in (c,d)$ *y viene dada por*

$$F'(y) = \int_a^b g(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

Observación 1.7. En el caso particular en que $g \equiv 1$ en $[a,b]$, se obtiene el resultado clásico de diferenciación bajo el signo integral:

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \implies F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

1.1.3. Funciones Hölder continuas Introducimos la noción de continuidad de Hölder y los espacios $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, que intervienen en los teoremas de inmersión de la Sección 1.3.

Definición 1.8. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$, $u : D \to \mathbb{R}$ y $0 < \alpha \leq 1$. Ponemos

$$[u]_{C^{0,\alpha}(D)} = \sup_{\substack{x,y\in D \\ x\neq y}} \left(\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \right).$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $k \geq 0$ un entero. Definimos los distintos espacios de funciones Hölder continuas de la siguiente manera:

(I) $C^{0,\alpha}(\Omega)$ es el conjunto de las $u \in C(\Omega)$ tales que

$$[u]_{C^{0,\alpha}(K)} < \infty$$

para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$.

(II) $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ es el conjunto de las funciones $u \in C(\bar{\Omega})$ tales que

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} < \infty.$$

A este espacio se le dota de la norma

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + [u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}.$$

Si no hay ambigüedad, omitimos la dependencia en el conjunto $\bar{\Omega}$ y escribimos

simplemente

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} = \|u\|_{C^0} + [u]_{C^{0,\alpha}}.$$

(III) $C^{k,\alpha}(\Omega)$ es el conjunto de las $u \in C^k(\Omega)$ tales que

$$[D^a u]_{C^{0,\alpha}(K)} < \infty$$

para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ y todo $a \in A_k$.

(IV) $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ es el conjunto de las funciones $u \in C^k(\bar{\Omega})$ tales que

$$[D^a u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} < \infty$$

para todo multi-índice $a \in A_k$. A este espacio se le dota de la siguiente norma:

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}} = \|u\|_{C^k} + \max_{a \in A_k} [D^a u]_{C^{0,\alpha}}.$$

Observación 1.9. (I) $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ con su norma $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}}$ es un espacio de Banach.

(II) Por abuso de notación escribimos $C^k(\Omega) = C^{k,0}(\Omega)$; en otras palabras, el conjunto de las funciones continuas se identifica con el conjunto de las funciones Hölder continuas de exponente 0.

(III) Análogamente, cuando $\alpha = 1$, se tiene que $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ es de hecho el conjunto de las funciones **Lipschitz continuas**, es decir, el conjunto de las funciones u tales que existe una constante $\gamma > 0$ con

$$|u(x) - u(y)| \leq \gamma |x - y|, \quad \forall\, x, y \in \bar{\Omega}.$$

La mejor constante posible es $\gamma = [u]_{C^{0,1}}$.

Proposición 1.10. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado y abierto, $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ y $k \geq 0$ un entero. Se cumplen las siguientes propiedades.*

(I) Si $u, v \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, entonces $u\,v \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

(II) Se cumplen las siguientes inclusiones:

$$C^{k,1}(\bar{\Omega}) \subset C^{k,\beta}(\bar{\Omega}) \subset C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) \subset C^k(\bar{\Omega}).$$

(III) Si además Ω es convexo, entonces

$$C^{k+1}(\bar{\Omega}) \subset C^{k,1}(\bar{\Omega}).$$

1.2. ESPACIOS L^p

1.2.1. Definiciones y propiedades básicas Recordamos la definición de los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$ y sus propiedades principales. El Teorema de la convergencia dominada se ha tomado del libro de Evans[7]. Para las demostraciones de los resultados de esta sección pueden consultarse el libro de Dacorogna[4] y el capítulo 6 del libro de Folland[2].

Definición 1.11. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $1 \leq p \leq \infty$. Decimos que una función medible $u : \Omega \to \mathbb{R}$ pertenece a $L^p(\Omega)$ si

$$\|u\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ínf}\{\alpha : |u(x)| \leq \alpha \text{ en c.t.p de } \Omega\} & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

es finita. Análogamente, si $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $u = (u^1, \ldots, u^N)$, es tal que $u^i \in L^p(\Omega)$ para todo $i = 1, \ldots, N$, escribimos $u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$ y definimos su norma como antes, reemplazando $|u(x)|$ por la norma euclidiana del vector $u(x) \in \mathbb{R}^N$. En particular, si u es débilmente diferenciable (véase la Sección 1.3) y $\nabla u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\|\nabla u\|_{L^p}^p = \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx.$$

Observación 1.12. (I) La abreviatura "c.t.p" significa que una propiedad se cumple en casi todo punto, es decir, salvo en un conjunto de medida nula.

(II) Adoptamos la convención de identificar dos funciones que coincidan salvo en un conjunto de medida nula. Estrictamente hablando, los espacios L^p son clases de equivalencia.

---

[2] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2.ª ed. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, 1999.

(III) En lo que sigue, denotamos por p' el **exponente conjugado** de p, definido por

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \iff p' = \frac{p}{p-1},$$

con la convención de que $p' = \infty$ si $p = 1$, y $p' = 1$ si $p = \infty$.

Teorema 1.13 (Teorema de la convergencia dominada)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ una sucesión tal que:*

- $u_\nu(x) \to u(x)$ *en c.t.p* $x \in \Omega$*,*
- *existe una función $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_\nu(x)| \leq g(x)$ en c.t.p $x \in \Omega$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$.*

Entonces $u \in L^1(\Omega)$ y además

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega u_\nu(x)\, dx = \int_\Omega \lim_{\nu\to\infty} u_\nu(x)\, dx.$$

Teorema 1.14. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Se cumplen las siguientes propiedades.*

(I) ***Desigualdad de Hölder.*** *Sean $p, q, r \in [1, \infty]$ tales que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$, entonces $u\,v \in L^r(\Omega)$ y

$$\|u\,v\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}\, \|v\|_{L^q}.$$

En particular, si $r = 1$ (es decir, $q = p'$), se recupera la forma clásica

$$\|u\,v\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p}\, \|v\|_{L^{p'}}.$$

(II) ***Desigualdad de Minkowski.*** *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Si $u, v \in L^p(\Omega)$, entonces*

$$\|u + v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}.$$

(III) Sea $1 \leq p \leq \infty$. Por (ii), $\|\cdot\|_{L^p}$ satisface la desigualdad triangular y es, en consecuencia, una norma sobre $L^p(\Omega)$. Más aún, $L^p(\Omega)$ dotado de esta norma es

un espacio de Banach. En particular, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto interior

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx.$$

(IV) ***Teorema de representación de Riesz.*** *Sea $1 \le p < \infty$. El espacio dual de $L^p(\Omega)$, denotado $(L^p)'$, se identifica con $L^{p'}(\Omega)$. Más precisamente, para todo $\varphi \in (L^p)'$ existe un único $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que*

$$\varphi(v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx, \quad \forall\, v \in L^p(\Omega),$$

y además $\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$.

(V) $L^p(\Omega)$ es separable si $1 \le p < \infty$ y reflexivo si $1 < p < \infty$.

Observación 1.15. (I) En el caso $p = 2$ (y por tanto $p' = 2$), la desigualdad de Hölder se reduce a la desigualdad de **Cauchy-Schwarz**:

$$\int_\Omega |u\, v|\, dx \le \left(\int_\Omega u^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega v^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(II) El Teorema de representación de Riesz es falso para $p = \infty$ (y por tanto $p' = 1$): el dual de L^∞ es estrictamente mayor que L^1.

(III) En lo que sigue hacemos siempre la identificación $(L^p)' = L^{p'}$. Resumiendo las propiedades de dualidad:

$$(L^p)' = L^{p'} \text{ si } 1 < p < \infty, \qquad (L^2)' = L^2, \qquad (L^1)' = L^\infty, \qquad L^1 \subsetneq (L^\infty)'.$$

(IV) Que L^p sea reflexivo significa que el bidual $(L^p)''$ se identifica con L^p. Esta propiedad es falsa si $p = \infty$ o $p = 1$.

1.2.2. Convergencia débil Introducimos las nociones de convergencia fuerte, débil y débil-$*$ en $L^p(\Omega)$ y sus propiedades principales, en particular la compacidad débil de las sucesiones acotadas, que constituye uno de los pilares del método directo. Para la teoría general de las topologías débil y débil-$*$ en espacios de Banach, véase el capítulo 3 del

libro de Rudin[3].

Definición 1.16. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $1 \leq p \leq \infty$.

(I) Una sucesión $\{u_\nu\}$ **converge fuertemente** a u en L^p si $u_\nu, u \in L^p$ y

$$\lim_{\nu\to\infty} \|u_\nu - u\|_{L^p} = 0.$$

Denotamos esta convergencia por $u_\nu \to u$ en L^p.

(II) Si $1 \leq p < \infty$, decimos que $\{u_\nu\}$ **converge débilmente** a u en L^p si $u_\nu, u \in L^p$ y

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega [u_\nu(x) - u(x)]\, \varphi(x)\, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in L^{p'}(\Omega).$$

Se denota $u_\nu \rightharpoonup u$ en L^p.

(III) Si $p = \infty$, decimos que $\{u_\nu\}$ **converge débilmente-$*$** a u en L^∞ si $u_\nu, u \in L^\infty$ y

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega [u_\nu(x) - u(x)]\, \varphi(x)\, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in L^1(\Omega).$$

Se denota $u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ en L^∞.

Observación 1.17. (I) Se habla de convergencia débil-$*$ en L^∞ y no de convergencia débil porque, como ya se mencionó, el dual de L^∞ es estrictamente mayor que L^1.

(II) El límite (débil o fuerte) es único.

(III) La convergencia fuerte implica la convergencia débil (y la débil-$*$ en el caso $p = \infty$). El recíproco es falso en general.

Teorema 1.18. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Se cumplen las siguientes propiedades.*

(I) Si $1 \leq p \leq \infty$ y $u_\nu \to u$ en L^p, entonces

$$\|u\|_{L^p} = \lim_{\nu\to\infty} \|u_\nu\|_{L^p}.$$

---

[3] W. Rudin. *Functional Analysis*. 2.ª ed. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, 1991.

(II) Si $1 \leq p < \infty$ *y* $u_\nu \rightharpoonup u$ *en* L^p*, entonces existe* $\gamma > 0$ *tal que*

$$\|u_\nu\|_{L^p} \leq \gamma \quad \textit{y} \quad \|u\|_{L^p} \leq \liminf_{\nu \to \infty} \|u_\nu\|_{L^p}.$$

El resultado sigue siendo válido si $p = \infty$ *y* $u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *en* L^∞*.*

(III) Si $1 < p < \infty$ *y existe* $\gamma > 0$ *tal que* $\|u_\nu\|_{L^p} \leq \gamma$ *para todo* ν*, entonces existen una subsucesión* $\{u_{\nu_i}\}$ *y* $u \in L^p$ *tales que*

$$u_{\nu_i} \rightharpoonup u \textit{ en } L^p.$$

El resultado sigue siendo válido si $p = \infty$*, en cuyo caso la conclusión es* $u_{\nu_i} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *en* L^∞*.*

(IV) Si $1 \leq p \leq \infty$ *y* $u_\nu \to u$ *en* L^p*, entonces existen una subsucesión* $\{u_{\nu_i}\}$ *y* $h \in L^p$ *tales que*

$$u_{\nu_i} \to u \textit{ en c.t.p} \quad \textit{y} \quad |u_{\nu_i}| \leq h \textit{ en c.t.p.}$$

Observación 1.19. (I) Comparando (i) y (ii), se observa que la convergencia fuerte garantiza la continuidad de la norma, mientras que la convergencia débil solo garantiza su **semicontinuidad inferior**. Esta dicotomía es fundamental en el desarrollo del método directo.

(II) El resultado más relevante es (iii): en $\mathbb{R}^n$, el teorema de Bolzano-Weierstrass permite extraer una subsucesión convergente de cualquier sucesión acotada. En L^p esta propiedad es falsa para la convergencia fuerte (y, en general, en espacios de dimensión infinita), pero se recupera al reemplazar la convergencia fuerte por la débil.

(III) El resultado (iii) es falso si $p = 1$, debido a que L^1 no es reflexivo. Para obtener, salvo extracción de subsucesión, convergencia débil, no basta con $\|u_\nu\|_{L^1} \leq \gamma$: se requiere además una condición conocida como **equiintegrabilidad**.

1.2.3. El Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones Presentamos el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones, herramienta que permite pasar de una identidad integral, válida para toda función de prueba, a una identidad puntual. Es la pieza clave en la deducción de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Definición 1.20. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $1 \leq p \leq \infty$. Decimos que $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ si $u \in L^p(\Omega')$ para todo conjunto abierto Ω' **compactamente contenido** en Ω, es decir, $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ y $\overline{\Omega'}$ es compacto.

Observación 1.21. Toda función $u \in L^p(\Omega)$ pertenece a $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, es decir,

$$L^p(\Omega) \subset L^p_{\text{loc}}(\Omega), \quad \forall\, 1 \leq p \leq \infty.$$

Más aún, si $1 \leq p \leq q \leq \infty$, se tiene la cadena de inclusiones

$$L^\infty_{\text{loc}}(\Omega) \subset \cdots \subset L^q_{\text{loc}}(\Omega) \subset L^p_{\text{loc}}(\Omega) \subset \cdots \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega),$$

de modo que $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ es el mayor de todos los espacios $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.

Teorema 1.22 (Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\, \psi(x)\, dx = 0, \quad \forall\, \psi \in C^\infty_0(\Omega).$$

Entonces $u = 0$ en c.t.p de Ω.

1.3. ESPACIOS DE SOBOLEV

Los espacios de Sobolev constituyen el marco natural del método directo del cálculo de variaciones y de la formulación débil de ecuaciones en derivadas parciales. Para introducirlos es necesario debilitar la noción de derivada, con el fin de conservar la posibilidad de integrar por partes para una clase de funciones más amplia que C^1.

1.3.1. Derivadas débiles y espacios de Sobolev

Definición 1.23. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

(I) Decimos que $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ es la **derivada parcial débil** de u con respecto a x_i si

$$\int_\Omega v(x)\, \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega u(x)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx, \quad \forall\, \varphi \in C^\infty_0(\Omega).$$

Por abuso de notación escribimos $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ o $v = u_{x_i}$.

(II) Decimos que u es **débilmente diferenciable** si existen las derivadas parciales débiles $u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}$.

(III) Análogamente se definen las derivadas débiles de orden superior. Si $a \in A_k$ es un multi-índice, $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ es la derivada débil $D^a u$ si

$$\int_\Omega v(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|a|}\int_\Omega u(x)\,D^a\varphi(x)\,dx, \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Observación 1.24. (I) Si la derivada débil existe, es única en c.t.p, como consecuencia inmediata del Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones.

(II) Si $u \in C^1(\Omega)$, la derivada débil de u coincide con la derivada clásica. En efecto, integrando por partes y usando que φ tiene soporte compacto en Ω,

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\varphi\,dx = -\int_\Omega u\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx, \quad \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(III) Las reglas usuales de derivación (linealidad, regla del producto bajo condiciones de integrabilidad) se extienden sin dificultad al contexto débil.

(IV) No toda función localmente integrable es débilmente diferenciable. En particular, una función discontinua con salto sobre $\mathbb{R}$ no admite derivada débil.

Definición 1.25. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $1 \le p \le \infty$.

(I) Se denota por $W^{1,p}(\Omega)$ el conjunto de las funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $u \in L^p(\Omega)$ y cuyas derivadas parciales débiles satisfacen $u_{x_i} \in L^p(\Omega)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Se le dota de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \begin{cases} \left(\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \le p < \infty, \\ \max\left\{\|u\|_{L^\infty},\, \|\nabla u\|_{L^\infty}\right\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

(II) Si $1 \le p < \infty$, el espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ se define como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Por abuso de lenguaje, cuando Ω es acotado se dice que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ es una función de $W^{1,p}(\Omega)$ que se anula sobre $\partial\Omega$.

(III) Si $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, escribimos $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ para indicar que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Intuitivamente, esto dice que u y u_0 coinciden en la frontera.

(IV) Para $p = \infty$ se define $W_0^{1,\infty}(\Omega) = W^{1,\infty}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$.

(V) Análogamente, para $k \geq 1$ entero, $W^{k,p}(\Omega)$ es el conjunto de las funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ cuyas derivadas parciales débiles $D^a u \in L^p(\Omega)$ para todo multi-índice $a \in A_m$ con $0 \leq m \leq k$. Su norma es

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} \Big(\displaystyle\sum_{0 \leq |a| \leq k} \|D^a u\|_{L^p}^p \Big)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\max_{0 \leq |a| \leq k} \|D^a u\|_{L^\infty} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

El espacio $W_0^{k,p}(\Omega)$ se define como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$, y $W_0^{k,\infty}(\Omega) = W^{k,\infty}(\Omega) \cap W_0^{k,1}(\Omega)$.

Observación 1.26. (I) Por abuso de notación se escribe $W^{0,p} = L^p$.

(II) Cuando $p = 2$, los espacios $W^{k,2}(\Omega)$ y $W_0^{k,2}(\Omega)$ se denotan habitualmente por $H^k(\Omega)$ y $H_0^k(\Omega)$, respectivamente.

(III) Para $k = 1$ y $1 \leq p < \infty$, la norma dada en (v) no coincide con la dada en (i), puesto que en general $\sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^p}^p \neq \|\nabla u\|_{L^p}^p$; sin embargo, ambas son equivalentes, por la equivalencia de normas en $\mathbb{R}^n$. En este trabajo se emplea siempre la norma dada en (i).

(IV) Si Ω es acotado, se cumplen las inclusiones estrictas

$$C^1(\bar{\Omega}) \subsetneq W^{1,\infty}(\Omega) \subsetneq W^{1,p}(\Omega) \subsetneq L^p(\Omega), \quad \forall\, 1 \leq p < \infty.$$

En este sentido, $W^{1,p}$ extiende a C^1 del mismo modo que L^p extiende a C^0.

Teorema 1.27. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $1 \leq p \leq \infty$ y $k \geq 1$ un entero.*

(I) $W^{k,p}(\Omega)$ con su norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ es un espacio de Banach, separable si $1 \leq p < \infty$ y reflexivo si $1 < p < \infty$.

*(II) **(Meyers-Serrin).** Las funciones de $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ son densas en $W^{k,p}(\Omega)$ siempre que $1 \leq p < \infty$. Más aún, si Ω es un conjunto abierto, acotado y conexo con frontera Lipschitz, entonces $C^\infty(\bar{\Omega})$ es también denso en $W^{k,p}(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$.*

(III) $W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $1 \leq p < \infty$.

1.3.2. Convergencia débil en $W^{k,p}$ La siguiente definición y la proposición que la sigue no se encuentran en el libro de Dacorogna[4], por lo que se han tomado del libro de Adams[6].

Definición 1.28 (Convergencia débil en $W^{k,p}$)**.** Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $k \geq 1$ un entero y $1 \leq p < \infty$. Denotemos por $\big(W^{k,p}(\Omega)\big)'$ el espacio dual de $W^{k,p}(\Omega)$, esto es, el conjunto de los funcionales lineales y continuos $L : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$. Dada una sucesión $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset W^{k,p}(\Omega)$ y $u \in W^{k,p}(\Omega)$, se dice que u_ν **converge débilmente** a u en $W^{k,p}(\Omega)$, y se escribe

$$u_\nu \rightharpoonup u \quad \text{en } W^{k,p}(\Omega),$$

si

$$\lim_{\nu\to\infty} L(u_\nu) = L(u), \qquad \forall\, L \in \big(W^{k,p}(\Omega)\big)'.$$

Proposición 1.29 (Caracterización de la convergencia débil en $W^{k,p}$)**.** *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto,* $k \geq 1$ *un entero y* $1 \leq p < \infty$*. Dada una sucesión* $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset W^{k,p}(\Omega)$ *y* $u \in W^{k,p}(\Omega)$*, son equivalentes:*

(I) $u_\nu \rightharpoonup u$ *en* $W^{k,p}(\Omega)$.

(II) $D^a u_\nu \rightharpoonup D^a u$ *en* $L^p(\Omega)$ *para todo* $a \in A_m$, $0 \leq m \leq k$.

1.3.3. El caso unidimensional El siguiente lema muestra que, en dimensión uno, las funciones de $W^{1,p}$ son continuas y son primitivas de funciones en L^p.

Lema 1.30. *Sea* $u \in W^{1,p}(a,b)$*, con* $1 \leq p \leq \infty$*. Entonces existe una función* $\widetilde{u} \in C([a,b])$ *tal que* $u = \widetilde{u}$ *en c.t.p y*

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)\,dt, \quad \forall\, x, y \in [a,b].$$

Observación 1.31. (I) Como es habitual, se ignora la distinción entre u y $\widetilde{u}$ y se dice que si $u \in W^{1,p}(a,b)$, entonces $u \in C([a,b])$ y es la primitiva de u'. En particular, los valores $u(a)$ y $u(b)$ están bien definidos.

(II) El lema es un caso particular del teorema de inmersión de Sobolev que se enuncia más adelante. Su contenido no es trivial: a priori no es evidente que una función en

$W^{1,p}(a,b)$ sea continua. Se tiene en consecuencia

$$C^1([a,b]) \subset W^{1,p}(a,b) \subset C([a,b]), \quad \forall\, 1 \le p \le \infty.$$

(III) Más aún, si $1 < p < \infty$, se prueba en la misma línea que $u \in W^{1,p}(a,b)$ implica $u \in C^{0,\frac{1}{p'}}([a,b])$, esto es, u es Hölder continua con exponente $\frac{1}{p'}$. Si $p = \infty$, $C^{0,1}([a,b])$ y $W^{1,\infty}(a,b)$ se identifican.

(IV) Si $u \in W^{1,p}(a,b)$ y $u' = 0$ en c.t.p de (a,b), entonces, por el lema, $u(x) - u(y) = 0$ para todo $x, y \in [a,b]$, es decir, u es constante en $[a,b]$.

(V) En dimensión uno no es necesaria la noción de traza para dar sentido a los valores de frontera: por (i), $u(a)$ y $u(b)$ denotan los valores en los extremos del representante continuo de u. Con esta convención, si $1 \le p < \infty$ y $u \in W^{1,p}(a,b)$, entonces $u \in W_0^{1,p}(a,b)$ si y solo si $u(a) = u(b) = 0$ (véase el Teorema 8.12 del libro de Brezis[4]). En consecuencia, si $u_0 \in W^{1,p}(a,b)$, se tiene que $u \in u_0 + W_0^{1,p}(a,b)$ si y solo si $u(a) = u_0(a)$ y $u(b) = u_0(b)$.

1.3.4. Dominios con frontera Lipschitz Precisamos la regularidad que se asume sobre la frontera de los conjuntos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. En lo que sigue se denota

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < 1,\, j = 1, \dots, n\}, \qquad Q^+ = \{x \in Q : x_n > 0\}, \qquad Q^0 = \{x \in Q : x_n = 0\}.$$

Definición 1.32. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Se dice que Ω tiene **frontera Lipschitz** si para todo $x \in \partial\Omega$ existen un entorno $U \subset \mathbb{R}^n$ de x, una aplicación biyectiva $H : \bar{Q} \to \bar{U}$ y una constante $\gamma > 0$ tales que

$$|H(y) - H(z)| \le \gamma\, |y - z|, \quad \forall\, y, z \in \bar{Q}, \qquad |H^{-1}(y) - H^{-1}(z)| \le \gamma\, |y - z|, \quad \forall\, y, z \in \bar{U},$$

y además

$$H(Q^+) = U \cap \Omega, \qquad H(Q^0) = U \cap \partial\Omega.$$

Observación 1.33. Todo poliedro y todo conjunto convexo y acotado tienen frontera Lipschitz; en particular, la bola unidad de $\mathbb{R}^n$ y todo intervalo acotado $(a,b) \subset \mathbb{R}$ tienen

[4] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, 2011.

frontera Lipschitz.

1.3.5. Inmersiones e inmersiones compactas Establecemos a continuación los principales resultados sobre los espacios de Sobolev: relaciones de inclusión y propiedades de compacidad de dichas inclusiones. Generalizan a $\mathbb{R}^n$ el resultado obtenido en dimensión uno en el Lema 1.30.

Teorema 1.34 (Teorema de inmersión de Sobolev)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado, con frontera Lipschitz.*

- *Caso 1. Si $1 \leq p < n$, entonces*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, p^*],$$

*donde p^* es el **exponente crítico de Sobolev**, definido por*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad \textit{es decir} \quad p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Más precisamente, para cada $q \in [1, p^*]$ existe una constante $\gamma = \gamma(\Omega, p, q) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q} \leq \gamma \, \|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

- *Caso 2. Si $p = n$, entonces*

$$W^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, \infty).$$

Más precisamente, para cada $q \in [1, \infty)$ existe $\gamma = \gamma(\Omega, q) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q} \leq \gamma \, \|u\|_{W^{1,n}}, \quad \forall\, u \in W^{1,n}(\Omega).$$

- *Caso 3. Si $p > n$, entonces*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}), \quad \forall\, \alpha \in \left[0, 1 - \frac{n}{p}\right].$$

En particular, existe $\gamma = \gamma(\Omega, p) > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \gamma \|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Observación 1.35. (I) El teorema anterior no solo proporciona inclusiones, sino que, bajo restricciones adicionales, dichas inclusiones son compactas.

(II) Se dice que la inmersión de X en Y es **compacta** si todo conjunto acotado de X es precompacto (esto es, su clausura es compacta) en Y.

Teorema 1.36 (Teorema de Rellich-Kondrachov)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto, acotado, con frontera Lipschitz.*

- *Caso 1. Si* $1 \leq p < n$*, la inmersión de* $W^{1,p}(\Omega)$ *en* $L^q(\Omega)$ *es compacta para todo* $q \in [1, p^*)$*, donde* $p^* = \frac{np}{n-p}$*.*
- *Caso 2. Si* $p = n$*, la inmersión de* $W^{1,n}(\Omega)$ *en* $L^q(\Omega)$ *es compacta para todo* $q \in [1, \infty)$*.*
- *Caso 3. Si* $p > n$*, la inmersión de* $W^{1,p}(\Omega)$ *en* $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ *es compacta para todo* $\alpha \in \left[0, 1 - \frac{n}{p}\right)$*.*

En particular, en todos los casos ($1 \leq p \leq \infty$*) la inmersión de* $W^{1,p}(\Omega)$ *en* $L^p(\Omega)$ *es compacta.*

Observación 1.37. (I) Si $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$, solo aplican los Casos 2 y 3 y de hecho se tiene un resultado más fuerte:

$$C^1([a,b]) \subset W^{1,p}(a,b) \subset C^{0,\frac{1}{p}}([a,b]) \subset C([a,b]), \quad \forall\, p \geq 1.$$

Incluso para $p = 1$, las funciones de $W^{1,1}$ son continuas. La inmersión de $W^{1,p}(a, b)$ en $C([a, b])$ es compacta solamente cuando $p > 1$.

(II) El Caso 1 del Teorema de Rellich-Kondrachov es falso si $q = p^*$: la inmersión es continua pero no compacta en el exponente crítico.

(III) En dimensión $n \geq 2$, el Caso 2 del teorema de inmersión no se puede mejorar en general: las funciones de $W^{1,n}$ no son, en general, continuas ni acotadas.

(IV) Si Ω es no acotado, por ejemplo $\Omega = \mathbb{R}^n$, la compacidad de las inmersiones se pierde.

(v) Si se reemplaza $W^{1,p}$ por $W_0^{1,p}$, las mismas inmersiones siguen siendo válidas, pero sin requerir ninguna regularidad sobre $\partial\Omega$.

(vi) Análogas inmersiones se obtienen para los espacios $W^{k,p}$ con derivadas de orden superior.

El siguiente corolario, formulado en términos de sucesiones, captura la consecuencia más usada del Teorema de Rellich-Kondrachov: la convergencia débil en $W^{1,p}$ implica la convergencia fuerte en L^p.

Corolario 1.38. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado, con frontera Lipschitz, y $1 \leq p < \infty$. Si*

$$u_\nu \rightharpoonup u \text{ en } W^{1,p}(\Omega),$$

entonces

$$u_\nu \to u \text{ en } L^p(\Omega).$$

1.3.6. Fórmula de integración por partes El siguiente teorema no se encuentra en el libro de Dacorogna[4]; es un caso particular del resultado de la sección 1.5.3 del libro de Grisvard[5].

Teorema 1.39 (Fórmula de integración por partes)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera Lipschitz, y sean $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$. Entonces, para todo $i = 1, \ldots, n$,*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, v(x)\, dx + \int_\Omega u(x)\, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} u(x)\, v(x)\, \nu_i(x)\, dS(x),$$

donde $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ denota el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$, definido en casi todo punto de $\partial\Omega$ respecto a la medida de superficie dS.

1.3.7. Desigualdad de Poincaré y consecuencias Establecemos la desigualdad de Poincaré en $W_0^{1,p}(\Omega)$, que permite controlar la norma completa $\|u\|_{W^{1,p}}$ mediante $\|\nabla u\|_{L^p}$, y tres propiedades de los espacios $W^{1,p}(\Omega)$ y $W_0^{1,p}(\Omega)$ que se usan en el Capítulo 3: la compacidad débil de las sucesiones acotadas, la cerradura débil de $W_0^{1,p}(\Omega)$ y la unicidad de funciones con el mismo gradiente y la misma condición de frontera.

---

[5] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Vol. 24. Monographs and Studies in Mathematics. Boston: Pitman Advanced Publishing Program, 1985.

Teorema 1.40 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces existe una constante $\gamma = \gamma(\Omega, p) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p} \leq \gamma \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

o, equivalentemente, existe $\gamma = \gamma(\Omega, p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq \gamma \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Observación 1.41*.* (I) La hipótesis $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, que codifica la condición $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, es necesaria: si se admitieran funciones constantes no nulas ($\nabla u \equiv 0$ con $u \not\equiv 0$), la desigualdad sería trivialmente falsa.

(II) En el caso unidimensional, la condición $u(a) = u(b) = 0$ se puede debilitar: basta con que exista $c \in [a, b]$ tal que $u(c) = 0$ para que la desigualdad siga siendo válida.

(III) Una forma equivalente y de uso frecuente: si $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ y $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces existen constantes $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ tales que

$$\|\nabla u\|_{L^p} \geq \gamma_1 \|u\|_{W^{1,p}} - \gamma_2 \|u_0\|_{W^{1,p}}.$$

Esta versión es la que se utiliza típicamente para establecer coercitividad de funcionales con condiciones de frontera no homogéneas.

