

La Inflación Primordial de Rodadura Constante

Julián Guillermo Adarme Rodríguez

Trabajo de Grado para Optar al Título de Físico

Director

Yeinzon Rodríguez García

Ph. D. in Physics

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Física

Bucaramanga

2025

### **Agradecimientos**

A mi familia por todo el apoyo que me dieron a lo largo de esta carrera. A Catalina, María Alejandra, Camilo, Carlos, Mauro, Nicolás, Santiago Y Julián por acompañarme desde el inicio y en los tiempos más retadores durante el camino. Por otra parte, a mis maestros a lo largo de la carrera que fueron grandes profesionales y amigos. Finalmente, a mí mismo por culminar este proyecto de investigación.

**Tabla de Contenido**

Introducción .....	8
1. Modelo estándar de la cosmología.....	11
1.1 Geometría del espaciotiempo.....	11
1.2 Dinámica cósmica.....	13
1.3 Problemas clásicos de la cosmología estándar.....	15
1.3.1 Problema de horizonte .....	16
1.3.2 Problema de planitud .....	19
2. Modelos Inflacionarios .....	22
2.1 Inflación de rodadura lenta .....	24
2.2 Rodadura ultra lenta.....	27
2.3 Inflación de rodadura constante .....	31
3. Conclusiones.....	37
Referencias Bibliográficas .....	39
Apéndices.....	44

**Lista de Figuras**

Figura 1 Ley de Hubble para un sistema circular .....	11
Figura 2 Solución al problema de planitud .....	20
Figura 3 Parámetro de rodadura de un periodo de inflación de rodadura ultra lenta.....	29
Figura 4 Espacio de fase del escenario de RUL .....	29
Figura 5 Evolución del primer parámetro de rodadura, segunda solución del parámetro de Hubble en rodadura constante .....	34
Figura 6 Evolución del primer parámetro de rodadura, tercera solución del parámetro de Hubble en rodadura constante .....	35

### Lista de Apéndices

Apéndices.....	44
Apéndice A. Evolución de un campo inflacionario único .....	44
Apéndice B. Desarrollo a ecuaciones de RL .....	46
Apéndice B.1.: Parámetros $\varepsilon$ y $\epsilon$ .....	46
Apéndice B.2: Segundo parámetro de rodadura lenta .....	47
Apéndice C. Ecuaciones de Hamilton-Jacobi.....	48
Apéndice D. Desarrollo a ecuaciones de RUL .....	50
Apéndice D.1. Proceso para obtener $\phi$ .....	50
Apéndice D.2. Obtención del primer parámetro de rodadura.....	50
Apéndice E. Desarrollo a las ecuaciones de rodadura constante .....	52
Apéndice E.1. Ecuación del potencial en términos del campo .....	52
Apéndice E.1.1. Tratamiento de la primera solución de RC .....	52
Apéndice E.1.2. Tratamiento de la segunda solución de RC.....	53
Apéndice E.1.3. Tratamiento de la tercera solución de RC .....	58
Apéndice E.2. Parámetros de rodadura.....	61
Apéndice E.2.1. Segunda solución ( $H \propto \cosh$ ).....	61
Apéndice E.2.2. Tercera solución ( $H \propto \sinh$ ) .....	63

## Resumen

**TÍTULO:** La inflación primordial de rodadura constante.\*

**AUTOR:** Julián Guillermo Adarme Rodríguez\*\*

**Palabras Clave:** Inflación Primordial, Rodadura Lenta, Rodadura Ultra Lenta, Rodadura Constante.

### Descripción:

Han pasado ya 43 años desde que Alan Guth propuso la idea de una expansión exponencial acelerada. Aunque su motivación original era distinta, este periodo que hoy en día conocemos como inflación ha resultado ser fundamental para explicar la notable homogeneidad que tiene el universo temprano para el momento en el que sucede recombinación. Dado que se trata de un marco de pensamiento relativamente reciente, era de esperarse que muchos modelos inflacionarios surgieran y no estuviesen de acuerdo con las observaciones, como en el caso de los escenarios de inflación caótica, inflación natural e inflación de cima de colina (aunque este último puede resultar viable si se considerando un potencial cuártico). Algunos modelos de vieja data demostraron ser lo suficientemente acertados como para seguir siendo considerados relevantes, mientras que otros son más recientes y con ideas tanto atractivas como frescas, algo que siempre brinda mucho de qué hablar. En torno a este último grupo de modelos se centra este proyecto de investigación. El propósito es explorar en detalle los elementos y características de la inflación de rodadura ultra lenta y de la inflación de rodadura constante, y compararlos a su vez con los de su predecesor, la inflación de rodadura lenta.

---

\* Trabajo de Grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director Yeinzon Rodríguez García.

## Abstract

**Title: Constant roll primordial inflation\***

**Author: Julián Adarme Rodríguez\*\***

**Key Words: Primordial inflation, Slow-roll, Ultra slow-roll, Constant-roll**

### Description:

It has been 43 years since Alan Guth proposed an accelerated exponential expansion, although the objective was a different one, this period that we know today as inflation manages to account for the great homogeneity that the early universe had at the time when recombination occurred. With it being a relatively recent framework of thought, it was to be expected that many surgical inflationary models would not agree with observations, as in the case of the chaotic inflation, natural inflation, and hilltop inflation scenarios (although the latter is satisfactory considering a quartic potential). Some long-standing models have proven successful enough to remain relevant, while others are newer and offer both compelling and fresh ideas, which always generate enthusiasm. This research project focuses on this last group of models. The goal is to explore the elements and characteristics of Ultra slow-roll inflation and Constant-roll inflation, and to compare them with their predecessor, slow-roll inflation.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Science Faculty. Physics school. Director Yeinzon Rodríguez García.

## Introducción

Desde los primeros hombres que se aventuraron a razonar sobre nuestro enigmático origen permanecen las preguntas: ¿De dónde venimos?, ¿Quiénes somos?, ¿A dónde vamos? Responder a estas preguntas no es una tarea fácil y por muchos años la humanidad ha ido rastreando su origen hasta la pregunta sobre el origen del universo mismo. Para obtener respuestas con apoyo observacional fue necesario un trabajo de investigación a lo largo de varios siglos sobre lo que podemos observar e incluso lo que se ocultaba a nuestro ojo. Y es que desde la teoría geocéntrica donde nuestro argumento de peso era la intuición, la predicción era enormemente errada con relación al lugar que ocupamos en el universo a razón de nuestra concepción limitada de lo que realmente hay allá afuera, este hecho se seguía reflejando incluso durante los años en que fue propuesta la teoría de la Relatividad General de Einstein, puesto que el universo contaba con características que nos eran desconocidas. Uno de los hallazgos más grandes se encuentra en el fósil de mayor antigüedad del universo, la radiación cósmica de fondo, detectada en el año 1965 por Penzias y Wilson (como se citó en Dicke et al, 1965)., con esto, el universo empezó a lucir aún más poblado de materia gracias a ampliar lo que podíamos detectar. El descubrimiento les mereció el premio Nobel, además de iniciar décadas de estudio dedicados a la comprensión de la imagen más joven del universo, con la cual se consiguió determinar las características remarcables del universo primordial. Aunque con cada sonda satelital se conseguía más información y detalles acerca de la radiación cósmica de fondo, reduciendo gradualmente los valores de las incertidumbres en las mediciones, también surgían preguntas acerca del origen y cambios de nuestro universo temprano. El modelo que brinda una descripción adecuada del universo a gran escala es el llamado modelo estándar cosmológico,  $\Lambda$ CDM (Mukhanov, 2005)., donde  $\Lambda$  representa la constante cosmológica asociada a la expansión acelerada del universo y su energía oscura, y

CDM son las siglas en inglés para materia oscura fría o materia oscura no relativista, establecido en el año 1997 a partir de la expansión acelerada del universo. Sin embargo, este paradigma requiere de ajuste fino en sus parámetros libres para producir el universo que observamos hoy en día, fue a partir de este problema que apareció la propuesta de un período de expansión acelerada que precede al Big Bang caliente, haciendo referencia a las etapas de evolución del universo como recalentamiento, termalización y nucleosíntesis primordial, conocido como inflación primordial.

Motivado principalmente por el problema de reliquias no deseadas, (que hace referencia a la posible producción de monopolos magnéticos no compatibles con las observaciones del universo temprano), Alan Guth propuso una era de expansión exponencialmente acelerada previa a las etapas conocidas de Big Bang caliente (Guth, 1981)., que se caracteriza porque, en ella, la segunda derivada del factor de escala con respecto al tiempo es positiva ( $\ddot{a} > 0$ ). Para esto, Guth tomó como punto de partida un modelo de universo de Sitter, el cual corresponde a una solución a las ecuaciones de campo de Einstein que describe un universo en expansión. Sin embargo, la idea original de Guth proponía una transición de fase de primer orden desde un mínimo local hacía un mínimo global que daba lugar a algunos problemas, por ejemplo, la existencia de regiones que experimentaban inflación de manera independiente junto a una posible colisión de sus fronteras (Guth y Weinberg 1983). Para corregir esto, Linde reemplazó la transición de fase de primer orden por una transición de fase de segundo orden (Linde, 1982). Este mecanismo inflacionario es producto de la existencia de un campo escalar denominado inflatón cuyo potencial tiene una pendiente mínima a lo largo del tiempo que, al oscilar alrededor del mínimo en su potencial, da lugar a la etapa que conocemos como recalentamiento, conectándolo con las etapas del universo temprano que conocemos (Abbott, Farhi, y Wise 1982; Albrecht et al. 1982; Kofman, Linde, y Starobinsky 1994; Allahverdi et al. 2010). La mejor subclase de modelo que funge como sumario

a las ideas anteriores, es decir, una transición de fase de segundo orden y una expansión cuasi-de Sitter donde la energía cinética del campo escalar es mucho menor que la energía potencial del mismo, ( $\rho_{cin} \ll V$ ), es la de rodadura lenta (RL), nombrada así por el lento descenso del inflatón a lo largo de su potencial (Mukhanov 2005; S. Weinberg 2008; Peter y Uzan 2013; Dimopoulos 2022; Lyth y Liddle 2009; Guendelman y Herrera 2023; Cembranos et al. 2023).

A pesar de lo bien comportada que resulta ser la inflación de RL, es posible plantear escenarios que ofrezcan una mejor explicación de las observaciones. Sin llegar a profundizar en ellos, inflación como tal tiene unos tipos de arquetipos para producir los resultados deseados donde, por lo general, los modelos de rodadura se acercan más a un tipo de inflación de cima de colina cuya característica más notoria es la forma de su potencial que permite una menor energía cinética del campo como ya fue mencionado. Una alternativa tentadora es la subclase de rodadura ultra lenta (RUL) (Dimopoulos, 2017). El atractivo que tiene es que podría llegar a ser una causa de la formación de agujeros negros primordiales (Martin et al., 2013)., pero sigue siendo un tema de discusión (Germani and Prokopec 2017) que valdría la pena revisar. Por otra parte, el modelo inflacionario de rodadura constante (RC) (Motohashi, Starobinsky, y Yokoyama 2015; Motohashi y Starobinsky 2017) plantea un abanico de posibilidades sobre la relación entre el régimen de RL y el de RUL, al presentar un *ansatz* que resulta ser una interpolación entre ambos regímenes, adicional a esto, RC resulta interesante gracias a que consigue resultados que entrarían a ser considerado como otro arquetipo inflacionario que es el de inflación híbrida, donde es necesaria la introducción de otro mecanismo para que el periodo inflacionario tenga un final y no se dé una inflación eterna.

## 1. Modelo estándar de la cosmología

### 1.1 Geometría del espaciotiempo

Estudiar el universo a gran escala se fundamenta en el principio cosmológico (Wu, Lahav, y Rees 1999; Yadav et al. 2005) que, como principio, únicamente propone una condición coherente; la idea de que el hombre ocupe un lugar privilegiado en el universo es un error que ya se ha cometido antes, cuestión que se esclarece más al tomar en cuenta las observaciones astronómicas que dan sentido a este principio (Assis y Neves 1995; Penzias 1979; Wilson 1979). Dicho principio presupone que el universo a gran escala presenta homogeneidad e isotropía, haciendo posible una hipotética distribución equitativa de la materia y permitiendo seccionar por pedazos al universo (es necesario considerar regiones de volumen superior a  $10^9 [Mpc^3]$ ) donde cualquier región considerada será idéntica a cualquier otra.

