

AXIOMAS DE SEPARACIÓN  
ENTRE  $T_0$  Y  $T_1$

WALTER ALFONSO ÁLVAREZ SOTO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2006

**AXIOMAS DE SEPARACIÓN  
ENTRE  $T_0$  Y  $T_1$**

WÁLTER ALFONSO ÁLVAREZ SOTO  
Monografía presentada como requisito para optar al  
título de Licenciado en Matemáticas

Directora  
SONIA MARLENI SABOGAL  
Doctora en Matemáticas

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2006**

*Dedicatoria.*

"A mis padres por el apoyo que me brindaron a lo largo de la carrera."

# Agradecimientos

Doy mi más profundo agradecimiento:

- A la profesora Sonia por guiarme en el desarrollo de este trabajo.
- A los profesores de carrera por sus enseñanza académica y ética.
- Los compañeros que me brindaron su amistad y colaboración a lo largo de la carrera.

**TITULO:** AXIOMAS DE SEPARACIÓN ENTRE  $T_0$  Y  $T_1$  \*

**AUTOR:** WALTER ALFONSO ÁLVAREZ SOTO\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Débilmente Separado, núcleo, cascara, conjunto degenerado .

## **RESUMEN**

El primer tratado sistemático de los axiomas de separación es debido a URYSOHN. Una discusión mas detallada fue dada por FREUDENTHAL y VAN EST en 1951. Estas dos investigaciones tratan sobre axiomas de separación mas fuertes que  $T_1$ . El único axioma de separación entre  $T_0$  y  $T_1$  conocido hasta aquí se introdujo por J.W.T.YOUNGS quien lo encontró en el estudio de espacios localmente conexos. Otro axioma nos fue sugerido por una observación de C.T.YANG, que el conjunto derivado de todo conjunto es cerrado si y solo si el conjunto derivado de todo punto es cerrado. Después de introducir algunas herramientas que jugarán un papel importante a lo largo del artículo, nosotros introducimos varios nuevos axiomas de separación como lo son  $T_{UD}$ ,  $T_D$ ,  $T_{DD}$ , etc; dando formas equivalentes para algunos, se analizan sus relaciones de inclusión, y se observa que todos ellos pueden describirse en términos de la conducta de los conjuntos derivados de puntos.

---

\* Monografía

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de matemáticas. Director: SONIA M. SABOGAL .

**TITLE:** SEPARATION AXIOMS BETWEEN  $T_0$  AND  $T_1$  \*

**AUTHOR:** WALTER ALFONSO ÁLVAREZ SOTO\*\*

**KEY WORDS:** Weakly separated, kernel, shell, degenerate set .

## **DESCRIPTION**

The first systematic treatment of separation axioms is due to UEYSOHN. A more detailed discussion was given by FRETJDENTHAL and VAN EST in 1951. Both of these investigations are concerned with separation axioms stronger than  $T_1$ . The only separation axiom between  $T_0$  and  $T_1$  known heretofore was introduced by J. W. T. YOTJNG who encountered it in the study of locally connected spaces. Another axiom was suggested to us by an observation of C. T. YANG that the derived set of every set is closed iff the derived set of every point is closed.

After introducing some tools which will play an important role throughout the article, we introduce a number of new separation axioms as they are it  $T_{UD}, T_D, T_{DD}$ , etc; giving equivalent forms for some, analyse their inclusion relations, and observe that they all can be described in terms of the behavior of derived sets of points.

---

\* Monograph

\*\* Faculty of sciences. Mathematics school. Director: SONIA M. SABOGAL .

# Índice general

Introducción	2
1. Preliminares	3
2. Análisis del artículo “Axiomas de Separación entre $T_0$ y $T_1$ ”.	10
Bibliografía	34

# Introducción

Los axiomas de separación, designados comúnmente por axiomas  $T_i$  de Alexandroff y Hopf, constituyen un sistema de condiciones de frecuente uso, que se van estableciendo en orden creciente de restricción, aplicables a un espacio topológico.

En un curso de topología, generalmente se estudian los axiomas de separación clásicos como lo son  $T_0$ ,  $T_1$  y  $T_2$  (Hausdorff). En el presente trabajo se pretende, dar a conocer, a través de análisis del artículo [1], otros axiomas de separación que se encuentran entre  $T_0$  y  $T_1$ . Además estudiar algunos teoremas y ejemplos concretos de ellos, con el propósito de dejar un material de fácil estudio para futuros trabajos y/o lecturas de este tema para estudiantes de licenciatura en matemática.

Este trabajo de grado esta dividido en dos capítulos de la siguiente manera:

En el primero, se dan algunas definiciones y resultados básicos que serán tenidos en cuenta para el desarrollo del tema.

En el segundo capítulo se hace un análisis del artículo “SEPARATION AXIOMS BETWEEN  $T_0$  AND  $T_1$ ” escrito por el profesor H. FREUDENTHAL de la Universidad de Colorado. Haciendo énfasis en las cuatros primeras partes de este, dando en algunos casos demostraciones más detalladas a diferentes teoremas y proporcionando ejemplos donde podamos aplicar las definiciones de los diferentes axiomas de separación que se estudian como son  $T_D$ ,  $T_{DD}$ ,  $T_{UD}$ ,  $T_F$ ,  $T_{FF}$ ,  $T_Y$  y  $T_{YS}$  que se encuentran entre  $T_0$  y  $T_1$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Presentaremos en este capítulo unas definiciones que serán de gran utilidad para el entendimiento de este trabajo. Se estudian algunas propiedades de las nociones presentadas y sus interrelaciones, también trataremos algunos teoremas relativos a los axiomas  $T_0$ ,  $T_1$  y  $T_2$ .

**Definición 1.1.** Sea  $X$  un conjunto, llamaremos **topología** sobre  $X$  a cualquier familia  $\tau \subseteq \mathcal{P}X$  que cumpla los siguientes axiomas:

- 1) Si  $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es una familia de elementos de  $\tau$ , entonces  $\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \tau$ .
- 2) Si  $\{O_i\}_{i=1}^n$  es una familia finita de elementos de  $\tau$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \tau$ .
- 3)  $\emptyset \in \tau$  y  $X \in \tau$ .

De este modo al par  $(X, \tau)$  lo llamaremos un **espacio topológico**, los elementos de  $\tau$  se llamarán conjuntos **abiertos**. La noción de espacio topológico es el ambiente adecuado para extender los conceptos de adherencia y punto límite o (punto de acumulación) que se estudian en análisis real. Estos conceptos, serán herramientas fundamentales para puntualizar nuestra noción intuitiva de **separación**, uno de los temas fundamentales del artículo.

**Definición 1.2.** Sea  $(X, \tau)$  espacio topológico. Un subconjunto  $F$  de  $X$  es un conjunto

**cerrado**, si su complemento  $F^C$  es un conjunto abierto o, equivalentemente, si existe un conjunto abierto  $U$  tal que  $F = X - U$ .

Una topología también se puede definir determinando la familia de los cerrados, para esto se necesita una familia  $\varphi \subseteq \mathcal{P}X$  que satisfaga las condiciones duales a las de la definición 1.1, es decir tal que:

- 1) Si  $\{C_i\}^n$  es una familia finita de elementos de  $\varphi$ , entonces  $\bigcup_{i=1}^n C_i \in \varphi$ .
- 2) Si  $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es una familia de elementos de  $\varphi$ , entonces  $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \in \varphi$ .
- 3)  $\emptyset \in \varphi$  y  $X \in \varphi$ .

En estas condiciones la familia  $\tau = \{O^C \subseteq X/O \in \varphi\}$  es una topología de  $X$ , cuya familia de cerrados, claramente es  $\varphi$ .

**Definición 1.3.** Sea  $(X, \tau)$  espacio topológico  $A \subset X$ , y  $x \in X$  diremos que:

- 1)  $x$  es un punto interior de  $A$  ( $x \in \text{int}(A)$ ), si existe  $O \in \tau$  tal que  $x \in O \subseteq A$ .

$$\text{int}(A) = \{x \in X/x \text{ es punto interior de } A\}$$

- 2)  $x$  es un punto de adherencia de  $A$  ( $x \in \bar{A}$ ), si para todo  $O \in \tau$  tal que  $x \in O$  se tiene que  $O \cap A \neq \emptyset$ .

$$\bar{A} = \{x \in X/x \text{ es punto de adherencia}\}$$

- 3)  $x$  es punto límite ( o punto de acumulación ) de  $A$  ( $x \in A'$ ), si para todo  $O \in \tau$  tal que  $x \in O$  se tiene que  $(O - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ .

$$A' = \{x \in X/x \text{ es un punto de acumulación de } A\}.$$

De este modo  $\text{int}(A)$ ,  $\bar{A}$  y  $A'$  se llamaran el interior, la adherencia y el derivado de  $A$  respectivamente.

**Teorema 1.1.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico,  $A \subseteq X$ .  $A$  es abierto si y solo si  $\text{int}(A) = A$

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Basta probar que  $A \subseteq \text{int}(A)$  pues la otra contención es inmediata a partir de la definición de punto interior. Sea  $x \in A$  por hipótesis existe  $O = A \in \tau$  tal que  $x \in A \subseteq A$ , luego  $x \in \text{int}(A)$ .

$\Leftarrow$ ) Si  $A = \emptyset$  entonces  $A$  es abierto.

Si  $A \neq \emptyset$ , sea  $x \in A = \text{int}(A)$  entonces  $x \in \text{int}(A)$  luego existe  $O_x \in \tau$  tal que  $x \in O_x \subseteq A$  tenemos que  $A = \bigcup_{x \in A} O_x$  el cual es un abierto por ser unión de conjuntos abiertos.  $\square$

La siguiente es una caracterización de los conjuntos cerrados en términos de adherencia.

**Teorema 1.2.** *A es cerrado si y solo si  $A = \bar{A}$*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Mostremos que  $A = \bar{A}$  para lo cual basta probar que  $\bar{A} \subseteq A$ . Sea  $x \in \bar{A}$ , supongamos que  $x \notin A$  entonces  $x \in A^c$ , pero  $A^c$  es abierto, y como  $x \in \bar{A}$  entonces  $A^c \cap A \neq \emptyset$  lo que claramente es absurdo.

$\Leftarrow$ ) Mostremos que  $A$  es cerrado, para lo cual demostraremos que  $A^c$  es abierto, es decir que  $A^c \subseteq \text{int}(A^c)$ . Sea  $x \in A^c$  entonces  $x \notin A = \bar{A}$  es decir  $x \notin \bar{A}$  luego existe un abierto  $O$  tal que  $x \in O$  y  $O \cap A = \emptyset$  entonces  $x \in O \subseteq A^c$ , lo que implica que  $x \in \text{int}(A^c)$  como se quería ver.  $\square$

Existe otro modo de describir la adherencia de un conjunto, que hace uso del importante concepto de punto límite.

**Teorema 1.3.** *Sea  $(X, \tau)$  espacio topológico,  $A \subset X$*

$$\bar{A} = A \cup A'$$

*Demostración.* Hay que ver dos cosas que  $\bar{A} \subset A \cup A'$  y  $A \cup A' \subset \bar{A}$ .

- Mostremos que  $\bar{A} \subset A \cup A'$ , sea  $x \in \bar{A}$ , veamos que  $x \in A \cup A'$ , si ocurre que  $x \in A$  es trivial que  $x \in A \cup A'$ , supongamos que  $x \notin A$ , como  $x \in \bar{A}$  todo abierto  $O \in \tau$  tal que  $x \in O$  cumple que  $O \cap A \neq \emptyset$ ; al tener que  $x \notin A$ , entonces  $O$  intersecta a  $A$  en un punto distinto de  $x$  esto es  $A \cap (O - \{x\}) \neq \emptyset$  es decir  $x \in A'$  de este modo  $x \in A \cup A'$  como se deseaba.