Proposición 1.42. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera Lipschitz, y sea $1 < p < \infty$. Si $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$ es una sucesión tal que*

$$\|u_\nu\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \gamma, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N},$$

para cierta constante $\gamma > 0$, entonces existen una subsucesión $\{u_{\nu_i}\}$ y un elemento $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tales que

$$u_{\nu_i} \rightharpoonup u \quad \text{en } W^{1,p}(\Omega).$$

Proposición 1.43. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera Lipschitz, y sea $1 < p < \infty$. Si $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ es una sucesión tal que*

$$u_\nu \rightharpoonup u \quad \text{en } W^{1,p}(\Omega),$$

entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposición 1.44. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, y sea $1 \leq p \leq \infty$. Sean $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ tales que*

$$u - v \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \textit{y} \quad \nabla u(x) = \nabla v(x) \quad \textit{en c.t.p } x \in \Omega.$$

Entonces

$$u(x) = v(x) \quad \textit{en c.t.p } x \in \Omega.$$

1.4. ANÁLISIS CONVEXO

Introducimos las nociones de convexidad y convexidad estricta, sus criterios de caracterización en términos del gradiente y de la matriz hessiana, y las desigualdades de Young y de Jensen. Para una exposición detallada de estos resultados, véase el libro de Rockafellar[6].

Definición 1.45. (I) Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para todo $x, y \in \Omega$ y todo $\lambda \in [0,1]$ se tiene $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$.

(II) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es **convexa** si para todo $x, y \in \Omega$ y todo $\lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

(III) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es **estrictamente convexa** si para todo $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$ y todo $\lambda \in (0,1)$,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Teorema 1.46. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, y denótese el producto escalar en $\mathbb{R}^n$ por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(I) f es convexa.

(II) Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle.$$

---

[6] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1970.

(III) Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$*,*

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0.$$

Si además $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$*, las afirmaciones anteriores son equivalentes a:*

(IV) Para todo $x, v \in \mathbb{R}^n$*,* $\langle \nabla^2 f(x)v, v \rangle \geq 0$*.*

Finalmente, si $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *y* $\langle \nabla^2 f(x)v, v \rangle > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *y todo* $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*, entonces* f *es estrictamente convexa.*

La siguiente desigualdad no se encuentra en el libro de Dacorogna[4], por lo que se ha tomado del libro de Evans[7].

Proposición 1.47 (Desigualdad de Young)**.** *Sean* $1 < p < \infty$ *y* p' *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$*. Entonces, para cualesquiera* $a, b \geq 0$*, se tiene que*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Además, dado $\varepsilon > 0$*, se tiene que*

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^p}{p} + \frac{\varepsilon^{-\frac{p'}{p}} b^{p'}}{p'}.$$

Teorema 1.48 (Desigualdad de Jensen)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y acotado,* $u \in L^1(\Omega)$ *y* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función convexa. Entonces*

$$f(u_\Omega) \leq \frac{1}{\operatorname{med}(\Omega)} \int_\Omega f(u(x))\, dx,$$

donde u_Ω *denota el valor medio de* u *sobre* Ω*, definido por*

$$u_\Omega = \frac{1}{\operatorname{med}(\Omega)} \int_\Omega u(x)\, dx.$$

2. MÉTODOS CLÁSICOS

Una vez establecido el marco funcional en el capítulo anterior, abordamos el problema central del cálculo de variaciones clásico. En lo que sigue estudiamos el problema modelo

$$(P) \qquad \inf\big\{I(u) : u \in X\big\} = m,$$

donde $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $f = f(x,u,\xi)$,

$$I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx,$$

y $X = \big\{u \in C^1([a,b]) : u(a) = \alpha, \;\; u(b) = \beta\big\}$.

Conviene tener presente la analogía con la minimización en dimensión finita,

$$\inf\big\{F(x) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n\big\}.$$

Los métodos que se denominan **clásicos** consisten en buscar los puntos $x \in \Omega$ que satisfacen $\nabla F(x) = 0$ y luego analizar las derivadas de orden superior para determinar la naturaleza del punto crítico (minimizador absoluto, minimizador o maximizador local, punto de silla). En el contexto variacional, la condición análoga a $\nabla F(x) = 0$ es una ecuación diferencial conocida como **ecuación de Euler-Lagrange**, cuya deducción ocupa la siguiente sección.

Los métodos clásicos presentan dos limitaciones importantes. En primer lugar, se asume implícitamente que las soluciones de (P) poseen suficiente regularidad (C^1, C^2, o eventualmente C^1 a trozos); esto suele ser difícil de demostrar a priori y en ocasiones falso. En segundo lugar, dependen de la solubilidad efectiva de la ecuación de Euler-Lagrange, lo cual no siempre es posible. Su interés reside, cuando se pueden llevar a cabo completamente, en la obtención de soluciones esencialmente explícitas.

2.1. LA ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE

2.1.1. El Teorema Principal Ahora establecemos el resultado central del cálculo de variaciones clásico en una dimensión: la caracterización de minimizadores mediante la ecuación de Euler-Lagrange. Salvo los detalles de las demostraciones, el tratamiento teórico se fundamenta principalmente en el libro de Dacorogna[4].

Teorema 2.1. *Sea $f \in C^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $f = f(x,u,\xi)$, y consideremos el problema*

$$\inf_{u\in X}\left\{ I(u) = \int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx \right\} = m, \tag{2.1}$$

donde $X = \big\{u \in C^1([a,b]) : u(a) = \alpha,\ \ u(b) = \beta\big\}$.

- *Parte 1. Si* (2.1) *admite un minimizador $\bar{u} \in X \cap C^2([a,b])$, entonces $\bar{u}$ satisface necesariamente la* ***ecuación de Euler-Lagrange***

$$\frac{d}{dx}\big[f_\xi(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\big] = f_u(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)), \quad x\in(a,b), \tag{2.2}$$

  o, de manera equivalente, desarrollando la derivada total,

$$f_{\xi\xi}(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\,\bar{u}''(x)+f_{u\xi}(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\,\bar{u}'(x)+f_{x\xi}(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)) = f_u(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)),$$

  donde $f_\xi = \frac{\partial f}{\partial \xi}$, $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$, $f_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}$, $f_{x\xi} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \xi}$ y $f_{u\xi} = \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial \xi}$.

- *Parte 2. Recíprocamente, si $\bar{u} \in X$ satisface* (2.2) *y la aplicación $(u,\xi)\mapsto f(x,u,\xi)$ es convexa para todo $x\in[a,b]$, entonces $\bar{u}$ es un minimizador de* (2.1)*.*

- *Parte 3. Si, además, la aplicación $(u,\xi)\mapsto f(x,u,\xi)$ es estrictamente convexa para todo $x\in[a,b]$, entonces el minimizador de* (2.1)*, en caso de existir, es único.*

Demostración. A continuación, probaremos las tres partes del teorema.

- *Parte 1.* Sea $\bar{u} \in X \cap C^2([a,b])$ un minimizador de (2.1). Sea v una **variación admisible**, esto es, una función $v \in C^1([a,b])$ con $v(a) = v(b) = 0$. Para cada $h\in\mathbb{R}$, la función $\bar{u} + hv$ pertenece a X, y por la minimalidad de $\bar{u}$ se tiene

$$I(\bar{u}) \le I(\bar{u}+hv), \quad \forall\, h\in\mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Defina $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi(h) = I(\bar{u} + hv) = \int_a^b f\left(x, \bar{u}(x) + hv(x), \bar{u}'(x) + hv'(x)\right) dx.$$

La función en el integrando, $g(x,h) = f\big(x, \bar{u}(x) + hv(x), \bar{u}'(x) + hv'(x)\big)$, es continua en $[a,b] \times \mathbb{R}$, y su derivada parcial respecto a h,

$$\frac{\partial g}{\partial h}(x,h) = f_u(x, \bar{u} + hv, \bar{u}' + hv')\, v(x) + f_\xi(x, \bar{u} + hv, \bar{u}' + hv')\, v'(x),$$

es continua en $[a,b] \times [-R,R]$ para todo $R > 0$, dado que $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y $\bar{u}, v \in C^1([a,b])$. Por el Teorema 1.6, la función Φ es derivable en $(-R,R)$ y su derivada se obtiene derivando bajo el signo integral; como $R > 0$ es arbitrario, Φ es derivable en todo $\mathbb{R}$. La desigualdad (2.3) implica que $\Phi(0) \leq \Phi(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$; es decir, Φ alcanza su mínimo global en el punto interior $h = 0$, por lo que necesariamente

$$\Phi'(0) = 0.$$

Calculemos $\Phi'(h)$ derivando bajo el signo integral:

$$\begin{aligned}
\Phi'(h) &= \frac{d}{dh}\big[I(\bar{u} + hv)\big] \\
&= \frac{d}{dh}\int_a^b f\big(x, \bar{u}(x) + hv(x), \bar{u}'(x) + hv'(x)\big)\, dx \\
&= \int_a^b \big[f_u(x, \bar{u} + hv, \bar{u}' + hv')\, v(x) + f_\xi(x, \bar{u} + hv, \bar{u}' + hv')\, v'(x)\big] dx
\end{aligned}$$

y evaluando en $h = 0$,

$$\int_a^b \big[f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\, v(x) + f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\, v'(x)\big] dx = 0. \tag{2.4}$$

La identidad (2.4) debe cumplirse para toda $v \in C^1([a,b])$ con $v(a) = v(b) = 0$; ésta es precisamente la llamada **forma débil** de la ecuación de Euler-Lagrange.
Como $\bar{u} \in C^2([a,b])$ y $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, la aplicación $x \mapsto f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))$ es de clase $C^1([a,b])$, por lo cual podemos integrar por partes el segundo sumando del

integrando de (2.4). Usando el hecho de que $v(a) = v(b) = 0$, obtenemos:

$$\int_a^b f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\, v'(x)\, dx = \big[f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\, v(x)\big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{d}{dx}\big[f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\big] v(x)\, dx$$
$$= -\int_a^b \frac{d}{dx}\big[f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\big] v(x)\, dx.$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (2.4), resulta:

$$\int_a^b \left[f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \frac{d}{dx}\big[f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\big]\right] v(x)\, dx = 0,$$
$$\forall\, v \in C^1([a,b]) \text{ con } v(a) = v(b) = 0.$$

La función $x \mapsto f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \frac{d}{dx}\big[f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\big]$ pertenece a $C([a,b]) \subset L^1_{\text{loc}}((a,b))$ y la igualdad anterior se cumple, en particular, para toda $v \in C_0^\infty((a,b))$. Por el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones (Teorema 1.22), vale que

$$f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \frac{d}{dx}\big[f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\big] = 0 \quad \text{en c.t.p} \quad x \in (a,b).$$

Finalmente, al ser $x \mapsto f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \frac{d}{dx}\big[f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\big]$ una función continua en $[a,b]$, el hecho de que se anule en c.t.p $x \in (a,b)$ implica que debe anularse en todo punto $x \in (a,b)$. Por lo tanto, se cumple la igualdad puntual

$$\frac{d}{dx}\big[f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\big] = f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)), \quad \forall\, x \in (a,b),$$

que corresponde exactamente a la ecuación de Euler-Lagrange (2.2).

- *Parte 2.* Sea ahora $\bar{u} \in X$ una solución de (2.2). Suponga que la aplicación $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ es convexa para todo $x \in [a,b]$. Probaremos que $I(\bar{u}) \leq I(u)$ para toda $u \in X$.
  Sea $u \in X$, es decir, $u \in C^1([a,b])$ con $u(a) = \alpha$ y $u(b) = \beta$, y fijemos $x \in [a,b]$. Definamos la función $F_x : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$F_x(u, \xi) = f(x, u, \xi).$$

Por hipótesis, F_x es convexa y, como $f \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, es de clase $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$,

con gradiente

$$\nabla F_x(u,\xi) = \big(f_u(x,u,\xi),\ f_\xi(x,u,\xi)\big).$$

Por el Teorema 1.46 (ii), aplicado a F_x en los puntos $\big(u(x),u'(x)\big)$ y $\big(\bar{u}(x),\bar{u}'(x)\big)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, se tiene

$$F_x\big(u(x),u'(x)\big) \geq F_x\big(\bar{u}(x),\bar{u}'(x)\big) + \Big\langle \nabla F_x\big(\bar{u}(x),\bar{u}'(x)\big),\ \big(u(x)-\bar{u}(x),\ u'(x)-\bar{u}'(x)\big)\Big\rangle.$$

Desarrollando el producto escalar en $\mathbb{R}^2$, esta desigualdad se escribe como

$$\begin{aligned} f(x,u(x),u'(x)) \geq f(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)) &+ f_u(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\,[u(x)-\bar{u}(x)] \\ &+ f_\xi(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\,[u'(x)-\bar{u}'(x)]. \end{aligned}$$

Como $x\in[a,b]$ es arbitrario, integrando sobre $[a,b]$ obtenemos:

$$I(u) \geq I(\bar{u}) + \int_a^b \big(f_u(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))[u(x)-\bar{u}(x)] + f_\xi(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))[u'(x)-\bar{u}'(x)]\big)dx.$$

Denotemos $v = u-\bar{u}$. Como $\bar{u},u\in X$ y ambas tienen las mismas condiciones de frontera, entonces $v(a)=v(b)=0$; es decir, v es una variación admisible. Para integrar por partes el segundo término del integrando, definamos

$$\Psi(x) = f_\xi(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)), \quad x\in[a,b].$$

Como $\bar{u}$ es solo de clase $C^1([a,b])$, no podemos derivar Ψ mediante la regla de la cadena. Sin embargo, decir que $\bar{u}$ satisface (2.2) significa precisamente que Ψ es derivable en (a,b) y que

$$\Psi'(x) = f_u(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x)), \quad x\in(a,b).$$

Puesto que $f\in C^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ y $\bar{u}\in C^1([a,b])$, el lado derecho es una función continua en $[a,b]$; por lo tanto, Ψ' se extiende de manera continua a $[a,b]$, es decir, $\Psi\in C^1([a,b])$. Integrando por partes y usando que $v(a)=v(b)=0$, obtenemos:

$$\int_a^b \Psi(x)\,v'(x)\,dx = \big[\Psi(x)\,v(x)\big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \Psi'(x)\,v(x)\,dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\big[f_\xi(x,\bar{u}(x),\bar{u}'(x))\big]v(x)\,dx,$$

de modo que

$$I(u) - I(\bar{u}) \geq \int_a^b \left[f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \frac{d}{dx}\big[f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\big] \right] v(x)\, dx.$$

Pero $\bar{u}$ satisface (2.2), así que $\int_a^b \left[f_u(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \frac{d}{dx}\big[f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\big] \right] v(x)\, dx = 0$ y por ende $I(u) \geq I(\bar{u})$. Como $u \in X$ es arbitraria, entonces $\bar{u}$ es minimizador de (2.1).

- *Parte 3.* Supongamos ahora que $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ es estrictamente convexa para todo $x \in [a, b]$, y sean $u, \bar{u} \in X$ dos minimizadores de (2.1), es decir, u y $\bar{u}$ son tales que $I(u) = I(\bar{u}) = m$. Queremos probar que $u \equiv \bar{u}$ en $[a, b]$. Definamos

$$w(x) = \frac{u(x) + \bar{u}(x)}{2}.$$

Entonces $w \in C^1([a, b])$ con $w(a) = \alpha$ y $w(b) = \beta$, es decir, $w \in X$.

Por la convexidad estricta, en todo punto $x \in [a, b]$ donde $(u(x), u'(x)) \neq (\bar{u}(x), \bar{u}'(x))$ se cumple la desigualdad estricta

$$f\left(x,\, \frac{u(x) + \bar{u}(x)}{2},\, \frac{u'(x) + \bar{u}'(x)}{2}\right) < \frac{1}{2} f(x, u(x), u'(x)) + \frac{1}{2} f(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x)),$$

mientras que en los puntos donde $(u(x), u'(x)) = (\bar{u}(x), \bar{u}'(x))$ ambos lados de la expresión coinciden.

Supongamos, por absurdo, que $u \not\equiv \bar{u}$ en $[a, b]$. Dado que $u, \bar{u} \in C^1([a, b])$, la función $x \mapsto u(x) - \bar{u}(x)$ es continua y no nula en al menos un punto de (a, b), ya que $u(a) = \alpha = \bar{u}(a)$ y $u(b) = \beta = \bar{u}(b)$. Por el teorema de conservación del signo, existe un subintervalo abierto $J \subset (a, b)$, de medida estrictamente positiva, tal que $u(x) \neq \bar{u}(x)$ para todo $x \in J$. Por ende, el conjunto de puntos $x \in [a, b]$ donde $(u(x), u'(x)) \neq (\bar{u}(x), \bar{u}'(x))$ tiene medida positiva, garantizando que al integrar sobre $[a, b]$ la desigualdad estricta se preserva:

$$\int_a^b f\left(x, \frac{u(x) + \bar{u}(x)}{2}, \frac{u'(x) + \bar{u}'(x)}{2}\right) dx < \int_a^b \left[\frac{1}{2} f(x, u(x), u'(x)) + \frac{1}{2} f(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\right] dx$$

$$\int_a^b f\left(x, w(x), w'(x)\right) dx < \frac{1}{2}\int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx + \frac{1}{2}\int_a^b f(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))\, dx$$

$$I(w) < \frac{1}{2} I(u) + \frac{1}{2} I(\bar{u}) = \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} m = m.$$

Esto implica que $I(w) < m$, lo cual contradice que m sea el ínfimo de I sobre X, pues $w \in X$.
Por lo tanto, debe cumplirse $u \equiv \bar{u}$ en $[a, b]$, demostrando que el minimizador es único.

■

Observación 2.2. (I) El teorema no afirma existencia de un minimizador: solamente caracteriza las propiedades que satisface en caso de existir, y proporciona una condición suficiente (bajo convexidad). La existencia de minimizadores es precisamente el problema que abordan los **métodos directos** del cálculo de variaciones.

(II) No siempre es razonable esperar que los minimizadores de (2.1) pertenezcan a $C^2([a, b])$ o ni siquiera a $C^1([a, b])$. La regularidad de los minimizadores es un problema independiente y delicado.

(III) Toda solución de (2.2) se denomina **punto estacionario** de I. Si la aplicación $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ no es convexa, aun cuando $\xi \mapsto f(x, u, \xi)$ lo sea para cada $(x, u) \in [a, b] \times \mathbb{R}$ fijo, un punto estacionario de I no es necesariamente un minimizador absoluto de (2.1): puede tratarse de un minimizador o maximizador local, o de un punto de silla.

2.1.2. Casos especiales importantes En varias situaciones de interés práctico, el lagrangiano f no depende de alguna de sus variables. En cada uno de los casos que estudiamos a continuación, la ecuación de Euler-Lagrange (2.2) admite una **integral primera**, esto es, una expresión en la que intervienen x, $\bar{u}$ y $\bar{u}'$, pero no $\bar{u}''$, que permanece constante a lo largo de toda solución de (2.2). De este modo, la ecuación de Euler-Lagrange, que es de segundo orden, se reduce a una ecuación de primer orden. Examinamos los tres casos $f = f(\xi)$, $f = f(x, \xi)$ y $f = f(u, \xi)$.

- *Caso 1:* $f(x, u, \xi) = f(\xi)$
  Este es el caso más sencillo. La ecuación de Euler-Lagrange es $\frac{d}{dx}\left(f'\left[\bar{u}'(x)\right]\right) = 0$, cuya integral primera es $f'\left[\bar{u}'(x)\right] =$ constante. Nótese que

$$\bar{u}(x) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a) + \alpha \tag{2.5}$$

es solución de la ecuación, ya que $f'\left[\bar{u}'(x)\right] = f'\left(\frac{\beta-\alpha}{b-a}\right) =$ constante, y además satisface las condiciones de frontera $\bar{u}(a) = \alpha$, $\bar{u}(b) = \beta$. Es, por tanto, un punto estacionario de I (véase la Observación 2.2 (iii)). Sin embargo, un punto estacionario de I no es siempre un minimizador de (2.1), como se verá en los Casos 1.2 y 1.3 a continuación.

- *Caso 1.1:* f es convexa
  Si f es convexa, $\bar{u}$ definido como antes es en efecto un minimizador. Esto se sigue del Teorema 2.1, pero también puede verse de una manera más elemental (que sigue siendo válida aun cuando $f \in C^0(\mathbb{R})$). Dada $u \in C^1([a,b])$ con $u(a) = \alpha$ y $u(b) = \beta$, por la desigualdad de Jensen (Teorema 1.48) aplicada a u' sobre (a,b), y por el Teorema Fundamental del Cálculo, vale que

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(u'(x)\right)dx &\geq f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u'(x)dx\right) = f\left(\frac{u(b)-u(a)}{b-a}\right)\\ &= f\left(\frac{\beta-\alpha}{b-a}\right) = f\left(\bar{u}'(x)\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\bar{u}'(x)\right)dx,\end{aligned}$$

  de donde $\int_a^b f\left(u'(x)\right)dx \geq \int_a^b f\left(\bar{u}'(x)\right)dx$, es decir, $I(u) \geq I(\bar{u})$, que es lo que se quería probar. Si f no es estrictamente convexa, en general pueden existir otros minimizadores.

- *Caso 1.2:* f no es convexa
  Si f no es convexa, entonces (2.1) puede no tener solución y, en consecuencia, $\bar{u}$ no es necesariamente un minimizador.

  Ejemplo 2.3. Si tomamos $f(\xi) = e^{-\xi^2}$, la cual no es convexa pues $f''(\xi) = 2(2\xi^2-1)e^{-\xi^2}$ toma valores estrictamente negativos para todo $\xi \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, y consideramos el problema

$$(P_1) \quad \inf_{u\in X}\left\{I(u) = \int_0^1 f\left(u'(x)\right)dx\right\} = m,$$

  donde $X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$, entonces (P_1) no tiene solución. De hecho, la recta candidata de (2.5) dada por $\bar{u}(x) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a)+\alpha$ se reduce a $\bar{u} \equiv 0$, la cual resulta ser un **maximizador** de I en la clase de funciones

admisibles X. En efecto, como $[u'(x)]^2 \geq 0$, se cumple que $e^{-[u'(x)]^2} \leq e^0 = 1$ para todo $x \in [0,1]$, de modo que

$$I(u) = \int_0^1 e^{-[u'(x)]^2} dx \leq \int_0^1 1\, dx = 1, \qquad \forall u \in X,$$

alcanzándose este valor máximo precisamente en $\bar{u}$, ya que $I(\bar{u}) = \int_0^1 e^0 dx = 1$. Sin embargo, $\bar{u}$ no es un minimizador y el problema (P_1) no tiene minimizador en X, como mostramos a continuación. Definimos para $\nu \in \mathbb{N}$ la sucesión de funciones

$$u_\nu(x) = \nu \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\nu}{4}.$$

Se verifica que $u_\nu \in X$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$ y, al evaluar el funcional, obtenemos

$$\begin{aligned} I(u_\nu) &= \int_0^1 e^{-4\nu^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2\nu} \int_{-\nu}^{\nu} e^{-y^2} dy \\ &\leq \frac{1}{2\nu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\nu} \to 0 \quad \text{cuando } \nu \to \infty. \end{aligned}$$

Puesto que $I(u) > 0$ para toda $u \in X$, se tiene que $m \geq 0$; al existir una sucesión contenida en X tal que $I(u_\nu) \to 0$, concluimos que $m = 0$. No obstante, como la función exponencial es estrictamente positiva, no existe ninguna función $u \in X$ que satisfaga

$$\int_0^1 e^{-[u'(x)]^2} dx = 0.$$

Por lo tanto, no existe ningún elemento en X que alcance el ínfimo $m = 0$, y por ello (P_1) carece de solución.

- *Caso 1.3:* El ínfimo puede no alcanzarse en C^1
  Mostramos ahora que, incluso en este caso sencillo, el ínfimo de (2.1) puede no alcanzarse en $C^1([a,b])$ y, sin embargo, alcanzarse en una clase más amplia de funciones.

  Ejemplo 2.4. Considere $f(\xi) = (\xi^2 - 1)^2$ y el problema

$$(P_2) \quad \inf_{u \in X} \left\{ I(u) = \int_0^1 f\left(u'(x)\right) dx \right\} = m,$$

donde $X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$. Vamos a mostrar que (P_2) no tiene

solución. Asociamos a (P_2) el problema

$$(P_{2piec}) \qquad \inf_{u\in X_{piec}} \left\{ I(u) = \int_0^1 f\left(u'(x)\right) dx \right\} = m_{piec},$$

donde $X_{piec} = \left\{ u \in C^1_{piec}([0,1]) : u(0) = u(1) = 0 \right\}$. Este último problema admite a

$$v(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1-x & \text{si } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

como solución explícita. En efecto, se satisface que $v \in X_{piec}$ y, como $f(\xi) = (\xi^2-1)^2 \geq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, entonces $I(u) \geq 0$ para toda $u \in X_{piec}$. La derivada por tramos satisface $[v'(x)]^2 = 1$ en $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$, de modo que $I(v) = 0$. Por ello, v es un minimizador global y $m_{piec} = 0$.

Vamos a mostrar que también $m = 0$. Consideremos, para $\nu \in \mathbb{N}$ con $\nu \geq 2$, la sucesión

$$u_\nu(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu}\right] \\ -2\nu^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 - 4\nu\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - x + 1 & \text{si } x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu}, \frac{1}{2}\right] \\ 1-x & \text{si } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

La condición $\nu \geq 2$ garantiza que $\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu} \geq 0$, de modo que los tres tramos están contenidos en $[0,1]$.

Sea $\nu \in \mathbb{N}$ con $\nu \geq 2$. Observe que $u_\nu(0) = 0$, $u_\nu(1) = 0$ y que tanto u_ν como su derivada

$$u'_\nu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu}\right] \\ -6\nu^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 8\nu\left(x-\frac{1}{2}\right) - 1 & \text{si } x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu}, \frac{1}{2}\right] \\ -1 & \text{si } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

son continuas en $[0,1]$, garantizando que $u_\nu \in C^1([0,1])$ y, por ende, $u_\nu \in X$.

Para estimar $f(u'_\nu)$ en el tramo central, escribamos $t = \nu\left(x - \frac{1}{2}\right)$, de modo que $x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu}, \frac{1}{2}\right]$ si y solo si $t \in (-1, 0]$, y $u'_\nu(x) = q(t)$, donde $q(t) = -6t^2 - 8t - 1$. La función q es una parábola cóncava con vértice en $t = -\frac{2}{3}$, donde $q\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$, y en los extremos toma los valores $q(-1) = 1$ y $q(0) = -1$. Por lo tanto, $u'_\nu(x) \in \left[-1, \frac{5}{3}\right]$ para todo x en el tramo central, de donde $[u'_\nu(x)]^2 - 1 \in \left[-1, \frac{16}{9}\right]$ y, en

consecuencia,

$$0 \leq f\left(u_\nu'(x)\right) = \left([u_\nu'(x)]^2 - 1\right)^2 \leq \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{256}{81}, \quad x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu}, \frac{1}{2}\right].$$

Además, como $f(1) = f(-1) = 0$,

$$\begin{aligned} I(u_\nu) &= \int_0^1 f\left(u_\nu'(x)\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\nu}} f\left(u_\nu'(x)\right) dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{\nu}}^{\frac{1}{2}} f\left(u_\nu'(x)\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(u_\nu'(x)\right)\, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\nu}} f(1)\, dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{\nu}}^{\frac{1}{2}} f\left(u_\nu'(x)\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(-1)\, dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{\nu}}^{\frac{1}{2}} f\left(u_\nu'(x)\right) dx \leq \frac{1}{\nu} \cdot \frac{256}{81} \to 0 \quad \text{cuando } \nu \to \infty. \end{aligned}$$

Puesto que $I(u) \geq 0$ para toda $u \in X$, se tiene que $m \geq 0$; al existir una sucesión contenida en X tal que $I(u_\nu) \to 0$, concluimos que $m = 0$.

Finalmente, el hecho de que $m = 0$ implica que el problema (P_2), a diferencia de (P_{2piec}), no admite solución en X. En efecto, supongamos que existiera un minimizador $\bar{u} \in X$ tal que $I(\bar{u}) = 0$. Como $\bar{u} \in C^1([0,1])$, y como el integrando $f(\xi) = (\xi^2 - 1)^2$ es continuo y no negativo, entonces el hecho de que $I(\bar{u}) = 0$ exige que $f(\bar{u}'(x)) = 0$ para todo $x \in [0,1]$, lo que equivale a la condición $|\bar{u}'(x)| = 1$ para todo $x \in [0,1]$. Puesto que $\bar{u}'$ es continua en $[0,1]$, solo existen dos posibilidades:

$$\bar{u}'(x) = 1, \quad \forall\, x \in [0,1] \quad \text{o bien} \quad \bar{u}'(x) = -1, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

Integrando cualquiera de las dos opciones con la condición de frontera $\bar{u}(0) = 0$, se obtiene respectivamente $\bar{u}(x) = x$ (donde $\bar{u}(1) = 1 \neq 0$) o bien $\bar{u}(x) = -x$ (donde $\bar{u}(1) = -1 \neq 0$), lo cual contradice la admisibilidad de $\bar{u} \in X$. Por lo tanto, no existe ninguna función en X que alcance el ínfimo $m = 0$, concluyendo que el problema (P_2) carece de solución.

Como observación adicional, la ecuación de Euler-Lagrange para este problema es

$$\frac{d}{dx}\left[\bar{u}'(x)\left([\bar{u}'(x)]^2 - 1\right)\right] = 0$$

y tiene a $\bar{u} \equiv 0$ como solución, la cual pertenece a X. No obstante, esto ilustra que la ecuación de Euler-Lagrange (Parte 1 del Teorema 2.1) proporciona únicamente una condición **necesaria** para la existencia de minimizadores. Puesto que el lagrangiano $f(\xi) = (\xi^2 - 1)^2$ no es convexo en $\mathbb{R}$, la Parte 2 del teorema no es aplicable. En efecto, $I(\bar{u}) = 1 > 0 = m$, lo que confirma que $\bar{u} \equiv 0$ es un punto estacionario que no soluciona el problema (P_2).

- *Caso 2:* $f(x, u, \xi) = f(x, \xi)$
  En este caso la ecuación de Euler-Lagrange es $\frac{d}{dx}\left[f_\xi\left(x, \bar{u}'(x)\right)\right] = 0$, cuya integral primera es $f_\xi\left(x, \bar{u}'(x)\right) =$ constante. Esta ecuación es ya más difícil de resolver que la del caso anterior y, en general, no admite una solución tan sencilla como la exhibida en (2.5).

Ejemplo 2.5 (El ejemplo de Weierstrass)**.** Sea $f(x, \xi) = x\xi^2$ y considere el problema

$$(P_3) \quad \inf_{u \in X}\left\{I(u) = \int_0^1 f\left(x, u'(x)\right) dx\right\} = m,$$

donde $X = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = 1, u(1) = 0\}$. Vamos a mostrar que (P_3) no tiene solución de clase $C^1([0,1])$ ni de clase $C^1_{piec}([0,1])$. Obsérvese que la aplicación $\xi \mapsto f(x, \xi) = x\xi^2$ es convexa para todo $x \in [0,1]$, e incluso estrictamente convexa si $x \in (0,1]$.