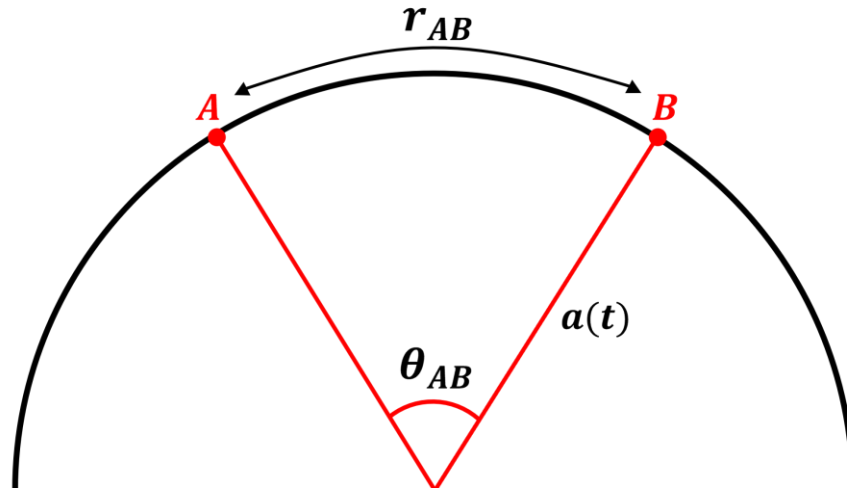
Gracias a las observaciones que se tienen del universo, se tiene conocimiento de la expansión del espacio (Hubble, 1929). Para expresar este fenómeno, se tiene que la velocidad relativa de un observador  $B$  respecto a otro  $A$  es:

$$\vec{v}_{B(A)} = H(t)\vec{r}_{AB}, \quad (1.1)$$

Donde  $H(t)$  es conocido como el parámetro de Hubble, que depende únicamente del tiempo cósmico  $t$  mas no de las coordenadas espaciales, y  $\vec{r}_{AB}$  es un vector que apunta desde  $A$  hacia  $B$ .

### Figura 1

**Ley de Hubble para un sistema circular.**



Dos observadores ubicados en una semicircunferencia donde, al aumentar el radio y la distancia, el ángulo de separación no varía. De la evolución de este sistema se puede recuperar la ley de Hubble.

Para verlo desde una analogía, considere dos puntos sobre una esfera  $A$  y  $B$  separados por una longitud de arco  $r_{AB}(t)$  la cual aumenta, véase la Figura 1, pero cuyo ángulo de separación  $\theta_{AB}$  permanece constante en vista de que su radio  $a(t)$  aumenta, pudiendo escribirse como:

$$r_{AB} = a(t)\theta_{AB}. \quad (1.2)$$

Lo anterior implica que la velocidad relativa correspondería a:

$$v_{AB} \equiv \dot{r}_{AB} = \frac{\dot{a}}{a} r_{AB}. \quad (1.3)$$

Al definir  $H(t) \equiv \dot{a}/a$  en la expresión anterior, se recupera la ley de Hubble. Ahora bien, la relatividad general brinda la manera de realizar mediciones en el espaciotiempo empleando como elemento protagónico al tensor métrico, representado por  $g_{\mu\nu}$ , el cual cumple el rol de introducir la noción de distancia entre puntos del espaciotiempo. El elemento de línea definido por medio del tensor métrico es descrito como:

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}dx^\nu dx^\mu, \quad (1.4)$$

Donde se emplea el convenio de suma de Einstein sobre los índices repetidos;  $ds^2$  es la distancia propia y los  $dx^\mu$  son los elementos diferenciales de las coordenadas del espaciotiempo. Para describir un universo homogéneo e isótropo se emplea la métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) (Friedman 1922; Robertson 1935; Walker 1937). Ésta se puede escribir de forma que contenga los tres posibles tipos de curvatura espacial, los cuales corresponden a un universo plano, a un universo cerrado, el cual tiene la geometría de una esfera tridimensional, y a un universo abierto, el cual tiene la geometría de un espacio hiperbólico tridimensional. Así:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ dx^2 + k \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - k|\vec{x}|^2} \right], \quad (1.5)$$

Donde  $\vec{x}$  es el vector posición en coordenadas cartesianas,  $a(t)$  corresponde al parámetro de expansión (también denominado factor de escala) y  $k$  es el parámetro de curvatura espacial. Este último toma los valores -1, 0 y +1 para modelar las tres posibles geometrías espaciales:

$$k = \begin{cases} +1 & \text{cerrado} \\ 0 & \text{plano} \\ -1 & \text{abierto.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Todo lo anterior permite realizar un estudio formal del universo y su dinámica.

## 1.2 Dinámica cósmica

La dinámica cósmica es primeramente tratada por Newton de una forma clásica y con ideas de un universo estático. Para integrar estas ideas al escenario de nueva inflación de Linde en un universo homogéneo e isótropo (Linde, 1982), es necesario emplear conceptos como la métrica (1.5) y el tensor momentum-energía:

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + p)u^{\mu}u_{\nu} - p\delta_{\nu}^{\mu}. \quad (1.7)$$

La relación anterior describe el comportamiento de un fluido perfecto en equilibrio termodinámico en donde  $\rho$  es la densidad de energía,  $p$  es la presión y  $u^{\alpha}$  es la cuadri-velocidad del fluido. De otra parte, las ecuaciones de campo de Einstein vienen dadas por:

$$G_{\nu}^{\mu} \equiv R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}Rg_{\nu}^{\mu} = 8\pi GT_{\nu}^{\mu} - \Lambda g_{\nu}^{\mu}, \quad (1.8)$$

Expresión para la cual  $G_{\nu}^{\mu}$  es el tensor de Einstein,  $R_{\nu}^{\mu}$  viene siendo el tensor de curvatura de Ricci,  $R$  es el escalar de Ricci,  $G$  es la constante de gravitación universal y  $\Lambda$  es la constante cosmológica. A continuación, se muestra la forma de obtener las relaciones que describen la dinámica cósmica. Estas ecuaciones corresponden a la ecuación de continuidad, la ecuación de aceleración y la ecuación de Friedmann (Mukhanov 2005; S. Weinberg 2008; Peter y Uzan 2013; Dimopoulos 2022; Lyth y Liddle 2009; Dodelson 2003).

El obtener una nueva versión de la **ecuación de continuidad** ( $T_{0;\alpha}^{\alpha} = 0$ ) de forma simple se puede lograr empleando la primera ley de la termodinámica. La energía total  $E_t$  de un sistema cerrado en expansión, donde la presión  $p$  responsable de esta expansión es significativa sobre el volumen  $V$ , no se conserva localmente de manera general. Sin embargo, para una configuración homogénea e isotropa, sí se presenta una conservación local, lo que conduce a:

$$dE_t = -pdV, \quad (1.9)$$

Donde el volumen del sistema es proporcional al parámetro de escala,  $V \approx a^3$ . De esta manera se concluye que:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \quad (1.10)$$

Adicionalmente, las ecuaciones de aceleración y de Friedmann provienen de las ecuaciones de campo de Einstein las cuales se pueden reescribir de la forma:

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}, \quad (1.11)$$

Donde  $S_{\mu\nu}$  está escrita en términos del tensor momentum-energía  $T_{\mu\nu}$  tal que:

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda. \quad (1.12)$$

Para continuar, es necesario saber que las componentes del tensor momentum energía están dadas por:

$$T_{00} = \rho, \quad T_{i0} = 0, \quad T_{ij} = a^2 p \tilde{g}_{ij}, \quad (1.13)$$

Con  $g_{\mu\nu}$  correspondiendo a la métrica tridimensional. Por otra parte, las componentes del tensor de Ricci vienen dadas por:

$$R_{00} = 3 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a} + k}{a^2} \right), \quad R_{0i} = 0, \quad R_{ij} = -[2k + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}] \tilde{g}_{ij}, \quad (1.14)$$

Lo que permite obtener los siguientes resultados. La primera relación, la ecuación de Friedmann, corresponde a la componente 00 de las ecuaciones de campo:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3}. \quad (1.15)$$

Por otra parte, la segunda relación proviene de la traza de las ecuaciones de campo y se denomina la **ecuación de aceleración**:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p). \quad (1.16)$$

### 1.3 Problemas clásicos de la cosmología estándar

Aunque los logros obtenidos por el modelo del Big Bang son indubitables gracias a su confirmación a través de las observaciones (Collaboration 2020b, 2020a), al ir más atrás en el tiempo en el que se forma la radiación cósmica de fondo empiezan a manifestarse algunos

problemas. Sucede que las posibles respuestas a estas incógnitas son turbias e insatisfactorias, sobre todo por la increíble coincidencia y ajuste fino que se requiere para que un universo como el nuestro tenga esas cualidades. Estos problemas están relacionados con la existencia de monopolos magnéticos, la curvatura espacial, y la homogeneidad e isotropía del universo (Mukhanov 2005; S. Weinberg 2008; Peter y Uzan 2013; Dimopoulos 2022; Lyth y Liddle 2009; Dodelson 2003).

### ***1.3.1 Problema de horizonte***

El problema de horizonte profundiza en las propiedades presentes en la radiación cósmica de fondo (Penzias y Wilson 1965; Dicke et al. 1965)., donde regiones aparentemente causalmente desconectadas, es decir, que se hallan fuera del horizonte de partículas entre sí, se encuentran en un estado homogéneo. Si se considera la región causalmente conectada en el momento de la última dispersión, cuyo tamaño es  $d_c \sim 349,52[Mpc]$ , este último definido como el instante cuando la temperatura desciende lo suficiente para que los electrones y protones formen los primeros átomos liberando así los fotones observados en la radiación cósmica de fondo, y se compara con el horizonte óptico cuyo tamaño es  $d_p \sim 14,4[Gpc]$ , que corresponde al radio de viaje de esos fotones hoy en día, se obtiene un aproximado de:

$$\frac{d_s}{d_p} \sim 10^4. \quad (1.17)$$

En otras palabras, existe una enorme cantidad de regiones causalmente desconectadas y que, sin embargo, se encuentran a la misma temperatura.

Para solucionar el problema de horizonte, es necesario contar con una expresión para comparar el universo observable con el horizonte de partículas. El resultado que se tiene de dicha comparación es que:

$$\frac{R_{obs}}{D_H} \simeq \frac{\dot{a}(t)}{\dot{a}(t_0)}, \quad (1.18)$$

Donde  $t_0$  representa el tiempo actual,  $R_{obs}$  es el tamaño del universo observable y  $D_H$  corresponde al horizonte de partículas, (distancia que ha viajado un fotón, detectado en estos momentos por nosotros, desde el momento de la última dispersión). Este resultado es cierto para cualquier tiempo  $t < t_0$ . Incorporando esto en la necesidad de restaurar causalidad, es decir,  $R_{obs}(t_i) \leq D_H(t_i)$ , en donde  $t_i$  es el tiempo inicial de inflación, se concluye entonces que la condición para solucionar el problema de horizonte es:

$$\dot{a}(t_i) \leq \dot{a}(t_0), \quad (1.19)$$

Expresión que al dividirla a ambos lados por  $\dot{a}(t_f)$ , conduce a:

$$\frac{\dot{a}(t_i)}{\dot{a}(t_f)} \leq \frac{\dot{a}(t_0)}{\dot{a}(t_f)}, \quad (1.20)$$

Donde  $t_f$  denota el tiempo al final de inflación. Esta conclusión, es una buena condición para estudiar, pero no dice mucho acerca de la duración de inflación para solucionar el problema de horizonte.