• Mostremos que  $A \cup A' \subset \bar{A}$ , sea  $x \in A'$  entonces para todo abierto  $O \in \tau$  tal que  $x \in O$  se tiene que  $A \cap (O - \{x\}) \neq \emptyset$  entonces por definición de adherencia  $x \in \bar{A}$ , de aqui se tiene que  $A' \subset \bar{A}$  y puesto que  $A \subset \bar{A}$  se sigue que  $A' \cup A \subset \bar{A}$ .  $\square$

El concepto que se define a continuación (aislamiento o separación débil), no aparece en los textos clásicos de topología, y es un concepto básico en el desarrollo del artículo que se analiza en el presente trabajo.

**Definición 1.4.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico.  $A, B \subset X$ , se dice que  $A$  es **separado débilmente** de  $B$  (o **aislado**), si  $A \cap \bar{B} = \emptyset$  y lo representamos por  $A \vdash B$ .

Claramente  $A \vdash B$  es equivalente a  $A \subseteq (\bar{B})^c = ext(B)$ .

De otro modo un conjunto  $A$  se dice que es separado débilmente de  $B$  si existe  $O \in \tau$  tal que  $A \subseteq O$  y  $O \cap B = \emptyset$ .

Decimos que  $A \not\vdash B$  ( $A$  no está débilmente separado de  $B$ ) si para todo  $O \in \tau$  con  $A \subset O$  se tiene que  $O \cap B \neq \emptyset$  o su equivalencia  $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$ . Si se trata de conjuntos unitarios  $\{x\}$  y  $\{y\}$  se escribirá  $x \not\vdash y$ .

De la definición 1.3 es, inmediato que el derivado y la clausura de un conjunto unitario se pueden escribir en términos de aislamiento es decir  $\{x\}' = \{y \in X / y \not\vdash x \wedge y \neq x\}$  y  $\{\bar{x}\} = \{y \in X / y \not\vdash x\}$ , respectivamente. Es fácil verificar que la relación de aislamiento no es reflexiva, simétrica ni transitiva.

Siempre  $\emptyset \vdash A$  y  $A \vdash \emptyset$ , además si  $X \vdash A$  entonces  $A = \emptyset$ , y si  $A \vdash X$  entonces  $A = \emptyset$ .

**Ejemplo 1.1.** En el espacio trivial cuyos únicos abiertos son  $\emptyset$  y  $X$ ,  $\emptyset$  está aislado de cualquier otro conjunto y recíprocamente, además estos son los únicos subconjuntos que están relacionados en este espacio.

**Ejemplo 1.2.** En un espacio discreto  $(X, \mathcal{P}X)$  todo par de subconjuntos disjuntos están aislados el uno del otro.

**Ejemplo 1.3.** En  $\mathbb{R}$  con la topología usual  $[0, 1) \vdash (1, 2)$  y  $(1, 2) \vdash [0, 1)$  pero  $[0, 1] \not\vdash (1, 2)$  y  $(1, 2) \not\vdash [0, 1]$  además  $[0, 1) \vdash \{1\}$  pero  $\{1\} \not\vdash [0, 1)$ .

**Ejemplo 1.4.** En  $\mathbb{R}$  con la topología de colas a la derecha  $(1, \infty) \vdash (0, 1)$  pero  $(0, 1) \not\vdash (1, \infty)$ .

Los axiomas de separación, designados comúnmente por axiomas  $T_i$ , de Alexandroff y Hopf, constituyen un sistema de condiciones de frecuente uso, en orden creciente de restricción, aplicables a un espacio topológico.

**Definición 1.5.** Sea  $(X, \tau)$  espacio topológico

- 1) Se dice que  $(X, \tau)$  es  $T_0$  (o de Kolmogoroff), si para cualquiera  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$  existe un abierto  $O$  tal que  $(x \in O \wedge y \notin O) \vee (y \in O \wedge x \notin O)$ .
- 2) Se dice que  $(X, \tau)$  es  $T_1$  (o de Fréchet) si para cualesquiera  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$  existen dos abiertos  $O$  y  $G$  tales que  $x \in O \wedge y \notin O \wedge x \notin G \wedge y \in G$ , los conjuntos  $O$  y  $G$  no tienen que ser necesariamente disjuntos.
- 3) Se dice que  $(X, \tau)$  es  $T_2$  (o Hausdorff) si para cualesquiera  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$  existen dos abiertos disjuntos  $O$  y  $G$  tales que  $x \in O \wedge y \in G$ .

Estos axiomas están escritos evidentemente en orden de menor a mayor restricción, en el sentido de que todo espacio  $T_2$  es  $T_1$  y todo espacio  $T_1$  es  $T_0$  pero no recíprocamente. Es decir que  $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ , pero hay que tener en cuenta que  $T_0 \not\Rightarrow T_1 \not\Rightarrow T_2$ .

**Ejemplo 1.5.** Veamos un espacio que es  $T_0$ , pero no  $T_1$ .

Sea  $X = \{a, b\}$  y  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

Es claro que  $(X, \tau)$  es  $T_0$  ya que tomando  $O = \{a\}$  tengo que  $(a \in \{a\} \wedge b \notin \{a\})$ , pero  $(X, \tau)$  no es  $T_1$  ya que no existen abiertos que cumplan la condición de la definición.

En un curso de topología básica se estudian algunas topologías de los reales como: la usual, colas a la derecha, complementos finitos, entre otras.

Cabe notar que:  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  cumple los tres axiomas de separación;  $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$  es  $T_0$ , pero no es  $T_1$ ;  $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$  es  $T_0, T_1$ , pero no  $T_2$ .

**Teorema 1.4.** Un espacio topológico  $(X, \tau)$  es un  $T_1$ -espacio si, y solo si, todo subconjunto unitario  $\{p\}$  de  $X$  es cerrado.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $(X, \tau)$  es un  $T_1$ -espacio y que  $p \in X$ . Demostremos que  $\{p\}^C$  es abierto, sea  $x \in \{p\}^C$  luego  $x \neq p$ , entonces por  $T_1$  existe un abierto  $O_x$  tal que  $x \in O_x$  pero  $p \notin O_x$  luego  $x \in O_x \subset \{p\}^C$ , y, por consiguiente  $\{p\}^C = \bigcup \{O_x/x \in \{p\}^C\}$  y como la unión de abiertos es abierto tengo que  $\{p\}^C$  es abierto y  $\{p\}$  es cerrado.

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\{p\}$  es cerrado para todo  $p \in X$ , sean  $a, b \in X$  tales que  $a \neq b$ . Ahora bien, si  $a \neq b$  entonces  $b \in \{a\}^C$ ; por tanto  $\{a\}^C$  es un abierto que contiene a  $b$  pero no contiene a  $a$ . Análogamente,  $\{b\}^C$  es un abierto que contiene a  $a$  pero no contiene a  $b$ . Lo que indica que  $(X, \tau)$  es un  $T_1$ -espacio.  $\square$

**Definición 1.6.** Sea  $(X, \tau)$  espacio topológico,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $X$  y  $b \in X$ . Diremos que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $b$  si para todo abierto  $O$  tal que  $b \in O$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que: si  $n \geq N$  entonces  $a_n \in O$ .

En tal caso se dice que  $b$  es límite de la sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

En el siguiente teorema se establece una propiedad de los espacios de Hausdorff, que hace de ellos una clase importante de espacios topológicos.

**Teorema 1.5.** Si  $(X, \tau)$  es un espacio de Hausdorff, entonces toda sucesión convergente de  $X$  tiene un límite único.

*Demostración.* Supongamos que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de  $X$  que converge a  $a$  y  $b$ , con  $a \neq b$  como  $X$  es un espacio de Hausdorff, existen dos abiertos  $O, G$  disjuntos tales que  $a \in O$  y  $b \in G$ , como  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $a$  tengo que para el  $O$  dado existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq k$ , entonces  $a_n \in O$ ; como también  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $b$  para el  $G$  dado existe  $k' \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq k'$  entonces  $a_n \in G$ , sea  $k_0 = \max\{k, k'\}$  si  $n \geq k_0$  tengo que  $a_n \in O \cap G$  lo que contradice que  $O \cap G = \emptyset$ .  $\square$

**Ejemplo 1.6.** Pruebe que un subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff.

*Demostración.* Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico de Hausdorff, sea  $Y \subset X$  subespacio de  $X$  entonces:

$$\tau_Y = \{Y \cap U / U \in \tau\}$$

Se tiene que para todo  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2$  existen  $O_1, O_2 \in \tau$  tal que  $x_1 \in O_1$ ,  $x_2 \in O_2$  y  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ .

Sean  $y_1, y_2 \in Y$ ,  $y_1 \neq y_2$ , entonces  $y_1, y_2 \in X$  por lo que existen  $G_1, G_2 \in \tau$  tal que  $y_1 \in G_1$  y  $y_2 \in G_2$  además  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ , entonces existen  $Y \cap G_1, Y \cap G_2 \in \tau_Y$  tal que  $y_1 \in Y \cap G_1$ ,  $y_2 \in Y \cap G_2$  y  $(Y \cap G_1) \cap (Y \cap G_2) = \emptyset$ , de este modo se concluye que  $Y$  es Hausdorff.  $\square$

De manera parecida se puede demostrar que las propiedades  $T_0$  y  $T_1$  son también hereditarias, es decir que todo subespacio de un espacio  $T_0$  es también  $T_0$  y que todo subespacio de un espacio  $T_1$  es también  $T_1$ .

## Capítulo 2

# Análisis del artículo “Axiomas de Separación entre $T_0$ y $T_1$ ”.

En este capítulo se hace un estudio mas o menos detallado de algunos conceptos y teoremas tratados en el artículo; de hecho no vamos a profundizar demasiado en las tres últimas partes del artículo, debido a que resultaría un trabajo muy extenso, y a que nuestro interés se concentró en la teoría básica de los axiomas de separación entre  $T_0$  y  $T_1$ . Cabe aquí enunciar que se hará un cambio de notación: en lugar de escribir  $[x]$  se escribira  $\{x\}$  para indicar un conjunto unitario.

Para abordar estos axiomas de separación se parte del concepto de *separación débil*, (Definición 1.4.) que aplicado a un par de puntos  $x, y$  de un espacio topológico se expresaría como sigue:  $x$  se puede **separar débilmente** de  $y$ , lo que se nota  $x \vdash y$ , si y solo si existe un abierto  $O$  tal que  $x \in O$  y  $y \notin O$ .

Los conceptos de “punto adherente” y “punto de acumulación” son clásicos y se definen en todo texto de topología básica, usualmente como lo hicimos aquí en el capítulo de preliminares en la definición 1.3. Según esta definición tenemos que  $x \in \{\bar{y}\}$ , significa que para todo abierto  $O$  tal que  $x \in O$  se tiene que  $O \cap \{y\} \neq \emptyset$  o lo que es lo mismo  $y \in O$ , de modo que esto a su vez significa que  $x$  no se puede separar débilmente de  $y$ ,

lo que notariamos  $x \not\prec y$ . Hemos probado así que:

$$x \in \{\bar{y}\} \text{ si y solo si } x \not\prec y.$$

y esta última caracterización corresponde a la definición de punto de adherencia presentada en el artículo.

Análogamente para la noción de punto de acumulación se tiene:

$$x \in \{y\}' \text{ si y solo si } x \neq y \wedge x \not\prec y.$$

Recordemos ahora brevemente dos conceptos básicos presentados en el artículo, que **no** aparecen en un texto clásico de topología, se definen también en términos de “separación débil” y se usarán más adelante para introducir los nuevos axiomas de separación. Estos conceptos son los de: **núcleo** y **cáscara** de un punto:

$$\text{Núcleo de } x : \{\hat{x}\} = \{y \in X / x \not\prec y\}.$$

$$\text{cáscara de } x : \{\widehat{x}\} = \{\hat{x}\} - \{x\}.$$

También se define el conjunto  $\langle x \rangle$  por:

$$\langle x \rangle =: \{\bar{x}\} \cap \{\hat{x}\}$$

Antes de ilustrar con ejemplos las nociones definidas anteriormente, se probarán algunos resultados que serán útiles.