Si (P_3) admitiera un minimizador $\bar{u} \in X \cap C^2([0,1])$, por la Parte 1 del Teorema 2.1 este debería satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange. Como $f_\xi = 2x\xi$, dicha ecuación es, para todo $x \in (0,1)$,

$$\frac{d}{dx}\left[x\bar{u}'(x)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}'(x) = \frac{c}{x} \quad \Rightarrow \quad \bar{u}(x) = c\log(x) + d$$

con $c, d \in \mathbb{R}$. Obsérvese que ninguna función de esta familia puede ser una solución admisible en X. En efecto, la condición $\bar{u}(1) = 0$ impone que $d = 0$, resultando $\bar{u}(x) = c\log(x)$. Si $c = 0$, se tiene $\bar{u} \equiv 0$, lo que contradice la condición $\bar{u}(0) = 1$. Si $c \neq 0$, el límite $\lim_{x \to 0^+}\left[c\log(x)\right] = \pm\infty$ impide extender $\bar{u}$ de manera continua a $x = 0$ con valor $\bar{u}(0) = 1$. Así, (P_3) no admite minimizadores de clase $C^2([0,1])$; a continuación mostramos que, de hecho, no admite ningún minimizador en X, ni siquiera en una clase más amplia.

Asociamos a (P_3) el siguiente problema

$$(P_{3piec}) \quad \inf_{u\in X_{piec}} \left\{ I(u) = \int_0^1 f\left(x, u'(x)\right) dx \right\} = m_{piec},$$

donde $X_{piec} = \left\{ u \in C^1_{piec}([0,1]) : u(0) = 1, u(1) = 0 \right\}$. Probaremos a continuación que ni (P_3) ni (P_{3piec}) tienen minimizador.

Iniciamos mostrando que $m_{piec} = 0$. Para ello, consideremos la sucesión, para $\nu \in \mathbb{N}$ con $\nu \geq 2$ (de modo que $\log(\nu) > 0$), dada por

$$u_\nu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{\nu}\right] \\ \frac{-\log(x)}{\log(\nu)} & \text{si } x \in \left(\frac{1}{\nu}, 1\right] \end{cases}.$$

Nótese que para $\nu \in \mathbb{N}$ con $\nu \geq 2$, vale que $u_\nu(0) = 1$, $u_\nu(1) = 0$, que ambos tramos toman el valor 1 en $x = \frac{1}{\nu}$, y que

$$u'_\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{\nu}\right) \\ -\frac{1}{x\log(\nu)} & \text{si } x \in \left(\frac{1}{\nu}, 1\right] \end{cases}.$$

Por ello, se tiene que $u_\nu \in C^1_{piec}([0,1])$ y además obtenemos que

$$\begin{aligned} I(u_\nu) &= \int_0^1 x\left[u'_\nu(x)\right]^2 dx = \int_0^{\frac{1}{\nu}} x\left[u'_\nu(x)\right]^2 dx + \int_{\frac{1}{\nu}}^1 x\left[u'_\nu(x)\right]^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{\nu}} x\cdot(0)^2 dx + \int_{\frac{1}{\nu}}^1 x\cdot\left[-\frac{1}{x\log(\nu)}\right]^2 dx = 0 + \int_{\frac{1}{\nu}}^1 x\cdot\frac{1}{x^2\left[\log(\nu)\right]^2} dx \\ &= \frac{1}{\left[\log(\nu)\right]^2}\int_{\frac{1}{\nu}}^1 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{\left[\log(\nu)\right]^2}\left[\log(1) - \log\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\left[\log(\nu)\right]^2}\left[0 + \log(\nu)\right] = \frac{\log(\nu)}{\left[\log(\nu)\right]^2} = \frac{1}{\log(\nu)} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } \nu \to \infty. \end{aligned}$$

Puesto que $I(u) \geq 0$ para toda $u \in X_{piec}$, se tiene que $m_{piec} \geq 0$; al existir una sucesión contenida en X_{piec} tal que $I(u_\nu) \to 0$, se concluye que $m_{piec} = 0$.

Mostraremos ahora que $m = 0$. Para ello, consideremos la sucesión, para $\nu \in \mathbb{N}$ con

$\nu \geq 2$, dada por

$$u_\nu(x) = \begin{cases} \frac{-\nu^2}{\log(\nu)}x^2 + \frac{\nu}{\log(\nu)}x + 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{\nu}\right] \\ \frac{-\log(x)}{\log(\nu)} & \text{si } x \in \left(\frac{1}{\nu}, 1\right] \end{cases}.$$

Nótese que para $\nu \in \mathbb{N}$ con $\nu \geq 2$, vale que $u_\nu(0) = 1$, $u_\nu(1) = 0$ y

$$u'_\nu(x) = \begin{cases} \frac{\nu}{\log(\nu)}(1 - 2\nu x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{\nu}\right] \\ \frac{-1}{x\log(\nu)} & \text{si } x \in \left(\frac{1}{\nu}, 1\right] \end{cases}.$$

En $x = \frac{1}{\nu}$ ambos tramos de u_ν toman el valor 1 y ambos tramos de u'_ν toman el valor $-\frac{\nu}{\log(\nu)}$. Por ello, se tiene que $u_\nu \in C^1([0,1])$ y además obtenemos que

$$\begin{aligned} I(u_\nu) &= \int_0^1 x\left[u'_\nu(x)\right]^2 dx = \int_0^{\frac{1}{\nu}} x\left[u'_\nu(x)\right]^2 dx + \int_{\frac{1}{\nu}}^1 x\left[u'_\nu(x)\right]^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{\nu}} x \cdot \left[\frac{\nu}{\log(\nu)}(1 - 2\nu x)\right]^2 dx + \int_{\frac{1}{\nu}}^1 x \cdot \left[\frac{-1}{x\log(\nu)}\right]^2 dx \\ &= \frac{\nu^2}{\left[\log(\nu)\right]^2}\int_0^{\frac{1}{\nu}} x(1 - 4\nu x + 4\nu^2 x^2)dx + \frac{1}{\left[\log(\nu)\right]^2}\int_{\frac{1}{\nu}}^1 \frac{1}{x}dx \\ &= \frac{\nu^2}{\left[\log(\nu)\right]^2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{4\nu x^3}{3} + \nu^2 x^4\right]_0^{\frac{1}{\nu}} + \frac{1}{\left[\log(\nu)\right]^2}\left[\log(1) - \log\left(\frac{1}{\nu}\right)\right] \\ &= \frac{\nu^2}{\left[\log(\nu)\right]^2}\left(\frac{1}{2\nu^2} - \frac{4}{3\nu^2} + \frac{1}{\nu^2}\right) + \frac{\log(\nu)}{\left[\log(\nu)\right]^2} \\ &= \frac{1}{\left[\log(\nu)\right]^2}\left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{\log(\nu)} = \frac{1}{6\left[\log(\nu)\right]^2} + \frac{1}{\log(\nu)} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } \nu \to \infty. \end{aligned}$$

Puesto que $I(u) \geq 0$ para toda $u \in X$, se tiene que $m \geq 0$; al existir una sucesión contenida en X tal que $I(u_\nu) \to 0$, concluimos que $m = 0$.

Finalmente, demostramos que ni (P_3) ni (P_{3piec}) admiten minimizador. Supongamos, por contradicción, que existiera una función $v \in X_{piec}$ tal que $I(v) = m_{piec} = 0$. Sea $D \subset [0,1]$ el conjunto finito de puntos donde v no es derivable. En cada uno de los subintervalos abiertos determinados por los puntos de $D \cup \{0,1\}$, la función $x \mapsto x[v'(x)]^2$ es continua y no negativa; como su integral sobre $[0,1]$ es nula, debe anularse en cada uno de dichos subintervalos. Dado que $x > 0$ para $x \in (0,1]$, se

deduce que $v'(x) = 0$ para todo $x \in (0,1] \setminus D$. Como $v \in X_{piec}$ y $X_{piec} \subset C^1_{piec}([0,1]) \subset C([0,1])$, entonces $v \in C([0,1])$. Por la continuidad de v en $[0,1]$ y por el hecho de que $v'(x) = 0$ en cada uno de los subintervalos anteriores, el teorema del valor medio garantiza que v es constante en cada uno de ellos y, por continuidad, en todo $[0,1]$. De la condición $v(1) = 0$ se sigue que $v \equiv 0$, lo cual contradice que $v(0) = 1$. Por lo tanto, no existe ninguna función en X_{piec} (y, en consecuencia, tampoco en $X \subset X_{piec}$) que alcance el valor ínfimo 0, concluyendo que ni (P_3) ni (P_{3piec}) tienen minimizador.

Observación 2.6. Más adelante, en el Ejemplo 3.7, probaremos que el problema (P_3), además de no poseer soluciones en $C^1([0,1])$ ni en $C^1_{\text{piec}}([0,1])$ como acabamos de constatar, tampoco tiene solución en $W^{1,2}(0,1)$.

- *Caso 3:* $f(x,u,\xi) = f(u,\xi)$
  Aunque este caso es bastante más difícil de tratar que los anteriores, posee una propiedad importante que no está presente en el caso más general $f = f(x,u,\xi)$. Sea $\bar{u} \in X \cap C^2([a,b])$ una solución de la ecuación de Euler-Lagrange, que en este caso se escribe

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi\left(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)\right)\right] = f_u\left(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)\right), \quad x \in (a,b),$$

  o equivalentemente

$$0 = f_u\left(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)\right) - \frac{d}{dx}\left[f_\xi\left(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)\right)\right], \quad x \in (a,b).$$

  Entonces $\bar{u}$ admite una integral primera, conocida como **identidad de Beltrami**. En efecto, considere la aplicación $x \mapsto f(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \bar{u}'(x) f_\xi(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))$. Como $\bar{u} \in C^2([a,b])$, podemos derivarla respecto a x mediante la regla de la cadena y la regla del producto, obteniendo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[f(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \bar{u}'(x) f_\xi(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))\right] &= f_u(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))\bar{u}'(x) + f_\xi(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))\bar{u}''(x) \\
&\quad - \bar{u}''(x) f_\xi(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \bar{u}'(x)\frac{d}{dx}\left[f_\xi(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))\right] \\
&= \bar{u}'(x) f_u(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \bar{u}'(x)\frac{d}{dx}\left[f_\xi(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))\right] \\
&= \bar{u}'(x)\left(f_u(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \frac{d}{dx}\left[f_\xi(\bar{u}(x), \bar{u}'(x))\right]\right) \\
&= \bar{u}'(x) \cdot 0 = 0, \quad x \in (a,b),
\end{aligned}$$

de donde

$$f\left(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)\right) - \bar{u}'(x) f_\xi\left(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)\right) = \text{ constante }, \quad x \in (a, b). \tag{2.6}$$

Presentamos a continuación dos ejemplos de este caso. En el primero el lagrangiano es conjuntamente convexo en (u, ξ) y el Teorema 2.1 permite resolver el problema por completo. En el segundo, un problema clásico de origen geométrico, la convexidad conjunta falla, y veremos con precisión hasta dónde llega el método clásico.

Ejemplo 2.7. Sean $a < b$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f(u, \xi) = \frac{1}{2}\left(\xi^2 + u^2\right)$ y considere el problema

$$(P_4) \quad \inf_{u \in X} \left\{ I(u) = \frac{1}{2} \int_a^b \left([u'(x)]^2 + [u(x)]^2 \right) dx \right\} = m,$$

donde $X = \{u \in C^1([a, b]) : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta\}$. Mostraremos que (P_4) admite un único minimizador, que calcularemos explícitamente.

El lagrangiano es de clase $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y su matriz hessiana es

$$\nabla^2 f(u, \xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que satisface $\langle \nabla^2 f(u, \xi) v, v \rangle = |v|^2 > 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Por el Teorema 1.46, la aplicación $(u, \xi) \mapsto f(u, \xi)$ es estrictamente convexa en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En consecuencia, por las Partes 2 y 3 del Teorema 2.1, basta encontrar una función $\bar{u} \in X$ que satisfaga la ecuación de Euler-Lagrange: esta será el único minimizador de (P_4).

Como $f_u(u, \xi) = u$ y $f_\xi(u, \xi) = \xi$, la ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{d}{dx}\left[\bar{u}'(x)\right] = \bar{u}(x), \quad \text{ es decir, } \quad \bar{u}''(x) = \bar{u}(x), \quad x \in (a, b),$$

y la identidad de Beltrami (2.6) se escribe $\frac{1}{2}[\bar{u}(x)]^2 - \frac{1}{2}[\bar{u}'(x)]^2 =$ constante. En este caso resulta más directo resolver la ecuación de Euler-Lagrange, que es lineal de coeficientes constantes. Las funciones $x \mapsto \sinh(b - x)$ y $x \mapsto \sinh(x - a)$ son soluciones de $y'' = y$ y son linealmente independientes, pues la primera se anula en $x = b$ pero no en $x = a$, y la segunda se anula en $x = a$ pero no en $x = b$, ya que $\sinh(b - a) > 0$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación es

$$\bar{u}(x) = c_1 \sinh(b - x) + c_2 \sinh(x - a), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones de frontera obtenemos $\bar{u}(a) = c_1 \sinh(b-a) = \alpha$ y $\bar{u}(b) = c_2 \sinh(b-a) = \beta$, de donde

$$\bar{u}(x) = \frac{\alpha \sinh(b-x) + \beta \sinh(x-a)}{\sinh(b-a)}, \quad x \in [a,b].$$

Esta función es de clase $C^\infty([a,b])$, pertenece a X y satisface la ecuación de Euler-Lagrange. Por las Partes 2 y 3 del Teorema 2.1, $\bar{u}$ es el único minimizador de (P_4).

Ejemplo 2.8 (Superficies mínimas de revolución)**.** Considere $f(u,\xi) = 2\pi u\sqrt{1+\xi^2}$ y el problema

$$(P_5) \qquad \inf_{u \in X} \left\{ I(u) = \int_a^b f\left(u(x), u'(x)\right) dx \right\} = m,$$

donde $X = \{u \in C^1([a,b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta \text{ y } u(x) > 0, \forall\, x \in [a,b]\}$, con $\alpha, \beta > 0$. El valor $I(u)$ es el área de la superficie que se obtiene al rotar la gráfica de u alrededor del eje x.

Sea $\bar{u} \in X \cap C^2([a,b])$ un minimizador de (P_5). Antes de continuar, verifiquemos que la Parte 1 del Teorema 2.1 puede aplicarse a (P_5), aunque la clase X incluya la restricción adicional $u > 0$. En la demostración de dicha parte se usa que $\bar{u} + hv \in X$ para todo $h \in \mathbb{R}$; aquí esto ya no es cierto, pues si $|h|$ es grande la función $\bar{u} + hv$ puede tomar valores negativos. Sin embargo, basta con que $\bar{u} + hv \in X$ para $|h|$ suficientemente pequeño, como mostramos a continuación.

Sea $v \in C^1([a,b])$ con $v(a) = v(b) = 0$. Como $\bar{u}$ es continua y positiva en el compacto $[a,b]$, alcanza allí su mínimo, de modo que $c = \min_{x\in[a,b]} \bar{u}(x) > 0$; denotemos además $M = \max_{x\in[a,b]} |v(x)| \geq 0$ y $\delta = \frac{c}{M+1} > 0$ (sumamos 1 para evitar dividir por cero en el caso $M = 0$). Si $|h| < \delta$, para todo $x \in [a,b]$ se tiene

$$\bar{u}(x) + hv(x) \geq \bar{u}(x) - |h|\,|v(x)| \geq c + |h|M > c - \frac{cM}{M+1} = \frac{c}{M+1} > 0.$$

Así, $\bar{u} + hv \in X$ para todo $h \in (-\delta, \delta)$, y por la minimalidad de $\bar{u}$ se tiene $\Phi(0) \leq \Phi(h)$ para todo $h \in (-\delta, \delta)$. Es decir, Φ alcanza un mínimo en el punto interior $h = 0$ del intervalo $(-\delta, \delta)$, de modo que $\Phi'(0) = 0$. A partir de aquí, la demostración de la Parte 1 del Teorema 2.1 se aplica sin cambios.

Por la Parte 1 del Teorema 2.1, $\bar{u}$ satisface la ecuación de Euler-Lagrange y, como el

lagrangiano es de la forma $f(x,u,\xi) = f(u,\xi)$, también la identidad de Beltrami (2.6):

$$f(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) - \bar{u}'(x) f_\xi(\bar{u}(x), \bar{u}'(x)) = C, \quad x \in (a,b),$$

donde $C \in \mathbb{R}$. Las derivadas parciales del lagrangiano que usaremos son

$$f_u(u,\xi) = 2\pi\sqrt{1+\xi^2}, \qquad f_\xi(u,\xi) = \frac{2\pi u\xi}{\sqrt{1+\xi^2}},$$
$$f_{u\xi}(u,\xi) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}, \qquad f_{\xi\xi}(u,\xi) = \frac{2\pi u}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Reemplazando f y f_ξ en la identidad de Beltrami, deducimos que

$$\begin{aligned} C &= 2\pi\bar{u}(x)\sqrt{1+[\bar{u}'(x)]^2} - \bar{u}'(x)\left[\frac{2\pi\bar{u}(x)\bar{u}'(x)}{\sqrt{1+[\bar{u}'(x)]^2}}\right] \\ &= 2\pi\bar{u}(x)\left[\frac{1+[\bar{u}'(x)]^2 - [\bar{u}'(x)]^2}{\sqrt{1+[\bar{u}'(x)]^2}}\right] = \frac{2\pi\bar{u}(x)}{\sqrt{1+[\bar{u}'(x)]^2}}, \quad x \in (a,b). \end{aligned}$$

Como $\bar{u} \in X$, entonces $\bar{u}(x) > 0$ en $[a,b]$, de donde se concluye que $C > 0$. Definiendo $\lambda = \frac{C}{2\pi} > 0$, la ecuación anterior se reduce a $\frac{\bar{u}(x)}{\sqrt{1+[\bar{u}'(x)]^2}} = \lambda$, es decir,

$$1 + [\bar{u}'(x)]^2 = \frac{[\bar{u}(x)]^2}{\lambda^2}, \quad x \in (a,b). \tag{2.7}$$

Por otra parte, como $f_{x\xi} = 0$, la forma desarrollada de la ecuación de Euler-Lagrange (Parte 1 del Teorema 2.1) se escribe

$$\frac{2\pi\bar{u}(x)}{(1+[\bar{u}'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}}\,\bar{u}''(x) + \frac{2\pi\bar{u}'(x)}{\sqrt{1+[\bar{u}'(x)]^2}}\,\bar{u}'(x) = 2\pi\sqrt{1+[\bar{u}'(x)]^2}, \quad x \in (a,b).$$

Multiplicando por $\frac{1}{2\pi}\left(1+[\bar{u}'(x)]^2\right)^{\frac{3}{2}}$, obtenemos

$$\bar{u}(x)\,\bar{u}''(x) + [\bar{u}'(x)]^2\left(1+[\bar{u}'(x)]^2\right) = \left(1+[\bar{u}'(x)]^2\right)^2,$$

de donde

$$\bar{u}(x)\,\bar{u}''(x) = \left(1+[\bar{u}'(x)]^2\right)\left(1+[\bar{u}'(x)]^2 - [\bar{u}'(x)]^2\right) = 1+[\bar{u}'(x)]^2, \quad x \in (a,b).$$

Sustituyendo (2.7) en el lado derecho y dividiendo por $\bar{u}(x) > 0$, concluimos que $\bar{u}$ satisface la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes

$$\bar{u}''(x) = \frac{1}{\lambda^2}\,\bar{u}(x), \quad x \in (a,b),$$

cuya solución general es

$$\bar{u}(x) = c_1 e^{\frac{x}{\lambda}} + c_2 e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

la cual se extiende por continuidad a $[a,b]$. Para determinar la relación entre c_1 y c_2, volvemos a (2.7), que equivale a $[\bar{u}(x)]^2 - \lambda^2[\bar{u}'(x)]^2 = \lambda^2$. Como $\lambda\bar{u}'(x) = c_1 e^{\frac{x}{\lambda}} - c_2 e^{-\frac{x}{\lambda}}$, se tiene

$$\lambda^2 = [\bar{u}(x)]^2 - \lambda^2[\bar{u}'(x)]^2 = \left(c_1 e^{\frac{x}{\lambda}} + c_2 e^{-\frac{x}{\lambda}}\right)^2 - \left(c_1 e^{\frac{x}{\lambda}} - c_2 e^{-\frac{x}{\lambda}}\right)^2 = 4c_1c_2,$$

es decir, $c_1 c_2 = \frac{\lambda^2}{4} > 0$. Luego c_1 y c_2 tienen el mismo signo, y como $\bar{u} > 0$, ambos son positivos. Definiendo $\mu \in \mathbb{R}$ mediante $c_1 = \frac{\lambda}{2}e^{\mu}$, se obtiene $c_2 = \frac{\lambda^2}{4c_1} = \frac{\lambda}{2}e^{-\mu}$ y, por lo tanto,

$$\bar{u}(x) = \frac{\lambda}{2}\left(e^{\frac{x}{\lambda}+\mu} + e^{-\left(\frac{x}{\lambda}+\mu\right)}\right) = \lambda\cosh\left(\frac{x}{\lambda}+\mu\right), \quad x \in [a,b].$$

Así, todo minimizador de (P_5) en $X \cap C^2([a,b])$ es una **catenaria**. Resta elegir los parámetros $\lambda > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$ tales que se satisfagan simultáneamente las condiciones de frontera:

$$\begin{cases} \lambda\cosh\left(\frac{a}{\lambda}+\mu\right) = \alpha \\ \lambda\cosh\left(\frac{b}{\lambda}+\mu\right) = \beta \end{cases}.$$

La existencia y unicidad de soluciones (λ, μ) para este sistema no lineal depende de la configuración geométrica de los puntos extremos (a,α) y (b,β). Nos restringimos al caso simétrico $\alpha = \beta$. Como el lagrangiano no depende de x, el problema es invariante por traslaciones en la variable x, por lo que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a = -L$ y $b = L$, con $L = \frac{b-a}{2}$. Las condiciones de frontera se escriben entonces como:

$$\begin{cases} \lambda\cosh\left(-\frac{L}{\lambda}+\mu\right) = \alpha \\ \lambda\cosh\left(\frac{L}{\lambda}+\mu\right) = \alpha \end{cases}.$$

Usando las ecuaciones anteriores y el hecho de que la aplicación $z \mapsto \cosh(z)$ es

una función par, tenemos

$$\lambda \cosh\left(\frac{L}{\lambda}+\mu\right) = \alpha = \lambda \cosh\left(-\frac{L}{\lambda}+\mu\right) = \lambda \cosh\left(\frac{L}{\lambda}-\mu\right).$$

Como $\lambda > 0$, obtenemos que $\cosh\left(\frac{L}{\lambda}+\mu\right) = \cosh\left(\frac{L}{\lambda}-\mu\right)$ y, como $\cosh$ es par y estrictamente creciente en $[0,\infty)$, esto equivale a $\frac{L}{\lambda}+\mu = \pm\left(\frac{L}{\lambda}-\mu\right)$, lo cual nos conduce a dos posibles casos:

- $\frac{L}{\lambda}+\mu = \frac{L}{\lambda}-\mu \Rightarrow \mu = 0$.
- $\frac{L}{\lambda}+\mu = -\left(\frac{L}{\lambda}-\mu\right) \Rightarrow \frac{L}{\lambda} = 0$, lo cual es una contradicción puesto que $L > 0$ y $\lambda > 0$.

Por lo tanto, $\mu = 0$, y el sistema se reduce a la ecuación trascendente

$$\lambda \cosh\left(\frac{L}{\lambda}\right) = \alpha.$$

Haciendo el cambio de variable $\tau = \frac{L}{\lambda} > 0$, la ecuación anterior se reescribe de manera equivalente como

$$\frac{L}{\tau}\cosh(\tau) = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad g(\tau) = \frac{\alpha}{L}, \qquad \text{donde } g(\tau) = \frac{\cosh(\tau)}{\tau},\ \tau > 0.$$

Estudiemos la función g. Su derivada es

$$g'(\tau) = \frac{\tau\sinh(\tau) - \cosh(\tau)}{\tau^2} = \frac{\cosh(\tau)}{\tau^2}\big(\tau\tanh(\tau) - 1\big), \quad \tau > 0.$$

La función $\tau \mapsto \tau\tanh(\tau)$ es estrictamente creciente en $(0,\infty)$, por ser producto de dos funciones positivas y estrictamente crecientes, y toma todos los valores de $(0,\infty)$. Por lo tanto, existe un único $\tau^* > 0$ tal que $\tau^*\tanh(\tau^*) = 1$ (numéricamente, $\tau^* \approx 1{,}1997$), y g es estrictamente decreciente en $(0,\tau^*)$ y estrictamente creciente en (τ^*,∞). Además, $\lim_{\tau\to 0^+} g(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} g(\tau) = +\infty$. En consecuencia, g alcanza su mínimo global sobre $(0,\infty)$ en τ^*, con $g(\tau^*) = \frac{\cosh(\tau^*)}{\tau^*} = \sinh(\tau^*) \approx 1{,}5089$, donde se usó que $\frac{1}{\tau^*} = \tanh(\tau^*)$. Analizando la intersección de la recta horizontal $y = \frac{\alpha}{L}$ con la gráfica de g, y recordando que a cada $\tau > 0$ corresponde un único $\lambda = \frac{L}{\tau} > 0$, se concluye lo siguiente:

- Si $\frac{\alpha}{L} > g(\tau^*)$, existen exactamente dos catenarias que satisfacen las condiciones

de frontera.

- Si $\frac{\alpha}{L} = g(\tau^*)$, existe exactamente una.
- Si $\frac{\alpha}{L} < g(\tau^*)$, no existe ninguna.

Resumamos lo que el método clásico permite concluir en este ejemplo. Por un lado, la ecuación de Euler-Lagrange reduce la búsqueda de minimizadores regulares a una familia explícita de candidatos: si $\frac{\alpha}{L} \geq g(\tau^*)$, a lo sumo dos catenarias; si $\frac{\alpha}{L} < g(\tau^*)$, ninguna, de modo que en este último caso (P_5) no admite minimizadores en $X \cap C^2([a,b])$.

Por otro lado, el método no permite decidir si alguno de estos candidatos es efectivamente un minimizador. La razón es que, a diferencia del Ejemplo 2.7, el lagrangiano no es conjuntamente convexo. En efecto, para cada $u > 0$ fijo, como $f_{\xi\xi}(u,\xi) > 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, el Teorema 1.46 garantiza que $\xi \mapsto f(u,\xi)$ es convexa. Sin embargo, como $f_{uu} = 0$,

$$\det(\nabla^2 f) = f_{uu} f_{\xi\xi} - (f_{u\xi})^2 = 0 \cdot \frac{2\pi u}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} - \left(\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right)^2 = -\frac{4\pi^2\xi^2}{1+\xi^2},$$

que es estrictamente negativo para $\xi \neq 0$. Así, en tales puntos la matriz hessiana $\nabla^2 f$ tiene dos autovalores de signos opuestos, por lo que existe $v \in \mathbb{R}^2$ con $\langle \nabla^2 f(u,\xi)v, v\rangle < 0$, y por el Teorema 1.46, f no es convexa en (u,ξ). En consecuencia, la Parte 2 del Teorema 2.1 no es aplicable, y las catenarias obtenidas son puntos estacionarios de I (véase la Observación 2.2 (iii)) cuya minimalidad queda sin decidir. Para un análisis de este problema remitimos al libro de Dacorogna[4] (Ejemplo 2.8, Proposición 5.11 y Ejercicio 5.2.3).

Este ejemplo ilustra las dos limitaciones de los métodos clásicos señaladas al inicio del capítulo: la ecuación de Euler-Lagrange solo produce candidatos bajo el supuesto de que existe un minimizador regular, y sin convexidad conjunta no permite decidir si alguno de ellos resuelve el problema.

3. MÉTODOS DIRECTOS

Los ejemplos del capítulo anterior ponen en evidencia las limitaciones de los métodos clásicos. La ecuación de Euler-Lagrange es una condición necesaria que solo tiene sentido bajo el supuesto de que existe un minimizador suficientemente regular, y en ejemplos tan sencillos como el de Weierstrass (Ejemplo 2.5) tal minimizador no existe, ni siquiera en la clase de las funciones de clase C^1 a trozos. Los **métodos directos** invierten el orden del razonamiento: en lugar de buscar candidatos resolviendo la ecuación de Euler-Lagrange, se establece primero la existencia de un minimizador y, solo después, se deduce la ecuación que este satisface.

Para describir la idea conviene recurrir, como en el capítulo anterior, a la minimización en dimensión finita. Sean $X \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto cerrado y $F : X \to \mathbb{R}$ una función acotada inferiormente, y consideremos el problema $\inf\{F(x) : x \in X\}$. Se toma una **sucesión minimizadora** $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset X$, es decir, tal que $F(x_\nu)$ converge al ínfimo. Si F es **coercitiva**, esto es, si $F(x) \to +\infty$ cuando $|x| \to \infty$, la sucesión es acotada y el teorema de Bolzano-Weierstrass permite extraer una subsucesión convergente a un punto $\bar{x} \in X$. Si además F es **semicontinua inferiormente**, se tiene que $F(\bar{x}) \leq \liminf_{\nu\to\infty} F(x_\nu)$, de modo que $\bar{x}$ es un minimizador.

En el cálculo de variaciones se procede del mismo modo, pero la dimensión infinita introduce una dificultad esencial: las sucesiones acotadas no admiten, en general, subsucesiones convergentes en norma. Esta es la razón por la cual el espacio C^1 no es adecuado y se trabaja en los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ con $1 < p < \infty$, donde toda sucesión acotada admite una subsucesión *débilmente* convergente (Proposición 1.42). El precio de debilitar la noción de convergencia es que la semicontinuidad inferior del funcional debe verificarse respecto de la convergencia débil, y es aquí donde interviene de manera decisiva la convexidad del integrando.

En este capítulo estudiamos el problema

$$(G) \quad \inf\left\{I(u) : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)\right\} = m,$$

donde

- $I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y acotado;
- $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = f(x, u, \xi)$;
- $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ significa que $u, u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ y $u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, lo cual expresa, a grandes rasgos, que $u = u_0$ sobre $\partial\Omega$.

En la Sección 3.1 demostramos el teorema de existencia del método directo: bajo hipótesis de convexidad, coercitividad y crecimiento sobre f, el problema (G) admite un minimizador, que es único bajo condiciones de convexidad estricta. Extendemos luego el resultado a funcionales con un término lineal de la forma $-\int_\Omega h\, u\, dx$, y mostramos mediante contraejemplos que las hipótesis de convexidad y de coercitividad no pueden omitirse. En la Sección 3.2 deducimos la ecuación de Euler-Lagrange asociada a (G). Como el minimizador pertenece, en general, solo a un espacio de Sobolev, la ecuación se obtiene en su forma débil, y se recupera la forma clásica cuando el minimizador es suficientemente regular. El capítulo concluye, en la Sección 3.3, con la aplicación de esta teoría al problema de Dirichlet-Poisson y a su generalización, el p-Laplaciano.

Conviene señalar el alcance de estos resultados. El método directo garantiza la existencia de un minimizador en un espacio de Sobolev, pero no dice nada sobre su regularidad: determinar si dicho minimizador es de clase C^1, C^2 o incluso C^∞ constituye un problema independiente, la teoría de la regularidad, que excede el alcance de este trabajo.