Para acabar con esta duda es práctico revelar un par de elementos que se usarán a futuro; el primero de ellos es el concepto de e-folds. El enorme crecimiento del factor de escala es una cuestión que es difícil de manejar con la concepción de tiempo que cotidianamente se emplea. Por esta razón resulta muy práctico introducir una coordenada temporal diferente durante inflación, donde el elemento fundamental sea el crecimiento del factor de escala:

$$dN \equiv da/a = Hdt. \quad (1.21)$$

En la anterior expresión,  $N$  corresponde al número de e-folds. Resolviendo la ecuación diferencial anterior se obtiene:

$$N = \ln\left(\frac{a_f}{a_i}\right), \quad (1.22)$$

En donde  $a_f$  es el factor de escala al final de inflación. El otro elemento por considerar es precisamente el número de e-folds que debe durar el período inflacionario. Para encontrar el número de e-folds, se emplea la ecuación (1.19) y se empiezan a introducir las relaciones conocidas entre cada uno de los  $\dot{a}$ :

$$1 \leq \frac{\dot{a}_0}{\dot{a}_i}. \quad (1.23)$$

Ya que se está considerado una expansión del tipo cuasi-de Sitter, el parámetro  $H$  es constante. De esta manera, se obtiene el resultado:

$$\frac{a_f}{a_i} \geq \frac{\dot{a}_f}{\dot{a}_i} \frac{a_{i,g}}{\dot{a}_0} \sim \left(\frac{t_{GUT}}{t_{i,g}}\right)^{-1/2} \left(\frac{t_{i,g}}{t_0}\right)^{-1/3}. \quad (1.24)$$

En la relación anterior  $t_{i,g}$  y  $t_{GUT}$  hacen referencia a los momentos en los que ocurren la igualdad de densidad de energía entre radiación-materia y, a la escala de tiempo a la cual se presenta la gran unificación  $t_{GUT} \sim 10^{-38}s$ ; en la ecuación, dado que los parámetros de escala son proporcionales a  $t^{1/2}$  y  $t^2/3$  si el componente energético dominante en el universo son la radiación y la materia respectivamente. Todo esto da como resultado que el monto total requerido de inflación,  $N_{req}$ , posea una cota inferior:

$$N_{req} \equiv \ln\left(\frac{a_f}{a_i}\right) \geq 62. \quad (1.25)$$

### 1.3.2 Problema de planitud

El inconveniente de la planitud de nuestro universo surge de la insatisfactoria forma de manejarlo sin un periodo inflacionario. Es tan difícil como intentar equilibrar un lápiz sobre su punta afilada; la falta de un período inflacionario primordial implicaría que, desde su inicio, el universo debería tener un ajuste fino en su parámetro libre de densidad de curvatura,  $\Omega_k \sim 10^{-19}$ . Dado que la teoría no contempla algún mecanismo o justificación para este valor, se convierte en un problema, puesto que un universo plano es una característica inestable (Dimopoulos, 2022). Esta inestabilidad mencionada se observa en la ecuación de Friedmann reescrita como:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \equiv \Omega_k, \quad (1.26)$$

Donde  $\Omega$  corresponde al parámetro de densidad, ( $\Omega = \rho/\rho_c$ ), siendo  $\rho_c$  la densidad de energía crítica; nombrando al termino  $|\Omega - 1|$  como la cantidad de desviación de la planitud, es posible trazar el comportamiento de esta desviación en el pasado tal que:

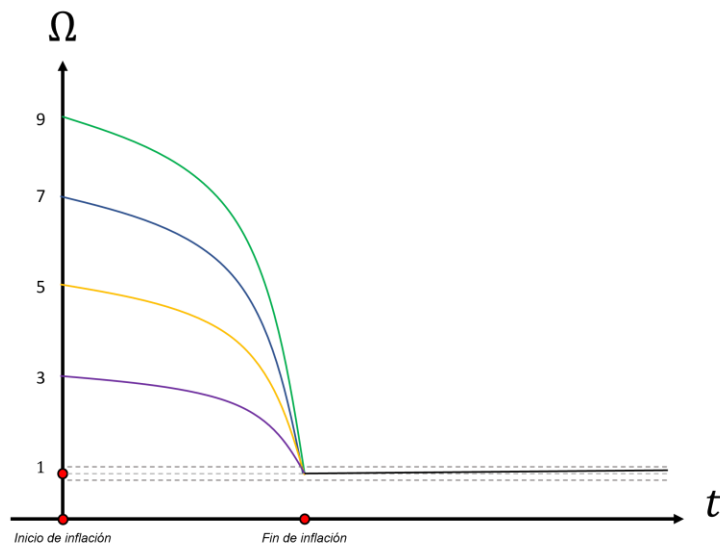
$$\frac{|\Omega_0 - 1|}{|\Omega - 1|} = \left[ \frac{a(t)H(t)}{a(t_i)H(t_0)} \right]^2 = \left[ \frac{\dot{a}(t)}{\dot{a}(t_0)} \right]^2, \quad (1.27)$$

Donde en la relación anterior  $\Omega_0 = \Omega(t_0)$  corresponde al parámetro de densidad actual. Ahora, dado que luego del Big Bang el universo se encuentra dominado por radiación y materia, el factor de escala se comporta siguiendo  $\ddot{a} < 0$ , por lo que  $\dot{a}$  era una función decreciente, lo cual indica que la desviación actual es mayor que la de ese entonces. Lo anterior permite concluir que esta desviación siempre crece a medida que avanza el tiempo. Sin embargo, considerando el valor que se consiguen de las observaciones  $\Omega_k = 0.0007 \pm 0.0019$  (Collaboration 2020b, 2020a), se observa que hoy por hoy el universo luce prácticamente plano lo cual es inviable puesto que es una característica inestable, el ajuste fino necesario para esto no es diferente al de poner un lápiz

parado en su punta recién afilada (alrededor de  $10^{-16}$ , equivalente al orden de magnitud del parámetro de densidad durante nucleosíntesis). Por esta razón es necesaria la introducción de un mecanismo cósmico que genere el efecto de aplanar el espacio como hoy en día lo observamos. Adicionalmente, resulta conveniente hacer que dicho mecanismo no dependa de la curvatura espacial precursora al Big Bang, sino que funja como un atractor, como se observa en la Figura 2.

**Figura 2**

**Solución al problema de planitud**



Esquema en el que se muestra el comportamiento de varios hipotéticos valores del parámetro de densidad representados por líneas continuas; sin importar el valor inicial del parámetro de densidad, inflación lleva a  $\Omega \approx 1$  el cual aumenta ligeramente durante las épocas dominadas por la radiación y la materia, siempre dentro de los rangos de incertidumbres que corresponde a las líneas puntuadas cercanas al 1 en el parámetro de densidad.

Para resolver el problema de planitud, resulta útil usar la información que sugieren las observaciones. Sin embargo, con el fin de obtener un estimado directo se puede considerar que  $H$

prácticamente no cambia; de esta manera se consigue que el número mínimo de e-folds que se necesitan para resolver el problema de planitud obedece la relación:

$$e^{-2N} = \left| \frac{\Omega_k(t_f)}{\Omega_k(t_i)} \right| = \left( \frac{a_f}{a_i} \right)^2. \quad (1.28)$$

Considerando un valor inicial del parámetro de densidad del orden de 1 y un valor final de  $|\Omega_k(t_f)| \leq 10^{-16}$ , se obtiene que  $N \geq 70$ .

El resultado anterior representa la solución al problema de planitud. Es necesario que la inflación primordial dure lo suficiente y que sea un mecanismo tan efectivo que atraiga cualquier valor del parámetro de densidad de curvatura previa al recalentamiento a 0. Y dado que el problema de horizonte se resuelve con un monto menor de e-folds, es recomendado emplear este resultado para asegurar la correcta solución de ambos problemas de la cosmología estándar.

## 2. Modelos Inflacionarios

La solución a los problemas clásicos de la cosmología estándar es la propuesta de un período inflacionario primordial, época del universo en donde, por definición, la segunda derivada del parámetro de escala es positivo ( $\ddot{a} > 0$ ); esta característica del universo puede ser generada por la presencia de un campo escalar cuyo comportamiento es controlado por un potencial (Mukhanov 2005; Peter y Uzan 2013; S. Weinberg 2008; Dimopoulos 2022; Lyth y Liddle 2009; Baumann 2011). Para estudiar los modelos inflacionarios primero es menester obtener las ecuaciones de evolución de un universo que cuenta con un espaciotiempo cuasi-de Sitter, en el cual la expansión es gobernada por un campo escalar homogéneo  $\phi$  llamado inflatón (Mukhanov 2005; Peter y Uzan 2013; S. Weinberg 2008; Dimopoulos 2022; Lyth and Liddle 2009; Baumann 2011). La acción de este campo es de la forma:

$$S = \int \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi) \right] d^4x, \quad (2.1)$$

Donde  $g$  es el determinante de la matriz asociada al tensor métrico, para una explicación más extendida de la acción y su forma ver el Apéndice (A). De esta manera, el tensor momentum-energía viene dado por:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \left( \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + V \right) g_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

De donde se deduce que:

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad P_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi), \quad (2.3)$$

Siendo  $V$  el potencial del campo escalar,  $\dot{\phi}^2/2$  correspondiendo a la densidad de energía cinética, la cual se distingue por la notación  $\rho_{cin}$ , y el parámetro  $P_\phi$ , asociado con la presión del campo escalar. De esta expresión se llega a que  $\rho_\phi + 3P_\phi = 2(\dot{\phi}^2 - V)$  de la cual, junto con la ecuación de aceleración (2.16), se deduce que el universo entra en una fase de expansión acelerada tan pronto como el potencial del campo escalar domine sobre la densidad de energía cinética. Esta relación entre presión y densidad de energía se observa mejor en la ecuación de estado:

$$\omega_\phi = \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\rho_{cin} - V}{\rho_{cin} + V} \quad (2.4)$$

Donde se observa que, si  $\rho_{cin} \leq \frac{1}{2}V$ , el campo escalar dará lugar a un período de expansión acelerada y su parámetro de estado será  $\omega_\phi \leq -\frac{1}{3}$ . Por otra parte, si la relación es de tal forma que  $\rho_{cin} \ll V$ , se tiene un escenario de expansión cuasi-de Sitter, régimen en el cual se encuentra la mayoría de los modelos de inflación. Reemplazando las expresiones presentadas anteriormente en la ecuación de Friedmann, en la ecuación de aceleración y en la solución de la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar homogéneo (Ryder 1996; Steven Weinberg 2005):

$$-\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\partial^\mu \phi) + V'(\phi) = 0, \quad (2.5)$$

Se obtienen las tres ecuaciones de evolución en el período inflacionario del universo:

$$H^2 = \frac{1}{3m_p^2} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right), \quad (2.6)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{3m_p^2} (V - \dot{\phi}^2), \quad (2.7)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0, \quad (2.8)$$

Donde  $V'$  expresa la derivada del potencial con respecto al campo y  $m_p$  corresponde a la masa reducida de Planck. Estas relaciones son las encargadas de describir de qué forma se desarrolla el período inflacionario y dónde, según cada subclase de modelo, se encuentran las configuraciones para diferenciar entre escenarios de inflación.

## 2.1 Inflación de rodadura lenta

El modelo de RL surge como una propuesta de nueva inflación, la cual incorpora una transición de fase de segundo orden durante el periodo inflacionario, haciendo que la inflación dure lo suficiente. Ambas características son necesarias para solucionar el problema de burbujas (zonas que presentan inflación de forma independiente), y los problemas de la cosmología estándar (Mukhanov 2005; Peter y Uzan 2013; Dimopoulos 2022). Nuestras observaciones indican un período de expansión acelerada cuasi-de Sitter  $\rho_{cin} \ll V$ , razón por la que la RL presenta ecuaciones ligeramente diferentes a (2.6) y (2.7):

$$H^2 \approx \frac{1}{3m_p^2} V, \quad (2.9)$$

$$\dot{H} \approx -\frac{1}{2m_p^2} \dot{\phi}^2. \quad (2.10)$$

Por otra parte, la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar (2.8) incluye tres términos, el término de aceleración, el término de fricción y el término de pendiente, los cuales están en función de  $\ddot{\phi}$ ,  $\dot{\phi}$  y  $V'$  respectivamente.