**Lema 2.1.** *Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico. Para todo conjunto unitario se tiene que  $\{x\}' = \{\bar{x}\} - \{x\}$ .*

*Demostración.* • Veamos que  $\{x\}' \subset \{\bar{x}\} - \{x\}$ , sea  $y_0 \in \{x\}'$ , entonces para todo  $O \in \tau$  tal que  $y_0 \in O$  se tiene que  $\{x\} \cap (O - \{y_0\}) \neq \emptyset$ , entonces  $y_0 \neq x$  y  $\{x\} \cap O \neq \emptyset$  por lo que  $y_0 \in \{\bar{x}\} - \{x\}$ .

• Veamos que  $\{\bar{x}\} - \{x\} \subset \{x\}'$ , sea  $y_0 \in \{\bar{x}\} - \{x\}$ , entonces  $y_0 \in \{\bar{x}\}$  y  $y_0 \notin \{x\}$ , luego  $y_0 \neq x$  y para todo  $O \in \tau$  tal que  $y_0 \in O$  se tiene que  $O \cap \{x\} \neq \emptyset$  entonces  $x \in O$  y  $x \neq y_0$  de este modo  $\{x\} \cap (O - \{y_0\}) \neq \emptyset$  es decir que  $y_0 \in \{x\}'$ .  $\square$

**NOTA:** Es bien sabido que para todo subconjunto  $A$  de un espacio topológico se cumple que  $\bar{A} = A \cup A'$  (ver teorema 1.3.), pero no siempre se tiene que  $A' = \bar{A} - A$  como se observa por ejemplo al tomar  $A = [0, 1)$  en el espacio  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  de los reales con la topología usual. Sin embargo el lema anterior muestra que para el caso particular en que  $A$  es un conjunto unitario entonces la igualdad  $A' = \bar{A} - A$  se cumple.

El siguiente teorema se demostrará con todos los detalles, los cuales se omiten en el artículo.

**Teorema 2.1.** *Sean  $x, y$  elementos de un espacio topológico  $(X, \tau)$  entonces*

- (a)  $y \in \{\bar{x}\}$  implica  $\{\bar{y}\} \subset \{\bar{x}\}$ ,
- (b)  $y \in \{\hat{x}\}$  implica  $\{\hat{y}\} \subset \{\hat{x}\}$ ,
- (c)  $y \in \{\hat{x}\}$  si, y solo si,  $x \in \{\bar{y}\}$ ,
- (d)  $y \in \{\widehat{x}\}$  si y solo si  $x \in \{y\}'$ ,
- (e) para cada  $x \in X$ ,  $\{\widehat{x}\}$  es degenerado si, y solo si, para todo  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$   
 $\{x\}' \cap \{y\}' = \emptyset$ ,
- (f)  $y \in \langle x \rangle$  implica  $\langle y \rangle = \langle x \rangle$ ,
- (g) para todo  $x, y \in X$  alguno de los dos  $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \emptyset$  o  $\langle x \rangle = \langle y \rangle$  se cumple.

*Demostración.*

- (a) Sea  $y_0 \in \{\bar{y}\}$ , para todo  $O \in \tau$  tal que  $y_0 \in O$  se tiene que  $O \cap \{y\} \neq \emptyset$  luego  $y \in O$  como  $y \in \{\bar{x}\}$  entonces  $O \cap \{x\} \neq \emptyset$ , luego  $y_0 \in \{\bar{x}\}$ .
- (b) Sea  $y_0 \in \{\hat{y}\}$ , es decir  $\{y\} \not\subseteq y_0$ , entonces para todo  $O \in \tau$  tal que  $\{y\} \subseteq O$  (equivalentemente  $y \in O$ ) se tiene que  $y_0 \in O$  (\*), por hipótesis  $\{x\} \not\subseteq y$  es decir para todo  $G \in \tau$  tal que  $x \in G$  se tiene que  $y \notin G$ . Usando (\*) se tiene  $y_0 \in G$ , es decir  $\{x\} \not\subseteq y_0$ , luego  $y_0 \in \{\hat{x}\}$ .

(c)  $y \in \{\hat{x}\}$  si, y solo si,  $\{x\} \not\subset y$  si, y solo si, para todo  $O \in \tau$  tal que  $\{x\} \subset O$  ( $x \in O$ ) se tiene que  $y \in O$  luego todo conjunto abierto que contiene a  $x$  contiene a  $y$  de este modo  $x \not\subset \{y\}$  si, y solo si,  $x \in \{\bar{y}\}$ .

(d)  $y \in \{\widehat{x}\}$  si, y solo si,  $y \in \{\hat{x}\} - \{x\}$  es decir  $y \in \{\hat{x}\}$  y  $y \notin \{x\}$  osea ( $y \neq x$ ) si, y solo si,  $x \not\subset y$  y  $y \neq x$  si, y solo si,  $x \in \{y\}'$

(e)  $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $\{x\}' \cap \{y\}' \neq \emptyset$ , sea  $z_0 \in \{x\}' \cap \{y\}'$  entonces  $z_0 \in \{x\}'$  y  $z_0 \in \{y\}'$ , entonces para todo  $O \in \tau$  tal que  $z_0 \in O$  se tiene que  $\{x\} \cap (O - \{z_0\}) \neq \emptyset$  y  $\{y\} \cap (O - \{z_0\}) \neq \emptyset$ , luego  $x \neq z_0$ ,  $y \neq z_0$  y todo abierto  $O$  que contiene a  $z_0$  contiene a  $x$  e  $y$  por lo que  $z_0 \not\subset x$  y  $z_0 \not\subset y$  entonces  $x, y \in \{\hat{z}_0\}$  luego  $x, y \in \{\widehat{z}_0\} = \{\hat{z}_0\} - \{z_0\}$  lo que contradice que  $\{\widehat{z}_0\}$  es degenerado para  $z_0 \in X$ .

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\{\widehat{x}\}$  no es degenerado, sean  $x_0, y_0 \in \{\widehat{x}\}$  con  $x_0 \neq y_0$ , entonces  $x_0, y_0 \in \{\hat{x}\} - \{x\}$  de este modo  $x_0 \in \{\hat{x}\}$  y  $y_0 \in \{\hat{x}\}$  pero  $x_0 \neq x$  y  $y_0 \neq x$ , entonces  $\{x\} \not\subset x_0$  y  $\{x\} \not\subset y_0$  por lo que para todo  $O \in \tau$  tal que  $x \in O$  se tiene que  $x_0 \in O$  y  $y_0 \in O$  de otra manera  $\{x_0\} \cap (O - \{x\}) \neq \emptyset$  y  $\{y_0\} \cap (O - \{x\}) \neq \emptyset$ , entonces  $x \in \{x_0\}' \cap \{y_0\}'$  lo que contradice la hipótesis.

(f) • Si  $y \in \langle x \rangle$  mostremos que  $\langle y \rangle \subset \langle x \rangle$  es decir que  $\{\bar{y}\} \cap \{\hat{y}\} \subset \{\bar{x}\} \cap \{\hat{x}\}$ .

Como  $y \in \langle x \rangle$  entonces por definición  $y \in \{\bar{x}\} \cap \{\hat{x}\}$  luego  $y \in \{\bar{x}\}$  y  $y \in \{\hat{x}\}$  entonces por (a) y (b) se tiene que  $\{\bar{y}\} \subset \{\bar{x}\}$  y  $\{\hat{y}\} \subset \{\hat{x}\}$ , y por propiedades de conjuntos tenemos que  $\{\bar{y}\} \cap \{\hat{y}\} \subset \{\bar{x}\} \cap \{\hat{x}\}$ .

• Mostremos ahora que  $\langle x \rangle \subset \langle y \rangle$  es decir  $\{\bar{x}\} \cap \{\hat{x}\} \subset \{\bar{y}\} \cap \{\hat{y}\}$ .

Por hipótesis tengo que  $y \in \langle x \rangle$ , entonces  $y \in \{\bar{x}\} \cap \{\hat{x}\}$

Sea  $y_0 \in \langle x \rangle$  entonces  $y_0 \in \{\bar{x}\} \cap \{\hat{x}\}$  es decir que  $y_0 \in \{\bar{x}\}$  y  $y_0 \in \{\hat{x}\}$  veamos que  $y_0 \in \{\bar{y}\}$  osea que para todo abierto  $O$  tal que  $y_0 \in O$  se tiene  $y \in O$ .

Sea  $y_0 \in O$ , como  $y_0 \in \{\bar{x}\}$  entonces  $x \in O$  y como  $y \in \{\hat{x}\}$  entonces  $\{x\} \not\subset y$ , es decir todo abierto que contiene a  $x$ , también contiene a  $y$ , luego  $y \in O$  ( $y_0 \in \{\bar{y}\}$ ).

Veamos que  $y_0 \in \{\hat{y}\}$  es decir  $\{y\} \not\subseteq y_0$  osea que todo abierto que contiene a  $y$  tambien contiene a  $y_0$ .

Sea  $G$  abierto tal que  $y \in G$ , como  $y \in \{\bar{x}\}$  entonces  $x \in G$ ; como  $y_0 \in \{\hat{x}\}$  tengo que  $\{x\} \not\subseteq y_0$  es decir que todo abierto que contiene a  $x$ , contiene a  $y_0$ , entonces  $y_0 \in G$  ( $y_0 \in \{\hat{y}\}$ ); de lo anterior concluimos que  $y_0 \in \{\bar{y}\} \cap \{\hat{y}\} = \langle y \rangle$ .

(g) Supongamos que  $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq \emptyset$ , sea  $z_0 \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ , entonces  $z_0 \in \langle x \rangle$  y  $z_0 \in \langle y \rangle$ , por (f) tengo que  $\langle z_0 \rangle = \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$  de este modo  $\langle z_0 \rangle = \langle x \rangle = \langle y \rangle$  como se quería ver.

□

**Lema 2.2.** Si  $y \in (\{x\}')^C$  con  $y \neq x$ , entonces  $y \in (\{\bar{x}\})^C$ .

*Demostración.* Supongamos que  $y \in \{\bar{x}\}$ , entonces  $y \in \{x\}' \cup \{x\}$ , luego  $y \in \{x\}'$  ó  $y \in \{x\}$ . Pero  $y \in (\{x\}')^c$  por hipótesis, luego  $y \in \{x\}'$  no se tiene y entonces  $y \in \{x\}$  es decir  $y = x$  lo que contradice que  $y \neq x$ . Concluimos que  $y \in (\{\bar{x}\})^C$ . □

**Ejemplo 2.1.** Sea  $X = \{1, 2, 3\}$  y  $\tau = \{\emptyset, X, \{1, 3\}, \{3\}\}$

$$\begin{array}{lll} \{\bar{1}\} = \{1, 2\} & \{\bar{2}\} = \{2\} & \{\bar{3}\} = \{1, 2, 3\} \\ \{1\}' = \{2\} & \{2\}' = \emptyset & \{3\}' = \{1, 2\} \\ \{\hat{1}\} = \{y \in X / 1 \notin y\} = \{1, 3\} & \{\hat{2}\} = \{1, 2, 3\} & \{\hat{3}\} = \{3\} \\ \{\widehat{1}\} = \{\hat{1}\} - \{1\} = \{3\} & \{\widehat{2}\} = \{1, 3\} & \{\widehat{3}\} = \emptyset \\ \langle 1 \rangle = \{\bar{1}\} \cap \{\hat{1}\} = \{1, 2\} \cap \{1, 3\} = \{1\} & \langle 2 \rangle = \{2\} & \langle 3 \rangle = \{3\} \end{array}$$

Veamos que se cumplen algunos incisos del teorema anterior

- a)  $2 \in \{\bar{1}\}$  implica  $\{\bar{2}\} \subset \{\bar{1}\}$
- b)  $3 \in \{\hat{2}\}$  implica  $\{\hat{3}\} \subset \{\hat{2}\}$
- d)  $3 \in \{\widehat{2}\}$  si, y solo si,  $2 \in \{3\}'$

**Ejemplo 2.2.** Sea  $X = \{a, b\}$  y  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$  (espacio de Sierpiński).

$$\begin{array}{ll}
\{\bar{a}\} = \{a, b\} & \{\bar{b}\} = \{b\} \\
\{a\}' = \{b\} & \{b\}' = \emptyset \\
\{\hat{a}\} = \{a\} & \{\hat{b}\} = \{a, b\} \\
\{\widehat{a}\} = \emptyset & \{\widehat{b}\} = \{a\} \\
\langle a \rangle = \{a\} & \langle b \rangle = \{b\}
\end{array}$$

Veamos:

a)  $b \in \{\bar{a}\}$  implica  $\{\bar{b}\} \subset \{\bar{a}\}$

c)  $a \in \{\hat{b}\}$  si, y solo si,  $b \in \{\bar{a}\}$

**Ejemplo 2.3.** Sea  $(\mathbb{R}, \tau_u)$

Para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  tenemos que:

$$\{\bar{x}\} = \{x\}$$

$$\{x\}' = \emptyset$$

$$\{\hat{x}\} = \{x\}$$

$$\{\widehat{x}\} = \emptyset$$

$$\langle x \rangle = \{x\}$$

Este ejemplo no es muy interesante para analizar las implicaciones anteriores.