3.1. UN TEOREMA GENERAL DE EXISTENCIA

3.1.1. El Teorema Principal

Teorema 3.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera Lipschitz. Sea $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $f = f(x, u, \xi)$, tal que*

(H_1) $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ *es convexa para todo $x \in \bar{\Omega}$;*

(H_2) *existen $p > 1$ y constantes $\alpha_1 > 0$, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que*

$$f(x, u, \xi) \geq \alpha_1 |\xi|^p + \alpha_3, \quad \forall\, (x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n;$$

(H_3) *existe una constante* $\beta \geq 0$ *tal que, para todo* $(x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*, se tiene que*

$$|f_u(x,u,\xi)| \leq \beta\big(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\big) \quad \textit{y} \quad |f_\xi(x,u,\xi)| \leq \beta\big(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\big),$$

donde $f_\xi = (f_{\xi_1}, \ldots, f_{\xi_n})$ *con* $f_{\xi_i} = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}$*, y* $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$*.*

Considere el problema

$$\text{ínf}\left\{ I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\} = m, \tag{3.1}$$

donde $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ *con* $I(u_0) < \infty$*. Entonces existe* $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$*, un minimizador de* (3.1)*. Además, el minimizador es único en cualquiera de los dos casos siguientes:*

(a) la aplicación $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ *es estrictamente convexa para todo* $x \in \bar{\Omega}$*;*

(b) f *no depende de* u*, es decir,* $f(x, u, \xi) = f(x, \xi)$*, y la aplicación* $\xi \mapsto f(x, \xi)$ *es estrictamente convexa para todo* $x \in \bar{\Omega}$*.*

Demostración. Observemos primero que, para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$, la función $x \mapsto f(x, u(x), \nabla u(x))$ es medible y, por (H_2), está acotada inferiormente por la constante α_3; como Ω es acotado, la integral $I(u)$ está bien definida y toma valores en $(-\infty, +\infty]$. Probaremos la existencia y la unicidad del minimizador.

- *Parte 1 (Existencia).* Dividimos, como es usual en los métodos directos del cálculo de variaciones, la demostración de la existencia en dos pasos.

  - *Paso 1 (Compacidad).* Notemos primero que la clase admisible $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ es no vacía, puesto que, como $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ y $u_0 - u_0 \equiv 0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $u_0 \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$. Por otro lado, integrando la desigualdad de la hipótesis (H_2) sobre Ω, para todo $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ tenemos que

  $$I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx \geq \int_\Omega [\alpha_1 |\nabla u(x)|^p + \alpha_3]\, dx = \alpha_1 \|\nabla u\|_{L^p}^p + \alpha_3 \operatorname{med}(\Omega). \tag{3.2}$$

  Como $\alpha_1 > 0$, se sigue que $I(u) \geq \alpha_3 \operatorname{med}(\Omega)$ para todo $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$. Esta cota inferior, junto con la hipótesis $I(u_0) < \infty$, garantiza que el ínfimo m es finito:

  $$-\infty < \alpha_3 \operatorname{med}(\Omega) \leq m \leq I(u_0) < \infty.$$

Por la definición de ínfimo, existe una sucesión $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\lim_{\nu\to\infty} I(u_\nu) = m$; una tal sucesión se denomina **sucesión minimizadora**. Como $I(u_\nu) \to m$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $I(u_\nu) \leq m+1$ para todo $\nu \geq N$. Descartando los primeros $N-1$ términos de la sucesión, lo cual no altera que sea minimizadora, podemos suponer que $I(u_\nu) \leq m+1$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Por (3.2), se tiene entonces que

$$m+1 \geq I(u_\nu) \geq \alpha_1 \|\nabla u_\nu\|_{L^p}^p + \alpha_3 \operatorname{med}(\Omega), \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}.$$

Nótese que $m+1-\alpha_3 \operatorname{med}(\Omega) \geq 1 > 0$, pues $m \geq \alpha_3 \operatorname{med}(\Omega)$. Definiendo

$$R = \left(\frac{m+1-\alpha_3 \operatorname{med}(\Omega)}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{p}} > 0,$$

obtenemos

$$\|\nabla u_\nu\|_{L^p} \leq R, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Para probar que $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W^{1,p}(\Omega)$, sea $\nu \in \mathbb{N}$ y note que, como $u_\nu \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces $u_\nu - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Por la desigualdad de Poincaré (Teorema 1.40), existe una constante $C = C(\Omega, p) > 0$, independiente de ν, tal que $\|u_\nu - u_0\|_{L^p} \leq C\|\nabla(u_\nu - u_0)\|_{L^p}$. Apelando a la definición de la norma en $W^{1,p}(\Omega)$, a la desigualdad triangular, a la desigualdad $\|\nabla u_0\|_{L^p} \leq \|u_0\|_{W^{1,p}}$ y a (3.3), tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u_\nu\|_{W^{1,p}} &\leq \|u_\nu - u_0\|_{W^{1,p}} + \|u_0\|_{W^{1,p}} = [\|u_\nu - u_0\|_{L^p}^p + \|\nabla(u_\nu - u_0)\|_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}} + \|u_0\|_{W^{1,p}} \\
&\leq [C^p \|\nabla(u_\nu - u_0)\|_{L^p}^p + \|\nabla(u_\nu - u_0)\|_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}} + \|u_0\|_{W^{1,p}} \\
&= (C^p+1)^{\frac{1}{p}} \|\nabla u_\nu - \nabla u_0\|_{L^p} + \|u_0\|_{W^{1,p}} \\
&\leq (C^p+1)^{\frac{1}{p}} (\|\nabla u_\nu\|_{L^p} + \|\nabla u_0\|_{L^p}) + \|u_0\|_{W^{1,p}} \\
&\leq (C^p+1)^{\frac{1}{p}} R + \left[(C^p+1)^{\frac{1}{p}} + 1 \right] \|u_0\|_{W^{1,p}}.
\end{aligned}$$

Denotando por $\gamma > 0$ el lado derecho de la última desigualdad, que no depende de ν, concluimos que $\|u_\nu\|_{W^{1,p}} \leq \gamma$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Puesto que $p > 1$, la Proposición 1.42 asegura la existencia de un elemento $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ y de una subsucesión (que continuaremos denotando $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$) tales que $u_\nu \rightharpoonup \bar{u}$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Como $u_\nu - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$ y $u_\nu - u_0 \rightharpoonup \bar{u} - u_0$ en $W^{1,p}(\Omega)$,

la Proposición 1.43 garantiza que $\bar{u} - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, esto es, $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$.

- *Paso 2 (Semicontinuidad inferior).* Mostramos ahora que el funcional I es (secuencialmente) débilmente semicontinuo inferior en $W^{1,p}(\Omega)$; es decir, que si $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$ y $u_\nu \rightharpoonup \bar{u}$ en $W^{1,p}(\Omega)$, entonces $\liminf_{\nu\to\infty} I(u_\nu) \geq I(\bar{u})$. Este paso es completamente independiente de que $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ sea una sucesión minimizadora.

  Sea $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_\nu \rightharpoonup \bar{u}$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Fijemos $x \in \Omega$ y definamos $F_x : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $F_x(u,\xi) = f(x,u,\xi)$. Por (H_1), F_x es convexa y, como $f \in C^1(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, es de clase $C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, con gradiente $\nabla F_x(u,\xi) = \big(f_u(x,u,\xi),\, f_\xi(x,u,\xi)\big)$. Aplicando el Teorema 1.46 (ii) a F_x en los puntos $\big(u_\nu(x), \nabla u_\nu(x)\big)$ y $\big(\bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)\big)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, y desarrollando el producto escalar en $\mathbb{R}^{n+1}$, obtenemos que, para c.t.p $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} f(x,u_\nu(x),\nabla u_\nu(x)) \geq f(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x)) + f_u(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))\,[u_\nu(x)-\bar{u}(x)] \\ + \langle f_\xi(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x)), \nabla u_\nu(x) - \nabla\bar{u}(x)\rangle. \end{aligned} \tag{3.4}$$

  Antes de integrar sobre Ω, verificamos que los dos últimos términos del lado derecho son integrables. Sea $p' = \frac{p}{p-1}$ el exponente conjugado de p; como $p > 1$, se tiene $p' > 1$. Demostraremos que $x \mapsto f_u(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))$ pertenece a $L^{p'}(\Omega)$ y que $x \mapsto f_\xi(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))$ pertenece a $L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

  Para ello, consideremos la función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(s) = |s|^{p'}$. Como $p' > 1$, ϕ es de clase $C^1(\mathbb{R})$ con $\phi'(s) = p'|s|^{p'-2}s$, que es una función no decreciente; en consecuencia $\big(\phi'(s) - \phi'(t)\big)(s-t) \geq 0$ para todo $s,t \in \mathbb{R}$, y el Teorema 1.46 (iii) garantiza que ϕ es convexa. Aplicando dos veces la definición de convexidad, para cualesquiera $a,b,c \geq 0$ se tiene

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{p'} = \phi\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\cdot\frac{b+c}{2}\right) \leq \frac{1}{3}\phi(a) + \frac{2}{3}\phi\left(\frac{b+c}{2}\right) \leq \frac{1}{3}a^{p'} + \frac{1}{3}b^{p'} + \frac{1}{3}c^{p'},$$

  lo que equivale a

$$(a+b+c)^{p'} \leq 3^{p'-1}\left(a^{p'} + b^{p'} + c^{p'}\right), \quad \forall\, a,b,c \geq 0. \tag{3.5}$$

  Elevando la primera desigualdad de la hipótesis (H_3) a la potencia p', usando

(3.5) y el hecho de que $(p-1)p' = p$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f_u(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))|^{p'}\,dx &\le \beta^{p'}\int_\Omega \left[1+|\bar{u}(x)|^{p-1}+|\nabla\bar{u}(x)|^{p-1}\right]^{p'}dx\\ &\le 3^{p'-1}\beta^{p'}\int_\Omega \left[1+|\bar{u}(x)|^{(p-1)p'}+|\nabla\bar{u}(x)|^{(p-1)p'}\right]dx\\ &= 3^{p'-1}\beta^{p'}\int_\Omega \left[1+|\bar{u}(x)|^{p}+|\nabla\bar{u}(x)|^{p}\right]dx\\ &= 3^{p'-1}\beta^{p'}\left[\mathrm{med}(\Omega)+\|\bar{u}\|_{L^p}^p+\|\nabla\bar{u}\|_{L^p}^p\right]\\ &= 3^{p'-1}\beta^{p'}\left[\mathrm{med}(\Omega)+\|\bar{u}\|_{W^{1,p}}^p\right]<\infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x \mapsto f_u(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))$ pertenece a $L^{p'}(\Omega)$. Realizando el mismo procedimiento con la segunda desigualdad de la hipótesis (H_3), obtenemos

$$\int_\Omega |f_\xi(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))|^{p'}\,dx \le 3^{p'-1}\beta^{p'}\left[\mathrm{med}(\Omega)+\|\bar{u}\|_{W^{1,p}}^p\right]<\infty,$$

de modo que $x \mapsto f_\xi(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))$ pertenece a $L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

Como $u_\nu - \bar{u} \in L^p(\Omega)$ y $\nabla u_\nu - \nabla\bar{u} \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$, la desigualdad de Hölder (Teorema 1.14) garantiza que las funciones $x \mapsto f_u(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))\,[u_\nu(x)-\bar{u}(x)]$ y $x \mapsto \langle f_\xi(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x)), \nabla u_\nu(x)-\nabla\bar{u}(x)\rangle$ pertenecen a $L^1(\Omega)$. Integrando la desigualdad (3.4) sobre Ω, se deduce que

$$\begin{aligned}I(u_\nu) \ge I(\bar{u}) &+ \int_\Omega f_u(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))[u_\nu(x)-\bar{u}(x)]\,dx\\ &+ \int_\Omega \langle f_\xi(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x)), \nabla u_\nu(x)-\nabla\bar{u}(x)\rangle\,dx.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Veamos que los dos últimos términos tienden a cero. Como $u_\nu \rightharpoonup \bar{u}$ en $W^{1,p}(\Omega)$, la Proposición 1.29 garantiza que $u_\nu \rightharpoonup \bar{u}$ en $L^p(\Omega)$ y que $\frac{\partial u_\nu}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}$ en $L^p(\Omega)$ para todo $i = 1,\dots,n$. Como $x \mapsto f_u(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))$ pertenece a $L^{p'}(\Omega)$, la definición de convergencia débil en $L^p(\Omega)$ (Definición 1.16) implica que

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_\Omega f_u(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))[u_\nu(x)-\bar{u}(x)]\,dx = 0.$$

Análogamente, como cada componente $x \mapsto f_{\xi_i}(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))$ satisface $|f_{\xi_i}(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))| \le |f_\xi(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))|$ y, por lo tanto, pertenece a $L^{p'}(\Omega)$, se

tiene que

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_\Omega \langle f_\xi(x,\bar u(x),\nabla\bar u(x)),\nabla u_\nu(x)-\nabla\bar u(x)\rangle\,dx$$
$$=\sum_{i=1}^n \lim_{\nu\to\infty}\int_\Omega f_{\xi_i}(x,\bar u(x),\nabla\bar u(x))\left[\frac{\partial u_\nu}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial\bar u}{\partial x_i}(x)\right]dx=0.$$

Tomando el límite inferior en ambos lados de (3.6), obtenemos finalmente

$$\liminf_{\nu\to\infty} I\left(u_\nu\right)\geq I(\bar u)+0+0=I(\bar u).$$

Combinamos ahora los dos pasos. Para la subsucesión obtenida en el Paso 1 (que seguimos denotando $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$) se tiene que $\lim_{\nu\to\infty} I(u_\nu)=m$, pues toda subsucesión de una sucesión minimizadora es minimizadora, y que $u_\nu \rightharpoonup \bar u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Por el Paso 2, y como el límite de $\{I(u_\nu)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ existe,

$$m=\lim_{\nu\to\infty} I(u_\nu)=\liminf_{\nu\to\infty} I(u_\nu)\geq I(\bar u).$$

Por otra parte, $\bar u\in u_0+W_0^{1,p}(\Omega)$ por el Paso 1, así que $I(\bar u)\geq m$. Luego $I(\bar u)=m$, lo cual demuestra que $\bar u$ es un minimizador de (3.1).

- *Parte 2 (Unicidad).* Sean $\bar u,\bar v\in u_0+W_0^{1,p}(\Omega)$ dos minimizadores de (3.1), es decir, $I(\bar u)=I(\bar v)=m$. Denotemos $\bar w=\frac{\bar u+\bar v}{2}$ y observemos que $\bar w\in u_0+W_0^{1,p}(\Omega)$, pues $\bar w-u_0=\frac{1}{2}(\bar u-u_0)+\frac{1}{2}(\bar v-u_0)\in W_0^{1,p}(\Omega)$. Definamos, para c.t.p $x\in\Omega$,

$$\Psi(x)=\frac{1}{2}f(x,\bar u(x),\nabla\bar u(x))+\frac{1}{2}f(x,\bar v(x),\nabla\bar v(x))-f\left(x,\bar w(x),\nabla\bar w(x)\right).$$

Por la linealidad de la derivada débil, $\nabla\bar w=\frac{1}{2}\nabla\bar u+\frac{1}{2}\nabla\bar v$, de modo que $\big(\bar w(x),\nabla\bar w(x)\big)$ es el punto medio de $\big(\bar u(x),\nabla\bar u(x)\big)$ y $\big(\bar v(x),\nabla\bar v(x)\big)$ en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Aplicando la definición de convexidad de $(u,\xi)\mapsto f(x,u,\xi)$ (hipótesis (H_1)) con $\lambda=\frac{1}{2}$ en estos dos puntos, obtenemos

$$f\left(x,\bar w(x),\nabla\bar w(x)\right)\leq\frac{1}{2}f(x,\bar u(x),\nabla\bar u(x))+\frac{1}{2}f(x,\bar v(x),\nabla\bar v(x)),\quad \text{en c.t.p } x\in\Omega,$$

es decir, $\Psi(x)\geq 0$ para c.t.p $x\in\Omega$. En particular, integrando,

$$I(\bar w)\leq\frac{1}{2}I(\bar u)+\frac{1}{2}I(\bar v)=m.$$

Como $\bar{w} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, también $I(\bar{w}) \geq m$, por lo cual $I(\bar{w}) = m$. Dado que $I(\bar{u})$, $I(\bar{v})$ e $I(\bar{w})$ son finitos, se tiene

$$\int_\Omega \Psi(x)\, dx = \frac{1}{2}I(\bar{u}) + \frac{1}{2}I(\bar{v}) - I(\bar{w}) = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m - m = 0.$$

Como Ψ es medible y no negativa, y su integral sobre Ω es nula, se deduce que $\Psi(x) = 0$ para c.t.p $x \in \Omega$, es decir,

$$f\left(x, \bar{w}(x), \nabla\bar{w}(x)\right) = \frac{1}{2}f(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)) + \frac{1}{2}f(x, \bar{v}(x), \nabla\bar{v}(x)), \quad \text{en c.t.p } x \in \Omega. \tag{3.7}$$

Distinguimos ahora los dos casos del enunciado.

(a) Si $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ es estrictamente convexa, la igualdad (3.7) solo puede darse en los puntos donde $\big(\bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)\big) = \big(\bar{v}(x), \nabla\bar{v}(x)\big)$. Por lo tanto, $\bar{u}(x) = \bar{v}(x)$ en c.t.p $x \in \Omega$.

(b) Si $f(x, u, \xi) = f(x, \xi)$ y $\xi \mapsto f(x, \xi)$ es estrictamente convexa, la igualdad (3.7) se escribe

$$f\left(x, \frac{\nabla\bar{u}(x) + \nabla\bar{v}(x)}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x, \nabla\bar{u}(x)) + \frac{1}{2}f(x, \nabla\bar{v}(x)), \quad \text{en c.t.p } x \in \Omega,$$

y solo puede darse en los puntos donde $\nabla\bar{u}(x) = \nabla\bar{v}(x)$. Así, $\nabla\bar{u}(x) = \nabla\bar{v}(x)$ en c.t.p $x \in \Omega$. Como además $\bar{u} - \bar{v} = (\bar{u} - u_0) - (\bar{v} - u_0) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, la Proposición 1.44 garantiza que $\bar{u}(x) = \bar{v}(x)$ en c.t.p $x \in \Omega$.

En ambos casos, el minimizador es único.

■

Observación 3.2. (I) El teorema tiene una larga historia. Tonelli fue el primero, en los años 1910-1920, en identificar la convexidad del integrando como la condición estructural responsable de la existencia de minimizadores en el contexto de los métodos directos.

(II) La convexidad conjunta de la aplicación $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ exigida en (H_1) no es necesaria: bajo hipótesis adecuadas de regularidad y crecimiento, basta con que

$\xi \mapsto f(x,u,\xi)$ sea convexa para todo $(x,u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ (véase el libro de Dacorogna[1]). Sin embargo, bajo esta hipótesis más débil, la dependencia de f en la variable u ya no puede controlarse mediante un término lineal en $u_\nu - \bar{u}$, como se hizo en el Paso 2 de la demostración anterior, y la semicontinuidad inferior débil del funcional requiere que $u_\nu \to \bar{u}$ fuertemente en $L^p(\Omega)$. Esta convergencia fuerte es precisamente la que proporciona el Corolario 1.38 del Teorema de Rellich-Kondrachov. En este trabajo se asume la convexidad conjunta para obtener una demostración más elemental, que solo requiere convergencia débil.

(III) El caso (b) de unicidad cubre integrandos importantes que no son estrictamente convexos en (u,ξ), como $f(\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$, pues no dependen de u.

3.1.2. Funcionales con un término lineal Muchos problemas de interés, como el problema de Poisson que estudiaremos en la Sección 3.3, conducen a funcionales de la forma

$$\int_\Omega \big[f(x,u(x),\nabla u(x)) - h(x)\,u(x)\big]\,dx,$$

con $h \in L^{p'}(\Omega)$. Como h no es necesariamente continua, el integrando $(x,u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi) - h(x)\,u$ no satisface, en general, la hipótesis de regularidad del Teorema 3.1, que por lo tanto no puede aplicarse directamente. Sin embargo, el término lineal es débilmente continuo, y la existencia de minimizadores se obtiene combinando este hecho con la semicontinuidad inferior débil establecida en el Paso 2 de la demostración del Teorema 3.1.

Lema 3.3. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $1 < p < \infty$ y $h \in L^{p'}(\Omega)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. El funcional $L : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$L(u) = \int_\Omega h(x)\,u(x)\,dx$$

es lineal y continuo. En consecuencia, L es débilmente continuo; es decir, si $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$ es una sucesión tal que $u_\nu \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}(\Omega)$, entonces $L(u_\nu) \to L(u)$.

Demostración. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Como $h \in L^{p'}(\Omega)$ y $u \in L^p(\Omega)$, la desigualdad de Hölder

[1] B. Dacorogna. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. 2.ª ed. Vol. 78. Applied Mathematical Sciences. Springer, 2008.

(Teorema 1.14) garantiza que $h\,u \in L^1(\Omega)$ y que

$$|L(u)| \leq \int_\Omega |h(x)\,u(x)|\,dx \leq \|h\|_{L^{p'}}\|u\|_{L^p} \leq \|h\|_{L^{p'}}\|u\|_{W^{1,p}}, \tag{3.8}$$

de modo que L está bien definido. La linealidad de L se sigue de la linealidad de la integral: para $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$L(\lambda u + \mu v) = \int_\Omega h(x)\,[\lambda u(x) + \mu v(x)]\,dx = \lambda L(u) + \mu L(v).$$

Para la continuidad, sean $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$. Por la linealidad de L y por (3.8) aplicada a $u - v$,

$$|L(u) - L(v)| = |L(u - v)| \leq \|h\|_{L^{p'}}\|u - v\|_{W^{1,p}},$$

lo que prueba que L es continuo. Así, $L \in \big(W^{1,p}(\Omega)\big)'$. Finalmente, si $u_\nu \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}(\Omega)$, la Definición 1.28 aplicada al funcional $L \in \big(W^{1,p}(\Omega)\big)'$ garantiza que $L(u_\nu) \to L(u)$. ■

Corolario 3.4. *Sean Ω y f como en el Teorema 3.1, y sea $p > 1$ el exponente que aparece en las hipótesis (H_2) y (H_3). Sean $h \in L^{p'}(\Omega)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, y $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $I(u_0) < \infty$, donde $I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\,dx$. Definamos $\widetilde{f}(x, u, \xi) = f(x, u, \xi) - h(x)\,u$ y consideremos el problema*

$$\text{ínf}\left\{\widetilde{I}(u) = \int_\Omega \widetilde{f}(x, u(x), \nabla u(x))\,dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)\right\} = \widetilde{m}. \tag{3.9}$$

Entonces $\widetilde{m} \in \mathbb{R}$ y el problema (3.9) *admite un minimizador $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$. Además, el minimizador es único en cualquiera de los casos (a) y (b) del Teorema 3.1.*

Demostración. Sea $L(u) = \int_\Omega h(x)\,u(x)\,dx$ el funcional del Lema 3.3. Para toda $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, la integral $I(u)$ está bien definida en $(-\infty, +\infty]$ (véase el inicio de la demostración del Teorema 3.1) y $L(u) \in \mathbb{R}$, de modo que $\widetilde{I}(u) = I(u) - L(u)$ está bien definida en $(-\infty, +\infty]$. La estrategia consiste en aplicar a $\widetilde{I}$ los pasos del método directo, apoyándonos en lo que ya sabemos de cada sumando: I es débilmente semicontinuo inferior (Paso 2 de la demostración del Teorema 3.1) y L es débilmente continuo (Lema 3.3).

- *Parte 1 (Coercitividad).* Sea $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$. Vamos a acotar inferiormente $\widetilde{I}(u)$ en

términos de $\|u\|_{W^{1,p}}$. Por la desigualdad (3.2) de la demostración del Teorema 3.1,

$$I(u) \geq \alpha_1 \|\nabla u\|_{L^p}^p + \alpha_3 \operatorname{med}(\Omega). \tag{3.10}$$

Por otra parte, como $u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, la desigualdad de Poincaré (Teorema 1.40) proporciona una constante $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que $\|u - u_0\|_{L^p} \leq C\|\nabla(u - u_0)\|_{L^p}$. Aplicando la desigualdad triangular, tenemos que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p} &\leq \|u - u_0\|_{L^p} + \|u_0\|_{L^p} \leq C\|\nabla u - \nabla u_0\|_{L^p} + \|u_0\|_{L^p} \\ &\leq C\|\nabla u\|_{L^p} + \left(C\|\nabla u_0\|_{L^p} + \|u_0\|_{L^p}\right). \end{aligned}$$

Definiendo la constante $K_0 = C\|\nabla u_0\|_{L^p} + \|u_0\|_{L^p} \geq 0$, que no depende de u, obtenemos

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} + K_0. \tag{3.11}$$

Combinando (3.8) y (3.11), se tiene que

$$|L(u)| \leq \|h\|_{L^{p'}} \|u\|_{L^p} \leq C\|h\|_{L^{p'}} \|\nabla u\|_{L^p} + K_0 \|h\|_{L^{p'}}. \tag{3.12}$$

Aplicamos ahora la desigualdad de Young (Proposición 1.47) con $a = \|\nabla u\|_{L^p}$, $b = C\|h\|_{L^{p'}}$ y $\varepsilon = \frac{\alpha_1 p}{2}$, de modo que $\frac{\varepsilon}{p} = \frac{\alpha_1}{2}$:

$$\begin{aligned} C\|h\|_{L^{p'}} \|\nabla u\|_{L^p} &\leq \frac{\varepsilon}{p}\|\nabla u\|_{L^p}^p + \frac{\varepsilon^{-\frac{p'}{p}}}{p'} \left(C\|h\|_{L^{p'}}\right)^{p'} \\ &= \frac{\alpha_1}{2}\|\nabla u\|_{L^p}^p + \frac{1}{p'}\left(\frac{\alpha_1 p}{2}\right)^{-\frac{p'}{p}} C^{p'} \|h\|_{L^{p'}}^{p'}. \end{aligned}$$

Insertando esta estimación en (3.12), resulta

$$|L(u)| \leq \frac{\alpha_1}{2}\|\nabla u\|_{L^p}^p + K_1, \tag{3.13}$$

donde

$$K_1 = \frac{1}{p'}\left(\frac{\alpha_1 p}{2}\right)^{-\frac{p'}{p}} C^{p'} \|h\|_{L^{p'}}^{p'} + K_0 \|h\|_{L^{p'}} \geq 0$$

depende únicamente de Ω, p, α_1, h y u_0. Puesto que $\widetilde{I}(u) = I(u) - L(u) \geq I(u) - |L(u)|$,

las estimaciones (3.10) y (3.13) dan

$$\widetilde{I}(u) \geq \alpha_1 \|\nabla u\|_{L^p}^p + \alpha_3 \operatorname{med}(\Omega) - \frac{\alpha_1}{2}\|\nabla u\|_{L^p}^p - K_1 = \frac{\alpha_1}{2}\|\nabla u\|_{L^p}^p - K_2, \tag{3.14}$$

donde $K_2 = K_1 - \alpha_3 \operatorname{med}(\Omega) \in \mathbb{R}$.

Para pasar de $\|\nabla u\|_{L^p}$ a $\|u\|_{W^{1,p}}$, consideremos la función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(s) = |s|^p$. Como $p > 1$, ϕ es de clase $C^1(\mathbb{R})$ con $\phi'(s) = p|s|^{p-2}s$ no decreciente, y el Teorema 1.46 (iii) garantiza que ϕ es convexa. Por la definición de convexidad con $\lambda = \frac{1}{2}$, para cualesquiera $A, B \geq 0$ se tiene $\left(\frac{A+B}{2}\right)^p \leq \frac{A^p+B^p}{2}$, esto es,

$$(A+B)^p \leq 2^{p-1}(A^p + B^p).$$

Elevando (3.11) a la potencia p y aplicando esta desigualdad con $A = C\|\nabla u\|_{L^p}$ y $B = K_0$, obtenemos

$$\|u\|_{L^p}^p \leq 2^{p-1}C^p\|\nabla u\|_{L^p}^p + 2^{p-1}K_0^p.$$

Sumando $\|\nabla u\|_{L^p}^p$ en ambos lados,

$$\|u\|_{W^{1,p}}^p = \|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p \leq C_3\|\nabla u\|_{L^p}^p + 2^{p-1}K_0^p,$$

donde $C_3 = 1 + 2^{p-1}C^p > 0$. Despejando, $\|\nabla u\|_{L^p}^p \geq \frac{1}{C_3}\|u\|_{W^{1,p}}^p - \frac{2^{p-1}K_0^p}{C_3}$, y sustituyendo en (3.14) concluimos que

$$\widetilde{I}(u) \geq C_1\|u\|_{W^{1,p}}^p - C_2, \qquad \forall\, u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega), \tag{3.15}$$

donde $C_1 = \frac{\alpha_1}{2C_3} > 0$ y $C_2 = \frac{\alpha_1 2^{p-2}K_0^p}{C_3} + K_2 \in \mathbb{R}$. En particular, $\widetilde{I}(u) \geq -C_2$ para toda $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$. Como además $\widetilde{I}(u_0) = I(u_0) - L(u_0) < \infty$, se tiene que

$$-\infty < -C_2 \leq \widetilde{m} \leq \widetilde{I}(u_0) < \infty,$$

es decir, $\widetilde{m} \in \mathbb{R}$.

- *Parte 2 (Compacidad).* Sea $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ una sucesión minimizadora para (3.9), es decir, $\lim_{\nu\to\infty} \widetilde{I}(u_\nu) = \widetilde{m}$. Como en el Paso 1 de la demostración del Teorema 3.1, descartando un número finito de términos podemos suponer que $\widetilde{I}(u_\nu) \leq \widetilde{m} + 1$

para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Por (3.15),

$$C_1\|u_\nu\|^p_{W^{1,p}} \leq \widetilde{I}(u_\nu) + C_2 \leq \widetilde{m} + 1 + C_2, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}.$$

Nótese que, como $\widetilde{m} \geq -C_2$ por la Parte 1, se tiene $\widetilde{m} + C_2 \geq 0$ y, por lo tanto, $\widetilde{m} + 1 + C_2 \geq 1 > 0$. Definiendo $\gamma = \left(\frac{\widetilde{m}+1+C_2}{C_1}\right)^{\frac{1}{p}} > 0$, obtenemos $\|u_\nu\|_{W^{1,p}} \leq \gamma$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 1.42, existen $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ y una subsucesión (que seguimos denotando $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$) tales que $u_\nu \rightharpoonup \bar{u}$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Como $u_\nu - u_0 \in W^{1,p}_0(\Omega)$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$ y $u_\nu - u_0 \rightharpoonup \bar{u} - u_0$ en $W^{1,p}(\Omega)$, la Proposición 1.43 garantiza que $\bar{u} \in u_0 + W^{1,p}_0(\Omega)$.