En el marco de la RL, el término de aceleración es significativamente menor que el término de fricción  $|\ddot{\phi}| \ll |V'|$ . La primera y más evidente consecuencia de esta condición se refleja en la forma que toma la ecuación de Klein-Gordon, donde sus términos de fricción y de pendiente son comparables, y recibe el nombre de la ecuación de movimiento en RL:

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'. \quad (2.11)$$

Por otra parte, de la ecuación de aceleración se llega a que la variación del parámetro de Hubble es negativa indicando que el parámetro siempre decrece, y de la misma expresión se encuentra que:

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} + 1. \quad (2.12)$$

Dado que el miembro izquierdo de esta ecuación durante inflación siempre es menor que 1, y que este miembro se identifica con el denominado parámetro de RL  $\epsilon$ , se dice que  $\epsilon$  es menor que la unidad mientras el universo se encuentre en un período inflacionario:

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} \equiv \epsilon < 1. \quad (2.13)$$

Para una profundización sobre este parámetro revisar su respectivo desarrollo en el Apéndice B.1. De este parámetro es posible definir uno que caracterice la evolución de  $\epsilon$  para que la inflación dure el número de e-folds necesarios:

$$\eta \equiv 2\varepsilon - \frac{\dot{\varepsilon}}{2H\varepsilon} = \frac{2\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} + 2\varepsilon, \quad (2.14)$$

Dado que no es suficiente restringir al potencial escalar; este parámetro tiene que cumplir con la condición  $|\eta| \ll 1$  (Apéndice B.2). Aunque se puede seguir construyendo parámetros inflacionarios con el fin de restringir al potencial, no es algo estrictamente necesario; su ventaja se aprovecha más cuando se involucran múltiples campos escalares, pero no será algo que se emplee en este trabajo.

El parámetro  $\eta$  describe, esencialmente, la proporción entre la derivada del primer parámetro de RL con él mismo. De forma similar se pueden formular cuantos parámetros de RL se deseen. La función del primer parámetro de RL es, grosso modo, para delimitar las condiciones en las que se considera un período inflacionario de este tipo. La ecuación de estado efectiva puede escribirse de la forma:

$$\omega_{eff} = 1 - \frac{2}{3}\varepsilon, \quad (2.15)$$

Y varias relaciones pueden reescribirse en función de estos dos parámetros de inflación (el primer parámetro  $\varepsilon$  y el segundo  $\eta$ ). Es entonces posible concluir que la inflación de RL está caracterizada por las siguientes relaciones y su ecuación más representativa:

$$\ddot{a} > 0 \Leftrightarrow \omega < -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \varepsilon < 1 \quad \wedge \quad 3H\dot{\phi} \approx -V'. \quad (2.16)$$

## 2.2 Rodadura ultra lenta

La inflación de RUL retoma todo lo comentado en el modelo de RL y le realiza una modificación a la ecuación en (2.16) como se describe en (Dimopoulos, 2017). Esta subclase de modelo propone que la pendiente del potencial se reduce de manera espontánea, arrastrando con ella al término de fricción, (dado que (2.11) se debe mantener), hasta el punto donde el término de aceleración  $\ddot{\phi}$  comienza a ser representativo para la ecuación de movimiento. En caso de que esto suceda, el término de pendiente decrece al punto de ser mucho menor a los otros dos términos de la ecuación de Klein-gordon consiguiéndose, de esta manera, que la ecuación de movimiento pase a ser:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} \approx 0. \quad (2.17)$$

Hacer que la pendiente del potencial sea tan significativamente pequeña en comparación con los otros dos términos de la ecuación de Klein-Gordon introduce la posibilidad de que las perturbaciones cuánticas no sólo sean las responsables de las inhomogeneidades en la distribución de materia del universo observable sino también de la creación de agujeros negros primordiales (Martin et al., 2013)., brindando así una porción de la gran cantidad de materia oscura de la cual por ahora no tenemos certeza de su naturaleza o de cómo tratarla. Sin embargo, investigaciones recientes muestran su desacuerdo con esta idea, exponiendo que la RUL no podría generar estas estructuras (Germani y Prokopec, 2017).

Para avanzar con un desarrollo profundo de este escenario inflacionario es necesario introducir la ecuación diferencial que se consigue de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi en este contexto:

$$H'' = \frac{3H}{2m_p^2}, \quad (2.18)$$

La manera de conseguir la relación anterior puede ser encontrada dentro del Apéndice C junto a una profundización en la sección correspondiente al Apéndice D. Resolviendo la ecuación diferencial se consiguen dos ecuaciones, una del parámetro de Hubble  $H$  en función de la evolución del campo escalar y otra para  $\dot{\phi}$  :

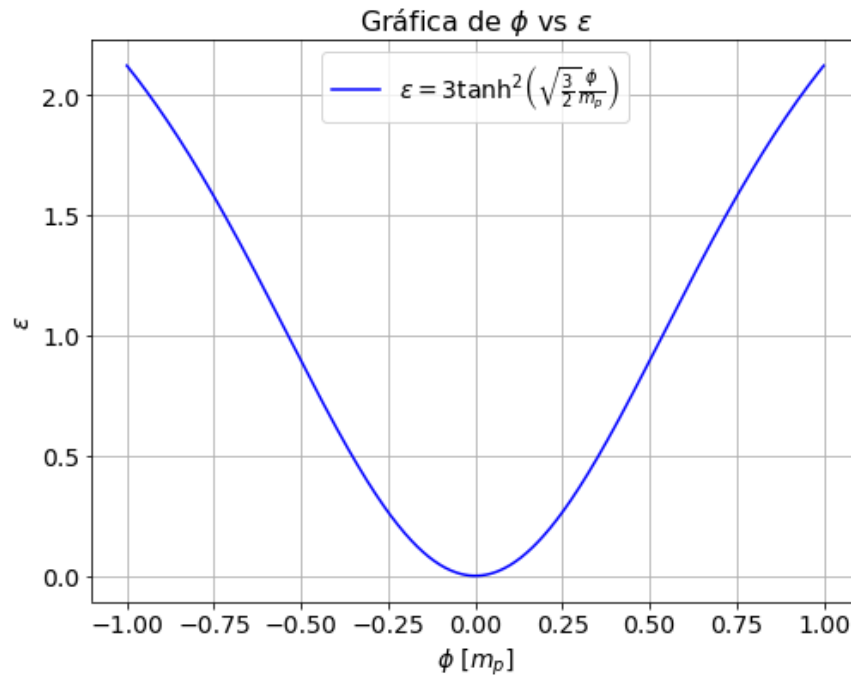
$$H = \frac{\sqrt{V_0}}{\sqrt{3}m_p} \cosh\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right), \quad (2.19)$$

$$\dot{\phi} = -\sqrt{2V_0} \sinh\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right), \quad (2.20)$$

Donde  $V_0$  es el potencial con el que inicia este periodo de rodadura ultra lenta. A partir de la ecuación (2.19) se pueden obtener los parámetros de rodadura, comenzando con el  $\varepsilon$  y siguiendo su definición observada en (2.13) conseguimos que:

$$\varepsilon_{RUL} = 3 \tanh^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right), \quad (2.21)$$

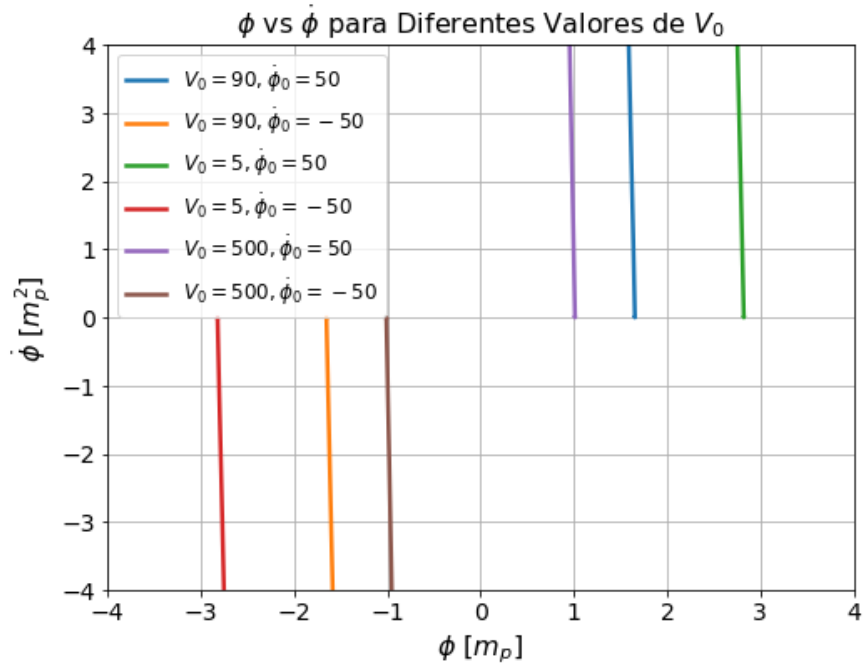
Cuyo desarrollo se puede seguir en el Apéndice D.2. Dado que para que el modelo se encuentre en un periodo inflacionario se necesita que  $\varepsilon \ll 1$ , el valor del campo debe ser  $\phi \approx 0$ , donde la forma del campo tendría la forma vista en la Figura 3.

**Figura 3****Parámetro de rodadura de un periodo de inflación de rodadura ultra lenta**

Evolución del primer parámetro de rodadura en el escenario de RLU, donde se consideran unidades naturales de forma que  $m_p = 1$  y  $\phi$  es adimensional, donde se observa que en este escenario se restringe el valor de  $\varepsilon$  para que no exista conflicto con la característica de este escenario de no ser una solución atractora.

Adicionalmente, es posible construir el diagrama de fase en este escenario inflacionario, donde precisamente se observa su naturaleza no atractora en la Figura 4. Dado que depende fuertemente de las condiciones iniciales consideradas en el modelo. Esta cuestión convertiría a los problemas de planitud y el de horizonte en una búsqueda por conseguir las condiciones iniciales precisas para su solución.

**Figura 4****Espacio de fase del escenario de RUL**



Espacio de fase del escenario inflacionario de RUL, se observa una convergencia en diferentes valores que dependen de las condiciones iniciales consideradas, ciertamente similar al comportamiento observado en (Motohashi et al., 2015)., pero considerando valores iniciales reales para el potencial (únicamente positivos dada las ecuaciones (2.19)).

Para terminar, es importante recalcar que la RUL sólo puede ser considerada como una etapa transitoria de cualquier modelo inflacionario, ya que, según lo presentado, no consigue eliminar el ajuste fino requerido para solucionar los problemas de la cosmología estándar, en contraste con la RL. Por esta razón es reconocida únicamente como una etapa restringida a una cierta cantidad de e-folds para conseguir esas ligeras inhomogeneidades en la distribución de energía generadoras de agujeros negros primordiales. Este proyecto de investigación explora las bondades del escenario de RC que será explicado a continuación, el cual no habría sido posible sin la comprensión del escenario de RUL.

### 2.3 Inflación de rodadura constante

La RC combina las ideas de los dos escenarios anteriormente discutidos, RL y RUL, donde, en lugar de eliminar uno de los términos en la ecuación de Klein-Gordon, se modela una relación que funcione como interpolación de ambos casos (Motohashi, Starobinsky, y Yokoyama 2015; Motohashi y Starobinsky 2017). Este resulta ser un marco de pensamiento muy atractivo, con múltiples cualidades y puntos por explorar acerca de un posible periodo inflacionario de este tipo. El ansatz planteado es el siguiente:

$$\ddot{\phi} \approx -(3 + \alpha)H\dot{\phi}, \quad (2.22)$$

Donde el valor de  $\alpha$  es arbitrario, aunque es bastante visible el significado de la relación, es curioso e interesante el parentesco que guarda con el segundo parámetro de rodadura como se ve en (2.14). Al ser una interpolación, si  $\alpha = -3$  se llega al régimen de RL y si  $\alpha = 0$  se alcanza la condición para entrar en la RUL.