**Ejemplo 2.4.** Sea  $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$

$$\begin{array}{ll}
\{\bar{0}\} = (-\infty, 0] & \{\bar{1}\} = (-\infty, 1] \\
\{0\}' = (-\infty, 0) & \{1\}' = (-\infty, 1) \\
\{\hat{0}\} = [0, \infty) & \{\hat{1}\} = [1, \infty) \\
\{\widehat{0}\} = (0, \infty) & \{\widehat{1}\} = (1, \infty) \\
\langle 0 \rangle = \{0\} & \langle 1 \rangle = \{1\}
\end{array}$$

Veamos:

a)  $0 \in \{\bar{1}\}$  implica  $\{\bar{0}\} \subset \{\bar{1}\}$

- b)  $1 \in \{\hat{0}\}$  implica  $\{\hat{1}\} \subset \{\hat{0}\}$
- c)  $1 \in \{\hat{0}\}$  si, y solo si,  $0 \in \{\bar{1}\}$
- d)  $1 \in \{\hat{0}\}$  si, y solo si,  $0 \in \{1\}'$

**Teorema 2.2.** *Sea  $(X, \tau)$  espacio topológico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i.  $(X, \tau)$  es un espacio  $T_0$
- ii. Para cualquier  $x, y \in X$  arbitrarios,  $x \neq y$  se cumple  $x \vdash y$  o  $y \vdash x$ ,
- iii.  $y \in \{\bar{x}\}$  implica que  $x \notin \{\bar{y}\}$ ,
- iv.  $y \in \{x\}'$  implica que  $\{\bar{y}\} \subset \{x\}'$ ,
- v.  $y \in \{\hat{x}\}$  implica que  $x \notin \{\hat{y}\}$ ,
- vi.  $y \in \{\hat{x}\}$  implica que  $\{\hat{y}\} \subset \{\hat{x}\}$ ,
- vii.  $(\{\bar{x}\} \cap \{y\}) \cup (\{\bar{y}\} \cap \{x\})$  es degenerado (Youngs [9]),
- viii. Para cada  $x \in X$ ,  $\{x\}'$  es la unión de conjuntos cerrados,
- ix. Para cada  $x \in X$ ,  $\{x\}' \cap \{\hat{x}\} = \emptyset$ ,
- x. Para cada  $x \in X$ ,  $\langle x \rangle = \{x\}$ .

*Demostración.*

- i.  $\Rightarrow$  ii.* Como  $(X, \tau)$  es  $T_0$ , para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  existe  $O \in \tau$  tal que  $(x \in O \wedge y \notin O) \vee (x \notin O \wedge y \in O)$ , entonces  $x$  puede separarse débilmente de  $y$  esto es  $x \vdash y$  o  $y$  puede separarse débilmente de  $x$  es decir  $y \vdash x$ .
- ii.  $\Rightarrow$  iii.* Por hipótesis para  $x, y \in X$   $x \neq y$  existe  $O \in \tau$  tal que  $(x \in O \wedge y \notin O)$  o existe  $G \in \tau$  tal que  $(y \in G \wedge x \notin G)$ ; además como  $y \in \{\bar{x}\}$  entonces todo abierto que contiene a  $y$  también contiene a  $x$ , en consecuencia  $(x \in O \wedge y \notin O)$  es verdadero luego existe  $O \in \tau$  tal que  $x \in O$  pero  $O \cap \{y\} = \emptyset$  ya que  $y \notin O$  entonces  $x \notin \{\bar{y}\}$ .

*iii. ⇒ iv.* Sea  $y_0 \in \{\bar{y}\}$  entonces para todo  $O \in \tau$  tal que  $y_0 \in O$  se tiene que  $O \cap \{y\} \neq \emptyset$  ( $y \in O$ ) como  $y \in \{x\}' \subseteq \{\bar{x}\}$  entonces  $y \in \{\bar{x}\}$  luego  $O \cap \{x\} \neq \emptyset$  ( $x \in O$ ) es decir todo abierto que contiene a  $y_0$  contiene a  $x$  de este modo  $\{x\} \cap (O - \{y_0\}) \neq \emptyset$  ya que  $x \in O$  y  $x \neq y_0$  pues si fuera  $x = y_0$  entonces  $x \in \{\bar{y}\}$  implicaría que  $y \notin \{\bar{x}\}$  lo que contradice que  $y \in \{\bar{x}\}$ . Entonces  $y_0 \in \{x\}'$  y concluimos que  $\{\bar{y}\} \subset \{x\}'$ .

*iv. ⇒ v.* Supongamos que  $y \in \{\hat{x}\}$  y  $x \in \{\hat{y}\}$  entonces  $\{x\} \not\prec y$  y  $\{y\} \not\prec x$  por lo tanto para todo  $O \in \tau$  tal que  $x \in O$  se tiene que  $y \in O$  y para todo  $G \in \tau$  tal que  $y \in G$  se tiene que  $x \in G$ ; de esta manera  $\{y\} \cap (O_x - \{x\}) \neq \emptyset$  luego  $x \in \{y\}'$ , ya que  $y \in O_x$  y  $\{x\} \cap (G_y - \{y\}) \neq \emptyset$  luego  $y \in \{x\}'$  ya que  $x \in G_y$  entonces  $\{\bar{x}\} \subset \{y\}'$  y  $\{\bar{y}\} \subset \{x\}'$  de este modo  $\{\bar{x}\} \subset \{y\}' \subset \{\bar{y}\} \subset \{x\}'$  entonces  $\{\bar{x}\} \subset \{x\}'$  como  $x \in \{\bar{x}\} \subset \{x\}'$  tengo que  $x \in \{x\}'$  lo que es absurdo pues implicaría  $\{x\} \cap (O_x - \{x\}) \neq \emptyset$ .

*v. ⇒ vi.* Recordemos que  $\{\widehat{x}\} = \{\hat{x}\} - \{x\}$ , sea  $y_0 \in \{\hat{y}\}$  veamos que  $y_0 \in \{\widehat{x}\} = \{\hat{x}\} - \{x\}$  es decir que  $y_0 \in \{\hat{x}\}$  y  $y_0 \notin \{x\}$  ( $y_0 \neq x$ )

Si  $y_0 \in \{\hat{y}\}$  entonces  $y \notin \{\hat{y}_0\}$  entonces  $y_0 \vdash y$  es decir existe  $O \in \tau$  tal que  $y_0 \in O$  pero  $y \notin O$ , supongamos que  $y_0 \notin \{\hat{x}\}$  entonces existe  $G \in \tau$  tal que  $x \in G$  y  $y_0 \notin G$  luego  $x \notin \{\hat{y}_0\}$  es decir  $y_0 \not\prec x$  luego  $x \in O$  entonces  $x \in O \cap G$ ,  $y \in \{\widehat{x}\} = \{\hat{x}\} - \{x\}$ ,  $x \not\prec y$  como  $O \cap G \in \tau$  y  $x \in O \cap G$  entonces  $y \in O \cap G$  luego  $y \in O$  lo que es absurdo.

*vi. ⇒ vii.* Supongamos que:

$w, z \in (\{\bar{x}\} \cap \{y\}) \cup (\{\bar{y}\} \cap \{x\})$  y  $z \neq w$  tenemos varios casos :

Que  $w, z \in (\{\bar{x}\} \cap \{y\})$  lo que nos llevaría a que  $w, z \in \{y\}$  es decir que  $w = z = y$  lo que es absurdo.

De manera analoga si  $w, z \in (\{\bar{y}\} \cap \{x\})$ .

Ahora si  $z \in (\{\bar{x}\} \cap \{y\})$  y  $w \in (\{\bar{y}\} \cap \{x\})$  entonces,  $z = y \in \{\bar{x}\}$  y  $w = x \in \{\bar{y}\}$  entonces  $y \not\prec x$  y  $x \not\prec y$  es decir que  $x \in \{\hat{y}\}$ , ( $x \neq y$ ) y  $y \in \{\hat{x}\}$ , ( $x \neq y$ )

entonces  $x \in \{\widehat{y}\} = \{\widehat{y}\} - \{y\}$ ,  $y, y \in \{\widehat{x}\} = \{\widehat{x}\} - \{x\}$  entonces por hipotesis  $\{\widehat{x}\} \subseteq \{\widehat{y}\}$ ,  $y, \{\widehat{y}\} \subseteq \{\widehat{x}\}$  es decir que  $x \in \{\widehat{y}\} \subseteq \{\widehat{x}\} - \{x\} \subseteq \{\widehat{y}\} - \{x\}$  entonces,  $x \in \{\widehat{y}\} - \{x\}$  entonces  $x \neq x$  lo que es absurdo.

*vii.*  $\Rightarrow$  *viii.* Hay dos casos:

a) Si  $(\{\bar{x}\} \cap \{y\}) \cup (\{\bar{y}\} \cap \{x\}) = \emptyset$  entonces  $\{\bar{x}\} \cap \{y\} = \emptyset = \{\bar{y}\} \cap \{x\}$  lo que significa:  $y \notin \{\bar{x}\}$  y  $x \notin \{\bar{y}\}$ .

En particular se tiene que para todo  $y \neq x, y \notin \{\bar{x}\}$  lo que implica que  $\{\bar{x}\} = \{x\}$  y por lo tanto  $\{x\}' = \emptyset$  que es una unión de cerrados.

b) Si  $(\{\bar{x}\} \cap \{y\}) \cup (\{\bar{y}\} \cap \{x\}) = \{p\}$ , entonces  $y \in \{\bar{x}\}$  o  $x \in \{\bar{y}\}$  pero no ambas ( pues  $x \neq y$  ).

Supongamos que  $y \in \{\bar{x}\}$ , entonces  $x \notin \{\bar{y}\}$ . Queremos ver que  $\{x\}'$  es una unión de cerrados. Sea  $z \in \{x\}'$ , entonces  $z \neq x$  y  $z \in \{\bar{x}\}$ , lo que implica, por la suposición que estamos haciendo, que  $x \notin \{\bar{z}\}$ , es decir existe un abierto  $O_{xz}$  tal que  $x \in O_{xz}$  y  $z \notin O_{xz}$  luego  $z \in O_{xz}^c$  y se tiene  $z \in O_{xz}^c \cap \{\bar{x}\}$ . Veamos que:

$$\{x\}' = \bigcup_{z \in \{x\}'} O_{xz}^c \cap \{\bar{x}\}.$$

Sea  $t \in O_{xz}^c \cap \{\bar{x}\}$  para algún  $z \in \{x\}'$ . Como  $t \in \{\bar{x}\}$ , dado un abierto  $O_t$  tal que  $t \in O_t$  se tiene que  $O_t \cap \{x\} \neq \emptyset$ , es decir  $x \in O_t$ . Además  $x \neq t$  (pues si fuese  $x = t$  se tendria que  $x \in O_{xz}^c$  entonces  $x \notin O_{xz}$  lo que es absurdo), por tanto  $x \in (O_t - \{t\}) \cap \{x\}$  de modo que  $(O_t - \{t\}) \cap \{x\} \neq \emptyset$  y así  $t \in \{x\}'$ . Recíprocamente si  $z \in \{x\}'$  es claro que  $z \in O_{xz}^c \cap \{\bar{x}\}$ .