- *Parte 3 (Semicontinuidad inferior).* Como f satisface las hipótesis del Teorema 3.1, el Paso 2 de su demostración, aplicado a la subsucesión anterior, da $\liminf_{\nu\to\infty} I(u_\nu) \geq I(\bar{u})$. Además, por el Lema 3.3, $\lim_{\nu\to\infty} L(u_\nu) = L(\bar{u})$. Recordando que, si $\{b_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente de números reales, entonces $\liminf_{\nu\to\infty}(a_\nu - b_\nu) = \liminf_{\nu\to\infty} a_\nu - \lim_{\nu\to\infty} b_\nu$, obtenemos

$$\widetilde{I}(\bar{u}) = I(\bar{u}) - L(\bar{u}) \leq \liminf_{\nu\to\infty} I(u_\nu) - \lim_{\nu\to\infty} L(u_\nu) = \liminf_{\nu\to\infty} \big[I(u_\nu) - L(u_\nu)\big] = \liminf_{\nu\to\infty} \widetilde{I}(u_\nu) = \widetilde{m},$$

  donde en la última igualdad se usó que la subsucesión sigue siendo minimizadora. Como además $\bar{u} \in u_0 + W^{1,p}_0(\Omega)$, se tiene $\widetilde{I}(\bar{u}) \geq \widetilde{m}$. Por lo tanto $\widetilde{I}(\bar{u}) = \widetilde{m}$, lo cual demuestra que $\bar{u}$ es un minimizador de (3.9).

- *Parte 4 (Unicidad).* Supongamos que f satisface el caso (a) o el caso (b) del Teorema 3.1, y sean $\bar{u}, \bar{v} \in u_0 + W^{1,p}_0(\Omega)$ dos minimizadores de (3.9), es decir, $\widetilde{I}(\bar{u}) = \widetilde{I}(\bar{v}) = \widetilde{m}$. Denotemos $\bar{w} = \frac{\bar{u}+\bar{v}}{2}$; como en la Parte 2 de la demostración del Teorema 3.1, se tiene $\bar{w} \in u_0 + W^{1,p}_0(\Omega)$ y $\nabla\bar{w} = \frac{1}{2}\nabla\bar{u} + \frac{1}{2}\nabla\bar{v}$.

  Observemos primero que $I(\bar{u})$ y $I(\bar{v})$ son finitos. En efecto, $I(\bar{u}) = \widetilde{I}(\bar{u}) + L(\bar{u}) = \widetilde{m} + L(\bar{u})$, donde $\widetilde{m} \in \mathbb{R}$ por la Parte 1 y $L(\bar{u}) \in \mathbb{R}$ por el Lema 3.3; análogamente para $\bar{v}$. Por la convexidad de $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ (hipótesis (H_1)) aplicada con $\lambda = \frac{1}{2}$, exactamente como en la Parte 2 de la demostración del Teorema 3.1, se tiene

$$f\left(x, \bar{w}(x), \nabla\bar{w}(x)\right) \leq \frac{1}{2} f(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)) + \frac{1}{2} f(x, \bar{v}(x), \nabla\bar{v}(x)), \quad \text{en c.t.p } x \in \Omega,$$

e integrando, $I(\bar{w}) \leq \frac{1}{2}I(\bar{u}) + \frac{1}{2}I(\bar{v})$. Por otra parte, por la linealidad de L (Lema 3.3),

$$L(\bar{w}) = \frac{1}{2}L(\bar{u}) + \frac{1}{2}L(\bar{v}).$$

Restando ambas relaciones,

$$\widetilde{I}(\bar{w}) = I(\bar{w}) - L(\bar{w}) \leq \frac{1}{2}\big[I(\bar{u}) - L(\bar{u})\big] + \frac{1}{2}\big[I(\bar{v}) - L(\bar{v})\big] = \frac{1}{2}\widetilde{I}(\bar{u}) + \frac{1}{2}\widetilde{I}(\bar{v}) = \widetilde{m}.$$

Como $\bar{w} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, también $\widetilde{I}(\bar{w}) \geq \widetilde{m}$, de modo que $\widetilde{I}(\bar{w}) = \widetilde{m}$. En particular, $I(\bar{w}) = \widetilde{m} + L(\bar{w})$ es finito. Definiendo, como en la Parte 2 de la demostración del Teorema 3.1,

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}f(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)) + \frac{1}{2}f(x, \bar{v}(x), \nabla\bar{v}(x)) - f\left(x, \bar{w}(x), \nabla\bar{w}(x)\right), \quad \text{en c.t.p } x \in \Omega,$$

se tiene $\Psi(x) \geq 0$ en c.t.p $x \in \Omega$ y, como $I(\bar{u})$, $I(\bar{v})$ e $I(\bar{w})$ son finitos,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Psi(x)\,dx &= \frac{1}{2}I(\bar{u}) + \frac{1}{2}I(\bar{v}) - I(\bar{w}) \\ &= \frac{1}{2}\big[\widetilde{I}(\bar{u}) + L(\bar{u})\big] + \frac{1}{2}\big[\widetilde{I}(\bar{v}) + L(\bar{v})\big] - \big[\widetilde{I}(\bar{w}) + L(\bar{w})\big] \\ &= \left[\frac{1}{2}\widetilde{m} + \frac{1}{2}\widetilde{m} - \widetilde{m}\right] + \left[\frac{1}{2}L(\bar{u}) + \frac{1}{2}L(\bar{v}) - L(\bar{w})\right] = 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Como Ψ es medible, no negativa y de integral nula, $\Psi(x) = 0$ en c.t.p $x \in \Omega$; es decir, se cumple la igualdad (3.7). A partir de aquí, el argumento de los casos (a) y (b) de la Parte 2 de la demostración del Teorema 3.1 se aplica sin cambios, pues solo usa (3.7) y el hecho de que $\bar{u} - \bar{v} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, y concluye que $\bar{u}(x) = \bar{v}(x)$ en c.t.p $x \in \Omega$.

■

3.1.3. Algunos contraejemplos Los siguientes ejemplos muestran que las hipótesis de coercitividad (H_2) y de convexidad (H_1) del Teorema 3.1 no pueden omitirse. En todos ellos $n = 1$ y $\Omega = (0, 1)$, y las sucesiones minimizadoras se construyen con funciones continuas y de clase C^1 a trozos. La siguiente observación justifica que dichas funciones pertenecen a los espacios de Sobolev correspondientes.

Observación 3.5. Sea $u \in C^1_{piec}([a, b])$ y sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ una partición tal

que $u \in C^1([x_{i-1}, x_i])$ para cada $i = 1, \dots, N$. Denotemos por u' la función definida en cada (x_{i-1}, x_i) como la derivada clásica de u. Entonces u' es acotada y, para toda $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$, integrando por partes en cada subintervalo,

$$\int_a^b u(x)\,\varphi'(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N}\Big[u(x_i)\varphi(x_i) - u(x_{i-1})\varphi(x_{i-1})\Big] - \int_a^b u'(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_a^b u'(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

pues la suma es telescópica (por la continuidad de u) y $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Por lo tanto, u' es la derivada débil de u, y $u \in W^{1,p}(a, b)$ para todo $1 \le p \le \infty$. Si además $u(a) = u(b) = 0$, la Observación 1.31 (v) garantiza que $u \in W_0^{1,p}(a, b)$ para todo $1 \le p < \infty$.

Ejemplo 3.6. Estudiaremos un caso en el que la hipótesis (H_2) del Teorema 3.1 falla para todo $p > 1$, y en el que el problema correspondiente carece de solución. Sean $n = 1$, $\Omega = (0, 1)$ y $f(x, u, \xi) = \sqrt{u^2 + \xi^2}$. Observe que f es de clase C^1 en $\bar{\Omega} \times \big((\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}\big)$, pero no es diferenciable en los puntos donde $(u, \xi) = (0, 0)$; así, en sentido estricto, tampoco se verifica la hipótesis de regularidad del Teorema 3.1. El ejemplo ilustra, sin embargo, el fenómeno característico de la falla de (H_2): cuando el integrando crece solo linealmente en ξ, las sucesiones minimizadoras pueden concentrar su derivada en regiones cada vez más pequeñas sin que el valor del funcional lo penalice.

- Se verifica (H_1): el integrando $f(x, u, \xi) = \sqrt{u^2 + \xi^2} = |(u, \xi)|$ no depende de x y coincide con la norma euclidiana del vector (u, ξ) en $\mathbb{R}^2$. Por la desigualdad triangular, dados $(u_1, \xi_1), (u_2, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $t \in [0, 1]$, se tiene que

$$\begin{aligned} f\big(x, t(u_1, \xi_1) + (1-t)(u_2, \xi_2)\big) &= |t(u_1, \xi_1) + (1-t)(u_2, \xi_2)| \\ &\le t|(u_1, \xi_1)| + (1-t)|(u_2, \xi_2)| \\ &= tf(x, u_1, \xi_1) + (1-t)f(x, u_2, \xi_2), \end{aligned}$$

  lo que demuestra que la aplicación $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ es convexa para todo $x \in \bar{\Omega}$.

- Falla la hipótesis (H_2): suponga, por contradicción, que existen $p > 1$, $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sqrt{u^2 + \xi^2} \ge \alpha_1 |\xi|^p + \alpha_3, \quad \forall\, (x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

  Tomando $u = 0$ y $\xi > 0$, obtenemos $\xi \ge \alpha_1 \xi^p + \alpha_3$ y, dividiendo por ξ, $1 \ge \alpha_1 \xi^{p-1} + \frac{\alpha_3}{\xi}$ para todo $\xi > 0$. Como $p - 1 > 0$, el lado derecho tiende a $+\infty$ cuando $\xi \to \infty$, lo cual es una contradicción. Observe que solo se tiene la cota lineal $f(x, u, \xi) \ge |\xi|$,

que corresponde al caso excluido $p = 1$.

- Se verifica (H_3) para todo $p > 1$: para $(u, \xi) \neq (0, 0)$, se tiene que

$$|f_u(x, u, \xi)| = \frac{|u|}{\sqrt{u^2 + \xi^2}} \leq 1 \qquad \text{y} \qquad |f_\xi(x, u, \xi)| = \frac{|\xi|}{\sqrt{u^2 + \xi^2}} \leq 1.$$

  Así, para cualquier $p > 1$, eligiendo $\beta = 1$ se cumple que $|f_u(x, u, \xi)|,\ |f_\xi(x, u, \xi)| \leq 1 \leq \beta\,(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1})$ en todos los puntos donde f es diferenciable.

Considere el problema

$$(G_1) \quad \text{ínf} \left\{ I(u) = \int_0^1 \sqrt{[u(x)]^2 + [u'(x)]^2}\, dx : u \in X \right\} = m,$$

donde $X = \{u \in W^{1,1}(0, 1) : u(0) = 0,\ u(1) = 1\}$. Por la Observación 1.31 (v), $X = u_0 + W_0^{1,1}(0, 1)$ con $u_0(x) = x$, de modo que (G_1) es un problema de la forma (3.1). Demostraremos que (G_1) no admite solución.

Sea $u \in X$. Como $\sqrt{[u(x)]^2 + [u'(x)]^2} \geq |u'(x)| \geq u'(x)$ para c.t.p $x \in (0, 1)$, integrando y usando el Lema 1.30 obtenemos

$$I(u) \geq \int_0^1 |u'(x)|\, dx \geq \int_0^1 u'(x)\, dx = u(1) - u(0) = 1. \tag{3.16}$$

Por la arbitrariedad de $u \in X$, deducimos que $m \geq 1$. Para demostrar que $m = 1$, consideremos la sucesión $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ definida por

$$u_\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[0, 1 - \frac{1}{\nu}\right], \\ 1 + \nu(x - 1) & \text{si } x \in \left(1 - \frac{1}{\nu}, 1\right]. \end{cases}$$

Para cada $\nu \in \mathbb{N}$, la función u_ν es continua y de clase C^1 a trozos, con $u_\nu(0) = 0$ y $u_\nu(1) = 1$; por la Observación 3.5, $u_\nu \in X$, y su derivada débil es

$$u_\nu'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left(0, 1 - \frac{1}{\nu}\right), \\ \nu & \text{si } x \in \left(1 - \frac{1}{\nu}, 1\right). \end{cases}$$

Como $u_\nu = u_\nu' = 0$ en $\left(0, 1 - \frac{1}{\nu}\right)$, y como $0 \leq 1 + \nu(x - 1) \leq 1$ para $x \in \left(1 - \frac{1}{\nu}, 1\right]$, se tiene

que

$$I(u_\nu) = \int_{1-\frac{1}{\nu}}^{1} \sqrt{[1+\nu(x-1)]^2+\nu^2}\,dx \leq \int_{1-\frac{1}{\nu}}^{1} \sqrt{1+\nu^2}\,dx = \frac{\sqrt{1+\nu^2}}{\nu} = \sqrt{1+\frac{1}{\nu^2}}.$$

Como $u_\nu \in X$, se tiene $m \leq I(u_\nu) \leq \sqrt{1+\frac{1}{\nu^2}}$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$, y haciendo $\nu \to \infty$ obtenemos $m \leq 1$. Por lo tanto, $m = 1$.

Finalmente, supongamos por absurdo que existe $\bar{u} \in X$ tal que $I(\bar{u}) = m = 1$. Por (3.16) aplicada a $\bar{u}$,

$$1 = I(\bar{u}) \geq \int_0^1 |\bar{u}'(x)|\,dx \geq 1,$$

de donde

$$1 = \int_0^1 \sqrt{[\bar{u}(x)]^2+[\bar{u}'(x)]^2}\,dx = \int_0^1 |\bar{u}'(x)|\,dx \Rightarrow \int_0^1 \left(\sqrt{[\bar{u}(x)]^2+[\bar{u}'(x)]^2} - |\bar{u}'(x)|\right)dx = 0.$$

Como $\sqrt{[\bar{u}(x)]^2+[\bar{u}'(x)]^2} \geq \sqrt{[\bar{u}'(x)]^2} = |\bar{u}'(x)|$, el integrando es no negativo, y por lo tanto se anula en c.t.p $x \in (0,1)$, es decir, $[\bar{u}(x)]^2 + [\bar{u}'(x)]^2 = [\bar{u}'(x)]^2$, y así $\bar{u}(x) = 0$ en c.t.p $x \in (0,1)$. Como $\bar{u}$ es continua (Lema 1.30), se tiene $\bar{u} \equiv 0$ en $[0,1]$, lo cual contradice que $\bar{u}(1) = 1$. Por lo tanto, el problema (G_1) carece de solución.

Ejemplo 3.7 (El ejemplo de Weierstrass en $W^{1,2}$)**.** Estudiaremos un caso en el que el integrando es de clase C^∞ y satisface las hipótesis (H_1) y (H_3) del Teorema 3.1, pero no la hipótesis (H_2), y en el que el problema correspondiente carece de solución. Sean $n = 1$, $\Omega = (0,1)$ y $f(x,u,\xi) = x\xi^2$, que es de clase $C^\infty(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

- Se verifica (H_1): fijado $x_0 \in \bar{\Omega}$, la función $g(u,\xi) = f(x_0,u,\xi) = x_0\xi^2$ es de clase $C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ con matriz Hessiana

  $$\nabla^2 g(u,\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x_0 \end{pmatrix},$$

  cuyos autovalores, 0 y $2x_0$, son no negativos pues $x_0 \in [0,1]$. Así, la matriz Hessiana es semidefinida positiva y, por el Teorema 1.46 (iv), g es convexa para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$.

- Falla la hipótesis (H_2): suponga, por contradicción, que existen $p > 1$, $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x\xi^2 \geq \alpha_1|\xi|^p + \alpha_3$ para todo $(x,u,\xi) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. En particular, tomando

$x = 0$, obtenemos $0 \geq \alpha_1|\xi|^p + \alpha_3$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Como $\alpha_1 > 0$ y $p > 1$, el lado derecho tiende a $+\infty$ cuando $\xi \to \infty$, lo cual es una contradicción.

- Se verifica (H_3) con $p = 2$: se tiene $f_u(x, u, \xi) = 0$ y $f_\xi(x, u, \xi) = 2x\xi$. Como $0 \leq x \leq 1$, eligiendo $\beta = 2$,

  $$|f_u(x, u, \xi)| = 0 \leq \beta\big(1+|u|+|\xi|\big) \qquad \text{y} \qquad |f_\xi(x, u, \xi)| = 2|x||\xi| \leq 2|\xi| \leq \beta\big(1+|u|+|\xi|\big),$$

  para todo $(x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Considere el problema

$$(G_2) \quad \text{ínf}\left\{ I(u) = \int_0^1 x\,[u'(x)]^2\,dx : u \in X \right\} = m,$$

donde $X = \{u \in W^{1,2}(0,1) : u(0) = 1,\ u(1) = 0\}$. Por la Observación 1.31 (v), $X = u_0 + W_0^{1,2}(0,1)$ con $u_0(x) = 1 - x$. Demostraremos que (G_2) no admite solución.

Como $I(u) \geq 0$ para toda $u \in X$, se tiene $m \geq 0$. Para probar que $m = 0$, recordemos que en el Ejemplo 2.5 se consideró la clase $X_{piec} = \big\{u \in C^1_{piec}([0,1]) : u(0) = 1,\ u(1) = 0\big\}$ y se estableció que $\text{ínf}\{I(u) : u \in X_{piec}\} = 0$. Por la Observación 3.5, $X_{piec} \subset X$, y por lo tanto $m \leq \text{ínf}\{I(u) : u \in X_{piec}\} = 0$. Así, $m = 0$.

Finalmente, supongamos por absurdo que existe $\bar{u} \in X$ tal que $I(\bar{u}) = m = 0$. Como el integrando $x\,[\bar{u}'(x)]^2$ es no negativo y su integral es nula, se tiene $x\,[\bar{u}'(x)]^2 = 0$ para c.t.p $x \in (0,1)$ y, como $x > 0$ en $(0,1)$, $\bar{u}'(x) = 0$ para c.t.p $x \in (0,1)$. Por la Observación 1.31 (iv), $\bar{u}$ es constante en $[0,1]$, lo cual es incompatible con las condiciones $\bar{u}(0) = 1$ y $\bar{u}(1) = 0$. Por lo tanto, el problema (G_2) carece de solución.

Ejemplo 3.8. Estudiaremos un caso en el que el integrando es de clase C^∞ y satisface las hipótesis (H_2) y (H_3) del Teorema 3.1, pero no la hipótesis de convexidad (H_1), y en el que el problema correspondiente carece de solución. Sean $n = 1$, $\Omega = (0,1)$ y $f(x, u, \xi) = (\xi^2 - 1)^2 + u^4$, que es de clase $C^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

- Falla la hipótesis (H_1): fijados $x_0 \in \bar{\Omega}$ y $s \in \mathbb{R}$, la función $g(\xi) = f(x_0, s, \xi) = (\xi^2 - 1)^2 + s^4$ es de clase $C^2(\mathbb{R})$ con $g''(\xi) = 12\xi^2 - 4$, de modo que $g''(0) = -4 < 0$. Por el Teorema 1.46 (iv), g no es convexa. Como la restricción de una función convexa a una recta es convexa, la aplicación $(u, \xi) \mapsto f(x_0, u, \xi)$ tampoco es convexa, y la hipótesis (H_1) no se cumple.

- Se verifica (H_2) con $p = 4$: dado $\xi \in \mathbb{R}$, por la desigualdad de Young con $a = 2$, $b = \xi^2$ y exponentes 2 y 2, se tiene $2\xi^2 \leq \frac{2^2}{2} + \frac{(\xi^2)^2}{2} = 2 + \frac{1}{2}\xi^4$. Así,

$$(\xi^2 - 1)^2 = \xi^4 - 2\xi^2 + 1 \geq \xi^4 - \left(2 + \frac{1}{2}\xi^4\right) + 1 = \frac{1}{2}\xi^4 - 1.$$

  Como $u^4 \geq 0$, concluimos que $f(x, u, \xi) \geq \frac{1}{2}|\xi|^4 - 1$ para todo $(x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir, (H_2) se verifica con $p = 4$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_3 = -1$.

- Se verifica (H_3) con $p = 4$: primero, $|\xi| \leq 1 + |\xi|^3$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, pues si $|\xi| \leq 1$ entonces $|\xi| \leq 1 \leq 1 + |\xi|^3$, y si $|\xi| > 1$ entonces $|\xi| < |\xi|^3 < 1 + |\xi|^3$. Como $f_u(x, u, \xi) = 4u^3$ y $f_\xi(x, u, \xi) = 4\xi^3 - 4\xi$, eligiendo $\beta = 8$,

$$|f_u(x, u, \xi)| = 4|u|^3 \leq 8(1 + |u|^3 + |\xi|^3),$$

$$|f_\xi(x, u, \xi)| \leq 4|\xi|^3 + 4|\xi| \leq 4|\xi|^3 + 4(1 + |\xi|^3) = 4 + 8|\xi|^3 \leq 8(1 + |u|^3 + |\xi|^3),$$

  para todo $(x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Considere el problema

$$(G_3) \quad \text{ínf}\left\{I(u) = \int_0^1 \left(\left([u'(x)]^2 - 1\right)^2 + [u(x)]^4\right) dx : u \in W_0^{1,4}(0,1)\right\} = m,$$

que es de la forma (3.1) con $u_0 \equiv 0$. Demostraremos que (G_3) no admite solución.

Como $I(u) \geq 0$ para toda $u \in W_0^{1,4}(0,1)$, se tiene $m \geq 0$. Para demostrar que $m = 0$, para cada $\nu \in \mathbb{N}$ dividimos $[0,1]$ en los subintervalos $\left[\frac{k}{\nu}, \frac{k+1}{\nu}\right]$, con $k \in \{0, \ldots, \nu - 1\}$, y definimos

$$u_\nu(x) = \begin{cases} x - \frac{k}{\nu} & \text{si } x \in \left[\frac{2k}{2\nu}, \frac{2k+1}{2\nu}\right] \text{ para algún } k \in \{0, \ldots, \nu - 1\}, \\ -x + \frac{k+1}{\nu} & \text{si } x \in \left(\frac{2k+1}{2\nu}, \frac{2k+2}{2\nu}\right] \text{ para algún } k \in \{0, \ldots, \nu - 1\}. \end{cases}$$

Para cada $\nu \in \mathbb{N}$, la función u_ν es continua y de clase C^1 a trozos en $[0,1]$, con $u_\nu(0) = u_\nu(1) = 0$; por la Observación 3.5, $u_\nu \in W_0^{1,4}(0,1)$. Además, $|u_\nu'(x)| = 1$ para c.t.p $x \in (0,1)$, de modo que $\left([u_\nu'(x)]^2 - 1\right)^2 = 0$ para c.t.p $x \in (0,1)$. Por otra parte, u_ν alcanza su valor máximo $\frac{1}{2\nu}$ en los puntos $\frac{2k+1}{2\nu}$, de modo que $0 \leq u_\nu(x) \leq \frac{1}{2\nu}$ para todo $x \in [0,1]$. En

consecuencia,

$$0 \leq m \leq I(u_\nu) = \int_0^1 [u_\nu(x)]^4\,dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{2\nu}\right)^4 dx = \frac{1}{16\nu^4}, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N},$$

y haciendo $\nu \to \infty$ obtenemos $m = 0$.

Finalmente, supongamos por absurdo que existe $\bar{u} \in W_0^{1,4}(0,1)$ tal que $I(\bar{u}) = m = 0$. Como el integrando es suma de dos términos no negativos y su integral es nula, ambos términos se anulan en c.t.p $x \in (0,1)$:

$$\left([\bar{u}'(x)]^2 - 1\right)^2 = 0 \quad \text{y} \quad [\bar{u}(x)]^4 = 0, \quad \text{en c.t.p } x \in (0,1).$$

La primera igualdad da $|\bar{u}'(x)| = 1$ para c.t.p $x \in (0,1)$. La segunda da $\bar{u}(x) = 0$ para c.t.p $x \in (0,1)$ y, como $\bar{u}$ es continua (Lema 1.30), $\bar{u} \equiv 0$ en $[0,1]$; en particular, $\bar{u}'(x) = 0$ para c.t.p $x \in (0,1)$. Esto contradice que $|\bar{u}'(x)| = 1$ en c.t.p. Por lo tanto, el problema (G_3) carece de solución.

3.2. LA ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE

3.2.1. El caso suave Extendemos ahora el Teorema 2.1 al contexto de las ecuaciones en derivadas parciales. Un resultado más apropiado, en vista del Teorema 3.1 de existencia, se dará en el Teorema 3.11.

Teorema 3.9. *Sean $n \geq 1$ un entero, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera Lipschitz, $f \in C^2\left(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\right)$, $f = f(x,u,\xi)$, y $u_0 \in C^2(\bar{\Omega})$. Considere el problema*

$$\text{ínf}\left\{I(u) = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))\,dx : u \in X\right\} = m, \tag{3.17}$$

donde $X = \left\{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = u_0|_{\partial\Omega}\right\}$.

- *Parte 1. Si* (3.17) *admite un minimizador $\bar{u} \in X \cap C^2(\bar{\Omega})$, entonces $\bar{u}$ satisface necesariamente la* ***ecuación de Euler-Lagrange***

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{\xi_i}(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))\right] = f_u(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x)), \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}. \tag{3.18}$$

- *Parte 2. Recíprocamente, si* $\bar{u} \in X \cap C^2(\bar{\Omega})$ *satisface* (3.18) *y la aplicación* $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ *es convexa para todo* $x \in \bar{\Omega}$*, entonces* $\bar{u}$ *es un minimizador de* (3.17)*.*

- *Parte 3. Si la aplicación* $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ *es estrictamente convexa para todo* $x \in \bar{\Omega}$*, entonces el minimizador de* (3.17)*, si existe, es único.*

Observación 3.10. (I) El teorema anterior es puramente formal, en el sentido de que asume demasiado sobre la suavidad de la solución: supone la existencia de un minimizador de clase $C^2(\bar{\Omega})$, lo cual, en general, no está garantizado.

(II) Cuando $n = 1$, se recupera el Teorema 2.1. Cuando $n \geq 2$, la ecuación (3.18) es una ecuación en derivadas parciales que puede reescribirse de manera más compacta, usando el operador divergencia $\operatorname{div}(F) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ de un campo vectorial $F = (F_1, \ldots, F_n)$, como

$$\operatorname{div}\left[f_\xi(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\right] = f_u(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)), \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}.$$

(III) A diferencia de la Parte 2 del Teorema 2.1, en la Parte 2 del teorema anterior se exige que $\bar{u}$ sea de clase $C^2(\bar{\Omega})$. En efecto, cuando $n = 1$ la ecuación de Euler-Lagrange afirma que la función $x \mapsto f_\xi(x, \bar{u}(x), \bar{u}'(x))$, que es la única que aparece, es derivable con derivada continua, lo que basta para integrar por partes. Cuando $n \geq 2$, en cambio, la ecuación (3.18) solo afirma que la *suma* de las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\right]$ existe, y no que cada una de las funciones $x \mapsto f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))$ sea de clase $C^1(\bar{\Omega})$, que es lo que requiere la fórmula de integración por partes (Teorema 1.39). La hipótesis $\bar{u} \in C^2(\bar{\Omega})$, junto con $f \in C^2$, garantiza esta regularidad.

Demostración. La estructura de la demostración es la misma que la del Teorema 2.1.

- *Parte 1.* Sea $\bar{u} \in X \cap C^2(\bar{\Omega})$ un minimizador de (3.17). Definimos el conjunto de las **variaciones admisibles**

$$V = \left\{v \in C^1(\bar{\Omega}) : v|_{\partial\Omega} = 0\right\}.$$

Sean $v \in V$ y $h \in \mathbb{R}$. La función $\bar{u} + hv$ es de clase $C^1(\bar{\Omega})$ y satisface

$$(\bar{u} + hv)|_{\partial\Omega} = \bar{u}|_{\partial\Omega} + h\, v|_{\partial\Omega} = u_0|_{\partial\Omega} + h \cdot 0 = u_0|_{\partial\Omega},$$

de modo que $\bar{u} + hv \in X$. Por la minimalidad de $\bar{u}$, se cumple que

$$I(\bar{u}) \leq I(\bar{u} + hv), \quad \forall\, h \in \mathbb{R}. \tag{3.19}$$

Fijemos $v \in V$ y definamos la función $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y la función $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x,h) = f\big(x, \bar{u}(x) + hv(x), \nabla\bar{u}(x) + h\nabla v(x)\big), \qquad \Phi(h) = I(\bar{u} + hv) = \int_\Omega g(x,h)\,dx.$$

Para cada $h \in \mathbb{R}$, la función $x \mapsto g(x,h)$ es continua en el compacto $\bar{\Omega}$, pues es composición de funciones continuas; en particular, es acotada y, como Ω es acotado, integrable sobre Ω. Así, Φ está bien definida.

Como $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, por la regla de la cadena la función $h \mapsto g(x,h)$ es derivable para cada $x \in \bar{\Omega}$, con

$$\frac{\partial g}{\partial h}(x,h) = f_u\big(x, \bar{u}(x)+hv(x), \nabla\bar{u}(x)+h\nabla v(x)\big)\, v(x) + \sum_{i=1}^{n} f_{\xi_i}\big(x, \bar{u}(x)+hv(x), \nabla\bar{u}(x)+h\nabla v(x)\big)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x$$

Como f_u, $f_{\xi_1}, \ldots, f_{\xi_n}$ son continuas y $\bar{u}, v \in C^1(\bar{\Omega})$, la función $(x,h) \mapsto \frac{\partial g}{\partial h}(x,h)$ es continua en $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$.