En este contexto, uno puede obtener varias soluciones tentativas para el parámetro de Hubble; sin embargo, no todas ellas poseen la misma naturaleza inflacionaria. A continuación, se presentan las tres soluciones más sencillas.

La solución de la forma:

$$H = M e^{\pm \sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}}, \quad (2.23)$$

Da como resultado una solución inflacionaria de tipo ley de potencia (Lucchin, 1985). Con esta relación para el parámetro de Hubble se consigue que la forma del potencial en función del campo sea:

$$V(\phi) = -\alpha M^2 m_p^2 e^{\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}}. \quad (2.24)$$

Adicionalmente, se consigue una relación del campo  $\phi$  en términos del tiempo cósmico:

$$\phi = \sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} m_p \ln[(3+\alpha)Mt], \quad (2.25)$$

Al introducir este resultado dentro de (2.23) se obtiene la dependencia del  $H$  respecto a  $t$ :

$$H = \frac{1}{(3+\alpha)t'}. \quad (2.26)$$

Concluyendo que el  $a \propto t^{1/(3+\alpha)}$ , si se desea explorar a mayor profundidad el procedimiento revisar lo desarrollado dentro del Apéndice E.1.1. Esta subclase de modelo resultó siendo excluida debido a su poca fidelidad con los datos observacionales puesto que tanto la relación tensor escalar como el índice escalar espectral resultan ser muy altos (Dimopoulos, 2022).

Por otra parte, la solución del tipo:

$$H = M \cosh\left(\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right), \quad (2.27)$$

Tiene que, para los valores de  $\alpha$  en el intervalo de RL y RUL, el potencial resulta tener un mínimo en  $\phi = 0$ . Por esta razón se debe asumir una transición de fase en ese punto, una idea similar a lo que se hace en inflación híbrida (Linde, 1994), y para el rango de  $\alpha < -3$  se llega a un escenario similar a inflación cima de colina (Boubekeur y Lyth, 2005).

De manera similar, el potencial que se construye con esta solución del parámetro de Hubble tiene la forma:

$$V(\phi) = 3M^2 m_p^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{6} \left[ 1 - \cosh \left( \sqrt{2(3 + \alpha)} \frac{\phi}{m_p} \right) \right] \right\}, \quad (2.28)$$

Que, de igual forma a la solución anterior, se consigue una relación para el campo escalar en términos del tiempo cósmico:

$$\phi = m_p \sqrt{\frac{2}{3 + \alpha}} \ln \left[ \coth \left( \frac{3 + \alpha}{2} Mt \right) \right], \quad (2.29)$$

Al introducir este resultado dentro de la ecuación (2.27) la expresión resultante para el parámetro de Hubble dependiente del tiempo  $t$  es:

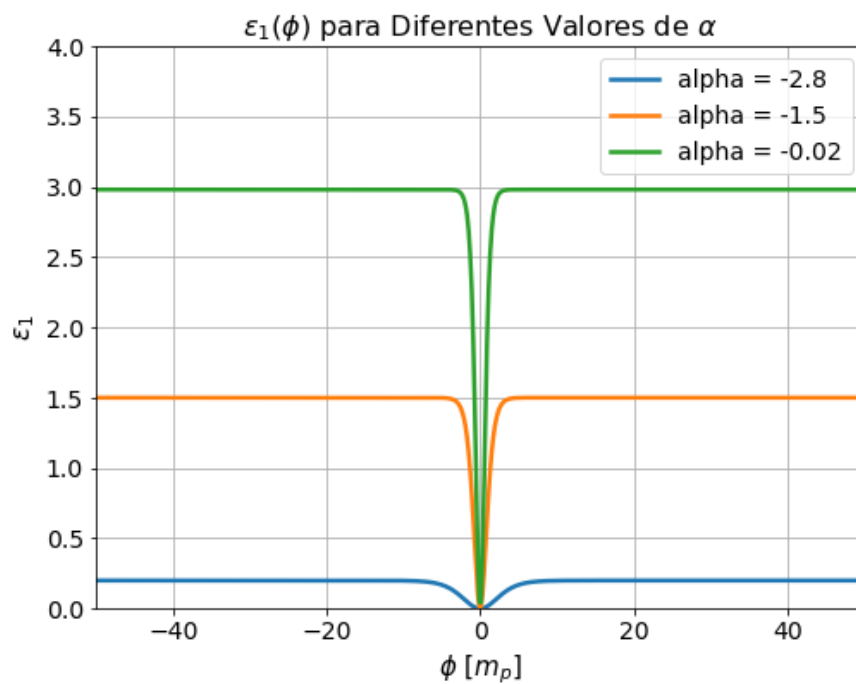
$$H = M \coth[(3 + \alpha)Mt], \quad (2.30)$$

Que permite encontrar la proporcionalidad de  $a \propto \sinh^{\frac{1}{3+\alpha}}[(3 + \alpha)Mt]$ , de igual forma, para un seguimiento detallado ver el Apéndice E.1.2. Para terminar, la inflación híbrida tiene varios problemas con el monto de inflación exigido por las observaciones (Dimopoulos, 2022).; en contraste, la inflación cima de colina es bastante satisfactoria en relación con las mismas (Dimopoulos, 2022)., razón por la cual la RC se trabaja mayormente con un valor de  $\alpha$  en este rango. Y es en este régimen donde la inflación de RC demuestra ser un escenario muy interesante; las predicciones sobre el valor del índice espectral y sobre la razón tensor-escalar son coherentes con las observaciones (Ghersi et al., 2019). Aun considerando estos excelente resultados sucede que la evolución del primer parámetro de rodadura es anormal bajo la solución (2.27) como se observa en la Figura 5, esta proporcionalidad entre el primer parámetro de rodadura  $\varepsilon$  y  $\alpha$  es un inconveniente dado que se puede presentar que el parámetro de rodadura sea mayor a la unidad en

etapas tempranas del periodo inflacionario, adicionalmente, dado que no aumenta dicho valor, los escenarios inflacionarios que cuenten con valores insuficientes necesitan un mecanismo que los haga aumentar como sería el caso de una inflación híbrida, por lo tanto, valdría más la pena explorar las soluciones presentadas en Anguelova et al., (2018).

### Figura 5

**Evolución del primer parámetro de rodadura, segunda solución del parámetro de Hubble en rodadura constante**



La evolución del primer parámetro de rodadura a medida que el campo evoluciona a su mínimo real en el potencial, se observa la necesidad de un mecanismo externo que hiciera aumentar el valor del parámetro de rodadura para poder concluir con el periodo inflacionario.

Por último, la solución de la forma:

$$H = M \sinh \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right), \quad (2.31)$$

Corresponde a una expansión desacelerada  $\ddot{a} < 0$  por lo que no se tiene un modelo inflacionario. Para esta solución se produce la forma de potencial:

$$V(\phi) = -3M^2 m_p^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{6} \left[ 1 + \cosh \left( \sqrt{2(3 + \alpha)} \frac{\phi}{m_p} \right) \right] \right\}, \quad (2.32)$$

Por parte del campo escalar, se consigue la siguiente relación:

$$\phi = m_p \sqrt{\frac{2}{3 + \alpha}} \ln \left[ \tan \left( -\frac{3 + \alpha}{2} Mt \right) \right]. \quad (2.33)$$

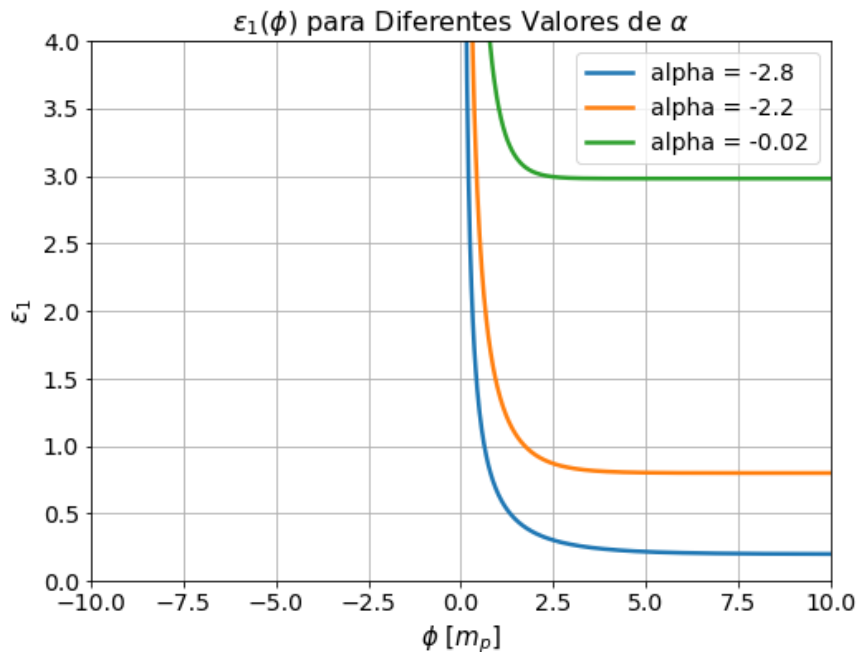
Al introducir este valor dentro de (2.31) se consigue expresar al parámetro de Hubble en términos del tiempo  $t$ :

$$H = M \coth[(3 + \alpha)Mt]. \quad (1.34)$$

Permitiendo obtener una expresión del parámetro de escala tal que  $a \propto \sin^{\frac{1}{3+\alpha}}[(3 + \alpha)Mt]$ , cuyo desarrollo puede ser visitado en el Apéndice E.1.3, es importante mencionar que, aunque a primera vista se consigue un  $\ddot{a} < 0$  en realidad no se obtiene un valor negativo para esta cantidad. En un trabajo reciente encuentra que esta solución se comporta de igual forma a un atractor y cuyo primer parámetro de rodadura tiene un comportamiento ideal para salir del periodo inflacionario como se observa en la Figura 6, sin embargo, el modelo es excluido por las observaciones (Yi y Gong, 2018).

### Figura 6

**Evolución del primer parámetro de rodadura, tercera solución del parámetro de Hubble en rodadura constante**



Evolución del primer parámetro de rodadura a medida que se acerca al mínimo verdadero del potencial ( $\phi = 0$ ), sin importar el valor de  $\alpha$  el parámetro  $\epsilon$  aumenta para lograr salir del periodo inflacionario. Sin embargo, es importante notar que para valores cercanos a RUL ( $\alpha \approx 0$ ) pueden existir ciertas incompatibilidades ya que al empezar con un valor mayor que 1 el modelo terminaría inflación en etapas muy tempranas.

Sin duda, la RC resulta ser un escenario bastante atractivo, no sólo porque abarca varias subclases de modelos según la solución que se quiera considerar, sino porque se puede conseguir la forma del potencial más adecuada para las observaciones.

### 3. Conclusiones

Frente a los desarrollos presentados durante este proyecto se muestran las bondades que brinda trabajar con un escenario inflacionario de rodadura constante. Desde su concepción como una interpolación de dos escenarios relacionados a su pendiente hasta la futura proyección con soluciones más complejas y sofisticadas. En su punto de partida, donde este trabajo se enfocó, el estudio de rodadura lenta es comúnmente explorado para adentrarse en el campo de la inflación primordial precisamente a razón de que las observaciones de la radiación cósmica de fondo sugieren que inflación es quasi-de Sitter y por la simplificación en la ecuación de evolución del campo escalar. Por su parte, la rodadura ultra lenta se diferencia enormemente de los otros escenarios involucrados por su característica no atractora, condición que no conduciría a la resolución de los problemas de la cosmología estándar ni tampoco cumpliría con el deseo de eliminar las condiciones iniciales previas a inflación, conclusión que surge precisamente en el diagrama de fase del escenario donde es fuertemente dependiente de las condiciones iniciales, aparte de esto, RUL genera un parámetro de rodadura que sugiere trabajar en valores cercanos al cero para conseguir que se de este posible escenario.