*viii.*  $\Rightarrow$  *ix.* Supongamos que existe  $y \in \{x\}' \cap \{\widehat{x}\}$  entonces  $y \in \{x\}'$  y  $y \in \{\widehat{x}\} - \{x\}$ , luego  $x \neq y$  y  $y \neq x$ . Por hipótesis tenemos que existe una familia de cerrados  $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$  tal que:

$$\{x\}' = \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha$$

Como  $y \in \{x\}'$  entonces  $y \in C_{\alpha_0}$  para algún  $\alpha_0 \in A$ . Como  $x \notin \{x\}'$  entonces  $x \notin C_{\alpha}$  para todo  $\alpha \in A$ , en particular  $x \notin C_{\alpha_0}$  luego  $x \in C_{\alpha_0}^c$ , y se tendría un abierto  $C_{\alpha_0}^c$  tal que  $x \in C_{\alpha_0}^c$  y  $y \notin C_{\alpha_0}^c$ , lo que contradice que  $x \not\sim y$ .

*ix.  $\Rightarrow$  x.* Hay que mostrar que  $\langle x \rangle = \{x\}$  es decir que  $\{x\} \subset \langle x \rangle$  y  $\langle x \rangle \subset \{x\}$ .

- Veamos que  $\{x\} \subset \langle x \rangle$  es decir que  $\{x\} \subset \{\bar{x}\} \cap \{\hat{x}\}$  lo cual es inmediato.
- Veamos que  $\langle x \rangle \subset \{x\}$  es decir  $\{\bar{x}\} \cap \{\hat{x}\} \subset \{x\}$ , sea  $z_0 \in \{\bar{x}\} \cap \{\hat{x}\}$  y supongamos que  $z_0 \notin \{x\}$ , entonces  $z_0 \neq x$ . Como  $z_0 \in \{\bar{x}\}$  y  $z_0 \in \{\hat{x}\}$ , entonces para todo  $O \in \tau$  tal que  $z_0 \in O$  se tiene que  $\{x\} \cap O \neq \emptyset$  y como  $z_0 \neq x$  se cumple que  $\{x\} \cap (O - \{z_0\}) \neq \emptyset$  entonces  $z_0 \in \{x\}'$  de donde se concluye que  $z_0 \in \{x\}' \cap (\{\hat{x}\} - \{x\})$  es decir  $z_0 \in \{x\}' \cap \{\hat{x}\}$  lo que contradice la hipótesis.

*x.  $\Rightarrow$  i.* Sea  $x \neq y$  como  $\langle x \rangle = \{x\}$  entonces por definición de  $\langle x \rangle$  se tiene que  $\{\bar{x}\} \cap \{\hat{x}\} = \{x\} \neq \{y\}$  es decir que  $y \notin \{\bar{x}\}$  o  $y \notin \{\hat{x}\}$ .

Si  $y \notin \{\bar{x}\}$ , entonces existe un abierto  $O$  tal que  $y \in O$  y  $x \notin O$ .

Si  $y \notin \{\hat{x}\}$ , entonces  $x \vdash y$  es decir que existe un abierto  $G$  tal que  $x \in G$  y  $y \notin G$ .

Por lo que el espacio es  $T_0$ .

□

**Teorema 2.3.** *Sea  $(X, \tau)$  espacio topológico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i.  $(X, \tau)$  es un espacio  $T_1$*
- ii. Para  $x, y \in X$  arbitrarios,  $x \neq y$ ,  $x \vdash y$ ,*
- iii. para cada  $x \in X$ ,  $\{\bar{x}\} = \{x\}$ ,*
- iv. para cada  $x \in X$ ,  $\{x\}' = \emptyset$*
- v. para cada  $x \in X$ ,  $\{\hat{x}\} = \{x\}$ ,*

vi. para cada  $x \in X$ ,  $\{\widehat{x}\} = \emptyset$

vii. para  $x, y \in X$  arbitrarios,  $x \neq y$ ,  $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\} = \emptyset$

viii. para  $x, y \in X$  arbitrarios,  $x \neq y$ ,  $\{\hat{x}\} \cap \{\hat{y}\} = \emptyset$ ,

ix.  $N_D = X$ ,

x.  $N_S = X$ .

*Demostración.*

*i.  $\Rightarrow$  ii.* Si  $(X, \tau)$  es  $T_1$  entonces para cada  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  existen  $O, G \in \tau$  tal que  $x \in O$  y  $y \notin O$  y  $x \notin G$  y  $y \in G$  luego  $x \vdash y$  y  $y \vdash x$ , entonces  $x \vdash y$ .

*ii.  $\Rightarrow$  iii.* Mostremos que  $\{\bar{x}\} = \{x\}$  es decir la doble contención  $\{\bar{x}\} \subset \{x\}$  y  $\{x\} \subset \{\bar{x}\}$ , la segunda es inmediata, luego basta probar que  $\{\bar{x}\} \subset \{x\}$ .

Sea  $y_0 \in \{\bar{x}\}$ , entonces para todo  $O \in \tau$  tal que  $y_0 \in O$  se tiene que  $O \cap \{x\} \neq \emptyset$  es decir todo abierto que contiene a  $y_0$  contiene a  $x$  entonces  $y_0 \not\vdash x$  y por hipótesis  $y_0 = x \in \{x\}$  como se quería ver.

*iii.  $\Rightarrow$  iv.* Supongamos que  $\{x\}' \neq \emptyset$  y sea  $y_0 \in \{x\}'$  como  $\{x\}' \subset \{\bar{x}\}$  entonces  $y_0 \in \{\bar{x}\}$ ; además por hipótesis  $\{\bar{x}\} = \{x\}$  luego  $y_0 \in \{x\}$  de este modo  $y_0 = x$  lo que contradice que  $y_0 \in \{x\}'$  es decir que para todo  $O \in \tau$  tal que  $y_0 \in O$  se tiene que  $\{x\} \cap (O - \{y_0\}) \neq \emptyset$ , concluimos que  $\{x\}' = \emptyset$ .

*iv.  $\Rightarrow$  v.* Hay que ver:  $\{\hat{x}\} \subset \{x\}$  y  $\{x\} \subset \{\hat{x}\}$ .

Que  $\{x\} \subset \{\hat{x}\}$  es trivial ya que  $\{x\} \not\vdash \{x\}$  luego basta probar que  $\{\hat{x}\} \subset \{x\}$ , sea  $z_0 \in \{\hat{x}\}$  entonces  $\{x\} \not\vdash z_0$  es decir para todo  $O \in \tau$  tal que  $x \in O$  se tiene que  $z_0 \notin O$ . Por hipótesis  $\{z_0\}' = \emptyset$ . Además  $x \in \{\bar{z}_0\} = \{z_0\}' \cup \{z_0\} = \emptyset \cup \{z_0\} = \{z_0\}$  entonces  $z_0 = x$ .

*v.  $\Rightarrow$  vi.* Como  $\{\widehat{x}\} = \{\hat{x}\} - \{x\}$  y por hipótesis  $\{\hat{x}\} = \{x\}$ , entonces  $\{\widehat{x}\} = \{x\} - \{x\} = \emptyset$  como se quería ver.

*vi.⇒vii.* Supongamos que  $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\} \neq \emptyset$  con  $x \neq y$ , es decir existe un  $z_0 \in \{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\}$ , luego  $z_0 \in \{\bar{x}\}$  y  $z_0 \in \{\bar{y}\}$ , entonces para todo  $O \in \tau$  tal que  $z_0 \in O$  se tiene que  $O \cap \{x\} \neq \emptyset$  y  $O \cap \{y\} \neq \emptyset$  es decir  $z_0 \not\prec x$  y  $z_0 \not\prec y$  por lo que  $x, y \in \{\hat{z}_0\}$  pero por hipótesis  $\{\hat{z}_0\} = \emptyset$  es decir  $\{\hat{z}_0\} - \{z_0\} = \emptyset$  lo que es absurdo.

*vii.⇒viii.* Supongamos que  $\{\hat{x}\} \cap \{\hat{y}\} \neq \emptyset$ , sea  $z_0 \in \{\hat{x}\} \cap \{\hat{y}\}$  entonces  $z_0 \in \{\hat{x}\}$  y  $z_0 \in \{\hat{y}\}$ , es decir que  $\{x\} \not\prec z_0$  y  $\{y\} \not\prec z_0$ , entonces  $x, y \in \{\bar{z}_0\}$ , como  $x \neq z_0$  (pues si  $x = z_0$ , entonces  $y \in \{\bar{z}_0\} = \{\bar{x}\}$  entonces  $y \in \{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\}$  lo que contradice la hipótesis). De este modo como  $x \neq z_0$ , entonces  $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{z}_0\} = \emptyset$  (hipótesis) pero  $x \in \{\bar{x}\} \cap \{\bar{z}_0\}$  lo que es absurdo.

*viii.⇒ix.* Hay que ver que  $N_D \subset X$  y que  $X \subset N_D$ , basta probar que  $X \subset N_D$  ya que  $N_D \subset X$  se tiene por la definición de  $N_D$ . Sea  $z \in X$  y supongamos que  $z \notin N_D$  es decir que  $\{z\}' \neq \emptyset$ ; sea  $z_0 \in \{z\}'$  entonces para todo  $O \in \tau$  tal que  $z_0 \in O$  se tiene que  $\{z\} \cap (O - \{z_0\}) \neq \emptyset$  ( $z_0 \neq z$ ) entonces  $z_0 \not\prec \{z\}$  por lo que  $z \in \{\hat{z}_0\}$  y como  $z \in \{\hat{z}\}$  entonces  $\{\hat{z}_0\} \cap \{\hat{z}\} \neq \emptyset$  lo cual contradice la hipótesis.

*ix.⇒x.* Veamos que  $N_S = X$  es decir que  $N_S \subset X$  y  $X \subset N_S$ .

Que  $N_S \subset X$  es trivial por la definición de  $N_S$ , luego basta mostrar que  $X \subset N_S$ . Sea  $z_0 \in X$  y supongamos que  $z_0 \notin N_S$  es decir que  $\{\hat{z}_0\} \neq \emptyset$  luego  $\{\hat{z}_0\} = \{\hat{z}_0\} - \{z_0\} \neq \emptyset$  por lo que existe  $z_1 \in \{\hat{z}_0\} - \{z_0\}$ ,  $z_1 \in \{\hat{z}_0\}$  y  $z_1 \neq z_0$  entonces  $z_0 \not\prec z_1$  y  $z_0 \neq z_1$  de este modo  $z_0 \in \{z_1\}'$ , como  $z_1 \in X$  y por hipótesis  $N_D = X$  entonces  $z_1 \in N_D$  luego  $\{z_1\}' = \emptyset$  lo que es absurdo.