Mostremos que Φ es derivable en todo punto y que su derivada puede calcularse derivando bajo el signo integral. Sea $h_0 \in \mathbb{R}$. El conjunto $\bar{\Omega} \times [h_0 - 1, h_0 + 1]$ es compacto, pues $\bar{\Omega}$ es cerrado y acotado; como $\frac{\partial g}{\partial h}$ es continua en él, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial g}{\partial h}(x,h)\right| \leq M, \quad \forall\,(x,h) \in \bar{\Omega} \times [h_0 - 1, h_0 + 1]. \tag{3.20}$$

Sea $\{t_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $t_\nu \to 0$ y $0 < |t_\nu| \leq 1$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Para cada $\nu \in \mathbb{N}$, el cociente incremental de Φ en h_0 es

$$\frac{\Phi(h_0 + t_\nu) - \Phi(h_0)}{t_\nu} = \int_\Omega \frac{g(x, h_0 + t_\nu) - g(x, h_0)}{t_\nu}\,dx.$$

Fijemos $x \in \bar{\Omega}$ y $\nu \in \mathbb{N}$. Por el teorema del valor medio aplicado a la función derivable $h \mapsto g(x,h)$ en el intervalo de extremos h_0 y $h_0 + t_\nu$, existe $\theta_{\nu,x} \in (0,1)$ tal que

$$\frac{g(x, h_0 + t_\nu) - g(x, h_0)}{t_\nu} = \frac{\partial g}{\partial h}(x, h_0 + \theta_{\nu,x} t_\nu).$$

Como $|\theta_{\nu,x} t_\nu| \leq |t_\nu| \leq 1$, se tiene $h_0 + \theta_{\nu,x} t_\nu \in [h_0 - 1, h_0 + 1]$ y, por (3.20),

$$\left| \frac{g(x, h_0 + t_\nu) - g(x, h_0)}{t_\nu} \right| = \left| \frac{\partial g}{\partial h}(x, h_0 + \theta_{\nu,x} t_\nu) \right| \leq M, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}, \ \ \forall\, \nu \in \mathbb{N}.$$

Dado que Ω es acotado, la función constante M pertenece a $L^1(\Omega)$. Además, por la definición de derivada,

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{g(x, h_0 + t_\nu) - g(x, h_0)}{t_\nu} = \frac{\partial g}{\partial h}(x, h_0), \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}.$$

Por el teorema de la convergencia dominada (Teorema 1.13), podemos intercambiar el límite con la integral:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \to \infty} \frac{\Phi(h_0 + t_\nu) - \Phi(h_0)}{t_\nu} &= \lim_{\nu \to \infty} \int_\Omega \frac{g(x, h_0 + t_\nu) - g(x, h_0)}{t_\nu}\, dx = \int_\Omega \lim_{\nu \to \infty} \frac{g(x, h_0 + t_\nu) - g(x, h_0)}{t_\nu}\, dx \\ &= \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial h}(x, h_0)\, dx. \end{aligned}$$

Como la sucesión $\{t_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ con $t_\nu \to 0$ y $0 < |t_\nu| \leq 1$ es arbitraria, el límite del cociente incremental existe cuando la variable tiende a 0; es decir, Φ es derivable en h_0, con

$$\begin{aligned} \Phi'(h_0) = &\int_\Omega f_u\big(x, \bar{u}(x) + h_0 v(x), \nabla \bar{u}(x) + h_0 \nabla v(x)\big) v(x) dx \\ &+ \int_\Omega \sum_{i=1}^n f_{\xi_i}\big(x, \bar{u}(x) + h_0 v(x), \nabla \bar{u}(x) + h_0 \nabla v(x)\big) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx. \end{aligned}$$

Por la arbitrariedad de $h_0 \in \mathbb{R}$, Φ es derivable en todo $\mathbb{R}$.

Por la desigualdad (3.19), $\Phi(0) = I(\bar{u}) \leq I(\bar{u} + hv) = \Phi(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$; es decir, Φ alcanza un mínimo global en el punto interior $h = 0$. Como Φ es derivable en 0, se tiene necesariamente $\Phi'(0) = 0$, esto es,

$$\int_\Omega \left[f_u(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x))\, v(x) + \sum_{i=1}^n f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x))\, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right] dx = 0, \quad \forall\, v \in V. \tag{3.21}$$

La identidad (3.21) se conoce como la **forma débil** de la ecuación de Euler-Lagrange.

Para pasar a la forma clásica, integramos por partes el segundo sumando. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $\bar{u} \in C^2(\bar{\Omega})$, se tiene $\bar{u} \in C^1(\bar{\Omega})$ y $\nabla \bar{u} \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$; como además $f \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, la función f_{ξ_i} es de clase C^1, y por la regla de la cadena la

aplicación $x \mapsto f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x))$ es de clase $C^1(\bar{\Omega})$. Como también $v \in C^1(\bar{\Omega})$, la fórmula de integración por partes (Teorema 1.39) da

$$\int_\Omega f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) \, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) \, v(x) \, \nu_i(x) \, dS(x) - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \big[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) \big] v(x) \, dx,$$

donde $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ denota el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$. Como $v|_{\partial\Omega} = 0$, la integral sobre $\partial\Omega$ se anula, y se obtiene

$$\int_\Omega f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) \, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \, dx = - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \big[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) \big] v(x) \, dx.$$

Sumando sobre $i = 1, \ldots, n$ y sustituyendo en (3.21), resulta

$$\int_\Omega \left[f_u(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \big[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) \big] \right] v(x) \, dx = 0, \quad \forall \, v \in V.$$

Denotemos

$$E(x) = f_u(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \big[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) \big], \quad x \in \bar{\Omega}.$$

La función E es continua en $\bar{\Omega}$, y en particular pertenece a $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Toda $v \in C_0^\infty(\Omega)$, extendida por cero a $\bar{\Omega}$, es de clase $C^1(\bar{\Omega})$ y se anula sobre $\partial\Omega$, de modo que $C_0^\infty(\Omega) \subset V$. Así,

$$\int_\Omega E(x) \, v(x) \, dx = 0, \quad \forall \, v \in C_0^\infty(\Omega),$$

y el Lema fundamental del cálculo de variaciones (Teorema 1.22) garantiza que $E(x) = 0$ para c.t.p $x \in \Omega$.

Veamos que, de hecho, $E(x) = 0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$. Supongamos que existe $x_1 \in \Omega$ con $E(x_1) \neq 0$. Por la continuidad de E, existe $r > 0$ tal que la bola $B(x_1, r)$ está contenida en Ω y $E(x) \neq 0$ para todo $x \in B(x_1, r)$; como $B(x_1, r)$ tiene medida positiva, esto contradice que $E = 0$ en c.t.p de Ω. Por lo tanto, $E(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$. Finalmente, si $x \in \partial\Omega$, existe una sucesión $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ con $x_\nu \to x$, y por

continuidad $E(x) = \lim_{\nu\to\infty} E(x_\nu) = 0$. En consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\big] = f_u(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)), \quad \forall\, x \in \bar{\Omega},$$

que es la ecuación de Euler-Lagrange (3.18).

- *Parte 2.* Supongamos ahora que $\bar{u} \in X \cap C^2(\bar{\Omega})$ satisface (3.18) y que la aplicación $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ es convexa para todo $x \in \bar{\Omega}$. Probaremos que $I(\bar{u}) \le I(u)$ para toda $u \in X$.

  Sea $u \in X$. Fijemos $x \in \bar{\Omega}$ y definamos $F_x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $F_x(u, \xi) = f(x, u, \xi)$. Por hipótesis, F_x es convexa y, como $f \in C^2$, es de clase $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, con gradiente $\nabla F_x(u, \xi) = \big(f_u(x, u, \xi),\ f_\xi(x, u, \xi)\big)$. Aplicando el Teorema 1.46 (ii) a F_x en los puntos $\big(u(x), \nabla u(x)\big)$ y $\big(\bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)\big)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, y desarrollando el producto escalar en $\mathbb{R}^{n+1}$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x, u(x), \nabla u(x)) &\ge f(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)) + f_u(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\,[u(x) - \bar{u}(x)] \\ &\quad + \langle f_\xi(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)), \nabla u(x) - \nabla\bar{u}(x)\rangle \\ &= f(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)) + f_u(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\,[u(x) - \bar{u}(x)] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)) \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i}(x)\right]. \end{aligned}$$

  Todas las funciones que aparecen son continuas en el compacto $\bar{\Omega}$ y, por lo tanto, integrables sobre Ω. Integrando la desigualdad anterior sobre Ω, obtenemos

$$\begin{aligned} I(u) \ge I(\bar{u}) &+ \int_\Omega f_u(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\,[u(x) - \bar{u}(x)]\,dx \\ &+ \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)) \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i}(x)\right] dx. \end{aligned} \tag{3.22}$$

  Sea $w = u - \bar{u}$. Como $u, \bar{u} \in X$, se tiene $w \in C^1(\bar{\Omega})$ y

$$w|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega} - \bar{u}|_{\partial\Omega} = u_0|_{\partial\Omega} - u_0|_{\partial\Omega} = 0,$$

  de modo que $w \in V$. Como en la Parte 1, la hipótesis $\bar{u} \in C^2(\bar{\Omega})$ y $f \in C^2$ garantizan que cada aplicación $x \mapsto f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))$ es de clase $C^1(\bar{\Omega})$. Integrando por partes

(Teorema 1.39) y usando que $w|_{\partial\Omega} = 0$, para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)) \, \frac{\partial w}{\partial x_i}(x)\, dx &= \int_{\partial\Omega} f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\, w(x)\, \nu_i(x)\, dS(x) \\ &\quad - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\right] w(x)\, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)) \cdot 0 \cdot \nu_i(x)\, dS(x) \\ &\quad - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\right] w(x)\, dx \\ &= 0 - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\right] w(x)\, dx \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\right] w(x)\, dx,\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad se usó la fórmula de integración por partes (Teorema 1.39), aplicable porque $x \mapsto f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))$ y w son de clase $C^1(\bar{\Omega})$, y en la segunda igualdad se usó que $w(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. Sustituyendo en (3.22), con $u - \bar{u} = w$ y $\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial w}{\partial x_i}$, obtenemos

$$\begin{aligned}I(u) - I(\bar{u}) &\geq \int_\Omega f_u(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\, w(x)\, dx - \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\right] w(x)\, dx \\ &= \int_\Omega \left(f_u(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\right] \right) w(x)\, dx.\end{aligned}$$

Como $\bar{u}$ satisface (3.18), el paréntesis del último integrando es nulo para todo $x \in \bar{\Omega}$, de modo que

$$I(u) - I(\bar{u}) \geq \int_\Omega 0 \cdot w(x)\, dx = 0,$$

es decir, $I(\bar{u}) \leq I(u)$. Por la arbitrariedad de $u \in X$, $\bar{u}$ es un minimizador de (3.17).

- *Parte 3.* Supongamos que la aplicación $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ es estrictamente convexa para todo $x \in \bar{\Omega}$. Sean $u, \bar{u} \in X$ dos minimizadores de (3.17), es decir, $I(u) = I(\bar{u}) = m$. Queremos ver que $u(x) = \bar{u}(x)$ para todo $x \in \bar{\Omega}$.

  Definamos $w = \frac{u+\bar{u}}{2}$. Se tiene $w \in C^1(\bar{\Omega})$ y

$$w|_{\partial\Omega} = \frac{u|_{\partial\Omega} + \bar{u}|_{\partial\Omega}}{2} = \frac{u_0|_{\partial\Omega} + u_0|_{\partial\Omega}}{2} = u_0|_{\partial\Omega},$$

de modo que $w \in X$ y, por lo tanto, $I(w) \geq m$. Además, $\nabla w = \frac{1}{2}\nabla u + \frac{1}{2}\nabla \bar{u}$, de modo que $\big(w(x), \nabla w(x)\big)$ es el punto medio de $\big(u(x), \nabla u(x)\big)$ y $\big(\bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)\big)$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Definamos

$$D(x) = \frac{1}{2} f(x, u(x), \nabla u(x)) + \frac{1}{2} f(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) - f\left(x, w(x), \nabla w(x)\right), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

La función D es continua en $\bar{\Omega}$. Por la definición de convexidad con $\lambda = \frac{1}{2}$, se tiene $D(x) \geq 0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$; y por la definición de convexidad estricta, $D(x) > 0$ en todo punto $x \in \bar{\Omega}$ donde $\big(u(x), \nabla u(x)\big) \neq \big(\bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)\big)$.

Supongamos, por contradicción, que existe $x_0 \in \bar{\Omega}$ con $u(x_0) \neq \bar{u}(x_0)$. Como $u|_{\partial\Omega} = u_0|_{\partial\Omega} = \bar{u}|_{\partial\Omega}$, necesariamente $x_0 \in \Omega$. En particular, $\big(u(x_0), \nabla u(x_0)\big) \neq \big(\bar{u}(x_0), \nabla \bar{u}(x_0)\big)$, de modo que $D(x_0) > 0$. Por la continuidad de D, existe $r > 0$ tal que la bola $B(x_0, r)$ está contenida en Ω y $D(x) > \frac{D(x_0)}{2}$ para todo $x \in B(x_0, r)$. Como $D \geq 0$ en Ω, se obtiene

$$\int_\Omega D(x)\, dx \geq \int_{B(x_0,r)} D(x)\, dx \geq \frac{D(x_0)}{2} \operatorname{med}\big(B(x_0, r)\big) > 0.$$

Por otra parte, por la definición de D,

$$\int_\Omega D(x)\, dx = \frac{1}{2} I(u) + \frac{1}{2} I(\bar{u}) - I(w) = \frac{1}{2} m + \frac{1}{2} m - I(w) = m - I(w).$$

Combinando ambas relaciones, $m - I(w) > 0$, es decir, $I(w) < m$. Esto contradice el hecho de que $I(w) \geq m$. Por lo tanto, $u(x) = \bar{u}(x)$ para todo $x \in \bar{\Omega}$, lo que demuestra la unicidad del minimizador.

■

3.2.2. El caso Sobolev En el Teorema 3.9 supusimos que el minimizador es de clase $C^2(\bar{\Omega})$. Sin embargo, el Teorema 3.1 solo garantiza la existencia de un minimizador en $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, y en este contexto aparecen dos dificultades. En primer lugar, para derivar la función $\varepsilon \mapsto I(\bar{u} + \varepsilon\varphi)$ bajo el signo integral ya no es posible acotar el integrando por una constante usando la compacidad de $\bar{\Omega}$, pues $\bar{u}$ y $\nabla \bar{u}$ no son necesariamente acotadas; se necesita una función dominante integrable, y es la hipótesis de crecimiento (H_3) la que la proporciona. En segundo lugar, como $\bar{u}$ no es necesariamente de clase C^2, no es posible

integrar por partes para obtener la ecuación en su forma clásica; por ello, la ecuación de Euler-Lagrange se obtiene en su **forma débil**, y la forma clásica se recupera solo cuando el minimizador es suficientemente regular.

Teorema 3.11. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera Lipschitz. Sean $p > 1$ y $f \in C^1\left(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\right)$, $f = f(x, u, \xi)$, tales que*

(H_3) *existe $\beta \geq 0$ tal que, para todo $(x, u, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,*

$$|f_u(x, u, \xi)| \leq \beta\big(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\big) \quad \text{y} \quad |f_\xi(x, u, \xi)| \leq \beta\big(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\big),$$

donde $f_\xi = (f_{\xi_1}, \ldots, f_{\xi_n})$, $f_{\xi_i} = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}$ y $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$.

Sean $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ un minimizador de

$$\text{ínf}\left\{ I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\} = m. \tag{3.23}$$

Entonces $\bar{u}$ satisface la ***forma débil de la ecuación de Euler-Lagrange***

$$\int_\Omega \left[f_u(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x))\, \varphi(x) + \langle f_\xi(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)), \nabla \varphi(x) \rangle \right] dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.24}$$

Si además $f \in C^2\left(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\right)$ y $\bar{u} \in C^2(\bar{\Omega})$, entonces $\bar{u}$ satisface la ecuación de Euler-Lagrange (3.18)*, esto es,*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) \right] = f_u(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)), \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}.$$

Recíprocamente, supongamos que la aplicación $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ es convexa para todo $x \in \bar{\Omega}$. Si $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ satisface (3.24)*, o bien si $f \in C^2\left(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\right)$ y $\bar{u} \in \big(u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)\big) \cap C^2(\bar{\Omega})$ satisface* (3.18)*, entonces $\bar{u}$ es un minimizador de* (3.23)*.*

Observación 3.12. (I) La hipótesis (H_3) garantiza que (3.24) tenga sentido. En efecto, el cálculo realizado en el Paso 2 de la demostración del Teorema 3.1, que solo usa (H_3) y es válido para cualquier función de $W^{1,p}(\Omega)$, muestra que $x \mapsto f_u(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x))$ pertenece a $L^{p'}(\Omega)$ y que $x \mapsto f_\xi(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x))$ pertenece a $L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Por la desigualdad de Hölder, las funciones
$x \mapsto f_u(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x))\, \varphi(x)$ y $x \mapsto \langle f_\xi(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)), \nabla \varphi(x) \rangle$ pertenecen a $L^1(\Omega)$ para toda $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$.

(II) Si $f \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, toda solución de (3.18) de clase $C^2(\bar{\Omega})$ es una solución de (3.24) (véase la Parte 4 de la demostración; ese argumento no usa la convexidad de f). El recíproco es cierto solo si $\bar{u}$ es suficientemente regular; el Ejemplo 3.16 muestra un minimizador que satisface (3.24) y que no es de clase C^1.

(III) En el teorema no se requieren las hipótesis (H_1) ni (H_2) del Teorema 3.1; en particular, la primera parte no usa la convexidad de f, que solo interviene en el recíproco. Sin embargo, se requiere que exista un minimizador de (3.23).

(IV) Si f satisface las hipótesis del Teorema 3.1, este garantiza la existencia de un minimizador $\bar{u}$, el cual, por el teorema anterior, satisface (3.24). Como además f es convexa, se concluye que $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ es un minimizador de (3.23) si y solo si satisface (3.24).

(V) El teorema sigue siendo válido para $p = 1$ (véase el libro de Dacorogna[4]). En este caso, como $|u|^0 = |\xi|^0 = 1$, la hipótesis (H_3) se lee

$$|f_u(x,u,\xi)| \le 3\beta \quad \text{y} \quad |f_\xi(x,u,\xi)| \le 3\beta, \quad \forall\,(x,u,\xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

es decir, las derivadas de f son acotadas, y la demostración se simplifica. En la Parte 1, la desigualdad (3.26) da directamente

$$|f(x,u,\xi)| \le M + \int_0^1 \big[3\beta\,|u| + 3\beta\,|\xi|\big]\,dt = M + 3\beta\big(|u| + |\xi|\big),$$

sin necesidad de la desigualdad de Young; en la Parte 2, la función dominante puede tomarse como $G(x) = 3\beta\big(|\varphi(x)| + |\nabla\varphi(x)|\big)$, que pertenece a $L^1(\Omega)$ cuando $\varphi \in W^{1,1}(\Omega)$; y en la Parte 4, las funciones $x \mapsto f_u(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))$ y $x \mapsto |f_\xi(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))|$ están acotadas por 3β, de modo que $|\ell(\psi)| \le 3\beta\|\psi\|_{W^{1,1}}$ y ℓ es continuo en $W^{1,1}(\Omega)$. Nos restringimos a $p > 1$ únicamente para unificar las estimaciones en una sola demostración. Esto contrasta con el Teorema 3.1, donde la hipótesis $p > 1$ es esencial: sin ella se pierde la compacidad débil de la Proposición 1.42, y el Ejemplo 3.6 muestra que el minimizador puede no existir.

Demostración. La demostración se divide en cuatro partes.

- *Parte 1 (El funcional I es finito en $W^{1,p}(\Omega)$).* Probaremos primero que existe una

constante $\gamma_1 \geq 0$ tal que

$$|f(x,u,\xi)| \leq \gamma_1\big(1+|u|^p+|\xi|^p\big), \quad \forall\,(x,u,\xi)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n. \tag{3.25}$$

Fijemos $(x,u,\xi)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ y definamos $\eta:[0,1]\to\mathbb{R}$ por $\eta(t)=f(x,tu,t\xi)$. Como $f\in C^1(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, por la regla de la cadena η es de clase $C^1([0,1])$, con

$$\eta'(t)=f_u(x,tu,t\xi)\,u+\langle f_\xi(x,tu,t\xi),\xi\rangle=f_u(x,tu,t\xi)\,u+\sum_{i=1}^{n}f_{\xi_i}(x,tu,t\xi)\,\xi_i.$$

Como η es de clase $C^1([0,1])$, el Teorema Fundamental del Cálculo garantiza que

$$\eta(1)-\eta(0)=\int_0^1\eta'(t)\,dt.$$

Como $\eta(1)=f(x,1\cdot u,1\cdot\xi)=f(x,u,\xi)$ y $\eta(0)=f(x,0\cdot u,0\cdot\xi)=f(x,0,0)$, sustituyendo $\eta(1)$, $\eta(0)$ y la expresión de $\eta'(t)$ obtenemos

$$f(x,u,\xi)-f(x,0,0)=\int_0^1\Big[f_u(x,tu,t\xi)\,u+\langle f_\xi(x,tu,t\xi),\xi\rangle\Big]dt.$$

Usando la desigualdad triangular y la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$, $|\langle f_\xi(x,tu,t\xi),\xi\rangle|\leq|f_\xi(x,tu,t\xi)|\,|\xi|$, obtenemos

$$|f(x,u,\xi)|\leq|f(x,0,0)|+\int_0^1\Big[|f_u(x,tu,t\xi)|\,|u|+|f_\xi(x,tu,t\xi)|\,|\xi|\Big]dt. \tag{3.26}$$

Como la función $x\mapsto f(x,0,0)$ es continua en el compacto $\bar{\Omega}$, existe $M\geq 0$ tal que $|f(x,0,0)|\leq M$ para todo $x\in\bar{\Omega}$. Por otra parte, sea $t\in[0,1]$; como $p>1$, se tiene $t^{p-1}\in[0,1]$, y la hipótesis (H_3) aplicada en el punto $(x,tu,t\xi)$ da

$$\begin{aligned}
|f_u(x,tu,t\xi)| &\leq \beta\big(1+|tu|^{p-1}+|t\xi|^{p-1}\big)=\beta\big(1+t^{p-1}|u|^{p-1}+t^{p-1}|\xi|^{p-1}\big)\\
&\leq \beta\big(1+|u|^{p-1}+|\xi|^{p-1}\big),\\
|f_\xi(x,tu,t\xi)| &\leq \beta\big(1+|tu|^{p-1}+|t\xi|^{p-1}\big)=\beta\big(1+t^{p-1}|u|^{p-1}+t^{p-1}|\xi|^{p-1}\big)\\
&\leq \beta\big(1+|u|^{p-1}+|\xi|^{p-1}\big).
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas cotas en (3.26), y como el integrando resultante no depende de t,

$$\begin{aligned}|f(x,u,\xi)| &\le M + \int_0^1 \beta\big(1+|u|^{p-1}+|\xi|^{p-1}\big)\big(|u|+|\xi|\big)dt \\ &= M + \beta\big(1+|u|^{p-1}+|\xi|^{p-1}\big)\big(|u|+|\xi|\big) \\ &= M + \beta\Big(|u|+|\xi|+|u|^{p-1}|u|+|u|^{p-1}|\xi|+|\xi|^{p-1}|u|+|\xi|^{p-1}|\xi|\Big) \\ &= M + \beta\Big(|u|+|\xi|+|u|^{p}+|u|^{p-1}|\xi|+|\xi|^{p-1}|u|+|\xi|^{p}\Big).\end{aligned}$$

Acotamos ahora los términos $|u|$, $|\xi|$, $|u|^{p-1}|\xi|$ y $|\xi|^{p-1}|u|$ mediante la desigualdad de Young (Proposición 1.47): si $p' = \frac{p}{p-1}$ es el exponente conjugado de p, para todo $a, b \ge 0$ se tiene $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$ y, como $0 < \frac{1}{p} < 1$ y $0 < \frac{1}{p'} < 1$,

$$ab \le a^p + b^{p'}, \quad \forall\, a, b \ge 0.$$

Aplicando esta desigualdad y usando que $(p-1)p' = p$, obtenemos:

$$\begin{aligned}|u| = |u|\cdot 1 &\le |u|^p + 1^{p'} = |u|^p + 1, && (a = |u|,\ b = 1)\\ |\xi| = |\xi|\cdot 1 &\le |\xi|^p + 1^{p'} = |\xi|^p + 1, && (a = |\xi|,\ b = 1)\\ |u|^{p-1}|\xi| = |\xi|\cdot|u|^{p-1} &\le |\xi|^p + |u|^{(p-1)p'} = |\xi|^p + |u|^p, && (a = |\xi|,\ b = |u|^{p-1})\\ |\xi|^{p-1}|u| = |u|\cdot|\xi|^{p-1} &\le |u|^p + |\xi|^{(p-1)p'} = |u|^p + |\xi|^p. && (a = |u|,\ b = |\xi|^{p-1})\end{aligned}$$

Sustituyendo estas cuatro cotas y agrupando términos semejantes,

$$\begin{aligned}|f(x,u,\xi)| &\le M + \beta\Big(\big[|u|^p+1\big] + \big[|\xi|^p+1\big] + |u|^p + \big[|\xi|^p+|u|^p\big] + \big[|u|^p+|\xi|^p\big] + |\xi|^p\Big) \\ &= M + \beta\big(2 + 4|u|^p + 4|\xi|^p\big) \\ &\le M + 4\beta\big(1+|u|^p+|\xi|^p\big).\end{aligned}$$

Finalmente, como $1 + |u|^p + |\xi|^p \ge 1$ y $M \ge 0$, se tiene $M \le M\big(1+|u|^p+|\xi|^p\big)$, de modo que

$$|f(x,u,\xi)| \le M\big(1+|u|^p+|\xi|^p\big) + 4\beta\big(1+|u|^p+|\xi|^p\big) = (M+4\beta)\big(1+|u|^p+|\xi|^p\big),$$

lo que prueba (3.25) con $\gamma_1 = M + 4\beta \ge 0$.

Sea ahora $u \in W^{1,p}(\Omega)$. La función $x \mapsto f(x, u(x), \nabla u(x))$ es medible, pues es la

composición de la función continua f con funciones medibles, y por (3.25),

$$|f(x,u(x),\nabla u(x))| \le \gamma_1\big(1+|u(x)|^p+|\nabla u(x)|^p\big), \quad \text{en c.t.p } x\in\Omega.$$

El lado derecho es integrable sobre Ω, pues

$$\int_\Omega \gamma_1\big(1+|u(x)|^p+|\nabla u(x)|^p\big)dx = \gamma_1\Big(\mathrm{med}(\Omega)+\|u\|_{L^p}^p+\|\nabla u\|_{L^p}^p\Big) = \gamma_1\Big(\mathrm{med}(\Omega)+\|u\|_{W^{1,p}}^p\Big) < \infty.$$

En consecuencia, $x\mapsto f(x,u(x),\nabla u(x))$ pertenece a $L^1(\Omega)$ y

$$|I(u)| \le \int_\Omega |f(x,u(x),\nabla u(x))|\,dx \le \gamma_1\Big(\mathrm{med}(\Omega)+\|u\|_{W^{1,p}}^p\Big) < \infty, \quad \forall\, u\in W^{1,p}(\Omega).$$

- *Parte 2 (Derivada direccional de I).* Sean $u,\varphi\in W^{1,p}(\Omega)$. Vamos a probar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{I(u+\varepsilon\varphi)-I(u)}{\varepsilon}\right] = \int_\Omega \left[f_u(x,u(x),\nabla u(x))\,\varphi(x) + \langle f_\xi(x,u(x),\nabla u(x)),\nabla\varphi(x)\rangle\right]dx. \tag{3.27}$$

Para ello, definimos, para c.t.p $x\in\Omega$ y para todo $\varepsilon\in\mathbb{R}$,

$$U(x,\varepsilon)=u(x)+\varepsilon\varphi(x), \qquad \Xi(x,\varepsilon)=\nabla u(x)+\varepsilon\nabla\varphi(x), \qquad g(x,\varepsilon)=f\big(x,U(x,\varepsilon),\Xi(x,\varepsilon)\big),$$

de modo que $I(u+\varepsilon\varphi)=\int_\Omega g(x,\varepsilon)\,dx$. Por la Parte 1, $I(u+\varepsilon\varphi)$ y $I(u)$ son números reales para todo $\varepsilon\in\mathbb{R}$, pues $u+\varepsilon\varphi, u\in W^{1,p}(\Omega)$; así, para $\varepsilon\neq 0$,

$$\frac{I(u+\varepsilon\varphi)-I(u)}{\varepsilon} = \int_\Omega \frac{g(x,\varepsilon)-g(x,0)}{\varepsilon}\,dx. \tag{3.28}$$

Fijemos $x\in\Omega$ fuera del conjunto de medida nula donde u, ∇u, φ o $\nabla\varphi$ no están definidas. Como $f\in C^1(\bar\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon\mapsto\big(U(x,\varepsilon),\Xi(x,\varepsilon)\big)$ es afín, la regla de la cadena garantiza que $\varepsilon\mapsto g(x,\varepsilon)$ es de clase $C^1(\mathbb{R})$, con

$$g_\varepsilon(x,\varepsilon) = f_u\big(x,U(x,\varepsilon),\Xi(x,\varepsilon)\big)\,\varphi(x) + \big\langle f_\xi\big(x,U(x,\varepsilon),\Xi(x,\varepsilon)\big),\nabla\varphi(x)\big\rangle.$$

Sea $\varepsilon\neq 0$. La función $t\mapsto g(x,t\varepsilon)$ es de clase $C^1([0,1])$, con derivada $\varepsilon\, g_\varepsilon(x,t\varepsilon)$, de modo que, por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$g(x,\varepsilon)-g(x,0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\big[g(x,t\varepsilon)\big]\,dt = \varepsilon\int_0^1 g_\varepsilon(x,t\varepsilon)\,dt,$$

y por lo tanto

$$\frac{g(x,\varepsilon)-g(x,0)}{\varepsilon}=\int_0^1 g_\varepsilon(x,t\varepsilon)\,dt. \tag{3.29}$$

Buscamos ahora una función integrable que domine $|g_\varepsilon(x,t\varepsilon)|$ para todo $t\in[0,1]$ y todo $\varepsilon\in[-1,1]\backslash\{0\}$. Por la desigualdad triangular, la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$ y la hipótesis (H_3),

$$\begin{aligned}
|g_\varepsilon(x,t\varepsilon)| &\le |f_u(x,U(x,t\varepsilon),\Xi(x,t\varepsilon))|\,|\varphi(x)|+|f_\xi(x,U(x,t\varepsilon),\Xi(x,t\varepsilon))|\,|\nabla\varphi(x)|\\
&\le \beta\big(1+|U(x,t\varepsilon)|^{p-1}+|\Xi(x,t\varepsilon)|^{p-1}\big)|\varphi(x)|\\
&\quad+\beta\big(1+|U(x,t\varepsilon)|^{p-1}+|\Xi(x,t\varepsilon)|^{p-1}\big)|\nabla\varphi(x)|\\
&=\beta\Big(|\varphi(x)|+|\nabla\varphi(x)|+|U(x,t\varepsilon)|^{p-1}|\varphi(x)|+|U(x,t\varepsilon)|^{p-1}|\nabla\varphi(x)|\\
&\qquad+|\Xi(x,t\varepsilon)|^{p-1}|\varphi(x)|+|\Xi(x,t\varepsilon)|^{p-1}|\nabla\varphi(x)|\Big).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Aplicando la desigualdad $ab\le a^p+b^{p'}$ de la Parte 1 y usando que $(p-1)p'=p$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
|\varphi(x)| &\le |\varphi(x)|^p+1, && (a=|\varphi(x)|,\ b=1)\\
|\nabla\varphi(x)| &\le |\nabla\varphi(x)|^p+1, && (a=|\nabla\varphi(x)|,\ b=1)\\
|U(x,t\varepsilon)|^{p-1}|\varphi(x)| &\le |\varphi(x)|^p+|U(x,t\varepsilon)|^p, && (a=|\varphi(x)|,\ b=|U(x,t\varepsilon)|^{p-1})\\
|U(x,t\varepsilon)|^{p-1}|\nabla\varphi(x)| &\le |\nabla\varphi(x)|^p+|U(x,t\varepsilon)|^p, && (a=|\nabla\varphi(x)|,\ b=|U(x,t\varepsilon)|^{p-1})\\
|\Xi(x,t\varepsilon)|^{p-1}|\varphi(x)| &\le |\varphi(x)|^p+|\Xi(x,t\varepsilon)|^p, && (a=|\varphi(x)|,\ b=|\Xi(x,t\varepsilon)|^{p-1})\\
|\Xi(x,t\varepsilon)|^{p-1}|\nabla\varphi(x)| &\le |\nabla\varphi(x)|^p+|\Xi(x,t\varepsilon)|^p. && (a=|\nabla\varphi(x)|,\ b=|\Xi(x,t\varepsilon)|^{p-1})
\end{aligned}$$