Respecto a lo obtenido para el escenario de rodadura constante, su ansatz brinda una manipulación de los parámetros de aceleración y de pendiente de ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar, esto de por si abre las puertas a obtener grandes diferencias dentro de la misma solución para el parámetro de Hubble, sin embargo, los resultados de la solución (2.27) respecto a su parámetro de rodadura no permiten alejarse demasiado del escenario de RL, y aun así sería necesario introducir un mecanismo que produzca el final del periodo inflacionario ( $\epsilon \approx 1$ ) como se plantea en los escenarios de inflación híbrida. Por su parte, la solución (2.31) resulta atractiva por la forma de evolución del parámetro de rodadura, comenzando con un valor inferior a la unidad

para que al acercarse al mínimo en el potencial este parámetro aumente, terminando de esta manera con el periodo inflacionario, es importante mencionar que a medida que el valor de  $\alpha$  se acerque a 0 (llegando a RUL) los valores iniciales del parámetro de rodadura serán muy grandes para que la inflación se desarrolle de la forma deseada.

Por último, como proyección hacia el área de teoría de perturbaciones cosmológicas, ambas soluciones de rodadura constante llegan a tener sus pros y contras, la solución de coseno hiperbólico en función del campo permite una simplificación considerable con los parámetros de rodadura dado que los  $\epsilon_n$  pares son iguales entre sí y la misma característica la comparten los  $n$  impares, esto facilita las operaciones a la hora de trabajar con la perturbación en la curvatura. Por otra parte, si bien la solución expresada como función de seno hiperbólico del campo no tiene esta característica repetitiva en sus parámetros de rodadura, se puede conseguir que su tercer parámetro de rodadura sea el producto de los dos anteriores y trabajar únicamente con estos dos primeros, consiguiendo de forma similar simplificar las ecuaciones dentro del contexto de la teoría de perturbaciones cosmológicas.

### Referencias Bibliográficas

- Abbott, L., Farhi E., y Wise, M. (1982). Particle Production in the New Inflationary Cosmology. *Physics Letters B*, 117, ISSUES 1-2. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90867-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)90867-X).
- Albrecht, A., Steinhardt P., Turner M., y Wilczek F. (1982). Reheating an Inflationary Universe. *Physical Review Letters*, 48 (1437). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1437>.
- Allahverdi, R., Brandenberger R., Cyr-Racine F., y Mazumdar A. (2010). Reheating in Inflationary Cosmology: Theory and Applications. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 60. <https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.012809.104511>.
- Anguelova, L., Suranyi p., y Wijewardhana L. (2018). Systematics of Constant Roll Inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/02/004>.
- Assis, Andre K. T., and Marcos C. D. Neves. (1995). History of the 2.7 k Temperature Prior to Penzias and Wilson. *Apeiron* 2 (3): 79–87.
- Baumann, D. (2011). Inflation. In *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Physics of the Large and the Small*. [https://doi.org/10.1142/9789814327183\\_0010](https://doi.org/10.1142/9789814327183_0010).
- Boubekeur, L., y Lyth D. (2005). Hilltop inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2005. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2005/07/010>.
- Cembranos, J., Garay L., Parra, A. y Sánchez J. (2023). Late vacuum choice and slow roll approximation in gravitational particle production during reheating. *General relativity and quantum cosmology*, 3. <https://arxiv.org/abs/2301.04674>.

- Collaboration, Planck. (2020) Planck 2018 Results - VI. Cosmological Parameters, *A&A*. 641 (A6). <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>.
- Collaboration, Planck. (2020) Planck 2018 Results 1 St. Overview and the Cosmological Legacy of Planck. *A&A*, 641 (A1) <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833880>.
- Dicke, R., Peebles, P., Roll, p. y Wilkinson, D. (1965). Cosmic Black-Body Radiation. *Astrophysical Journal*, 142 (414D). <https://doi.org/10.1086/148306>.
- Dimopoulos, K. (2017). Ultra slow-roll inflation demystified. *Physics Letters B*, 775. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.10.066>.
- . 2022. *Introduction to Cosmic Inflation and Dark Energy*. CRC Press.
- Scott D. (2003). *Modern Cosmology*. Amsterdam: Academic Press.
- Friedman, A. (1922). Über Die Krümmung Des Raumes. *Zeitschrift für Physik* 10 (1): 377–86.
- Germani, C. y Prokopec T. (2017). On primordial black holes from an inflection point. *Physics of the Dark Universe*, 18. <https://doi.org/10.1016/j.dark.2017.09.001>.
- Gálvez J., Zucca A., y Frolov A. (2019). Observational Constraints on Constant Roll Inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2019. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/05/030>.
- Guendelman, E. y Herrera, R. (2023). Unification: Emergent universe followed by inflation and dark epochs from multi-field theory. *General Relativity and Quantum Cosmology*, 2. <https://arxiv.org/abs/2301.10274>.
- Guth, A. (1981). The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Physical Review. D* 23 (347). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.23.347>.

- Guth, A., Weinberg, E. (1983). Could the Universe Have Recovered from a Slow First Order Phase Transition? *Nuclear Physics B*. 212, Issue 2. [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(83\)90307-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(83)90307-3).
- Hubble, E. (1929). A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science* 15 (3). <https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168>.
- Kofman, L., Linde, A. y Starobinsky A. (1994). Reheating after inflation. *Physical Review Letter B*, 73(3195). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.3195>.
- Linde, A. (1982). A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Physical Review Letter B*, 108 Issue 6. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)91219-9](https://doi.org/10.1016/0370-2693(82)91219-9).
- Linde, A. (1994). Hybrid inflation. *Physics Review D*, 49. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.748>.
- Lucchin, F. y Matarrese S. Power Law Inflation. (1985). *Physics Review D*, 32.
- Lyth, D. y Liddle A. (2009). *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*.
- Martin, J., Motohashi, H. y Suyama T. (2013). Ultra Slow-Roll Inflation and the non-Gaussianity Consistency Relation. *Physics Review D*, 87 (023514). <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.023514>.
- Motohashi, H. y Starobinsky A. (2017). Constant-roll inflation: confrontation with recent observational data. *EPL* 117 (3): 39001. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/117/39001>.

- Motohashi, H., Starobinsky, A. y Yokoyama, J. (2015). Inflation with a constant rate of roll. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 09 (018). <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2015/09/018>.
- Mukhanov, V. (2005). *Physical Foundations of Cosmology*. Oxford: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511790553>.
- Penzias, A. (1979). The origin of the elements. *Review of Modern Physics*, 51 (425). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.51.425>.
- Penzias, A. y Wilson, R. (1965). A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s. *Astrophys. J*, 142. <https://doi.org/10.1086/148307>.
- Peter, P., y Uzan, J. (2013). *Primordial Cosmology*. Oxford Graduate Texts. Oxford University Press.
- Robertson, H. (1935). Kinematics and World-Structure. *The Astrophysical Journal*, 82.
- Ryder, L. (1996). *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511813900>.
- Walker, A. (1937). On Milne's Theory of World-Structure. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2 (1).
- Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. OUP Oxford.
- Weinberg, S. (2005). *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139644167>.
- Wilson, R. (1979). The cosmic microwave background radiation. *Review of Moderns Physics*, 51, (433). <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.51.433>.
- Wu, K., Lahav O.y Rees, M. (1999). The large-scale smoothness of the Universe. Edited by H. Sato and N. Sugiyama. *Nature* 397 (225). <https://doi.org/10.1038/16637>.

- Yadav, J., Bharadwaj, S., Pandey, B. y Seshadri T. (2005). Testing homogeneity on large scales in the Sloan Digital Sky Survey Data Release One. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 364 (601). <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09578.x>.
- Yi, Z. y Gong Y. (2018). On the Constant-Roll Inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2018. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/03/052>.

## Apéndices

### Apéndice A. Evolución de un campo inflacionario único

La manera más natural de conseguir la ecuación de klein-gordon que describe la evolución del campo en cuestión es a través de la acción. La acción de un campo escalar es una magnitud descrita de la forma:

$$S = \int L dx^4, \quad (\text{A.1})$$

Que en el caso de este proyecto de investigación y para un campo escalar típico la densidad Lagrangiana se escribe como:

$$L = \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right]. \quad (\text{A.2})$$

Considerando un universo plano de FLRW con una métrica  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, a^2, a^2, a^2)$ , el determinante de la métrica es  $g = -a^6$  y a razón de que el inflaton es considerado como un campo escalar homogéneo en este proyecto de investigación, el Lagrangiano puede ser expresado como:

$$L = a^3 \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right]. \quad (\text{A.3})$$

Que al hacer uso de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad (\text{A.4})$$

Se obtienen los siguientes términos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= 3a^2 \dot{a} \ddot{\phi} + a^3 \dot{\phi}, \\ \frac{\partial L}{\partial \phi} &= -a^3 V'(\phi). \end{aligned}$$

Donde nuevamente el punto denota derivada con respecto del tiempo  $t$  y la prima derivada respecto al campo  $\phi$ . Finalmente, al dividir todo entre  $a^3$  se obtiene la ecuación de klein-gordon mostrada en (3.8), mostrada nuevamente aquí:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - V'(\phi) = 0. \quad (\text{A.5})$$

## Apéndice B. Desarrollo a ecuaciones de RL

### Apéndice B.1.: Parámetros $\varepsilon$ y $\epsilon$

A lo largo del texto el primer parámetro de rodadura fue llamado como  $\varepsilon$  siendo igual a  $-\dot{H}/H^2$ , sin embargo, en inflación de rodadura lenta es posible obtener que,  $\epsilon \simeq \varepsilon$  donde  $\epsilon$  es definido como  $1/2 m_p (v'/v)^2$ . Con esto anterior se restringiría la pendiente del potencial. La manera de obtener la relación es empleando la ecuación de Friedmann en rodadura lenta:

$$H^2 \simeq \frac{V}{3m_p^2}. \quad (\text{B.1})$$

De forma que la derivada con respecto del tiempo del parámetro de Hubble sería tal que:

$$\begin{aligned} \dot{H} &\simeq \frac{d}{dt} \left( \frac{V^{1/2}}{\sqrt{3}m_p} \right). \\ &\simeq \frac{1}{2\sqrt{3}m_p} V^{-1/2} V' \dot{\phi}. \end{aligned}$$

Que al despejar  $\dot{\phi}$  de la ecuación de Klein-Gordon en rodadura lenta ( $3H\dot{\phi} \simeq -V'$ ) se obtiene que:

$$\dot{H} \simeq \frac{-V'^2 V^{-1/2}}{6\sqrt{3}m_p \frac{V^{1/2}}{\sqrt{3}m_p}} = -\frac{1}{6} \frac{V'^2}{V}. \quad (\text{B.2})$$

Para terminar, al introducir estos dos términos en la definición del primer parámetro de rodadura:

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{\frac{V'^2}{6V}}{\frac{V}{3m_p^2}} = \frac{1}{2} m_p^2 \left( \frac{V'}{V} \right)^2 \Rightarrow \varepsilon \simeq \epsilon \Rightarrow \epsilon < 1. \quad (\text{B.3})$$

### Apéndice B.2: Segundo parámetro de rodadura lenta

Los parámetros de rodadura lenta se suelen definir a partir del parámetro que le precede, de forma que el segundo parámetro  $\eta$  se define como:

$$\eta = \varepsilon - \frac{\dot{\varepsilon}}{2H\varepsilon}. \quad (\text{B.4})$$

En pocas palabras, la función de este parámetro es asegurar que el periodo inflacionario de RL dure lo suficiente para solucionar exitosamente los problemas de la cosmología estándar. Para ver esto con la forma de los potenciales es necesario emplear la definición del parámetro  $\varepsilon$ , aprovechando su similaridad con  $\varepsilon$  durante RL.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} m_p^2 \left( \frac{V'}{V} \right)^2. \\ \dot{\varepsilon} &= \frac{1}{3H} m_p^2 \left[ \frac{V'^4}{V^3} - \frac{V'^2 V''}{V^2} \right]. \\ \Rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon H} &= 2m_p^2 \frac{V'^2}{V^2} - 2m_p^2 \frac{V''}{V}. \end{aligned}$$

De este desarrollo y a partir de la ecuación (B.4) reconocemos al segundo parámetro de rodadura lenta ( $\eta$ ) como:

$$\eta = m_p^2 \frac{V''}{V}, \quad (\text{B.5})$$

Relación que bajo la condición  $\eta \ll 1$  asegura una duración suficiente de RL y muestra que  $|V''| \ll H^2$  al emplear la ecuación de Friedmann en la relación anterior.