*x.⇒i.* Como  $N_S = \{x \in X : \{\hat{x}\} = \emptyset\}$  y por hipótesis  $N_S = X$  entonces para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  tenemos que  $\{\hat{x}\} = \emptyset$  y  $\{\hat{y}\} = \emptyset$  luego por definición de cáscara  $\{\hat{x}\} - \{x\} = \emptyset$  y  $\{\hat{y}\} - \{y\} = \emptyset$  entonces  $x \in \{\hat{x}\}$  y  $y \notin \{\hat{x}\}$  y  $y \in \{\hat{y}\}$  y  $x \notin \{\hat{y}\}$ , es decir que  $x \not\prec x$  y  $x \vdash y$  y  $y \not\prec y$  y  $y \vdash x$  de aquí que existen abiertos  $O, G$  tal que  $x \in O$  y  $y \notin O$  y  $y \in G$   $x \notin G$  luego el espacio es  $T_1$ .

□

# Nuevos axiomas de separación.

Los tres primeros axiomas de separación entre  $T_0$  y  $T_1$  a los que hace referencia el artículo son  $T_{UD}$ ,  $T_D$  y  $T_{DD}$  los cuales se basan fundamentalmente en unas equivalencias que se cumplen en los espacios  $T_0$  y  $T_1$ :

i) Un espacio es  $T_0$  si, y solo si, para todo  $x \in X$ ,  $\{x\}'$  es la unión de conjuntos cerrados.

ii) Un espacio es  $T_1$  si, y solo si, para todo  $x \in X$ ,  $\{x\}' = \emptyset$  (luego es cerrado).

iii) Un espacio es  $T_1$  si, y solo si, para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ ,  $\{x\}' \cap \{y\}' = \emptyset$ .

Aunque en  $T_1$  se tiene que  $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\} = \emptyset$  para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ , de esta se deduce iii) ya que  $\{x\}' \subset \{\bar{x}\}$  para cualquier  $x \in X$ .

**Definición 2.1.** Sea  $(X, \tau)$  espacio topológico.

1) Decimos que  $(X, \tau)$  es  $T_{UD}$ , si para cada  $x \in X$ ,  $\{x\}'$  es la unión de conjuntos cerrados disjuntos.

2) Decimos que  $(X, \tau)$  es  $T_D$ , si para cada  $x \in X$ ,  $\{x\}'$  es un conjunto cerrado.

3) Decimos que  $(X, \tau)$  es  $T_{DD}$ , si  $(X, \tau)$  es  $T_D$  y para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  se tiene que  $\{x\}' \cap \{y\}' = \emptyset$ .

**Ejemplo 2.5.** Sea  $X = \{a, b\}$  y  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

i) En el ejemplo 1.5. se vio que este espacio es  $T_0$  pero no es  $T_1$ .

ii)  $(X, \tau)$  es  $T_{UD}$ ?

Para lo cual hay que hallar  $\{a\}'$  y  $\{b\}'$  y mirar que son uniones de cerrados disjuntos.

Es claro que  $a \notin \{a\}'$  y  $b \in \{a\}'$ , luego  $\{a\}' = \{b\}$ .

Es claro que  $a \notin \{b\}'$  y  $b \notin \{b\}'$ , luego  $\{b\}' = \emptyset$ .

Además los cerrados en el espacio son  $\emptyset$ ,  $X$  y  $\{b\}$  de donde se concluye que el espacio es  $T_{UD}$ .

iii)  $(X, \tau)$  es  $T_D$  ?

Miremos el conjunto de los puntos de acumulación de  $a$  y de  $b$ .

Sabemos que  $\{a\}' = \{b\}$  el cual es cerrado y que  $\{b\}' = \emptyset$  es también cerrado, luego por la definición de  $T_D$  se concluye que el espacio es  $T_D$ .

iv)  $(X, \tau)$  es  $T_{DD}$  ?

Como el espacio es  $T_D$ , basta mirar si para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  se tiene que  $\{x\}' \cap \{y\}' = \emptyset$ , en este caso  $\{a\}' \cap \{b\}' = \emptyset$  por lo que  $(X, \tau)$  es  $T_{DD}$ .

**Ejemplo 2.6.** Sea  $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$  recordemos que los abiertos básicos son de la forma  $[x, \infty)$ , luego los cerrados son de la forma  $(-\infty, x)$

i) Anteriormente se hizo referencia a que  $(\mathbb{R}, \tau)$  es  $T_0$  pero no es  $T_1$ .

ii)  $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$  es  $T_{UD}$ ?

Es claro que para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  se tiene que  $\{x\}' = (-\infty, x)$  es un cerrado el cual lo podemos representar como unión de conjuntos cerrados disjuntos esto es  $\{x\}' = (-\infty, x) \cup \emptyset$ , de este modo el espacio es  $T_{UD}$ .

iii)  $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$  es  $T_D$  ?

Como para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\{x\}' = (-\infty, x)$  es cerrado se tiene que el espacio es  $T_D$ .

iv)  $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$  es  $T_{DD}$  ?

Basta mirar si para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  con  $x \neq y$  se tiene que  $\{x\}' \cap \{y\}' = \emptyset$ .

Es claro que  $\{x\}' = (-\infty, x)$  y  $\{y\}' = (-\infty, y)$  con  $y \neq x$  y además  $\{x\}' \cap \{y\}' \neq \emptyset$  por lo que el espacio no es  $T_{DD}$ .

**Ejemplo 2.7.** Sea  $X = \{a, b, c\}$  y  $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$ .

Claramente este espacio no es  $T_0$ .

Los cerrados en este espacio son  $\emptyset, X$  y  $\{c\}$ .

Además se tiene que:

$\{a\}' = \{b, c\}$ ,  $\{b\}' = \{a, c\}$  y  $\{c\}' = \emptyset$  por lo que el espacio no es  $T_{UD}$ , no es  $T_D$ , no es  $T_{DD}$ .

De este modo es fácil ver que se tienen las siguientes implicaciones:

$$T_1 \Rightarrow T_{DD} \Rightarrow T_D \Rightarrow T_{UD} \Rightarrow T_0.$$

Cabe notar que las implicaciones recíprocas no son ciertas, esto es:

$$T_1 \not\Leftarrow T_{DD} \not\Leftarrow T_D \not\Leftarrow T_{UD} \not\Leftarrow T_0.$$

**Teorema 2.4.** *Cada espacio  $T_D$  es un espacio  $T_0$ .*

*Demostración.* Si  $(X, \tau)$  es  $T_D$ , entonces para cada  $x \in X$ , se tiene que  $\{x\}'$  es cerrado y por el teorema 2,2 (viii) concluimos que  $(X, \tau)$  es  $T_0$ .  $\square$

**Teorema 2.5.** *Todo espacio  $T_1$  es un espacio  $T_D$*

*Demostración.* En un espacio  $T_1$  para cada  $x \in X$  se tiene que  $\{x\}' = \emptyset$  y como  $\emptyset$  es un conjunto cerrado, entonces el espacio es  $T_D$ .  $\square$

De lo anterior podemos decir que la topología de complemento finito  $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$  y la usual  $(\mathbb{R}, \tau_u)$  por se ambas  $T_1$  también son  $T_{UD}$ ,  $T_D$  y  $T_{DD}$ .

Los siguientes teoremas nos proporcionan algunas formulaciones equivalentes para el axioma de separación  $T_D$ .

**Teorema 2.6.** *Un espacio  $(X, \tau)$  es  $T_D$  si, y solo si, para todo  $x \in X$  existe un conjunto  $G$  abierto, y un conjunto  $C$  cerrado en el espacio tal que  $\{x\} = G \cap C$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ) Si  $(X, \tau)$  es  $T_D$ , entonces por definición  $\{x\}'$  es cerrado para todo  $x \in X$ , luego  $(\{x\}')^C$  es abierto; además  $\{\bar{x}\}$  es cerrado entonces es claro que  $x \in (\{x\}')^C \cap \{\bar{x}\}$ . Tomando  $G = (\{x\}')^C$  y  $C = \{\bar{x}\}$  tenemos que  $\{x\} \subset G \cap C$ .

Ahora veamos que  $G \cap C \subset \{x\}$ . Sea  $y_0 \in G \cap C$  entonces  $y_0 \notin \{x\}'$  y  $y_0 \in \{\bar{x}\}$  por lo que  $y_0 \in \{\bar{x}\} - \{x\}'$  pero  $\{\bar{x}\} = \{x\} \cup \{x\}'$ , entonces  $y_0 \in \{x\}$  como se quería ver.

$\Leftarrow$ ) Si para todo  $x \in X$ ,  $\{x\} = G \cap C$  con  $G$  abierto y  $C$  cerrado ya vimos que  $\{x\}' = \{\bar{x}\} - \{x\}$ , entonces  $\{x\}' = \{\bar{x}\} - (G \cap C) = (\{\bar{x}\} - G) \cup (\{\bar{x}\} - C) = (\{\bar{x}\} \cap G^c) \cup (\{\bar{x}\} - C \cap \{\bar{x}\}) = (\{\bar{x}\} \cap G^c) \cup (\{\bar{x}\} - \{\bar{x}\}) = (\{\bar{x}\} \cap G^c) \cup \emptyset$  el cual es cerrado, entonces  $(X, \tau)$  es un espacio  $T_D$ .  $\square$

**Teorema 2.7.** *Un espacio  $(X, \tau)$  es  $T_D$  si, y solo si, para todo conjunto  $A \subset X$  se tiene que  $A'$  es cerrado.*

*Demostración.*  $\Leftarrow$ ) Por hipótesis para todo  $A \subset X$ ,  $A'$  es cerrado entonces para todo  $\{x\} \subset X$  tenemos que  $\{x\}'$  es un conjunto cerrado por lo que  $(X, \tau)$  es  $T_D$ .

$\Rightarrow$ ) Mostremos que si  $A \subseteq X$ ,  $A'$  es cerrado, es decir que  $A' = \bar{A}' = (A')' \cup A'$ .

Es claro que  $A' \subset (A')' \cup A'$ , luego basta probar que  $(A')' \cup A' \subset A'$  o que  $(A')' \subset A'$ .

Sea  $x \in (A')'$  y sea  $V_x$  una vecindad de  $x$  además por hipótesis  $\{x\}'$  es cerrado para todo  $x \in X$ , luego  $(\{x\}')^c$  es abierto y  $x \in (\{x\}')^c$  entonces  $(\{x\}')^c \cap V_x$  es un abierto que contiene a  $x$ , y como  $x \in (A')'$  se tiene que  $((\{x\}')^c \cap V_x) \cap A' \neq \emptyset$  por lo que existe  $y \neq x$  tal que  $y \in ((\{x\}')^c \cap V_x) \cap A'$  entonces por el lema 2) se tiene que  $y \in (\{\bar{x}\}^c \cap V_x) \cap A'$  es decir que  $y \in A'$  y  $\{\bar{x}\}^c \cap V_x$  es un abierto el cual contiene a  $y$  entonces  $((\{\bar{x}\}^c \cap V_x) - \{y\}) \cap A' \neq \emptyset$  entonces existe  $z \neq y$  y  $z \neq x$  tal que  $z \in \{\bar{x}\}^c \cap V_x$  y  $z \in A'$  y como  $\{\bar{x}\}^c \cap V_x \subset V_x$  se tiene que  $z \in V_x \cap A'$  con  $z \neq x$  entonces  $x \in A'$ . De este modo se concluye que  $(A')' \subset A'$  como se quería ver.  $\square$

El siguiente teorema nos habla de los espacios discretos de Alexandroff recordemos que  $(X, \tau)$  espacio discreto de Alexandroff si, y solo si, es  $T_0$  y para todo  $A \subseteq X$  se tiene que  $\bar{A} = \bigcup \{\{\bar{x}\} : x \in A\}$ .

**Teorema 2.8.** *Si  $(X, \tau)$  es un espacio discreto de Alexandroff, entonces  $(X, \tau)$  es  $T_D$ .*

*Demostración.* Veamos que para todo  $x \in X$ ,  $\{x\}'$  es cerrado, para lo cual miremos que:

$$\{x\}' = \bigcup \{\{y\} : y \in \{x\}'\} = \overline{\{x\}'}$$

La primera igualdad es clara. Mostremos la segunda

$\subseteq$ : Si  $y \in \bigcup \{\{y\} : y \in \{x\}'\}$  entonces  $y \in \{x\}'$  además por ser el espacio  $T_0$  se tiene que  $\{\bar{y}\} \subseteq \{x\}'$  entonces  $\overline{\{\bar{y}\}} \subseteq \overline{\{x\}'}$  entonces  $y \in \{\bar{y}\} \subseteq \overline{\{x\}'}$  luego  $y \in \overline{\{x\}'}$ .