Reemplazando estas seis cotas en (3.30) y agrupando términos semejantes,

$$\begin{aligned}
|g_\varepsilon(x,t\varepsilon)| &\le \beta\Big(\big[|\varphi(x)|^p+1\big]+\big[|\nabla\varphi(x)|^p+1\big]+\big[|\varphi(x)|^p+|U(x,t\varepsilon)|^p\big]\\
&\qquad+\big[|\nabla\varphi(x)|^p+|U(x,t\varepsilon)|^p\big]+\big[|\varphi(x)|^p+|\Xi(x,t\varepsilon)|^p\big]\\
&\qquad+\big[|\nabla\varphi(x)|^p+|\Xi(x,t\varepsilon)|^p\big]\Big)\\
&=\beta\Big(2+2|U(x,t\varepsilon)|^p+2|\Xi(x,t\varepsilon)|^p+3|\varphi(x)|^p+3|\nabla\varphi(x)|^p\Big).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Como $t\in[0,1]$ y $\varepsilon\in[-1,1]\setminus\{0\}$, se tiene $|t\varepsilon|\le 1$. Por la desigualdad triangular en

$\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^n$,

$$|U(x,t\varepsilon)| = |u(x)+t\varepsilon\varphi(x)| \le |u(x)| + |t\varepsilon|\,|\varphi(x)| \le |u(x)| + |\varphi(x)|,$$

$$|\Xi(x,t\varepsilon)| = |\nabla u(x)+t\varepsilon\nabla\varphi(x)| \le |\nabla u(x)| + |t\varepsilon|\,|\nabla\varphi(x)| \le |\nabla u(x)| + |\nabla\varphi(x)|.$$

Como la función $s \mapsto s^p$ es creciente en $[0,\infty)$, y usando la desigualdad $(A+B)^p \le 2^{p-1}(A^p+B^p)$ para $A, B \ge 0$, obtenida en la Parte 1 de la demostración del Corolario 3.4 a partir de la convexidad de $s \mapsto |s|^p$, se tiene

$$|U(x,t\varepsilon)|^p \le \big(|u(x)| + |\varphi(x)|\big)^p \le 2^{p-1}\big(|u(x)|^p + |\varphi(x)|^p\big),$$

$$|\Xi(x,t\varepsilon)|^p \le \big(|\nabla u(x)| + |\nabla\varphi(x)|\big)^p \le 2^{p-1}\big(|\nabla u(x)|^p + |\nabla\varphi(x)|^p\big).$$

Usando estas dos cotas en (3.31),

$$\begin{aligned}|g_\varepsilon(x,t\varepsilon)| &\le \beta\Big(2 + 2\cdot 2^{p-1}\big[|u(x)|^p + |\varphi(x)|^p\big] + 2\cdot 2^{p-1}\big[|\nabla u(x)|^p + |\nabla\varphi(x)|^p\big] \\ &\qquad + 3|\varphi(x)|^p + 3|\nabla\varphi(x)|^p\Big) \\ &= \beta\Big(2 + 2^p|u(x)|^p + (2^p+3)|\varphi(x)|^p + 2^p|\nabla u(x)|^p + (2^p+3)|\nabla\varphi(x)|^p\Big).\end{aligned}$$

Como $2 \le 2^p + 3$ y $2^p \le 2^p + 3$, concluimos que

$$|g_\varepsilon(x,t\varepsilon)| \le \beta(2^p+3)\Big(1 + |u(x)|^p + |\varphi(x)|^p + |\nabla u(x)|^p + |\nabla\varphi(x)|^p\Big) = G(x),$$

para todo $t \in [0,1]$ y todo $\varepsilon \in [-1,1]\setminus\{0\}$, donde hemos definido

$$G(x) = \gamma_2\Big(1 + |u(x)|^p + |\varphi(x)|^p + |\nabla u(x)|^p + |\nabla\varphi(x)|^p\Big), \qquad \gamma_2 = \beta(2^p+3) \ge 0.$$

Como $u, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ y Ω es acotado, la función G es integrable:

$$\int_\Omega G(x)\,dx = \gamma_2\Big(\mathrm{med}(\Omega) + \|u\|_{L^p}^p + \|\varphi\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p + \|\nabla\varphi\|_{L^p}^p\Big) < \infty.$$

A partir de (3.29) y de la cota anterior, para c.t.p $x \in \Omega$ y todo $\varepsilon \in [-1,1]\setminus\{0\}$,

$$\left|\frac{g(x,\varepsilon) - g(x,0)}{\varepsilon}\right| = \left|\int_0^1 g_\varepsilon(x,t\varepsilon)\,dt\right| \le \int_0^1 |g_\varepsilon(x,t\varepsilon)|\,dt \le \int_0^1 G(x)\,dt = G(x).$$

Asimismo, como $\varepsilon \mapsto g(x,\varepsilon)$ es derivable en $\varepsilon = 0$, para c.t.p $x \in \Omega$ se cumple

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g(x,\varepsilon) - g(x,0)}{\varepsilon} = g_\varepsilon(x,0) = f_u(x,u(x),\nabla u(x))\,\varphi(x) + \langle f_\xi(x,u(x),\nabla u(x)),\nabla\varphi(x)\rangle\,.$$

Sea $\{\varepsilon_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales con $\varepsilon_\nu \to 0$ y $0 < |\varepsilon_\nu| \leq 1$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Por lo anterior, las funciones $x \mapsto \frac{g(x,\varepsilon_\nu)-g(x,0)}{\varepsilon_\nu}$ están dominadas por $G \in L^1(\Omega)$ y convergen en c.t.p a $x \mapsto g_\varepsilon(x,0)$. El teorema de la convergencia dominada (Teorema 1.13) y (3.28) garantizan entonces que

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to\infty} \frac{I(u+\varepsilon_\nu\varphi) - I(u)}{\varepsilon_\nu} &= \lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega \frac{g(x,\varepsilon_\nu) - g(x,0)}{\varepsilon_\nu}\,dx \\ &= \int_\Omega \lim_{\nu\to\infty} \frac{g(x,\varepsilon_\nu) - g(x,0)}{\varepsilon_\nu}\,dx \\ &= \int_\Omega g_\varepsilon(x,0)\,dx.\end{aligned}$$

Como la sucesión $\{\varepsilon_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ es arbitraria, el límite del cociente incremental existe cuando $\varepsilon \to 0$ y vale

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{I(u+\varepsilon\varphi) - I(u)}{\varepsilon}\right] = \int_\Omega \left[f_u(x,u(x),\nabla u(x))\,\varphi(x) + \langle f_\xi(x,u(x),\nabla u(x)),\nabla\varphi(x)\rangle\right]dx,$$

que es la identidad (3.27).

- *Parte 3 (Deducción de* (3.24) *y de* (3.18)*).* Sea $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ un minimizador de (3.23) y sea $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, como $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial, se tiene

$$\bar{u} + \varepsilon\varphi - u_0 = (\bar{u} - u_0) + \varepsilon\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

es decir, $\bar{u} + \varepsilon\varphi \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, y por la minimalidad de $\bar{u}$,

$$I(\bar{u} + \varepsilon\varphi) \geq I(\bar{u}), \quad \forall\,\varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Así, para $\varepsilon > 0$ se tiene $\frac{I(\bar{u}+\varepsilon\varphi)-I(\bar{u})}{\varepsilon} \geq 0$, y para $\varepsilon < 0$ se tiene $\frac{I(\bar{u}+\varepsilon\varphi)-I(\bar{u})}{\varepsilon} \leq 0$. Como, por la Parte 2, el límite de este cociente cuando $\varepsilon \to 0$ existe, debe ser a la vez mayor o igual y menor o igual que cero; es decir,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{I(\bar{u} + \varepsilon\varphi) - I(\bar{u})}{\varepsilon}\right] = 0.$$

Igualando con la expresión (3.27) aplicada a $u = \bar{u}$, obtenemos

$$\int_\Omega \left[f_u(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x))\, \varphi(x) + \langle f_\xi(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)), \nabla \varphi(x) \rangle \right] dx = 0.$$

Por la arbitrariedad de $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, se cumple (3.24).

Supongamos ahora, además, que $f \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ y que $\bar{u} \in C^2(\bar{\Omega})$; en este caso, el gradiente débil de $\bar{u}$ coincide con su gradiente clásico. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por la regla de la cadena, la aplicación $x \mapsto f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x))$ es de clase $C^1(\bar{\Omega})$. Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$; por la definición de $W_0^{1,p}(\Omega)$, se tiene $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, y además φ, extendida por cero, es de clase $C^1(\bar{\Omega})$ y se anula sobre $\partial\Omega$. Por la fórmula de integración por partes (Teorema 1.39),

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x))\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx \\
&\quad = \int_{\partial\Omega} f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x))\, \varphi(x)\, \nu_i(x)\, dS(x) - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \big[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) \big] \varphi(x)\, dx \\
&\quad = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \big[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) \big] \varphi(x)\, dx,
\end{aligned}$$

donde $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ denota el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$, y la integral sobre $\partial\Omega$ se anula porque $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$. Sumando sobre $i = 1, \ldots, n$, escribiendo $\langle f_\xi, \nabla \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n f_{\xi_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ y sustituyendo en (3.24), resulta

$$\int_\Omega E(x)\, \varphi(x)\, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

donde

$$E(x) = f_u(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \big[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) \big], \quad x \in \bar{\Omega}.$$

La función E es continua en $\bar{\Omega}$ y, en particular, pertenece a $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Por el Lema fundamental del cálculo de variaciones (Teorema 1.22), $E(x) = 0$ para c.t.p $x \in \Omega$.

Veamos que $E(x) = 0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$. Supongamos que existe $x_1 \in \Omega$ con $E(x_1) \neq 0$. Por la continuidad de E, existe $r > 0$ tal que la bola $B(x_1, r)$ está contenida en Ω y $E(x) \neq 0$ para todo $x \in B(x_1, r)$; como $B(x_1, r)$ tiene medida positiva, esto contradice que $E = 0$ en c.t.p de Ω. Por lo tanto, $E(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$. Si $x \in \partial\Omega$, existe

una sucesión $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ con $x_\nu \to x$, y por continuidad $E(x) = \lim_{\nu\to\infty} E(x_\nu) = 0$. En consecuencia,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\big] = f_u(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)), \quad \forall\, x \in \bar{\Omega},$$

que es la ecuación (3.18).

- *Parte 4 (Recíproco).* Supongamos que la aplicación $(u, \xi) \mapsto f(x, u, \xi)$ es convexa para todo $x \in \bar{\Omega}$.

  Consideremos primero el caso en que $f \in C^2(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ y $\bar{u} \in \big(u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)\big) \cap C^2(\bar{\Omega})$ satisface (3.18), y mostremos que $\bar{u}$ satisface (3.24). Definamos el funcional $\ell : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$\ell(\psi) = \int_\Omega \left[f_u(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\, \psi(x) + \langle f_\xi(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)), \nabla\psi(x)\rangle\right] dx.$$

  Por el cálculo realizado en el Paso 2 de la demostración del Teorema 3.1, que solo usa (H_3) y es válido para cualquier función de $W^{1,p}(\Omega)$, las funciones $x \mapsto f_u(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))$ y $x \mapsto |f_\xi(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))|$ pertenecen a $L^{p'}(\Omega)$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$ y la desigualdad de Hölder (Teorema 1.14), para toda $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
|\ell(\psi)| &\le \int_\Omega |f_u(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))|\, |\psi(x)|\, dx + \int_\Omega |f_\xi(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))|\, |\nabla\psi(x)|\, dx \\
&\le \|f_u(\cdot, \bar{u}, \nabla\bar{u})\|_{L^{p'}} \|\psi\|_{L^p} + \big\||f_\xi(\cdot, \bar{u}, \nabla\bar{u})|\big\|_{L^{p'}} \|\nabla\psi\|_{L^p} \\
&\le \Big(\|f_u(\cdot, \bar{u}, \nabla\bar{u})\|_{L^{p'}} + \big\||f_\xi(\cdot, \bar{u}, \nabla\bar{u})|\big\|_{L^{p'}}\Big) \|\psi\|_{W^{1,p}},
\end{aligned}$$

  donde en la última desigualdad se usó que $\|\psi\|_{L^p} \le \|\psi\|_{W^{1,p}}$ y $\|\nabla\psi\|_{L^p} \le \|\psi\|_{W^{1,p}}$. Denotemos por C_ℓ la constante entre paréntesis. Como ℓ es lineal, se tiene $|\ell(\psi_1) - \ell(\psi_2)| = |\ell(\psi_1 - \psi_2)| \le C_\ell \|\psi_1 - \psi_2\|_{W^{1,p}}$ para todo $\psi_1, \psi_2 \in W^{1,p}(\Omega)$, es decir, ℓ es continuo.

  Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Integrando por partes exactamente como en la Parte 3, y usando que $\bar{u}$ satisface (3.18),

$$\ell(\varphi) = \int_\Omega \left[f_u(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big[f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x))\big]\right] \varphi(x)\, dx = \int_\Omega 0\cdot\varphi(x)\, dx = 0.$$

Sea ahora $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Por la definición de $W_0^{1,p}(\Omega)$ como la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$, existe una sucesión $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \to \varphi$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Como $\ell(\varphi_\nu) = 0$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$,

$$|\ell(\varphi)| = |\ell(\varphi) - \ell(\varphi_\nu)| \leq C_\ell \, \|\varphi - \varphi_\nu\|_{W^{1,p}} \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } \nu \to \infty,$$

de modo que $\ell(\varphi) = 0$. Así, $\bar{u}$ satisface (3.24).

Basta entonces probar que toda $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ que satisface (3.24) es un minimizador de (3.23). Sea $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$. Fijemos $x \in \Omega$ fuera de un conjunto de medida nula y definamos $F_x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $F_x(u, \xi) = f(x, u, \xi)$. Por hipótesis, F_x es convexa y, como $f \in C^1$, es de clase $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, con gradiente $\nabla F_x(u, \xi) = \big(f_u(x, u, \xi),\, f_\xi(x, u, \xi)\big)$. Aplicando el Teorema 1.46 (ii) a F_x en los puntos $\big(u(x), \nabla u(x)\big)$ y $\big(\bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)\big)$, y desarrollando el producto escalar en $\mathbb{R}^{n+1}$, obtenemos que, para c.t.p $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} f(x, u(x), \nabla u(x)) \geq f(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) + f_u(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) \, [u(x) - \bar{u}(x)] \\ + \langle f_\xi(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)), \nabla u(x) - \nabla \bar{u}(x) \rangle. \end{aligned}$$

Por la Parte 1, las funciones $x \mapsto f(x, u(x), \nabla u(x))$ y $x \mapsto f(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x))$ pertenecen a $L^1(\Omega)$, y por la estimación de $|\ell(\psi)|$ anterior con $\psi = u - \bar{u} \in W^{1,p}(\Omega)$, los dos últimos términos también son integrables. Integrando sobre Ω, obtenemos

$$I(u) \geq I(\bar{u}) + \int_\Omega \Big[f_u(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) \, [u(x) - \bar{u}(x)] + \langle f_\xi(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)), \nabla u(x) - \nabla \bar{u}(x) \rangle \Big] dx.$$

Como $u, \bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, se tiene

$$u - \bar{u} = (u - u_0) - (\bar{u} - u_0) \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

y como $\nabla(u - \bar{u}) = \nabla u - \nabla \bar{u}$, la ecuación (3.24) con $\varphi = u - \bar{u}$ garantiza que

$$\int_\Omega \Big[f_u(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)) \, [u(x) - \bar{u}(x)] + \langle f_\xi(x, \bar{u}(x), \nabla \bar{u}(x)), \nabla u(x) - \nabla \bar{u}(x) \rangle \Big] dx = 0.$$

En consecuencia, $I(u) \geq I(\bar{u}) + 0 = I(\bar{u})$. Por la arbitrariedad de $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, $\bar{u}$ es un minimizador de (3.23).

■

Como en el caso de la existencia (Corolario 3.4), el Teorema 3.11 no puede aplicarse directamente al integrando $\widetilde{f}(x,u,\xi) = f(x,u,\xi) - h(x)\,u$ con $h \in L^{p'}(\Omega)$, pues $\widetilde{f}$ no es, en general, de clase C^1. Sin embargo, como el término lineal no presenta dificultad alguna, la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente se obtiene a partir de la demostración de dicho teorema.

Corolario 3.13. *Sean Ω, p y f como en el Teorema 3.11. Sean $h \in L^{p'}(\Omega)$, donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, y consideremos el problema*

$$\text{ínf}\left\{\widetilde{I}(u) = \int_\Omega \big[f(x,u(x),\nabla u(x)) - h(x)\,u(x)\big]\,dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)\right\} = \widetilde{m}. \tag{3.32}$$

Si $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ es un minimizador de (3.32)*, entonces*

$$\int_\Omega \left[f_u(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))\,\varphi(x) + \langle f_\xi(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x)),\nabla\varphi(x)\rangle\right]dx = \int_\Omega h(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \forall\,\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.33}$$

Recíprocamente, si la aplicación $(u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ es convexa para todo $x \in \bar{\Omega}$ y $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ satisface (3.33)*, entonces $\bar{u}$ es un minimizador de* (3.32).

Demostración. Sea $L(u) = \int_\Omega h(x)\,u(x)\,dx$ el funcional del Lema 3.3 y $I(u) = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))\,dx$, de modo que $\widetilde{I} = I - L$. Por la Parte 1 de la demostración del Teorema 3.11, $I(u) \in \mathbb{R}$ para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$, y por el Lema 3.3, $L(u) \in \mathbb{R}$ para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$; así, $\widetilde{I}(u) \in \mathbb{R}$ para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

- *Parte 1 (Derivada direccional de $\widetilde{I}$).* Sean $u, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\varepsilon \neq 0$. Por la linealidad de L, $L(u+\varepsilon\varphi) - L(u) = \varepsilon L(\varphi)$, de modo que

  $$\frac{\widetilde{I}(u+\varepsilon\varphi) - \widetilde{I}(u)}{\varepsilon} = \frac{I(u+\varepsilon\varphi) - I(u)}{\varepsilon} - \frac{L(u+\varepsilon\varphi) - L(u)}{\varepsilon} = \frac{I(u+\varepsilon\varphi) - I(u)}{\varepsilon} - L(\varphi).$$

  Por la Parte 2 de la demostración del Teorema 3.11, que es válida para cualesquiera $u, \varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, el límite del primer cociente cuando $\varepsilon \to 0$ existe y está dado por (3.27). Como el segundo término no depende de ε, obtenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\widetilde{I}(u+\varepsilon\varphi)-\widetilde{I}(u)}{\varepsilon}\right]=\int_\Omega\left[f_u(x,u(x),\nabla u(x))\,\varphi(x)+\langle f_\xi(x,u(x),\nabla u(x)),\nabla\varphi(x)\rangle\right]dx$$
$$-\int_\Omega h(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{3.34}$$

- *Parte 2 (Deducción de* (3.33)*).* Sea $\bar{u}\in u_0+W_0^{1,p}(\Omega)$ un minimizador de (3.32) y sea $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$. Como en la Parte 3 de la demostración del Teorema 3.11, $\bar{u}+\varepsilon\varphi\in u_0+W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo $\varepsilon\in\mathbb{R}$, y por la minimalidad de $\bar{u}$,

  $$\widetilde{I}(\bar{u}+\varepsilon\varphi)\geq\widetilde{I}(\bar{u}),\quad\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}.$$

  Así, el cociente $\frac{\widetilde{I}(\bar{u}+\varepsilon\varphi)-\widetilde{I}(\bar{u})}{\varepsilon}$ es mayor o igual que cero para $\varepsilon>0$ y menor o igual que cero para $\varepsilon<0$. Como, por la Parte 1, su límite cuando $\varepsilon\to 0$ existe, este límite es a la vez mayor o igual y menor o igual que cero, es decir, es nulo. Igualando con (3.34) aplicada a $u=\bar{u}$, se obtiene

  $$\int_\Omega\left[f_u(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))\,\varphi(x)+\langle f_\xi(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x)),\nabla\varphi(x)\rangle\right]dx-\int_\Omega h(x)\,\varphi(x)\,dx=0.$$

  Por la arbitrariedad de $\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega)$, se cumple (3.33).

- *Parte 3 (Recíproco).* Supongamos que $(u,\xi)\mapsto f(x,u,\xi)$ es convexa para todo $x\in\bar{\Omega}$ y que $\bar{u}\in u_0+W_0^{1,p}(\Omega)$ satisface (3.33). Sea $u\in u_0+W_0^{1,p}(\Omega)$ y denotemos $\psi=u-\bar{u}$; como $u-\bar{u}=(u-u_0)-(\bar{u}-u_0)$, se tiene $\psi\in W_0^{1,p}(\Omega)$. Exactamente como en la Parte 4 de la demostración del Teorema 3.11 (la desigualdad de convexidad del Teorema 1.46 (ii), integrada sobre Ω), se tiene

  $$I(u)\geq I(\bar{u})+\int_\Omega\Big[f_u(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))\,\psi(x)+\langle f_\xi(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x)),\nabla\psi(x)\rangle\Big]dx.$$

  Por otra parte, por la linealidad de L, $L(u)=L(\bar{u})+L(\psi)$. Restando esta igualdad de la desigualdad anterior,

  $$\begin{aligned}\widetilde{I}(u)&=I(u)-L(u)\\&\geq\widetilde{I}(\bar{u})+\int_\Omega\Big[f_u(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x))\,\psi(x)+\langle f_\xi(x,\bar{u}(x),\nabla\bar{u}(x)),\nabla\psi(x)\rangle\Big]dx-\int_\Omega h(x)\,\psi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Como $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, la ecuación (3.33) con $\varphi = \psi$ garantiza que los dos últimos términos se cancelan, de modo que $\widetilde{I}(u) \geq \widetilde{I}(\bar{u})$. Por la arbitrariedad de $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, $\bar{u}$ es un minimizador de (3.32).

■

Observación 3.14. (I) Si f satisface las hipótesis del Teorema 3.1, el Corolario 3.4 garantiza la existencia de un minimizador de (3.32), que es único en los casos (a) y (b) de dicho teorema, y el Corolario 3.13 garantiza que $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ es un minimizador si y solo si satisface (3.33). En particular, en los casos (a) y (b), la ecuación (3.33) tiene una única solución en $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$.

(II) A diferencia del Teorema 3.11, el corolario no incluye la forma clásica de la ecuación: como h solo pertenece a $L^{p'}(\Omega)$, no es razonable esperar que el minimizador sea de clase $C^2(\bar{\Omega})$.

3.2.3. Algunos ejemplos Los siguientes ejemplos ilustran los alcances del Teorema 3.11 cuando no se cumplen todas las hipótesis del Teorema 3.1. En el primero falla la coercitividad (H_2), de modo que la existencia de un minimizador no está garantizada; en el segundo falla la convexidad (H_1), de modo que el recíproco del Teorema 3.11 deja de ser válido.

Ejemplo 3.15 (El problema de la superficie mínima)**.** Sean $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera Lipschitz, $p > 1$ y $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Considere el problema

$$(G_4) \quad \text{ínf} \left\{ I(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}\, dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\} = m,$$

cuyo integrando es $f(x, u, \xi) = \sqrt{1 + |\xi|^2} = \left(1 + \sum_{j=1}^n \xi_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Cuando $n = 2$, $I(u)$ es el área de la gráfica de u, y (G_4) consiste en hallar, entre todas las superficies que son gráficas de funciones con el valor u_0 prescrito en la frontera, una de área mínima.

El espacio natural para este problema es $W^{1,1}(\Omega)$. En efecto, como

$$(1 + |\xi|)^2 = 1 + 2|\xi| + |\xi|^2 \geq 1 + |\xi|^2,$$

y la raíz cuadrada es creciente en $[0,\infty)$, se tiene

$$\sqrt{1+|\xi|^2} \leq 1+|\xi|, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.35}$$

y, por lo tanto, para toda $u \in W^{1,1}(\Omega)$,

$$I(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u(x)|^2}\, dx \leq \int_\Omega \big(1+|\nabla u(x)|\big) dx = \operatorname{med}(\Omega) + \|\nabla u\|_{L^1} < \infty.$$

Planteamos el problema en $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ con $p > 1$ para permanecer dentro del Teorema 3.11 tal como lo hemos demostrado; como se señala en la Observación 3.12 (v), dicho teorema es válido también con $p = 1$.

- *Paso 1 (Regularidad de f y derivadas).* Como $1+|\xi|^2 \geq 1 > 0$ y la raíz cuadrada es de clase C^∞ en $(0,\infty)$, f es de clase $C^\infty(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. Se tiene $f_u(x,u,\xi) = 0$ y, por la regla de la cadena, para cada $i \in \{1,\dots,n\}$,

$$\begin{aligned} f_{\xi_i}(x,u,\xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left[\left(1+\sum_{j=1}^n \xi_j^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}\left(1+\sum_{j=1}^n \xi_j^2\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(1+\sum_{j=1}^n \xi_j^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{1}{2}}(2\xi_i) = \frac{\xi_i}{\sqrt{1+|\xi|^2}}, \end{aligned}$$

  de modo que $f_\xi(x,u,\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}}$. Como $|\xi| = \sqrt{|\xi|^2} < \sqrt{1+|\xi|^2}$, se tiene

$$|f_\xi(x,u,\xi)| = \frac{|\xi|}{\sqrt{1+|\xi|^2}} < \frac{\sqrt{1+|\xi|^2}}{\sqrt{1+|\xi|^2}} = 1.$$

- *Paso 2 (Convexidad).* Sean $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Derivando $f_{\xi_i} = \xi_i\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ respecto de ξ_j por la regla del producto y la regla de la cadena,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j \partial \xi_i}(x,u,\xi) = \delta_{ij}\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \xi_i \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2\xi_j) = \frac{\delta_{ij}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\xi_i\xi_j}{(1+|\xi|^2)^{\frac{3}{2}}},$$

  donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Sea $\eta \in \mathbb{R}^n$, $\eta \neq 0$. Multiplicando por

$(1+|\xi|^2)^{\frac{3}{2}}$ y sumando,

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j \partial \xi_i}(x,u,\xi)\,\eta_i\eta_j = \left(1+|\xi|^2\right) \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\xi_j\eta_i\eta_j = \left(1+|\xi|^2\right)|\eta|^2 - \langle \xi,\eta\rangle^2.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $\langle \xi,\eta\rangle^2 \leq |\xi|^2|\eta|^2$, de modo que

$$\left(1+|\xi|^2\right)|\eta|^2 - \langle \xi,\eta\rangle^2 \geq \left(1+|\xi|^2\right)|\eta|^2 - |\xi|^2|\eta|^2 = |\eta|^2 > 0.$$

Así, la matriz Hessiana de $g(\xi) = \sqrt{1+|\xi|^2}$ es definida positiva en todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, y el criterio de convexidad estricta del Teorema 1.46 garantiza que g es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^n$. En particular, g es convexa, y como f no depende de u, para todo $x \in \bar{\Omega}$, $(u_1,\xi_1),(u_2,\xi_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} f\big(x, \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2, \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2\big) &= g(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) \leq \lambda g(\xi_1) + (1-\lambda)g(\xi_2) \\ &= \lambda f(x,u_1,\xi_1) + (1-\lambda) f(x,u_2,\xi_2), \end{aligned}$$

es decir, $(u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ es convexa para todo $x \in \bar{\Omega}$.

- *Paso 3 (Se verifica (H_3) y falla (H_2)).* Eligiendo $\beta = 1$, por el Paso 1 y como $1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1} \geq 1$,

$$|f_u(x,u,\xi)| = 0 \leq 1 \leq 1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1} = \beta\left(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right),$$

$$|f_\xi(x,u,\xi)| < 1 \leq 1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1} = \beta\left(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right),$$

para todo $(x,u,\xi) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, de modo que se verifica (H_3). En cambio, (H_2) falla para todo $p > 1$. En efecto, supongamos, por contradicción, que existen $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que $f(x,u,\xi) \geq \alpha_1|\xi|^p + \alpha_3$ para todo $(x,u,\xi) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Por (3.35), como vimos al inicio del ejemplo, se tendría $1 + |\xi| \geq \alpha_1|\xi|^p + \alpha_3$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Tomando ξ con $|\xi| = s > 0$ y dividiendo por s,

$$\frac{1}{s} + 1 \geq \alpha_1 s^{p-1} + \frac{\alpha_3}{s}, \quad \forall\, s > 0.$$

Cuando $s \to \infty$, el lado izquierdo tiende a 1 y el lado derecho tiende a $+\infty$, pues $p - 1 > 0$, lo cual es una contradicción. Como en el Ejemplo 3.6, el integrando crece solo linealmente en ξ.

- *Paso 4 (Conclusiones).* Como (H_2) falla, el Teorema 3.1 no es aplicable y no garantiza la existencia de un minimizador de (G_4). De hecho, la existencia de soluciones del problema de la superficie mínima es un problema delicado, que depende de la geometría de Ω y del dato de frontera u_0 (véase el Capítulo 5 del libro de Dacorogna[4]). Sin embargo, como f satisface (H_3), el Teorema 3.11 garantiza que, *si* existe un minimizador $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, este satisface la forma débil (3.24), que, sustituyendo $f_u(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)) = 0$ y $f_\xi(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)) = \frac{\nabla\bar{u}(x)}{\sqrt{1+|\nabla\bar{u}(x)|^2}}$, se escribe

$$\int_\Omega \frac{\langle \nabla\bar{u}(x), \nabla\varphi(x)\rangle}{\sqrt{1+|\nabla\bar{u}(x)|^2}}\, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.36}$$

  Recíprocamente, como f es convexa (Paso 2), el Teorema 3.11 garantiza que toda solución de (3.36) en $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ es un minimizador de (G_4).

  El problema (G_4) tiene, además, a lo sumo un minimizador. En efecto, la Parte 2 de la demostración del Teorema 3.1 solo usa que m es finito y la convexidad de f, pero no la hipótesis (H_2). Aquí m es finito, pues $f \geq 1$ implica $I(u) \geq \mathrm{med}(\Omega)$ para toda u admisible, y $I(u_0) < \infty$ por la Parte 1 de la demostración del Teorema 3.11. Como f no depende de u y $\xi \mapsto f(x,\xi)$ es estrictamente convexa (Paso 2), el argumento del caso (b) se aplica sin cambios y muestra que dos minimizadores de (G_4) coinciden en c.t.p de Ω.

  Finalmente, como $f \in C^\infty$, si el minimizador $\bar{u}$ existe y es de clase $C^2(\bar{\Omega})$, el Teorema 3.11 garantiza que satisface la ecuación (3.18), que en este caso se escribe

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla\bar{u}(x)|^2}}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i}(x)\right] = 0, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}, \tag{3.37}$$

  o, usando el operador divergencia,

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\bar{u}(x)}{\sqrt{1+|\nabla\bar{u}(x)|^2}}\right) = 0, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}. \tag{3.38}$$

  Esta es la llamada **ecuación de la superficie mínima**; geométricamente, expresa que la curvatura media de la gráfica de $\bar{u}$ es nula en todo punto (véase el Capítulo 5 del libro de Dacorogna[4]).