### Apéndice C. Ecuaciones de Hamilton-Jacobi

Esta ecuación resulta ser de gran importancia dadas las soluciones que surgen de la ecuación. Para empezar, hay que hallar la derivada con respecto del tiempo del parámetro de Hubble  $\dot{H}$ :

$$\dot{H} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2.$$

Introduciendo en la ecuación anterior la relación de Friedmann se llega de forma directa a que:

$$\dot{H} = -\frac{1}{2m_p^2} \dot{\phi}^2. \quad (\text{C.1})$$

Es posible simplificar esta ecuación empleando la regla de la cadena en el lado izquierdo de la relación:

$$\frac{dH}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{2m_p^2} \dot{\phi}^2. \quad (\text{C.2})$$

Dando como resultado a una ecuación que permite bastante desarrollo en los modelos de RUL y RC:

$$H' = -\frac{1}{2m_p^2} \dot{\phi}, \quad (\text{C.3})$$

Y al retomar este resultado en la ecuación de Friedmann se consigue una relación adicional:

$$H'^2 - \frac{3}{2m_p^2} H^2 = -\frac{1}{2m_p^4} V. \quad (\text{C.4})$$

En esencia, las ecuaciones (C.3) y (C.4) son estrictamente equivalentes a las ecuaciones (2.6) y (2.7), se diferencian únicamente en que se encuentran relacionadas a la evolución del campo  $\phi$ . Aunque a primera vista no lucen de mucha utilidad, al derivar con respecto del tiempo y realizando el mismo procedimiento una vez más a (C.3) conseguimos una ecuación diferencial interesante:

$$\begin{aligned}\frac{dH'}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{1}{2m_p^2} \frac{d\dot{\phi}}{dt}, \\ H'' \dot{\phi} &= -\frac{1}{2m_p^2} \ddot{\phi}. \\ \Rightarrow -2m_p^2 H'' &= \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}.\end{aligned}\tag{C.5}$$

De esta última línea se pueden encontrar soluciones al parámetro de Hubble posibles para según el escenario que se desee estudiar, por ejemplo, en el régimen de RUL la ecuación tomara la forma de (2.18).

## Apéndice D. Desarrollo a ecuaciones de RUL

### Apéndice D.1. Proceso para obtener $\dot{\phi}$

Para obtener la relación (2.20) es necesario conseguir primero la derivada de (2.19) con respecto del campo:

$$H' = \sqrt{\frac{V_0}{3}} \frac{1}{m_p^2} \sqrt{\frac{3}{2}} \sinh\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right). \quad (\text{D.1})$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = -2m_p^2 H' = -\sqrt{2V_0} \sinh\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right). \quad (\text{D.2})$$

### Apéndice D.2. Obtención del primer parámetro de rodadura

Para obtener el primer parámetro de rodadura en el escenario de RUL se emplea la definición usual de parámetro  $\varepsilon$  junto con:

$$\dot{H} = \frac{dH}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = H' \dot{\phi}.$$

Que a partir de las dos ecuaciones de la subsección anterior es directo obtener a  $\dot{H}$ :

$$\dot{H} = \sqrt{\frac{V_0}{2}} \frac{1}{m_p^2} \sinh\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right) \cdot (-\sqrt{2V_0}) \sinh\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right). \quad (\text{D.3})$$

$$\Rightarrow \dot{H} = \frac{V_0}{m_p^2} \sinh^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right). \quad (\text{D.4})$$

Finalmente se obtiene que la forma del primer parámetro de rodadura durante un periodo de RUL es tal que:

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\frac{V_0}{m_p^2} \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right)}{\frac{V_0}{3m_p^2} \cosh^2 \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right)}. \quad (\text{D.5})$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 3 \tanh^2 \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right). \quad (\text{D.6})$$

## Apéndice E. Desarrollo a las ecuaciones de rodadura constante

### Apéndice E.1. Ecuación del potencial en términos del campo

Para encontrar esta relación es necesario emplear la ecuación de Friedmann junto con la ecuación obtenida en el formalismo de Hamilton-Jacobi (D.2).

$$\dot{\phi} = -2m_p^2 H'. \quad (\text{E.1})$$

$$3m_p^2 H = \frac{\dot{\phi}}{2} + V. \quad (\text{E.2})$$

$$\Rightarrow V = m_p^2 [3H - 2H'^2]. \quad (\text{E.3})$$

Esta relación es crucial para el análisis y estudio de la evolución del potencial durante inflación.

#### *Apéndice E.1.1. Tratamiento de la primera solución de RC*

Considerando la expresión para el parámetro de Hubble según (2.23) reescrita aquí:

$$H = M e^{\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}}, \quad (\text{E.4})$$

Y cuya derivada respecto al campo tendría la forma:

$$H' = \frac{M}{m_p} \sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} e^{\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}}. \quad (\text{E.5})$$

Introduciendo estos dos valores en la ecuación (E.3) se produce el siguiente desarrollo:

$$V(\phi) = m_p^2 \left( 3M^2 e^{\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}} - 2m_p^2 \frac{M^2}{2m_p^2} (3+\alpha) e^{\pm \sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}} \right). \quad (\text{E.6})$$

$$V(\phi) = m_p^2 \left( 3M^2 e^{\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}} - 3M^2 e^{-\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}} - \alpha M^2 e^{\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}} \right). \quad (\text{E.7})$$

$$\Rightarrow V(\phi) = -\alpha M^2 m_p^2 e^{\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}}. \quad (\text{E.8})$$

Para conseguir la expresión que describe al campo escalar del inflatón  $\phi$  en términos del tiempo cósmico es necesario resolver la ecuación (E.1) al sustituir (E.5).

$$\frac{d\phi}{dt} = -2m_p M \sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} e^{\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}}. \quad (\text{E.9})$$

$$\int e^{-\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}} d\phi = -M m_p \sqrt{2(3+\alpha)} \int dt. \quad (\text{E.10})$$

$$m_p \sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} e^{-\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}} = M m_p \sqrt{2(3+\alpha)} (t - t_0). \quad (\text{E.11})$$

$$\Rightarrow \phi = \sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} m_p \ln[(3+\alpha)M(t-t_0)], \quad (\text{E.12})$$

Donde  $t_0$  corresponde a una constante de integración. Y al introducir este valor dentro de la solución del parámetro de Hubble se consigue de forma directa que:

$$H = \frac{1}{(3+\alpha)(t-t_0)}. \quad (\text{E.13})$$

Finalmente, haciendo uso de la definición del parámetro de Hubble ( $\dot{a}/a$ ) se consigue que:

$$a \propto t^{\frac{1}{(3+\alpha)}}. \quad (\text{E.14})$$

### *Apéndice E.1.2. Tratamiento de la segunda solución de RC*

Ahora, para un parámetro de Hubble de la forma:

$$H = M \cosh \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right), \quad (\text{E.15})$$

Idéntica a la vista en (2.27), se obtiene una derivada respecto al campo tal que:

$$H'(\phi) = \frac{M}{m_p} \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \sinh \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right). \quad (\text{E.16})$$

De forma que el potencial se obtiene siguiendo:

$$V(\phi) = m_p^2 \left[ 3M^2 \cosh \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right) - 2m_p^2 M^2 \frac{(3 + \alpha)}{2m_p^2} \sinh \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right) \right].$$

$$V(\phi) = m_p^2 \left[ 3M^2 - \alpha M^2 \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right) \right].$$

$$V(\phi) = 3M^2 m_p^2 \left[ 1 - \frac{2\alpha}{6} \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right) \right].$$

$$\Rightarrow V(\phi) \& = 3M^2 m_p^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{6} \left[ 1 - \cosh \left( \sqrt{2(3 + \alpha)} \frac{\phi}{m_p} \right) \right] \right\}. \quad (\text{E.17})$$

Para llegar a la última línea es necesario recordar que  $2\sinh^2(x) = \cosh(2x) - 1$ .

Adicionalmente, hay que mencionar que para valores de  $\alpha < -3$  el potencial tendría la forma:

$$V(\phi) = 3M^2 m_p^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{6} \left[ 1 - \cos \left( \sqrt{2|3 + \alpha|} \frac{\phi}{m_p} \right) \right] \right\}. \quad (\text{E.18})$$

Ahora, en relación con el campo y de manera idéntica a la solución pasada, es necesario resolver la integral implícita en la ecuación (E.1).

$$\int \frac{d\phi}{\sinh\left(\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right)} = -2Mm_p \sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \int dt. \quad (\text{E.19})$$

Resolviendo el lado izquierdo de la relación:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\phi}{\sinh\left(\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right)} &= \int \frac{d\phi}{\sinh\left(\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right)} \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right)}{\sinh\left(\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right)} \\ &= \int \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right) d\phi}{\left[\cosh^2\left(\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right) - 1\right]}. \end{aligned}$$

Considerando la siguiente sustitución simple:

$$u = \cosh\left(\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right), \quad m_p \sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} du = \sinh\left(\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right) d\phi,$$

La integral se reduce a:

$$\begin{aligned}
m_p \sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} \int \frac{du}{u^2-1} &= m_p \sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} \int \frac{du}{(u-1)(u+1)}. \\
&= m_p \sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} \int \left[ \frac{1}{2(u-1)} - \frac{1}{2(u+1)} \right]. \\
&= m_p \sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} \left[ \frac{1}{2} \ln(u-1) - \frac{1}{2} \ln(u+1) \right]. \\
&= m_p \sqrt{\frac{1}{2(3+\alpha)}} \ln \left[ \frac{\cosh \left( \sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right) - 1}{\cosh \left( \sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right) + 1} \right].
\end{aligned}$$

Para simplificar el tratamiento, la constante fuera del logaritmo natural será  $K$  y el término dentro del coseno hiperbólico  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
m_p \sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} \int \frac{du}{u^2-1} &= K \ln \left[ \frac{\frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{2} - 1}{\frac{e^\gamma + e^{-\gamma}}{2} + 1} \right] = K \ln \left[ \frac{e^\gamma + e^{-\gamma} - 2}{e^\gamma + e^{-\gamma} + 2} \right]. \\
&= \frac{K}{2} \left[ \frac{(e^{\gamma/2})^2 - 2(e^{\gamma/2})(e^{-\gamma/2}) + (e^{-\gamma/2})^2}{(e^{\gamma/2})^2 + 2(e^{\gamma/2})(e^{-\gamma/2}) + (e^{-\gamma/2})^2} \right]. \\
&= \frac{K}{2} \ln \left[ \frac{(e^{\gamma/2} - e^{-\gamma/2})^2}{(e^{\gamma/2} + e^{-\gamma/2})^2} \right]. \\
m_p \sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} \int \frac{du}{u^2-1} &= K \ln \left[ \tanh \left( \frac{\gamma}{2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Con el desarrollo anterior se consigue solucionar la integral y llegar a la relación.

$$\sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} m_p \ln \left[ \tanh \left( \sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{2m_p} \right) \right] = -2Mm_p \sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} t, \quad (\text{E.20})$$

Al despejar al campo de la ecuación la expresión resultante es:

$$\phi = m_p \sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} \ln \left[ \tanh \left( \sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{2m_p} \right) \right] = m_p \sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} \ln \left[ \frac{1 + e^{-(3+\alpha)Mt}}{1 - e^{-(3+\alpha)Mt}} \right], \quad (\text{E.21})$$