$\supseteq$ : Sea  $y \in \overline{\{x\}'} = \bigcup \{\{\bar{z}\} : z \in \{x\}'\}$  (hipótesis) entonces  $y \in \{\bar{z}\}$ , para algún  $z \in \{x\}'$ ,  $x \neq z$ . Tenemos:  $y \in \{\bar{z}\} = \{z\} \cup \{z\}'$ .

a) Si  $y = z$  ya está pues  $z \in \{x\}'$  entonces  $y \in \{x\}'$ .

b) Si  $y \in \{z\}'$ , sea  $O_y$  abierto tal que  $y \in O_y$ , queremos ver que  $(O_y - \{y\}) \cap \{x\}' \neq \emptyset$  ( $\leftrightarrow x \in O_y \wedge x \neq y$ ).

Como  $y \in \{z\}'$  entonces  $(O_y - \{y\}) \cap \{z\} \neq \emptyset$  entonces  $z \in O_y$  y  $z \neq y$ .

Como  $z \in \{x\}'$  entonces  $(O_y - \{z\}) \cap \{x\} \neq \emptyset$  entonces  $x \in O_y$  y  $x \neq z$ .

Como  $(X, \tau)$  es  $T_0$ ,  $z \neq y$  y todo abierto que contiene a  $y$ , contiene a  $z$ , entonces debe existir un abierto  $O_z$  tal que  $z \in O_z$  y  $y \notin O_z$ . Entonces  $O_z \cap O_y$  es un abierto tal que  $x \in O_z \cap O_y$  ( $z \in \{x\}' \rightarrow (O_z - \{z\}) \cap \{x\} \neq \emptyset \rightarrow x \in O_z$ ). Si fuera  $x = y$  se tendría que  $y \in O_z \cap O_y$  entonces  $y \in O_z$  lo que es absurdo, luego  $x \neq y$  implica  $y \in \{x\}'$ .

□

Los siguientes cuatro axiomas completan el grupo de los axiomas de separación entre  $T_0$  y  $T_1$ .

**Definición 2.2.** Sea  $(X, \tau)$  espacio topológico.

- 1) Decimos que  $(X, \tau)$  es  $T_F$ , si dado cualquier punto  $x \in X$ , y cualquier conjunto finito  $F \subset X$ , tal que  $x \notin F$ , entonces  $x \vdash F$  o  $F \vdash x$ .
- 2) Decimos que  $(X, \tau)$  es  $T_{FF}$ , si para cualquiera dos conjuntos finitos  $F_1$  y  $F_2$  en  $X$  con  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ , entonces  $F_1 \vdash F_2$  o  $F_2 \vdash F_1$ .
- 3) Decimos que  $(X, \tau)$  es  $T_Y$ , si para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  se tiene que  $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\}$  es degenerado (contiene un punto a lo sumo).
- 4) Decimos que  $(X, \tau)$  es  $T_{YS}$ , si para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  se tiene que  $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\} = \emptyset$  o es  $\{x\}$  o es  $\{y\}$ .

Es claro por las definiciones anteriores que las siguientes implicaciones se tienen:

$$T_{YS} \Rightarrow T_Y \text{ y } T_{FF} \Rightarrow T_F.$$

**Ejemplo 2.8.** Sea  $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$ , en el ejemplos 2.6. vimos que este espacio era  $T_0$ ,  $T_{UD}$  y  $T_D$  pero no  $T_1$  ni  $T_{DD}$  ahora miremos si:

a) ¿ $(\mathbb{R}, \tau_{cd})$  es  $T_F$ ?

Sea  $F = \{1, 2, 3, 4\} \subseteq \mathbb{R}$  y sea  $x = \sqrt{2} \notin F$ , de esta manera es claro que  $\sqrt{2} \not\vdash F$  y  $F \not\vdash \sqrt{2}$  por lo que el espacio no es  $T_F$ .

b)  $\dot{\delta}(\mathbb{R}, \tau_{cd})$  es  $T_{FF}$ ?

Sean  $F_1 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  y  $F_2 = \{1, 3, 5, 7\}$ , es claro que  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  pero  $F_1 \not\subseteq F_2$  y  $F_2 \not\subseteq F_1$  por lo que el espacio no es  $T_{FF}$ .

c)  $\dot{\delta}(\mathbb{R}, \tau_{cd})$  es  $T_Y$ ?

Para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  se tiene que:  $\{\bar{x}\} = (-\infty, x]$  y  $\{\bar{y}\} = (-\infty, y]$  por lo que  $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\}$  no es degenerado de esta manera el espacio no es  $T_Y$ .

d)  $\dot{\delta}(\mathbb{R}, \tau_{cd})$  es  $T_{YS}$ ?

Ya que  $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\}$  no es  $\emptyset$ , ni  $\{x\}$  ni  $\{y\}$  concluimos que el espacio no es  $T_{YS}$ .

**Ejemplo 2.9.** Sea  $X = \{a, b\}$  y  $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ , ya se vio en el ejemplo 2.5. que este espacio no es  $T_1$  pero si  $T_0, T_{UD}, T_D$  y  $T_{DD}$  ahora miremos si:

a)  $\dot{\delta}(X, \tau)$  es  $T_F$ ?

Sean  $F = \{a\}$  y  $x = b \notin F$  es claro que  $F \vdash b$  tomando  $O = \{a\}$  se tiene que  $F \subseteq O$  y  $b \notin O$ .

Si  $F = \{b\}$  y  $x = a \notin F$  entonces  $a \vdash F$  tomando  $G = \{a\}$ .

De esta manera el espacio es  $T_F$ .

b)  $\dot{\delta}(X, \tau)$  es  $T_{FF}$ ?

Sean  $F_1 = \{a\}$  y  $F_2 = \{b\}$ , es claro que  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$  y que  $F_1 \vdash F_2$  tomando  $O = \{a\}$  ya que  $F_1 \subseteq O$  y  $b \notin O$  luego el espacio es  $T_{FF}$ .

c)  $\dot{\delta}(X, \tau)$  es  $T_Y$ ?

Como  $a \neq b$  y  $\{\bar{a}\} = \{a, b\}$  y  $\{\bar{b}\} = \{b\}$  entonces  $\{\bar{a}\} \cap \{\bar{b}\} = \{b\}$ , el cual es degenerado por lo que se concluye que el espacio es  $T_Y$ .

d)  $\dot{\delta}(X, \tau)$  es  $T_{YS}$ ?

Como  $\{\bar{a}\} \cap \{\bar{b}\} = \{b\}$  entonces el espacio es  $T_{YS}$ .

**Ejemplo 2.10.** En  $\mathbb{R}$  sean los conjuntos cerrados todos los  $\{x\}$  para  $x \neq 0$  y todas las uniones finitas de estos conjuntos.

Veamos que este espacio es  $T_{UD}$  y  $T_{YS}$ , pero no es  $T_D$  ni  $T_{DD}$ .

Los cerrados son  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  con  $x \neq 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  además para cualquier  $x \in \mathbb{R}$  tenemos que  $\{\bar{x}\} = \{x\}$  si  $x \neq 0$  y  $\{\bar{x}\} = \mathbb{R}$  si  $x = 0$  ( $\{\bar{0}\} = \mathbb{R}$ ) entonces tenemos

que:  $\{x\}' = \{\bar{x}\} - \{x\} = \emptyset$  si  $x \neq 0$  y  $\{x\}' = \{\bar{x}\} - \{x\} = \mathbb{R} - \{0\}$  si  $x = 0$  de donde  $\emptyset$  es cerrado y  $\mathbb{R} - \{0\} = \bigcup_{x \neq 0} \{x\}$  es la unión de cerrados disjuntos por lo que el espacio es  $T_{UD}$ .

Es  $T_{YS}$  ya que para todo  $x \neq y$  tenemos que:

$$\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\} = \emptyset \text{ si } x \neq 0 \text{ y } y \neq 0$$

$$\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\} = \{y\} \text{ si } x = 0 \text{ y } y \neq 0$$

$$\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\} = \{x\} \text{ si } x \neq 0 \text{ y } y = 0.$$

No es  $T_D$  ya que si tomamos  $x = 0$  se tiene que  $\{0\}' = \mathbb{R} - \{0\}$  que no es cerrado en este espacio (no es finito).

No es  $T_{DD}$  por que no es  $T_D$ .

Los siguientes teoremas nos proporcionan algunas caracterizaciones importantes de los anteriores axiomas de separación.

**Teorema 2.9.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i.  $(X, \tau)$  es un espacio  $T_F$ .
- ii. Para  $x$  y cada conjunto  $F$  que consiste a lo más de dos puntos solamente se cumple que  $x \vdash F$  o  $F \vdash x$ .
- iii. para cada  $x \in X$ ,  $y \in \{x\}'$  implica que  $\{y\}' = \emptyset$ .

*Demostración.*

$i. \Rightarrow ii.$  Es inmediato por la definición de  $T_F$ .

$ii. \Rightarrow iii.$  Para un  $x$  dado, sea  $z, y \in \{x\}'$  y sea  $F = \{x, z\}$  es claro que  $y \not\vdash F$  ya que todo abierto que contiene a  $y$  intersecta a  $F$  en el punto  $x$ , luego se debe tener que  $F = \{x, z\} \vdash y$  entonces existe  $O_{y,z}$  tal que  $\{x, z\} \subseteq O_{y,z}$  y  $y \notin O_{y,z}$ , sea  $C_{y,z} = O_{y,z}^C$  el cual es cerrado,  $y \in C_{y,z}$  y  $x, z \notin C_{y,z}$ . De aqui tenemos que:

$$\bigcap [C_{y,z} : z \in \{x\}', z \neq y] \cap \{\bar{x}\} = \{y\} \supset \{\bar{y}\}$$

Veamos que se cumple dicha igualdad.

- Miremos la contención  $\subseteq$ , para lo cual sea  $t \in C_{y,z}$  para todo  $z \in \{x\}'$ ,  $z \neq y$  y  $t \in \{\bar{x}\}$ , entonces si  $t \in C_{y,z}$  tenemos que  $t \neq x$  además como todo abierto que contiene a  $t$  contiene a  $x$  ( $t \in \{\bar{x}\}$ ) entonces  $t \in \{x\}'$ ; si suponemos que  $t \neq y$  entonces  $t \in \{x\}'$  y  $t \neq y$  implica que  $t \in C_{y,t}$  pero  $t \notin C_{y,t}$  lo que es absurdo, luego  $t = y$ .

- La contención  $\supseteq$  también se tiene puesto que  $y \in C_{y,z}$  y  $y \in \{x\}' \subset \{\bar{x}\}$  luego  $y$  pertenece a la intersección como se quería ver.

Que  $\{\bar{y}\} \subset \{y\}$  también se cumple puesto que  $\{\bar{y}\}$  es el cerrado más pequeño que contiene a  $y$  y  $\cap \{C_{y,z} : z \in \{x\}', z \neq y\} \cap \{\bar{x}\}$  es un cerrado que contiene a  $y$ .

Entonces que  $\{\bar{y}\} \subset \{y\}$  implica  $\{\bar{y}\} = \{y\} = \{y\}' \cup \{y\}$ , luego  $\{y\}' = \emptyset$ .