Ejemplo 3.16 (Un integrando no convexo)**.** Sean $n = 1$, $\Omega = (0,1)$, $p = 4$ y $u_0 \equiv 0$.

Considere el problema

$$(G_5) \quad \inf\left\{ I(u) = \int_0^1 \left([u'(x)]^2 - 1\right)^2 dx : u \in W_0^{1,4}(0,1) \right\} = m,$$

cuyo integrando es $f(x,u,\xi) = (\xi^2-1)^2$. Este ejemplo muestra lo que puede ocurrir con la ecuación de Euler-Lagrange cuando falla la convexidad.

- *Paso 1 (Derivadas de f).* La función f es un polinomio en ξ, luego es de clase $C^\infty(\bar\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Se tiene $f_u(x,u,\xi) = 0$ y, por la regla de la cadena,

$$f_\xi(x,u,\xi) = 2(\xi^2-1)\cdot 2\xi = 4\xi(\xi^2-1) = 4\xi^3 - 4\xi, \qquad f_{\xi\xi}(x,u,\xi) = 12\xi^2 - 4.$$

- *Paso 2 (Se verifica (H_3)).* Probemos primero que $|\xi| \le 1 + |\xi|^3$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$:

  - si $|\xi| \le 1$, entonces, como $|\xi|^3 \ge 0$, se tiene $|\xi| \le 1 \le 1 + |\xi|^3$;
  - si $|\xi| > 1$, entonces $|\xi|^2 > 1$, de donde $|\xi| < |\xi|\cdot|\xi|^2 = |\xi|^3 < 1 + |\xi|^3$.

  Eligiendo $\beta = 8$, y como $p - 1 = 3$, para todo $(x,u,\xi) \in \bar\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se tiene

$$|f_u(x,u,\xi)| = 0 \le 8(1 + |u|^3 + |\xi|^3) = \beta\left(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right),$$

$$\begin{aligned} |f_\xi(x,u,\xi)| = |4\xi^3 - 4\xi| &\le 4|\xi|^3 + 4|\xi| \le 4|\xi|^3 + 4(1+|\xi|^3) = 4 + 8|\xi|^3 \le 8 + 8|\xi|^3 \\ &\le 8(1 + |u|^3 + |\xi|^3) = \beta\left(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right). \end{aligned}$$

- *Paso 3 (Falla la convexidad).* Por el Paso 1, $f_{\xi\xi}(x,u,0) = -4 < 0$, y el Teorema 1.46 (iv) garantiza que $\xi \mapsto f(x,u,\xi)$ no es convexa en $\mathbb{R}$; en consecuencia, tampoco lo es $(u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$, pues su restricción a la recta $\{u\} \times \mathbb{R}$ no es convexa.

- *Paso 4 (Ecuación de Euler-Lagrange).* Como f satisface (H_3), el Teorema 3.11, que no requiere convexidad, garantiza que todo minimizador $\bar u \in W_0^{1,4}(0,1)$ de (G_5) satisface la forma débil (3.24), que, sustituyendo $f_u(x,\bar u(x),\bar u'(x)) = 0$ y $f_\xi(x,\bar u(x),\bar u'(x)) = 4\bar u'(x)\left([\bar u'(x)]^2 - 1\right)$, se escribe

$$\int_0^1 4\bar u'(x)\left([\bar u'(x)]^2 - 1\right)\varphi'(x)\,dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,4}(0,1),$$

y, dividiendo por 4,

$$\int_0^1 \bar{u}'(x)\left([\bar{u}'(x)]^2-1\right)\varphi'(x)\,dx=0,\quad \forall\,\varphi\in W_0^{1,4}(0,1). \tag{3.39}$$

Como $f\in C^\infty$, si además $\bar{u}\in C^2([0,1])$, el Teorema 3.11 garantiza que $\bar{u}$ satisface (3.18), esto es, $\frac{d}{dx}\left[4\bar{u}'(x)\left([\bar{u}'(x)]^2-1\right)\right]=0$ para todo $x\in[0,1]$, o, dividiendo por 4,

$$\frac{d}{dx}\left[\bar{u}'(x)\left([\bar{u}'(x)]^2-1\right)\right]=0,\quad \forall\,x\in[0,1]. \tag{3.40}$$

- *Paso 5 (Valor del ínfimo y un minimizador).* Como $f\geq 0$, se tiene $I(u)\geq 0$ para toda $u\in W_0^{1,4}(0,1)$, y por lo tanto $m\geq 0$. Definamos

$$v(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ 1-x & \text{si } x\in\left(\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

La función v es continua y de clase C^1 a trozos en $[0,1]$, con $v(0)=0$ y $v(1)=0$; por la Observación 3.5, $v\in W_0^{1,4}(0,1)$, con derivada débil

$$v'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\\ -1 & \text{si } x\in\left(\frac{1}{2},1\right).\end{cases}$$

Así, $[v'(x)]^2=1$ para c.t.p $x\in(0,1)$ y

$$I(v)=\int_0^1\left([v'(x)]^2-1\right)^2dx=\int_0^1(1-1)^2\,dx=0.$$

Como v es admisible, $m\leq I(v)=0$; junto con $m\geq 0$, se obtiene $m=0$, y v es un minimizador de (G_5).

- *Paso 6 (Consecuencias de la falta de convexidad).*

  (I) *Puntos estacionarios que no son minimizadores.* La función $\bar{u}\equiv 0$ pertenece a $W_0^{1,4}(0,1)\cap C^2([0,1])$ y satisface $\bar{u}'\equiv 0$, de modo que $\bar{u}'\left([\bar{u}']^2-1\right)=0\cdot(0-1)=0$ en todo $[0,1]$. Por lo tanto, $\bar{u}\equiv 0$ satisface tanto (3.39) como (3.40); es un punto

estacionario de I en el sentido de la Observación 2.2 (iii). Sin embargo,

$$I(0) = \int_0^1 (0-1)^2\, dx = 1 > 0 = m,$$

así que $\bar{u} \equiv 0$ no es un minimizador. Esto muestra que, sin convexidad, el recíproco del Teorema 3.11 es falso: satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange es una condición necesaria, pero no suficiente, para ser un minimizador.

(II) *Minimizadores no regulares.* El minimizador v del Paso 5 no es de clase $C^1([0,1])$, pues sus derivadas laterales en $x = \frac{1}{2}$ son 1 y -1. Como $v'\,([v']^2 - 1) = v' \cdot 0 = 0$ en c.t.p de $(0,1)$, la función v satisface la forma débil (3.39); en cambio, la forma clásica (3.40) no tiene sentido para v.

(III) *Falta de unicidad.* La función $-v$ también pertenece a $W_0^{1,4}(0,1)$ y satisface $[(-v)'(x)]^2 = [v'(x)]^2 = 1$ en c.t.p, de modo que $I(-v) = 0 = m$; así, $-v \neq v$ es otro minimizador. Más aún, cada una de las funciones u_ν construidas en el Ejemplo 3.8 pertenece a $W_0^{1,4}(0,1)$ y satisface $|u_\nu'| = 1$ en c.t.p, luego $I(u_\nu) = 0$; como el valor máximo de u_ν es $\frac{1}{2\nu}$, las funciones u_ν son distintas entre sí, y (G_5) tiene infinitos minimizadores.

(IV) *Existencia sin convexidad.* Por el cálculo del Ejemplo 3.8, f satisface (H_2) con $p = 4$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_3 = -1$, y satisface (H_3) por el Paso 2; solo falla (H_1). Aun así, (G_5) tiene minimizadores. La hipótesis de convexidad del Teorema 3.1 es, por lo tanto, suficiente pero no necesaria para la existencia. Compárese con el Ejemplo 3.8, donde el término adicional u^4 impide la existencia de minimizadores.

3.3. EL PROBLEMA DE DIRICHLET-POISSON

Cerramos el capítulo aplicando la teoría desarrollada al problema que dio origen a la discusión sobre la existencia de minimizadores. Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y una función u_0, el **problema de Dirichlet** consiste en hallar una función u tal que $\Delta u = 0$ en Ω y $u = u_0$ sobre $\partial\Omega$. El llamado **principio de Dirichlet**, empleado por Riemann en sus trabajos sobre funciones de variable compleja, afirma que basta minimizar la integral de Dirichlet $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$ entre las funciones con el valor u_0 en la frontera: el minimizador es la solución buscada. El argumento daba por sentado que el mínimo se alcanza, y fue precisamente esta suposición la que Weierstrass cuestionó en 1870[5], mediante un ejemplo del cual

estudiamos una variante en el Ejemplo 2.5 y, en el marco de Sobolev, en el Ejemplo 3.7. Mostramos a continuación que, en el espacio $u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$, el principio de Dirichlet es válido, e incluso para la ecuación de Poisson $-\Delta u = h$, con $h \in L^2(\Omega)$.

Corolario 3.17. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera Lipschitz, $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$ y $h \in L^2(\Omega)$. Considere el problema*

$$\text{ínf}\left\{\widetilde{I}(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - h(x)\,u(x)\right] dx : u \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)\right\} = \widetilde{m}. \tag{3.41}$$

Entonces:

(I) el problema (3.41) *tiene un único minimizador $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$;*

(II) una función $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$ es el minimizador de (3.41) *si y solo si satisface la* ***forma débil de la ecuación de Poisson***

$$\int_\Omega \langle \nabla \bar{u}(x), \nabla \varphi(x)\rangle\, dx = \int_\Omega h(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega); \tag{3.42}$$

en particular, (3.42) *tiene una única solución en $u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$;*

(III) si además $h \in C(\bar{\Omega})$ y el minimizador $\bar{u}$ es de clase $C^2(\bar{\Omega})$, entonces $\bar{u}$ satisface la ***ecuación de Poisson***

$$-\Delta \bar{u}(x) = h(x), \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}. \tag{3.43}$$

En particular, si $h \equiv 0$, el minimizador de la integral de Dirichlet $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$ en $u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$ existe, es único, es la única solución de la forma débil de la ecuación de Laplace

$$\int_\Omega \langle \nabla \bar{u}(x), \nabla \varphi(x)\rangle\, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

y, si es de clase $C^2(\bar{\Omega})$, satisface $\Delta \bar{u}(x) = 0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$.

Demostración. Sea $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,u,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \xi_j^2$, de modo que el integrando de (3.41) es $f(x,u,\xi) - h(x)\,u$. Tomaremos $p = 2$, de modo que $p' = 2$ y $h \in L^{p'}(\Omega)$.

- *Parte 1 (Hipótesis sobre f).* La función f es un polinomio en ξ, luego es de clase $C^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, con $f_u(x,u,\xi) = 0$ y $f_{\xi_i}(x,u,\xi) = \xi_i$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, es

decir, $f_\xi(x,u,\xi)=\xi$. Además, $\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_j\partial\xi_i}(x,u,\xi)=\delta_{ij}$, donde $\delta_{ij}=1$ si $i=j$ y $\delta_{ij}=0$ si $i\neq j$; así, la matriz Hessiana de $g(\xi)=\frac{1}{2}|\xi|^2$ es la identidad I_n, que satisface $\langle I_n\eta,\eta\rangle=|\eta|^2>0$ para todo $\eta\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Por el criterio de convexidad estricta del Teorema 1.46, g es estrictamente convexa. Verificamos las hipótesis del Teorema 3.1.

(H_1) Como f no depende de u y g es convexa, para todo $x\in\bar\Omega$, $(u_1,\xi_1),(u_2,\xi_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ y $\lambda\in[0,1]$,

$$\begin{aligned} f\big(x,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2,\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2\big) &= g(\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2)\le\lambda g(\xi_1)+(1-\lambda)g(\xi_2)\\ &=\lambda f(x,u_1,\xi_1)+(1-\lambda)f(x,u_2,\xi_2).\end{aligned}$$

(H_2) Con $p=2$, $\alpha_1=\frac{1}{2}$ y $\alpha_3=0$, se tiene $f(x,u,\xi)=\frac{1}{2}|\xi|^2=\alpha_1|\xi|^p+\alpha_3$.

(H_3) Con $p=2$ (de modo que $p-1=1$) y $\beta=1$, para todo $(x,u,\xi)\in\bar\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$,

$$|f_u(x,u,\xi)|=0\le 1+|u|+|\xi|,\qquad |f_\xi(x,u,\xi)|=|\xi|\le 1+|u|+|\xi|.$$

Además, $I(u_0)=\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_{L^2}^2<\infty$, pues $u_0\in W^{1,2}(\Omega)$. Finalmente, como f no depende de u y $\xi\mapsto f(x,\xi)$ es estrictamente convexa, f satisface el caso (b) del Teorema 3.1.

- *Parte 2 (Prueba de (i)).* Por la Parte 1, el Corolario 3.4 se aplica con $p=2$, y garantiza que (3.41) tiene un minimizador $\bar u\in u_0+W_0^{1,2}(\Omega)$, que es único por encontrarnos en el caso (b).

- *Parte 3 (Prueba de (ii)).* Por la Parte 1, f satisface (H_3) con $p=2$ y es convexa. Como $f_u=0$ y $f_\xi(x,\bar u(x),\nabla\bar u(x))=\nabla\bar u(x)$, la ecuación (3.33) se escribe

$$\int_\Omega\big[0\cdot\varphi(x)+\langle\nabla\bar u(x),\nabla\varphi(x)\rangle\big]dx=\int_\Omega h(x)\,\varphi(x)\,dx,\quad\forall\,\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega),$$

que es (3.42). Por el Corolario 3.13, el minimizador $\bar u$ satisface (3.42) y, recíprocamente, toda $v\in u_0+W_0^{1,2}(\Omega)$ que satisface (3.42) es un minimizador de (3.41); por la unicidad de (i), $v=\bar u$. Así, $\bar u$ es la única solución de (3.42) en $u_0+W_0^{1,2}(\Omega)$.

- *Parte 4 (Prueba de (iii)).* Supongamos que $h\in C(\bar\Omega)$ y $\bar u\in C^2(\bar\Omega)$. El Teorema 3.11 no es aplicable, pues el integrando $f(x,u,\xi)-h(x)\,u$ no es, en general, de clase C^1 en x; sin embargo, el argumento de la Parte 3 de su demostración se adapta sin

dificultad. Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$. Como $f_{\xi_i}(x, \bar{u}(x), \nabla\bar{u}(x)) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}(x)$ es de clase $C^1(\bar{\Omega})$, integrando por partes exactamente como allí y usando que φ se anula sobre $\partial\Omega$, se obtiene

$$\int_\Omega \langle \nabla\bar{u}(x), \nabla\varphi(x)\rangle \, dx = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_i^2}(x)\, \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega \Delta\bar{u}(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Sustituyendo en (3.42), resulta $\int_\Omega E(x)\, \varphi(x)\, dx = 0$ para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, donde $E(x) = -\Delta\bar{u}(x) - h(x)$ es continua en $\bar{\Omega}$. Como en la Parte 3 de la demostración del Teorema 3.11, el Lema fundamental del cálculo de variaciones (Teorema 1.22) y la continuidad de E garantizan que $E(x) = 0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$, que es (3.43).

El caso $h \equiv 0$ se obtiene tomando h como la función nula, que pertenece a $L^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$; en este caso $\widetilde{I}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx$, la ecuación (3.42) tiene lado derecho nulo y (3.43) se escribe $\Delta\bar{u}(x) = 0$. ■

Observación 3.18. (I) La condición $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$ codifica la condición de frontera $\bar{u} = u_0$ sobre $\partial\Omega$. Así, el Corolario 3.17 establece que el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = h & \text{en } \Omega, \\ u = u_0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

entendido en la forma débil (3.42), tiene una y solo una solución en $u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$, y que esta solución es el minimizador de (3.41).

(II) El contraste con el Ejemplo 3.7 es instructivo: en ambos casos el integrando es convexo en ξ, pero en el ejemplo de Weierstrass el coeficiente x del término $x\xi^2$ se anula en $x = 0$ y la coercitividad (H_2) falla, mientras que aquí (H_2) se cumple con $\alpha_1 = \frac{1}{2}$. Esta es exactamente la hipótesis que hace válido el principio de Dirichlet.

(III) El corolario garantiza la existencia de una solución débil, pero no que esta sea de clase $C^2(\bar{\Omega})$, hipótesis que se supone en (iii). Establecer que, bajo condiciones adecuadas sobre Ω, u_0 y h, la solución débil es regular, y en consecuencia una solución clásica, corresponde a la teoría de la regularidad, que, como se señaló al inicio del capítulo, excede el alcance de este trabajo.

El caso $h \equiv 0$ del Corolario 3.17 admite una generalización natural, en la que el exponente 2 de la integral de Dirichlet se reemplaza por un exponente $p > 1$.

Ejemplo 3.19 (El p-problema de Dirichlet y la ecuación del p-Laplaciano)**.** Sean $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado con frontera Lipschitz, $p > 1$ y $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Considere el problema

$$(G_6) \quad \inf \left\{ I(u) = \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla u(x)|^p \, dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega) \right\} = m,$$

cuyo integrando es $f(x,u,\xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p = \frac{1}{p}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2\right)^{\frac{p}{2}}$. Mostraremos que (G_6) tiene un único minimizador, que este es la única solución en $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ de la forma débil de la ecuación de Euler-Lagrange asociada, y que, cuando es suficientemente regular, satisface la ecuación del p-Laplaciano. Procedemos en varios pasos.

- *Paso 1 (Regularidad de f).* Como f no depende de x ni de u, se tiene $f_u(x,u,\xi) = 0$, y basta estudiar las derivadas respecto de ξ. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$. Si $\xi \neq 0$, por la regla de la cadena,

$$f_{\xi_i}(x,u,\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left[\frac{1}{p}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2\right)^{\frac{p}{2}}\right] = \frac{1}{p}.\frac{p}{2}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2\right)^{\frac{p}{2}-1} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2\right) = \frac{1}{2}\left(|\xi|^2\right)^{\frac{p-2}{2}}(2\xi_i) = |\xi|^{p-2}\xi_i.$$

  Si $\xi = 0$, denotando por e_i el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, se tiene

$$\left|\frac{f(x,u,te_i) - f(x,u,0)}{t}\right| = \frac{1}{p}\frac{|t|^p}{|t|} = \frac{1}{p}|t|^{p-1} \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } t \to 0,$$

  pues $p - 1 > 0$; así, $f_{\xi_i}(x,u,0) = 0$. Además, para $\xi \neq 0$,

$$|f_{\xi_i}(x,u,\xi)| = |\xi|^{p-2}|\xi_i| \leq |\xi|^{p-2}|\xi| = |\xi|^{p-1} \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } \xi \to 0,$$

  de modo que f_{ξ_i} es continua también en $\xi = 0$. Como todas las derivadas parciales de primer orden de f existen y son continuas, $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, con

$$f_u(x,u,\xi) = 0, \qquad f_\xi(x,u,\xi) = |\xi|^{p-2}\xi,$$

  donde se entiende que $|\xi|^{p-2}\xi = 0$ si $\xi = 0$. En particular, $|f_\xi(x,u,\xi)| = |\xi|^{p-2}|\xi| = |\xi|^{p-1}$.

- *Paso 2 (Convexidad estricta de $g(\xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p$).* Definamos $k : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por $k(s) = \frac{1}{p}s^p$, de modo que $g(\xi) = k(|\xi|)$. Probamos primero dos propiedades de k.

- k es estrictamente creciente: si $0 \leq s < t$, entonces $s^p < t^p$, es decir, $k(s) < k(t)$.
- k es estrictamente convexa: sean $0 \leq a < b$ y $\lambda \in (0,1)$, y denotemos $s_\lambda = \lambda a + (1-\lambda)b$, de modo que $a < s_\lambda < b$, $s_\lambda - a = (1-\lambda)(b-a)$ y $b - s_\lambda = \lambda(b-a)$. Como k es derivable en $(0,\infty)$ y continua en $[0,\infty)$, con $k'(s) = s^{p-1}$, el teorema del valor medio proporciona $c_1 \in (a, s_\lambda)$ y $c_2 \in (s_\lambda, b)$ tales que

  $$k(s_\lambda) - k(a) = c_1^{p-1}(1-\lambda)(b-a), \qquad k(b) - k(s_\lambda) = c_2^{p-1}\lambda(b-a).$$

  Como $c_1 < c_2$ y $s \mapsto s^{p-1}$ es estrictamente creciente en $[0,\infty)$ (pues $p-1 > 0$), se tiene $c_1^{p-1} < c_2^{p-1}$. Multiplicando la primera igualdad por λ y la segunda por $1-\lambda$,

  $$\lambda\big[k(s_\lambda) - k(a)\big] = \lambda(1-\lambda)(b-a)\, c_1^{p-1} < \lambda(1-\lambda)(b-a)\, c_2^{p-1} = (1-\lambda)\big[k(b) - k(s_\lambda)\big].$$

  Reordenando, $\lambda k(s_\lambda) + (1-\lambda)k(s_\lambda) < \lambda k(a) + (1-\lambda)k(b)$, es decir, $k(s_\lambda) < \lambda k(a) + (1-\lambda)k(b)$. El caso $a > b$ se obtiene intercambiando los papeles de a y b (y de λ y $1-\lambda$).

Sean ahora $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$ con $\xi_1 \neq \xi_2$ y $\lambda \in (0,1)$. Por la desigualdad triangular,

$$|\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2| \leq \lambda|\xi_1| + (1-\lambda)|\xi_2|.$$

Distinguimos dos casos.

- Si $|\xi_1| \neq |\xi_2|$: como k es creciente y estrictamente convexa,

  $$\begin{aligned} g(\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) &= k\big(|\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2|\big) \leq k\big(\lambda|\xi_1| + (1-\lambda)|\xi_2|\big) < \lambda k(|\xi_1|) + (1-\lambda)k(|\xi_2|) \\ &= \lambda g(\xi_1) + (1-\lambda)g(\xi_2). \end{aligned}$$

- Si $|\xi_1| = |\xi_2| = r$: como $\xi_1 \neq \xi_2$, no pueden ser ambos nulos, así que $r > 0$. Veamos que $|\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2| < r$. Por la desigualdad triangular, $|\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2| \leq \lambda r + (1-\lambda)r = r$. Supongamos, por contradicción, que $|\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2| = r$. Elevando al cuadrado,

  $$r^2 = \lambda^2|\xi_1|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle\xi_1,\xi_2\rangle + (1-\lambda)^2|\xi_2|^2 = \big[\lambda^2 + (1-\lambda)^2\big]r^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle\xi_1,\xi_2\rangle.$$

  Como $1 - \lambda^2 - (1-\lambda)^2 = 2\lambda - 2\lambda^2 = 2\lambda(1-\lambda)$, lo anterior equivale a $2\lambda(1-\lambda)r^2 =$

$2\lambda(1-\lambda)\langle\xi_1,\xi_2\rangle$ y, como $\lambda(1-\lambda)>0$, a $\langle\xi_1,\xi_2\rangle = r^2$. Pero entonces

$$|\xi_1-\xi_2|^2 = |\xi_1|^2 - 2\langle\xi_1,\xi_2\rangle + |\xi_2|^2 = r^2 - 2r^2 + r^2 = 0,$$

es decir, $\xi_1=\xi_2$, lo cual es una contradicción. Así, $|\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2|<r$ y, como k es estrictamente creciente,

$$g(\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2) = k\big(|\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2|\big) < k(r) = \lambda k(r)+(1-\lambda)k(r) = \lambda g(\xi_1)+(1-\lambda)g(\xi_2).$$

En ambos casos, $g(\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2) < \lambda g(\xi_1)+(1-\lambda)g(\xi_2)$, de modo que g es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^n$.

- *Paso 3 (Verificación de las hipótesis del Teorema 3.1).*

  (H_1) Sean $x\in\bar\Omega$, $(u_1,\xi_1),(u_2,\xi_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ y $\lambda\in[0,1]$. Como f no depende de u y g es convexa por el Paso 2,

  $$\begin{aligned} f\big(x,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2,\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2\big) &= g(\lambda\xi_1+(1-\lambda)\xi_2) \le \lambda g(\xi_1)+(1-\lambda)g(\xi_2)\\ &= \lambda f(x,u_1,\xi_1)+(1-\lambda)f(x,u_2,\xi_2), \end{aligned}$$

  de modo que $(u,\xi)\mapsto f(x,u,\xi)$ es convexa para todo $x\in\bar\Omega$.

  (H_2) Con el mismo p, $\alpha_1=\frac{1}{p}>0$ y $\alpha_3=0$, se tiene $f(x,u,\xi)=\frac{1}{p}|\xi|^p=\alpha_1|\xi|^p+\alpha_3$ para todo $(x,u,\xi)\in\bar\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

  (H_3) Eligiendo $\beta=1$, para todo $(x,u,\xi)\in\bar\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$,

  $$|f_u(x,u,\xi)| = 0 \le 1+|u|^{p-1}+|\xi|^{p-1} = \beta\left(1+|u|^{p-1}+|\xi|^{p-1}\right),$$

  $$|f_\xi(x,u,\xi)| = |\xi|^{p-1} \le 1+|u|^{p-1}+|\xi|^{p-1} = \beta\left(1+|u|^{p-1}+|\xi|^{p-1}\right).$$

  Además, $I(u_0)=\frac{1}{p}\|\nabla u_0\|_{L^p}^p<\infty$, pues $u_0\in W^{1,p}(\Omega)$.

- *Paso 4 (Conclusiones).* Por el Paso 3, el Teorema 3.1 garantiza que (G_6) tiene un minimizador $\bar u\in u_0+W_0^{1,p}(\Omega)$; como f no depende de u y $\xi\mapsto f(x,\xi)$ es estrictamente convexa (Paso 2), el caso (b) de dicho teorema garantiza que este minimizador es único. Como f satisface (H_3), el Teorema 3.11 garantiza que $\bar u$ satisface la forma débil (3.24), que, sustituyendo $f_u(x,\bar u(x),\nabla\bar u(x))=0$ y $f_\xi(x,\bar u(x),\nabla\bar u(x))=$

$|\nabla \bar{u}(x)|^{p-2}\nabla \bar{u}(x)$, se escribe

$$\int_\Omega |\nabla \bar{u}(x)|^{p-2}\langle \nabla \bar{u}(x), \nabla \varphi(x)\rangle \, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.44}$$

Recíprocamente, como f es convexa, el Teorema 3.11 garantiza que toda solución de (3.44) en $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$ es un minimizador de (G_6) y, por la unicidad del minimizador, coincide con $\bar{u}$. En consecuencia, (3.44) tiene una única solución en $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$, que es precisamente el minimizador de (G_6).

Paso 5 (Forma clásica cuando $p \geq 2$). Supongamos $p \geq 2$ y veamos que $f \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Si $p = 2$, se tiene $f_{\xi_i}(x, u, \xi) = \xi_i$, cuyas derivadas son constantes. Si $p > 2$, sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Para $\xi \neq 0$, por la regla del producto y la regla de la cadena,

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left[|\xi|^{p-2}\xi_i\right] = |\xi|^{p-2}\delta_{ij} + (p-2)|\xi|^{p-4}\xi_i\xi_j,$$

donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Como $|\xi_i\xi_j| \leq |\xi|^2$, esta expresión está acotada en valor absoluto por $|\xi|^{p-2} + (p-2)|\xi|^{p-2} = (p-1)|\xi|^{p-2}$, que tiende a 0 cuando $\xi \to 0$, pues $p - 2 > 0$. Para $\xi = 0$, como $f_{\xi_i}(x, u, te_j) = |t|^{p-2}t\,\delta_{ij}$,

$$\left|\frac{f_{\xi_i}(x, u, te_j) - f_{\xi_i}(x, u, 0)}{t}\right| = |t|^{p-2}\delta_{ij} \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } t \to 0,$$

de modo que $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j \partial \xi_i}(x, u, 0) = 0$ y la segunda derivada es continua en $\xi = 0$. Las derivadas segundas que involucran x o u son nulas. Así, $f \in C^2$ cuando $p \geq 2$. Si además $\bar{u} \in C^2(\bar{\Omega})$, el Teorema 3.11 garantiza que $\bar{u}$ satisface la ecuación (3.18), que en este caso se escribe

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[|\nabla \bar{u}(x)|^{p-2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}(x)\right] = 0, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}.$$

Usando el operador divergencia, esta ecuación se escribe

$$\Delta_p \bar{u}(x) := \operatorname{div}\left(|\nabla \bar{u}(x)|^{p-2}\nabla \bar{u}(x)\right) = 0, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}, \tag{3.45}$$

y se conoce como la **ecuación del p-Laplaciano**; sus soluciones se llaman funciones **p-armónicas**. Cuando $p = 2$, se tiene $|\nabla \bar{u}|^0 = 1$ y (3.45) se reduce a la ecuación de Laplace $\Delta \bar{u} = 0$, y el ejemplo se reduce al caso $h \equiv 0$ del Corolario 3.17.

Si $1 < p < 2$, la segunda derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i^2}$ contiene el término $|\xi|^{p-2}$, que no es acotado cerca de $\xi = 0$; en este caso $f \notin C^2$, y el minimizador se caracteriza únicamente mediante la forma débil (3.44).

BIBLIOGRAFÍA

Adams, R. A. y J. J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. 2.ª ed. Vol. 140. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 2003 (vid. págs. 9, 25).

Apostol, T. M. *Mathematical Analysis*. 2.ª ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1974 (vid. pág. 14).

Bernoulli, J. Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur. En: *Acta Eruditorum* (1696), pág. 269 (vid. pág. 8).

Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer, 2011 (vid. pág. 26).

Dacorogna, B. *Direct Methods in the Calculus of Variations*. 2.ª ed. Vol. 78. Applied Mathematical Sciences. Springer, 2008 (vid. pág. 62).

– *Introduction to the Calculus of Variations*. 4.ª ed. World Scientific Publishing, 2024 (vid. págs. 9-12, 17, 25, 29, 32, 34, 53, 82, 97).

Euler, L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Lausanne y Ginebra: Marc-Michel Bousquet & Cie., 1744 (vid. pág. 8).

Evans, L. C. *Partial Differential Equations*. 2.ª ed. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2010 (vid. págs. 9, 17, 32).

Folland, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2.ª ed. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, 1999 (vid. pág. 17).

Grisvard, P. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Vol. 24. Monographs and Studies in Mathematics. Boston: Pitman Advanced Publishing Program, 1985 (vid. pág. 29).

Lagrange, J.-L. Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies. En: *Miscellanea Taurinensia* II (1760–1761), págs. 335-362 (vid. pág. 8).

Rockafellar, R. T. *Convex Analysis*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 1970 (vid. pág. 31).

Rudin, W. *Functional Analysis*. 2.ª ed. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, 1991 (vid. pág. 20).

Weierstrass, K. Über das sogenannte Dirichlet'sche Prinzip. En: *Mathematische Werke*. Vol. 2. Leído ante la Königliche Akademie der Wissenschaften de Berlín el 14 de julio de 1870. Berlín: Mayer & Müller, 1895, págs. 49-54 (vid. págs. 9, 10, 100).