Donde el argumento del logaritmo natural puede ser simplificado de forma que:

$$\frac{1 + e^{-(3+\alpha)Mt}}{1 - e^{-(3+\alpha)Mt}} = \frac{e^{-(3+\alpha)Mt/2} (e^{(3+\alpha)Mt/2} + e^{-(3+\alpha)Mt/2})}{e^{-(3+\alpha)Mt/2} (e^{(3+\alpha)Mt/2} - e^{-(3+\alpha)Mt/2})}. \quad (\text{E.22})$$

$$= \coth \left( \frac{3+\alpha}{2} Mt \right). \quad (\text{E.23})$$

Con lo que la expresión final para el campo escalar tendría la siguiente forma:

$$\phi = m_p \sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} \ln \left[ \coth \left( \frac{3+\alpha}{2} Mt \right) \right]. \quad (\text{E.24})$$

Por otra parte, para encontrar una expresión para el parámetro de Hubble en términos del tiempo cósmico ( $t$ ) es necesario introducir este resultado anterior en la (E.15):

$$\begin{aligned} H(t) &= M \cosh \left( \ln \left[ \coth \left( \frac{3+\alpha}{2} Mt \right) \right] \right). \\ &= M \left\{ \frac{e^{\ln[\coth((3+\alpha)Mt/2)]} + e^{-\ln[\coth((3+\alpha)Mt/2)]}}{2} \right\}. \\ &= M \left[ \frac{\coth \left( \frac{3+\alpha}{2} Mt \right) + \tanh \left( \frac{3+\alpha}{2} Mt \right)}{2} \right]. \end{aligned}$$

A continuación, se muestra de forma breve como continuar con la solución:

$$\begin{aligned} \coth x + \tanh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \\ &= \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{e^{2x} - e^{-2x}}. \\ &= 2\coth(2x). \end{aligned}$$

Con lo que, de manera directa, se obtiene la relación final del parámetro de Hubble:

$$H = M \coth(M(3+\alpha)(t - t_0)). \quad (\text{E.25})$$

Al igual que el parámetro de escala:

$$\frac{\dot{a}}{a} \rightarrow \ln a = \int M \coth((3 + \alpha)Mt) dt. \quad (\text{E.26})$$

$$\Rightarrow a \propto \sinh^{1/(3+\alpha)}(M(3 + \alpha)(t - t_0)). \quad (\text{E.27})$$

### *Apéndice E.1.3. Tratamiento de la tercera solución de RC*

Por último, la solución para el parámetro de Hubble (2.31) de la forma:

$$H = M \sinh \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right). \quad (\text{E.28})$$

Cuya derivada respecto del campo escalar  $\phi$  corresponde a:

$$H'(\phi) = \frac{M}{m_p^2} \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \cosh \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right). \quad (\text{E.29})$$

Con lo anterior, el proceso para conseguir el potencial de esta solución es:

$$V(\phi) = m_p^2 \left[ 3M^2 \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right) - 2m_p^2 M^2 \frac{3 + \alpha}{2m_p^2} \cosh^2 \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right) \right].$$

$$V(\phi) = m_p^2 \left[ -3M^2 - \alpha M^2 \cosh^2 \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right) \right].$$

$$V(\phi) = -3M^2 m_p^2 \left[ 1 + \frac{2\alpha}{6} \cosh^2 \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right) \right].$$

$$\Rightarrow V(\phi) = -3M^2 m_p^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{6} \left[ 1 + \cosh \left( \sqrt{2(3+\alpha)} \frac{\phi}{m_p} \right) \right] \right\}. \quad (\text{E.30})$$

De una forma similar a la solución pasada, donde nuevamente para valores de  $\alpha < -3$  la forma del potencial es:

$$V(\phi) = -3M^2 m_p^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{6} \left[ 1 + \cos \left( \sqrt{2|3+\alpha|} \frac{\phi}{m_p} \right) \right] \right\}. \quad (\text{E.31})$$

Por parte del campo escalar, se necesita resolver la integral de la ecuación (E.1):

$$\int \frac{d\phi}{\cosh \left( \sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right)} = -2Mm_p \sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \int dt \quad (\text{E.32})$$

La forma de solucionar el término del lado izquierdo difiere ligeramente de la solución anterior:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\phi}{\cosh \left( \sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right)} &= \int \frac{2d\phi}{e^{\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}} + e^{-\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}}} \frac{e^{\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}}}{e^{\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}}}. \\ &= \int \frac{2e^{\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}}}{e^{2\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}} + 1}. \end{aligned}$$

Nuevamente se realiza una sustitución simple de tal manera que:

$$u = e^{\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}}, \quad \sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} m_p du = e^{\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}} d\phi.$$

De forma que la integral obtiene la siguiente forma:

$$\int \frac{d\phi}{\cosh\left(\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right)} = 2\sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} m_p \int \frac{du}{u^2+1},$$

A continuación, se ejecuta una segunda sustitución simple de acuerdo con:

$$u = \tan v, \quad du = \sec^2 v dv, \quad v = \arctan u,$$

De manera que el desarrollo sigue de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} m_p \int \frac{du}{u^2+1} &= 2\sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} m_p \int \frac{\sec^2 v dv}{\tan^2 v + 1}. \\ &= 2\sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} m_p \int dv = 2\sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} v. \\ \int \frac{d\phi}{\cosh\left(\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}\right)} &= 2\sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} m_p \arctan\left(e^{\sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p}}\right) = -2Mm_p \sqrt{\frac{3+\alpha}{2}} t \end{aligned}$$

Para obtener el resultado, se despeja al campo escalar de la relación encontrada, consiguiendo que:

$$\phi = \sqrt{\frac{2}{3+\alpha}} m_p \ln \left[ \tan \left( -\frac{3+\alpha}{2} M(t-t_0) \right) \right]. \quad (\text{E.33})$$

Por otra parte, al incorporar este término dentro de la ecuación (E.28) se consigue como resultado que:

$$\begin{aligned}
H(t) &= M \sinh \left( \ln \left[ \tan \left( -\frac{3+\alpha}{2} Mt \right) \right] \right). \\
&= M \left[ \frac{e^{\ln \left( \tan \left( -\frac{3+\alpha}{2} Mt \right) \right)} - e^{-\ln \left( \tan \left( -\frac{3+\alpha}{2} Mt \right) \right)}}{2} \right]. \\
&= M \left[ \frac{\tan \left( -\frac{3+\alpha}{2} Mt \right) - \cot \left( -\frac{3+\alpha}{2} Mt \right)}{2} \right].
\end{aligned}$$

Expresión que se puede seguir desarrollando, siguiendo el siguiente procedimiento y recordando que ambas son funciones impares:

$$\begin{aligned}
\cot(\gamma) - \tan(\gamma) &= \left[ i \frac{e^{\gamma i} + e^{-\gamma i}}{e^{\gamma i} - e^{-\gamma i}} - i \frac{e^{\gamma i} - e^{-\gamma i}}{e^{\gamma i} + e^{-\gamma i}} \right]. \\
&= i \left[ \frac{2e^{2\gamma i} + 2e^{-2\gamma i}}{e^{2\gamma i} + e^{-2\gamma i}} \right]. \\
&= 2\cot(2\gamma).
\end{aligned}$$

Consiguiendo así, que la ecuación del parámetro de Hubble en términos del tiempo  $t$  toma la forma:

$$H(t) = M \cot((3 + \alpha)M(t - t_0)). \quad (\text{E.34})$$

Obteniendo finalmente, una proporcionalidad del parámetro de escala según:

$$a \propto \sin^{\frac{1}{3+\alpha}}((3 + \alpha)Mt). \quad (\text{E.35})$$

## Apéndice E.2. Parámetros de rodadura

### Apéndice E.2.1. Segunda solución ( $H \propto \cosh$ )

A partir de la definición del **primer parámetro** de rodadura (2.13):

$$\epsilon_1 = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{-M(3 + \alpha)\operatorname{csch}^2((3 + \alpha)Mt)}{M^2\operatorname{coth}^2((3 + \alpha)Mt)}. \quad (\text{E.36})$$

$$\epsilon_1 = \frac{(3 + \alpha)}{\sinh^2((3 + \alpha)Mt) + 1}. \quad (\text{E.37})$$

Donde, empleando la ecuación (E.27), se obtiene que:

$$\epsilon_1 = \frac{(3 + \alpha)}{a^{2(3+\alpha)} + 1}. \quad (\text{E.38})$$

Para el **segundo parámetro** de rodadura, como todos están descritos en términos del anterior, sin embargo, es necesario resolver el término que acompaña al primer parámetro en la ecuación (2.14):

$$\frac{2\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H} = \frac{2\left(\frac{3+\alpha}{2}\right) \left[ \frac{\cosh^2\left(\frac{3+\alpha}{2}Mt\right) + \sinh^2\left(\frac{3+\alpha}{2}Mt\right)}{\cosh^2\left(\frac{3+\alpha}{2}Mt\right) \sinh\left(\frac{3+\alpha}{2}Mt\right)} \right]}{- \left[ \frac{\cosh^2\left(\frac{3+\alpha}{2}Mt\right) + \sinh^2\left(\frac{3+\alpha}{2}Mt\right)}{\cosh^2\left(\frac{3+\alpha}{2}Mt\right) \sinh\left(\frac{3+\alpha}{2}Mt\right)} \right]} = -2(3 + \alpha). \quad (\text{E.39})$$

Esta revisión puede tenerse presente, sin embargo, el factor mencionado es idéntico al anzats sugerido en (2.22), con el cual, es directo que:

$$\epsilon_2 = 2\epsilon_1 - \frac{2\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H}, \quad (\text{E.40})$$

$$= 2(3 + \alpha)[1 - \text{sech}^2((3 + \alpha)Mt)], \quad (\text{E.41})$$

$$\epsilon_2 = -2(3 + \alpha)\tanh^2((3 + \alpha)Mt). \quad (\text{E.42})$$

Como cada parámetro viene a ser definido por el anterior, se tiene que el **tercer parámetro** tomaría la forma:

$$\epsilon_3 = \epsilon_2 + \frac{2\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H} = \frac{2(3 + \alpha)}{\cosh^2[(3 + \alpha)Mt]}. \quad (\text{E.43})$$

Este resultado nos permite generalizar los parámetros de rodadura para esta solución de la forma:

$$\epsilon_{2n} = -2(3 + \alpha)\tanh^2[(3 + \alpha)Mt]. \quad \epsilon_{2n+1} = \frac{2(3 + \alpha)}{\cosh^2[(3 + \alpha)Mt]}. \quad (\text{E.44})$$

### **Apéndice E.2.2. Tercera solución ( $H \propto \sinh$ )**

Siguiendo un proceso idéntico a la solución anterior, se obtiene que el **primer parámetro** de rodadura según su definición es de la forma:

$$\epsilon_1 = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{(3 + \alpha)}{\cos^2((3 + \alpha)Mt)} = \frac{(3 + \alpha)}{1 - a^{2(3+\alpha)}}. \quad (\text{E.45})$$

Sin embargo, el segundo parámetro tendría una forma irreducible:

$$\epsilon_2 = 2(3 + \alpha)[\sec^2((3 + \alpha)Mt) + 1]. \quad (\text{E.46})$$

Por lo que es preferible trabajar con la solución del parámetro de Hubble en términos del campo, de forma que, para obtener el primer parámetro de rodadura la ecuación a emplear es:

$$\epsilon_1 = \frac{2m_p^2}{H^2} \left( \frac{dH}{d\phi} \right)^2, \quad (\text{E.47})$$

$$= -\frac{-2M^2 \frac{3 + \alpha}{2} \cosh^2 \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right)}{M^2 \sinh^2 \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right)}, \quad (\text{E.48})$$

$$\epsilon_1 = (3 + \alpha) \coth^2 \left( \sqrt{\frac{3 + \alpha}{2}} \frac{\phi}{m_p} \right). \quad (\text{E.49})$$

Asignando simplemente al segundo parámetro de rodadura en rodadura constante como:

$$\eta = \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}H}. \quad (\text{E.50})$$