*iii.  $\Rightarrow$  i.* Sea  $x \in X$  y sea el conjunto finito  $F = \{y_1, y_3, \dots, y_k; z_1, z_2, \dots, z_k\}$  donde  $x \notin F$  ya que  $y_1$  a  $y_k$  pertenecen a  $\{x\}'$  y  $z_1$  a  $z_k$  pertenecen a  $\{\bar{x}\}^c$  por hipótesis si  $x \in \{z\}' \subset \{\bar{z}\}$ , entonces  $\{x\}' = \emptyset$ . De aquí, a menos que el conjunto de las  $y$  sea vacío,  $x$  no puede estar en la clausura de un  $z_k$  así que

$$\left( \bigcup_{n=1}^k \{y_n\}^c \right) \cup \left( \bigcup_{s=1}^m \{\bar{z}_s\}^c \right)$$

es un conjunto abierto que contiene a  $x$  y no a  $F$  luego  $x \vdash F$ .

Si no hay  $y$  entonces  $\{\bar{z}\}^c$  es un conjunto abierto que contiene a  $F$  y no a  $x$  es decir  $F \vdash x$  por lo que el espacio es  $T_F$ .

□

**Teorema 2.10.** *Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*i.  $(X, \tau)$  es un espacio  $T_Y$ .*

*ii.  $(X, \tau)$  es  $T_F$  y para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  se tiene que  $\{x\}' \cap \{y\}'$  es degenerado.*

iii.  $(X, \tau)$  es  $T_F$  y para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  se tiene que  $\{\widehat{x}\} \cap \{\widehat{y}\}$  es degenerado.

iv. para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  se tiene que  $\{\widehat{x}\} \cap \{\widehat{y}\}$  es degenerado.

*Demostración.*

*i.  $\Rightarrow$  ii.* Sea  $y \in \{\bar{x}\}$  con  $y \neq x$  en un espacio  $T_Y$  entonces como  $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\}$  es degenerado ( por definición de  $T_Y$  ) tengo que  $y \in \{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\}$  y como  $\{y\}' \subset \{\bar{y}\}$  entonces  $\{y\}' = \emptyset$  por lo que el espacio es  $T_F$ . Ahora que  $\{x\}' \cap \{y\}'$  es degenerado en un espacio  $T_Y$  es inmediato ya que  $\{x\}' \cap \{y\}' \subset \{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\}$  el cual es degenerado por lo que  $\{x\}' \cap \{y\}'$  tambien es degenerado.

*ii.  $\Rightarrow$  iii.* Basta probar que  $\{\widehat{x}\} \cap \{\widehat{y}\}$  es degenerado, por hipótesis  $\{x\}' \cap \{y\}'$  es degenerado luego. Si  $\{x\}' \cap \{y\}' = \emptyset$  entonces  $\{\widehat{x}\}$  es degenerado y  $\{\widehat{y}\}$  es degenerado (teorema 2.1. (e)) de este modo  $\{\widehat{x}\} \cap \{\widehat{y}\} = \emptyset$  o  $\{\widehat{x}\} \cap \{\widehat{y}\} = \{p\}$ .

*iii.  $\Rightarrow$  iv.* Supongamos que para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ ,  $\{\widehat{x}\} \cap \{\widehat{y}\}$  no es degenerado esto es que existen  $z, w \in \{\widehat{x}\} \cap \{\widehat{y}\}$  con  $z \neq w \neq x \neq y$  lo que implica que  $z, w \in \{\widehat{x}\} - \{x\}$  y  $z, w \in \{\widehat{y}\} - \{y\}$  luego por definición  $z, w \in \{\bar{x}\}$  y  $z, w \in \{\bar{y}\}$  por lo que  $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\}$  no es degenerado y contradice la hipótesis.

*iv.  $\Rightarrow$  i.* Supongamos que  $(X, \tau)$  no es  $T_Y$  es decir que existen  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  tal que  $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\}$  no es degenerado, es decir que existen  $z \neq w$  tal que  $z, w \in \{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\}$  entonces por el (teorema 2.1 (c))  $x, y \in \{\widehat{z}\} \cap \{\widehat{w}\}$  lo que contradice la hipotesis.  $\square$

Enseguida se construirán algunos ejemplos para mostrar que al menos nuestros principales axiomas, son distintos. En todos los ejemplos  $X$  es el conjunto de los números reales y se sobreentiende que el conjunto nulo y el conjunto  $X$  son cerrados.

**Ejemplo 2.11.** Sean todos los conjuntos que contengan  $x = 0$  como elemento, los cerrados.

Veamos que este espacio es  $T_Y$  pero no es  $T_{YS}$ .

Como para todo  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\bar{A}$  es el cerrado más pequeño que contiene a  $A$  y puesto que los cerrados (no vacios) en este espacio son los conjuntos que contienen a cero, se tiene que:

Para todo  $x \neq y$   $\{\bar{x}\} = 0$ , si  $x = 0$  y  $\{\bar{x}\} = \{x, 0\}$ , si  $x \neq 0$  de igual modo para  $\{\bar{y}\}$  entonces  $\{\bar{x}\} \cap \{\bar{y}\} = \{0\}$  por lo que el espacio es  $T_Y$ .

No es  $T_{YS}$  pues por ejemplos para  $x = 5$  y  $y = 1/3$  se tiene:

$$\{\bar{5}\} \cap \{\overline{1/3}\} = \{0\} \neq \emptyset \text{ y } 0 \neq 5 \text{ y } 0 \neq 1/3.$$

**Ejemplo 2.12.** Sean los conjuntos  $\{x, -x\}$  y  $\{x\}$ , con  $x > 0$ , como también sus uniones finitas, los cerrados.

Se deja como ejercicio para el lector mostrar que este espacio es  $T_Y$  pero no es  $T_{FF}$ .

**Ejemplo 2.13.** Sean los conjuntos  $C_a$  y  $D_a$  definidos respectivamente por  $x \geq a$  y  $x > a$ , los cerrados.

Veamos que este espacio es  $T_{UD}$  pero no es  $T_F$ .

Como los cerrados  $C_a$  son  $[a, \infty)$ , entonces los abiertos correspondientes son de la forma  $(-\infty, a)$ .

Como los cerrados  $D_a$  son  $(a, \infty)$ , entonces los abierto correspondientes son de la forma  $(-\infty, a]$ .

Para cualquier  $x \in X$  tenemos que  $\{x\}' = (x, \infty)$  el cual es el cerrado  $D_x$ . Luego por definición el espacio es  $T_{UD}$ .

Que el espacio no es  $T_F$  es claro ya que dado un  $x \in X$  y el conjunto finito  $F = \{x - 1, x + 1, x + 2\}$  tenemos que  $x \notin F$  y  $F \not\subseteq x$ .

**Ejemplo 2.14.** Sean solamente los conjuntos  $C_a$  del ejemplo anterior los cerrados.

Veamos que este espacio es  $T_0$  pero no es  $T_{UD}$ .

Como los abiertos correspondientes a los  $C_a$  son de la forma  $(-\infty, a)$ , entonces dados cualesquiera  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ , se tiene  $x < y \vee y < x$ . Si  $x < y$  existe el abierto  $O = (-\infty, \frac{x+y}{2})$  tal que  $(x \in O \wedge y \notin O)$  es decir el espacio es  $T_0$ , si  $y < x$  el razonamiento es análogo.

Que el espacio no es  $T_{UD}$  es claro ya que para cualquier  $x \in X$  tenemos que  $\{x\}' = (x, \infty)$  el cual no es cerrado, ni es unión de cerrados disjuntos.

**Ejemplo 2.15.** Sean  $A$  el conjunto de todos los reales que no son enteros. Sean los

conjuntos cerrados de el espacio todos los subconjuntos finitos de  $A$  y todos los conjuntos de la forma  $A \cup N$ , donde  $N$  es un conjunto finito de enteros.

Veamos que este espacio es  $T_F$  pero no es  $T_Y$ .

Como  $A = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  y los cerrados todos los  $F \subseteq A$ , con  $F$  finito y todos los  $A \cup N$  tal que  $N^{finito} \subseteq \mathbb{Z}$ .

Es  $T_F$  ya que dado cualquier  $x \in \mathbb{R}$  y cualquier  $F \subseteq \mathbb{R}$ ,  $F$  finito con  $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $x_i \neq x$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  tenemos:

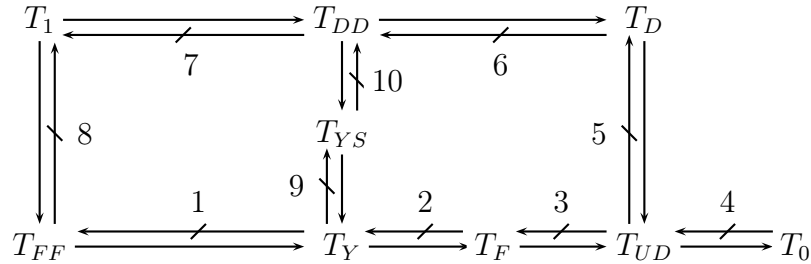
a) Si  $x \notin \mathbb{Z}$ , entonces  $\{x\}$  es cerrado y  $O = \mathbb{R} - \{x\}$  es abierto,  $F \subseteq O$  ( $x \notin F$ ) entonces  $F \vdash \{x\}$ .

b) Si  $x \in \mathbb{Z}$  entonces  $C = A \cup (F \cap \mathbb{Z})$  es un cerrado, donde  $N = (F \cap \mathbb{Z})$  tal que  $F \subseteq C$ . Sea  $O = \mathbb{R} - C$ ,  $O$  es abierto y  $x \in O = A^c \cap (F \cap \mathbb{Z})^c$  además  $F \cap O = \emptyset$  pues  $F \subseteq C = O^c$  entonces  $x \vdash F$ .

No es  $T_Y$  ya que  $\{\bar{x}\} = \{x\}$ , si  $x \notin \mathbb{Z}$  y  $\{\bar{x}\} = A \cup \{x\}$ , si  $x \in \mathbb{Z}$ .

Luego tenemos que  $\{\bar{5}\} \cap \{\bar{1}\} = (A \cup \{5\}) \cap (A \cup \{1\}) = A = \mathbb{R} - \mathbb{Z} \neq \emptyset$ , ni es un punto.

El siguiente grafico nos muestra que algunas implicaciones no se tienen.



1. Ejemplo 2.12

6. Ejemplo 2.6

2. Ejemplo 2.15

7. Ejemplo 2.5

3. Ejemplo 2.13

8. Ejemplo 2.9

4. Ejemplo 2.14

9. Ejemplo 2.11

5. Ejemplo 2.10

10. Ejemplo 2.10

# Conclusiones

1. Con este trabajo nos damos cuenta de dos hechos, en nuestra opinión relativamente sorprendentes:
  - a) Existen varios axiomas de separación prácticamente desconocidos intermedios entre los clásicos  $T_0$  y  $T_1$ . Surge entonces la pregunta si ocurre algo parecido entre los axiomas  $T_1$  y  $T_2$ ?, ¿y entre  $T_3$  y  $T_4$ ?
  - b) Existen una buena cantidad de caracterizaciones de dichos axiomas.
2. Entre los diferentes axiomas que se encuentran entre  $T_0$  y  $T_1$ , no hay uno que implique todos los demás.
3. El axioma de separación  $T_{UD}$  es el más débil de todos los axiomas entre  $T_0$  y  $T_1$ , en el sentido de que cualquiera de los otros axiomas lo implican.
4. Se estudiaron unas caracterizaciones interesantes de los espacios  $T_0$  y  $T_1$  que no son usuales encontrarlas en los libros clásicos de topología.

# Bibliografía

- [1] AULL C. E. & THRON W. J. “Separations axioms between  $T_0$  and  $T_1$ ”. *Indagationes Math.*, 24(1962), 26-37.
- [2] DONADO Alberto, SABOGAL Sonia, SUÁREZ Manuel. “La relación de aislamiento” VI Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones. *Memorias*. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1996.
- [3] MURDESHWAR Mangesh G. *General Topology*. University Alberta of Canada. Jhon Wiley & sons, New York, 1983.
- [4] THRON Wolfgang J. *Topological Structures*. University of Colorado. Holt, Rinehart and Winston. Boulder, Colorado, 1966.